Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

El rango de una función holomorfa: teoremas de Bloch, Schottky y Picard

Alumna: Lara Mª Esteban Ortega

Tutor: Javier Sanz Gil

D. JAVIER SANZ GIL, Profesor Titular de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo, "El rango de una función holomorfa: teoremas de Bloch, Schottky y Picard", ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, por Dña. Lara María Esteban Ortega, y constituye su Trabajo Fin de Grado para optar al título de Graduada en Matemáticas.

Que le consta que el trabajo es original e inédito, y que autoriza su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a tres de julio de dos mil trece.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Índice general

Introducción

En la teoría elemental de funciones de variable compleja, cubierta en la asignatura obligatoria "Variable Compleja" del tercer curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Valladolid, se presenta un teorema de gran importancia, el de la aplicación abierta, que afirma que toda función no constante y holomorfa en un abierto conexo del plano complejo es abierta, es decir, transforma abiertos en abiertos. El objetivo fundamental de este trabajo es presentar diversas profundizaciones en la información proporcionada por este resultado, cuyos contenidos no forman parte habitualmente de la teoría básica desarrollada en las asignaturas introductorias de esta materia.

Cabe mencionar que el orden en que se desarrollarán los distintos resultados no obedece en modo alguno a razones cronológicas, sino más bien al objetivo de una mayor economía en el espacio y tiempo necesarios para su presentación. Así, aunque el primer resultado que presentaremos será el teorema de Bloch, obtenido por dicho autor en el año 1924, en realidad muchos de los resultados que aquí obtendremos como consecuencias de éste fueron en realidad sus predecesores. Sin embargo, la teoría que nos ocupa dio un giro sorprendente a raíz de que Bloch descubriera su teorema, y en las presentaciones modernas de estos resultados es habitual tomarlo como punto de partida.

Dicho teorema aporta información acerca del radio mínimo de un disco contenido en la imagen de una función holomorfa en un abierto que contiene al disco cerrado unidad; más precisamente:

Si f es una función holomorfa en un abierto que contiene a la bola $\overline{B}(0,1)$ y $f'(0)=1$, entonces el dominio $f\big(B(0,1)\big)$ contiene una bola de radio $3/2-\sqrt{2}>1/12$.

Lo interesante de este teorema es que se hace una afirmación universal sobre el tamaño de los dominios imagen para toda una familia de funciones. La única hipótesis que impone el teorema de Bloch es que $f'(0)$ sea 1, lo que garantiza que f no es constante y por lo tanto $f\big(B(0,1)\big)$ es abierto. Obsérvese que, de cara a la obtención de un resultado de esta índole, es natural normalizar el valor de la derivada en 0, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo: para la familia de funciones $f_n(z) = z/n$, con n natural, se tiene que $f_n'(0) = 1/n$ y $f_n(B(0,1)) = B(0,1/n)$, de modo que el conjunto imagen se hace cada vez "más pequeño" a medida que aumenta n. Si bien A. Bloch probó este resultado, posteriormente G. Valiron y E. Landau simplificaron considerablemente la demostración. Aún así, la prueba dada en este trabajo es más natural que la dada por Landau y fue escrita en 1971 por T. Estermann, quien además obtuvo el valor comentado del radio, $3/2 - \sqrt{2} > 1/12$, que es mejor que el dado inicialmente por Landau, $1/16$. Como se verá, esta demostración proporciona un centro para la bola de radio afirmado, pero dicho centro depende de la función f concreta que se considere. Si se definen las funciones $g_n(z) = (\exp^{nz} - 1)/n$, para cada natural n, es obvio que g_n omite el valor $-1/n$, de modo que el punto $g_n(0)$ no es en general el centro de esa bola.

En 1929, Landau obtiene una versión mejorada del teorema de Bloch introduciendo en la demostración la función auxiliar $|f'(z)|(1 - |z|^2)$, por medio de la cual consigue mejorar el valor del radio, afirmando que $f(B(0,1))$ contiene una bola de radio $3\sqrt{2}/2 - 2 > \sqrt{2}/12$.

Una versión más sutil del teorema de Bloch es el teorema de Ahlfors:

Si $f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$ *y* $N = \text{máx}_{|z|\leq 1} |f'(z)|(1-|z|^2) > 0$, *entonces* $f(\overline{B}(0,1))$ *contiene una bola simple (es decir, imagen de un dominio en el que* f *es inyectiva) de radio* $\frac{\sqrt{3}}{4}N$.

Este teorema hace que el teorema de Bloch parezca débil. Ahora no sólo tenemos bolas simples en lugar de bolas, sino que además, si se admite que $f'(0) = 1$, se deduce que el conjunto imagen contiene una bola de radio $\sqrt{3}/4 \simeq 0{,}433$, más que el triple de la cota antigua $3\sqrt{2}/2 - 2 \simeq 0{,}121$.

Tanto el teorema de Bloch como el de Ahlfors nos llevan a introducir de forma natural dos constantes cuyos valores son desconocidos a día de hoy. Si se considera la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1)) \ / \ f'(0) = 1 \right\},$$

para cada función $f \in \mathcal{F}$ se pueden introducir los valores

$$\lambda(f) = \sup \{ r > 0 : f(B(0,1)) \text{ contiene una bola de radio } r \}$$

y

$$\beta(f) = \sup \{ r > 0 : f(B(0,1)) \text{ contiene una bola simple de radio } r \},$$

y definir entonces la *constante de Landau* como

$$L = \text{ínf}\,\{\lambda(f) : f \in \mathcal{F}\}\,,$$

y la *constante de Bloch* como

$$B = \text{ínf}\,\{\beta(f) : f \in \mathcal{F}\}\,.$$

Se indicará para concluir el primer capítulo la información de la que se dispone actualmente acerca de sus valores respectivos.

En el segundo capítulo estudiaremos diversos resultados relativos al rango de las funciones enteras. Sabemos, por el Teorema Fundamental del Álgebra, que los polinomios no constantes asumen todos los números complejos como valor. A diferencia de esto, las funciones enteras no constantes pueden omitir valores, como muestra la función exponencial, que nunca se anula. Surge la pregunta de qué tipo de conjuntos pueden ser excluidos del rango de una función entra no constante. Alguna información al respecto se ha obtenido en la teoría elemental de funciones de variable compleja: como consecuencia del teorema de Casorati-Weierstrass, podemos afirmar que si f es una función entera trascendente, es decir, con una singularidad esencial en el punto del infinito, entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$. Pues bien, en el segundo capítulo vamos a probar el siguiente aserto:

Toda función entera no constante omite a lo sumo un valor complejo.

Este asombroso resultado se conoce como el Teorema Pequeño de Picard. La demostración que presentamos, muy diferente de la original de E. Picard en 1879 (que se basa en la construcción de la denominada función elíptica modular), se ayuda tanto del teorema de Bloch como del siguiente teorema:

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y sea f una función holomorfa en Ω que omite los valores 0 y 1. Entonces existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z) = \big[1 + \cos\pi(\cos\pi g(z))\big]/2$.

En 1896, E. Borel fue capaz de obtener una demostración elemental del Teorema Pequeño de Picard; más tarde, Landau lo consiguió utilizando la expresión $f = -\exp[\pi i \cosh(2g)]$ para una función f en las condiciones del teorema previo. La presentación del coseno reiterado, más sencilla y natural, fue dada en 1957 por Konig. Terminaremos este capítulo con algunas consecuencias sorprendentes de este resultado.

En el tercer capítulo comenzaremos obteniendo el teorema de Schottky, que data de 1904 y nos permitirá dar una cota uniforme en cada compacto de

$B(0,1)$ para la familia de las funciones holomorfas en un abierto que contiene a $\overline{B}(0,1)$ y tales que omiten los valores 0 y 1. Este teorema permite a Landau obtener una versión mejorada del Teorema Pequeño de Picard:

Existe una función positiva $R(a)$, definida en $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, para la cual no existe ninguna función $f \in \mathcal{H}\big(\overline{B}(0,R(a))\big)$ con $f(0) = a$ y $f'(0) = 1$ de manera que f omita los valores 0 y 1.

A pesar de que no es la prueba que proporcionamos en este trabajo, cabe destacar que este teorema puede probarse fácilmente gracias al empleo de la función modular, en términos de la cual puede darse una expresión explícita de la función $R(a)$. Con la ayuda del teorema de Schottky, presentaremos a continuación versiones mejoradas de los teoremas clásicos de Montel y Vitali, fundamentales en el estudio del espacio de las funciones holomorfas en un abierto con la topología compacta abierta.

Para culminar este trabajo, presentaremos el Teorema Grande de Picard:

Si f es una función holomorfa con una singularidad esencial en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces f toma infinitas veces cada valor complejo en cualquier entorno de z_0, con a lo sumo una excepción.

Para la comodidad del lector, se ha añadido en un apéndice una lista de los resultados de la teoría elemental de funciones de variable compleja a los que se ha hecho referencia en el desarrollo de la memoria.

Notación y terminología

Antes de presentar los resultados que vamos a estudiar, creemos conveniente recopilar las notaciones y terminología que se utilizarán de forma frecuente a lo largo del trabajo.

Decimos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio si se trata de un conjunto abierto y conexo.
Denotamos por $\partial\Omega$ al conjunto frontera de Ω.
Para cada abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se denota por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.
Si $F \subset \mathbb{C}$ no es abierto, decimos que $f \in \mathcal{H}(F)$ si f es holomorfa en un abierto V de manera que $F \subset V$.
Sea $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$. Entonces los conjuntos

$$B(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\} \quad \text{y} \quad \overline{B}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$$

denotan, respectivamente, las bolas abierta y cerrada de centro a y radio r.
Denotamos a la bola punteada de centro a y radio r como

$$B^*(a,r) = B(a,r) \setminus \{a\}.$$

Se denomina esfera de centro a y radio r al conjunto

$$S(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}.$$

En particular, se denota por S^1 a la esfera de centro 0 y radio 1.
Dada una función f acotada en $\Omega \subset \mathbb{C}$, la norma del superior de f en Ω se define como $\|f\|_\Omega = \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}$.
Se define la distancia entre dos conjuntos A y B como

$$\operatorname{dist}(A,B) = \operatorname{ínf}\{\operatorname{dist}(x,y) : x \in A,\ y \in B\}.$$

Si $A = \{a\}$ es un conjunto unipuntual, la distancia entre A y B se denota también $\operatorname{dist}(a,B)$ y se denomina distancia de a a B.
Se denota por $\mathbb{N}$ al conjunto $\{1,2,3\ldots\}$ y por $\mathbb{N}_0$ al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0,1,2\ldots\}$.
Sea Ω un conjunto. La aplicación identidad en Ω se denota por Id_Ω.

