Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Grado en Economía

El Dilema del Prisionero en la Teoría de Juegos

Presentado por:

Álvaro Tudela Serrano

Valladolid, 17 de julio de 2018

RESUMEN

En este trabajo vamos a profundizar en el dilema del prisionero. En primer lugar le vamos a contextualizar dentro de la Teoría de Juegos. Para ello hablaremos en qué consiste la Teoría de Juegos y cómo se pueden clasificar los juegos. A continuación formalizaremos el concepto de juego y veremos algunas de las soluciones de los mismos. A continuación hablaremos del dilema del prisionero y porqué se considera un dilema así como de la gran importancia que tiene en muchos ámbitos y de temas relacionados con el mismo como la cooperación entre los distintos agentes. Para finalizar veremos algunas de las aplicaciones que este tipo de juego tiene en distintos contextos económicos.

Palabras clave: Teoría de Juegos, Dilema del prisionero, equilibrio de Nash.

Código JEL: C72

ABSTRACT

In this work we will delve into the prisoner’s dilemma. First, we will contextualize it within the Game Theory. To do that we will talk about what the Game Theory consists and how games can be classified. Next we will formalize the game concept and we will see some solution. Next we will talk about the prisoner’s dilemma and why it is considered a dilemma, as well as the great importance it has in many areas and issues related to cooperation among the different agents. Finally we will see some of the applications that this type of games has in different economic contexts.

Keywords: Game Theory, prisoner’s dilemma, Nash equilibrium.

JEL code: C72.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS Y GRÁFICOS

1. INTRODUCCIÓN

La elección del tema se debe a la importancia que tiene el dilema del prisionero y sus distintas aplicaciones en el mundo de la economía. El dilema del prisionero es fundamental a la hora de entender o explicar distintos comportamientos económicos de los agentes a la hora de actuar en las decisiones económicas. Por lo tanto es un tema interesante de abordar para poder comprender mejor muchas decisiones que se dan en la economía y justificar las mismas.

El objetivo del trabajo es que profundicemos sobre la Teoría de Juegos y el dilema del prisionero mediante ejemplos aplicados que se pueden dar en la vida real para así comprender la importancia que tiene el tema tratado y sus aplicaciones en los distintos casos de la vida real.

El dilema del prisionero tiene mucho interés dentro de la Teoría de Juegos. Esto se debe a que explica muchos comportamientos de las personas y agentes económicos y las distintas estrategias que pueden seguir ante situaciones complejas que tienen ejemplos y aplicaciones en la vida cotidiana. Además es una representación relativamente sencilla de los distintos agentes económicos y de las distintas situaciones y estrategias que pueden realizar los jugadores. Esto permite que saquemos conclusiones sobre los comportamientos de los jugadores y sobre las estrategias posibles a seguir y aplicarlos a la toma de decisiones en la práctica.

En el trabajo vamos a analizar el dilema del prisionero y su importancia dentro de la Teoría de Juegos. Empezaremos explicando en qué consiste el dilema del prisionero y porqué hablamos de un dilema. También estudiaremos las posibles formas de solución que tiene haciendo especial hincapié en el equilibrio de Nash debido a su gran importancia como concepto de solución en Teoría de Juegos.

Analizaremos también el equilibrio de Nash en el dilema del prisionero y veremos qué ocurre con sus jugadores y el pago al que llegan en dicho equilibrio. Compararemos así mismo esta situación con otras posibles situaciones y veremos porque estas no pueden ser equilibrio del juego.

Por otra parte veremos las aplicaciones prácticas del dilema del prisionero como el duopolio de Cournot o Bertrand y distintos ejemplos prácticos como los problemas de contaminación, la imposición de aranceles entre distintos territorios o la guerra fría.

Finalizaremos con mis conclusiones personales acerca del tema propuesto en el trabajo y sobre la opinión personal del tema propuesto y del trabajo.

El trabajo termina con una recopilación de las distintas fuentes bibliográficas que se han utilizado en la elaboración del trabajo.

2. METODOLOGÍA

La metodología de este trabajo es la de la búsqueda de información veraz y relevante en distintas fuentes (libros, artículos, páginas web).

3. TEORÍA DE JUEGOS

3.1. ¿Qué es?

La Teoría de Juegos consiste en una parte de la economía que estudia las decisiones de un individuo pero teniendo en cuenta las decisiones tomadas por el resto de agentes que influyen en la decisión del primero. La Teoría de Juegos ha sido utilizada en ciencias como la estadística, la biología, los sistemas de votación o la psicología además de en la economía.

Si abordamos las decisiones de un individuo respecto a la Teoría de Juegos no debemos preguntarnos qué va a hacer, sino que va a realizar el individuo teniendo en cuenta lo que puedan hacer el resto de personas, ya que todos ellos van a actuar de forma interdependiente. La Teoría de Juegos ha sido utilizada desde sus orígenes para analizar la toma de decisiones en el ámbito empresarial, político, económico o incluso en diferentes juegos de azar como el póker.

Para representar gráficamente los juegos se utilizan matrices, lo que se llama en Teoría de Juegos representación en forma normal, o también mediante árboles de decisión, lo que se denomina representación en forma extensiva.

Vamos a introducir una breve historia de la Teoría de Juegos:

A pesar de que hubo autores que hicieron trabajos sobre esta disciplina con anterioridad, la primera referencia sobre Teoría de Juegos propiamente dicha la realiza James Waldegrave (1684-1741) cuando en 1713 proporciona un principio de estrategia mixta. Sin embargo hasta el estudio de Antoine Agustin Cournot (1801-1877) y su duopolio no se publica ciertas ideas sobre lo que hoy conocemos como Teoría de Juegos. En este duopolio se llega una solución que posteriormente coincidirá con el equilibrio de Nash expresada a través de un precio y una cantidad de equilibrio. Su trabajo se publicó en el libro "Recherches sur les principes mathémathiques de la théorie des richesses" en el año 1838.

Más adelante, el matemático John Von Neumann (1903-1957) fue el primero en formalizar la Teoría de Juegos propiamente dicha. Lo hace en una serie de artículos publicados en 1928 y más adelante ampliados en su libro "Theory of Games and Economic Behavior" escrito junto a Oscar Morgenstern (1902-1977).

En 1950 Albert W. Tucker (1905-1995) fue el primero en plantear formalmente discusiones sobre el dilema del prisionero. Ese mismo año John Forbes Nash (1928-2015) propone un concepto de solución para juegos de múltiples jugadores que se conoce como equilibrio de Nash.

En la década de los 50 la Teoría de Juegos experimenta un notable desarrollo con conceptos como base, juegos ficticios, juegos en forma extensiva, juegos repetidos o valor de Shapley. Reinhard Selten (1930-2016) en el año 1965 introdujo el concepto equilibrio de juego de mano temblorosa que posteriormente reafirmó el concepto de equilibrio de Nash. También dio su visión sobre la solución de los equilibrios perfectos en subjuegos. En 1967 John Harsanyi (1920-2000) desarrolló conceptos como los juegos bayesianos y los juegos de información completa.

