Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Métodos Numéricos Para la Valoración de Opciones

Autor:

D. Vanessa Jiménez Terradillos

Tutor:

D. Javier de Frutos Baraja

Métodos Numéricos Para la Valoración de Opciones

Vanessa Jiménez Terradillos

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo de fin de grado es dar una introducción elemental al uso de métodos en diferencias finitas para la resolución numérica de las ecuaciones en derivadas parciales que aparecen en la modelización de los derivados financieros, en particular de los contratos de opciones.

La teoría moderna de las Finanzas Matemáticas se inicia con los artículos de F. Black, M. Scholes [1] y R.C. Merton [7]. Desde entonces y en paralelo con la teoría, el comercio de opciones y otros derivados financieros se ha desarrollado enormemente en todos los mercados del mundo.

Existe una literatura muy extensa que trata sobre la valoración de productos financieros tanto desde el punto de vista de la modelización matemática como de los métodos numéricos eficientes y fiables para su aproximación. Aunque hay diferentes puntos de vista, la modelización mediante ecuaciones en derivadas parciales es una de las técnicas más utilizadas en la teoría de las Finanzas Matemáticas.

Para algunos modelos, los más simples, existen fórmulas cerradas que permiten su utilización sencilla desde un punto de vista tanto cuantitativo como cualitativo. Otras veces se utilizan aproximaciones semianalíticas o se utilizan modelos aproximados para los que sí existen fórmulas cerradas. Sin embargo en la mayoría de las ocasiones es necesario algún tipo de aproximación numérica. Este trabajo se centra principalmente en los métodos en diferencias finitas que son los más sencillos en el contexto de la modelización mediante ecuaciones en derivadas parciales.

En este trabajo se ponen en contexto algunos conceptos de finanzas y modelado de activos, se introducen las opciones Europeas y Americanas y se da una solución al problema de la valoración de dichas opciones, por medio de métodos en diferencias finitas. Para la redacción de este trabajo hemos seguido principalmente, aunque no exclusivamente, el libro [11] y las notas [3].

Capítulo 2

Conceptos básicos de finanzas

2.1. Definiciones básicas

En esta sección vamos a dar una serie de definiciones que nos serán muy útiles para aclarar conceptos que van a aparecer en el resto del trabajo [12] [13].

- **Activo**: Un activo financiero es cualquier valor negociable, es decir, que se puede comprar y vender, y que da derecho a una participación o inversión en el capital de una empresa, bien sea en forma de préstamo o de participación en la sociedad.

- **Acción**: Una acción es una participación en el capital social de una sociedad o una empresa, que da a su propietario (al accionista) derecho a percibir parte de los beneficios de la misma (dividendos). Puede cotizar en la bolsa o no y su valor fluctúa dependiendo del valor de la empresa, del estado del sector de actividad en el que opere y del estado de la economía.

- **Bienes**: son propiedades tangibles de una empresa y recursos con los que cuenta una negociación o empresa para su uso y explotación, se expresa su valor en términos monetarios.

- **Derivado**: Un derivado financiero es un producto financiero cuyo valor se basa en el precio de otro activo diferente. El activo del que depende toma el nombre de activo subyacente y el activo dependiente el de derivado.
- **Opción**: Una opción es un instrumento financiero derivado que se establece en un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender el activo subyacente a un precio determinado, llamado strike o precio de ejercicio, en una fecha concreta (vencimiento) fijada en el contrato.
- **Volatilidad**: La volatilidad es una medida de la frecuencia e intensidad de los cambios del precio de un activo.
- **Tasa de interés**: es el porcentaje al que esta invertido un capital en una unidad de tiempo. La tasa de interés representa un balance entre el riesgo y la posible ganancia de la utilización de una suma de dinero en una situación y tiempo determinado.
- **Payoff**: El Payoff es el valor de la opción al vencimiento. En general depende del precio del subyacente al vencimiento que es desconocido en el momento de firma del contrato.
- **Portfolio**: Conjunto de los activos financieros en los cuales invierte una persona o una empresa. Incluye todos aquellos activos que implican un capital del que se espera obtener un cierto rendimiento.
- **Venta en corto**: Es la práctica de venta de activos que no se poseen y han de tomarse en préstamo de un tercero.

2.2. Activos y su modelización

En esta sección se describe un modelo matemático simple para describir la evolución del precio de un activo.

Observemos que un cambio de 1 € en el precio de un activo, es mucho más significante cuando el precio del activo es 20 € que cuando es 200 €. A cada cambio en el precio del activo, le asociaremos un **retorno** definido como el cambio del valor del precio dividido entre el valor original, es decir, el retorno es el cambio porcentual en el valor del activo durante un periodo de tiempo dado.

Ahora, supongamos que en tiempo t el precio del activo es S_t. Vamos a considerar un intervalo de tiempo Δt durante el cuál S_t cambia a $S_t + \Delta S_t$. Entonces el retorno se define por $\Delta S_t / S_t$. El modelo más común descompone el retorno en dos partes:

1. Una parte predecible.

   Se supone una contribución $\mu \Delta t$ al retorno $\Delta S_t / S_t$, donde μ es una medida de la tasa media del crecimiento del precio del activo, conocida como **drift**. En modelos simples μ es una constante. En modelos más complicados μ puede ser una función de S_t y de t.

2. Una parte estocástica.

   Los cambios en el precio de un activo son producidos por un gran número de agentes que influyen con su actividad en el precio del activo, bien negociando en el mercado de acuerdo a las reglas de la oferta y de la demanda, bien mediante la generación de nuevas condiciones o simplemente noticias que afectan a la opinión que los inversores poseen del activo y en consecuencia, directamente a su precio. Este cambio aleatorio en el precio se modela, en el caso más sencillo, por una variable aleatoria normal de media 0 y desviación típica $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Esto supone una contribución $\sigma \Delta X_t$ con $\Delta X_t \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$.

En el límite cuando $\Delta t \to 0$ se obtiene, teniendo en cuenta ambas contribuciones, la **ecuación diferencial estocástica**

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$$

Si tomamos $\sigma = 0$, nos quedamos con una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu S_t.$$

Cuando μ es constante esta ecuación puede interpretarse como una ecuación diferencial que puede ser resuelta exactamente como una exponencial creciente en el valor del activo, es decir,

$$S_t = S_0 e^{\mu(t-t_0)}$$

donde S_0 es el valor del activo en tiempo $t = t_0$. Por tanto, si $\sigma = 0$ el precio del activo es totalmente deterministas y podemos predecir el precio futuro del activo con certeza. Es lo que se llama un activo libre de riesgo.

El término dX_t contiene la aleatoriedad característica del comportamiento del precio de los activos. Aunque una definición formal está fuera del objetivo de este trabajo, si podemos decir que $\{X_t\}$ es un proceso estocástico llamado **proceso Wiener**, que puede caracterizarse por las siguientes propiedades [2]:

- $X_0 = 0$.
- $\{X_t\}$ posee incrementos independientes, es decir, si $r < s \leq t < u$, entonces
$$X_u - X_t \text{ y } X_s - X_r$$
son variables aleatorias independientes.
- $X_t - X_s$ $(s < t)$ es una variable aleatoria Gaussiana $N(0, \sqrt{t-s})$.
- $\{X_t\}$ tiene trayectorias continuas.

La ecuación
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$$
es un ejemplo particular de un **camino aleatorio**. Esta ecuación proporciona información importante acerca del comportamiento de S_t en sentido probabilístico. Ilustremos esto con un ejemplo: Supongamos que la fecha de hoy es t_0 y el precio del activo es S_0. Si denotamos el precio en t', seis meses después por S', entonces S'/S_0 es una variable aleatoria con una función de densidad como la mostrada en la figura 2.1 (Imagen tomada de [11]).

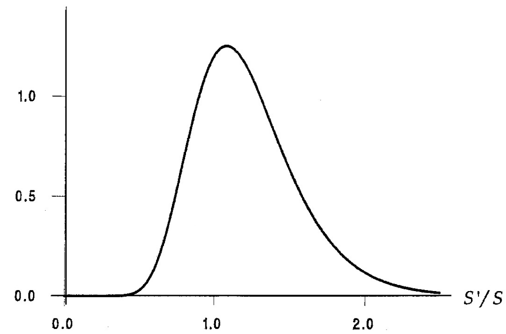

Figura 2.1: *La función de densidad de S'/S*

Por consiguiente, el precio futuro S' es más probable que este cerca de S_0. Cuanto más lejos este t' de t_0, más extendida esta la distribución. Si S_t sigue el camino aleatorio dado en $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$ entonces la función de densidad es representada de forma sesgada en forma de campana. Esta es la distribución lognormal y, por tanto, el camino aleatorio es conocido como un camino aleatorio lognormal.

Podemos pensar en $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$ como una fórmula para generar series temporales, cada serie temporal da lugar a diferentes resultados. Cada camino es llamado **realización** del camino aleatorio. En la figura 2.2 podemos ver representados varios caminos aleatorios.

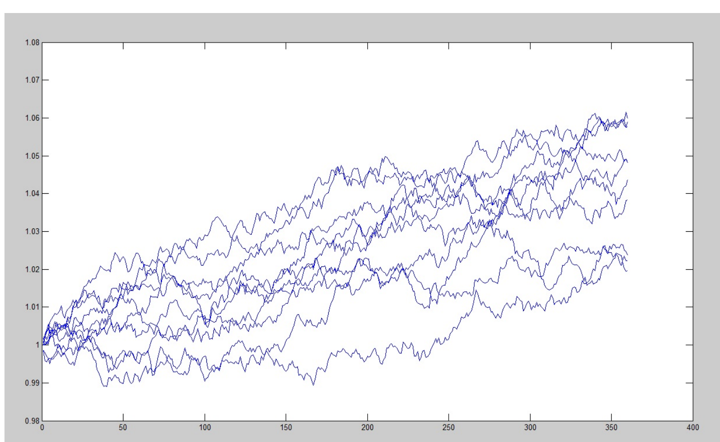

Figura 2.2: *Gráfica representando varios caminos aleatorios.*

Una propiedad de la ecuación $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$ es que no hace referencia al pasado histórico del precio del activo. Estamos suponiendo que el precio actual del activo refleja completamente la historia de los precios pasados del activo y cualquier nueva información se refleja instantáneamente en el precio del activo. En consecuencia, el precio futuro del activo solo depende del precio en el instante actual. Esta independencia del pasado es llamada **propiedad de Markov**.

2.2.1. Lema de Itô

El lema de Itô es un resultado sobre el uso de variables aleatorias. Vamos a dar una explicación no rigurosa pero sí suficiente para entender el resultado.

Supongamos que $f(S_t)$ es una función regular de S_t. Si variamos S_t por una pequeña cantidad dS_t, entonces f también varía por una pequeña cantidad. Desarrollando la serie de Taylor, podemos escribir:

$$df = \frac{df}{dS} dS_t + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} dS_t^2 + \cdots .$$

Recordemos que dS_t viene dado por $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} dS_t^2 &= (\sigma S_t dX_t + \mu S_t dt)^2 \\ &= \sigma^2 S_t^2 dX^2 + 2\sigma\mu S_t^2 dt\ dX_t + \mu^2 S_t^2 dt^2. \end{aligned}$$

Observamos el orden de cada término. Si

$$dX_t = O(\sqrt{dt}),$$

el primer término es el más grande en términos de dt y domina a los otros dos. Por tanto,

$$dS_t^2 = \sigma^2 S_t^2 dX_t^2 + \cdots .$$

Si $dX_t^2 \to dt$, entonces

$$dS_t^2 \to \sigma^2 S_t^2 dt.$$

Si sustituimos esto en la ecuación $df = \frac{df}{dS} dS_t + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS^2} dS_t^2 + \cdots$ y nos quedamos sólo con los términos de orden menor que $O(dt)$ nos queda:

$$df = \frac{df}{dS} dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt.$$

Ahora, sustituyendo el valor de dS_t obtenemos

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS}(\sigma S_t dX_t + \mu S_t dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \\ &= \sigma S_t \frac{df}{dS} dX_t + (\mu S_t \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{d^2 f}{dS^2}) dt. \end{aligned}$$

Este es el lema de Itô, que relaciona un cambio pequeño en la función de la variable aleatoria frente a los cambios pequeños en las variables.

