Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Estadística

Diseño de Sistemas Logísticos de Distribución

Autor:

D. Cándida López Moreno

Tutor/es:

D. Jesús Sáez Aguado

Contenido

1.- INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS LOGÍSTICOS DE DISTRIBUCIÓN. 4

1.1.- INTRODUCCIÓN 4

1.2.- FUNCIONAMIENTO DE LOS SISTEMAS LOGÍSTICOS 6

1.2.1.- PROCESAMIENTO DE PEDIDOS 7

1.2.2.- GESTIÓN DE INVENTARIO 7

1.2.3.- TRANSPORTE DE MERCANCÍAS 9

1.3.-OBJETIVOS EN LA GESTIÓN DE LA LOGÍSTICA 10

1.4.- TENDENCIAS EMERGENTES EN LOGÍSTICA 12

1.5.- TOMA DE DECISIONES EN LOGÍSTICA. 12

2.- PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN. OPTIMIZACIÓN DEL USO DE LA RED. 15

2.1.- INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN. 15

2.2.- INTRODUCCIÓN A LA PLANIFICACIÓN Y GESTIÓN DEL TRANSPORTE DE MERCANCÍAS DE LARGA DISTANCIA. 16

2.2.1.- CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE TRANSPORTE 17

2.3.- PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN. OPTIMIZACIÓN DEL USO DE LA RED. 18

2.3.1.- PROBLEMA DEL TRANSPORTE. 18

2.3.1.1.- PROBLEMA DEL TRANSPORTE MULTIPRODUCTO. 21

2.3.1.2. – PROBLEMA DEL TRANSPORTE DE FUENTE ÚNICA. 22

2.3.2.- PROBLEMA DE FLUJO EN REDES. 24

2.3.3.- EL PROBLEMA DEL FLUJO EN REDES MULTIPRODUCTO 29

APLICACIÓN: 30

2.3.4.- MODELO TRANSPORTE EN DOS ETAPAS. 32

3.- PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN. DISEÑO DE UNA RED. 34

3.1.- INTRODUCCIÓN AL DISEÑO DE REDES. 34

3.1.1.- CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN. 35

3.2.- PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN. DISEÑO DE UNA RED. 36

3.2.1.-MODELOS DE LOCALIZACIÓN CON COSTOS FIJOS. 37

3.2.1.1.- MODELO DE LOCALIZACIÓN DE FUENTE ÚNICA. 39

APLICACIÓN: 40

3.2.2.- FLUJO EN REDES CON COSTOS FIJOS. 42

APLICACIÓN: 43

3.2.3.- FLUJO EN REDES MULTIPRODUCTO. 46

APLICACIÓN: 50

APLICACIÓN: ... 52

3.2.4.- SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN EN DOS ETAPAS. ... 56

4.- APLICACIÓN: ANÁLISIS DE LOCALIZACIÓN PARA LA GESTIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA REGIÓN CENTRAL DE PORTUGAL ... 59

4.1.- INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA ... 59

4.2.- VISIÓN GENERAL DEL PROCESO DE GESTIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS URBANOS. ... 61

4.3.- PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA. ... 62

4.4.- SOLUCIÓN PROPUESTA ... 67

ANEXO I ... 72

ANEXO II ... 74

ANEXO III ... 79

ANEXO IV ... 81

ANEXO V ... 83

ANEXO VI: BIBLIOGRAFÍA BÁSICA. ... 87

1.- INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS LOGÍSTICOS DE DISTRIBUCIÓN.

1.1.- INTRODUCCIÓN

Se define la LOGÍSTICA como el conjunto de medios y métodos necesarios para llevar a cabo la organización de una empresa, o de un servicio, especialmente de distribución. El término surgió en el área militar para describir las actividades relacionadas con proveer a la tropa de comida, armamento, municiones, repuestos, etc.

Con el paso de los años, el término logística define el conjunto de actividades que proveen al cliente del producto deseado en el lugar y el plazo correcto, mientras se optimiza una medida dada (por ejemplo, los costos totales de operación) y satisfaciendo una serie de restricciones (por ejemplo no superar un presupuesto dado) Esto va, desde proveer los subcomponentes necesarios para la fabricación, disponer de stock en los almacenes o en distribuidores, o disponer de la cantidad y grupo sanguíneo en un hospital para posibles urgencias. Así, mientras que tanto la adquisición, administración de inventario, transporte, almacenamiento y distribución (tanto de materiales primas, como de productos semi terminados y producto final) son todas operaciones importantes, la logística es la integración de todas estas actividades.