En la década de los 70 la Teoría de Juegos se comenzó a usar en la biología con autores como John Maynard Smith (1920-2004).

En 1994 John Harsanyi, John Forbes Nash y Reinhard Selten reciben el premio Nobel de Economía “for their pioneering analysis of equilibria in the Theory of non-cooperative games”. [1]

En 2005 Thomas Crombie Schelling (1921-2016) e Israel Robert John Aumann (1930) son galardonados con el premio el premio Nobel de Economía “for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis”.[2]

En 2007 Roger Bruce Myerson(1951), Leonid Hurwicz (1917-2008) y Erick Stark Maskin (1950) reciben el premio Nobel de Economía “for having laid the foundations of mechanicsm design theory”.[3]

En 2012 Lloyd Stowell Shapley (1923-2016) y Alvin Eliot Roth (1951) reciben el premio Nobel de Economía “for the theory of stable allocations and the practice of market design”.[4]

3.2. ¿Cómo se define?

Antes de empezar a definir la Teoría de Juegos y sus distintos elementos es necesario tomar en cuenta un supuesto relevante. Trata de la consideración de que los individuos son racionales y se comportan como tal. Esto implica a su vez por lo tanto que tendrán preferencias a la hora de elegir unos resultados

sobre otros y que las acciones que seleccionen vendrán dirigidas a maximizar la satisfacción de preferencias.

[1] Nobel 1994 a Harsanyi, Nash y Selten “por su análisis pionero de los equilibrios en la teoría de los juegos no cooperativos”.

[2] Nobel 2005 a Aumann y Schelling “por haber mejorado nuestra comprensión del conflicto y la cooperación a través del análisis de la Teoría de Juegos”.

[3] Nobel 2007 a Hurwicz, Maskin y Myerson “por haber sentado las bases de la teoría del diseño de mecanismos”.

[4] Nobel 2012 a Roth y Shapley “por la teoría de asignaciones estables y la práctica del diseño de mercado”.

El elemento fundamental en la Teoría de Juegos es en concepto de juego. El juego se define como una situación en la que dos o más individuos, sometiéndose a unas reglas preestablecidas deben tomar una serie de decisiones que, si las consideramos de manera conjunta, conducen a un resultado. Los conceptos básicos para entender la Teoría de Juegos son los siguientes:

- Jugadores: son las personas que participan en el juego y toman las distintas decisiones con el objetivo de maximizar su utilidad.

- Acciones: son decisiones de cada jugador cuando le toca jugar.

- Información: nivel de conocimiento que tiene cada jugador sobre las distintas variables del juego.

- Estrategias: para cada jugador, determina el conjunto de acciones en los diferentes momentos del juego que le toque jugar.

- Perfil de estrategias: se define como el vector conjunto formado por las estrategias concretas de cada jugador.

- Resultados: se trata de los distintos modos en que puede finalizar el juego.

- Pagos: representa la distinta utilidad que cada jugador recibe como consecuencia de los resultados del juego.

- Equilibrio: perfil de estrategias que señala las mejores tácticas a seguir por los distintos jugadores, de acuerdo a una regla determinada.

Vamos ahora a describir brevemente distintos tipos de juegos y sus distintas formas de representación. Existen dos tipos de enfoques básicos que vamos a detallar a continuación:

- Juegos cooperativos: existe la posibilidad de que los jugadores lleguen a un acuerdo sobre las decisiones que van a tomar. Estos juegos se representan mediante la forma coalicional o de función característica.

- Juegos no cooperativos: cada jugador toma sus decisiones de manera independiente y sin posibilidad de llegar a acuerdos previos. Estos juegos se representan de forma normal o estratégica y de forma extensiva.

Respecto a la forma en que se realizan las jugadas los juegos pueden clasificarse como:

- Juego estático: los jugadores toman sus decisiones a la vez, por lo tanto los jugadores desconocen la jugada del resto. Este tipo de juegos se representan de forma normal y estratégica.

- Juego dinámico: unos jugadores juegan primero y otros a continuación. Este tipo de juegos se representa mediante la forma extensiva.

Respecto a la información que los jugadores disponen se pueden distinguir varios casos: relacionados con la información completa y perfecta. La información completa se refiere al conocimiento de los distintos jugadores de los distintos elementos del juego. Por su parte, la información perfecta se refiere a que todos los jugadores conocen lo que ha ocurrido en cada jugada. Atendiendo a estas dos características se pueden encontrar cuatro tipos de juegos:

- Juegos con información completa: los jugadores conocen todas las posibles consecuencias que tienen sus distintas jugadas.

- Juegos con información incompleta: basta con que algún jugador no conozca alguna consecuencia relativa a sus posibles jugadas.

- Juegos de información perfecta: se conoce el desarrollo del juego en cada instante por parte de todos los jugadores.

- Juegos de información imperfecta: si en algún momento cualquier jugador a la hora de tomar la decisión no sabe cómo ha transcurrido el juego con anterioridad.

3.3. ¿Cómo se formaliza?

Vamos a describir como se formalizan los juegos en forma normal que son los que más nos interesan en este caso para el tema que nos ocupa el trabajo. Los juegos en forma normal representan de forma natural los juegos estáticos (donde los jugadores realizan las jugadas al mismo tiempo). Son además juegos no cooperativos. Los juegos en forma normal tienen una serie de elementos:

- $N = \{1,2,\ldots,n\}$ donde n representa el número de jugadores.

- Cada jugador tiene un conjunto de estrategias que se denomina S_i, $i \in N$, donde i se refiere a cada uno de los distintos jugadores desde 1 hasta n.

- Una función de pagos para cada jugador que representa sus pagos sobre los distintos perfiles de estrategias.

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots\ldots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Teniendo en cuenta los elementos anteriores, la forma de representar un juego en forma normal es:

$G = (N;\ S_1,S_2,\ldots\ldots,S_n;\ u_1,u_2,\ldots\ldots,u_n)$ donde N es el número de jugadores, $S_1,S_2,\ldots\ldots,S_n$ los distintos conjuntos de estrategias, y $u_1,u_2,\ldots..u_n$ las distintas utilidades sobre los distintos perfiles de estrategias.

Vamos a describir ahora lo que es un juego matricial. Se trata de un juego de dos jugadores en forma normal donde S_1 y S_2, los conjuntos de estrategias, son finitos.

Si $S_1 = \{s_1,s_2,\ldots..,s_n\}$ y $S_2 = \{s'_1,s'_2,\ldots\ldots,s'_m\}$, estos juegos se pueden representar mediante la siguiente matriz de pagos genérica:

Tabla 3.1. Representación genérica de un juego en forma normal

	s'_1	**s'_2**	………	**s'_m**
s_1	a_{11},b_{11}	a_{12},b_{12}	……….	a_{1m},b_{1m}
: : :	: : :	: : :	: : :	: : :
s_n	a_{n1},b_{n1}	a_{n2},b_{n2}	………	a_{nm},b_{nm}

En la anterior matriz, $a_{nm} = u_1 (s_n, s'_m)$ y $b_{nm} = u_2 (s_n, s'_m)$, lo que significa que a_{nm} es el pago que le reporta al jugador 1 el perfil de estrategias (s_n,s'_m) de ambos jugadores y b_{nm} por su parte es el pago que le reporta al jugador 2 el perfil de estrategias (s_n,s'_m) de ambos jugadores.

