



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Las matemáticas de la fisiología del corazón

Autora: Elena de la Vega de la Peña

Tutora: Begoña Cano Urdiales

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	II
Introducción	1
1. Presentación del modelo a imitar	5
1.1. Fisiología del corazón	5
1.2. Cualidades a imitar en el modelo matemático y variables clave del mismo	7
2. Sucesivas aproximaciones al modelo de Zeeman	10
Ejemplo 1	10
Ejemplo 2	12
Ejemplo 3	14
Ejemplo 4	16
Ejemplo 5	18
Ejemplo 6	21
Nuestra propuesta como modificación del modelo de Zeeman .	28
3. Teoremas de existencia o no de soluciones periódicas en el plano	32
3.1. Aplicación de los teoremas a los ejemplos del capítulo 2	40
3.2. Aplicación de los teoremas a la ecuación de Van der Pol	42
4. Simulación de un electrocardiograma	44
A. Programas de MATLAB	51
Bibliografía	56

Índice de figuras

1.1. Fisiología del corazón	6
1.2. Sistema circulatorio	7
2.1. Ejemplo 1 para $\epsilon = 1/10$	11
2.2. Ejemplo 1 para $\epsilon = 1/100$	12
2.3. Ejemplo 2 para $\epsilon = 1/10$	13
2.4. Ejemplo 2 para $\epsilon = 1/100$	14
2.5. Ejemplo 3 para $\epsilon = 1/10$	15
2.6. Ejemplo 3 para $\epsilon = 1/100$	16
2.7. Ejemplo 4 para $\epsilon = 1/10$	17
2.8. Ejemplo 4 para $\epsilon = 1/100$	18
2.9. Ejemplo 5 para $\epsilon = 1/5$	19
2.10. Ejemplo 5 para $\epsilon = 1/100$	20
2.11. Ejemplo 6 para $\epsilon = 1/5$	22
2.12. Ejemplo del sistema (2.1) con $b_0 = 0.1$	23
2.13. Ejemplo del sistema (2.1) con $b_0 = 1$	24
2.14. Ejemplo del sistema (2.1) con $b_0 = -1$	25
2.15. Ejemplo del sistema (2.2) con $a = 0$	26
2.16. Ejemplo del sistema (2.2) con $a = 0.2$	27
2.17. Ejemplo del sistema (2.2) con $a = 2$	28
2.18. Ejemplo del sistema (2.3) con $x_0 = 0.5$ y $a = 1$	29
2.19. Ejemplo del sistema (2.3) con $x_0 = 0.5$ y $a = 2$	30
2.20. Ejemplo del sistema (2.3) con $x_0 = 0.5$ y $a = 0.5$	31
4.1. Componentes de un electrocardiograma normal	44
4.2. Esquema de los tres osciladores en el caso normal	45
4.3. Electrocardiograma generado a partir del sistema (2.3)	46
4.4. Electrocardiograma normal	48
4.5. Electrocardiograma aleteo ventricular	49

Introducción

En la actualidad, los modelos y simulaciones matemáticas se están convirtiendo en una herramienta cada vez más importante para el estudio de problemas de la vida real. Concretamente, si hablamos del campo de la medicina, el desarrollo de estas técnicas nos permite comprender mejor los mecanismos fisiológicos e incluso los comportamientos patológicos, permitiéndonos actuar sobre ellos y predecir las posibles respuestas.

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es proponer y justificar matemáticamente un modelado de los movimientos del corazón. Para ello, estudiamos la parte dinámica del comportamiento del corazón y consideramos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en \mathbf{R}^2 para representar dicho comportamiento. También se hace referencia a la relación existente entre el modelo considerado y la ecuación de Van der Pol, puesto que ambos presentan ciertas características comunes, como la existencia de comportamientos periódicos. En dicho modelado se ven reflejados los equilibrios de sístole y diástole, así como un determinado umbral que provoca que se desencadene la onda electroquímica que da lugar a la contracción del corazón. Para ello, nuestro objetivo inicial fue estudiar el modelo propuesto por E. C. Zeeman [7], matemático británico nacido en 1925 y conocido por sus trabajos sobre topología geométrica, teoría del caos y teoría de singularidades. Sin embargo, tras estudiar su propuesta final de modelo en dos dimensiones, consideramos también una pequeña variación que nos parece más acertada, y que describimos en el trabajo. En el mismo, se presentan también ciertos teoremas y gráficas de mapas de fase que justifican e ilustran cada modelo estudiado.

A lo largo del siguiente trabajo se usan resultados y conceptos relacionados con los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y con el modelado matemático adquiridos principalmente en las asignaturas de “Ecuaciones Diferenciales” y “Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Naturales y Sociales”. También conceptos básicos de álgebra matricial estudiados en la asignatura

“Álgebra y geometría lineales I”.

En el primer capítulo, se exponen conceptos básicos de la fisiología del corazón y del papel que desarrolla el mismo en el sistema circulatorio. Estas nociones van encaminadas a conseguir más adelante que el modelo matemático propuesto se ajuste todo lo posible a la realidad. En la segunda sección de este capítulo se presentan las cualidades y variables que Zeeman considera necesarias para su modelo. Además, se introducen ciertos fenómenos que son provocados por posibles alteraciones en el funcionamiento del corazón, como la ley de Starling o el experimento de Rybak. En el capítulo siguiente se prueba cómo el modelo final es capaz de describir estos fenómenos.

En el segundo capítulo, se realiza un estudio de los distintos modelos en términos de dos variables que aparecen en el artículo de Zeeman [7], hasta llegar al que él considera más adecuado. Para ello estudiamos los correspondientes sistemas de ecuaciones diferenciales en \mathbf{R}^2 y el comportamiento de sus respectivos puntos de equilibrio utilizando el teorema de Hartman-Grobman. Además, se acompaña cada modelo con su correspondiente mapa de fase que ha sido generado con MATLAB y que refleja dicho comportamiento. Al final de este capítulo se expone y justifica la modificación del modelo de Zeeman que nosotras consideramos más adecuado para representar el movimiento del corazón. Concluimos el capítulo realizando un estudio de cómo cambia el comportamiento del modelo si hacemos variar el valor de la tensión del corazón. Esto justifica el hecho de que dicho modelo satisfaga los fenómenos presentados en el capítulo anterior.

En el tercer capítulo, presentamos una serie de teoremas que justifican o niegan la existencia de órbitas cerradas en un sistema de ecuaciones diferenciales. Entre ellos exponemos el teorema generalizado de Poincaré-Bendixson, un ejemplo que ilustre dicho teorema y el teorema de Liénard junto con su demostración. Para ello seguimos la demostración que aparece en [3] y detallamos algunos pasos. En la primera sección de este capítulo aplicamos los teoremas presentados anteriormente a nuestro modelo, con el fin de demostrar la existencia de una solución periódica y con ello probar que la modificación del modelo de Zeeman considerada es capaz de representar la periodicidad del latido del corazón. En la segunda sección introducimos la ecuación de Van der Pol y su relación con el modelo que estamos considerando.

Aunque nuestro objetivo inicial fue únicamente estudiar el conocido modelo de Zeeman, encontramos en la literatura posteriormente el modelo de Gois [1] que imita mejor el comportamiento real del electrocardiograma. Por

ello, hemos añadido el capítulo 4. Éste comienza con una breve descripción de lo que es un electrocardiograma y cómo se transmite el impulso eléctrico que genera la contracción y la relajación del corazón a través del mismo. Además, se presenta el nuevo modelo propuesto por Gois. Finalmente, comparamos el electrocardiograma generado por el modelo modificado, modelo con el que hemos trabajado en capítulos anteriores, con el electrocardiograma que se genera con el modelo que propone Gois.

Por último, me gustaría agradecer a mi tutora, Begoña Cano, su tiempo y su dedicación a lo largo de la elaboración de este trabajo.

Capítulo 1

Presentación del modelo a imitar

1.1. Fisiología del corazón

El corazón es un órgano muscular encargado de impulsar regularmente la sangre por todo el cuerpo hasta el resto de órganos y tejidos. Junto con los vasos sanguíneos y la propia sangre constituyen el sistema circulatorio, responsable del aporte de nutrientes y oxígeno a los tejidos y de la recogida de dióxido de carbono y sustancias de deshecho del metabolismo.

El corazón está formado por cuatro cavidades huecas (dos aurículas en la parte superior y dos ventrículos en la parte inferior) y cuatro válvulas que impiden que la sangre fluya en sentido contrario, como se aprecia en la figura 1.1. Cada aurícula está conectada con el ventrículo del mismo lado a través de un orificio. La separación en dos cavidades en cada lado es necesaria, puesto que el corazón sólo tiene capacidad para expulsar la sangre, no para hacerla llegar a su interior. Esto se debe a que el corazón está hecho de un tejido no-rígido. Para poder realizar una buena contracción, el corazón debe tener el ventrículo totalmente lleno. Es por esto que existe la aurícula, la cual se contrae ligeramente para llenar el ventrículo [2].

Además, el interior del corazón está dividido en dos mitades separadas por un tabique, diferenciando así la parte derecha que recibe la sangre procedente del cuerpo y la envía a la circulación pulmonar y la parte izquierda que recibe la circulación de los pulmones y la distribuye a todo el organismo.

Por tanto, gracias al trabajo del corazón y a un gradiente de presiones, la sangre sigue dos circuitos sanguíneos. Uno de ellos es de baja presión (para no dañar las delicadas membranas de los pulmones) e impulsa la sangre

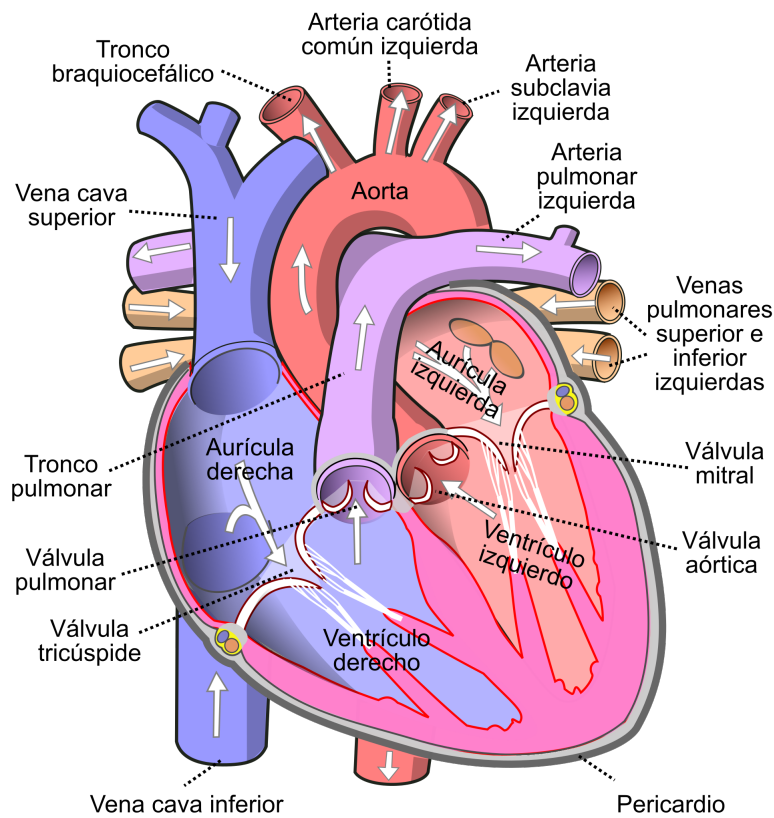


Figura 1.1: Fisiología del corazón

pobre en oxígeno desde el ventrículo derecho a través de la arteria pulmonar a los pulmones, donde posteriormente se realiza el intercambio de gases y se oxigena la sangre. El otro circuito es de mayor presión, puesto que debe hacer llegar la sangre a todo el cuerpo y retirar a su vez las sustancias de deshecho. Es el encargado de transportar la sangre desoxigenada desde los distintos órganos del cuerpo al corazón. Se pueden ver estos dos circuitos en la figura 1.2.

Durante el ciclo cardíaco existen dos posibles estados de equilibrio. Uno corresponde al momento de mayor contracción del corazón, llamado sístole, mientras que el otro se corresponde con el estado de relajación o diástole.

Esta contracción se debe a una onda electroquímica que, en condiciones normales, se desencadena de manera espontánea en el nodo sinoauricular [6] (formado por células musculares cardíacas especializadas que inician y propagan el impulso cardíaco). Ésta se expande primero por las aurículas, provocando que las fibras musculares se contraigan y empujen la sangre a

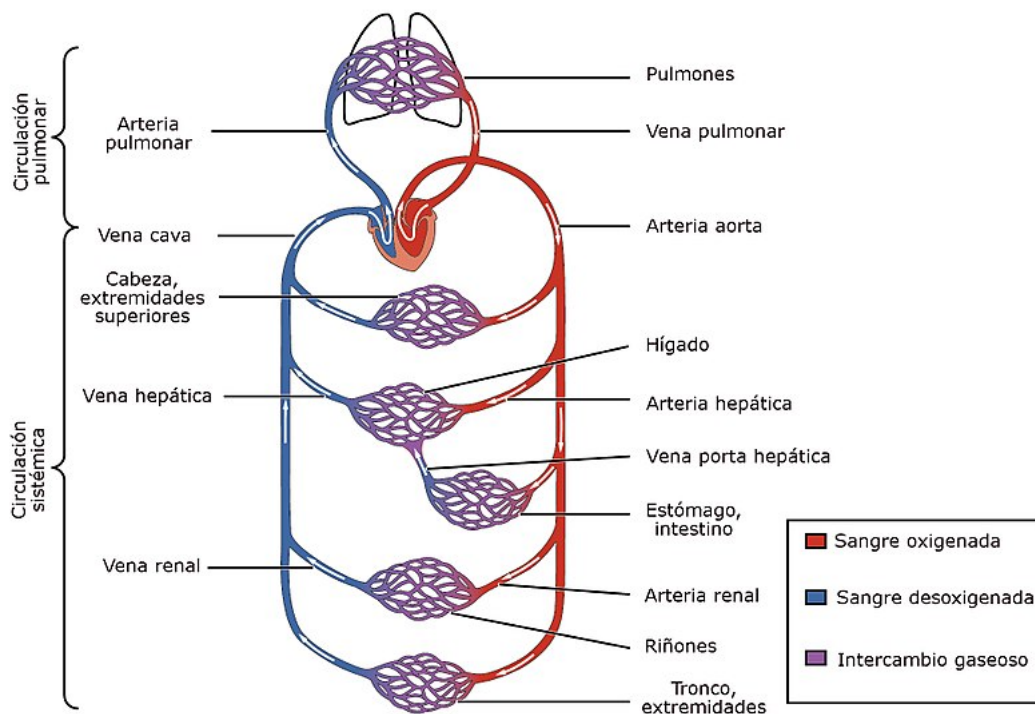


Figura 1.2: Sistema circulatorio

los ventrículos; y posteriormente se expande rápidamente por los ventrículos provocando la contracción total e impulsando así la sangre fuera del corazón. Inmediatamente después las fibras musculares se relajan, devolviendo el corazón al estado de diástole.

1.2. Cualidades a imitar en el modelo matemático y variables clave del mismo

Describiremos en este trabajo la parte básica del modelo que Zeeman presenta en [7]. La principal característica de este modelo es que se basa en simular la parte dinámica del corazón (relativamente simple), más que la bioquímica (la cual es más complicada). Debido a la fisiología cardíaca descrita anteriormente, Zeeman busca que el modelo matemático cumpla las siguientes cualidades dinámicas:

- (1) Tener un equilibrio estable.

- (2) Tener un umbral, que desencadene una acción, es decir, la contracción del corazón.
- (3) Rápida vuelta al equilibrio.

Zeeman considera el estado de relajación del corazón, diástole, como el equilibrio estable de la cualidad 1. Cuando la onda electroquímica que provoca la contracción del corazón en sístole alcanza cada fibra muscular, se corresponde con la acción requerida en la cualidad 2. Cada fibra se mantiene contraída 1/5 segundos aproximadamente y después vuelve a relajarse rápidamente, es decir, cumple la cualidad 3. Por tanto, estas tres cualidades describen el comportamiento local de una fibra muscular del corazón.

De esta manera, Zeeman toma dos variables para representar su modelo matemático. Considera la variable x como la longitud de una fibra muscular cardíaca y la variable b que representa una cierta variable de control electroquímico, correspondiente a cierta concentración o flujo de una determinada sustancia química. Puesto que la tensión en la fibra generada por la presión sanguínea también juega un papel importante, se considera el parámetro a correspondiente a dicha tensión.