Capítulo 1

Teoremas de Bloch y Ahlfors

En este capítulo se presentarán diversos resultados relativos al tamaño mínimo de un disco contenido en la imagen de una función holomorfa en un abierto que contiene al disco cerrado unidad.

1.1. Teorema de Bloch

El teorema de Bloch afirma lo siguiente:

Teorema 1.1 (Teorema de Bloch)**.** Sea $f \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right)$ tal que $f'(0) = 1$, entonces $f\left(B\left(0,1\right)\right)$ contiene una bola de radio $\dfrac{3}{2} - \sqrt{2} > \dfrac{1}{12}$.

Antes de pasar a su demostración, veamos algunos resultados previos.
Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\overline{\Omega})$ una función no constante, el Teorema de la Aplicación Abierta A.1 nos garantiza que $f(\Omega)$ también es un dominio. Con vistas a la profundización en el conocimiento de $f(\Omega)$, proporcionamos el siguiente resultado, válido en un contexto más general.

Lema 1.2. Sea Ω un conjunto acotado, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua cuya restricción a Ω es abierta. Fijemos un punto $a \in \Omega$ de tal manera que

$$s := \min_{z\in\partial\Omega} |f(z) - f(a)| > 0.$$

Entonces $f(\Omega)$ contiene a la bola de centro $f(a)$ y radio s.

Demostración:
El conjunto $\partial f(\Omega)$ es un conjunto compacto, luego existe un punto $\omega^* \in \partial f(\Omega)$ tal que $\operatorname{dist}\left(\partial f(\Omega), f(a)\right) = |\omega^* - f(a)|$. Como $\omega^* \in \partial f(\Omega)$, se tiene que $\omega^* \in \overline{f(\Omega)}$, luego existe una sucesión de elementos de $f(\Omega)$ que converge

a ω^*. Una sucesión de elementos de $f(\Omega)$ es de la forma $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$, siendo $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Ω. Ahora bien, como $\overline{\Omega}$ es compacto, la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ admite una subsucesión convergente (por comodidad la denotamos de nuevo $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$), entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = z^* \in \overline{\Omega}$. Debido a que f es una aplicación continua y a la unicidad del límite tenemos que $f(z^*) = \omega^*$. Por hipótesis sabemos que $f\big|_{\Omega}$ es abierta, luego $z^* \notin \Omega$, es decir, $z^* \in \partial\Omega$. Por tanto,

$$|f(z^*) - f(a)| = |\omega^* - f(a)| \geq s,$$

o lo que es lo mismo, $B(f(a), s) \subset f(\Omega)$. $\square$

Si esto mismo lo aplicamos a funciones holomorfas podemos obtener una buena estimación para el valor de s. En el siguiente lema se impone una condición que limita el crecimiento de $|f|$.

Lema 1.3. Sea $f : \overline{B}(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante que satisface la desigualdad

$$\|f'\|_{B(a,r)} \leq 2|f'(a)|. \tag{1.1}$$

Entonces $B(f(a), R) \subset f\left(B(a,r)\right)$ donde $R = (3 - 2\sqrt{2}) \cdot r \cdot |f'(a)|$.

Demostración:
Supongamos sin pérdida de generalidad que $a = f(a) = 0$. En caso de que no sea así se sigue el razonamiento con la función $f_1(z) = f(z+a) - f(a)$. Para cada $z \in B(0,r)$, sea

$$A(z) = f(z) - f'(0)z = \int_0^z f'(x)dx - f'(0) \cdot \int_0^z 1dx = \int_0^z \left[f'(x) - f'(0)\right]dx.$$

Tomando módulos en la igualdad anterior se obtiene que

$$\begin{aligned}|A(z)| &= \left|\int_0^z \left[f'(x) - f'(0)\right]dx\right| = \left|\int_0^1 \left[f'(zt) - f'(0)\right]zdt\right| \\ &\leq \int_0^1 |f'(zt) - f'(0)| \cdot |z|dt.\end{aligned}$$

La función f' es holomorfa por serlo f, luego la fórmula integral de Cauchy A.4 nos permite asegurar que para cada elemento $z_0 \in B(0,r)$ se verifica que

$$
\begin{aligned}
f'(z_0)-f'(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)} \frac{f'(z)}{z-z_0}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)} \frac{f'(z)}{z}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)} \frac{zf'(z)-(z-z_0)f'(z)}{z(z-z_0)}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)} \frac{z_0 f'(z)}{z(z-z_0)}dz = \frac{z_0}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)} \frac{f'(z)}{z(z-z_0)}dz.
\end{aligned}
$$

Se sigue de manera sencilla al tomar de nuevo módulos que

$$
\begin{aligned}
\big|f'(z_0)-f'(0)\big| &= \left|\frac{z_0}{2\pi i}\int_{\partial B(0,r)} \frac{f'(z)}{z(z-z_0)}dz\right| \leq \frac{|z_0|}{2\pi}\cdot 2\pi r \max_{z\in\partial B(0,r)} \left|\frac{f'(z)}{z(z-z_0)}\right| \\
&\leq \frac{|z_0|}{r-|z_0|}\|f'\|_{B(0,r)}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
|A(z)| &\leq \int_0^1 \big|f'(zt)-f'(0)\big||z|dt \leq \int_0^1 \frac{|zt|}{r-|zt|}\|f'\|_{B(0,r)}|z|dt \\
&= |z|^2\|f'\|_{B(0,r)}\int_0^1 \frac{t}{r-|z|t}.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, la función $t\mapsto t/(r-|z|t)$ es una función convexa, como indica su segunda derivada, luego

$$
|A(z)| \leq |z|^2\|f'\|_{B(0,r)}\int_0^1 \frac{t}{r-|z|t} \leq \frac{|z|^2}{2\,(r-|z|)}\|f'\|_{B(0,r)}.
$$

Sea $\rho\in(0,r)$, la desigualdad $|f(z)-f'(0)z|\geq|f'(0)|\rho-|f(z)|$ se verifica para todo z con $|z|=\rho$. Por tanto, para cada z con $|z|=\rho$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &\geq |f'(0)|\rho-|f(z)-f'(0)z| = |f'(0)|\rho-|A(z)| \\
&\geq |f'(0)|\rho-\frac{|z|^2}{2\,(r-|z|)}\|f'\|_{B(0,r)} = |f'(0)|\rho-\frac{\rho^2}{2(r-\rho)}\|f'\|_{B(0,r)} \\
&\geq |f'(0)|\rho-\frac{\rho^2}{2(r-\rho)}2|f'(0)| = |f'(0)|\left(\rho-\frac{\rho^2}{r-\rho}\right),
\end{aligned}
$$

utilizando en la última desigualdad la hipótesis (1.1).
La función $\rho-\rho^2/(r-\rho)$ toma su valor máximo $(3-2\sqrt{2})r$ en el punto $\rho^*=\big(1-\sqrt{2}/2\big)\,r\in(0,r)$. Sabemos por tanto que $|f(z)|\geq(3-2\sqrt{2})r|f'(0)|=R$ para todo z con $|z|=\rho^*$. Si en el lema 1.2 hacemos $\Omega=B(0,\rho^*)$ tenemos que $B(0,R)\subset f(\Omega)\subset f\,(B\,(0,1))$. $\square$

Lema 1.4. Sea $f \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right)$ una función con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces $B(0,r) \subset f\left(B(0,1)\right)$ siendo $r = 1/(6 \cdot \|f\|_V)$ y V un abierto que contiene a la bola $\overline{B}(0,1)$.

Demostración:
Basta probar, para z con $|z| = \rho \in (0,1]$ adecuado, que $|f(z)| \geq r$, pues aplicando de nuevo el lema 1.2 tendríamos que $B(0,r) \subset f\left(B\left(0,1\right)\right)$.
La función f es una función holomorfa en un abierto V que contiene a $\overline{B}(0,1)$, luego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(0,1)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Por hipótesis sabemos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, luego $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Por tanto,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

Además, $|a_n| \leq \|f\|_V$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Si $z \in B(0,1)$ con $|z| = 1/(4\|f\|_\infty)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|f(z)| = |z + a_2 z^2 + \dots| &\geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n z^n| \geq \frac{1}{4\|f\|_V} - \sum_{n=2}^{\infty} \|f\|_V \left(\frac{1}{4\|f\|_V}\right)^n \\
&= \frac{1}{4\|f\|_V} - \frac{1}{16\|f\|_V - 4} \geq \frac{1}{4\|f\|_V} - \frac{1}{16\|f\|_V - 4\|f\|_V} \\
&= \frac{1}{4\|f\|_V} - \frac{1}{12\|f\|_V} = \frac{1}{6\|f\|_V},
\end{aligned}$$

con lo que se concluye. □

Para cada función $f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$, consideramos la función $|f'(z)|(1-|z|)$, la cual es continua en $\overline{B}(0,1)$. Supongamos que toma su máximo M en el punto $p \in B(0,1)$. Podemos generalizar el Teorema de Bloch como sigue:

Teorema 1.5. Sea $f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$ una función no constante. Entonces $f(B(0,1))$ contiene una bola de centro $f(p)$ y radio $(3/2-\sqrt{2})M \geq |f'(0)|/12$.