Vamos a poner un ejemplo para poder ilustrar mejor este tipo de juegos.

Ejemplo:

Sara y Marina son dos amigas que quieren decidir a dónde van de vacaciones en verano este año. Ambas se plantean dos opciones: ir a Ibiza (I) o ir a Tenerife (T). Si ambas van a Ibiza Sara (J1) obtendría un pago de 8 y Marina (J2) de 4. Si por el contrario van a Tenerife Sara obtendría una cuarta parte de los pagos de ir a Ibiza y Marina el doble de si va a Ibiza. Ir solas no les proporciona ninguna satisfacción a ninguna de las dos.

La matriz de pagos de este juego sería la siguiente:

Tabla 3.2. La batalla de las vacaciones

J1 \ J2	**I**	**T**
I	8,4	0,0
T	0,0	2,8

3.4. Conceptos de solución

Vamos ahora a ver ahora algunos conceptos de solución para resolver los distintos juegos. Nos vamos a centrar en la Eliminación Iterativa Estricta (EIE), en la Eliminación Iterativa Débil (EID) y en el Equilibrio de Nash.

Vamos a ver en primer lugar a qué se llama solución de un juego. Se llama solución de un juego al conjunto de perfiles de estrategias que racionalmente deberían elegir los jugadores. Un concepto de solución es un procedimiento para obtener una solución con precisión y bien argumentada.

Vamos a definir una serie de notación:

- Perfil de estrategias:

$s = (s_1,\ldots\ldots,s_n) \in S_1 \times\ldots\times S_n$

- $S_{-i} = S_1 \times\ldots\times S_{i-1} \times S_{i+1} \times\ldots\times S_n$

- $s_{-i} \in S_{-i}$

- Si $s^* \in S_i$ y $s_{-i} \in S_{-i}$ entonces

$(s^*/s_{-i}) = (s_1,\ldots,s_{i-1},s^*,s_{i+1},\ldots,s_n)$

3.4.1. Soluciones mediante argumentos de dominación

- Se dice que una estrategia es dominante si domina al resto de estrategias

que tiene el jugador. Se dice que una estrategia es estrictamente dominante si esta estrategia domina estrictamente al resto de estrategias que tiene el jugador.

- Un perfil de estrategias forma un equilibrio en estrategias dominantes si está compuesto por estrategias dominantes. Un perfil de estrategias forma un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes si está compuesto por estrategias estrictamente dominantes.

Se pueden formalizar como sigue las afirmaciones que acabamos de hacer:

Dadas dos estrategias s'_i y s_i^*, se dice que s_i^* domina a s'_i si:

$u_i (s'_i/s_{-i}) \leq u_i (s_i^*/s_{-i}),\ \forall s_{-I} \in S_{-I}$ la utilidad que le proporciona la estrategia s'_i es igual o menor a la que le proporciona s_i^*, dadas las estrategias del resto.

Si $u_i (s'_i/s_{-i}) < (s_i^*/s_{-i})\ \forall s_{-I} \in S_{-I}$, es decir, que la utilidad que le proporciona al jugador i la estrategia s'_i es menor que la que le proporciona la estrategia s_i^*, entonces decimos que la estrategia s_i^* domina estrictamente a la estrategia s'_i. Con la desigualdad estricta se dice que s_i^* domina estrictamente a s'_i.

Hay que tener en cuenta que si un jugador tiene una estrategia que domina o domina estrictamente a otras, ya que le proporciona mejores pagos, el jugador llevará a cabo esa estrategia independientemente de lo que realicen el resto de jugadores. Vamos a ver ahora dos conceptos de solución que se basan en el argumento de dominación como son la Eliminación iterativa estricta (EIE) y la Eliminación iterativa débil (EID).

3.4.1.1. Eliminación iterativa estricta (EIE)

Son soluciones de un juego mediante eliminación iterativa estricta aquellos perfiles de estrategias que sobrevivan al siguiente proceso consistente en:

Etapa 1. Tenemos un juego inicial G y para cada jugador se van eliminando las estrategias estrictamente dominadas hasta que se llega a un juego reducido G_1.

Etapa 2. En el nuevo juego reducido G_1 se realiza el proceso de la etapa 1 hasta que ya no sea posible eliminar más estrategias.

Si nombramos S_i^s a los perfiles de estrategias supervivientes para el jugador *i*. Las soluciones del juego serán los siguientes perfiles de estrategias

$S_1^s \times S_2^s \times \ldots\ldots \times S_n^s$.

Si se trata de juegos finitos el proceso de EIE se realizará en una serie de pasos finitos y donde el proceso es independiente de la forma de realizar la eliminación.

Si tomamos como ejemplo el anterior:

Tabla 3.3. Resolución de la batalla de las vacaciones por EIE

J1 \ J2	**I**	**T**
I	8,4	0,0
T	0,0	2,8

En este caso vemos que no existe ninguna estrategia estrictamente dominada para ninguna de las dos jugadoras ya que en ninguna de las estrategias obtienen mayores pagos en comparación con la otra. Por lo tanto cualquier perfil de estrategias podría ser solución bajo el criterio de la EIE.

3.4.1.2. Eliminación iterativa débil (EID)

Este concepto de solución sigue el mismo proceso explicado antes con el de eliminación iterativa estricta (EIE) con la diferencia de que se eliminan las estrategias dominadas.

Siguiendo con el ejemplo tenemos:

Tabla 3.4. Resolución de la batalla de las vacaciones por EID

J1 \ J2	**I**	**T**
I	8,4	0,0
T	0,0	2,8

En este caso vemos que tampoco existe ninguna estrategia que domine a la otra débilmente para ninguna de las dos jugadoras ya que ninguna estrategia es mayor o igual en forma de pagos a la otra. Por lo tanto cualquier perfil de estrategias podría ser solución bajo el criterio de EID.

3.4.2. Equilibrio de Nash (EN)

En este concepto de solución cada jugador busca su mejor estrategia sabiendo el perfil de estrategias que van a seguir el resto de los jugadores. De esta forma ningún jugador tiene incentivos a cambiar su estrategia ya que no mejora su pago. La definición formal es la siguiente:

Un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash (EN) si y solo si:

$u_i (s_i^*/s_{-i}^*) \geq u_i (s_i /s_{-i}^*)$, $\forall s_i \in S_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Es decir que la utilidad de la estrategia s_i^* del jugador *i*, dadas las estrategias s_{-i}^* del resto, es mayor o igual que la que le da cualquier otra estrategia s_i, dada s_{-i}^*.