El modelo matemático que se obtiene al final es capaz de describir también ciertos fenómenos que se producen debido a posibles cambios, como por ejemplo, la capacidad de adaptarse a volúmenes cambiantes de sangre. El ejemplo anterior es el principio o ley de Frank-Starling [7]: Cuanto mayor es el volumen de llenado al final de la diástole, mayor es la fuerza de contracción y por tanto, mayor es el volumen de sangre impulsado en la sístole. Cuando aumenta el volumen diastólico final, las fibras cardíacas en reposo se alargan, lo que provoca que con la llegada del impulso cardíaco la velocidad de contracción aumente y con ella la fuerza de contracción ejercida. Por el contrario, si el volumen diastólico es menor, la fuerza de contracción también será menor.

Este sistema responde excelentemente ante situaciones extremas o de emergencia. Supongamos que por una determinada causa sentimos miedo. Esto genera un aumento de adrenalina en el torrente sanguíneo. Esta adrenalina provoca una contracción de las arterias y con ello un incremento del ritmo cardíaco. Todo esto da lugar a un aumento de la presión sanguínea, por lo que las aurículas impulsarán más sangre en los ventrículos. La ley de Starling describe cómo esta extensión de los músculos del corazón da lugar a una contracción más potente, lo que contrarresta el aumento de presión y hace que la sangre circule más rápidamente.

Pero este mecanismo tiene un límite, puesto que a partir de cierto punto de distensión de los ventrículos (como puede ocurrir por ejemplo cuando una persona con presión sanguínea alta recibe una fuerte impresión), la fuerza de contracción ya no se ve afectada, pudiendo dar lugar incluso a un fallo cardíaco.

Otro ejemplo de estas posibles alteraciones es el experimento que realiza Boris Rybak en 1957 con una rana. Si el corazón es extraído del cuerpo, deja de latir. Sin embargo, si se le aplica una leve tensión, vuelve a latir y continua así durante algunas horas. Si se deja de aplicar dicha tensión, el corazón se para. Esto quiere decir que, sin tensión, el umbral que desencadena la acción desaparecería y por tanto el latido cesaría.

Algo parecido ocurre cuando el corazón solo hace de 'bypass' en una operación, de forma que desaparece la presión sanguínea en el mismo, el latido se vuelve muy lento y el corazón no cambia prácticamente de tamaño.

En el próximo capítulo se puede ver cómo los modelos presentados satisfacen estos fenómenos.

Capítulo 2

Sucesivas aproximaciones al modelo de Zeeman

En este capítulo haremos un estudio de los ejemplos que aparecen en el artículo de Zeeman [7] hasta llegar a un modelo con las cualidades requeridas que han sido descritas en el capítulo anterior. Representaremos estas cualidades usando un sistema de ecuaciones diferenciales en \mathbb{R}^2 , donde las coordenadas serán x la longitud de una fibra muscular del corazón y b una variable de control electroquímico.

Debido a la cualidad 1, el sistema ha de tener un punto de equilibrio que inicialmente consideraremos $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1

Zeeman propone empezar con un caso lineal, donde las ecuaciones son

$$\begin{cases} \dot{b} = -b, \\ \epsilon \dot{x} = -x \end{cases}$$

con ϵ una constante pequeña positiva, para que así el módulo de uno de los autovalores sea más grande comparado con el del otro autovalor y den lugar a que las órbitas no demasiado cercanas a $x = 0$ tengan un flujo rápido.

La matriz asociada al sistema anterior es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores correspondientes son $\lambda_1 = -\frac{1}{\epsilon}$ y $\lambda_2 = -1$. Como ambos son reales y negativos, el único punto de equilibrio $(0, 0)$ es un nodo estable. Asociados a estos autovalores tenemos los siguientes autovectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectivamente. Puesto que $\lambda_1 < \lambda_2$, el vector dominante será \mathbf{v}_2 cuanto t crece.

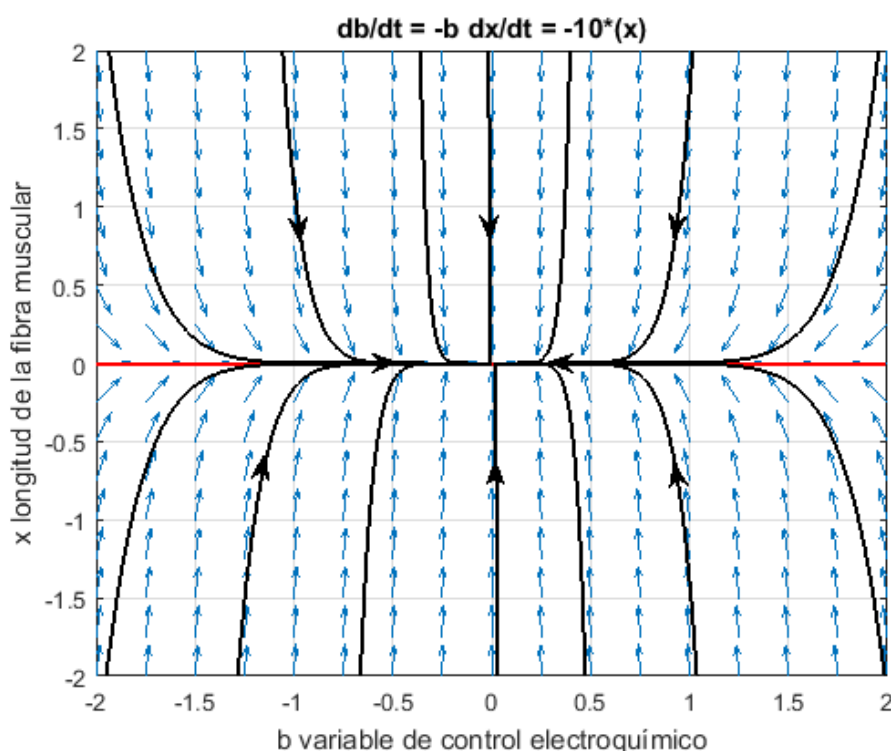


Figura 2.1: Ejemplo 1 para $\epsilon = 1/10$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} b(t) = c_2 e^{-t}, \\ x(t) = c_1 e^{-t/\epsilon}. \end{cases}$$

Las trayectorias están dibujadas en las figuras 2.1 y 2.2 utilizando un programa en MATLAB que dibuja el mapa de fases correspondiente a un sistema diferencial. Se observa que dichas trayectorias son tangentes a la recta correspondiente al autovector lento \mathbf{v}_2 (asociado al autovalor mayor, que llamaremos autovalor lento) cuando se acercan al origen; y son casi paralelas

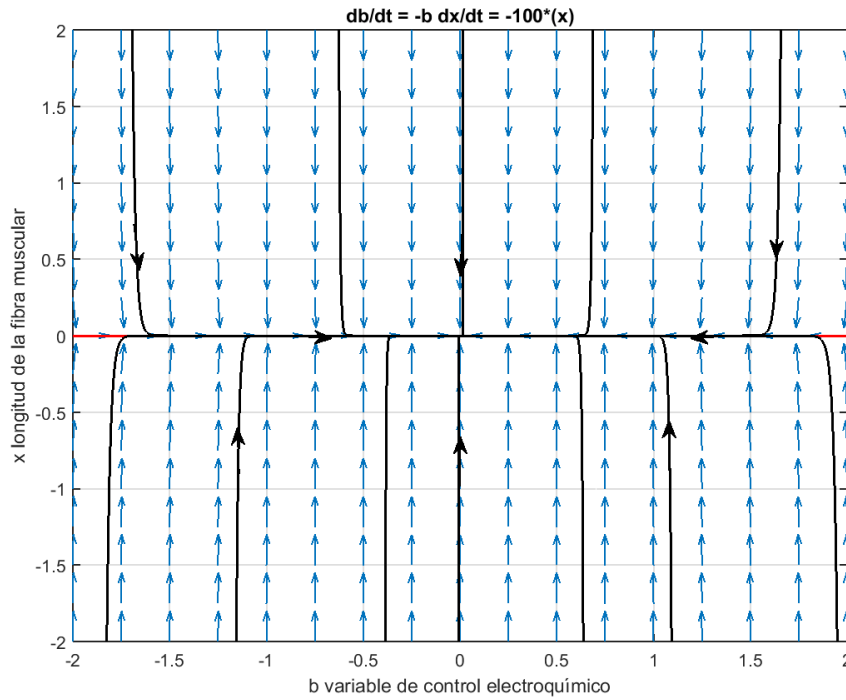


Figura 2.2: Ejemplo 1 para $\epsilon = 1/100$

a la recta generada por el autovector rápido \mathbf{v}_1 (asociado al autovalor menor, o autovalor rápido) cuando nos alejamos del origen. Es decir, cuanto más alejados estemos de la recta $x = 0$, más verticales van a ser las trayectorias, ya que la variable x decrece mucho más rápido que b y por tanto es la componente dominante. Puesto que x decrece más rápido denotaremos por ecuación rápida a $\epsilon \dot{x} = -x$ y ecuación lenta a $\dot{b} = -b$. En la figura 2.2, se tiene que ϵ es más pequeño y por tanto, el decaimiento de x es más pronunciado.

Ejemplo 2

En segundo lugar Zeeman considera el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{b} = -b, \\ \epsilon \dot{x} = -(x + b) \end{cases}$$

cuya matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

El único equilibrio sigue siendo el punto $(0, 0)$. En este caso los autovalores siguen siendo $\lambda_1 = -\frac{1}{\epsilon}$ y $\lambda_2 = -1$ pero sus respectivos autovectores son $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 + \epsilon \\ 1 \end{pmatrix}$.

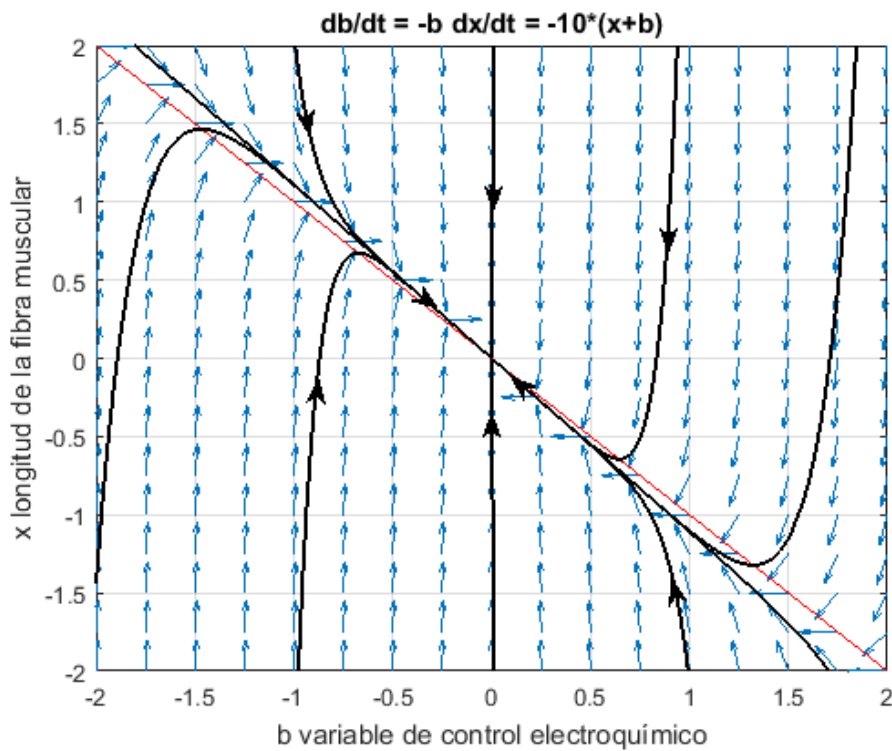


Figura 2.3: Ejemplo 2 para $\epsilon = 1/10$

Puesto que de nuevo $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ el equilibrio $(0, 0)$ sigue siendo un nodo estable y el vector dominante es \mathbf{v}_2 cuando $t \rightarrow \infty$, como podemos comprobar en la figura 2.3. A lo largo de la recta $x + b = 0$ las trayectorias pasan con pendiente horizontal porque $\dot{x} = 0$. Donde esto ocurre, lo llamaremos variedad lenta, puesto que ocurre que la ecuación rápida da variación cero en esos puntos. La dibujaremos en rojo en todas las figuras, al igual que hicimos en las figuras 2.1 y 2.2. La variedad invariante determinada por $\lambda_2 = -1$ es $(1 - \epsilon)x + b = 0$, para la cual la variedad lenta $x + b = 0$ es una aproximación,

como puede observarse claramente en la figura 2.3.

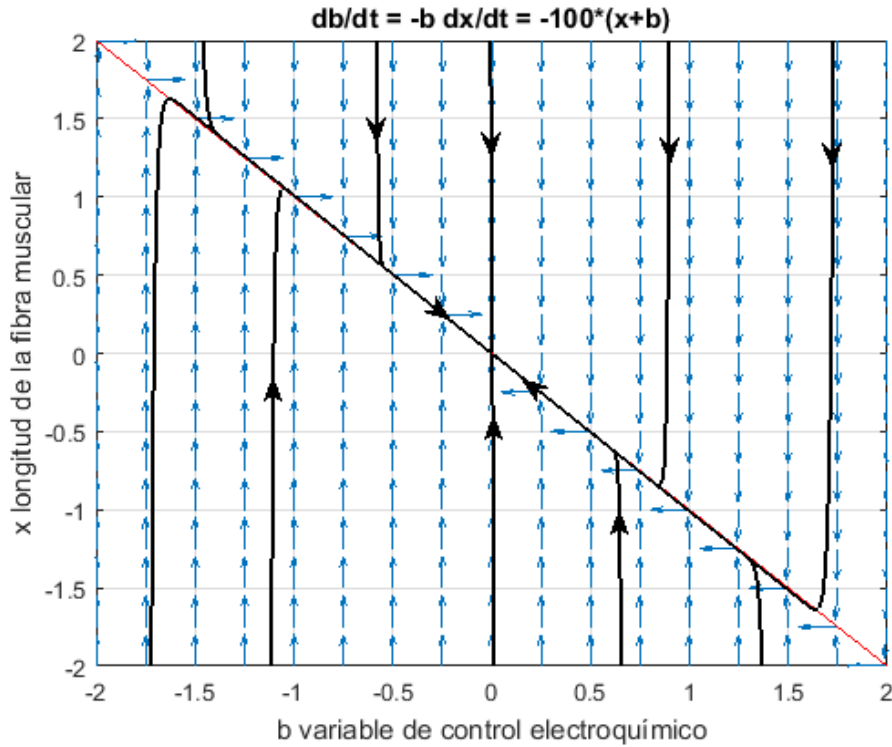


Figura 2.4: Ejemplo 2 para $\epsilon = 1/100$

La solución del sistema es

$$\begin{cases} b(t) = c_2(-1 + \epsilon)e^{-t}, \\ x(t) = c_1e^{-t/\epsilon} + c_2e^{-t}. \end{cases}$$

Como en el caso anterior las trayectorias son tangentes a la recta generada por el autovector lento \mathbf{v}_2 cuando $t \rightarrow \infty$ (es decir, al acercarse al $(0,0)$) y aún más paralelas a \mathbf{v}_1 cuando $t \rightarrow -\infty$ (es decir, al alejarse del $(0,0)$). Además, cuanto más pequeño es ϵ , más cerca están la variedad lenta y la variedad invariante asociada a $\lambda_2 = -1$ y más verticales son las trayectorias antes de acercarse a la variedad lenta, por donde prácticamente caen al origen $(0,0)$. (Ver figuras 2.3 y 2.4).

Ejemplo 3

A continuación Zeeman introduce esta modificación del ejemplo 2, donde cambia la ecuación lenta

$$\begin{cases} \dot{b} = x, \\ \epsilon \dot{x} = -(x+b). \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

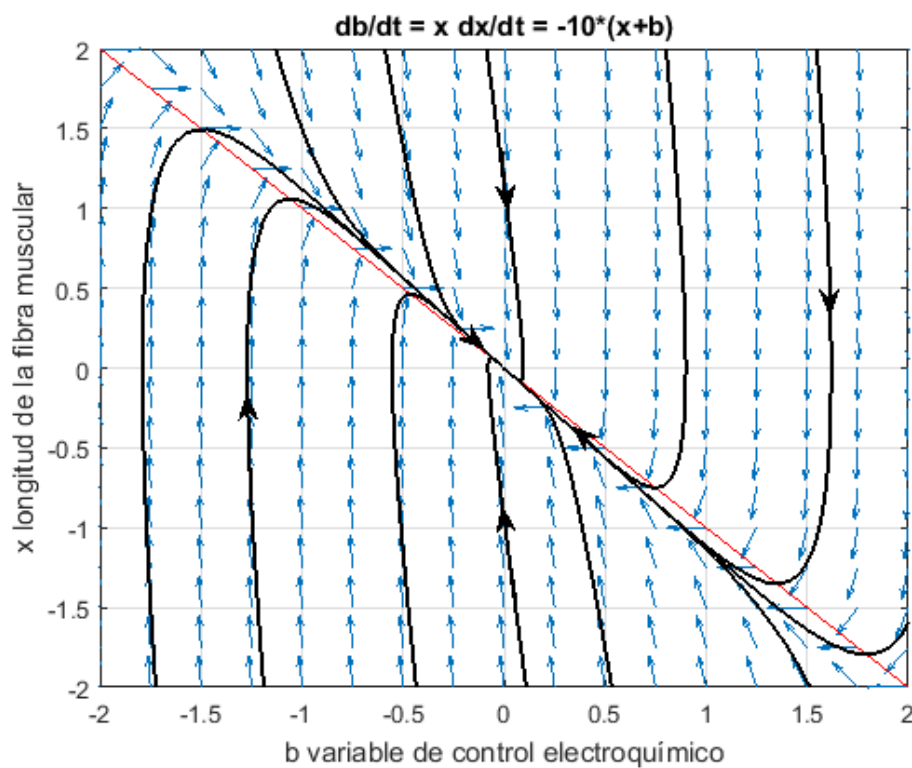


Figura 2.5: Ejemplo 3 para $\epsilon = 1/10$

En este caso la variedad lenta es la misma que en el ejemplo 2, ya que la segunda ecuación es la misma. Además, sobre ella tenemos que $-b = x$ y por tanto la primera ecuación es la misma y el comportamiento será el mismo en la variedad lenta.