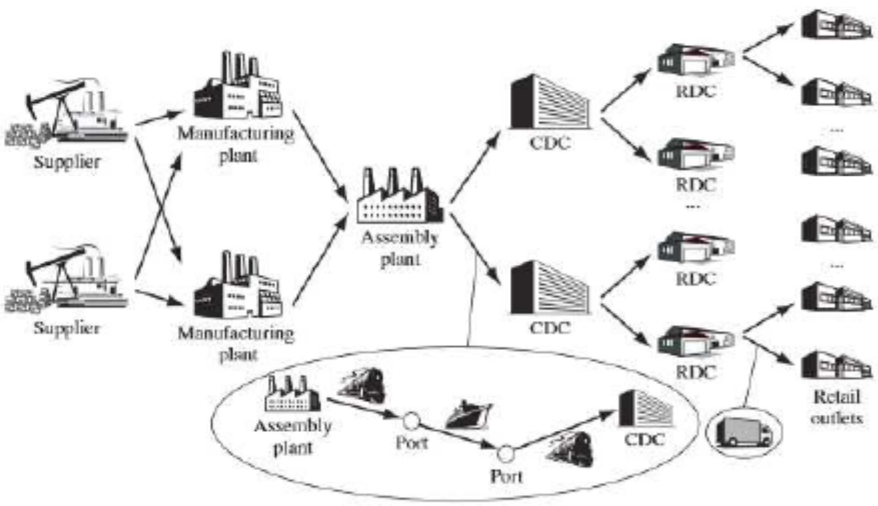
La globalización de los mercados, ha generado una intensa competición entre las compañías. Disponer al mismo tiempo de productos equivalentes ha dado lugar a clientes más exigentes, que requieren la disponibilidad inmediata de productos y un flujo continuo de nuevos modelos. Así, a los proveedores de servicios logísticos se les demanda realizar un mayor número de transacciones, en menores cantidades, con menos tiempo de entrega, en menos tiempo, por menos coste y con más precisión. El aumento de las operaciones y requerimientos, conlleva un alto costo monetario. Por ello, la planificación y control de los sistemas logísticos ha llamado la atención de los profesionales e investigadores. Para maximizar el valor de los sistemas logísticos, se deben tomar una gran cantidad de decisiones, desde qué producto recoger para completar el pedido de un cliente hasta decisiones corporativas de alto nivel como construir una planta de fabricación. La logística soporta todo este tipo de decisiones relacionadas con el diseño y operación de los sistemas logísticos.

De hecho, la Logística es una de las actividades más importantes en la sociedad moderna. Veamos algunos datos que ilustren esta afirmación: El gasto anual en operaciones logísticas en USA en 1997 fue de 862 billones de dólares (11% PIB) Este coste es superior al gasto anual de USA en seguridad social, sanidad y defensa.

Sistema Logístico: un sistema logístico está formado por un conjunto de instalaciones unidas por unos servicios de transporte. Las instalaciones son lugares donde los materiales son fabricados, almacenados, clasificados, vendidos o consumidos (incluyen centros de montaje, almacenes, centros de distribución (DCs), puntos de transbordo, terminales de transporte, puntos de venta, centros de clasificación de correo, incineradoras, vertederos, etc)

Los servicios de transporte mueven los materiales entre las instalaciones usando vehículos y equipos como, camiones, tractores, pallets, containers, etc.

Cadena de Suministro (Supply Chain): es un complejo sistema logístico en el que las materias primas son convertidas en productos terminados y distribuidos a los usuarios finales (consumidores o compañías) Incluye proveedores, centros de fabricación, almacenes, DCs, puntos de venta. En la figura 1 puede observarse una cadena de suministro típica.



Nota:

CDC: Central Distribution Centres

RDC: Regional Distribution Centres

Retail Outlets: Puntos de Venta

El objetivo de los problemas logísticos que vamos a describir será el diseño y operación de los DCs (Centros de Distribución) y terminales de transporte.

Push versus Pull Supply Chain: Las cadenas de suministro pueden clasificarse como Push o Pull.

Pull (Make to order MTO): productos son fabricados solo tras pedido de cliente. No son necesarios inventarios de productos.

Push (Make to Stock MTS) la producción está basada en previsiones. Como resultado la producción se anticipa a la demanda efectiva y por tanto existe inventario de equipos en los almacenes y distribuidores.

Definir cuál es más adecuado dependerá de las características del producto, de la variabilidad de la demanda, etc.

Flujo de Productos e Información en la Cadena de Suministro: el flujo de productos en la cadena de suministros va desde la fuente de materias primas hasta el cliente, excepto para los productos obsoletos o con defectos que vuelven al inicio para reparación o eliminación. El flujo de información realiza el camino contrario, del cliente a la fuente de materias primas. En un sistema MTO (Pull) los vendedores recogen la información de los clientes y la transmiten a los fabricantes. En un sistema MTS (Push) las ventas pasadas se usan para predecir la demanda futura.