Este resultado puede ser generalizado considerando una función de variable aleatoria S_t en tiempo t, $f(S_t, t)$. Esto implica el uso de derivadas parciales ya que, a partir de ahora, S_t y t van a ser dos variables aleatorias independientes.

Podemos desarrollar $f(S_t + dS_t, t + dt)$ en una serie de Taylor obteniendo

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS_t^2 + \cdots .$$

Sustituyendo $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t$ en la ecuación anterior y usando que

$$dX_t^2 \to dt \text{ cuando } dt \to 0,$$

vemos que

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial S}(\sigma S_t dX_t + \mu S_t dt) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma^2 S_t^2 dt) \\ &= \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S} dX_t + (\mu S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t}) dt. \end{aligned}$$

2.2.2. Tasas de interés y actualización

La tasa de interés es un monto de dinero expresado en forma de porcentaje, mediante el cual se paga por el uso del dinero por parte de quien lo haya recibido. Si se trata de un depósito, la tasa de interés expresa el pago que recibe la persona o empresa que deposita el dinero por poner esa cantidad a disposición del otro. Si se trata de un crédito, la tasa de interés es el monto que el deudor deberá pagar a quien le presta, por el uso de ese dinero.

Para valorar opciones, el concepto más importante que concierne a la tasa de interés es el de valor presente o actualización.

La cuestión es la siguiente: ¿Cuánto debería pagar ahora para recibir una cantidad garantizada E en un tiempo futuro T? La respuesta a esta pregunta se encuentra descontando el futuro valor E, usando la tasa de interés. Con una tasa de interés constante r, el dinero en una cuenta bancaria $M(t)$ crece exponencialmente de acuerdo a

$$\frac{dM}{M} = rdt.$$

La solución a esta ecuación es

$$M = ce^{rt},$$

donde c es la constante de integración. Como sabemos que $M = E$ en $t = T$, entonces el valor en tiempo t de un cierto payoff es

$$M = Ee^{-r(T-t)}.$$

Si la tasa de interés es una función conocida de tiempo $r(t)$, entonces la solución de

$$\frac{dM}{M} = rdt.$$

es

$$M = Ee^{-\int_t^T r(s)ds}.$$

2.2.3. Distribuciones Normal y Lognormal

Vamos a presentar algunas propiedades básicas de las distribuciones normal y lognormal, que más adelante nos van a ser de utilidad para resolver la ecuación de Black-Scholes [6].

La función de densidad de una variable aleatoria X con una distribución normal, con media μ y varianza σ^2 esta dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Si la variable normal tiene media cero y varianza uno, entonces decimos que es una variable aleatoria normal estándar. La función de densidad de una variable aleatoria normal estándar es

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

y la función de distribución

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Si X es normalmente distribuida con media μ y varianza σ^2, entonces

$$z = \exp\{X\}$$

se dice que sigue la distribución lognormal. La función de densidad de la lognormal es dada por

$$g(z) = \frac{1}{z\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

La media truncada de z, definida como $E(z; z > a)$, es

$$\begin{aligned}
E(z; z > a) &= \int_a^{\infty} z g(z) dz \\
&= \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\ln z - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) dz, \\
&= \int_{\ln a}^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) dx \\
&= \int_{\ln a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{[x - (\mu + \sigma^2)]^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{2\sigma^2} \right) dx \\
&= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \int_{\ln a}^{\infty} \frac{1}{\sigma} n\left(\frac{x - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) dx \\
&= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) N\left(\frac{\mu - \ln a}{\sigma} + \sigma \right).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Utilizaremos este resultado más adelante.

2.3. Opciones Europeas y Americanas

Las opciones son instrumentos financieros que otorgan al comprador el derecho y al vendedor la obligación de realizar la transacción a un precio fijado y en una fecha determinada. Las opciones más simples, la opciones de compra y venta Europeas (European call and put), son un contrato con las condiciones siguientes:

- El contrato prescribe en un tiempo futuro, conocido como la **fecha de expiración** (expiry date).
- Se establece un precio por el activo subyacente, llamado **precio de ejercicio** (exercise price) o **strike**.
- El propietario de la opción, llegada la fecha de expiración, puede ejercerla o no, conocido el precio del activo. Si tiene una call, puede comprar pagando el precio de ejercicio. Si tiene una put, puede vender recibiendo el precio de ejercicio en vez del precio al que se cotiza el activo.

Este contrato es un derecho, no una obligación, es decir, el propietario puede o no ejercer el derecho que le otorga el contrato. La otra parte del contrato, conocida como el **writer**, tiene la obligación de vender o comprar el activo por el precio de ejercicio si el propietario de la opción decide ejecutarla. El hecho de que el propietario de la opción tenga derecho o no a ejecutarla, tiene un precio que deberá pagar cuando se firma el contrato. Por el contrario, el writer de la opción debe ser compensado por el riesgo que asume. El asunto es, ¿cuál es el valor de la opción?.

Anteriormente a 1973 todos los contratos de opciones eran llamados de venta libre (over-the-counter), es decir, eran negociados individualmente por un broker en representación de los dos clientes, uno el comprador de la opción y el otro el vendedor. La negociación en un mercado oficial comenzó en 1973 en el Chicago Board Options Exchange (CBOE), comerciando inicialmente solo con opciones de compra con algunos de los stocks más negociados.

En nuestros días, las opciones son cambiadas en todos los mercados de cambio del mundo y hay opciones de índices, futuros, bonos del estado, mercancía, monedas, etc.

Cuando un contrato de opción es iniciado, deben de estar los dos lados de acuerdo. Uno de los lados del contrato es el comprador, que es la parte que tiene derecho a ejercer la opción. Del otro lado de la opción esta el writer, que debe responder si el comprador ejerciera su derecho.

El volumen de negociación en las opciones de compra y venta más sencillas, llamadas opciones **vainilla**, es ahora tan grande que puede tener en algunos mercados un valor tan grande que exceda del propio valor total del activo negociado. Para tener una idea del tamaño del mercado de derivados, se ha estimado que se invierten alrededor de 10.000 billones de dólares en derivados en todo el mundo

2.3.1. Ejemplo: una opción de compra

Supongamos que hoy es 12 de mayo de 2013 y que el 12 de noviembre de 2013 el propietario de una opción puede adquirir un producto X por el valor de 250 € por cada participación del producto. Imaginemos las dos posibles situaciones que podrían ocurrir en la fecha de expiración:

- Si el precio de la participación del producto X es de 270€ el 12 de noviembre de 2013, entonces el propietario de la opción podría adquirir el activo por solo 250€. Esta acción, que es llamada el **ejercicio** de la opción, produciría inmediatamente un beneficio de 20€, es decir, podemos comprar la participación por 250€ y venderla inmediatamente en el mercado por 270€.
- Por otro lado, si el precio de la participación del producto X es de 230€ el 12 de noviembre de 2013, entonces no sería razonable ejercer la opción ya que la podríamos comprar en el mercado por 230€ en vez de pagar los 250€ ejerciendo la opción.

Si la participación del producto X sólo toma los valores 230€ o 250€ en la fecha de expiración con igual probabilidad, entonces el beneficio esperado es

$$\tfrac{1}{2} * 0 + \tfrac{1}{2} * 20 = 10€$$

Por ahora, no vamos a tener en cuenta la tasa de interés. De este modo, parece razonable que el valor de la opción sea de 10€. En realidad, el proceso de evaluar el coste de una opción no es tan simple como acabamos de ver pero supongamos que realmente el propietario de la opción paga 10€ por ella. Si el precio de la participación aumenta a 270€ en el tiempo de expiración, entonces el propietario obtiene un beneficio neto de

$$\begin{gathered}\text{beneficio obtenido} = 20€ \\ \text{coste de la opción} = \text{-}10€ \\ \boxed{\text{beneficio neto} = 10€}\end{gathered}$$

Este beneficio neto de 10€ supone una ganancia del 100 % de la prima. Por el contrario, si el precio de la participación es inferior a 250€ en el tiempo de expiración, entonces el propietario pierde los 10€ invertidos, obteniendo una pérdida del 100 %.

Esta opción que hemos visto, la de la compra de un activo, es conocida como una opción de compra. El derecho de vender un activo es conocido como una opción de venta.

Una opción de venta, permite al propietario vender un activo, en una fecha concreta, por una cantidad determinada. Si llegada la fecha de expiración, el propietario quiere ejercer su derecho, el writer de la opción tiene la obligación de comprar el activo.

Como podemos deducir, el propietario de una opción de compra quiere que el precio del activo aumente para sacar beneficio, mientras que el propietario de una opción de venta, lo que quiere es que el precio del activo caiga todo lo posible.

2.3.2. ¿Para qué sirven las opciones?

Las opciones tienen dos usos principales, la especulación y la cobertura.

1. Especulación. Si un inversor cree que un producto X va a subir de precio, puede adquirir algunas participaciones de dicho producto o una opción de compra. Si no se equivoca y el precio sube, consigue un beneficio. Por el contrario, si no acierta en su predicción, pierde dinero. Este inversor está especulando.

Por otro lado, si el inversor cree que el precio del activo X va a caer, puede vender participaciones o comprar una opción de venta.

2. Cobertura. Las opciones funcionan de la misma forma que un contrato de seguros.

   ¿Qué ocurre con el valor del un portfolio que contiene acciones y opciones de venta? La respuesta depende de la proporción de activos y opciones en el portfolio. Un portfolio que contiene solo activos, cae cuando el precio del activo cae, mientras que otro que solo contiene opciones de venta sube. En algún lugar entre estos dos extremos existe un punto en el cual se está libre de riesgo. La reducción de riesgo por tomar estas posiciones entre el activo y la opción, es llamada cobertura.

2.3.3. Opciones Europeas y Americanas

Las opciones de compra y venta de las que hasta ahora hemos hablado, son las llamadas **opciones Europeas** y estas forman una pequeña parte de los productos derivados.

Hoy en día la mayoría de las opciones negociadas en los mercados son las **opciones Americanas**. Esta clasificación nada tiene que ver con el continente de origen.

Una opción Americana puede ejercerse en cualquier momento antes de la fecha de expiración; mientras que una opción Europea sólo puede ejercerse justo en la fecha de expiración, por lo que el precio de la opción Americana es mayor que el de la Europea

Para los matemáticos las opciones Americanas son más interesantes porque pueden ser interpretadas como problemas de frontera libre.

Las **opciones Bermudeas** son opciones que pueden ejercerse en varios momentos del tiempo, espaciados de forma discreta, hasta su fecha de expiración (como, por ejemplo, a una hora determinada cada día), de aquí que se las suele considerar opciones Americanas.