Los autovalores son $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon}$ y $\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon}$, ambos

reales negativos y los autovectores asociados son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

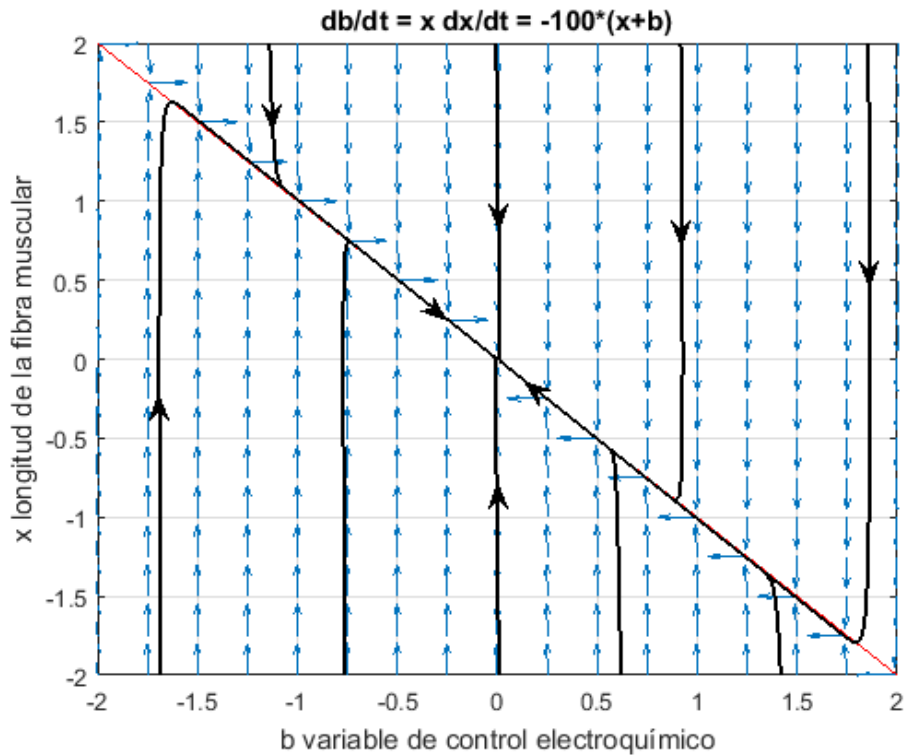


Figura 2.6: Ejemplo 3 para $\epsilon = 1/100$

De esta manera se tiene que el mapa de fases de la figura 2.5 es muy parecido al del ejemplo 2 (figura 2.3), solo con pequeñas diferencias a la vista respecto de la variación de la variable b . De hecho, cuando ϵ es muy pequeño, las diferencias entre ambos mapas de fase son imperceptibles (comparar figuras 2.4 y 2.6). Más adelante veremos por qué era necesario hacer el cambio en la primera ecuación para conseguir la cualidad 3.

Ejemplo 4

Zeeman considera entonces un ejemplo no lineal

$$\begin{cases} \dot{b} = x, \\ \epsilon \dot{x} = -(x^3 + x + b). \end{cases}$$

Ocurre que la matriz jacobiana de este sistema es

$$J(b, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{3x^2 + 1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

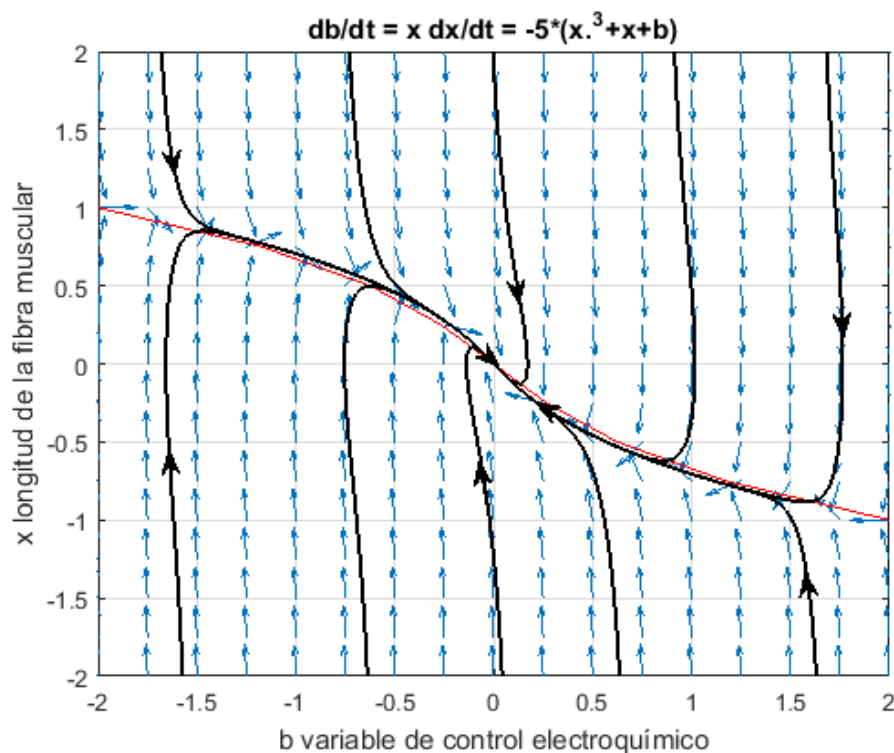


Figura 2.7: Ejemplo 4 para $\epsilon = 1/10$

Evaluando $J(b, x)$ en el único punto crítico $(0, 0)$ del sistema se obtiene

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix},$$

que es la misma matriz del ejemplo 3. Entonces la aproximación lineal de este sistema en el origen se corresponde con el ejemplo 3, por lo que aplicando el teorema de Hartman-Grobman, el origen será un nodo estable y como se ve en las figuras 2.7 y 2.8 el comportamiento local será igual. Sin embargo,

la variedad lenta $x^3 - x + b = 0$ es ahora una curva. Las trayectorias lejos del origen se comportan como en el ejemplo 1, son casi verticales. Es más, podemos decir que los ejemplos 1, 2, 3 y 4 son difeomorfos.

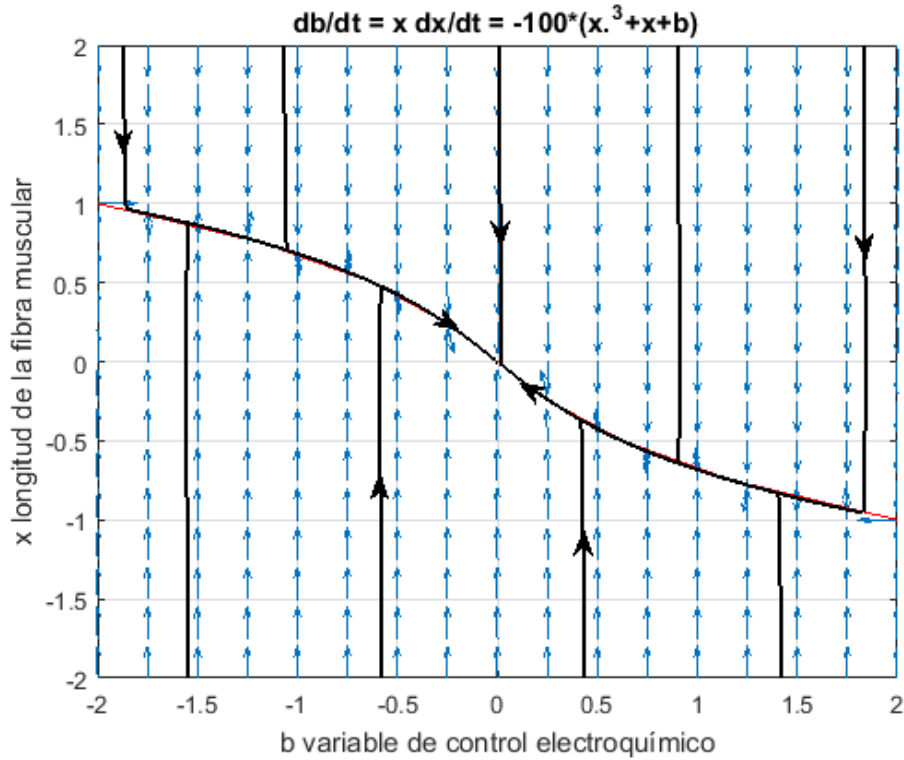


Figura 2.8: Ejemplo 4 para $\epsilon = 1/100$

Ejemplo 5

A continuación Zeeman considera el sistema

$$\begin{cases} \dot{b} = x, \\ \epsilon \dot{x} = -(x^3 - x + b) \end{cases}$$

donde se ha realizado un cambio de signo en uno de los términos de la segunda ecuación. De esta manera la matriz jacobiana es de la forma

$$J(b, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{3x^2 - 1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

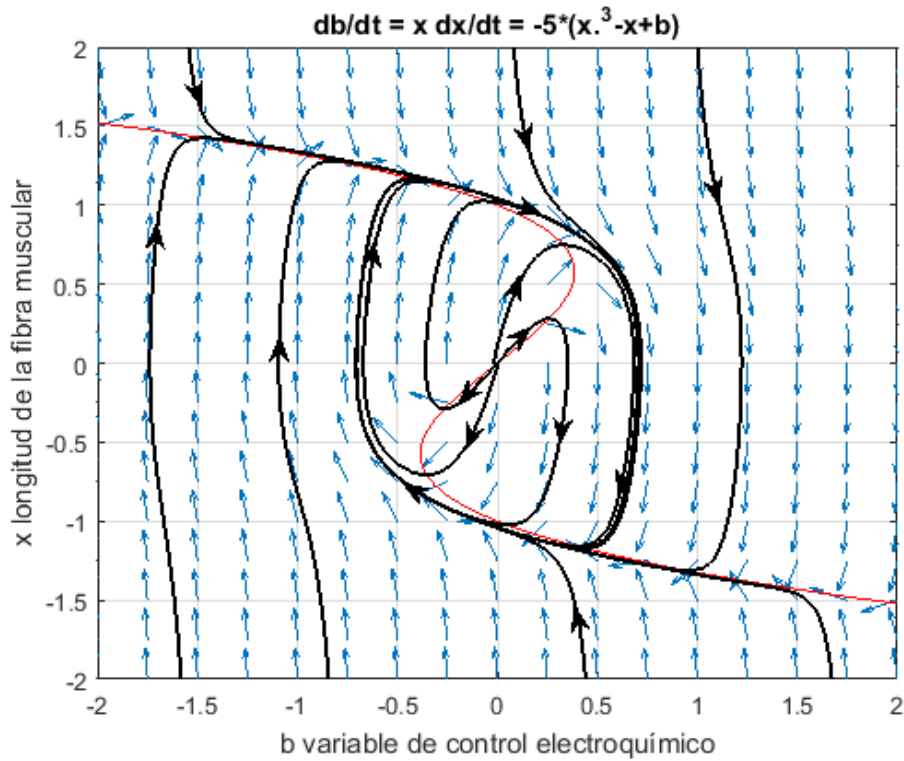


Figura 2.9: Ejemplo 5 para $\epsilon = 1/5$

Como en los casos anteriores, el único punto de equilibrio es el $(0, 0)$, pero evaluando la matriz jacobiana en ese punto nos queda

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix},$$

cuyos autovalores son

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon},$$

y como $1 - 4\epsilon < 1$ para ϵ pequeño, entonces $1 \pm \sqrt{1 - 4\epsilon} > 0$ y tenemos que los dos autovalores son positivos, dando lugar a un nodo inestable en el origen $(0, 0)$. Llamaremos $\lambda_1 = (1 + \sqrt{1 - 4\epsilon})/2\epsilon$ y $\lambda_2 = (1 - \sqrt{1 - 4\epsilon})/2\epsilon$. Debido al cambio de signo con respecto al ejemplo 4 tenemos que la variedad lenta es ahora una curva cúbica con forma de S . Además, hemos perdido la cualidad 1, puesto que ahora el origen es una fuente. Más concretamente, la parte central de la variedad lenta ha pasado a ser repulsora. Los puntos de la

variedad lenta donde b es un máximo o mínimo frente a x vienen dados por $3x^2 = 1$. También ha aparecido una órbita cerrada a la que tienden el resto de trayectorias, como se ve en las figuras 2.9 y 2.10. En el próximo capítulo demostraremos la existencia de la misma aplicando el teorema de Liénard. Los autovectores asociados a λ_1 y λ_2 son

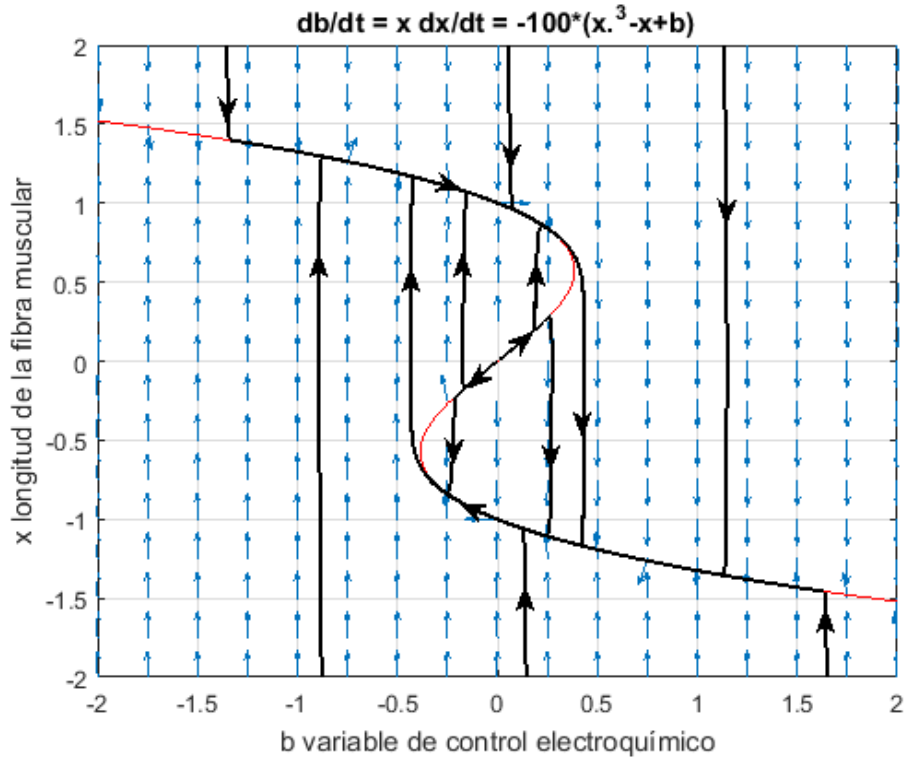


Figura 2.10: Ejemplo 5 para $\epsilon = 1/100$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, como $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, el vector dominante es \mathbf{v}_2 cerca del $(0, 0)$ (cuando $t \rightarrow -\infty$). La pendiente de la recta correspondiente a \mathbf{v}_2 se comporta como $1 - \epsilon$, ya que haciendo el desarrollo de Taylor de $(1 - 4\epsilon)^{1/2}$ nos queda

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 4\epsilon)^{1/2} \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2\epsilon) = 1 - \epsilon.$$

En cambio la pendiente de la curva $x^3 - x + b = 0$ en $(0, 0)$ es 1.