Si el perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash (EN), entonces este perfil de estrategias s* es una solución que, para cada jugador *i* ϵ *N*, resuelve el siguiente problema:

$$\max_{s_i \in S_i} \quad u_i\,(s_i\,/s^*_{-i}).$$

Esto quiere decir que el perfil de estrategias que es un equilibrio de Nash tiene que maximizar la utilidad de cada jugador cuando adopta esa estrategia, sabiendo el perfil de estrategias que va adoptar el resto de jugadores. Esto quiere decir también que s_i^* es la mejor respuesta que tiene el jugador *i* ante el perfil de estrategias s^*_{-i} que adopta el resto de jugadores.

Vamos a seguir con el ejemplo que estamos utilizando hasta ahora para poder ver los posibles equilibrios de Nash:

Tabla 3.5. Resolución de la batalla de las vacaciones por EN

J1 \ J2	**I**	**T**
I	8,4	0,0
T	0,0	2,8

u_{Marina} (I/Sara elige I) = 4 > u_{Marina} (T/Sara elige I) = 0 $\Rightarrow$ Marina elige I

u_{Marina} (I/Sara elige T) = 0 < u_{Marina} (T/Sara elige T) = 8 $\Rightarrow$ Marina elige T

u_{Sara} (I/Marina elige I) = 8 > u_{Sara} (T/Marina elige I) = 0 $\Rightarrow$ Sara elige I

u_{Sara} (I/Marina elige T) = 0 < u_{Sara} (T/Marina elige T) = 2 $\Rightarrow$ Sara elige T

Vemos que existen dos equilibrios de Nash (EN) en los perfiles de estrategias (I,I) y (T,T). Era de suponer ya que el enunciado del ejemplo nos dice que ninguna de las dos amigas quería ir sola y por lo tanto ninguna de ellas tiene incentivos para cambiar de estrategia ya que le reporta menos utilidad, es decir, menos pago. Cada uno de los equilibrios de Nash favorece a una de las dos jugadoras.

En cuanto a la relación entre los equilibrios de Nash (EN), la Eliminación iterativa estricta (EEI) y la eliminación iterativa débil (EID), se tiene:

Si *s** es un EN tiene que ser solución mediante EEI aunque no necesariamente tiene que ser solución mediante EID.

En nuestro ejemplo podemos ver que en este caso los dos equilibrios de Nash que existen son soluciones tanto si utilizamos el proceso EIE como si utilizamos EID.

4. EL DILEMA DEL PRISIONERO

El dilema del prisionero es uno de los juegos más importantes y utilizados de la Teoría de Juegos. Además de la importancia que este juego tiene en economía, también se utiliza en otras áreas disciplinas como el mundo de la empresa, la psicología o la biología.

El dilema del prisionero se empezó a desarrollar por los matemáticos Merrill Flood Meeks (1908-1991) y Melvin Dresher (1911-1992) que fueron los que plantearon las basas del dilema en 1950 estando en la corporación RAND. Esta corporación se trata de un laboratorio de investigación y desarrollo perteneciente al ejército de los Estados Unidos. A parir de estos trabajos realizados por estos autores, Albert William Tucker (1905-1995) desarrolló y formalizó el juego dándole el matiz penitenciario, y el nombre de dilema del prisionero por el cual se le conoce en la actualidad.

Este juego se trata de un juego bipersonal, ya que intervienen dos jugadores y biestratégico, ya que ambos jugadores pueden elegir entre solo dos estrategias. Si atendemos a la clasificación de los juegos que damos en el apartado 2.2 podemos decir que el dilema del prisionero es un juego no cooperativo, estático, de información completa e imperfecta.

4.1. Planteamiento

Vamos a plantear el enunciado del dilema:

Dos presos (P1 y P2) son arrestados por un delito menor. La policía tiene indicios del delito pero no pruebas concluyentes para poder encerrar a ninguno de los dos reos. Ambos presos están encerrados y son interrogados en salas distintas con lo cual no existe la posibilidad de que se puedan comunicar y uno sepa la decisión que va a tomar el otro, es decir, existe información imperfecta.

Ambos prisioneros van a ser tratados de la misma manera y conocen las consecuencias que tiene cada acción, es decir, tienen información completa.

Además saben que al otro prisionero se le ha ofrecido el mismo trato por lo tanto tiene conocimiento común de la información.

La policía les ofrece colaborar a ambos delatando a su compañero. Si colabora y confiesa el delito de su compañero, este preso sale en libertad y al otro preso le condenan a 10 años de cárcel. Si ambos presos confiesan serán condenados a 5 años cada uno. Por último si ninguno de los dos colabora y cooperan entre ellos serán condenados a 1 año de cárcel cada uno.

Por lo tanto pueden ocurrir tres posibilidades:

- Ninguno de los presos delata a su compañero: en este caso ambos presos son condenados a 1 año cada uno por lo tanto los pagos de los jugadores serian (-1,-1).

- Un preso confiesa y el otro no: en este caso el preso que confiesa sale libre y al otro le condenan a 10 años de cárcel. Por lo tanto los pagos serían (0,-10) si confiesa el primer preso y (-10,0) si lo hace el segundo.

- Ambos presos confiesan: en este último caso ambos presos serán condenados a 5 años de cárcel, por lo tanto los pagos serían (-5, -5).

Si atendemos al planteamiento, a primera vista la mejor decisión es delatar al otro preso ya que este saldría libre. Sin embargo, si ambos piensan así y los dos confiesan, ambos estarían 5 años en la cárcel. Existe sin embargo una situación más ventajosa para ambos que consistiría en cooperar entre si y no delatarse ya que la condena sería de solo 1 año para cada uno. Por lo tanto cuando el primer preso confiesa lo hace porque espera que su compañero no lo haga y así poder salir libre. En este caso, lo mismo piensa su compañero, pero al revés.

Si atendemos a la situación más ventajosa para ambos sería la de cooperar ya que ambos saldrían de la cárcel en sólo un año. Sin embargo, si el primer preso coopera y no le delata, ¿Quien le garantiza que su compañero no le va a delatar?, ¿Y en el caso del segundo preso?, ¿Que deberían hacer ambos?

De este modo se plantea este dilema que pasaremos a representar y a resolver en el siguiente apartado.