Capítulo 3

Valoración de opciones

3.1. Fórmula Black-Scholes

3.1.1. Arbitraje

En economía y finanzas, el arbitraje es una práctica que consiste en sacar provecho de la diferencia de precio entre dos o más mercados, combinando ofertas complementarias para capitalizar el desequilibrio, siendo el beneficio la diferencia entre los precios de mercado. Por medio del arbitraje, los participantes en el mercado pueden lograr un beneficio instantáneo libre de riesgo.

El arbitraje es posible cuando se da una de estas tres condiciones:

1. El mismo activo no se negocia al mismo precio en todos los mercados.

2. Dos activos con idéntico flujo de caja (intercambiables) no se negocian al mismo precio.

3. Un activo con un precio conocido en el futuro, no se negocia hoy a su precio futuro descontado a la tasa de interés sin riesgo. La tasa de interés sin riesgo es aquella tasa de rendimiento que se obtiene al invertir en un activo financiero que no tiene riesgo de incumplir su pago.

Las personas que participan en el arbitraje reciben el nombre de **arbitrajistas** y suelen ser bancos o agencias de inversión. El término se utiliza principalmente a la hora de negociar con instrumentos financieros, tales como bonos, acciones, derivados, materias primas o divisas.

3.1.2. Valoración de las opciones Europeas

Vamos a introducir la notación que vamos a usar en lo que resta del trabajo:

- Vamos a denotar por V al valor de una opción Europea. Este valor depende del activo S y del tiempo t, con lo que $V = V(S,t)$. Cuando sea necesario, haremos dos distinciones:
  - Denotaremos por $C(S,t)$ al valor de una opción de compra.
  - Denotaremos por $P(S,t)$ al valor de una opción de venta.

  El valor de una opción depende de los siguientes parámetros:

- σ, que es la volatilidad del activo.
- E, que es el precio de ejercicio.
- T, que es el tiempo de expiración.
- r, que es la tasa de interés.

Recordamos que una opción de compra Europea, es un derecho que tiene el comprador de adquirir acciones a un precio determinado en el momento de expiración. Mientras que una opción de venta Europea, da el derecho a vender acciones a un precio determinado en el momento de expiración.

Lo primero que vamos a hacer es ver que pasa justo en el tiempo de expiración de una opción de compra, es decir, en el instante $t = T$:

- Si $S > E$ en $t = T$, tiene sentido ejercer la opción, ya que entregando una cantidad E obtenemos un activo que vale S. El beneficio (payoff) de esta transacción es por tanto $S - E$.

- Si $S < E$ en $t = T$ no deberíamos ejercer la opción, ya que si lo hiciéramos tendríamos una pérdida de $E - S$. En este caso, la opción expira sin valor.

Por tanto, el valor de la opción de compra en el tiempo de expiración puede expresarse como:

$$C(S,T) = \max(S - E, 0).$$

La diferencia entre el valor de la opción antes y el valor en el tiempo de expiración es llamado el **valor de tiempo** y el valor en el tiempo de expiración es llamado **valor intrínseco**.

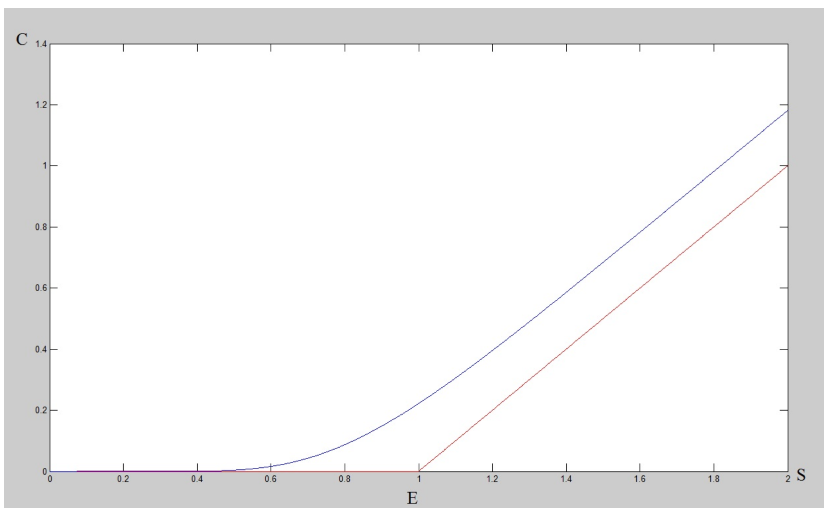

Figura 3.1: *Diagrama del payoff para una opción de compra, $C(S,T)$ (en rojo), y el valor de la opción, $C(S,t)$ (en azul), en $t < T$*

En la figura 3.1 se ha dibujado

$$\max(S - E, 0)$$

como una función de S (línea roja) y el valor de la opción un tiempo antes del tiempo de expiración (línea azul).

Ahora, veamos que pasa en el tiempo de expiración de una opción de venta:

- Si $S > E$ en $t = T$, la opción expira sin valor, ya que podemos vender en el mercado por una cantidad S, que es mayor que si vendiéramos ejerciendo la opción.

- Si $S < E$ en $t = T$, tiene sentido ejercer la opción, ya que podríamos vender por una cantidad E que es mayor que su valor en el mercado. Entonces el valor de la opción es $E - S$.

Entonces, el valor de una opción de compra en el tiempo de expiración se expresa como:

$$P(S, T) = \text{máx}(E - S, 0).$$

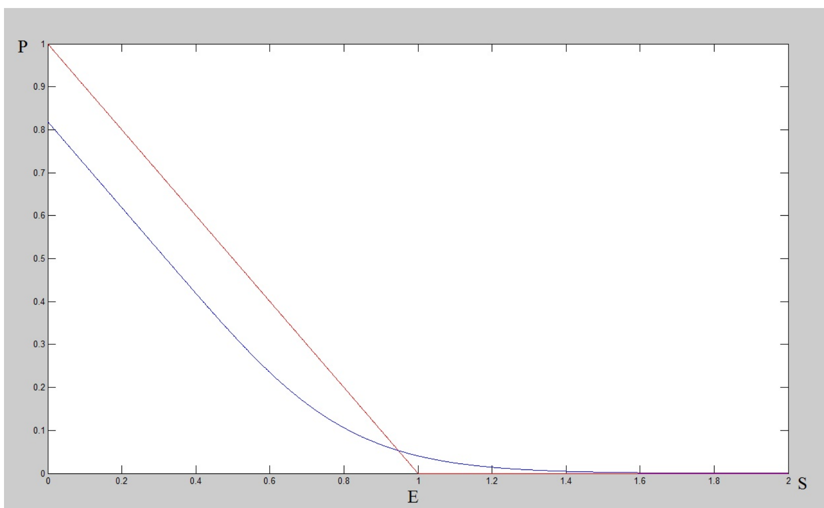

Figura 3.2: *Diagrama del payoff para una opción de venta, $P(S,T)$ (en rojo), y el valor de la opción, $P(S,t)$ (en azul), en $t < T$*

El diagrama payoff de la opción de venta es de la forma mostrada en la figura 3.2. Recordamos que la línea en roja es el payoff de la opción y la línea azul es el valor de la opción un tiempo antes del tiempo de expiración.

Combinando opciones de compra y venta con varios precios de ejercicio se puede construir un portfolio con una gran variedad de payoffs. Por ejemplo, mostramos en la figura 3.3 (figura tomada de [11]) el payoff para una 'bull vertical spread', la cual es construida comprando una opción de compra y vendiendo una opción de compra también, con el mismo tiempo de expiración y un precio más grande de ejercicio. El payoff de este portfolio puede ser escrito como:

$$\max(S - E_1, 0) - \max(S - E_2, 0)$$

con $E_2 > E_1$.

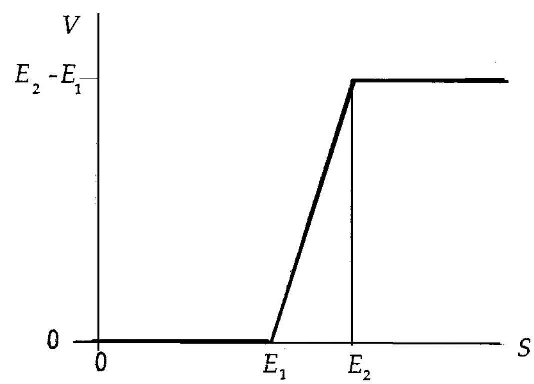

Figura 3.3: *Diagrama del payoff para una bull vertical spread*

3.1.3. Paridad de compra-venta

Aunque las opciones de compra y venta son superficialmente diferentes, estas pueden ser combinadas de manera que estén perfectamente correlacionadas. Supongamos que tomamos una posición larga con un activo (compramos el activo) y una opción de venta y una posición corta (vendemos el activo) con una opción de compra, con igual tiempo de expiración T para ambas opciones y el mismo precio de ejercicio E. Denotamos por Π_t el valor de este portfolio en tiempo t, entonces tenemos que

$$\Pi_t = S_t + P_t - C_t,$$

donde P y C son los valores de la opción de venta y compra respectivamente. En tiempo T el valor de este portfolio es

$$\Pi_T = S_T + \max(E - S_T, 0) - \max(S_T - E, 0).$$

Es decir

$$\begin{cases} S_T + (E - S_T) - 0 = E & \text{si} \quad S_T \leq E \\ \\ S_T + 0 - (S_T - E) = E & \text{si} \quad S_T \geq E \end{cases}$$

Como podemos ver, el payoff es siempre el mismo, E, independientemente de que S_T sea mayor o menor que E. Ahora la pregunta es, ¿qué debemos pagar por un portfolio que me garantiza una cantidad E en $t = T$? Esta respuesta ya la hemos contestado en el capítulo 2. Por consiguiente, este portfolio tiene un valor de $Ee^{-r(T-t)}$, con lo que

$$\Pi_t = S_t + P_t - C_t = Ee^{-r(T-t)}.$$

que es la actualización del precio. Por tanto tenemos que

$$S + P(S,t) - C(S,t) = Ee^{-r(T-t)}, \quad \forall S \geq 0.$$

Esta relación entre el activo y las opciones es llamado la **paridad de compra-venta** y es un ejemplo de la eliminación de riesgo [5].

3.1.4. El análisis Black-Scholes

Vamos a suponer las siguientes hipótesis:

- El precio del activo sigue un camino aleatorio lognormal

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX.$$

- El tipo de interés sin riesgo r y la volatilidad σ son funciones conocidas.
- No hay costes de transacción asociados con la cobertura del portfolio. Es decir, se puede vender y comprar sin comisiones ni costes de operación.
- El activo no paga dividendos durante la vida de la opción.
- No hay posibilidad de arbitraje en el mercado.
- La negociación del activo tiene lugar continuamente.

- Las ventas en corto están permitidas y el activo es divisible indefinidamente.

Supongamos que tenemos una opción cuyo valor $V(S,t)$ depende solamente de S y t. V puede ser el valor de todo un portfolio, aunque por simplicidad, vamos a pensar que es el valor de una única opción (da igual si de compra o de venta). Usando el lema de Itô, podemos escribir

$$dV_t = \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dX + (\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t})dt.$$

Esto da el camino aleatorio seguido por $V(S_t, t)$.

Ahora construimos un portfolio compuesto de una opción y un número Δ de activos. El valor de este portfolio es

$$\Pi_t = V(S_t, t) - \Delta S_t.$$

con lo que tenemos que

$$d\Pi_t = dV_t - \Delta dS_t.$$

Aquí Δ se mantiene fijo durante cada pequeño incremento de tiempo.