El flujo de productos e información no se mueve instantáneamente por la cadena de suministro debido a:

> Consumo de tiempo debido al transporte entre fuentes de materias primas, plantas de producción y lugares de consumo.
>
> Tiempos de fabricación.
>
> Tiempos debidos a gestión de procesos (procesar pedidos, pedidos periódicos, etc)

Grado de integración vertical y terceras partes logísticas: según el concepto clásico de economía, la cadena de suministro debería estar verticalmente integrada si sus componentes pertenecen a la misma compañía. Esto es algo poco frecuente, siendo más común que la cadena de suministro esté operada por varias compañías independientes (fabricantes que compran a proveedores externos, por ejemplo) La relación entre las compañías que forman parte de la cadena de suministro puede estar basada en transacciones y funciones específicas o puede ser mediante alianzas estratégicas. Éstas últimas incluyen el modelo 3PL (Third Party Logistic), donde se subcontrata una compañía externa para llevar a cabo todas las tareas logísticas, de forma que la compañía matriz puede centrarse en su negocio real. Esta metodología 3PL es de aplicación cuando la compañía no puede invertir demasiado en transporte, infraestructuras de almacenaje, etc. Por otro lado, 3PL provoca la pérdida de control de la distribución, pudiendo generar mayores costos logísticos.

Gestión de venta y Reabastecimiento a través del Vendedor: tradicionalmente los clientes han controlado sus niveles de inventario y gestionado sus pedidos a los vendedores. En los últimos años ha habido un crecimiento en el reabastecimiento a través de los vendedores. En este sistema, los vendedores controlan el consumo e inventarios de sus clientes a través de intercambio electrónico de datos, de forma que decide por sí mismo cuándo y cómo reponer a sus clientes. De esta forma, los vendedores consiguen ahorros debido a mejor coordinación en las entregas a clientes y los clientes no necesitan asignar costos debidos a gestión de inventarios. Esta metodología es muy común en el mercado del gas y bebidas.

1.2.- FUNCIONAMIENTO DE LOS SISTEMAS LOGÍSTICOS

Los sistemas logísticos se conforman de tres actividades principales: procesamiento de pedidos, gestión de Inventario y transporte de mercancías.

Veamos brevemente en qué consisten cada una de ellas:

1.2.1.- PROCESAMIENTO DE PEDIDOS

Está estrictamente relacionado con el flujo de información en el sistema logístico e incluye un número determinado de operaciones. Los clientes solicitan los productos mediante un pedido de compra, este pedido es remitido y chequeado. Se verifica la disponibilidad de los ítems y el crédito del cliente. Posteriormente, se retiran los productos en stock o se fabrican en el caso de no estar disponibles, se empaquetan y se remiten al cliente junto con la documentación de envío. Los clientes además deben mantenerse informados del status de sus órdenes de compra.

Tradicionalmente este proceso consumía gran parte del tiempo empleado en el proceso de pedido y entrega de equipos, sin embargo los avances tecnológicos han conseguido reducirlo considerablemente, permitiendo incluso a los vendedores, verificar el stock de productos en tiempo real.

1.2.2.- GESTIÓN DE INVENTARIO

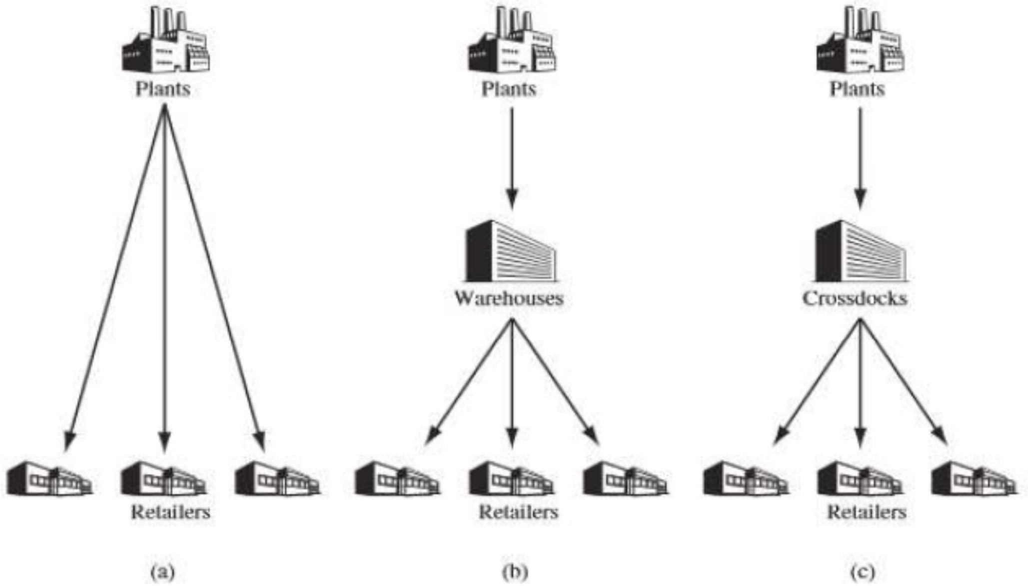
Es un punto clave en la gestión de los sistemas logísticos. Productos en inventario pueden ser componentes, productos semi-terminados, materias primas, producto final etc.