Como se puede ver en la Figura 2.9, en el mapa de fases las trayectorias tienen pendiente horizontal a lo largo de la curva $x^3 - x + b = 0$ y vertical en $x = 0$. Por encima de la curva $x^3 - x + b = 0$ las trayectorias van hacia abajo y por debajo de la curva van hacia arriba. Por otro lado, en el semiplano $x > 0$, apuntan hacia la derecha, mientras que en el semiplano $x < 0$ apuntan hacia la izquierda.

Ejemplo 6

Por último Zeeman presenta el siguiente ejemplo

$$\begin{cases} \dot{b} = x - x_0, \\ \epsilon \dot{x} = -(x^3 - x + b), \end{cases}$$

considerando $x_0 > 1/\sqrt{3}$. La principal diferencia con el ejemplo 5 es que ahora el punto de equilibrio está en la parte atractiva de la variedad lenta y por tanto es atractor en lugar de repulsor. Dicho punto de equilibrio ya no es el origen, es el punto $(-x_0^3 + x_0, x_0)$. Denotaremos $b_0 = -x_0^3 + x_0$.

La matriz jacobiana correspondiente al sistema de ecuaciones anterior es

$$J(b, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{3x^2 - 1}{\epsilon} \end{pmatrix},$$

y evaluada en el punto de equilibrio nos queda

$$J(b_0, x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & -\frac{3x_0^2 - 1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores asociados a la matriz anterior son

$$\lambda = \frac{-(3x_0^2 - 1) \pm \sqrt{(3x_0^2 - 1)^2 - 4\epsilon}}{2\epsilon}.$$

Puesto que $x_0 > 1/\sqrt{3}$, se tiene que $3x_0^2 - 1 > 0$. Esto implica que $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ y entonces el equilibrio (x_0, b_0) es un nodo estable.

En este caso, los autovectores correspondientes son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-(3x_0^2 - 1) - \sqrt{(3x_0^2 - 1)^2 - 4\epsilon}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-(3x_0^2 - 1) + \sqrt{(3x_0^2 - 1)^2 - 4\epsilon}}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

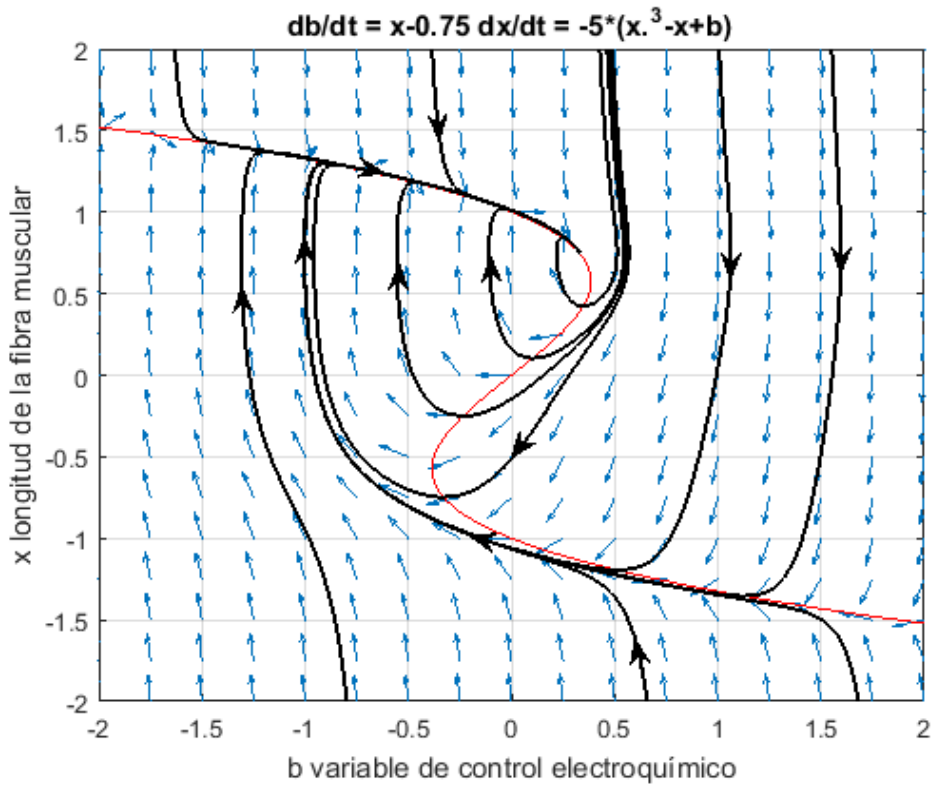


Figura 2.11: Ejemplo 6 para $\epsilon = 1/5$

con \mathbf{v}_1 vector dominante cuando $t \rightarrow \infty$. La inversa de su pendiente se comporta como $-(3x_0^2 - 1) + \epsilon/(3x_0^2 - 1)$, frente a la inversa de la pendiente de la curva $x^3 - x + b = 0$ en (b_0, x_0) que es $-(3x_0^2 - 1)$.

Estudiando el mapa de fases las trayectorias tienen pendiente horizontal a lo largo de la curva $x^3 - x + b = 0$ y vertical en $x = x_0$. Por encima de la curva $x^3 - x + b = 0$ las trayectorias van hacia abajo y por debajo de la curva van hacia arriba. Por otro lado, en el semiplano $x > x_0$, apuntan hacia la derecha, mientras que en el semiplano $x < x_0$ apuntan hacia la izquierda.

Si observamos el mapa de fases de la figura 2.11 (correspondiente a $x_0 = 0.75$) podemos distinguir estas dos situaciones:

1. Si se sobrepasa un umbral cercano (pero mayor) a

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

que es el valor donde la variedad lenta toma un máximo local de b con respecto de x , las órbitas pasan a una zona de mayor contracción de x (sístole) y vuelven después al equilibrio de diástole.

2. En cambio, si no se sobrepasa dicho umbral en la variable b con el músculo sin contraer, las órbitas van directamente al equilibrio sin pasar por la sístole.

Veamos ahora por qué Zeeman introdujo el cambio del ejemplo 2 al ejemplo 3.

Si hubiéramos tenido en el sistema $\dot{b} = -(b - b_0)$ como ecuación lenta, el sistema habría sido

$$\begin{cases} \dot{b} = -(b - b_0), \\ \epsilon \dot{x} = -(x^3 - x + b). \end{cases} \quad (2.1)$$

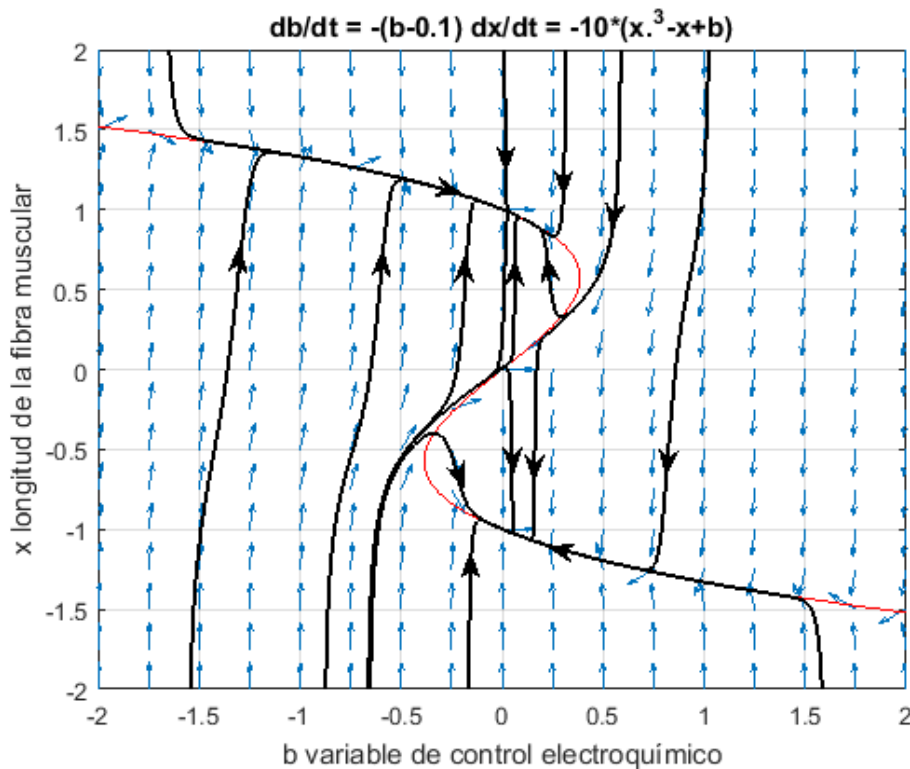


Figura 2.12: Ejemplo del sistema (2.1) con $b_0 = 0.1$

En este caso habría tres equilibrios si $|b_0| < 2/(3\sqrt{3})$, puesto que la recta $b = b_0$ cortaría a la variedad lenta en tres puntos, siendo dos de ellos sumideros y el otro una fuente. Para probar esto consideramos la matriz jacobiana asociada al sistema anterior

$$J(b, x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{1}{\epsilon} & \frac{-3x^2 + 1}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores asociados a dicha matriz son

$$\lambda = \frac{-(\epsilon - 1 + 3x^2) \pm \sqrt{(\epsilon - 1 + 3x^2)^2 - 4\epsilon(3x^2 - 1)}}{2\epsilon}.$$

Simplificando las cuentas, obtenemos que los autovalores son

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1 - 3x^2}{\epsilon},$$

donde x es el valor de la ordenada de cada punto de equilibrio del sistema.

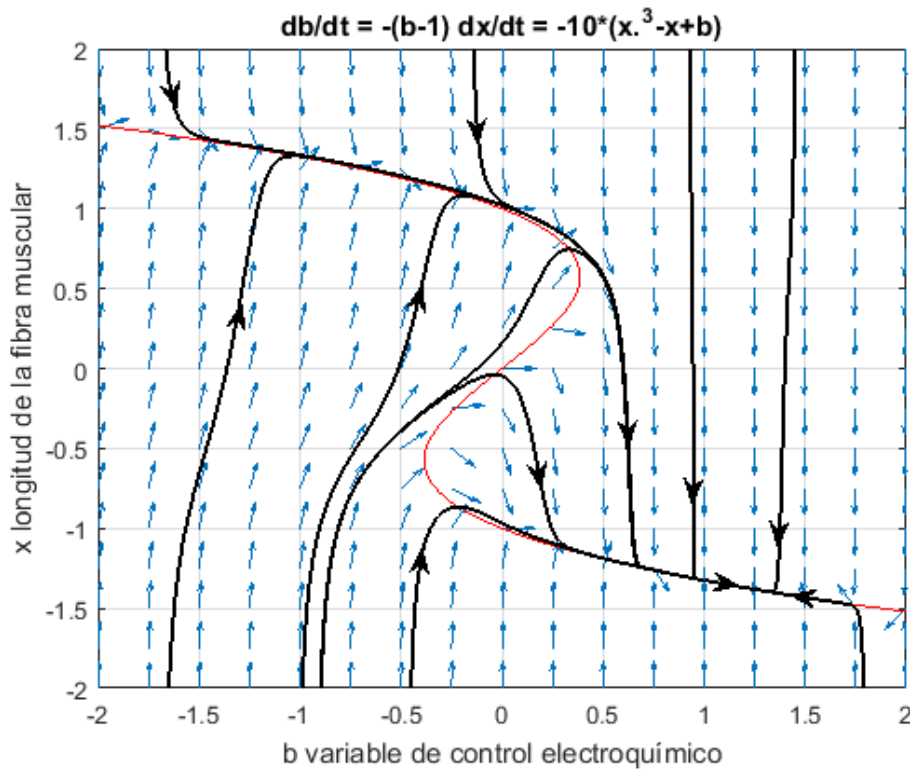


Figura 2.13: Ejemplo del sistema (2.1) con $b_0 = 1$

Se tiene que un autovalor es positivo y otro negativo si $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, por lo que el punto de equilibrio correspondiente es un punto de silla, es decir, es inestable. En cambio, si $x \in (\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, \infty)$ se tiene que $\lambda_2 < 0$ y por tanto los puntos de equilibrio correspondientes son nodos estables. Esto contradeciría la cualidad 3, ya que habría trayectorias que se quedarían en sístole, como de hecho puede observarse en la figura 2.12.

Si $b_0 > 2/(3\sqrt{3})$, solo habría un equilibrio (b_0, x_0) , que correspondería a la sístole. En este caso hay dos autovalores negativos, por el razonamiento anterior, por lo que el equilibrio sería un nodo estable, como se ve en la figura 2.13.

Zeeman, sin embargo, no dice que si $b_0 < -2/(3\sqrt{3})$, el mapa de fases no diferiría mucho del ejemplo 6, habría solo un equilibrio estable, diástole, al que tenderían todas las órbitas, como se ve en la Figura 2.14.

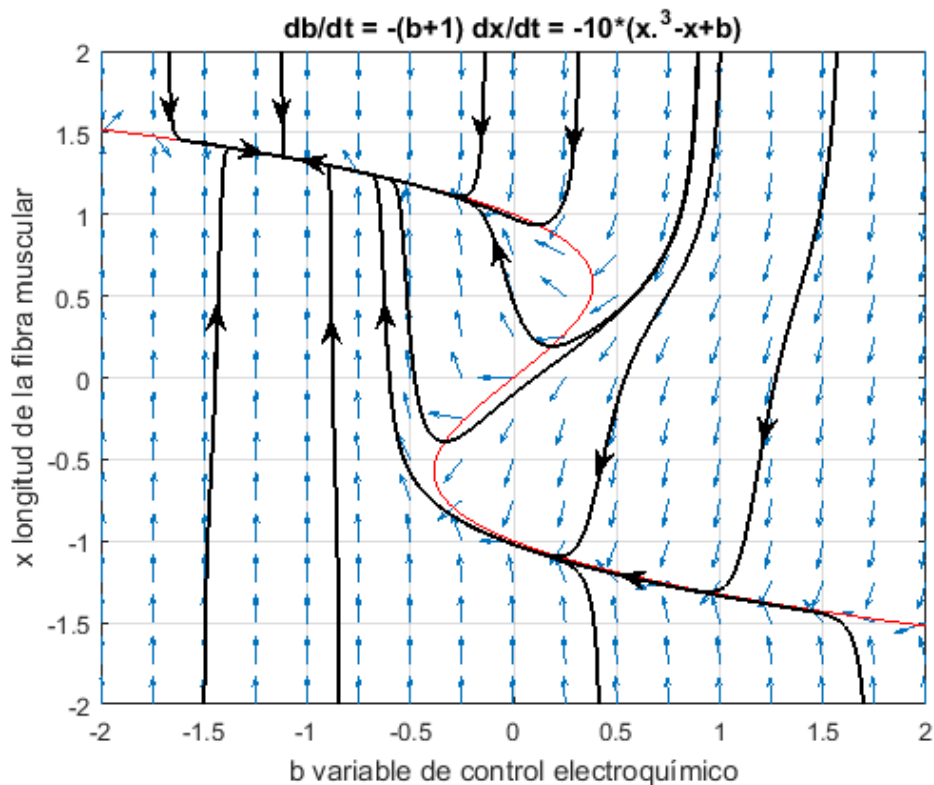


Figura 2.14: Ejemplo del sistema (2.1) con $b_0 = -1$

Aunque Zeeman propone el modelo correspondiente al ejemplo 6 inten-

tando imitar la cualidad 2, creemos que no es un buen modelo puesto que en cualquier caso las soluciones van al nodo estable, sin producirse ninguna oscilación, lo cual quiere decir que el corazón se pararía y provocaría un fallo cardíaco.

Por tanto, pensamos que el mejor modelo para representar las características buscadas corresponde al ejemplo 5. Consideramos a continuación el sistema de dicho ejemplo para un valor de la tensión $a > 0$ genérico.

$$\begin{cases} \dot{b} = x, \\ \epsilon \dot{x} = -(x^3 - ax + b), \end{cases} \quad (2.2)$$

Cuando $a = 0$, los autovalores asociados al sistema tienen parte real nula, por tanto, el teorema de Hartman-Grobman no nos dice qué tipo de equilibrio hay en el $(0, 0)$, aunque como se ve numéricamente en la figura 2.15 parece que hay un foco estable y el corazón pararía en diástole. Este ejemplo se corresponde con el experimento de Rybak presentado en el capítulo anterior.