4.2. Bimatriz

Vamos a plantear ahora la matriz de pagos del dilema del prisionero. Atendiendo a lo descrito ambos jugadores tienen dos posibles estrategias:

$$P1 \begin{cases} \nearrow \text{Confesar} \\ \searrow \text{No confesar} \end{cases} \qquad P2 \begin{cases} \nearrow \text{Confesar} \\ \searrow \text{No confesar} \end{cases}$$

Teniendo esto en cuenta se forman cuatro posibles perfiles de estrategias con los que construiremos la bimatriz. Estos perfiles de estrategias son como hemos dicho en el anterior apartado (-1,-1); (0,-10); (-10,0); (-5,-5). La bimatriz del dilema del prisionero sería la siguiente:

Tabla 4.1. Matriz de pagos del dilema del prisionero

P1 \ P2	No confesar	Confesar
No confesar	-1,-1	-10,0
Confesar	0,-10	-5,-5

Vamos a resolver el dilema mediante el criterio de EIE:

Tabla 4.2. Resolución del dilema del prisionero por EIE

P1 \ P2	~~No confesar~~	Confesar
~~**No confesar**~~	~~-1,-1~~	~~-10,0~~
Confesar	~~0,-10~~	-5,-5

Vamos a fijarnos en las distintas estrategias que pueden seguir ambos prisioneros:

u_1 (No confesar, No confesar) = -1 $<$ u_1 (Confesar, No confesar) = 0

u_1 (No confesar, Confesar) = -10 $<$ u_1 (Confesar, Confesar) = -5

Vemos entonces que la estrategia de no confesar está descartada para el preso 1. Con lo cual eliminamos la estrategia No confesar para el prisionero 1.

u_2 (No confesar, No confesar) = -1 < u_2 (No confesar, Confesar) = 0

u_2 (Confesar, No confesar) = -10 < u_2 (Confesar, Confesar) = -5

Vemos por lo tanto que el prisionero 2 descarte igualmente la estrategia de no confesar. Eliminamos esta estrategia para el prisionero 2. Por lo tanto confesar el la mejor respuesta para ambos jugadores.

Por lo tanto tenemos una solución al dilema que sería el perfil de estrategias (confesar, confesar) con los pagos (-5,-5). Es decir los prisioneros no cooperarían y le condenarían a 5 años de cárcel a cada uno. Si tiene solución mediante el criterio de EIE lo va a tener mediante EID ya que este primer criterio es más estricto a la hora de buscar soluciones. Además esta solución será la misma.

Vamos a resolverlo ahora mediante el equilibrio de Nash:

Tabla 4.3. Resolución del dilema del prisionero por EN

P1 \ P2	No confesar	Confesar
No confesar	-1,-1	-10,<u>0</u>
Confesar	<u>0</u>,-10	<u>-5</u>,<u>-5</u>

Observamos las siguientes situaciones:

Sabiendo que P2 va a seguir la estrategia de No confesar P1 elegiría Confesar.

Sabiendo que P2 va a seguir la estrategia de Confesar P1 elegiría Confesar.

Sabiendo que P1 va a seguir la estrategia de No confesar P2 elegiría Confesar.

Sabiendo que P1 va a seguir la estrategia de Confesar P2 elegiría Confesar.

Vemos que llegamos a la misma solución que es (Confesar, Confesar). Si observamos la bimatriz de pagos vemos que ambos podrían mejorar su situación si ambos cooperaran y no confesaran obteniendo ambos menos años de cárcel. Sin embargo ninguno de los dos tiene incentivos a cambiar de estrategia, y pasar de confesar a no confesar, porque no se fía que su compañero vaya a hacer lo mismo. Además no se pueden comunicar entre ellos ni saber la decisión que ha tomado el otro. Este EN no sería optimo en sentido de Pareto[5] ya que ambos jugadores podrían mejorar su situación sin perjudicar la del otro. Sin embargo como ya hemos explicado ninguno de los dos tiene incentivos a hacerlo.

Vamos a realizar una generalización del dilema del prisionero para saber cuando un juego cualquiera se trata de un dilema del prisionero. Partimos de la siguiente bimatriz de pagos:

Tabla 4.4. Generalización del dilema del prisionero

J1 \ J2	Cooperar	No cooperar
Cooperar	R,R	P,T
No cooperar	T,P	C,C

Fuente: Delgado Franco, Juan Carlos (2007): Teoría de la decisión y de los juegos. Editorial Delta Publicaciones, Madrid

Donde R es la recompensa que obtienen ambos jugadores por haber tenido un comportamiento cooperativo, T es el pago de la tentación de no cooperar si el otro jugador sí lo hace, C es el pago del castigo al seguir los dos jugadores una estrategia no cooperativa y P es el pago del "pardillo", es decir, del jugador que coopera y es traicionado por el otro. Para que el juego sea un dilema del prisionero se tienen que cumplir dos condiciones:

- $P+T<2R$, es decir, que la suma de ambos pagos en una situación donde un jugador coopera y el otro no, tiene que ser menor que el pago que obtienen ambos jugadores, en conjunto, cooperando.

[5] El óptimo de Pareto se trata de un concepto que definió el economista, político y sociólogo Vilfredo Pareto (1848-1923) que consiste en aquel punto de equilibrio en el cual ninguno de los agentes económicos implicados puede mejorar su situación sin que se reduzca el bienestar ni cualquier otro agente se vea perjudicado.

- T>R>C>P, es decir, que la tentación de no cooperar es mayor que la recompensa de hacerlo. Esta a su vez es mayor que el castigo de no cooperar y mayor que el pago de ser el jugador que no coopera. Por eso en este juego existe tanta tentación de no cooperar, ya que es la que mayor valor tiene. Además cuando un jugador coopera y el otro no, el que coopera recibe el pago más bajo de todos.

5. EJEMPLOS DEL DILEMA DEL PRISIONERO

Ya dijimos al principio del trabajo que la Teoría de Juegos cuenta con muchas aplicaciones en diferentes ámbitos y disciplinas. El dilema del prisionero como uno de los juegos más importantes y emblemáticos no podría ser de otra manera. A continuación vamos a ver algunos de los ejemplos en los que el juego tipo dilema del prisionero es utilizado en diferentes disciplinas. Estos ejemplos son los modelos microeconómicos como el duopolio de Cournot y el duopolio de Bertrand, los aranceles en el comercio internacional, los problemas de contaminación y la Guerra Fría.

5.1. Duopolio de Cournot y duopolio de Bertrand

Una de las aplicaciones más importantes del dilema del prisionero en economía, y más concretamente en microeconomía, serían el modelo de Cournot y el modelo de Bertrand. Se trata de dos duopolios, es decir, dos oligopolios formados por dos empresas en las que estas tienen que decidir si cooperan o no fijando las cantidades (modelo de Cournot) o los precios (modelo de Bertrand).

5.1.1. Duopolio de Cournot

El modelo de Cournot es un modelo de decisiones simultáneas, es decir se trata de un juego estático, con información completa donde las dos empresas que participan en el mercado deciden sobre la cantidad que van a producir. El modelo lo expuso Antoine Agustin Cournot (1801-1877) en su obra “Recherches sur les principes mathémathiques de la théorie des richesses” publicado en 1838. Se trataba de una primera aproximación al análisis de los oligopolios mediante un duopolio ya que hasta entonces sólo se habían estudiado la competencia perfecta y el monopolio.

Este modelo cumple una serie de supuestos:

- Las empresas ofrecen un producto homogéneo en el mercado.

- Ambas empresas no tienen costes fijos y sus beneficios dependerán de las cantidades producidas por ambas empresas. La función de costes es $CT_i = c \times q_i$, donde q_1 y q_2 son las cantidades producidas por las empresas 1 y 2, respectivamente.