Teniendo en cuenta que

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t;$$

$$dV_t = \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dX_t + (\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t})dt;$$

y que

$$\Pi_t = V(S_t, t) - \Delta S_t.$$

tenemos que el cambio en Π_t viene dado por

$$d\Pi_t = \sigma S_t (\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta) dX_t + (\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta S_t)dt.$$

Podemos eliminar la componente aleatoria de este camino aleatorio eligiendo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Esto nos proporciona un portfolio cuyo valor es completamente determinista:

$$d\Pi_t = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt.$$

El retorno de una cantidad Π invertida en activos sin riesgo genera un crecimiento de $r\Pi dt$ en un tiempo dt. En caso contrario, un arbitrajista podría tener beneficio libre de riesgo. Por consiguiente tenemos

$$r\Pi_t dt = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt.$$

Sustituyendo en esta ecuación $\Pi_t = V(S_t, t) - \Delta S_t$ y $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ llegamos a

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

donde tanto la función V como sus derivadas parciales están valoradas en (S_t, t). De aquí se sigue que, necesariamente, la función determinista $V(S, t)$ debe satisfacer la **ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes**:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

3.1.5. Condiciones iniciales y frontera para opciones Europeas

Teniendo la ecuación Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

$$0 \leq S \leq +\infty; \quad t \geq 0$$

el siguiente paso que debemos considerar son las condiciones finales. Observemos que se trata de una ecuación parabólica retrógrada.

Para una opción de compra Europea, cuyo valor es denotado por $C(S, t)$, con precio de ejercicio E y tiempo de expiración T, tenemos que, en $t = T$, la condición final es conocida con certeza por ser el payoff:

$$C(S, T) = \max(S - E, 0).$$

Para una opción de venta, la condición final es

$$P(S,T) = \text{máx}(E - S, 0).$$

Estas son las condiciones finales para nuestra ecuación en derivadas parciales.

Observemos que la ecuación es singular en $S = 0$, por lo que no es posible asignar arbitrariamente valores en la frontera $S = 0$. Sin embargo, podemos razonar de la forma siguiente:

Si $S = 0$, la ecuación de Black-Scholes se reduce a la ecuación ordinaria

$$\frac{dV}{dt}(0,t) = rV(0,t).$$

Por tanto, es necesario que

$$V(0,t) = V(0,T)e^{-r(T-t)}.$$

Como consecuencia

$$C(0,t) = 0$$

ya que $C(0,T) = 0$ y

$$P(0,t) = P(0,T)e^{-r(T-t)} = Ee^{-r(T-t)}.$$

Por otra parte, cuando S es grande, es cada vez más improbable que una opción de venta llegue a ejercerse. Esto nos lleva a que

$$P(S,t) \to 0$$

cuando $S \to +\infty$ y utilizando la paridad de compra-venta nos lleva también a que

$$C(S,t) - (S - Ee^{-r(T-t)}) \to 0$$

cuando $S \to +\infty$.

3.1.6. Fórmula Black-Scholes para opciones Europeas

Vamos a dar la solución exacta para el problema

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\
&V(S,T) = \Phi(S)
\end{aligned}$$

cuando la tasa de interés r y la volatilidad σ son constantes y $\Phi(S)$ es el payoff de una opción vainilla.

Si

$$\Phi(S) = \begin{cases} \text{máx}(S-E,0) \\ \text{o} \\ \text{máx}(E-S,0) \end{cases}$$

entonces la ecuación se puede resolver exactamente.

Aplicamos varios cambios de variable:

Primero, hacemos el cambio $\tau = T - t$, con lo que nos queda

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ &V(S,0) = \Phi(S). \end{aligned}$$

El siguiente cambio de variable es $x = \log S$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{S} = \frac{\partial V}{\partial x}e^{-x}, \\ S\frac{\partial V}{\partial S} &= e^{x}(\frac{\partial V}{\partial x}e^{-x}) = \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}(\frac{\partial V}{\partial S}) = \frac{\partial}{\partial S}(\frac{\partial V}{\partial x}e^{-x}) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S}(\frac{\partial V}{\partial x}e^{-x}) \\ &= e^{-x}\frac{\partial}{\partial x}(e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x}) = e^{-x}(-e^{-x}\frac{\partial V}{\partial x} + e^{-x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}) \\ &= e^{-2x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - e^{-2x}\frac{\partial V}{\partial x}, \\ S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= e^{2x}(e^{-2x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - e^{-2x}\frac{\partial V}{\partial x}) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación queda

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial V}{\partial x} + r\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0$$

o lo que es lo mismo

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0$$

Ahora, hacemos un tercer cambio de variable:

$$W(x,\tau) = e^{r\tau}V(x,\tau); \quad V(x,\tau) = e^{-r\tau}W(x,\tau)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \tau} &= -re^{-r\tau}W(x,\tau) + e^{-r\tau}\frac{\partial W}{\partial \tau}(x,\tau), \\
\frac{\partial V}{\partial x} &= e^{-r\tau}\frac{\partial W}{\partial x}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= e^{-r\tau}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación queda

$$\begin{aligned}
re^{-r\tau}W(x,\tau) - e^{-r\tau}\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-r\tau}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\
+ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)e^{-r\tau}\frac{\partial W}{\partial x} - re^{-r\tau}W(x,\tau) = 0
\end{aligned}$$

es decir,

$$-\frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$
$$-\infty \leq x \leq +\infty$$

Ahora, con un nuevo cambio de variable, reduciremos esta ecuación a la ecuación del calor.

Tomamos el cambio de variable

$$\begin{cases} z = x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau \\ \tau = \tau \end{cases}$$

Sea $U(z,\tau) = W(x,\tau)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial z}, \\
\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial W}{\partial \tau} &= \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial \tau} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial z},
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$-\frac{\partial U}{\partial \tau} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

es decir,

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

con $-\infty < z < +\infty$. Hemos reducido la ecuación de Black-Scholes a la ecuación del calor.

Veamos en que se transforma la condición inicial con todos los cambios de variables: Usamos el payoff de una opción de compra.

$$V(S, \tau = 0) = \Phi(S) = \text{máx}(S - E, 0).$$

Con el segundo cambio tenemos

$$V(x, 0) = \Phi(e^x) = \text{máx}(e^x - E, 0).$$

Con el tercer cambio, nos queda

$$W(x, 0) = e^{r0}V(x, 0) = V(x, 0) = \Phi(e^x) = \text{máx}(e^x - E, 0).$$

En el cuarto cambio teníamos que $x = z - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$, luego

$$U(z, 0) = W(x, 0) = \Phi(\exp(z - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau) = \Phi(z).$$

Entonces, la ecuación a resolver es

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \qquad -\infty \leq z \leq \infty \\ U(z, 0) &= \Phi(z) \end{aligned} \tag{3.1}$$

La solución de (3.1) viene dada por, [10],

$$U(z, \tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-|z - \zeta|^2}{2\sigma^2\tau}\right) \Phi(\zeta) d\zeta.$$

Deshaciendo un cambio de variable nos queda

$$W(x, \tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\zeta) \exp\left(\frac{-|x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau - \zeta|^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\zeta.$$

Entonces, la idea es la siguiente:

1. Si sabemos resolver explícitamente la integral (para algunos payoffs Φ), entonces tenemos una fórmula explícita para el precio de la opción.

2. Si no sabemos resolver explícitamente la integral, entonces hay que utilizar métodos numéricos, tales como métodos de integración numérica en la integral o resolver la ecuación en derivadas parciales.

En el caso 1, se encuentran las opciones vainilla, las call y put Europeas.

En el caso 2, nos interesan los métodos numéricos porque $\Phi(S)$ puede ser muy general, tal como el precio de otra opción o una opción Bermudea como aproximación de la Americana o como contrato real.

Vamos a resolver, [6],

$$W(x,\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\zeta) \exp\left(\frac{-[x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau - \zeta]^2}{2\sigma^2\tau} \right) d\zeta$$

para el caso de una opción de compra Europea, es decir, tenemos

$$W(x,0) = \text{máx}(e^x - E, 0) \Rightarrow \Phi(\zeta) = \text{máx}(e^\zeta - E, 0)$$

Vamos a ello.

$$\begin{aligned} W(x,\tau) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\zeta) \exp\left(\frac{-[x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau - \zeta]^2}{2\sigma^2\tau} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}(e^\zeta - E, 0) \exp\left(\frac{-[x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau - \zeta]^2}{2\sigma^2\tau} \right) d\zeta \\ &= \int_{\ln E}^{\infty} (e^\zeta - E) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{-[x + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau - \zeta]^2}{2\sigma^2\tau} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Usando la ecuación (2.1) de la sección 2.2.3, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\ln E}^{\infty} e^\zeta \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{-[x + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \zeta]^2}{2\sigma^2\tau} \right) d\zeta = \\ &= \exp\left(x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)\tau + \frac{\sigma^2}{2}\tau \right) N\left(\frac{x + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau - \ln E + \sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \\ &= e^{r\tau} S N\left(\frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2}\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right), \end{aligned}$$

y también tenemos

$$\int_{\ln E}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{-[x+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau-\zeta]^2}{2\sigma^2\tau}\right) d\zeta =$$
$$= N\left(\frac{x+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau-\ln E}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) = N\left(\frac{\ln\frac{S}{E}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

En el desarrollo hemos utilizado que $x = \ln S$.

Entonces, el precio para una opción de compra Europea es

$$\begin{aligned} C(S,\tau) &= e^{-r\tau}\left[e^{r\tau} SN\left(\frac{\ln\frac{S}{E}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - EN\left(\frac{\ln\frac{S}{E}+(r-\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right] \\ &= SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2), \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Usando la paridad de compra-venta, el precio para una opción de venta Europea esta dado por

$$\begin{aligned} P(S,\tau) &= C(S,\tau) + Ee^{-r\tau} - S \\ &= S[N(d_1)-1] + Ee^{-r\tau}[1-N(d_2)] \\ &= Ee^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1). \end{aligned}$$

3.1.7. Las griegas

El valor de una opción depende de diferentes factores, entre los que se incluyen el activo subyacente y su volatilidad, el plazo de vencimiento y los tipos de interés. Las "griegas" son un conjunto de medidas que describen la sensibilidad de su precio a estos factores [14] [15]. Y de hecho, son útiles para la gestión del riesgo de la posición.

Delta

Delta mide la sensibilidad a los cambios en el precio del subyacente. La Δ de un instrumento es la derivada de la función V del valor con respecto al precio S_t del activo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$$

$\Delta > 0$ para las opciones de compra: a más precio del subyacente mayor valor de la prima y a menor precio del subyacente, menor valor de la prima.

$\Delta < 0$ para las opciones de venta que están relacionadas inversamente con el precio del activo subyacente, si sube el precio del mismo, baja el precio de la opción.

Gamma

Gamma mide el ratio de cambio en delta. Γ es la segunda derivada de la función del valor con respecto al precio del subyacente

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}$$

A gamma se le conoce como el "acelerador de delta" y como uno de los mejores indicadores del nivel de riesgo.

Theta

Theta es la negativa de la derivada de la función del valor con respecto al tiempo restante hasta la finalización del derivado

$$\Theta = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

Describe el cambio en el valor de la opción a medida que pasa el tiempo y el resto de factores permanece constante.