Demostración:
La función $|f'(z)|(1-|z|)$ es una función continua definida en un compacto por tanto, alcanza su máximo $M = |f'(p)|(1-|p|)$ en un punto $p \in B(0,1)$. Definiendo $t = (1-|p|)/2 \in (0,1/2]$, podemos decir que $M = 2t|f'(p)|$. También es claro que $B(p,t) \subset B(0,1)$, pues $|p| + t < |p| + 2t = 1$.
Si $z \in B(p,t)$, se tiene que $|z| < t + |p| = \left(1+|p|\right)/2$, luego

$$1 - |z| > 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}|p|\right] = \frac{1}{2}\left(1-|p|\right) = t \qquad \text{y} \qquad \frac{t}{1-|z|} < 1.$$

Con todo lo anterior, se puede asegurar para cada $z \in B(p,t)$ lo siguiente:

$$|f'(z)|(1-|z|) \leq M = 2t|f'(p)|,$$

luego

$$|f'(z)| \leq \frac{2t}{1-|z|}|f'(p)| < 2|f'(p)|. \tag{1.2}$$

Mediante la aplicación del lema 1.3, se tiene que la bola con centro $f(p)$ y radio $(3-2\sqrt{2})t|f'(p)| = \big(3/2-\sqrt{2}\big)M$ está contenida en $f\big(B(p,t)\big) \subset f\big(B(0,1)\big)$. □

Corolario 1.6. Sea f una función holomorfa en $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces $f(\Omega)$ contiene bolas de radios $\frac{1}{12} \cdot s \cdot |f'(z_0)|$, siendo $0 < s < d(z_0, \partial\Omega)$.

Demostración:
Tomamos sin pérdida de generalidad $z_0 = 0$. Si $0 < s < d(0, \partial\Omega)$, es claro que $\overline{B}(0,s) \subset \Omega$. Sea

$$g(z) = \frac{f(sz)}{sf'(0)}.$$

Por como está definida g, sabemos que se trata de una función holomorfa en la bola unidad puesto que f lo es en la bola $B(0,s)$. Derivando,

$$g'(z) = \frac{sf'(sz)sf'(0) - [f(sz)-f(0)]\,0}{s^2\,[f'(0)]^2} = \frac{f'(sz)}{f'(0)} \Longrightarrow g'(0) = 1.$$

Por tanto g verifica las hipótesis del Teorema de Bloch 1.1, lo cual nos permite asegurar que $g(B(0,1))$ contiene una bola de radio $1/12$. Basta expresar este hecho en términos de la función f para obtener el resultado. □

1.2. Versión mejorada del Teorema de Bloch

Sea $f \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right)$ una función no constante. La esperanza de que $f(B(0,1))$ contenga bolas más grandes a medida que aumenta el valor $|f'(0)|$ nos conduce a un problema extremal:

Encontrar una función $F \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right)$ de manera que $F(B(0,1)) = f(B(0,1))$ y F tenga la mayor derivada posible en el punto 0.

Antes de continuar con este problema, estudiemos la forma que tienen los automorfismos de la bola unidad.

Fijamos un punto $a \in B(0,1)$ y definimos la fuunción

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \frac{z-a}{-\bar{a}z+1}.$$

Es sencillo comprobar que φ_a es una biyección de la bola unidad cuya inversa es φ_{-a}. Sabiendo esto, probemos el siguiente resultado:

Teorema 1.7. Sea $f : B(0,1) \longrightarrow B(0,1)$ una función holomorfa, entonces para cada $a \in B(0,1)$ y para cada $z \in B(0,1)$ se verifican:

i) $\left|\dfrac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leq \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|.$

ii) $|f'(a)| \leq \dfrac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}.$

Además, si se da la igualdad en i) para algún $z \neq a$, o se da la igualdad en ii), entonces existe un número complejo λ con $|\lambda| = 1$ de manera que f es una composición $\varphi_{-b} \circ \lambda\varphi_a = \varphi_b^{-1} \circ \lambda\varphi_a$, siendo $b = f(a)$. Esto es, para cada z con $|z| < 1$ se tiene que

$$f(z) = \frac{\lambda\varphi_a(z) + b}{1 + \bar{b}\lambda\varphi_a}.$$

Demostración:
Sea $a \in B(0,1)$ y sea $b = f(a)$. Vamos a aplicar el lema de Schwarz A.6 a la función $g = \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}$. Como $f(B(0,1)) = B(0,1)$ se tiene también que $g(B(0,1)) = B(0,1)$. Además,

$$g(0) = \varphi_b(f(\varphi_{-a}(0))) = \varphi_b(f(a)) = \varphi_b(b) = 0.$$

Por el lema de Schwarz, $|g(\omega)| \leq |\omega|$ para $|\omega| < 1$, y reemplazando ω por $\varphi_a(z)$ y teniendo en cuenta que $g(\varphi_a(z)) = \varphi_b(f(z))$, obtenemos i). También por el lema A.6 tenemos que $|g'(0)| \leq 1$, pero

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi_b'(f(\varphi_{-a}(0)))f'(\varphi_{-a}(0))\varphi_{-a}'(0) \\ &= \varphi_b'(f(a))f'(a)(1-|a|^2) = \frac{1}{1-|f(a)|^2}f'(a)(1-|a|^2). \end{aligned}$$

Por tanto la condición $|g'(0)| \leq 1$ implica ii). □

Teorema 1.8. Supongamos que $f \in \mathcal{H}(B(0,1)$ es una biyección de la bola unidad en la bola unidad, entonces $f = \lambda\varphi_a$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ y $a \in B(0,1)$.

Demostración:
Sea $a \in B(0,1)$ tal que $f(a) = 0$ y sea $g = f^{-1}$, por tanto $g(0) = a$. Como $g(f(z)) = z$, tenemos al derivar que $g'(f(z))f'(z) = 1$, en particular en $z = a$, $g'(f(a))f'(a) = g'(0)f'(a) = 1$. Se sigue del segundo apartado del teorema anterior que $|g'(0)| \leq 1 - |a|^2$ y $|f'(a)| \leq 1/(1 - |a|^2)$. Por tanto

$$1 = |g'(0)||f'(a)| \leq \frac{1 - |a|^2}{1 - |a|^2} = 1.$$

Necesariamente entonces $|f'(a)| = 1/(1 - |a|^2)$ (y $|g'(0)| = 1 - |a|^2$). Como consecuencia del teorema 1.7, $f(z) = \varphi_b^{-1}(\lambda\varphi_a(z)) = \varphi_{-b}(\lambda\varphi_a(z))$ con $b = f(a) = 0$, luego $\varphi_b = Id_{B(0,1)}$. Por consiguiente, $f = \lambda\varphi_a$. $\square$

Para hacer preciso el problema extremal anterior consideramos, para una $f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$ dada, la familia

$$\mathcal{F} = \{h = f \circ j : j \in AutB(0,1)\}.$$

Como $j \in AutB(0,1)$, por lo visto hace un momento sabemos que tiene la forma

$$j(z) = \lambda\varphi_a(z) = \lambda\frac{z - a}{-\overline{a}z + 1},$$

con $|\lambda| = 1$, es decir, $\lambda \in S^1$ y $a \in B(0,1)$. Otra forma de escribir estos automorfismos es

$$j(z) = \frac{\varepsilon z - \omega}{\overline{\omega}\varepsilon z - 1}, \tag{1.3}$$

tomando $\lambda = -\varepsilon \in S^1$ y $a = \omega/\varepsilon \in B(0,1)$.
Debido a que $j \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right)$ y $j'(0) = \varepsilon(|\omega|^2 - 1)$, es fácil ver que

$$h \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right), \quad h\left(B(0,1)\right) = f\left(B(0,1)\right), \tag{1.4}$$

y

$$|h'(0)| = |f'(j(0)) \cdot j'(0)| = |f'(\omega)| \cdot (1 - |\omega|^2) \quad \text{para cada} \ \ h = f \circ j \in \mathcal{F}.$$

Como $f' \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right)$, la función $|f'(z)| \cdot (1 - |z|^2)$ es una función continua definida en el compacto $\overline{B}(0,1)$ que alcanza su valor máximo N en un punto $q \in B(0,1)$. Por tanto, una solución del problema extremal es:

$$F(z) = f\left(\frac{z - q}{\overline{q}z - 1}\right) \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right), \quad \text{donde} \ \ F(0) = f(q) \tag{1.5}$$

y

$$|F'(0)| = \max_{|z|\leq 1} |f'(z)| \cdot \left(1 - |z|^2\right).$$

Veamos a continuación una estimación crucial para la derivada de F:
Como $\mathcal{F}$ verifica las propiedades de un grupo y cada $j \in Aut\,(B(0,1))$ está definido como en (1.3), la desigualdad $N \geq |\,(F \circ j)'\,(0)| = |F'(\omega)| \cdot (1 - |\omega|^2)$ se verifica para todo $\omega \in B(0,1)$, luego

$$|F'(\omega)| \leq \frac{N}{1 - |\omega|^2} \text{ para } \text{ cada } \omega \in B(0,1).$$

En particular,

$$\max_{|\omega|\leq r} |F'(\omega)| \leq \frac{N}{1 - r^2} \text{ para } 0 < r < 1. \tag{1.6}$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior y con ayuda de la función auxiliar $|f'(z)|(1 - |z|^2)$, Landau consiguió mejorar el radio del teorema 1.5.

Teorema 1.9 (Teorema de Landau)**.** Sea $f \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right)$. Supongamos que $|f'(z)| \cdot (1 - |z|^2)$ toma su valor máximo N en el punto $q \in B(0,1)$, entonces $f\,(B\,(0,1))$ contiene una bola de radio $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\right) N$ y centro $f(q)$.
Además si $f'(0) = 1$, entonces $f\,(B\,(0,1))$ contiene una bola de radio $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 > \frac{1}{12}\sqrt{2}$.

Demostración:
Elegimos F como en (1.5). Sabemos por hipótesis que $|F'(0)| = N$ y, por (1.6), que $|F'(z)| \leq N/(1 - |z|^2)$, luego $|F'(z)| \leq 2|F'0)|$ para todo z con $|z| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Hemos elegido F de manera que $F(B(0,1)) = f(B(0,1))$, por tanto el lema 1.3 nos permite garantizar que $f(B(0,1))$ contiene una bola de centro $f(q) = F(0)$ y radio $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\right) N$.
Si $f'(0) = 1$ se tiene que $N \geq 1$ y por consiguiente, $f(B(0,1))$ contiene una bola de radio $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\right)$. $\square$

1.3. Teorema de Ahlfors

Una versión más refinada del teorema previo es el Teorema de Alhfors, que veremos a continuación de algunos resultados previos.

Definición 1.10. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, un conjunto $B \subset f(\Omega)$ es una *bola simple* si existe un conjunto $\Omega^* \subset \Omega$ tal que f lleva Ω^* en B de forma biyectiva. En esta situación tenemos que $f|_{\Omega^*} : \Omega^* \longrightarrow B$ es una aplicación biholomorfa, es decir, holomorfa y con inversa holomorfa.