- El equilibrio del mercado vendrá dado por el concepto de equilibrio Nash-Cournot.

El modelo también cumple una serie de hipótesis:

- La variable de decisión del modelo es la cantidad producida. Cuando una empresa va a determinar este nivel considera fijo la cantidad producida por la otra empresa y por lo tanto cada una ofrecerá su mejor respuesta.

- El precio del mercado resulta de la interacción de la oferta agregada de las empresas y de la demanda del producto en el mercado.

- Las empresas deciden qué cantidad producir de forma simultánea.

- Existen barreras de entrada al mercado.

Vamos a desarrollar el modelo y calcular cual el equilibrio de Nash-Cournot. Para ellos partimos de las siguientes relaciones:

La función del precio es $P(Q) = a-b(Q)$

La cantidad total es la suma de las dos empresas por lo tanto $Q = q_1+q_2$

La función de costes totales $CT_i = c \times q_i$. Por lo tanto si derivamos para conseguir los costes marginales vemos que son constantes, e iguales a "c", y no dependen de q_i.

El beneficio se calcula mediante la diferencia de ingresos menos costes. Los ingresos a su vez son precio por la cantidad producida. Por lo tanto la función de beneficios seria $\pi (Q) = (p-c)Q$

La empresa 1 debería resolver el problema de optimización:

Max $\pi_1 (q_{1,}q_2)$ = $(p-c)q_1 = (a-b(q_1+q_2)-c)q_1$,siendo q_2 un dato para la empresa 1

q_1

Resolvemos el problema:

CPO: $\frac{\delta\pi 1}{\delta q1} = 0 \Leftrightarrow a-bq_1-bq_2-c-bq_1 = 0 \Leftrightarrow 2bq_1 = a-bq_2-c$

$\Leftrightarrow \boxed{q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q2}{2}}$ Este resultado es la función de reacción de la empresa 1, es decir, la cantidad optima a producir por la empresa 1 dada la cantidad (q_2) de la empresa 2.

Realizando los mismos cálculos para la empresa 2, se tiene el sistema de ecuaciones lineales con dos variables:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q2}{2} \\ q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q1}{2} \end{cases}$$

Cuya solución (equilibrio) es:

$$q_1^* = q_2^* = q^* \Rightarrow q^* = \frac{a-c}{2b} - \frac{q*}{2} \Leftrightarrow \boxed{q^* = \frac{a-c}{3b}} = q_1^N = q_2^N$$

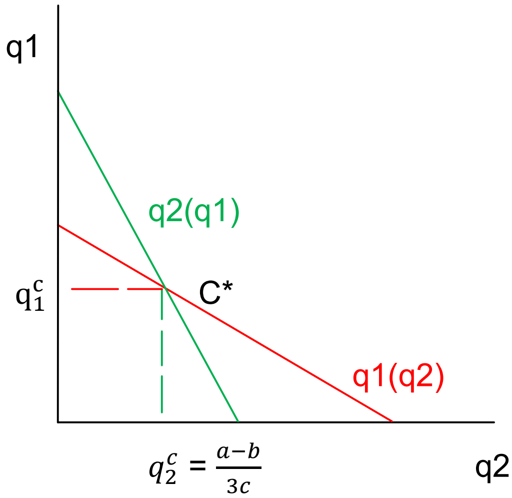
Este es el equilibrio de Nash-Cournot.

La cantidad y precio del mercado son en el equilibrio:

$Q^N = q_1^N + q_2^N = \frac{2}{3}(\frac{a-b}{c})$ $P^N = a-bQ^N = a-(\frac{2}{3})(a-c) = \frac{a+2c}{3}$

Vamos a hacer la representación del modelo:

Gráfico 5.1. Representación del modelo de Cournot



En este modelo, ambas empresas buscan maximizar el beneficio y eso se realiza mediante una mayor cuota de mercado para cada empresa e incrementando los precios. Cournot para esto define el precio optimo que será el mismo para las dos empresas ya que sino la empresa con el precio más bajo se haría con el mercado. Esto hace de este punto un equilibrio de Nash que en este modelo recibe el nombre de equilibrio de Nash-Cournot.

Respecto a la eficiencia en sentido de Pareto y la optimalidad social del modelo, podemos decir que este modelo y su equilibrio no es eficiente en el sentido de Pareto ya que los resultados son inferiores a los que le logran en la competencia perfecta. Por lo tanto, tampoco este equilibrio es socialmente óptimo.

Si generalizamos el modelo y vamos metiendo a más empresas el equilibrio del modelo se acerará progresivamente al de competencia perfecta porque el número de empresas aumentará y lo hará la concentración del mercado.

5.1.2. Duopolio de Bertrand

Este modelo fue desarrollado por Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) en 1883. Se basa en que las empresas del duopolio fijan precios y no cantidades.

Los supuestos que sigue el modelo son los mismos que el de Cournot pero eligiendo precios y no cantidades:

- Operan dos empresas en el mercado.

- Las empresas eligen los precios simultaneamente, p_1 y p_2, respectivamente.

- El producto de ambas empresas es homogéneo, lo que quiere decir que el consumidor comprará a la empresa que produzca a un menor precio.

- Coste marginal constante, = c, para ambas empresas.

- Las empresas no tienen restricciones de capacidad y satisfacen toda la demanda.

La demanda a la que se enfrenta la empresa i viene dada por la siguiente función:

$$D_i\,(p_i,p_j) = \begin{cases} D(p_i) & \text{si } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}D(p_i) & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j \end{cases}$$

El objetivo en este modelo es encontrar las nuevas funciones de reacción (cuando la variable es el precio) y el nuevo equilibrio de Nash.

El equilibrio de Nash estará formado por un vector de precios $(p_i^*, \, p_j^*)$ en el que se cumple:

$\pi^i\,(p_i^*,p_j^*) \geq \pi^i\,(p_i,p_j^*)\ \ \forall\, p_i \qquad \pi^j\,(p_i^*,p_j^*) \geq \pi^j\,(p_i^*,p_j)\ \ \forall\, p_j$

En este modelo existe la paradoja de Bertrand que dice el único punto de equilibrio es donde se cumple que p_i^* = p_j^*= c y por lo tanto que π^{i*} = π^{j*} = 0, es decir, que los beneficios en el equilibrio son nulos.

Podemos demostrar que si esta condición no se cumple entonces no existiría punto de equilibrio alguno o alguna de las dos empresas no tendría demanda. Vamos a comprobar que es un equilibrio.

π_1= 0 $\quad \pi_2$= 0

Si la empresa 1 $\downarrow p_1 \Rightarrow \pi_1 = (p_1^*\text{-}\varepsilon\text{-c})D(p_1^*\text{-}\varepsilon) = \text{-}\varepsilon D(p_1^*\text{-}\varepsilon) < 0$, luego la empresa no tiene incentivos a $\downarrow p_1$

Si la empresa 1 $\uparrow p_1 \Rightarrow \pi_1 = (p_1^*+\varepsilon\text{-c})\times 0 = 0$, la empresa tampoco tiene incentivos para incrementar el precio ($\uparrow p_1$).