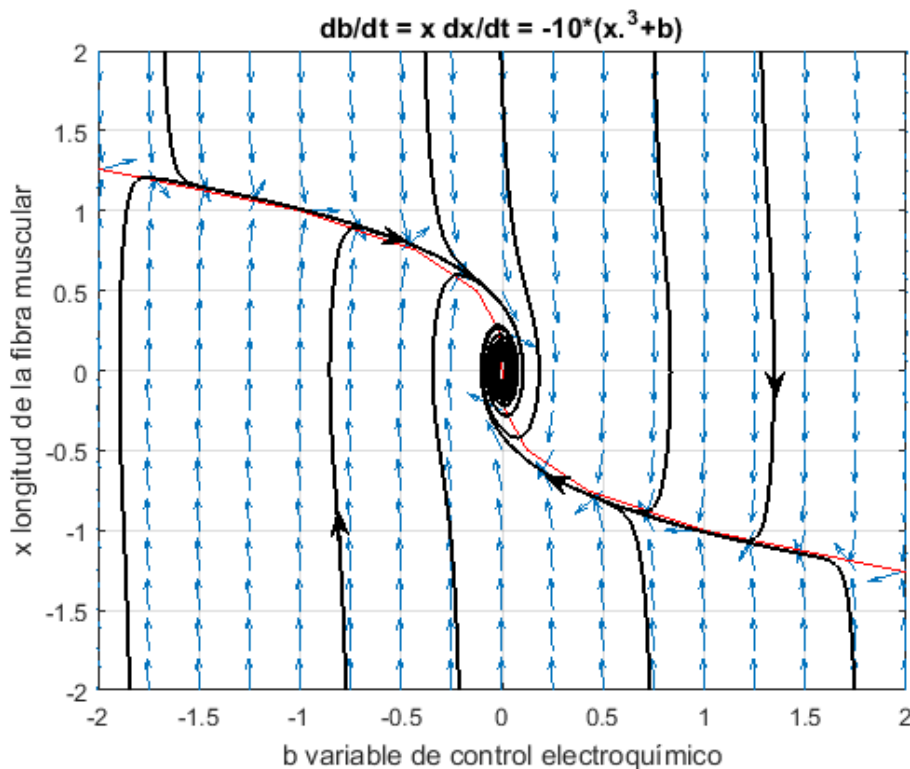


Figura 2.15: Ejemplo del sistema (2.2) con $a = 0$

Para valores de $a > 0$ pequeños, las órbitas tienden a un ciclo límite con amplitud en x pequeña, por lo que prácticamente el movimiento se queda en diástole como se aprecia en la figura 2.16. Más adelante, aplicaremos el teorema de Liénard para justificar la existencia de dicha órbita periódica. A pesar de que Zeeman propone un modelo con un equilibrio estable, como dice la cualidad (i), consideramos que es mejor que el equilibrio sea inestable. De esta manera, aparece un ciclo límite estable, lo que permite representar mejor la periodicidad del ciclo cardíaco.

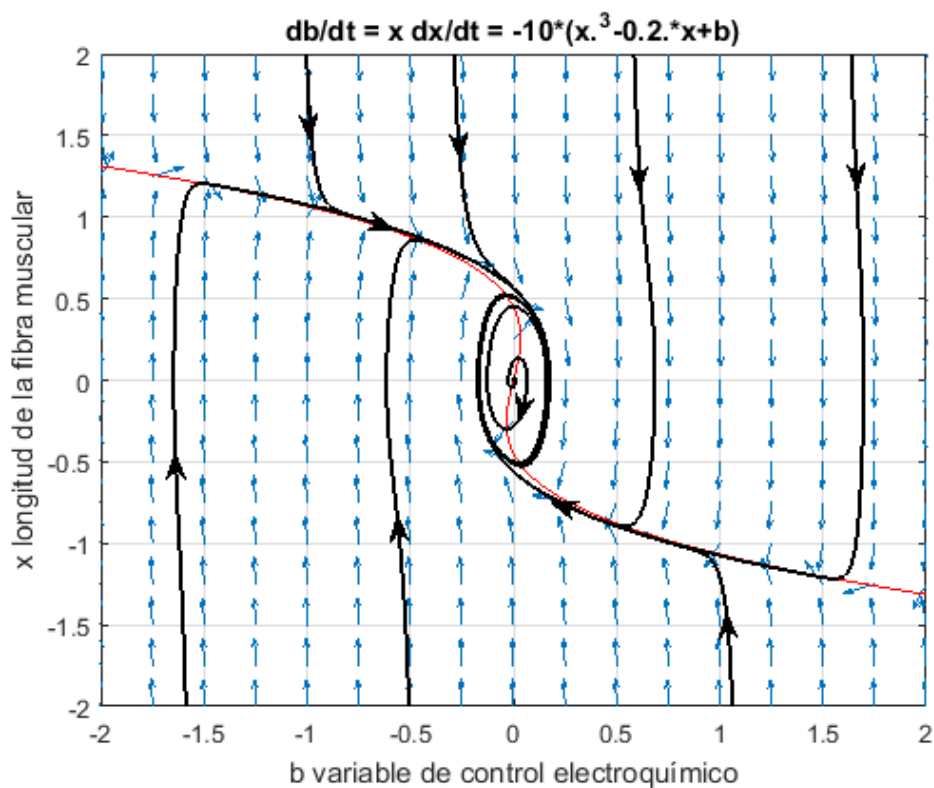


Figura 2.16: Ejemplo del sistema (2.2) con $a = 0.2$

Para a grande, se ve en la figura 2.17 que la oscilación en x es más amplia y aunque el equilibrio sea inestable como queríamos, eso hace que la extensión muscular del corazón sea mayor. De esta manera, la ley de Starling se cumpliría con este modelo. De hecho, para valores de a demasiado grandes, la extensión puede no ser soportada por las fibras del corazón, provocando un fallo cardíaco.

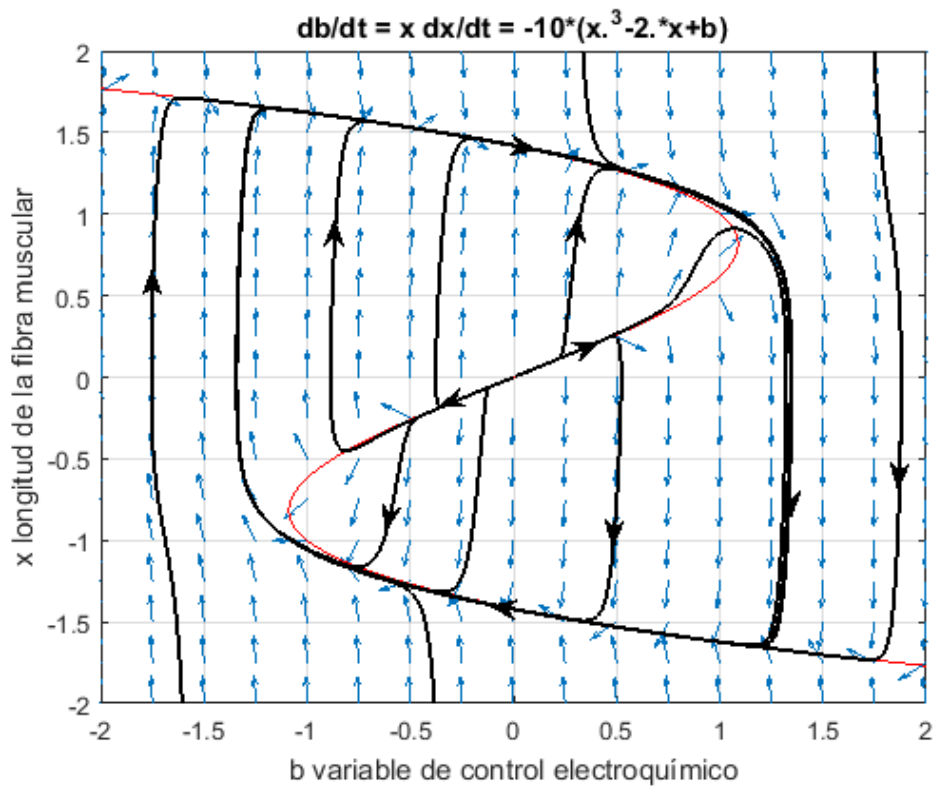


Figura 2.17: Ejemplo del sistema (2.2) con $a = 2$

Nuestra propuesta como modificación del modelo de Zeeman

Por otro lado, si queremos que el equilibrio se encuentre más cerca de la zona de diástole que de la de sístole, podemos considerar el siguiente sistema de ecuaciones, que es una generalización del modelo 6 de Zeeman, para una tensión a general,

$$\begin{cases} \dot{b} = x - x_0, \\ \epsilon \dot{x} = -(x^3 - ax + b), \end{cases} \quad (2.3)$$

y con la principal diferencia de que

$$0 < x_0 < \sqrt{\frac{a}{3}}. \quad (2.4)$$

Aunque no podemos aplicar el teorema de Liénard a este sistema y, por tanto, no podemos justificar la existencia de un ciclo límite estable, numéricamente podemos ver en la figura 2.18 que también hay una órbita cerrada.

En este caso, el punto de equilibrio es $(b_0, x_0) = (-x_0^3 + ax_0, x_0)$ y la matriz jacobiana resultante del sistema anterior evaluada en dicho punto es

$$J(b_0, x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\epsilon} & -3x_0^2 + a \end{pmatrix}.$$

Los autovalores correspondientes son

$$\lambda = \frac{-(3x_0^2 - a) \pm \sqrt{(3x_0^2 - a)^2 - 4\epsilon}}{2\epsilon}.$$

Puesto que estamos considerando el caso $0 < x_0 < \sqrt{a/3}$, se tiene que $3x_0^2 - a < 0$. Por tanto, ambos autovalores son reales positivos y el punto de equilibrio resulta ser un nodo inestable.

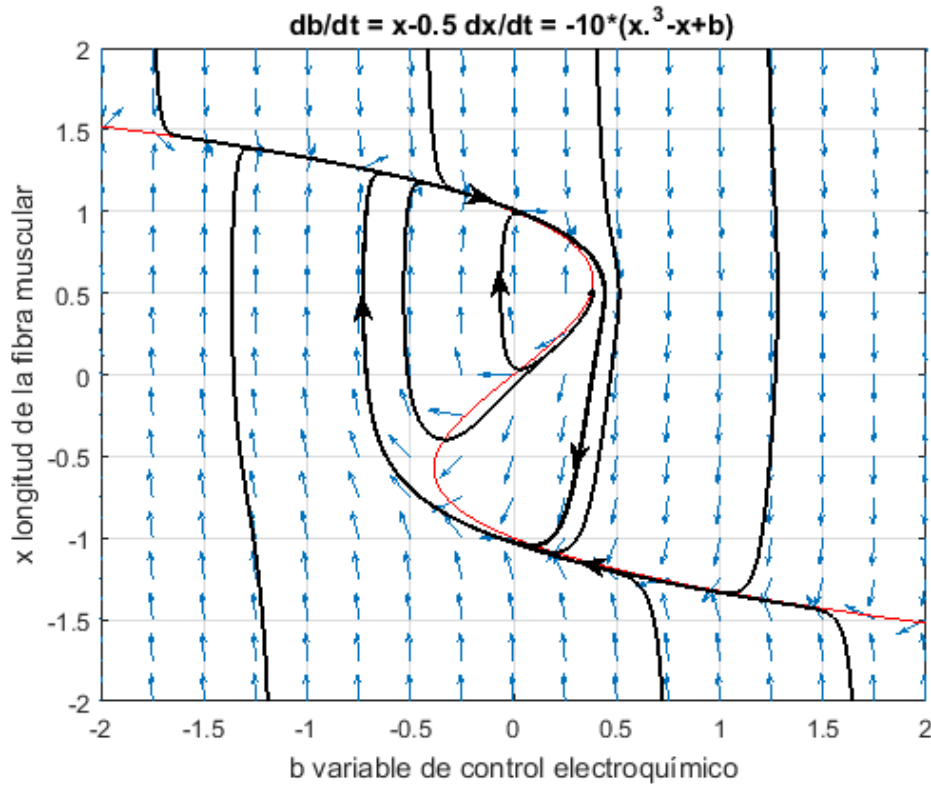


Figura 2.18: Ejemplo del sistema (2.3) con $x_0 = 0.5$ y $a = 1$

Si aumenta la tensión, aumenta también la amplitud de extensión de las fibras musculares. Por tanto, el latido sería más fuerte, explicando de nuevo

la ley de Starling. Esto se ve gráficamente en la figura 2.19.

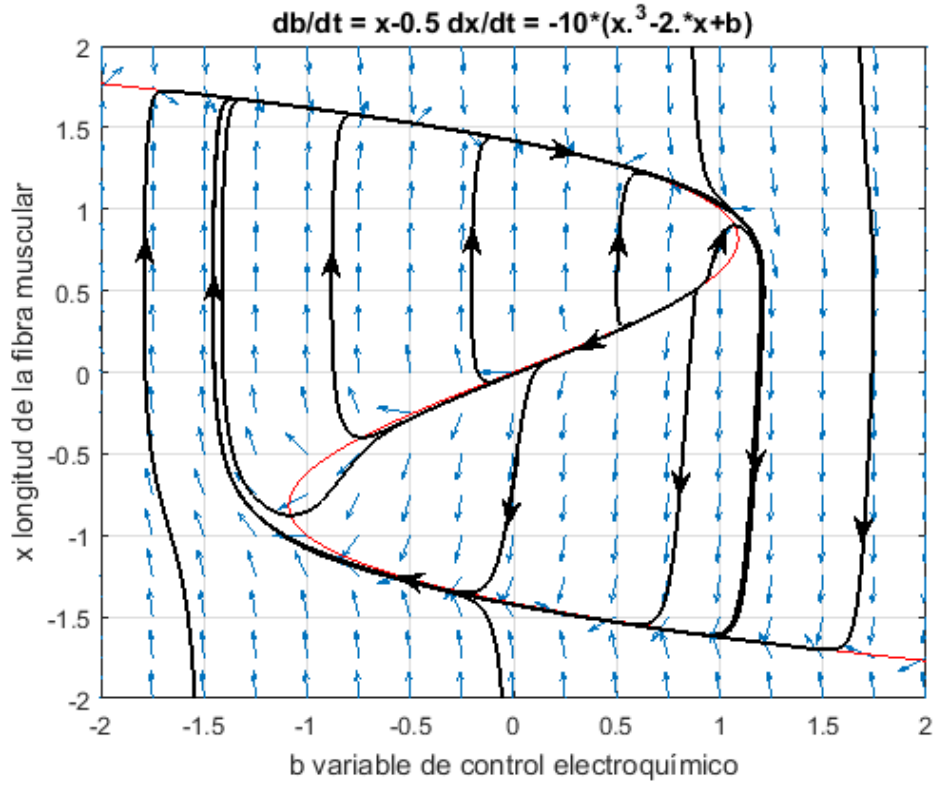


Figura 2.19: Ejemplo del sistema (2.3) con $x_0 = 0.5$ y $a = 2$

La diferencia más importante a nivel cualitativo respecto del caso anterior (2.2) es que cuando la tensión a disminuye, x_0 deja de cumplir la condición (2.4) y el equilibrio $(ax_0 - x_0^3, x_0)$ pasa a ser un sumidero donde el corazón acabaría parando, como ocurre en la figura 2.20. En ese sentido, el valor $a = 3x_0^2$ se puede interpretar como la tensión umbral, a partir de la cual el corazón late de forma periódica.

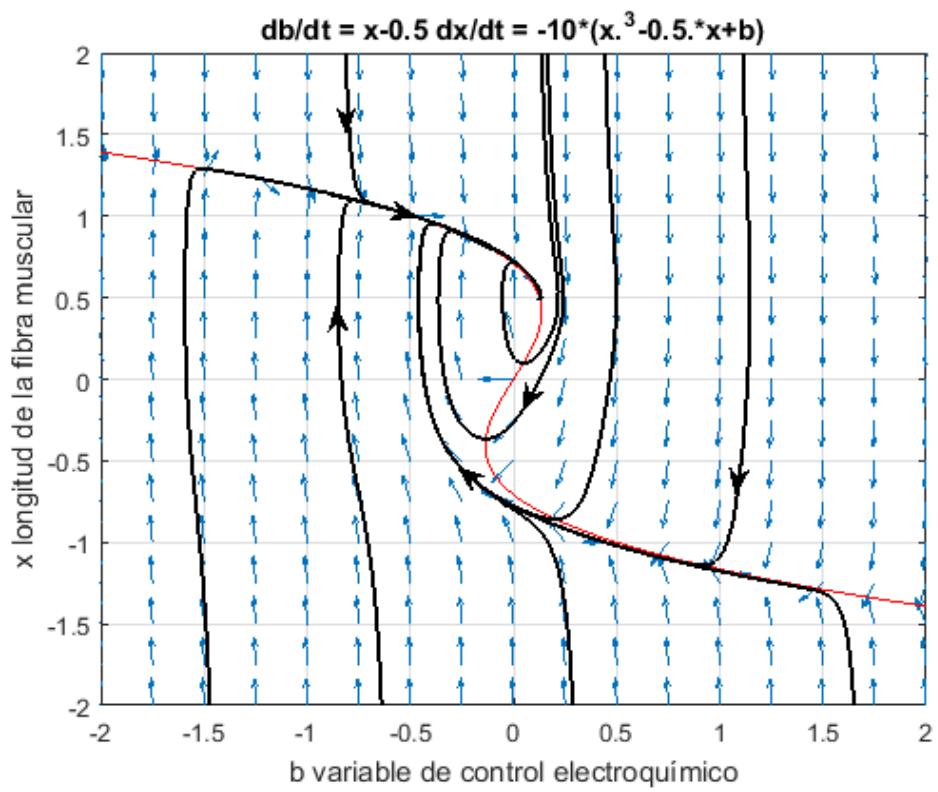


Figura 2.20: Ejemplo del sistema (2.3) con $x_0 = 0.5$ y $a = 0.5$

Capítulo 3

Teoremas de existencia o no de soluciones periódicas en el plano

A continuación se exponen una serie de teoremas que justifican o niegan la existencia de órbitas cerradas en un sistema de ecuaciones diferenciales. Más adelante estos teoremas serán aplicados explícitamente a los modelos estudiados en el capítulo anterior.