Lema 1.11. Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ un conjunto convexo y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $\Re\big(f'(z)\big) > 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces f lleva Ω en $f(\Omega)$ de forma biholomorfa.

Demostración:
Sean $u, v \in \Omega$ y γ el segmento que une estos puntos, es decir

$$\gamma(t) = (1-t)u + tv$$

con $0 \leq t \leq 1$. Como Ω es convexo, γ está contenido en Ω. Por tanto,

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &= \int_{\gamma(t)} f'(t)dt \\ &= (v-u)\left[\int_0^1 \Re f'(\gamma(t))dt + i\int_0^1 \Im f'(\gamma(t))dt\right] \neq 0 \end{aligned}$$

si $u \neq v$, puesto que por hipótesis $Re\, f'(z) > 0$ para todo $z \in \Omega$. Por consiguiente, $f(u) \neq f(v)$, luego $f|_\Omega$ es una biyección de Ω en $f(\Omega)$. $\square$

Lema 1.12. Para $p(\omega) := \frac{\sqrt{3}(1-\omega)}{3-\omega}$ y $q(\omega) := \frac{9}{4}\omega\left(1 - \frac{1}{3}\omega\right)^2$ se verifican las siguientes afirmaciones:

a) $p(\overline{B}(0,1)) \subset B(0,1)$.

Demostración:
Sea $a \in B(0,1)$, hemos definido ya

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

como una biyección de la bola unidad en la bola unidad. Pues bien,

$$p(\omega) = \varphi_{1/\sqrt{3}}\left(\frac{\omega}{\sqrt{3}}\right),$$

luego p es una biyección de la bola $B(0,\sqrt{3})$ en la bola $B(0,1)$, es decir, $p(B(0,\sqrt{3})) = B(0,1)$. Como $\overline{B}(0,1) \subset B(0,\sqrt{3})$, podemos afirmar que

$$p(\overline{B}(0,1)) \subset p(B(0,\sqrt{3})) = B(0,1).$$

b) p transforma el intervalo $[0,1]$ en el intervalo $[0,1/\sqrt{3}]$.

Demostración:
Sustituyendo en la ecuación que define p se tiene que $p(0) = 1/\sqrt{3}$ y $p(1) = 0$. Veamos qué pasa con los puntos intermedios:

$$p'(\omega) = \frac{-2\sqrt{3}}{(3-\omega)^2},$$

luego la función p restringida a los números reales es una función decreciente. Por consiguiente, p transforma $[0,1]$ en $[0,1/\sqrt{3}]$.

c) $q(p^{-1}(z)) = \left(1-\sqrt{3}z\right) / \left(1-\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^3$.

Demostración:
La inversa de la función p es

$$p^{-1}(z) = \frac{3z-\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}.$$

Al aplicar q tenemos que

$$\begin{aligned} q(p^{-1}(z)) = q\left(\frac{3z-\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right) &= \frac{9}{4}\cdot\frac{3z-\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{3z-\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \frac{9}{4}\cdot\frac{3z-\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3(z-\sqrt{3})}\right)^2 = \frac{3z-\sqrt{3}}{(z-\sqrt{3})^3} = \frac{1-\sqrt{3}z}{\left(1-\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^3}. \end{aligned}$$

d) $|q(\omega)|(1-|p(\omega)|^2) = 1$ para todo $\omega \in \partial B(0,1)$.

Demostración: Se tiene que

$$|q(\omega)| = \frac{9}{4}\cdot 1\cdot|1-\frac{1}{3}\omega|^2 = \frac{9}{4}\cdot\frac{|3-\omega|^2}{9} = \frac{|3-\omega|^2}{4},$$

$$|p(\omega)|^2 = \left|\frac{\sqrt{3}(1-\omega)}{(3-\omega)}\right|^2 = \frac{3|1-\omega|^2}{|3-\omega|^2}$$

y

$$1-|p(\omega)|^2 = 1-\frac{3|1-\omega|^2}{|3-\omega|^2} = \frac{|3-\omega|^2-3|1-\omega|^2}{|3-\omega|^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}|q(\omega)|(1-|p(\omega)|^2) &= \frac{|3-\omega|^2}{4}\cdot\frac{|3-\omega|^2-3|1-\omega|^2}{|3-\omega|^2}\\ &= \frac{|3-\omega|^2}{4}\cdot\frac{9+|\omega|^2-6\Re(\omega)-3-3|\omega|^2+6\Re(\omega)}{|3-\omega|^2}\\ &= \frac{|3-\omega|^2}{4}\cdot\frac{4}{|3-\omega|^2}=1.\end{aligned}$$

□

Lema 1.13. Sea g una función holomorfa en $B(0,1)$ con $g(0)=1$ y $|g(z)|\leq \dfrac{1}{1-|z|^2}$. Entonces $g'(0)=0$.

Demostración:
Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $g'(0)\neq 0$ y veamos que se llega a contradicción. Por ser $g\in\mathcal{H}\big(B(0,1)\big)$ tenemos que para todo $z\in B(0,1)$,

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

Por hipótesis $g(0)=1$, luego

$$g(z)=1+g'(0)z+z^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2}.$$

Haciendo

$$\varphi(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2},$$

se tiene que

$$g(z)=1+g'(0)z+\varphi(z)z^2.$$

Ahora bien, $\varphi(z)\in\mathcal{H}\big(B(0,1)\big)$, por tanto existe una constante $M>0$ tal que $|\varphi(z)|\leq M$ si $|z|\leq 1/2$; supongamos sin pérdida de generalidad que $M>|g'(0)|$.
Sea z tal que $|z|<|g'(0)|/2M<1/2$, y $\arg z=-\arg g'(0)$, así $\arg\big(g'(0)z\big)=0$. Se tiene que

$$\begin{aligned}|g(z)| &= |1+g'(0)z+\varphi(z)z^2|\geq \big|1+|g'(0)||z|-|z|^2|\varphi(z)|\big|\\ &= 1+|g'(0)||z|-|z|^2|\varphi(z)|\geq 1+|g'(0)||z|-|z|^2M\\ &\geq 1+|g'(0)||z|-|z|\frac{|g'(0)|}{2M}M=1+|g'(0)||z|-\frac{1}{2}|g'(0)||z|\\ &= 1+\frac{1}{2}|g'(0)||z|.\end{aligned}$$

Entonces
$$1+\frac{1}{2}|g'(0)||z| \le |g(z)| \le \frac{1}{1-|z|^2},$$
luego
$$|z|\left(\frac{|g'(0)|}{2}|z|+|z|-\frac{|g'(0)|}{2}\right) \ge 0,$$
lo cual es imposible si se toma $|z|$ suficientemente pequeño. $\square$

Lema 1.14. Si $f \in \mathcal{H}\big(B(0,1)\big)$, $f'(0)=1$ y $|f'(z)| \le \dfrac{1}{1-|z|^2}$, entonces $f''(0)=0$.

Demostración:
Basta aplicar el lema anterior a la función f'. $\square$

Lema 1.15. Sea $F \in \mathcal{H}\left(B(0,1)\right)$ tal que $|F'(z)| \le 1/(1-|z|^2)$ y $F'(0)=1$. Entonces
$$\Re\big(F'(z)\big) \ge \frac{1-\sqrt{3}|z|}{\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}}\right)^3}, \quad \text{para todo z con} \, |z| \le \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{1.7}$$

Demostración:
Basta razonar con $N=1$. Consideramos la función auxiliar
$$H(\omega)=\left(\frac{F'\left(p(\omega)\right)}{q(\omega)}-1\right)\frac{\omega}{(1-\omega)^2}.$$

Hemos visto en el lema 1.12 que $p(\overline{B}(0,1)) \subset B(0,1)$, por tanto la función H es holomorfa en $\overline{B}(0,1)\setminus\{1\}$. Ahora bien, por el lema 1.14 sabemos que $F''(0)=0$, luego H es holomorfa en $1 \in \mathbb{C}$. Es decir, $H \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$.
Veamos que $\omega/(1-\omega)^2$ es un número real y negativo para todo ω perteneciente a la frontera de la bola unidad:
Sea $\omega \in \partial B(0,1)$, es decir, $\omega=e^{i\theta}$ para $\theta \in (0,2\pi)$, entonces
$$\begin{aligned}\frac{\omega}{(1-\omega)^2} &= \frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2}=\frac{e^{i\theta}}{[e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})]^2}=\frac{1}{(-2i\sin\frac{\theta}{2})^2}\\ &= \frac{-1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}<0.\end{aligned}$$

Con ésto, podemos afirmar que
$$\Re\big(H(\omega)\big)=\frac{\omega}{(1-\omega)^2}\Re\left(\frac{F'\left(p(\omega)\right)}{q(\omega)}-1\right) \qquad \text{para cada } \omega \in \partial B(0,1).$$

La desigualdad $|F'(z)|(1-|z|^2) \leq 1$ y el último apartado del lema 1.12 implican que $|F'(p(\omega))| \leq |q(\omega)|$ en $\partial B(0,1)$. Como $\Re(a-1) \leq 0$ para todo $a \in \overline{B}(0,1)$, se tiene que $\Re\big(H(\omega)\big) \geq 0$ para todo $\omega \in \partial B(0,1)$. Aplicando el Principio del Módulo Máximo a la función $e^{-H(\omega)}$ podemos garantizar que $\Re\big(H(\omega)\big) \geq 0$ para cada $\omega \in \overline{B}(0,1)$. Como $q(\omega) \geq 0$ y $\omega/(1-\omega)^2 \geq 0$ para $\omega \in [0,1)$, se puede garantizar también que

$$\Re\big(F'(p(\omega))\big) \geq q(\omega) \qquad \text{para todo } \omega \in [0,1].$$

Por las afirmaciones del lema 1.12, ésto equivale a (1.7) para todo $z \in [0, 1/\sqrt{3}]$. $\square$

Teorema 1.16 (Teorema de Ahlfors)**.** Sea f una función holomorfa en $\overline{B}(0,1)$ y sea $N = \max_{|z|\leq 1} |f'(z)|(1-|z|^2) > 0$. El dominio $f(\overline{B}(0,1))$ contiene bolas simples de radio $\frac{\sqrt{3}}{4}N$.