3.2. Métodos numéricos para la valoración de opciones Europeas

3.2.1. Métodos en diferencias finitas

Vamos a considerar la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Antes de continuar, vamos a cambiar la variable tiempo y a introducir el tiempo hasta la expiración poniendo $\tau = T - t$ y $U(S,\tau) = V(S, T-\tau)$. Con este cambio de variable, la ecuación se trasforma en una ecuación parabólica progresiva

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS\frac{\partial U}{\partial S} - rU,$$

junto con la condición inicial

$$U(S,0) = V(S,T) = \phi(S,E)$$

donde $\phi(S,E)$ es el payoff.

Comenzaremos con el sistema en diferencias finitas explícito.

El método explícito

Notemos que la ecuación se plantea en el intervalo $0 \leqslant S \leqslant \infty$ y en $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Para localizar el problema debemos elegir primero un S_R suficientemente grande. Obviamente es necesario tomar $S_R > E$ pero la elección exacta dependerá del tipo de contrato y de la precisión requerida en nuestra computación.

Tomamos

$$h = S_R/M \ y \ k = T/N$$

para M y N números naturales dados, e introducimos la malla en diferencias finitas

$$(S_j, \tau_n) = (jh, nk), \quad j = 0, ..., M, \quad n = 0, \dots, N.$$

Denotamos por U_j^n a la aproximación del valor de la opción en (S_j, τ_n)

$$U_j^n \approx U(S_j, \tau_n) = V(S_j, T - \tau_n).$$

El método en diferencias finitas explícito es

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} + rS_j \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} - rU_j^n.$$
$$U_j^0 = \Phi(S_j, E).$$

La ecuación se puede reescribir de la siguiente manera:

$$U_j^{n+1} = A_j^{ex} U_{j-1}^n + B_j^{ex} U_j^n + C_j^{ex} U_{j+1}^n, \quad j = 1, \ldots, M-1,$$

donde

$$\begin{aligned} A_j^{ex} &= \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} - rS_j \frac{k}{2h}, \\ B_j^{ex} &= 1 - \sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} - rk, \\ C_j^{ex} &= \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} + rS_j \frac{k}{2h}. \end{aligned}$$

Nótese que hemos usado las diferencias finitas centrales para aproximar la derivada de primer orden. El método tiene un error $\mathcal{O}(k + h^2)$ y necesitamos una restricción de estabilidad, [9],

$$k = \mathcal{O}(h^2).$$

Ahora, necesitamos establecer las condiciones frontera que dependen del tipo de contrato que tengamos. Algunos ejemplos más comunes son los siguientes:

- Supongamos que estamos valorando una opción de compra. El payoff es
$$\phi(S, E) = \max(S - E, 0).$$
  Es claro que el valor en $S = 0$ debe ser siempre nulo, por lo que tenemos
$$U_0^n = 0, \ n = 1, 2, ...$$

Menos clara es la condición para el lado derecho. Para grandes valores de S se satisface como hemos visto que $V(S_t, t) \sim S_t - Ee^{-r(T-t)}$. Por tanto, podemos escribir

$$U_M^n = S_R - Ee^{-r\tau_n}.$$

- En el caso de una opción de venta el payoff es

$$\phi(S, E) = \text{máx}(E - S, 0).$$

Para la condición frontera izquierda sustituimos $S = 0$ en la ecuación y observamos que se reduce a

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(0, \tau) = -rU(0, \tau),$$

con $U(0, 0) = \phi(0, E) = E$. Por tanto

$$U(0, \tau) = Ee^{-r\tau}.$$

La condición frontera es

$$U_0^n = Ee^{-r\tau_n}.$$

Para la condición derecha observemos que $V(S, t) \to 0$, cuando $S \to \infty$, por tanto, tomaremos

$$U_M^n = 0.$$

Observemos que las condiciones de frontera en S_R son sólo aproximadas, por lo que es necesario tomar S_R suficientemente grande para reducir el error debido a la localización.

El método implícito

Un método en diferencias finitas implícito puede ser usado en lugar del método explícito. La ecuación resultante en este caso es

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} + rS_j \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2h} - rU_j^{n+1},$$

donde hemos usado la misma malla de diferencias finitas que antes. El esquema es otra vez de orden $\mathcal{O}(k+h^2)$ y es siempre estable (incondicionalmente estable), con lo que no necesitamos en principio ninguna restricción de estabilidad, [9].

El sistema implícito puede escribirse de la forma

$$U_j^n = A_j^{im} U_{j-1}^{n+1} + B_j^{im} U_j^{n+1} + C_j^{im} U_{j+1}^{n+1}, \quad j = 1, \dots, M-1,$$

donde ahora

$$\begin{aligned} A_j^{im} &= -\frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} - rS_j \frac{k}{2h}, \\ B_j^{im} &= 1 + \sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} + rk, \\ C_j^{im} &= -\frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} - rS_j \frac{k}{2h}. \end{aligned}$$

Ahora es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones algebraicas para cada paso de tiempo. Primero notemos que si suponemos que los valores $\{U_j^n\}_{j=0}^n$ son conocidos, para el siguiente paso tenemos un conjunto de $M-1$ ecuaciones y $M+1$ incógnitas $\{U_j^{n+1}\}_{j=0}^M$. Necesitamos dos ecuaciones más que pueden ser tomadas de las condiciones frontera correspondientes al tipo de contrato que estemos evaluando. Supongamos, por ejemplo, que tenemos una opción de venta. Las condiciones frontera apropiadas son, como ya hemos visto

$$\begin{aligned} U_M^n &= 0, \\ U_0^n &= Ee^{-r\tau_n}. \end{aligned}$$

Podemos escribir el sistema de ecuaciones de forma matricial como sigue: Primero definimos los vectores

$$\mathbf{U}^n = [U_1^n, ..., U_{M-1}^n]^T, \ n = 0, 1, \dots, N.$$

El siguiente paso es definir la matriz

$$\mathbf{M}^{im} = \begin{bmatrix} B_1^{im} & C_1^{im} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_2^{im} & B_2^{im} & C_2^{im} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_3^{im} & B_3^{im} & C_3^{im} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & A_{M-2}^{im} & B_{M-2}^{im} & C_{M-2}^{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & A_{M-1}^{im} & B_{M-1}^{im} \end{bmatrix}.$$

Finalmente definimos el vector de las condiciones frontera como

$$\mathbf{B}^{n+1} = \begin{bmatrix} -A_1^{im} U_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -C_{M-1}^{im} U_M^{n+1} \end{bmatrix}$$

donde en el caso de una opción de compra tenemos

$$\begin{aligned} U_0^{n+1} &= 0, \\ U_M^{n+1} &= S_R - Ee^{-r\tau_{n+1}}. \end{aligned}$$

y en el caso de una opción de venta

$$\begin{aligned} U_0^{n+1} &= Ee^{-r\tau_{n+1}}, \\ U_M^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Tenemos que resolver la recursión implícita

$$\mathbf{M}^{im}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \mathbf{B}^{n+1},\ n = 0, 1, \ldots, N-1;$$

comenzando con la condición inicial definida por (en el caso de la opción de venta)

$$u_j^0 = \text{máx}(E - S_j, 0),\ j = 1, \ldots, M-1.$$

En principio podemos invertir la matriz $\mathbf{M}^{im}$, calculando $\mathbf{N} = (\mathbf{M}^{im})^{-1}$ y escribiendo la recursión explícita

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{N}(\mathbf{U}^n + \mathbf{B}^{n+1}).$$

Sin embargo, esto no es recomendable ya que computar numéricamente la inversa de una matriz tiene un coste computacional muy grande. Es mucho más eficiente resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Como la matriz $\mathbf{M}^{im}$ es tridiagonal, el proceso de eliminación puede llevarse a cabo eficientemente en $O(N)$ operaciones y mediante un algoritmo simple de Gauss y el coste operacional es $O(N)$ en cada etapa.

Para hacer esto, hacemos la factorización LU de la matriz

$$\mathbf{M}^{im} = \mathbf{L}^{im}\mathbf{U}^{im}$$

y en cada paso de τ_n a τ_{n+1} resolvemos el sistema

$$\mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^n$$

por sustitución progresiva y el sistema

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{W}^{n+1}$$

que es la sustitución regresiva.

El método Crank-Nicolson

El método implícito puede ser mejorado significativamente con un pequeño trabajo extra. El método Crank-Nicolson es un método implícito. El sistema es

$$\begin{aligned}
\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} &= \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{\frac{U_{j+1}^{n+1}+U_{j+1}^n}{2} - 2\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{2} + \frac{U_{j-1}^{n+1}+U_{j-1}^n}{2}}{h^2} \\
&\quad + rS_j \frac{\frac{U_{j+1}^{n+1}+U_{j+1}^n}{2} - \frac{U_{j-1}^{n+1}+U_{j-1}^n}{2}}{2h} \\
&\quad - r\frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2}.
\end{aligned}$$

Reordenando la ecuación tenemos

$$A_j^L U_{j-1}^{n+1} + B_j^L U_j^{n+1} + C_j^L U_{j+1}^{n+1} = A_j^R U_{j-1}^n + B_j^R U_j^n + C_j^R U_{j+1}^n,$$

donde

$$\begin{aligned}
A_j^L &= -\frac{1}{4}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} + \frac{r}{4} S_j \frac{k}{h}, \\
B_j^L &= 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} + \frac{r}{2}k, \\
C_j^L &= -\frac{1}{4}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} - \frac{r}{4} S_j \frac{k}{h}, \\
A_j^R &= \frac{1}{4}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} - \frac{r}{4} S_j \frac{k}{h}, \\
B_j^R &= 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} - \frac{r}{2}k, \\
C_j^R &= \frac{1}{4}\sigma^2 S_j^2 \frac{k}{h^2} + \frac{r}{4} S_j \frac{k}{h}.
\end{aligned}$$

Al igual que hemos hecho antes, lo escribimos de manera matricial. Definimos los vectores

$$\mathbf{U}^n = [U_1^n, ..., U_{M-1}^n]^T,\ n = 0, 1, \ldots, N.$$

y las matrices

$$\mathbf{M}^L = \begin{bmatrix} B_1^L & C_1^L & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_2^L & B_2^L & C_2^L & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_3^L & B_3^L & C_3^L & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & A_{M-2}^L & B_{M-2}^L & C_{M-2}^L \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & A_{M-1}^L & B_{M-1}^L \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{M}^R = \begin{bmatrix} B_1^R & C_1^R & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_2^R & B_2^R & C_2^R & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_3^R & B_3^R & C_3^R & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & A_{M-2}^R & B_{M-2}^R & C_{M-2}^R \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & A_{M-1}^R & B_{M-1}^R \end{bmatrix}.$$

Debemos resolver recursivamente

$$\mathbf{M}^L\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{M}^R\mathbf{U}^n + \frac{1}{2}(\mathbf{B}^{n+1} + \mathbf{B}^n),$$

donde $\mathbf{B}^n$ es la contribución de los términos frontera

$$\mathbf{B}^n = \begin{bmatrix} 2A_1^R U_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2C_{M-1}^R U_M^n \end{bmatrix}.$$

Notemos que hemos utilizado que $A_1^R = -A_1^L$ y $C_{M-1}^R = -C_{M-1}^L$. Los valores de U_0^n y U_M^n dependen del tipo de contrato, como en el método implícito.

El método Crank-Nicolson es un método estable de orden $\mathcal{O}(k^2 + h^2)$ que requiere más o menos la misma cantidad de trabajo que el método completamente implícito [9]. Claramente, todo el trabajo computacional es resolver un sistema de ecuaciones lineales para cada paso de tiempo con una matriz tridiagonal, exactamente como ocurre en el caso implícito.