Se considera el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

con $F, G \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Los siguientes teoremas son debidos a Poincaré-Bendixson. Uno de ellos proporciona un criterio positivo para la existencia de órbitas periódicas [3] y otro un criterio negativo [5]. Daremos solo la demostración del que proporciona el criterio negativo.

Teorema 3.1. *Si $\partial F/\partial x + \partial G/\partial y$ es siempre positivo o siempre negativo en una cierta región del plano de fases, entonces el sistema (3.1) no tiene ninguna trayectoria cerrada en esa región.*

Demostración. Vamos a razonar por reducción al absurdo. Es decir, suponemos que una determinada región tiene una trayectoria cerrada $\Gamma =$

$[x(t), y(t)]$, cuyo interior es R . Aplicando el teorema de Green y la hipótesis se tiene que

$$\int_{\Gamma} (Fdy - Gdx) = \int \int_R \left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dy \neq 0.$$

Pero a lo largo de Γ se sabe que

$$\begin{cases} dx = Fdt, \\ dy = Gdt. \end{cases}$$

Por tanto

$$\int_{\Gamma} (Fdy - Gdx) = \int_0^T (FG - GF) dt = 0.$$

Se llega a una contradicción, así que en la región anterior no hay trayectorias cerradas. □

Teorema 3.2 (Teorema generalizado de Poincaré-Bendixson). *Sean $F, G \in C^1(E)$, donde E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Sea $\Gamma = [x(t), y(t)]$ una trayectoria del sistema (3.1) contenida en un subconjunto compacto F de E para $t \geq t_0$. Entonces, si (3.1) tiene un número finito de puntos críticos en F , resulta que el conjunto de puntos de acumulación de Γ es un punto crítico de (3.1), es una órbita periódica de (3.1) o bien consiste en un número finito de puntos críticos $\{p_1, \dots, p_n\}$ de (3.1) y en un conjunto numerable de órbitas límite de (3.1) cuyos puntos de acumulación cuando $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$ pertenecen a $\{p_1, \dots, p_n\}$.*

A continuación, para ejemplificar dicho teorema, consideramos el siguiente sistema no lineal [5],

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2), \end{cases} \quad (3.2)$$

ejemplo de un sistema que tiene una trayectoria cerrada aislada, es decir, no hay más trayectorias cerradas próximas a ella.

Hacemos un cambio de coordenadas a polares r y θ , con $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Se tiene que $x^2 + y^2 = r^2$ y $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$, así que obtenemos las siguientes fórmulas:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}$$

y

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Multiplicando la primera ecuación del sistema (3.2) por x , la segunda por y y sumando, se obtiene

$$r \frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2).$$

Del mismo modo, si ahora se multiplica la segunda por x , la primera por y y se restan, se llega a

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = r^2.$$

El único punto crítico se encuentra para $r = 0$. Como lo que nos interesa son las trayectorias, podemos suponer que $r > 0$. De esta manera, se tiene que las igualdades anteriores se convierten en

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

El sistema anterior es fácil de resolver por separado y su solución es

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}, \\ \theta = t + t_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Por tanto, la solución general del sistema (3.2) es

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}, \\ y = \frac{\sin(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Analizando geoméricamente (3.5) se tiene que para $c = 0$, la solución se corresponde en (3.3) con $r = 1$ y $\theta = t + t_0$, las cuales describen la trayectoria circular cerrada $x^2 + y^2 = 1$. Si $c < 0$ entonces $r > 1$ y además se tiene que $r \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, si $c > 0$, resulta $r < 1$ y de nuevo $r \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto demuestra que existe una sola trayectoria cerrada (que es la que corresponde a $r = 1$) a la que tienden el resto de trayectorias en forma de espiral cuando $t \rightarrow \infty$, ya sea por dentro o por fuera de ella.

En general, hacer este tipo de razonamientos no resulta sencillo, y en este sentido los teoremas 3.1 y 3.2 pueden ayudar a probar la existencia o no de trayectorias cerradas.

Como hemos dicho antes, el sistema (3.2) tiene un único punto crítico en el punto $(0, 0)$. Además, es fácil ver que la región R limitada por los círculos $r = 1/2$ y $r = 2$ no contiene puntos críticos. Antes hemos visto que

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2)$$

para $r > 0$. Esto quiere decir que sobre el círculo interior $r = 1/2$ se tiene $dr/dt > 0$ y en cambio, en el círculo exterior $r = 2$ se tiene que $dr/dt < 0$. Por tanto, el vector que define el campo del sistema (3.2) apunta hacia la región R en todos los puntos de la frontera de R . Es decir, cualquier trayectoria que pase por un punto frontera entrará en R y permanecerá dentro cuando $t \rightarrow \infty$. Por el teorema 3.2 de Poincaré-Bendixson, se deduce que, como en R no hay puntos críticos, los puntos de acumulación de cualquier órbita en R deben corresponder con los de una órbita periódica. Por tanto, existe una trayectoria cerrada C_0 en R . Concretamente C_0 se corresponde con el círculo $r = 1$ como ya hemos visto anteriormente.

El teorema 3.2 es, en general, difícil de aplicar, a pesar de ser satisfactorio a nivel teórico. Existe un criterio más práctico que asegura la existencia de órbitas cerradas para cualquier ecuación de la forma

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (3.6)$$

conocida como ecuación de Liénard.

Si denotamos $F(x) = \int_0^x f(s)ds$, esta ecuación es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases} \quad (3.7)$$

Por tanto, hablar de una trayectoria cerrada de (3.7) equivale a hablar de una solución periódica de (3.6).

Consideramos ahora el siguiente teorema, conocido como teorema de Liénard, que garantiza la existencia de una solución periódica para este sistema [3].

Teorema 3.3 (Teorema de Liénard). *Supongamos que las funciones F y g anteriores satisfacen las siguientes propiedades:*

(I) $F, g \in C^1(\mathbb{R})$.

(II) g es una función impar en x que cumple que $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$ y F es también una función impar tal que $F'(0) < 0$.

(III) F tiene un único cero positivo en $x = a$ y crece monótonamente hacia el infinito para $x \geq a$ cuando $x \rightarrow \infty$.

Entonces el sistema (3.7) correspondiente a la ecuación de Liénard tiene exactamente una órbita periódica, que es además un ciclo límite estable.

Demostración. El único punto crítico del sistema (3.6) es el origen. Además, el sistema es invariante al cambio de variables $(x, y) \leftrightarrow (-x, -y)$, ya que si $(x(t), y(t))$ describe una trayectoria, también lo hará $(-x(t), -y(t))$. Como para $x > 0$, la variable y decrece, no puede haber una órbita cerrada en ese semiplano y, por el mismo motivo, tampoco en $x < 0$, donde y solo crece. Por tanto, cualquier posible órbita cerrada debe cortar en dos puntos al eje y . Además, como en la semirecta positiva del eje y el flujo va hacia la derecha, mientras que en la negativa va hacia la izquierda, la órbita cerrada necesariamente contiene el origen.

Como su simétrica respecto del origen también debe ser trayectoria y ambas no pueden cortarse, si Γ es una trayectoria cerrada, necesariamente es simétrica respecto del origen.

Por otro lado, a lo largo de la curva $y = F(x)$, el flujo es vertical hacia abajo en el semiplano $x > 0$ y vertical apuntando hacia arriba en el semiplano $x < 0$. Debido a lo anterior, cualquier trayectoria que empiece en un punto $P_0 = (0, y_0)$ en el eje positivo y , cortará a la curva $y = F(x)$ verticalmente en algún punto $P_2 = (x_2, y_2)$ y cortará también el eje negativo y horizontalmente en un punto $P_4 = (x_4, y_4)$. Debido a la simetría descrita anteriormente, Γ es una trayectoria cerrada si y solo si $-y_0 = y_4$.

Consideramos la función de energía

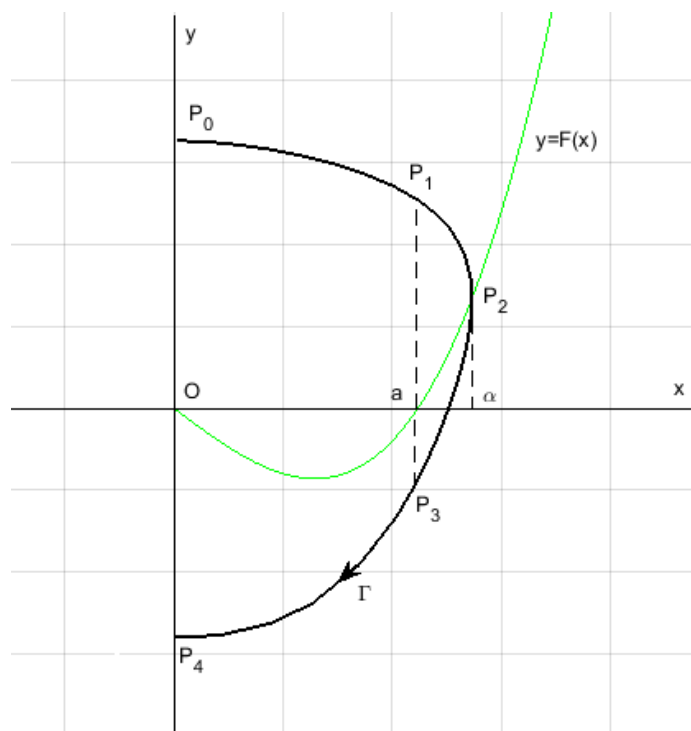
$$u(x, y) = \frac{y^2}{2} + G(x),$$

donde $G(x) = \int_0^x g(s)ds$. Entonces la propiedad anterior equivale a que $u(0, y_0) = u(0, y_4)$.

Sea A el arco $\overline{P_0P_4}$ de Γ , definimos

$$\phi(\alpha) := \int_A du = u(0, y_4) - u(0, y_0),$$

donde $\alpha = x_2$, es decir, la abscisa del punto P_2 . Por tanto, por la necesaria simetría respecto al origen de las posibles órbitas cerradas, Γ es cerrada si y solo si $\phi(\alpha) = 0$.



Nuestro objetivo ahora es probar que $\phi(\alpha)$ tiene exactamente un cero en $\alpha = \alpha_0$ y que $\alpha_0 > a$, siendo a el punto de corte de la curva $y = F(x)$ con el eje x .

Sabemos que a lo largo de Γ ,

$$du = g(x)dx + ydy = -[y - F(x)]dy + ydy = F(x)dy. \quad (3.8)$$

Si $0 < x < a$, se tiene $F(x) < 0$ y $dy = -g(x)dt < 0$, así que $du > 0$. Esto implica que $\phi(\alpha) > 0$, es decir, $u(0, y_4) > u(0, y_0)$ si $\alpha \leq a$. Entonces, cualquier trayectoria Γ que corte la curva $y = F(x)$ en un punto P_2 con $0 < x_2 = \alpha \leq a$ no es cerrada.

Veamos ahora que para $\alpha \geq a$, la función $\phi(\alpha)$ es monótona decreciente. Y decrece desde el valor positivo $\phi(a)$ hasta $-\infty$ según α crece en el intervalo $[a, \infty)$, con lo que quedaría probado que $\phi(\alpha)$ tiene un único cero $\alpha_0 > a$ y por tanto el teorema.

Para $\alpha > a$, dividimos el arco A en tres partes $A_1 = \overline{P_0P_1}$, $A_2 = \overline{P_1P_3}$ y $A_3 = \overline{P_3P_4}$, y definimos las siguientes funciones

$$\phi_1(\alpha) := \int_{A_1} du, \quad \phi_2(\alpha) := \int_{A_2} du, \quad \phi_3(\alpha) := \int_{A_3} du,$$

de forma que

$$\phi(\alpha) = \phi_1(\alpha) + \phi_2(\alpha) + \phi_3(\alpha).$$

A lo largo de Γ se tiene

$$du = \left[g(x) + y \frac{dy}{dx} \right] dx = \left[g(x) - \frac{yg(x)}{y - F(x)} \right] dx = \frac{-g(x)F(x)}{y - F(x)} dx. \quad (3.9)$$

A lo largo de A_1 y de A_3 tenemos que $F(x) < 0$ y $g(x) > 0$, lo cual implica que $-g(x)F(x) > 0$ y por otro lado

$$\frac{dx}{y - F(x)} = dt > 0.$$

Como consecuencia $\phi_1(\alpha), \phi_3(\alpha)$ son positivos.

En cambio, a lo largo de A_2 se tiene que tanto $F(x)$ como $g(x)$ son positivos y $dx/(y - F(x)) = dt > 0$, así que $\phi_2(\alpha) < 0$.

Como las trayectorias no se cortan, si aumentamos α , el arco A_1 sube y el arco A_3 baja.

A lo largo de A_1 , los límites de integración en x quedan fijos en $x_0 = 0$ y en $x_1 = a$; así que para cada x fijo en $[0, a]$, aumentar α eleva el arco A_1 lo que provoca un incremento en la y y eso hace que el integrando (3.9) descrito anteriormente decrezca, es decir, $\phi_1(\alpha)$ decrece.

De forma similar, a lo largo de A_3 , los límites de integración permanecen fijos en $x_3 = a$ y en $x_4 = 0$. Para cada $x \in [0, a]$, aumentando α baja el arco A_3 y decrece y . El integrando (3.9) decrece y por tanto decrece también $\phi_3(\alpha)$, ya que

$$\phi_3(\alpha) = \int_a^0 \frac{-g(x)F(x)}{y - F(x)} dx = \int_0^a \left| \frac{-g(x)F(x)}{y - F(x)} \right| dx.$$

A lo largo de A_2 podemos considerar $du = F(x)dy$. Como las trayectorias no se cruzan, aumentar α hace que el arco A_2 se mueva hacia la derecha. Los límites de integración en y son $y_1(\alpha)$ e $y_3(\alpha)$, con $y_1(\alpha)$ aumentando cuando α crece y $y_3(\alpha)$ disminuyendo. Para cada y fijo, aumentar α significa que el valor de x que le corresponde es mayor y por tanto mayor es el valor de $F(x)$ y, como

$$\phi_2(\alpha) = - \int_{y_3(\alpha)}^{y_1(\alpha)} F(x) dy,$$

entonces $\phi_2(\alpha)$ decrece.

Por tanto, hemos probado que para $\alpha \geq a$, la función ϕ es monótona decreciente en α . Falta ver que $\phi_2(\alpha) \rightarrow -\infty$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$.