Demostración:
Al igual que antes basta razonar con $N=1$. Sea $q \in B(0,1)$ el punto en el que se alcanza $N = \max_{|z|\leq 1} |f'(z)|(1-|z|^2)$, y consideramos

$$F(z) = f\left(\frac{z-q}{\overline{q}z-1}\right).$$

Hemos visto ya que

$$|F'(0)| = |f'(q)|(1-|q|^2) = 1,$$

luego $F'(0) = \eta \in S^1$.

- Supongamos primero que $\eta = 1$. Por el lema anterior sabemos que

  $$\Re\big(F'(z)\big) \geq \frac{1-\sqrt{3}|z|}{\left(1-\frac{|z|}{\sqrt{3}}\right)^3} > 0 \qquad \text{en la bola } B\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

  Como hemos visto en el lema 1.11,

  $$F\big|_{B(0,\frac{1}{\sqrt{3}})} : B(0, \frac{1}{\sqrt{3}}) \longrightarrow F\left(B\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

  es una función biholomorfa.

Para todo $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\varphi} \in \partial B(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ se verifica

$$\begin{aligned}
|F(\xi) - F(0)| &= \left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} F'(te^{i\varphi})dt \right| \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Re\big(F'(te^{i\varphi})\big)dt \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1-\sqrt{3}t}{\left(1-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^3}dt \\
&= 3\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\left(1-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt - 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\left(1-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^3}dt \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

Aplicando el lema 1.2 deducimos que $F\left(B\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ contiene a la bola $B\left(F\left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right)$. Como $F = f \circ g$, siendo g un automorfismo de la bola unidad, f lleva de forma biholomorfa el dominio $\Omega = g^{-1}\big(B(0, \frac{1}{\sqrt{3}})\big) \subset B(0,1)$ en un dominio Ω^* que contiene bolas de radio $\sqrt{3}/4$.

- Para $\eta \in S^1$ arbitrario, trabajamos con $\eta^{-1}F$. Entonces $f : \Omega \longrightarrow \eta\Omega^*$ es biholomorfa, y tanto $\eta\Omega^*$ como Ω^* contienen bolas simples de radio $\sqrt{3}/4$.

$\square$

Corolario 1.17. Si f es una función no constante y holomorfa en todo $\mathbb{C}$, entonces $f(\mathbb{C})$ contiene bolas simples arbitrariamente grandes.

Demostración:
La demostración es inmediata aplicando el Teorema de Ahlfors junto con el corolario 1.6. $\square$

1.4. Constantes de Landau y Bloch

Estos teoremas dieron lugar a la definición de las siguientes constantes:

Definición 1.18. Se considera la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1)) \ / \ f'(0) = 1 \right\}.$$

Para cada función $f \in \mathcal{F}$ sea

$$\lambda(f) = \sup \left\{ r : f(B(0,1)) \text{ contiene una bola de radio } r \right\},$$

se define la *constante de Landau* como

$$L = \text{ínf}\,\{\lambda(f) : f \in \mathcal{F}\}\,.$$

Definición 1.19. Para cada función $f \in \mathcal{F}$ sea

$$\beta(f) = \sup\,\{r : f(B(0,1)) \text{ contiene una bola simple de radio } r\}\,,$$

la *constante de Bloch* es el número B definido por

$$B = \text{ínf}\,\{\beta(f) : f \in \mathcal{F}\}\,.$$

Observaciones 1.20. Es claro que $B \leq L$. Actualmente se desconoce el valor exacto de estas constantes, pero vamos a indicar a continuación cuáles son las cotas que se conocen hasta el momento tanto para L como para B. Hemos visto en los teoremas de Bloch 1.9 y Alhfors 1.16, respectivamente, que

$$L \geq \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 = 0{,}121320 \qquad \text{y} \qquad B \geq \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}433012.$$

Pues bien, Ahlfors [1] en 1938 probó esa cota inferior para B y también probó que

$$0{,}5 \leq L.$$

Posteriormente se probó que estas desigualdades eran estrictas mediante métodos que utilizaban una generalización del Lema de Schwarz. El primer método fue introducido por Ahlfors y refinado por Heins [7] en 1962, basándose en técnicas propias de la geometría diferencial, mientras que el segundo método se originó con Pommerenke [9] en 1970. En 1990, Bonk [3] probó que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 10^{-14} < B$$

basándose en la desigualdad (1.7). En 1996, Chen y Gauthier [4], tomando como base el trabajo de Bonk y el teorema 1.7, consiguieron una mejora adicional para la cota inferior de B probando que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot 10^{-4} \leq B$$

. El último resultado demostrado para esta constante data de 1998, cuando C. Xiong [14] demuestra que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 10^{-4} \leq B.$$

La cota superior de la constante de Bloch,

$$B \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{(1+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{4})} = 0{,}4718617\ldots,$$

se obtiene mediante la consideración de funciones hipergeométricas adecuadas en 1937 por Ahlfors y Grunsky (ver [12]), y hoy en día se conjetura que este valor es el valor real de B. Es de interés el artículo de R. Rettinger [11] de 2008, en el que se presenta un algoritmo teórico para el cálculo de B, aunque su complejidad no ha permitido avanzar en la resolución de la conjetura.
Para la constante L, después de que Pommerenke probara que $0{,}5 < L$, Yanagihara [13] demostró en 1995 que

$$0{,}5 + 10^{-335} < L,$$

basándose principalmente en un lema de Julia A.7. En el año 2004, Chen y Siba [5] establecieron una mejora para esta cota inferior:

$$0{,}5 + 2 \cdot 10^{-8} < L.$$

La cota superior para la contante de Landau se obtiene de un ejemplo que R.M. Robinson menciona en el libro de Ahlfors [1] en 1938, y posteriormente estudia en 1982 C.Minda [8], y que está basado en el mismo método de Ahlfors y Grunsky. Este ejemplo establece que

$$L \leq \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} = 0{,}5432588\ldots.$$

Resumiendo

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 10^{-14} \leq B \leq \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{11}{12})}{(1+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{4})} = 0{,}4718617\ldots,$$

y

$$0{,}5 + 2 \cdot 10^{-8} < L \leq \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/6)} = 0{,}5432588\ldots.$$

Capítulo 2

Teorema pequeño de Picard

Este segundo capítulo se dedicará a la obtención del célebre Teorema Pequeño de Picard a partir del teorema de Bloch. Se presentarán también algunas consecuencias curiosas de este nuevo teorema.

Comenzaremos estableciendo un lema auxiliar.

Lema 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función que omite los puntos 1 y -1. Entonces existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = \cos F$.

Demostración:
Por hipótesis los puntos $1, -1 \notin f(\Omega)$, por tanto la función $1 - f^2$ no tiene ceros en Ω. Como Ω es simplemente conexo, dicha función admite una raíz cuadrada analítica g en Ω. Es decir, existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ no nula tal que

$$f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig) = 1.$$

Es obvio que $f + ig$ tampoco tiene ceros en Ω, luego $f + ig = e^{iF}$ para cierta $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se sigue que $f - ig = 1/(f + ig) = 1/e^{iF} = e^{-iF}$. Sumando se obtiene que

$$(f + ig) + (f - ig) = 2f = e^{iF} + e^{-iF},$$

y llegamos a que

$$f = \frac{1}{2}(e^{iF} + e^{-iF}) = \cos F.$$

□

Teorema 2.2. Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y sea f una función holomorfa en Ω que omite los valores 0 y 1. Entonces existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos \pi(\cos \pi g(z))\right] . \tag{2.1}$$

Además si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ es una función para la cual (2.1) se verifica, entonces $g(\Omega)$ no contiene ninguna bola de radio 1.

Demostración:

a) En primer lugar, veamos que existe la función g pedida.
Por hipótesis sabemos que f omite los valores 0 y 1 en Ω, luego la función $2f-1$ omite los valores -1 y 1. Por consiguiente, el lema 2.1 nos permite garantizar que existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$2f - 1 = \cos \pi F. \tag{2.2}$$

Puesto que $\cos\big(\pi F(z)\big) \in \{-1, 1\}$ sí, y solo sí, $F(z) \in \mathbb{Z}$, es claro que F, a su vez, debe omitir todos los valores enteros (en particular los puntos -1 y 1). Aplicando de nuevo el lema anterior existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $F = \cos \pi g$, y basta llevar esto a (2.2) para obtener (2.1).

b) Veamos a continuación que $g(\Omega)$ no contiene bolas de radio 1.
Consideramos el conjunto

$$A = \left\{ m \pm i\pi^{-1} \log(n + \sqrt{n^2 - 1}), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\},$$

y probemos que $A \cap g(\Omega) = \emptyset$.
Sea $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $a = p \pm i\pi^{-1} \log(q + \sqrt{q^2 - 1}) \in A$; entonces $i\pi a = i\pi p \mp \log(q + \sqrt{q^2 - 1})$ y

$$\begin{aligned} \cos \pi a &= \frac{e^{i\pi a} + e^{-i\pi a}}{2} = \frac{1}{2}(-1)^p \left[(q + \sqrt{q^2 - 1})^{-1} + (q + \sqrt{q^2 - 1}) \right] \\ &= (-1)^p q. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\cos \pi(\cos \pi a) = \cos \pi (-1)^p q \in \{-1, 1\}$$

y

$$\frac{1}{2}\big[1 + \cos(\pi \cos(\pi a))\big] \in \{0, 1\}.$$

Sin embargo, como hemos dicho previamente, sabemos por hipótesis que los valores 0 y 1 no pertenecen a $f(\Omega)$, por tanto el conjunto $g(\Omega) \cap A$ ha de ser vacío.
Los puntos de A son los vértices de un retículo donde la anchura de cada rectángulo es 1, pues las primeras coordenadas de sus puntos son

enteras. Por otra parte, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\log(n+1+\sqrt{(n+1)^2-1}) - \log(n+\sqrt{n^2-1}) = \log \frac{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$

$$\leq \log\left(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right) \leq \log\left(2+\sqrt{3}\right) < \pi,$$

y la monotonía de la función logaritmo, $\log x$, nos garantiza que la altura de cada rectángulo es menor que 1. Por tanto, para cada $\omega \in \mathbb{C}$ existe $a \in A$ tal que $|\Re(a) - \Re(\omega)| \leq 1/2$ y $|\Im(a) - \Im(\omega)| < 1/2$, es decir, $|a-\omega| < 1$. Por tanto, cada bola de radio 1 interseca a A. Pero $g(\Omega) \cap A = \emptyset$, luego $g(\Omega)$ no contiene ninguna bola de radio 1.