3.2.2. Método de líneas

Vamos a volver a considerar la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + rS\frac{\partial U}{\partial S} - rU.$$

La idea del método de líneas es discretizar primero el valor del activo y después la variable temporal. Tratando independientemente ambas variables tenemos más flexibilidad en la construcción de la aproximación numérica.

Vamos a considerar una opción de venta (en el caso de la opción de compra es completamente análogo) y a usar el método en diferencias finitas para discretizar la variable del activo usando diferencias finitas centrales,

$$\begin{aligned}\frac{dU_j(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{U_{j+1}(\tau) - 2U_j(\tau) + U_{j-1}(\tau)}{h^2} \\ &\quad + rS_j \frac{U_{j+1}(\tau) - 2U_{j-1}(\tau)}{2h} - rU_j(\tau), \quad j = 1, \ldots, M-1,\end{aligned}$$

junto con las condiciones frontera

$$U_0(\tau) = Ee^{-r\tau}, \quad U_M(\tau) = 0,$$

y las condiciones iniciales

$$U_j(0) = \text{máx}(E - S_j, 0), \; j = 0, \ldots, M.$$

Esto nos lleva aun sistema de *ecuaciones diferenciales ordinarias*, las cuales deben ser resueltas numéricamente con un método apropiado para sistemas rígidos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El sistema anterior puede ser escrito de la siguiente forma

$$\frac{d\mathbf{U}(\tau)}{d\tau} = (\mathbf{K} + \mathbf{C} + \mathbf{R})\mathbf{U}(\tau) + \mathbf{B}(\tau),$$

donde $\mathbf{U}$ es el vector

$$\mathbf{U}(\tau) = \begin{bmatrix} U_1(\tau) \\ \vdots \\ U_{M-1}(\tau) \end{bmatrix}.$$

Las matrices **K**, **C** y **R** están definidas por

$$\mathbf{K} = \frac{\sigma^2}{2h^2}\begin{bmatrix} -2S_1^2 & S_1^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_2^2 & -2S_2^2 & S_2^2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & S_3^2 & -2S_3^2 & S_3^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & S_{M-2}^2 & -2S_{M-2}^2 & S_{M-2}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & S_{M-1}^2 & -2S_{M-1}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \frac{r}{2h}\begin{bmatrix} 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -S_2 & 0 & S_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -S_3 & 0 & S_3 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -S_{M-2} & 0 & S_{M-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & -S_{M-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = -r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El vector **B** recoge las condiciones frontera

$$\mathbf{B}(\tau) = \begin{bmatrix} (\frac{\sigma^2 S_1^2}{2h^2} - \frac{rS_1}{2h})Ee^{-r\tau} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para la discretización del tiempo usamos un método para la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \boldsymbol{f}(\tau, \mathbf{U}).$$

Por ejemplo, el método de Euler progresivo

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{k} = \boldsymbol{f}(\tau^n, \mathbf{U}^n),$$

aplicado a la ecuación

$$\frac{d\mathbf{U}(\tau)}{d\tau} = (\mathbf{K} + \mathbf{C} + \mathbf{R})\mathbf{U}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)$$

resulta

$$\boldsymbol{f}(\tau^n, \mathbf{U}^n) = (\mathbf{K} + \mathbf{C} + \mathbf{R})\mathbf{U}(\tau) + \mathbf{B}(\tau),$$

que es exactamente el esquema en diferencias finitas explícito de la sección anterior.

De la misma manera, si usamos el método de Euler regresivo

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{k} = \boldsymbol{f}(\tau^{n+1}, \mathbf{U}^{n+1}),$$

resulta el método completamente implícito, y si usamos la regla del punto medio

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{k} = \boldsymbol{f}(\frac{\tau^n + \tau^{n+1}}{2}, \frac{\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n}{2}),$$

resulta el esquema de Crank-Nicolson (con pequeñas diferencias en el tratamiento de los términos frontera). El método Crank-Nicolson se recupera exactamente si utilizamos la regla de los trapecios:

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{f}(\tau^n, \mathbf{U}^n) + \boldsymbol{f}(\tau^{n+1}, \mathbf{U}^{n+1}))$$

La ventaja del método de líneas es que somos libres de elegir el método numérico para la discretización del tiempo y del activo.

3.3. Métodos numéricos para la valoración de opciones Americanas

Una opción Americana, tiene la característica de que se puede ejercer en cualquier instante durante la vida de la opción y no sólo en la fecha de expiración del contrato como en el caso de las opciones Europeas. En las opciones Europeas esto no está permitido. Como las opciones Americanas dan al propietario unos mejores derechos que las opciones Europeas, su valor es más alto.

Sea $V(S,t)$ el valor de una opción de venta Americana. El contrato da al propietario el derecho de vender el activo subyacente por un valor fijado E

en cualquier tiempo antes de las expiración T. Supongamos que para algún valor de S y t

$$V(S,t) \leq \text{máx}(E-S,0).$$

Entonces el propietario puede ejercer la opción vendiendo el activo por una cantidad E. Inmediatamente el propietario puede comprar el activo en el mercado por un precio S (que es valor actual en el mercado del activo), haciendo un beneficio libre de riesgo

$$E - V - S_t > 0.$$

Si estamos de acuerdo en que este arbitraje no está permitido, debemos imponer la condición

$$V(S,t) \geq \text{máx}(E-S,0).$$

Esta condición cambia completamente el carácter del problema de evaluar dicha opción. Ahora tenemos lo que se conoce como un *problema de frontera libre*. Para cada valor de t existe un valor del activo $S_f(t)$ que marca la frontera entre la región donde se debe mantener la opción ($S > S_f(t)$ en la opción de venta Americana) y la región donde el propietario debe ejercer la opción $S \leq S_f(t)$. Es óptimo ejercer la opción tan pronto como el valor del activo alcance $S = S_f(t)$. $S_f(t)$ recibe el nombre de frontera de ejercicio. Como no conocemos por adelantado la condición frontera, $S_f(t)$ es parte del problema. Este problema es claramente más difícil de resolver que en el caso de las opciones Europeas. Se trata de un problema fuertemente no lineal.

Además es posible probar que $V(S,t)$ satisface la inecuación

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0, \quad S \geq S_f(t)$$

La igualdad se verifica donde no es óptimo ejercer la opción. Además, el valor de una opción de venta satisface

$$V(S,t) \geq \text{máx}(E-S,0),$$

$$V(S_f(t),t) = \text{máx}(E-S_f(t),0),$$

Todas estas condiciones junto con la condición final

$$V(S,T) = \text{máx}(E-S,0),$$

determinan completamente el problema.

Como consecuencia de las condiciones anteriores, tenemos

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = -1.$$

que nos indica que $V(S,t)$ es tangente al payoff en $S = S_f(t)$

Una formulación equivalente del problema es la siguiente

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV\right)(V(S,\tau) - \text{máx}(E-S,0)) = 0,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0,$$
$$V(S,\tau) - \text{máx}(E-S,0) \geq 0,$$

donde $\tau = T - t$. Esta formulación es conocida como *el problema complementario*. La ventaja de esta formulación es que no involucra la desconocida frontera libre $S_f(t)$.

Para la discretización del problema complementario podemos usar, por ejemplo, el método de Crank-Nicolson. Usando la misma notación que en la sección 3.2.1 en el apartado del método Crank-Nicolson, el problema discreto a resolver es

$$(\mathbf{M}^L\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{R}^n)(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{G}^{n+1}) = 0,$$
$$(\mathbf{M}^L\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{R}^n) \geq 0,$$
$$(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{G}^{n+1}) \geq 0,$$

donde

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{M}^R\mathbf{U}^n + \frac{1}{2}(\mathbf{B}^{n+1} + \mathbf{B}^n)$$
$$\mathbf{G}^n = (G_i^n)_{i=1}^{M-1} = (\text{máx}(E - S_i, 0))_{i=1}^{M-1},$$

y

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{G}^0.$$

Los métodos directos para resolver sistemas de ecuaciones lineales no son aplicables en este caso, ya que no tenemos un sistema lineal. Sin embargo, una pequeña modificación del método SOR (Sucessive Over-Relaxation) para sistemas lineales nos proporciona un método útil para resolver el problema discreto de complementariedad lineal

$$(\mathbf{M}^L\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{R}^n)(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{G}^{n+1}) = 0,$$

$$(\mathbf{M}^L\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{R}^n) \geq 0,$$

$$(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{G}^{n+1}) \geq 0,$$

El método SOR es un método iterativo. Para resolver el sistema lineal

$$\mathbf{M}^L\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{R}^n,$$

podemos escribir las ecuaciones del sistema en la forma

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{B_j^L}(R_j^n - A_j^L U_{j-1}^{n+1} - C_j^L U_{j+1}^{n+1}).$$

Comenzamos con una $\mathbf{W}^0$ inicial, por ejemplo $\mathbf{W}^0 = \mathbf{U}^n$ y calculamos una secuencia de aproximaciones con la regla

$$\begin{aligned} Z_j^{k+1} &= \frac{1}{B_j^L}(R_j^n - A_j^L Z_{j-1}^{k+1} - C_j^L W_{j+1}^k),\ j = 1, \ldots, M-1. \\ W_j^{k+1} &= W_j^k + \omega(Z_j^{k+1} - W_j^k). \end{aligned}$$

El segundo paso es llamado el paso de relajación. Para $1 \leq \omega \leq 2$ es posible probar que, [4], [8], $\mathbf{W}^k$ define una sucesión de iterantes convergente a $\mathbf{U}^{n+1}$.

El método SOR proyectado (PSOR) es una modificación del método SOR la cual nos da la solución correcta a nuestro problema. El método simplemente modifica el paso de relajación para imponer la restricción $(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{G}^{n+1}) \geq 0$. El método es como sigue

$$\begin{aligned} Z_j^0 &= U_j^n. \\ Z_j^{k+1} &= \frac{1}{B_j^L}(R_j^n - A_j^L Z_{j-1}^{k+1} - C_j^L W_{j+1}^k),\ j = 1, \ldots, M-1. \\ W_j^{k+1} &= \text{máx}(W_j^k + \omega(Z_j^{k+1} - W_j^k), G_j^{n+1}). \end{aligned}$$

La iteración se detiene si

$$||\mathbf{W}^{k+1} - \mathbf{W}^k|| \leq TOL,$$

donde TOL es una tolerancia predefinida. Si la prueba de convergencia se satisface, ponemos

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{W}^{k+1},$$

y continua la integración temporal con el siguiente paso.

Una segunda opción es aproximar el valor de la opción americana por el valor de una opción Bermudea. Una opción Bermudea es una opción que permite ser ejercida en varios momentos del tiempo. Más concretamente, en un contrato de opción Bermudea se fija un conjunto discreto de fechas

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$$

en los que es posible ejercer la opción. Para aproximar la opción Americana, se toma $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ pequeño, por ejemplo, Δt igual al paso en tiempo de la integración temporal. En este caso, el algoritmo con Crank-Nicolson es

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}^L\mathbf{Z}^{n+1} = \mathbf{M}^R\mathbf{U}^n + \frac{1}{2}(\mathbf{B}^{n+1} + \mathbf{B}^n) \\ &U_j^{n+1} = \text{máx}(Z_j^{n+1}, G_j^{n+1}) \end{aligned}$$

3.4. Experimentos numéricos

3.4.1. Experimentos numéricos para las opciones Europeas con el método de líneas

Para hacer estas pruebas numéricas, se han calculado valores de opciones Europeas con el método de líneas y lo hemos comparado con la función blsprice integrada en Matlab, utilizando los integradores temporales de Matlab para métodos rígidos y analizado el resultado que obtenemos al comparar el tiempo de CPU (eje x) frente al error producido, es decir, la diferencias entre el resultado del método de líneas y el precio que da blsprice (eje y).