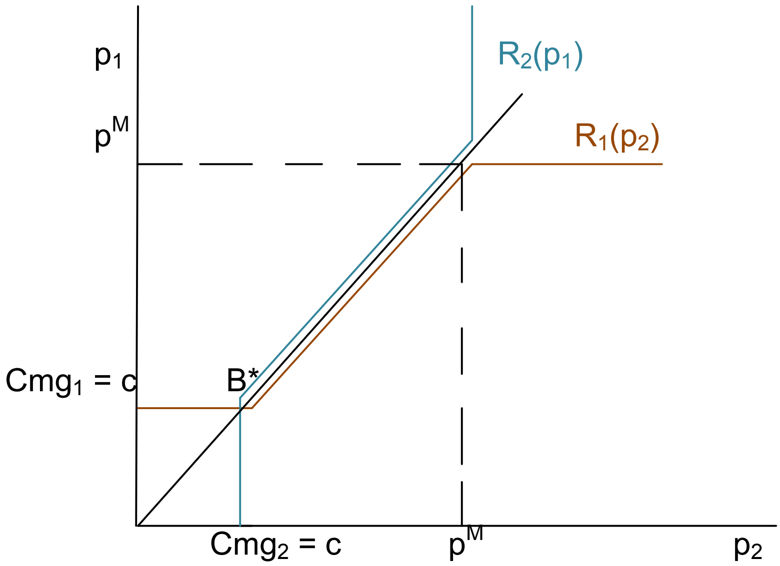
Por lo tanto tenemos que p_1^* es la mejor respuesta a p_2^*. Esto también ocurre con la empresa 2.

Las funciones de reacción de las empresas son:

$$R_1(p_2) \begin{cases} p^M & \text{si } p_2 > p^M \\ p_2\text{-}\varepsilon & \text{si } c < p_2 \leq p^M \\ c & \text{si } p_2 \leq c \end{cases} \qquad R_2(p_1) \begin{cases} p^M & \text{si } p_1 > p^M \\ p_1\text{-}\varepsilon & \text{si } c < p \\ c & \text{si } p_1 \leq c \end{cases}$$

Vamos a representarlo gráficamente el modelo mediante las dos funciones de reacción de las empresas:

Gráfico 5.2. Representación del modelo de Bertrand



El equilibrio es único y se da donde se cortan las funciones de reacción (p_1^* = c, p_2^* = c) y la demanda se reparte entre ambas empresas D_1^* = D_2^* = D/2. La paradoja de Bertrand es que en un mercado de competencia imperfecta como es un oligopolio se dan los mismos resultados que en competencia perfecta (p = Cmg y π = 0).

5.2. Aranceles en el comercio internacional

En el comercio y la economía internacional siempre ha estado presente por parte de los distintos países la imposición o no de aranceles a los productos procedentes de otros países[6]. Si hacemos caso a los autores clásicos y a la corriente neoclásica y neoliberal de los autores actuales, el establecimiento de estos aranceles es ineficiente económicamente ya que el país exportador se verá obligado a reducir la producción de ese bien mientras el país que establece el arancel no va a producir más en principio de ese bien al que se quiere proteger.

Esta problemática de los aranceles se puede estudiar mediante un dilema del prisionero en cual dos países, el país E y el país I, tienen que tomar decisiones simultáneamente a la hora de si establece o no aranceles en el comercio entre ambos países. Si ambos países practican el libre comercio tendrán unos beneficios de 2.000 millones de u.m. cada uno. Si un país practica el libre comercio y el otro establece un arancel, el que lo establece tendrá un beneficio de 3.000 millones de u.m. y el otro de 650 millones de u.m. Si ambos deciden establecer aranceles tendrán unos beneficios de 1.000 u.m. Este dilema del prisionero se puede expresar mediante la siguiente matriz de pagos:

Tabla 5.1. El dilema del prisionero en los aranceles del comercio internacional

País E \ País I	Libre comercio	Aranceles
Libre comercio	2.000,2.000	650,3.000
Aranceles	3.000,650	1.000,1.000

Por lo tanto tenemos un equilibrio de Nash en (Aranceles, Aranceles). Vemos por lo tanto que el equilibrio de Nash alcanzado no es óptimo desde el punto de vista de Pareto ya que ambos países podrían mejorar sin perjudicar al otro si eligieran la estrategia libre comercio con unos pagos mayores. Ambos países no lo hacen porque no se fían de que si ellos eligen la estrategia de libre

[6] Este debate con los aranceles sigue estando presente con las últimas decisiones de imponer aranceles a algunos productos europeos por parte de Estados Unidos y la respuesta de los países europeos de hacerlo con determinados productos estadounidenses.

comercio el otro país no les ponga aranceles a sus productos. Como vemos es un ejemplo claro de dilema del prisionero.

5.3. Problemas de contaminación

En la actualidad existe una creciente preocupación por el futuro del planeta por parte de las personas y de las autoridades. Por ello, cada vez existe una mayor restricción a la contaminación (prohibición de determinados vehículos en el centro de las ciudades, detrimento de fuentes de energía contaminantes como el carbón,…...). Este problema de la contaminación se puede estudiar mediante un dilema del prisionero debido a que los agentes implicados tienen la posibilidad de elegir entre dos opciones estratégicas: reducir la contaminación o seguir contaminando.

Dos países, el país 1 y el país 2, son pequeños y tiene frontera entre ambos. Estos países se contaminan mutuamente. Ambos países pueden elegir entre reducir su contaminación y seguir contaminando. Lo que hagan ambos afecta al otro debido a su cercanía. El coste que tiene reducir la contaminación es de 8 u.m. y el beneficio de reducirla si ambos lo hacen el de 12 u.m. para cada uno. Si un país decide contaminar y el otro no ambos reciben un beneficio de 6 u.m. por lo que reduce el segundo. Si ambos siguen contaminando no existe ningún efecto para ellos. La matriz de este dilema del prisionero sería:

Tabla 5.2. La contaminación como dilema del prisionero

País 1 \ País 2	**Reducir**	**Contaminar**
Reducir	4,4	-2,6
Contaminar	6,-2	0,0

Vemos que existe un equilibrio de Nash en (Contaminar, Contaminar). Vemos sin embargo que para ambos países y para la sociedad sería mejor que ambos países cooperaran y redujeran la contaminaran. Sin embargo este perfil de estrategias no es equilibrio porque los países tienen incentivos a contaminar, ya que el coste de reducir la contaminación, como invertir en energías alternativas y cambiar el modelo productivo, es alto. Además existe incertidumbre en la decisión que va a tomar el otro país por lo que parece no haber incentivos a la cooperación.