$\square$

Teorema 2.3 (Teorema pequeño de Picard)**.** Toda función holomorfa no constante omite a lo sumo un valor complejo.

Este teorema puede enunciarse como sigue:

a) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y supongamos que $0, 1 \notin f(\mathbb{C})$. Entonces f es constante.

b) Si f es una función entera que omite dos o más valores, es constante.

c) Supongamos que $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $1 = e^f + e^g$. Entonces f y g son constantes.

Demostración:
Veamos que los resultados anteriores son equivalentes:

a) $\Rightarrow$ *b)* Sean a y b dos números reales distintos. Supongamos que la función f omite los valores a y b, es decir, $f(z) \neq a$ y $f(z) \neq b$ para todo elemento $z \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\frac{f(z)-a}{b-a} \neq 0 \qquad y \qquad \frac{f(z)-a}{b-a} \neq 1.$$

Por el apartado a) podemos afirmar que $\frac{f(z)-a}{b-a}$ es constante, luego f es constante.

b) $\Rightarrow$ *a)* El apartado a) es un caso particular de b).

$a) \Rightarrow c)$ Supongamos que $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $1 = e^f + e^g$, es decir, $e^f = 1 - e^g$. Como la función exponencial nunca se anula sabemos que $e^f \neq 0$ y $e^f = 1 - e^g \neq 1$ Por el apartado a), existe una constante C tal que $e^f = C$, es decir, para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$f(z) \in \{\ln |C| + i \arg C : \arg C \in \mathrm{Arg}C\},$$

donde $\mathrm{Arg}C$ denota el conjunto de todos los argumentos de C. Entonces, el conjunto $f(\mathbb{C})$ es discreto. Además, como f es una función continua y $\mathbb{C}$ es un conjunto conexo , $f(\mathbb{C})$ también es conexo. Por tanto $f(\mathbb{C})$ es un conjunto unipuntual, y por consiguiente f es constante.

$c) \Rightarrow a)$ Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$. Como $0 \notin f(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}$ es simplemente conexo, existe $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de tal manera que $f = e^h$. Tampoco se anula nunca la función $1 - f$, luego existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $1 - f = e^g$. Se tiene que $e^h + e^g = 1$, y el apartado c) nos garantiza que h y g son constantes y, por lo tanto, f también lo es.

En conclusión, basta demostrar el apartado a) para obtener el Teorema Pequeño de Picard.
Supongamos que f omite los valores 0 y 1. Aplicando el lema 2.2 podemos asegurar que existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ de manera que $f(z) = \frac{1}{2}\big[1 + \cos \pi(\cos \pi g(z))\big]$ y tal que $g(\Omega)$ no contiene bolas de radio 1. Por el corolario 1.6 la función g es constante, luego f también. □

A continuación obtendremos algunas consecuencias de este teorema. Para la primera de ellas, recordemos que una función meromorfa en $\mathbb{C}$ es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en un conjunto discreto (posiblemente vacío) de singularidades aisladas, todas ellas polares. Se entiende que tales funciones mandan cada polo al punto del infinito, de modo que la función se puede entender como una función continua de $\mathbb{C}$ en $\widehat{\mathbb{C}}$. Denotamos por $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ al conjunto de todas las funciones meromorfas en $\mathbb{C}$.

Teorema 2.4 (Teorema pequeño de Picard para funciones meromorfas). Cada función $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ que omite tres valores distintos $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ es una función constante.

Demostración:
Si $\infty \notin h(\mathbb{C})$, h es una función entera y omite dos valores, luego sabemos que es constante por el teorema anterior.
En caso contrario, supongamos que $a \neq \infty$. Por ser $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, la función $1/(h-a)$ se prolonga por continuidad en los polos, luego es una función entera y además omite los valores $1/(b-a)$ y $1/(c-a)$. Por tanto, el Teorema Pequeño

de Picard 2.3 nos garantiza que $1/(h-a)$ es constante, luego h también lo es. $\square$

De cara a la segunda aplicación recordamos el concepto de punto fijo.

Definición 2.5. Sea $a \in \mathbb{C}$. Se dice que a es un *punto fijo* de la función f si $f(a) = a$.

Por lo general, las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ no tienen puntos fijos. Por ejemplo, la función $f(z) = z + e^z$ no tiene ninguno. Sin embargo, se puede afirmar la existencia de tales puntos para la iterada segunda de una función entera, salvo que ésta sea una traslación.

Teorema 2.6 (Teorema del Punto Fijo)**.** Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función entera. Entonces $f \circ f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ siempre tiene un punto fijo excepto cuando f es una traslación.

Demostración:
Supongamos que $f \circ f$ no tiene puntos fijos y veamos que f ha de ser una traslación. Si f tuviera un punto fijo z_0, $f(f(z_0)) = f(z_0) = z_0$, lo cual hemos descartado. Por tanto, tanto $f \circ f$ como f no tienen puntos fijos. Se sigue entonces que la función $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

es entera y omite los valores 0 y 1. Por el Teorema Pequeño de Picard 2.3 sabemos que g es constante, es decir, existe una constante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tal que $g(z) = c$. Esto es equivalente a decir que

$$f\big(f(z)\big) - z = c\big(f(z) - z\big).$$

Derivando,

$$f'(f(z))f'(z) - 1 = cf'(z) - c,$$

luego

$$f'(z)[f'(f(z)) - c] = 1 - c.$$

Hemos dicho que $c \neq 1$, por tanto $f'(z) \neq 0$ y $f'(f(z)) \neq c$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, $f' \circ f$ omite los valores 0 y c. Aplicando de nuevo el Teorema Pequeño de Picard, sabemos que $f' \circ f$ es constante. Por lo visto anteriormente al derivar, tenemos que

$$f'(z) = \frac{1 - c}{f'(f(z)) - c} = \frac{1 - c}{(f' \circ f)(z) - c},$$

y acabamos de probar que $f' \circ f$ es constante. Se sigue entonces que f' también es constante, y por tanto existirán $a, b \in \mathbb{C}$ de manera que $f(z) = az+b$. Ahora bien, si fuese $a \neq 1$ el punto $z_0 = b/(1-a)$ sería un punto fijo de f, lo cuál nos lleva a contradicción. Así pues, sólo puede ser que $f(z) = z + b$. Del mismo modo, como $f(z)$ no tiene puntos fijos, $b \neq 0$. Por tanto, f es una traslación. □

Por último, observemos que las funciones enteras $f = \cos(h)$ y $g = \sin(h)$, donde $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, satisfacen la ecuación $f^2 + g^2 = 1$. Vamos a tratar de investigar la solución de la ecuación de Fermat $X^n + Y^n = 1$ para $n \geq 3$ mediante funciones meromorfas en $\mathbb{C}$.

Proposición 2.7. Si $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ y $f^n + g^n = 1$ con $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 3$, entonces f y g o son funciones constantes o tienen polos comunes.

Demostración:
Supongamos que $\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{P}(g) = \emptyset$ y veamos que entonces tanto f como g han de ser constantes. Se sigue de la ecuación $f^n + g^n = 1$ que $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(g) = \emptyset$; por tanto f y g son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$. Supongamos que $g \neq 0$. Como $\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) = \emptyset$, $f/g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ toma el valor a en el punto $\omega \in \mathbb{C}$ si, y sólo si, $f(\omega) = ag(\omega)$. Se sigue de la factorización

$$1 = \prod_{i=1}^{n} (f - \zeta_i g), \qquad \text{donde } \zeta_1 \ldots \zeta_n \text{ son las n raices de } X^n + 1,$$

que f/g no toma ninguno de los n valores distintos $\zeta_1 \ldots \zeta_n$. Como $n \geq 3$, el Teorema de Picard 2.3 implica que $f = cg$ siendo c una constante distinta de $\zeta_1 \ldots \zeta_n$. Luego

$$f^n + g^n = c^n g^n + g^n = (c^n + 1)\, g^n = 1.$$

Ahora bien, para todo $z \in \mathbb{C}$ la imagen $g(z)$ pertenece al conjunto de las raíces n-ésimas de $1/(c^n + 1)$, luego $g(\mathbb{C})$ es un conjunto discreto. Además, puesto que $\mathbb{C}$ es conexo y g una función continua se tiene que $g(\mathbb{C})$ es conexo. Por consiguiente $g(\mathbb{C})$ es un conjunto unipuntual, lo cual nos garantiza que g es constante. De forma análoga se prueba que $f(\mathbb{C})$ es un conjunto unipuntual y f constante. □

Capítulo 3

Teorema de Schottky y consecuencias

3.1. Teorema de Schottky

En esta sección vamos a probar que el crecimiento en los compactos de las funciones holomorfas en un abierto que contiene a la bola unidad cerrada y que omiten los valores 0 y 1 puede ser estimado por una cota universal.

Sea $r > 0$, y consideremos el conjunto $\mathcal{S}(r)$ de todas las funciones $f \in \mathcal{H}\left(\overline{B}(0,1)\right)$ tales que los valores 0 y 1 no pertenecen a su imagen y que verifican $|f(0)| \leq r$. Elegimos una constante β para la cual se verifica el Teorema de Bloch (por ejemplo, $\beta = 1/12$), y consideramos en $(0,1) \times (0,\infty)$ la función positiva

$$L(\theta, r) = \exp\left\{\pi \exp\left[\pi\left(3 + 2r + \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}\right)\right]\right\}. \tag{3.1}$$

El Teorema de Schottky se enuncia como sigue:

Teorema 3.1 (Teorema de Schottky). Para cada función $f \in \mathcal{S}(r)$ se verifica que

$$|f(z)| \leq L(\theta, r)$$

para todo $z \in B(0,1)$ con $|z| \leq \theta$, con $0 < \theta < 1$.

Puede parecer sorprendente a primera vista, pero este teorema tan peculiar es más fuerte que el Teorema Pequeño de Picard 2.3. Aún así, la forma explícita de la función cota $L(\theta, r)$ puede ser mejorada considerablemente.
Antes de probarlo, veamos algunos resultados previos.

Lema 3.2. Si $\cos \pi a = \cos \pi b$ entonces $b = \pm a \pm 2n$ siendo $n \in \mathbb{N}_0$. Además, para cada $\omega \in \mathbb{C}$ existe un $v \in \mathbb{C}$ de manera que $\cos \pi v = \omega$ y $|v| \leq 1 + |\omega|$.