Como hemos dicho antes, a lo largo de A_2 , $du = F(x)dy = -F(x)g(x)dt < 0$. Así que considerando el módulo de $\phi_2(\alpha)$ se tiene

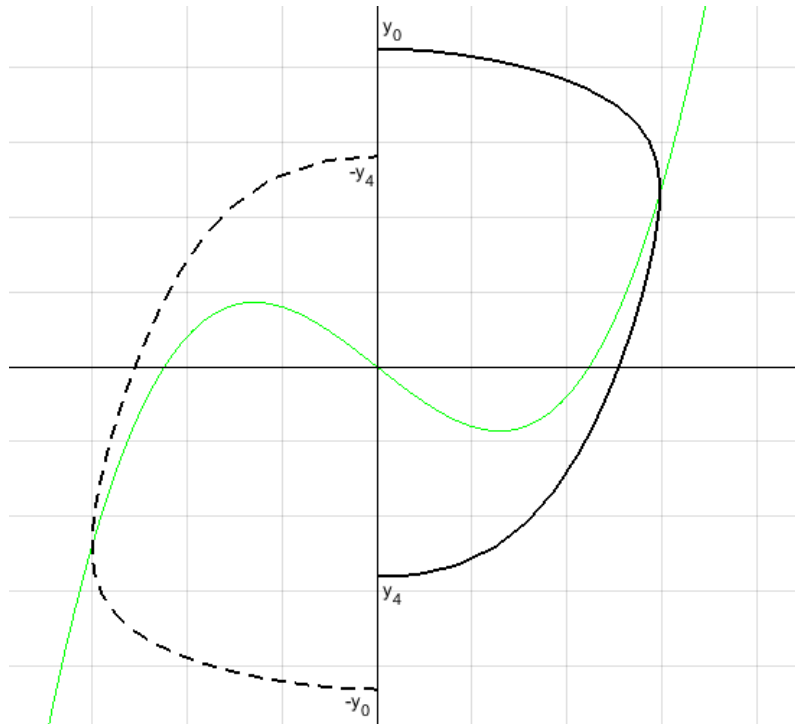
$$|\phi_2(\alpha)| = \left| - \int_{y_3(\alpha)}^{y_1(\alpha)} F(x)dy \right| = \int_{y_3(\alpha)}^{y_1(\alpha)} F(x)dy > \int_{y_3(\bar{\alpha})}^{y_1(\alpha)} F(x)dy,$$

para un cierto $\bar{\alpha}$ fijo con $a < \bar{\alpha} < \alpha$, ya que si $\bar{\alpha} < \alpha$, $y_3(\bar{\alpha}) > y_3(\alpha)$ y el intervalo de integración se hace más pequeño. Además, como las trayectorias no se cortan, si $\alpha \rightarrow \infty$ el punto P_1 estará más arriba y $y_1(\alpha) \rightarrow \infty$, ya que $y_1(\alpha) > y_2(\alpha) = F(\alpha)$ y F crece monótonamente hacia ∞ . Por tanto, queda probado que $\phi_2(\alpha) \rightarrow -\infty$ si $\alpha \rightarrow \infty$.

Puesto que $\phi(\alpha)$ es una función continua que decrece monótonamente desde el valor positivo $\phi(a)$ hasta $-\infty$ cuando α crece en el intervalo $[a, \infty]$, se sigue que $\phi(\alpha) = 0$ en un solo valor $\alpha = \alpha_0$ en (a, ∞) .

Es decir, el sistema (3.7) tiene una única trayectoria cerrada Γ_0 que pasa por $(\alpha_0, F(\alpha_0))$.

Dado que $\phi(\alpha) < 0$ para $\alpha > \alpha_0$ y por la simetría descrita al principio de la demostración, veremos que si $\alpha \neq \alpha_0$, los puntos de intersección de Γ con el eje y se acercan a Γ_0 , es decir, Γ_0 es un ciclo límite estable.



Para probar esto, notemos que, para $\alpha > \alpha_0$, $|y_4|$ debe ser menor que y_0 , pero por la simetría de la ecuación, la órbita continuaría por el semiplano

izquierdo de forma que el siguiente corte con el eje y debería quedar por debajo de $|y_4|$ para que no corte a la parte simétrica respecto del origen (línea discontinua en la figura) de la parte de la órbita ya dibujada en el semiplano $x > 0$. Procediendo recursivamente la órbita da vueltas en torno a Γ_0 . Por otro lado, en el interior, si $g'(0) > 0$ también las órbitas tienden a Γ_0 por el teorema de Poincaré-Bendixson, ya que el equilibrio $(0, 0)$ es inestable al ser los autovalores asociados a la matriz del sistema

$$\lambda_{1,2} = \frac{-F'(0) \pm \sqrt{F'(0)^2 - 4g'(0)}}{2},$$

ambos valores positivos por la hipótesis $F'(0) < 0$. En el posible caso en que $g'(0) = 0$, se podría razonar como para la parte exterior del ciclo límite. \square

3.1. Aplicación de los teoremas a los ejemplos del capítulo 2

En esta sección, vamos a aplicar los teoremas anteriores al sistema de ecuaciones siguiente, que se corresponde al ejemplo 5,

$$\begin{cases} \dot{b} = x, \\ \epsilon \dot{x} = -(x^3 - ax + b) \end{cases} \quad (3.10)$$

para un valor de tensión $a > 0$.

En primer lugar aplicamos el teorema 3.1, donde las funciones F y G del teorema serán ahora $F(x, b) = -(x^3 - ax + b)/\epsilon$ y $G(x, b) = x$. Por tanto,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial b} = \frac{-3x^2 + a}{\epsilon}.$$

Es decir, el teorema justifica que no puede haber trayectorias cerradas en las regiones correspondientes a $x \in (-\infty, -\sqrt{a/3})$ ni en $x \in (\sqrt{a/3}, \infty)$ puesto que en ellas

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial b} < 0.$$

De la misma manera, tampoco hay órbitas periódicas en la región correspondiente a $x \in (-\sqrt{a/3}, \sqrt{a/3})$, ya que en esa región

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial b} > 0.$$

A continuación aplicaremos el teorema de Liénard al sistema (3.10).

Derivando la segunda ecuación y sustituyendo la primera se obtiene la ecuación de segundo orden

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{3x^2 - a}{\epsilon}}_{f(x)} \dot{x} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon}x}_{g(x)} = 0, \quad (3.11)$$

con forma de ecuación de Liénard, donde $f(x) = (3x^2 - a)/\epsilon$ y $g(x) = x/\epsilon$ serán las funciones f y g del teorema. Por tanto, $F(x) = (x^3 - ax)/\epsilon$.

Veamos que este ejemplo cumple las condiciones de la hipótesis:

(I) Es claro que $F, g \in C^1(\mathbb{R})$.

(II) Para comprobar que g es una función impar, calculamos

$$-g(x) = -\frac{1}{\epsilon}x = g(-x).$$

Además, $xg(x) = x^2/\epsilon > 0$ para $x \neq 0$.

En el caso de F ,

$$-F(x) = -\frac{x^3 - ax}{\epsilon} = F(-x)$$

y queda probado que es también una función impar. Por último,

$$F'(x) = \frac{3x^2 - a}{\epsilon}$$

y por tanto $F'(0) = -a/\epsilon < 0$, ya que $a, \epsilon > 0$.

(III) Como F se puede descomponer de esta forma

$$F(x) = \frac{x^3 - ax}{\epsilon} = \frac{x(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}{\epsilon},$$

F tiene un único cero positivo en $x = \sqrt{a} > 0$. Dado que $F'(x) = (3x^2 - a)/\epsilon$ es positiva para $x \in (-\infty, -\sqrt{a/3}) \cup (\sqrt{a/3}, \infty)$ y negativa para $x \in (-\sqrt{a/3}, \sqrt{a/3})$, se tiene que $F(x)$ es creciente para $x \geq \sqrt{a}$ como pedía la condición. Además crece hacia el infinito cuando $x \rightarrow \infty$.

Por tanto, se cumplen todas las condiciones del teorema y podemos concluir que el sistema (3.10) tiene un único ciclo límite estable.

3.2. Aplicación de los teoremas a la ecuación de Van der Pol

Por último, comentaremos que para $\epsilon = 1$ y $a = 3$, la ecuación (3.11) es un caso particular de la bien conocida ecuación de Van der Pol. La ecuación de Van der Pol es una ecuación diferencial de segundo orden homogénea de la siguiente forma

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (3.12)$$

con μ una constante positiva que representa el coeficiente de amortiguamiento.

El sistema equivalente a la ecuación anterior es

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - \mu(x^2 - 1)y. \end{cases} \quad (3.13)$$

La ecuación de Van der Pol surgió para modelar un circuito eléctrico de serie RLC. Pero más adelante, ha sido usada en otros campos científicos, dentro de la física, la ingeniería o la biología. Por ejemplo, para describir el potencial de acción de las neuronas, en sismología para modelar el comportamiento de dos placas tectónicas en una falla y también se usó este tipo de oscilador eléctrico no lineal como precursor de las primeras radios comerciales.

El oscilador de Van der Pol es un caso especial de oscilador con amortiguamiento no lineal. La fuerza de amortiguamiento a la que está sometida el sistema es $\mu(x^2 - 1)dx/dt$. Esto quiere decir que el sistema favorece las oscilaciones pequeñas y amortigua las oscilaciones grandes.

La principal aplicación del teorema 3.3 de Liénard se produce con la ecuación de Van der Pol. El único punto crítico del sistema es el punto $(0, 0)$. Por otro lado, se tiene que la matriz jacobiana correspondiente al sistema (3.13) evaluada en el punto crítico es

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Por tanto, los autovalores asociados son

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}.$$

Como $\mu > 0$ se tiene que los dos autovalores tienen parte real positiva, es decir, el sistema tiene un equilibrio inestable.

Se puede aplicar el teorema 3.3 de Liénard a la ecuación anterior, considerando $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ y $g(x) = x$. De esta manera, es fácil ver que se cumplen las condiciones (i) y (ii). Como

$$F(x) = \mu\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) = \frac{1}{3}\mu x(x^2 - 3),$$

tiene un solo cero positivo $x = \sqrt{3}$. Por tanto, $F(x) < 0$ si $x \in (0, \sqrt{3})$, y $F(x) > 0$ para $x > \sqrt{3}$. Además, $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. Por otro lado, $F'(x) = \mu(x^2 - 1)$, así que $F'(0) = -\mu < 0$. Se cumplen todas las condiciones del teorema y se concluye que la ecuación de Van der Pol (3.12) tiene una única solución periódica que además es un ciclo límite.

Capítulo 4

Simulación de un electrocardiograma

Un electrocardiograma (ECG) es una prueba que representa la actividad eléctrica que se produce en cada latido del corazón en función del tiempo. En dicha prueba se obtiene una gráfica donde aparece una onda que representa los estímulos cardíacos. En un electrocardiograma correspondiente a un ciclo cardíaco normal deben aparecer representadas: la despolarización auricular, la repolarización auricular, la despolarización ventricular y la repolarización ventricular que se producen en cada latido del corazón.

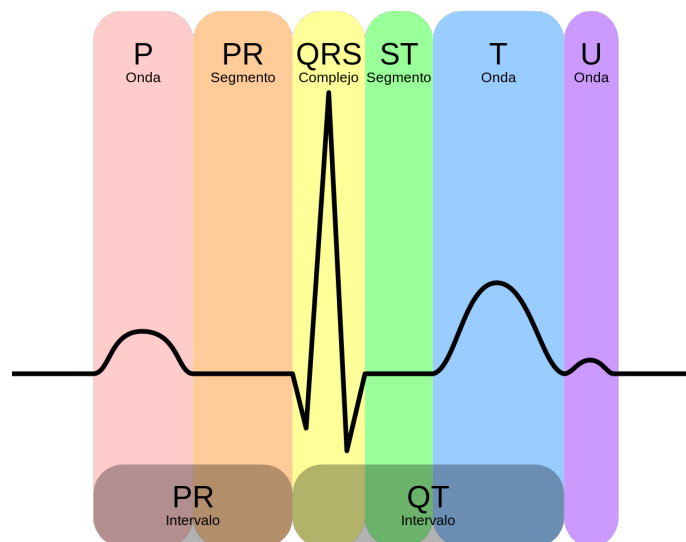


Figura 4.1: Componentes de un electrocardiograma normal

El impulso cardíaco se genera en el nodo sinoauricular (SA), situado entre

la aurícula derecha y la vena cava. Dicho nodo genera impulsos periódicamente, es decir, actúa como un marcapasos fisiológico del corazón. Estos impulsos se propagan por todas las células del corazón y la despolarización se propaga hacia el nodo auriculoventricular (AV). El nodo AV actúa como sustituto del nodo SA si éste deja de funcionar. Desde el nodo AV, el impulso se propaga por el haz de His y las fibras de Purkinje que generan la contracción de los ventrículos [6].

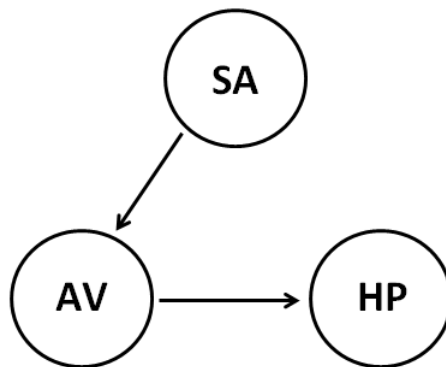


Figura 4.2: Esquema de los tres osciladores en el caso normal

La señal que genera un ECG normal está compuesta por una onda P, un intervalo PR, un complejo QRS, un intervalo ST y otra onda T. En la figura 4.1 se ven estos elementos. Cada pico y cada valle de esta figura representan cierta actividad eléctrica del corazón. La onda P corresponde a la despolarización auricular y coincide con el primer momento de la diástole. El principio de la sístole se corresponde con el complejo QRS de despolarización ventricular. El intervalo ST se corresponde con parte del proceso de repolarización ventricular. La onda T se genera por la repolarización ventricular.

Volviendo al sistema (2.3) que hemos considerado más adecuado para modelar el movimiento del corazón,

$$\begin{cases} \dot{b} = x - x_0, \\ \epsilon \dot{x} = -(x^3 - ax + b), \end{cases}$$

con

$$0 < x_0 < \sqrt{\frac{a}{3}},$$

es posible hallar su solución y dibujar la variable b como función de t .

De esta forma, para $x_0 = 0.5$, $\epsilon = 1/100$ y $a = 1$, se obtiene la gráfica de la figura 4.3, correspondiente a una aproximación del electrocardiograma que generaría dicho modelo.

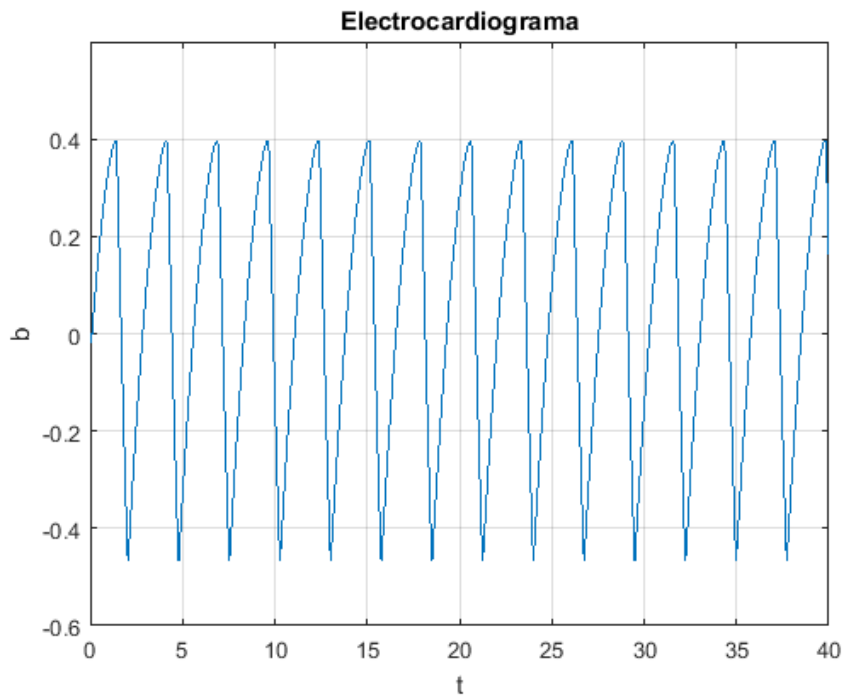


Figura 4.3: Electrocardiograma generado a partir del sistema (2.3)

En la gráfica generada se puede ver la periodicidad de la variable b asociada al control electroquímico en el latido del corazón, pero no se pueden apreciar los picos y valles característicos de un electrocardiograma normal.

A continuación estudiaremos un modelo mucho más elaborado que propone Gois en [1], y que se describe también en [4], que simula mejor el comportamiento del ECG. Gois propone un modelo matemático que describe el ritmo cardíaco considerando tres osciladores modificados de Van der Pol acoplados con un retardo de tiempo.

Gois hace uso de la ecuación de Van der Pol para describir el modelo, ya que el comportamiento de dicha ecuación se ajusta a las características que debe cumplir el entorno biológico del corazón, como por ejemplo y como hemos visto en otros capítulos, la existencia de un ciclo límite.