Los integradores temporales de Matlab que hemos utilizado son los siguientes:

- ode15s: Representado gráficamente por la línea roja. Es un algoritmo de orden variable basado en las Fórmulas de Diferenciación Numérica (NDF). Opcionalmente, puede utilizar las BDF, (también llamadas

Método de Gear), que son generalmente menos eficientes. La función ode15s es un algoritmo multipaso.

- ode23s: Representado gráficamente por la línea verde. Se basa en una fórmula de Rosenbrock modificada de orden 2.
- ode23t: Representado gráficamente por la línea azul. Es una implementación de la regla de los trapecios utilizando un interpolador libre.
- ode23tb: Representado gráficamente por la línea negra. Es una implementación de TR-BDF2. Una fórmula implícita de Runge-Kutta, en la que en una primera etapa utiliza la regla trapezoidal, y en una segunda etapa, utiliza las BDF de orden 2.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

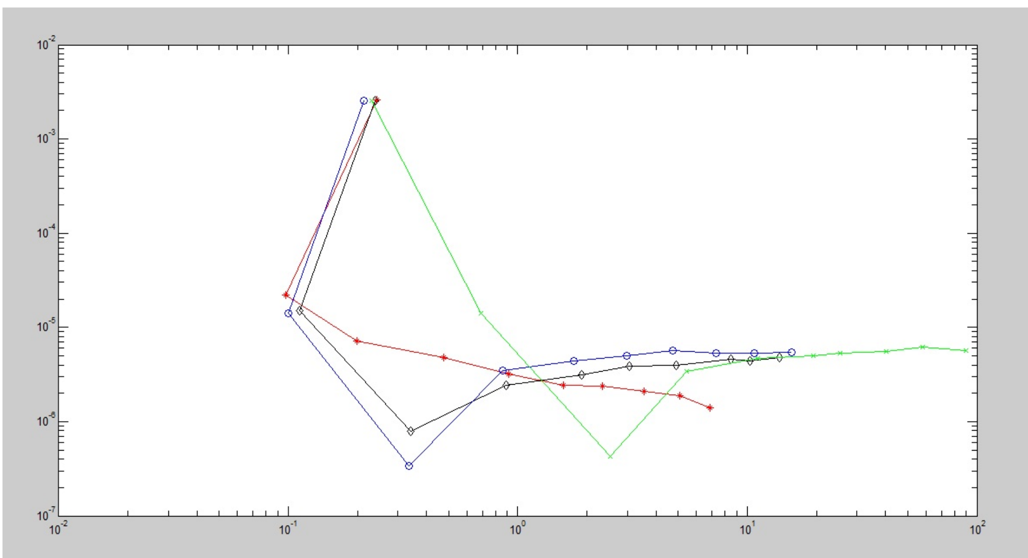

Figura 3.4: *Call Europea con* $r = 0.025$ *y* $\sigma = 0.2$

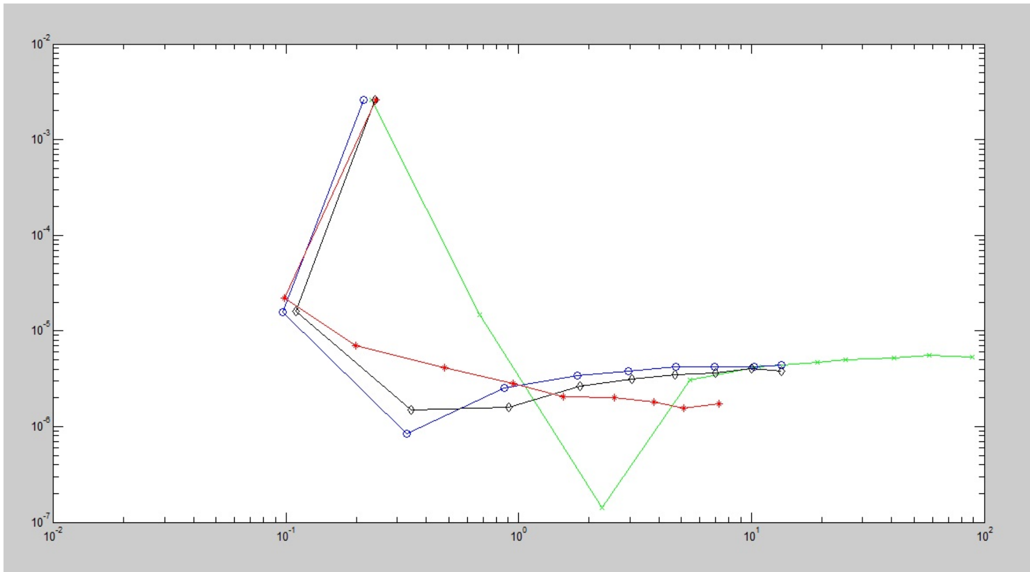

Figura 3.5: *Call Europea con* $r = 0.05$ *y* $\sigma = 0.2$

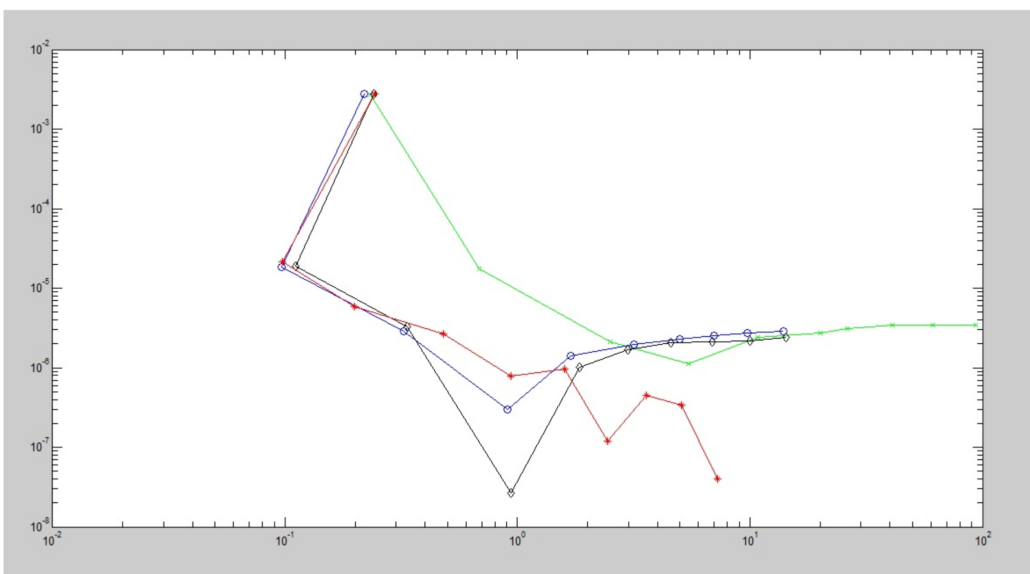

Figura 3.6: *Call Europea con* $r = 0.1$ *y* $\sigma = 0.2$

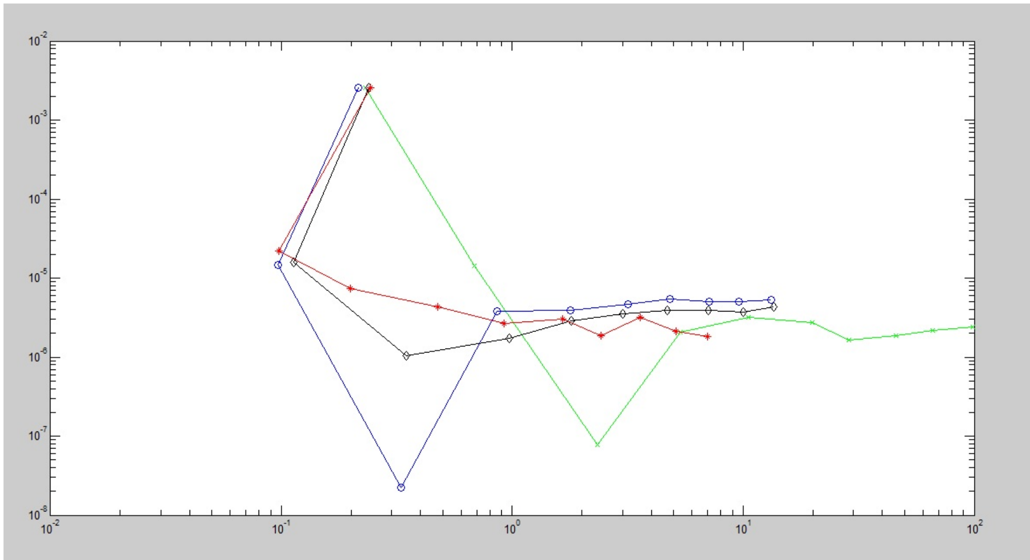

Figura 3.7: *Put Europea con* $r = 0.025$ *y* $\sigma = 0.2$

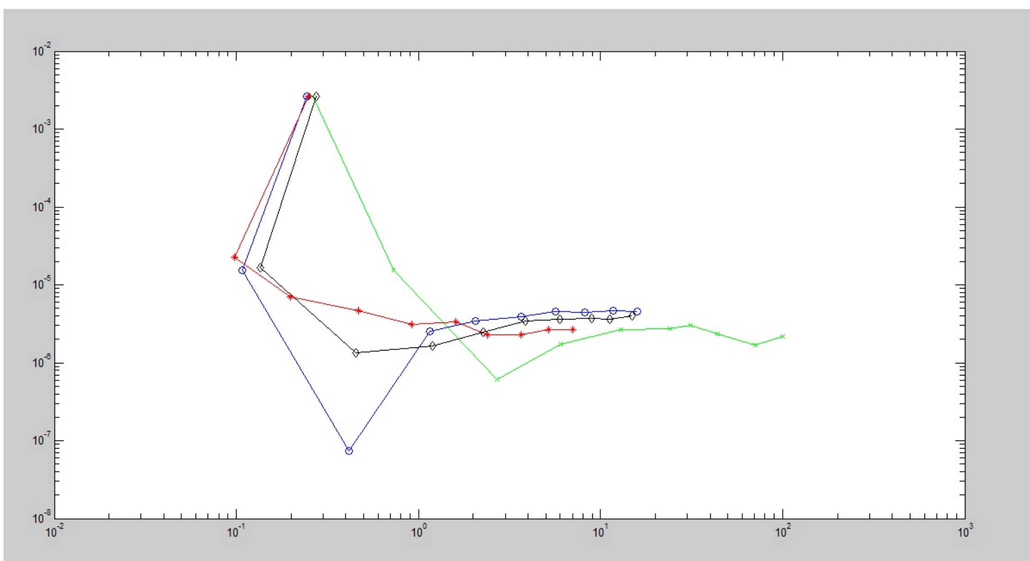

Figura 3.8: *Put Europea con* $r = 0.05$ *y* $\sigma = 0.2$

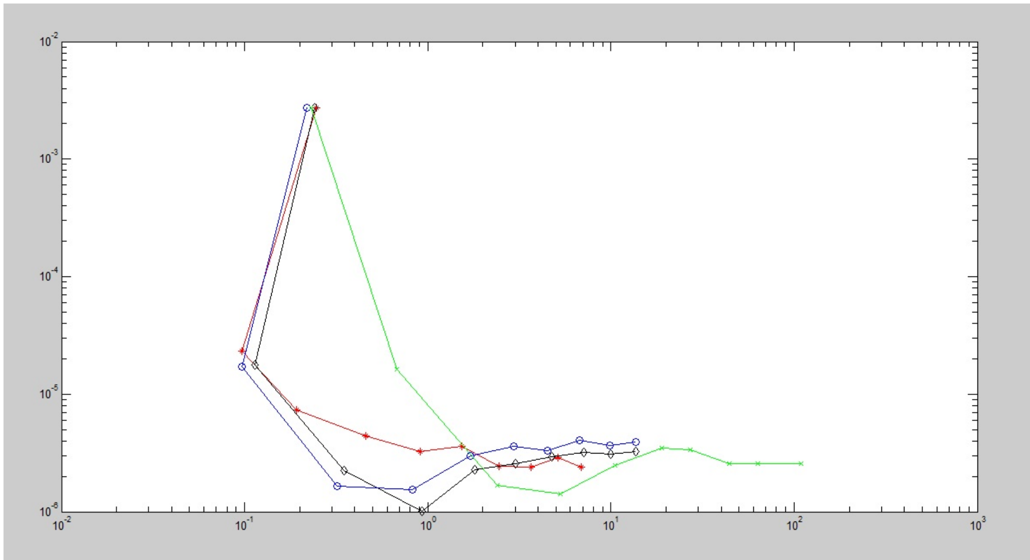

Figura 3.9: *Put Europea con* $r = 0.1$ *y* $\sigma = 0.2$

Como ya hemos dicho, en el eje x está representado el tiempo de CPU, es decir, el tiempo que ha tardado el programa en ejecutarse; y en el eje y está representado el error que hay entre nuestro programa del método de líneas y el blsprice de Matlab. Por tanto, para un nivel de error dado, el que se encuentre más a la izquierda es el método más eficiente, ya que para un mismo nivel de error, tendríamos menor tiempo de CPU.

Como podemos observar en las gráficas, exceptuando el integrador ode23s (línea verde), los demás integradores tienen un comportamiento parecido. Dentro de ese grupo de integradores, llegamos a la conclusión de que el mejor integrador temporal es el ode15s (línea roja), ya que es el que menor tiempo tarda y el que menor error nos da, seguido por el ode23tb (línea negra) y el ode23t (línea azul).

3.4.2. Experimentos numéricos para las opciones de venta Americanas

Para esta sección, lo que se ha hecho, es comparar dos tipos de opciones: las Bermudeas y las Americanas con el método PSOR. Ya hemos visto en la sección 2.3.3 que a las opciones Bermudeas, se las suelen considerar opciones americanas. Para aproximar la opción Americana en nuestro método numérico, consideraremos que la opción Bermudea puede ejercerse en cada paso de tiempo de la discretización.

En esta primera gráfica 3.10 tenemos dibujada la opción Bermudea en verde y la opción Americana en negro (la línea roja representa el payoff de la opción). Como se puede ver, la diferencia entre ambas es muy pequeña y tendríamos que ampliar bastante para poder verlo (gráfica 3.11).

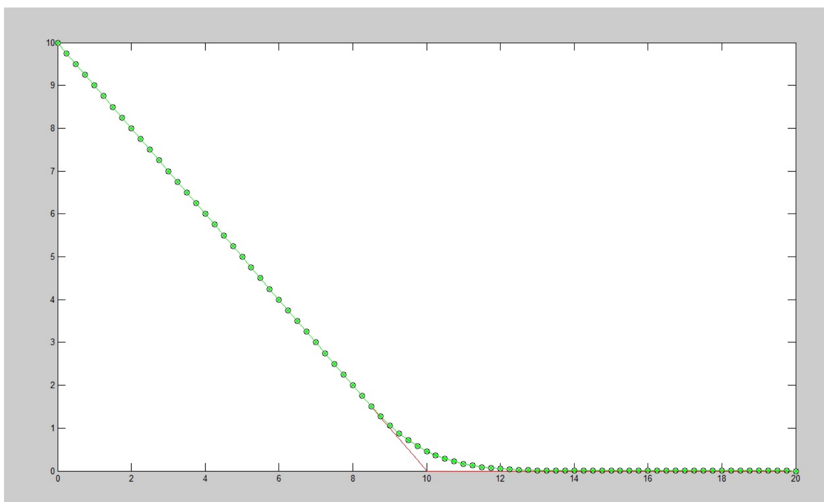