Demostración:
Sabemos que

$$\begin{aligned}\cos \pi a - \cos \pi b &= -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi a + \pi b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi a - \pi b}{2}\right)\\ &= -2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(a+b) \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(a-b)\,.\end{aligned}$$

Por tanto, la primera afirmación es obvia.
Para la segunda parte del enunciado, elegimos $v = \alpha + i\beta$ con $\omega = \cos \pi v$ y $|\alpha| \leq 1$. Como

$$\begin{aligned}|\omega|^2 = |\cos \pi v|^2 = |\cos \pi(\alpha + i\beta)|^2 &= |\cos \pi\alpha \cdot \cosh \pi\beta - i \operatorname{sen}\pi\alpha \cdot \operatorname{senh}\pi\beta|^2\\ &= \cos^2 \pi\alpha \cdot \cosh^2 \pi\beta + \operatorname{sen}^2 \pi\alpha \cdot \operatorname{senh}^2 \pi\beta\\ &= \cos^2 \pi\alpha \cdot \cosh^2 \pi\beta + \operatorname{senh}^2 \pi\beta - \cos^2 \pi\alpha \cdot \operatorname{senh}^2 \pi\beta\\ &= \cos^2 \pi\alpha \left(\cosh^2 \pi\beta - \operatorname{senh}^2 \pi\beta\right) + \operatorname{senh}^2 \pi\beta = \cos^2 \pi\alpha + \operatorname{senh}^2 \pi\beta\end{aligned}$$

y $\operatorname{senh}^2 \pi\beta \geq \pi^2\beta^2$, se tiene que

$$|v| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \sqrt{1 + \frac{\operatorname{senh}^2 \pi\beta}{\pi^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{|\omega|^2}{\pi^2}} \leq 1 + \frac{|\omega|}{\pi} \leq 1 + |\omega|.$$

□

Con ayuda de este lema, podemos obtener una versión mejorada del teorema 2.2

Teorema 3.3. Si $f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$ es una función que omite los valores 0 y 1, entonces existe una función $g \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$ con las siguientes propiedades:

1) $f = \frac{1}{2}\left[1 + \cos \pi(\cos \pi g)\right]$ y $|g(0)| \leq 3 + 2|f(0)|$.

2) $|g(z)| \leq |g(0)| + \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}$ para cada z con $|z| \leq \theta$, siendo $0 < \theta < 1$.

Demostración:

1) Como la función f omite los valores 0 y 1, $2f - 1$ omite los valores -1 y 1. El lema 2.1 garantiza que la ecuación $2f - 1 = \cos \pi \widehat{F}$ se verifica para alguna $\widehat{F} \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$. Aplicando el lema 3.2 sabemos que existe un $b \in \mathbb{C}$ tal que $\cos \pi b = 2f(0) - 1$ y $|b| \leq 1 + |2f(0) - 1| \leq 2 + 2|f(0)|$. Además, como $\cos \pi b = \cos \pi \widehat{F}(0)$ se tiene que $b = \pm \widehat{F}(0) + 2k$ para un

$k \in \mathbb{Z}$ adecuado.
Para $F = \pm\widehat{F} + 2k \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$, tenemos que $2f - 1 = \cos \pi F$ con $F(0) = b$. Como F omite todos los valores enteros, de nuevo podemos afirmar que existe $\widehat{g} \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$ con $F = \cos \pi \widehat{g}$, y aplicando el lema anterior sabemos que existe un elemento $a \in \mathbb{C}$ tal que $\cos \pi a = b$ y $|a| \leq 1 + |b| \leq 3 + 2|f(0)|$.
Mediante todo lo anterior resulta obvio que $\cos \pi a = \cos \pi \widehat{g}(0)$, por tanto el lema 3.2 nos permite pasar a una función $g = \pm\widehat{g} + 2m$ con $m \in \mathbb{Z}$ adecuado, de modo que $g(0) = a$ y $F = \cos \pi g$. La propiedad 1) se verifica para esta función g.

2) El apartado 1) nos asegura que g es una función para la cual se verifica (2.1), por tanto el teorema 2.2 nos dice que $g(B(0,1))$ no contiene bolas de radio 1. Como $\operatorname{dist}\big(z, \partial B(0,1)\big) \geq 1 - \theta$ cuando $|z| \leq \theta$, sabemos por el corolario 1.6 que $\beta(1-\theta)|g'(z)| \leq 1$, es decir, $|g'(z)| \leq \frac{1}{\beta(1-\theta)}$.
En consecuencia, para todo z con $|z| \leq \theta$ se tiene que

$$g(z) - g(0) = \int_0^z g'(x)dx$$

y

$$\begin{aligned} \left| \int_0^z g'(x)dx \right| &\leq \int_0^z |g'(x)|dx \leq \int_0^z \frac{1}{\beta(1-\theta)}dx = \frac{1}{\beta(1-\theta)}|z| \\ &\leq \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Veamos que este teorema implica de forma inmediata el teorema de Schottky.
Demostración Teorema de Schottky:
Para todo $\omega \in \mathbb{C}$ se verifica que

$$|\cos \omega| \leq e^{|\omega|} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}|1 + \cos \omega| \leq e^{|\omega|},$$

luego los apartados 1) y 2) del teorema anterior implican que, para todo z con $|z| \leq \theta$,

$$|f(z)| \leq \exp\left[\pi \exp(\pi |g(z)|)\right] \leq \exp\left\{\pi \exp\left[\pi \left(3 + 2|f(0)| + \frac{\theta}{\beta(1-\theta)}\right)\right]\right\}.$$

Por ser f perteneciente a $S(r)$ sabemos que $|f(0)| \leq r$, por consiguiente, podemos garantizar la afirmación del enunciado. □

Teorema 3.4 (Teorema de Landau)**.** Existe una función estrictamente positiva $R(a)$, definida en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, para la cual no existe ninguna función $f \in \mathcal{H}\big(\overline{B}(0, R(a))\big)$ con $f(0) = a$ y $f'(0) = 1$ de manera que f omita los valores 0 y 1.

Demostración:
Sea $R(a) = 3L\big(\frac{1}{2}, |a|\big)$ donde L es la función dada en (3.1). Razonamos por reducción al absurdo: Para ello, supongamos que existe $f(z) = a + z + \ldots \in \mathcal{H}\big(\overline{B}\big(0, R(a)\big)\big)$ que omite los valores 0 y 1, entonces la función $g(z) = f(Rz) = a + Rz + \ldots \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$, donde $R = R(a)$, también omitirá estos dos valores. Por el Teorema de Schottky tenemos que

$$\text{máx}\left\{|g(z)| : |z| \leq \frac{1}{2}\right\} \leq L\left(\frac{1}{2}, |a|\right) = \frac{1}{3}R.$$

Pero las desigualdades de Cauchy nos dicen que

$$R \leq 2\,\text{máx}\left\{|g(z)| : |z| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

Por tanto, hemos llegado a contradicción, luego no existe dicha función f. $\square$

El Teorema de Landau contiene al Teorema Pequeño de Picard. Basta probar que ninguna función entera no constante omite los valores 0 y 1. Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ una función no constante, tomamos ζ de manera que $f'(\zeta) \neq 0$ y $a = f(\zeta)$ de manera que a sea distinto de 0 y de 1. Entonces, para $a \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, definimos la función

$$h(z) = f(\zeta + z/f'(\zeta)) = a + z + \ldots \in \mathcal{H}(\mathbb{C}).$$

Ahora bien, $h(0) = f(\zeta)$ y $h'(0) = 1$, por tanto por el teorema de Landau 3.4 sabemos que la función h no omite los valores 0 y 1 en la bola $\overline{B}(0, R(a))$.

3.2. Consecuencias del teorema de Schottky

Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$. Obtendremos, como consecuencia del teorema de Schottky, información acerca de la familia

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f \text{ omite los valores } 0 \text{ y } 1\}. \tag{3.2}$$

Este teorema nos proporciona versiones mejoradas de los teoremas clásicos de Montel y Viteli (ver el apéndice).

Teorema 3.5 (Teoremas de Montel y Vitali)**.** Para cada $\omega \in \Omega$ y para cada $r \in (0, \infty)$, sea $\mathcal{F}_*$ una subfamilia de $\mathcal{F}$ de tal manera que $|g(\omega)| \leq r$ para toda función $g \in \mathcal{F}_*$. Entonces

(1) Existe un entorno V de ω tal que la familia $\mathcal{F}_*$ está acotada en V.

Demostración:
Consideramos la bola $\overline{B}(\omega, 2t) \subset \Omega$ y tomamos, sin pérdida de generalidad, $\omega = 0$ y $2t = 1$. Por el Teorema de Schottky,

$$\text{máx}\{\|g\|_{B(\omega,t)} : g \in \mathcal{F}_*\} \leq L\left(\frac{1}{2}, r\right) < \infty.$$

$\square$

Ahora fijamos un punto $p \in \Omega$ y sea $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} : |f(p)| \leq 1\}$.

(2) La familia $\mathcal{F}_1$ está localmente acotada en Ω.

Demostración:
Consideramos el conjunto

$$U = \{\omega \in \Omega : \mathcal{F}_1 \text{ esta acotada en un entorno de } \omega\}.$$

Por definición U es un abierto de Ω. Queremos probar que $U = \Omega$. Si U es distinto de Ω, por (1) existiría un punto $\omega \in \partial U \cap \Omega$ y una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{F}_1$ con $\text{lím}_{n\to\infty} |f_n(\omega)| = \infty$. Sea $g_n = 1/f_n$; es obvio que $g_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\text{lím}_{n\to\infty} g_n(\omega) = 0$, sabemos por (1) que la familia $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotada en un entorno de ω. Por el Teorema de Montel A.9, existe una subsucesión $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en una bola B de centro ω hacia una función $g \in \mathcal{H}(B)$. Como todas las g_n son no nulas y $g(\omega) = 0$, se sigue del Teorema de Hurwitz A.11 que $g \equiv 0$. Pero entonces $\text{lím}_{k\to\infty} f_{n_k} = \infty$ en los puntos de $U \cap B \neq \emptyset$, en contra de la definición de U. $\square$

Definición 3.6. Decimos que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{F}$ *converge compactamente hacia* ∞ si para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $M > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ y $z \in K$ se cumple $|f_n(z)| \geq M$.