El uso de tres osciladores se debe a que cada uno de ellos representa una región diferente del corazón. Un oscilador se corresponde con el nodo sinoauricular, otro con el nodo auriculoventricular y el tercero se corresponde con el complejo His-Purkinje. Más concretamente, nos centraremos aquí, por simplicidad, en el modelo sin retardo, que ya da una buena aproximación del electrocardiograma. Gois propone el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para describir la dinámica del corazón,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -a_{SA}x_2(x_1 - w_{SA_1})(x_1 - w_{SA_2}) - x_1(x_1 + d_{SA})(x_1 + e_{SA}) \\
&\quad + \rho_{SA} \sin(\omega_{SA}t) - k_{SA-AV}(x_1 - x_3) - k_{SA-HP}(x_1 - x_5), \\
\dot{x}_3 &= x_4, \\
\dot{x}_4 &= -a_{AV}x_4(x_3 - w_{AV_1})(x_3 - w_{AV_2}) - x_3(x_3 + d_{AV})(x_3 + e_{AV}) \\
&\quad + \rho_{AV} \sin(\omega_{AV}t) - k_{AV-SA}(x_3 - x_1) - k_{AV-HP}(x_3 - x_5), \\
\dot{x}_5 &= x_6, \\
\dot{x}_6 &= -a_{HP}x_6(x_5 - w_{HP_1})(x_5 - w_{HP_2}) - x_5(x_5 + d_{HP})(x_5 + e_{HP}) \\
&\quad + \rho_{HP} \sin(\omega_{HP}t) - k_{HP-SA}(x_5 - x_1) - k_{HP-AV}(x_5 - x_3),
\end{aligned}$$

donde las variables que describen las oscilaciones son (x_1, x_2) , (x_3, x_4) y (x_5, x_6) y, los parámetros son a_{SA} , a_{AV} , a_{HP} , w_{SA_1} , w_{AV_1} , w_{HP_1} , w_{SA_2} , w_{AV_2} , w_{HP_2} , d_{SA} , d_{AV} , d_{HP} , e_{SA} , e_{AV} , e_{HP} , ω_{SA} , ω_{AV} , ω_{HP} , ρ_{SA} , ρ_{AV} , ρ_{HP} , α_0 , α_1 , α_3 , α_5 , siendo k_{SA-AV} , k_{SA-HP} , k_{AV-SA} , k_{AV-HP} , k_{HP-SA} y k_{HP-AV} los parámetros que indican el acoplamiento entre los distintos osciladores.

La combinación de las ondas procedentes de cada región del corazón da lugar a la forma del ECG. Bajo estas consideraciones, parece lógico que los osciladores acoplados correspondientes a la señal que genera cada región sean capaces de representar la dinámica general del corazón.

Con los siguientes parámetros que aparecen en [1], y que se muestran en la siguiente tabla,

$a_{SA} = 3$	$a_{AV} = 3$	$a_{HP} = 5$
$w_{SA_1} = 0.2$	$w_{AV_1} = 0.1$	$w_{HP_1} = 1$
$w_{SA_2} = -1.9$	$w_{AV_2} = -0.1$	$w_{HP_2} = -1$
$d_{SA} = 3$	$d_{AV} = 3$	$d_{HP} = 3$
$e_{SA} = 4.9$	$e_{AV} = 3$	$e_{HP} = 7$
$\omega_{SA} = 0$	$\omega_{AV} = 0$	$\omega_{HP} = 0$
$\rho_{SA} = 1$	$\rho_{AV} = 1$	$\rho_{HP} = 20$
$k_{SA-AV} = 0$	$k_{AV-SA} = 5$	$k_{HP-SA} = 0$
$k_{SA-HP} = 0$	$k_{AV-HP} = 0$	$k_{HP-AV} = 20$
$\alpha_0 = 1$	$\alpha_1 = 0.1$	$\alpha_3 = 0.05$
$\alpha_5 = 0.4$		

hemos generado la gráfica correspondiente a un electrocardiograma normal representando

$$ECG = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 + \alpha_5 x_5$$

en función del tiempo, como se propone en [1].

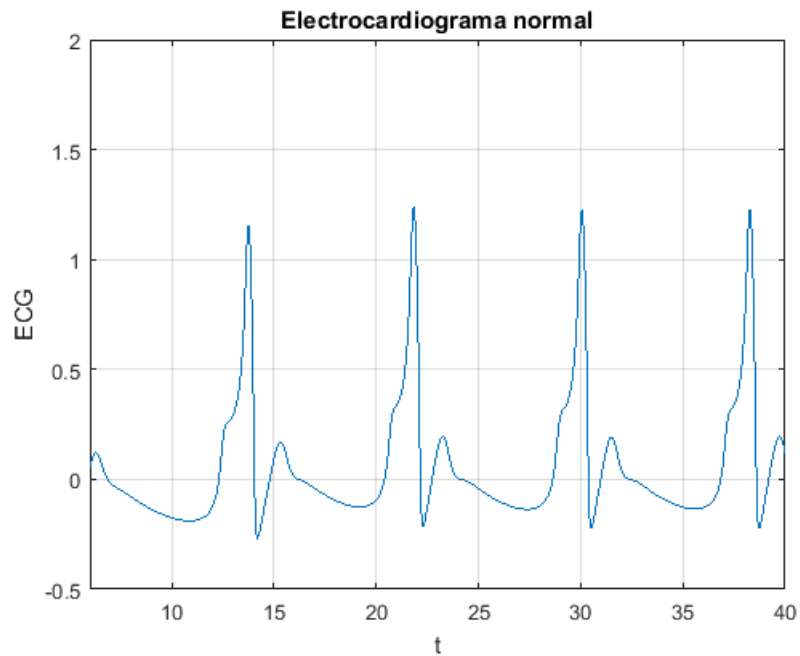


Figura 4.4: Electrocardiograma normal

La gráfica resultante es la de la figura 4.4. En dicha figura se aprecian cualitativamente las diferentes partes que debe presentar un electrocardiograma normal, la señal contiene las ondas más importantes P, QRS y T. Esto demuestra cómo el modelo es capaz de describir el comportamiento general de un ECG real.

Por otro lado, el modelo anterior es capaz de simular ciertas patologías cardíacas que se pueden identificar estudiando el ECG. Si se considera el caso en el que no existe comunicación entre el nodo SA y el nodo AV, la constante k_{AV-SA} debería ser nula, eliminando así el acoplamiento entre el primer y el segundo oscilador. Considerando ahora $k_{AV-SA} = 0$ y manteniendo el valor del resto de parámetros como la tabla, el sistema resultante está dirigido por el nodo AV. Esta patología se denomina *aleteo ventricular* y presenta la forma de la figura 4.5.

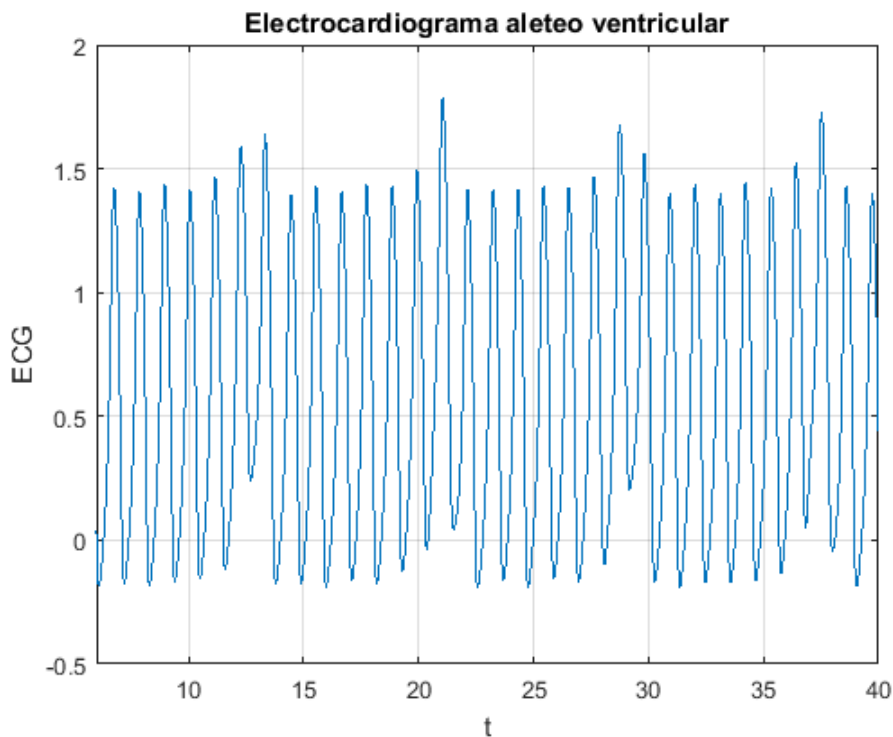


Figura 4.5: Electrocardiograma aleteo ventricular

Si comparamos las figuras 4.3 y 4.5, se puede ver que el comportamiento de ambos electrocardiogramas es muy similar a nivel cualitativo. Esto parece

lógico, puesto que en el modelo de Zeeman modificado que hemos considerado para representar la figura 4.3 no hay acoplamiento entre el nodo SA y el nodo AV, como ocurre en el caso del aleteo ventricular.

Apéndice A

Programas de MATLAB

En este apéndice se muestran las funciones de MATLAB usadas para generar las gráficas presentadas a lo largo del trabajo y que han servido como apoyo para estudiar los sucesivos modelos.

```
1 function F = funcionsistema(~,X)
2 global funcionf funciong
3 x = X(1);
4 b = X(2);
5 F = [eval(funcionf); eval(funciong)];

1 % Dibuja el campo vectorial asociado a un sistema
  autonomo
2 % plano db/dt= g(x,b) dx/dt = f(x,b) y sus soluciones.
3
4 %CAMBIAR lneas 17, 18 y 40 dependiendo del sistema.
5
6 clear
7 global funcionf funciong
8 clf reset
9
10 puntos = 16;
11 xmin = -2; xmax = 2; bmin = -2; bmax = 2;
12 incrx = (xmax-xmin)/puntos; incrb = (bmax-bmin)/puntos;
13
14 [x,b] = meshgrid(xmin:incrx:xmax, bmin:incrb:bmax);
15 [n,m] = size(x);
```

```

16
17 funcionf = '-10*(x.^3-2.*x+b)';
18 funciong = 'x-0.5';
19 Heading = ['\n\n\n', ' P a r m e t r o s   _ p a r a   e l   s i s t e m a   _
           a u t n o m o   _ \n\n', '_ d x / d t = _', ...
20 funcionf, '_ d b / d t = _', funciong, '\n\n'];
21 fprintf(Heading)
22 fprintf('\n_xmin=_%g_xmax=_%g_bmin=_%g_bmax=_%g\n',
           , ...
23 xmin, xmax, bmin, bmax)
24
25 fprintf('\n_incrx=_%g_incrb=_%g\n\n', incrx, incrb)
26 evalf = eval(funcionf);
27 evalg = eval(funciong);
28 L = sqrt(evalf.^2+evalg.^2);
29 quiver(b, x, evalg./L, evalf./L, 0.5) % Dibuja el campo
           v e c t o r i a l
30 axis([xmin, xmax, bmin, bmax])
31 grid on
32 xlabel('b_variable_de_control_electroquimico')
33 ylabel('x_longitud_de_la_fibra_muscular')
34 Title = ['db/dt=', funciong, 'dx/dt=', funcionf];
35 title(Title)
36 hold
37
38 hold on
39 a=xmin:1/200:xmax;
40 y = -a.^3+2.*a; % Definir la variedad lenta
41 plot(y,a, 'r') % Dibuja la variedad lenta
42
43 preg = input(' Dibujo una solucion con el ratn?(s/n) '
              , 's');
44 while preg(1) == 's'
45
46 fprintf('\n Localice con el ratn la condicion inicial
           en la ventana\n')
47 [inicialb, inicialx] = ginput(1); % Toma como condicion
           inicial donde pinches con el ratn
48
49 [tiempo, sol] = ode15s('funcionsistema', [0, 30], [
           inicialx, inicialb]);

```



```

50 hold on %El comando ode15s resuelve la ecuacion
    diferencial para t=0,30 y en ese punto inicial
51 plot(sol(:,2),sol(:,1),'k','LineWidth',1.5)
52
53 [tiempo,sol] = ode15s('funcionsistema',[0,-30],[
    inicialx,inicialb]);
54 hold on %funcionsistema toma la cadena de caracteres
    de las funciones y la pasa a 'numeros'
55 plot(sol(:,2),sol(:,1),'k','LineWidth',1.5)
56 preg = input('Dibujolotra_solucin?', 's');
57 end
58
59 preg = input('Dibujouna_solucin_con_valor_inicial_
    por_teclado?(s/n)', 's');
60 while preg(1) == 's'
61
62
63 fprintf('\n_coordenada_x_inicial_en_la_ventana\n')
64 inicialx = input('x_0==');
65 fprintf('\n_coordenada_b_inicial_en_la_ventana\n')
66 inicialb = input('b_0==');
67
68 [tiempo,sol] = ode15s('funcionsistema',[0,30],[
    inicialx,inicialb]);
69 hold on
70 plot(sol(:,2),sol(:,1),'k','LineWidth',1.5)
71 [tiempo,sol] = ode15s('funcionsistema',[0,-30],[
    inicialx,inicialb]);
72 hold on
73 plot(sol(:,2),sol(:,1),'k','LineWidth',1.5)
74 preg = input('Dibujolotra_solucin?', 's');
75 end

1 %Dibuja el electrocardiograma asociado al modelo de
    Zeeman modificado.
2
3 clear all
4 % Condiciones iniciales
5 x0=[0,0];
6 tf=40; %Tiempo final

```

```

7 f=@(t,x) [-100*(x(1).^3-x(1)+x(2));x(1)-0.5]; %
    Ecuaciones del sistema
8 [t,x]=ode15s(f,[0,tf],x0);
9 plot(t,x(:,2))
10 axis([0 tf -0.6 0.6])
11 grid on
12 xlabel('t')
13 ylabel('b');
14 title('Electrocardiograma')

1 % Genera la grafica correspondiente a un
    electrocardiograma normal o con
2 % aleteo ventricular en funcion de como definamos los
    parametros.
3
4 x0=[0,0.7,0,0.2,0,0.7];
5 % Definicion de constantes comunes
6 a0=1; a1=0.1; a3=0.05; a5=0.4;
7 asa=3; wsa1=0.2; wsa2=-1.9; dsa=3;
8 aav=3; wav1=0.1; wav2=-0.1; dav=3; eav=3;
9 ahp=5; whp1=1; whp2=-1; dhp=3; ehp=7;
10 ksaav=0; kavhp=0; ksahp=0; khpsa=0;
11 rosa=1; roav=1; rohpsa=20;
12
13 % Seleccionar tipo a continuacion
14 tipo='normal';
15 esa=4.9; kavsa=5; khpav=20; wsa=0; wav=0; whp=0; tf=40;
16
17 % tipo='aleteo ventricular';
18 % esa=4.9; kavsa=0; khpav=20; wsa=0; wav=0; whp=0; tf
    =40;
19
20 f=@(t,x) [x(2);
21     -asa*x(2)*(x(1)-wsa1)*(x(1)-wsa2)-x(1)*(x(1)+
    dsa)*(x(1)+esa)+rosa*sin(wsa*t)-ksaav*(x(1)-x(3))-
    ksahp*(x(1)-x(5));
22     x(4);
23     -aav*x(4)*(x(3)-wav1)*(x(3)-wav2)-x(3)*(x(3)+
    dav)*(x(3)+eav)+roav*sin(wav*t)-kavsa*(x(3)-x(1))-
    kavhp*(x(3)-x(5));

```

```

24         x(6);
25         -ahp*x(6)*(x(5)-whp1)*(x(5)-whp2)-x(5)*(x(5)+
dhp)*(x(5)+ehp)+rohp*sin(whp*t)-khpsa*(x(5)-x(1))-
khpav*(x(5)-x(3));
26 [t,x]=ode45(f,[0,tf],x0);
27 ecg=(a0+a1*x(:,1)+a3*x(:,3)+a5*x(:,5));
28 plot(t,ecg)
29 axis([6 tf -0.5 2])
30 grid on
31 xlabel('t')
32 ylabel('ECG');
33 Titulo = ['Electrocardiograma_', tipo];
34 title(Titulo)

```

Bibliografía

- [1] GOIS, SANDRA R.F.S.M. y MARCELO A. SAVI *An analysis of heart rhythm dynamics using a three-coupled oscillator model*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 41, 2009, pp. 2553-2565.
- [2] JONES, D.S., M.J. PLANK y B.D. SLEEMAN, *Differential equations and mathematical biology*, Chapman and Hall/CRC, segunda edición, Boca Ratón, 2009.
- [3] PERKO, L., *Differential equations and dynamical systems*, Springer, tercera edición, Nueva York, 2001.
- [4] QUIROZ JUAREZ, M.A., JIMENEZ RAMIREZ, O. y VAZQUEZ MEDINA, R. *Análisis e implementación de un modelo matemático para generar señales de electrocardiograma sintéticas*, Conference MATECOMPU 2015, Varadero, Matanzas, Cuba.
- [5] SIMMONS, G.F., J.S. ROBERTSON y B.D. SLEEMAN, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas*, McGraw-Hill, segunda edición, 1993.
- [6] TRESGUERRES, JESÚS A. F., *Anatomía y fisiología del cuerpo humano*, Mc Graw-Hill, primera edición, 2009.
- [7] ZEEMAN, E.C., *Differential equations for the heartbeat and nerve impulse*, Towards a Theoretical Biology, Vol. 4, 1972, pp. 8-67.