Figura 3.10: *Bermudea vs Americana*

En la gráfica 3.11 se ha representado un fragmento de la gráfica 3.10 ampliado, para poder ver que efectivamente, aunque la diferencia entre la opción Americana y la opción Bermudea es muy pequeña, esta diferencia existe. El extracto ampliado se ha tomado en una zona cercana a la de tangencia de la opción con el payoff.

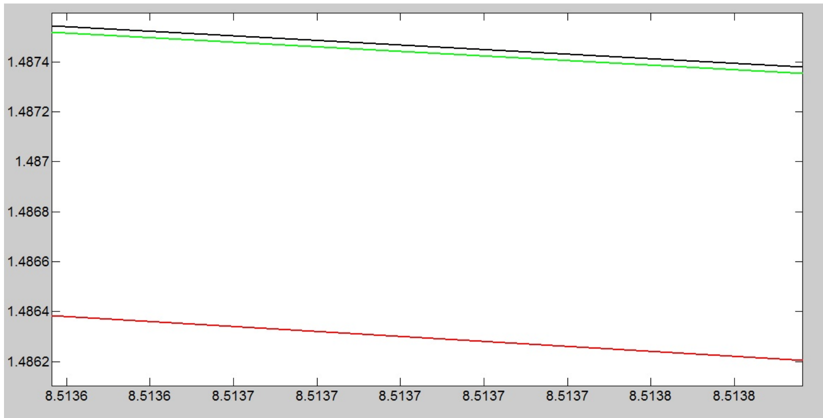

Figura 3.11: *Bermudea vs Americana. Extracto ampliado*

En la siguiente gráfica 3.12, vamos a representar la diferencia entre la opción Bermudea y la opción Americana:

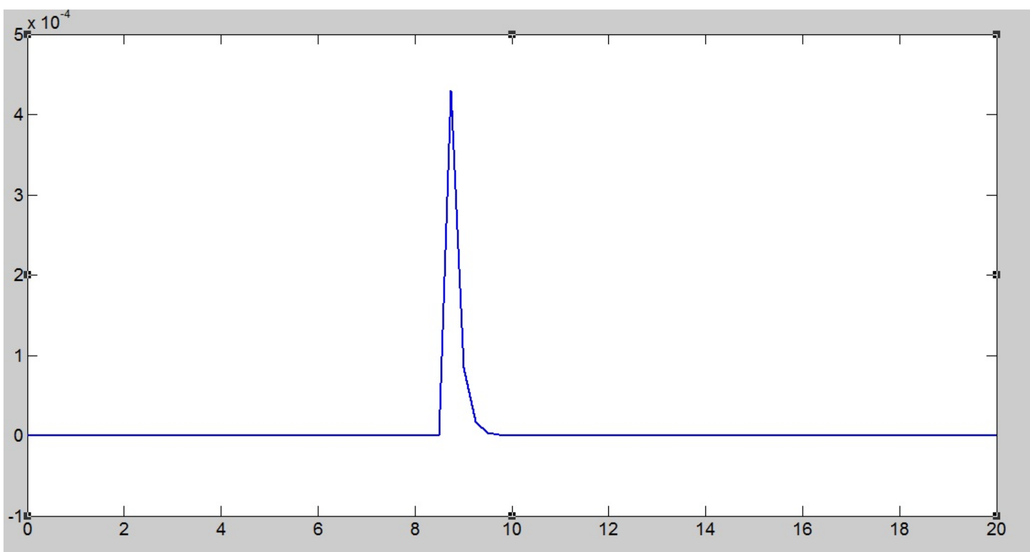

Figura 3.12: *Diferencia Bermudea vr Americana*

Podemos observar que la diferencia se concentra entre los dos puntos de tangencia, donde la opción Americana es tangente al payoff. Esta diferencia reside, en que en la opción Americana se usa el método PSOR y en la Bermudea no.

Ahora, vamos a ver que, cuanto más grande es el números de pasos en tiempo, menor será la diferencia que hay entre ellas.

En la gráfica 3.13 se ha representado el número de pasos en tiempo (eje x) frente a su máxima diferencia, es decir, hemos tomado el máximo del valor absoluto de la diferencia entre la opción Americana y la opción Bermudea (eje y), y como se observa, podemos ver que cuantos más números de paso en tiempo, la diferencia entre las opciones va siendo cada vez más pequeña, lo que quiere decir que cuanto más aumentamos el número de pasos en tiempo, más se van pareciendo las dos, es decir, tenemos la convergencia de ambas hacia la misma solución.

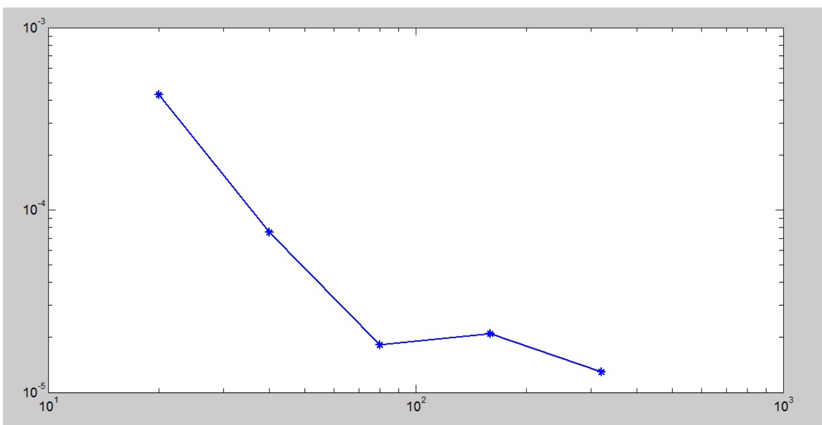

Figura 3.13: *Las dos alternativas convergen al valor de la opción americana*

Bibliografía

[1] F. Black, M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilites”, The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3. (1973), pp. 637-654.

[2] T. Björk, “Arbitrage Theory in continuous Time”, Oxford University Press, 2004.

[3] J. de Frutos, “Numerical Methods for the solution of Partial Differential Equations Arising in the Valuation of Financial Derivatives”, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid, Spain, 2004.

[4] N. Gastinel, “Análisis Numérico Lineal”, Editorial Reverté, S.A., 1975.

[5] R. Jarrow, S. Turnbulkl, “Derivative Securities”, South-Western College Publishing, 2000.

[6] Y.K.Kwok, “Mathematical Models of Financial Derivatives”, Springer-Verlag Singapore, 1998.

[7] R.C. Merton, “Theory of Rational Option Pricing”, The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, No. 1. (1973), pp.141-183.

[8] J. Stoer, R. Bulirsch, “Introduction to Numerical Analysis”, Springer-Verlag New York Inc, 1980

[9] D. Tavella, C. Randall, “Pricing Financial Instruments. The Finite Difference Method”, John Wiley and Songs, Inc, 2000.

[10] E.C.Young, “Partial Differential Equations. An Introduction”, Allyn and Bacon, Boston 1972

[11] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, "The Mathematics of Financial Derivatives. A student introduction", Cambridge University Press, 1995.

[12] http://www.gerencie.com

[13] http://www.actibva.com

[14] http://www.hablandodebolsa.com

[15] http://www.saladeinversion.com