Definición 3.7. Sea $\mathcal{G}$ la familia de todas las funciones holomorfas en un abierto conexo Ω. Se dice que $\mathcal{G}$ es una *familia normal* si toda sucesión de funciones de elementos de $\mathcal{G}$ tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{H}(\Omega)$ o bien una subsucesión que converge compactamente a ∞ en Ω.

Teorema 3.8 (Teorema de Montel)**.** La familia $\mathcal{F}$ es una familia normal en Ω.

Demostración:
Podemos descomponer $\mathcal{F}$ como la unión de dos subconjuntos:

$$\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} : |f(p)| \leq 1\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{F} : |f(p)| > 1\}.$$

Toda sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión en $\mathcal{F}_1$ o en $\mathcal{F}_2$, luego basta probar que ambos conjuntos son normales. Hemos visto en el segundo apartado del teorema anterior que $\mathcal{F}_1$ está localmente acotada en Ω, por consiguiente, $\mathcal{F}_1$ es normal. Ahora consideremos el conjunto $\mathcal{F}_2$. Si una función f pertenece a $\mathcal{F}_2$ entonces $1/f$ es holomorfa en Ω porque f no se anula. Asimismo, $1/f$ no toma los valores 0 ni 1 y $|(1/f)(p)| \leq 1$, luego $1/f \in \mathcal{F}_1$. Por lo tanto, si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{F}_2$, la sucesión $\{1/f_n : n \in \mathbb{N}\}$ está contenida en $\mathcal{F}_1$, luego tiene una subsucesión convergente a una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. El teorema de Hurwitz A.11 implica que o bien f es idénticamente nula o bien no tiene ceros en Ω. En el primer caso es fácil ver que la subsucesión converge compactamente a ∞, en el segundo caso la subsucesión converge a la función holomorfa $1/f$. $\square$

Teorema 3.9 (Teorema de Carathéodory-Landau)**.** Sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$, y sea $f_1, f_2, \ldots$ una sucesión de aplicaciones holomorfas de Ω en $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \in \mathbb{C}$ existe para un conjunto de puntos de Ω que tiene al menos un punto de acumulación en Ω. Entonces la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge de manera compacta en Ω.

Demostración:
Podemos suponer que $a = 0$ y $b = 1$. La sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ debe entonces estar localmente acotada en Ω. $\square$

Una función entera no polinómica tiene una singularidad esencial en el infinito, y sucede que el próximo teorema, denominado Grande de Picard, es válido para funciones holomorfas arbitrarias, no necesariamente enteras, alrededor de una singularidad esencial. Probaremos que, alrededor de una singularidad esencial, una función holomorfa toma infinitas veces cada valor complejo, con a lo sumo una excepción.

Teorema 3.10 (Teorema Grande de Picard)**.** Sea f una función holomorfa con una singularidad esencial en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces f toma infinitas veces cada valor complejo en cualquier entorno de z_0, con a lo sumo una excepción.

Demostración:
Veremos que si una función omite dos valores en un entorno de una singularidad aislada, entonces dicha singularidad no es esencial. Es claro que no perdemos generalidad si suponemos que $z_0 = 0$. Así mismo, si suponemos que f no toma dos valores complejos en el entorno punteado $B^*(0,1)$, podemos suponer que estos valores son 0 y 1. Veamos entonces que o bien f o bien $1/f$ está acotada en un entorno punteado de 0. Sea $\{f_n\}_1^\infty$ la sucesión dada por $f_n(z) = f\,(z/n)$. Es claro que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es la familia dada en (3.2) para $\Omega = B^*(0,1)$, pues cada f_n es holomorfa y omite los valores 0 y 1. Por el Teorema de Montel 3.8, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ que converge uniformemente en $\partial B\big(0, \frac{1}{2}\big)$, ya sea a una función g holomorfa en Ω, ya sea a ∞.
En el primer caso se tiene que $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ está acotada en $\partial B\big(0, \frac{1}{2}\big)$, es decir, existe $M \in (0,\infty)$ de manera que

$$|f_{n_k}\,(z)\,| = \left|f\left(\frac{z}{n_k}\right)\right| \leq M \quad \text{para todo } z \text{ con } |z| = 1/2 \quad y \quad n_k \geq 1\ ,$$

Por tanto $|f(z)| \leq M$ en cada bola de centro 0 y radio $1/(2n_k)$. Con el principio del Módulo Máximo A.8 concluimos que $|f(z)| \leq M$ en cada corona $1/2n_{k+1} \leq |z| \leq 1/2n_k$. Por tanto, f está acotada en un entorno punteado de 0, y 0 será singularidad evistable de f.
Si por el contrario la subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ converge compactamente a ∞, entonces es $\{1/f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ la que está acotada en $\partial B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y se obtiene, razonando de forma similar, que $1/f$ está acotada en un entorno punteado de 0, y 0 será singularidad polar de f. $\square$

Corolario 3.11. Si f es una función entera que no es un polinomio, entonces f toma cada número complejo un número infinito de veces con una posible excepción.

Demostración:
Consideramos la función $g(z) = f(1/z)$. Como f no es un polinomio, g tiene una singularidad esencial en $z = 0$. El resultado sigue de aplicar el Teorema Grande de Picard 3.10. $\square$

Apéndice A

Resultados utilizados

Recopilamos en este apéndice los resultados clásicos de la teoría elemental de funciones de variable compleja a los que se ha hecho referencia en el texto.

Teorema A.1 (Teorema de la aplicación abierta)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función no constante y $a \in \Omega$. Si $b = f(a)$ y m es la multiplicidad de a como cero de la función $f(z) - b$, entonces existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \mathbb{C}$, tal que $V_b = f(U_a)$ es un entorno abierto de b que verifica que para cada $\omega \in V_b \setminus \{b\}$, la función $z \mapsto f(z) - \omega$ posee m ceros distintos en U_a, todos ellos simples. Por consiguiente, f es abierta.

Teorema A.2 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** Todo polinomio (con coeficientes complejos) de grado $n \in \mathbb{N}$ tiene n raíces complejas (contando su multiplicidad).

Teorema A.3 (Teorema de Casorati-Weierstrass)**.** Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, de modo que z_0 es una singularidad esencial de f. Entonces para todo $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset \Omega$ se cumple que $f(B^*(z_0, r))$ es denso en $\mathbb{C}$.

Teorema A.4 (Fórmula integral de Cauchy)**.** Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y D es una bola con $\overline{D} \subset \Omega$ entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad z \in D.$$

Teorema A.5 (Desigualdades de Cauchy)**.** Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, $a \in U$ y f una función holomorfa en U. Para cada $r > 0$ con $\overline{B}(a, r) \subset U$, denotamos por

$$M_{(f,a,r)} = \sup\{|f(\omega)| : |\omega - a| = r\} < \infty.$$

Entonces, para cada $n = 0, 1, 2\dots$ se verifica que

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!}{r^n} M_{(f,a,r)}.$$

Teorema A.6 (Lema de Schwarz)**.** Sea $f \in \mathcal{H}(B(0,1))$ con $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0,1)$. Entonces

a) $|f(z)| \leq z$ para todo $z \in B(0,1)$.

b) $|f'(0)| \leq 1$.

Lema A.7 (Lema de Julia)**.** Sea $f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0,1))$ con $f(1) = 1$ y $|f(z)| < 1$ para todo $z \in B(0,1)$. Entonces $\alpha = h'(1) > 0$ y

$$\frac{|1-h(z)|^2}{1-|h(z)|^2} \leq \alpha \cdot \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2},\ z \in B(0,1).$$

Teorema A.8 (Principio del Módulo Máximo)**.** Sea $\Omega \in \mathbb{C}$ un dominio del plano complejo y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y no constante. Entonces $|f|$ no alcanza un máximo local en ningún punto de Ω.

Teorema A.9 (Teorema de Montel clásico)**.** Una familia de funciones holomorfas definidas en un conjunto abierto del plano complejo es normal si, y sólo si, está uniformemente acotada en los compactos del abierto.

Teorema A.10 (Teorema de Vitali clásico)**.** Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada en cada compacto de un dominio Ω del plano complejo $\mathbb{C}$. Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en un conjunto A tal que $A' \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre los compactos de Ω.

Teorema A.11 (Teorema de Hurwitz)**.** Sea Ω un dominio del plano complejo. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω tales que ninguna se anula en ningún punto de Ω. Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente sobre los compactos de Ω hacia cierta función f. Entonces o bien f es idénticamente nula, o bien f no se anula en ningún punto de Ω.

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors, An extension of Schwarz's lemma, Trans. Am. Math. Soc. 43 (1938), 359–364.

[2] R.B. Ash and W.P. Novinger, Complex Variables, disponible en la página web: www.math.uiuc.edu/ r-ash/CV.html

[3] M. Bonk, On Bloch's constant, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 889–894.

[4] H. Chen and P. Gauthier, On Bloch's constant, J. Analyse Math. 69 (1996), 275–291.

[5] H. Chen and M. Shiba, On the locally univalent Bloch constant, J. Analyse Math. Vol.94 (2004), 159–171.

[6] J. B. Conway, Functions of one complex variable I. Graduate Texts in Mathematics 11. Springer-Verlag, New York, 1973.

[7] M. Heins, On a class of conformal metrics, Nagoya Math. J. 21 (1962), 1–60.

[8] D. Minda, Bloch constants, J. Analyse Math. 41 (1982), 54–84.

[9] Ch. Pommerenke, On Bloch functions, J. London Math. Soc. (2) 2 (1970), 689–695.

[10] R. Remmert, Classical Topics in Complex Function Theory, Graduate Texts in Mathematics 172. Springer-Verlag, New York, 1998.

[11] R. Rettinger, On the computability of Bloch's constant, Proceedings of the Fourth International Conference on Computability and Complexity in Analysis (CCA 2007), 315—322, Electron. Notes Theor. Comput. Sci., 202, Elsevier, 2008.

[12] G. Sansone and J. Gerretsen, Lectures on the theory of functions of a complex variable, Vol. II: Geometric theory. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen 1969.

[13] H. Yanagihara, On the locally univalent Bloch constant, J. Analyse Math. 65 (1995), 1–17.

[14] C. Xiong, Lower bound of Bloch's constant, Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan 15, 1998, 174–179.