Vamos a suponer ahora que las autoridades internacionales van a establecer una multa de 3 u.m. a los países que no reduzcan su contaminación. En esta situación la matriz de pagos quedaría:

Tabla 5.3. Multa por contaminación

País 1 \ País 2	Reducir	Contaminar
Reducir	4,4	-2,3
Contaminar	3,-2	-3,-3

En esta situación vemos que tras la imposición de la multa por contaminación cambia el equilibrio de Nash que ahora es el perfil de estrategias (Reducir, Reducir). Esto se debe a que la imposición de dicha multa ha reducido los incentivos que ambos países tenían por seguir contaminando en la situación anterior.

5.4. La guerra fría

La guerra fría fue un periodo histórico en el cual las dos potencias mundiales más importantes del momento, EE.UU. y la URSS, mantuvieron una escalada de tensión militar y armamentística creciente, aunque nunca llegaron a declararse la guerra oficialmente entre ellas. También compitieron a nivel científico o deportivo para demostrar quién era la mayor potencia del momento. Ambas potencias representaban los paradigmas del capitalismo y el comunismo. Este periodo se extiende desde poco después de acabar la II Guerra Mundial en 1947 hasta la desaparición del régimen comunista de la URSS en 1991. Durante este periodo ambas potencias iniciaron una gran carrera armamentística para poder demostrar la supremacía de la una frente a la otra en un hipotético conflicto. Ambas potencias solo podían elegir entre dos estrategias distintas: seguir incrementando el gasto militar o firmar un acuerdo para reducir el arsenal de armamento. Si ambas potencias firman el acuerdo tienen unos pagos de 20 u.m. Si una potencia incrementa el gasto y otra firma el acuerdo, la que firma tiene unos pagos de 8 u.m. y la otra de 25 u.m. Si ambas potencian incrementan el gasto obtienen unos pagos de 12 u.m. Este dilema del prisionero se puede representar mediante un dilema del prisionero como el siguiente:

Tabla 5.4. La guerra fría como dilema del prisionero

EE.UU. \ URSS	Firmar un acuerdo	Incrementar gasto
Firmar un acuerdo	20,20	8,25
Incrementar gasto	25,8	12,12

Tenemos por la tanto un equilibrio en (Incrementar gasto, incrementar gasto). Como ya hemos visto en los otros ejemplos ambos países estarían mejor firmando un acuerdo y aliviando tensiones. Pero esta estrategia no la va a seguir ninguno de los países debido al recelo mutuo existente que les dificulta tomar dicha decisión.

6. CONCLUSIONES

La realización de este trabajo me ha servido para tomar conciencia de la importancia que tiene el dilema del prisionero en múltiples aspectos. Por un lado es uno de los juegos más famosos, importantes y estudiados en la teoría de juegos. Este dilema tiene una construcción sencilla con dos actores y dos posibles estrategias a seguir. Sin embargo con él se llega a un resultado que es fundamental. A los agentes se les pone en la de tesitura de poder cooperar entre ellos o no hacerlo. Sabiendo ambos que si cooperan se beneficiarán y su utilidad aumentará no lo hacen sin embargo y ambos agentes deciden no cooperar. Este equilibrio es por tanto ineficiente. Sin embargo esto tiene relación con los comportamientos que los agentes tienen en la sociedad. Los agentes ante tener que decidir de manera simultánea el mismo conflicto piensan que el otro componente va a tomar una decisión egoísta y por lo tanto le castigan tomando ellos la misma decisión. Vemos por lo tanto que en este tipo de juego prima el comportamiento racional de los agentes que sin embargo lleva a un resultado ineficiente.

Por último me he dado cuenta de que este tipo de dilema es aplicable a muchísimos ejemplos en ámbitos y disciplinas muy distintas entre sí en la vida real como aranceles entre países, problemas medioambientales de contaminación, estrategia militar e historia o decisiones de las empresas.

En definitiva el dilema del prisionero es una de tantas esas cosas que utilizamos habitualmente y ni siquiera somos conscientes de ello. A mí este trabajo me ha ayudado a tomar conciencia del tema y de su gran utilidad.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Cournot, A. A. (1838): Recherches sur les principes mathémathiques de la théorie des richesses.

- Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944): Theory of Games and economic behavior. Editorial Princeton University Press, Estados Unidos.

- Delgado Franco, J. C. (2007): Teoría de la decisión y de los juegos. Editorial Delta Publicaciones, Madrid.

- Pérez, J.; Jimeno, J. L. y Cerdá, E. (2013): Teoría de Juegos 2ª edición. Garceta Grupo Editorial, Madrid.

-Wikipedia (2018): Teoría de Juegos. Disponible en

https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_juegos [consulta: 22/02/2018].

- El Blog Salmón (2011): ¿Qué es la Teoría de Juegos? Disponible en

https://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-es-la-teoria-de-juegos [consulta: 26/02/2018].

- Nobel Prize (2018): 1994 Laureates in Economic Sciences. Disponible en

https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1994/ [consulta: 04/03/2018].

- Nobel Prize (2018): 2005 Laureates in Economic Sciences. Disponible en

https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2005/ [consulta: 04/03/2018].

- Nobel Prize (2018): 2007 Laureates in Economic Sciences. Disponible en

https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2007/ [consulta: 04/03/2018].

- Nobel Prize (2018): 2012 Laureates in Economic Sciences. Disponible en

https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2012/ [consulta: 04/03/2018].

- La Mente es Maravillosa (2017): ¿Qué harías tú en el dilema del prisionero? Disponible en

https://lamenteesmaravillosa.com/el-dilema-del-prisionero/ [18/04/2018].

- Policonomics (2017): Dilema del Prisionero. Disponible en

http://policonomics.com/es/dilema-prisionero/ [22/04/2018].

- Wikipedia (2018): Dilema del Prisionero. Disponible en

https://es.wikipedia.org/wiki/Dilema_del_prisionero [27/04/2018].

- Policonomics (2017): Duopolio de Cournot. Disponible en

http://policonomics.com/es/duopolio-cournot/ [06/05/2018].

- Vela Meléndez, L. (2012): Modelos de Oligopolio, Universidad de Alicante, Alicante. Disponible en

https://web.ua.es/es/giecryal/documentos/modelos-oligopolio.pdf [12/05/2018].

- Policonomics (2017): Dupolio de Bertrand. Disponible en

http://policonomics.com/es/duopolio-bertrand/ [19/05/2018].

- El Trastero de Palacio (2014): El Dilema del Prisionero y algunas aplicaciones. Disponible en

https://eltrasterodepalacio.wordpress.com/2014/06/23/el-dilema-del-prisionero-y-algunas-aplicaciones/ [28/05/2018].

- Bernardos, G. (1995): Pasado, presente y futuro: el GATT, las áreas de libre comercio y ¿la Organización Mundial del Comercio?, Fundación Cidob, Barcelona. Disponible en

https://www.raco.cat/index.php/revistacidob/article/viewFile/27965/27799 [Consulta: 07/06/2018].

- Cerdá, E. (2013): 2ª Conferencia Emilio Cerdá Tena (Equilibrio de Nash). Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=-URaorKB-bA