Algunas razones por las que en ocasiones puede resultar interesante disponer de inventario en la cadena de suministro puede ser: mejorar el nivel de servicios (menores tiempos de entrega), reducir costes logísticos, hacer frente a la aleatoriedad de la demanda y plazos de entrega, disponer de productos estacionales durante todo el año, especular con los patrones de precios, superar la gestión ineficiente del sistema logístico.

Mantener un inventario, sin embargo, puede ser muy costoso. Por ejemplo, la compañía puede tener un costo de oportunidad (capital) equivalente al importe que está perdiendo por no invertir el dinero en una nueva oportunidad de negocio. Además, el costo de almacenaje puede ser elevado, tanto si el almacén es propio como alquilado o subcontratado.

El objetivo de la gestión de inventario es determinar el nivel de stock con el que poder minimizar los costos de operación, satisfaciendo a la vez los requerimientos de los clientes. En la práctica una buena política de gestión de inventarios debe tener en cuenta los cinco problemas siguientes: la importancia relativa del cliente, significado económico de los diferentes productos, políticas de transporte, flexibilidad del proceso productivo, política de la competencia.

Para el diseño de un sistema de distribución de productos, hay tres esquemas o sistemas básicos, como puede verse en el siguiente esquema:



a) **Transporte Directo:** los productos se transportan directamente desde las plantas hasta los puntos de distribución finales al por menor. Ventajas de este método: elimina los gastos de los centros de distribución intermedios y el almacenamiento, y reduce el tiempo de entrega. Desventajas: si los distribuidores tienen demandas pequeñas y están dispersos, exige una flota de camiones pequeños. Se usa el transporte directo cuando los clientes demandan camiones totalmente cargados o cuando se transportan productos perecederos regularmente.

b) Almacenamiento: es el método tradicional de almacenar los productos en tanques o almacenes intermedios, con palets o estanterías.

c) Terminales de carga (crossdocking): este método se conoce también como distribución just-in-time, y es un método relativamente nuevo. Los productos se envían a una instalación crossdock con terminales de carga; allí son ordenados y las cargas son consolidadas con otros productos y enviados en trailers a los puntos de demanda, sin necesidad de almacenaje. La forma de conseguir grandes ahorros en los costos de transporte, aprovechando las economías de escala en transporte, es consolidando pequeñas cargas en cargas más grandes, de forma que para que el sistema sea rentable se requieren grandes volúmenes de cargas. Los productos solo están horas en las instalaciones de carga. Además, son necesarios sistemas de información para coordinar las entradas y las salidas de las diferentes cargas.

Centralización&Descentralización de almacenes: Si se opta por una estrategia de almacenaje, se habrá de decidir también por un sistema centralizado o descentralizado. En un sistema centralizado un único almacén sirve a la totalidad del mercado, mientras que en un sistema descentralizado el mercado es dividido en diferentes zonas y cada una de ellas servida por un almacén más pequeño. Ventajas de sistema descentralizado: reducción de tiempos de entrega y costos de transporte debido a la cercanía al cliente. Ventajas centralizado: menores costos de mantenimiento debido a economías de escala, menores costos de transporte de fábricas a almacén.

1.2.3.- TRANSPORTE DE MERCANCÍAS

El transporte de mercancías es una figura clave dentro de los sistemas logísticos. Un fabricante o distribuidor puede elegir entre tres alternativas para transportar sus productos: transporte privado mediante vehículos propios o alquilados, usar un transportista para envíos directos regulados por un contrato, o recurrir a un transportista que use recursos comunes (camiones, terminales,…) para cumplir con las necesidades de servicio de transporte de varios clientes.

Canales de distribución: un canal de distribución es el camino que sigue un producto para llegar desde el fabricante al usuario final. La figura adjunta muestra los tipos más habituales de canales de distribución:

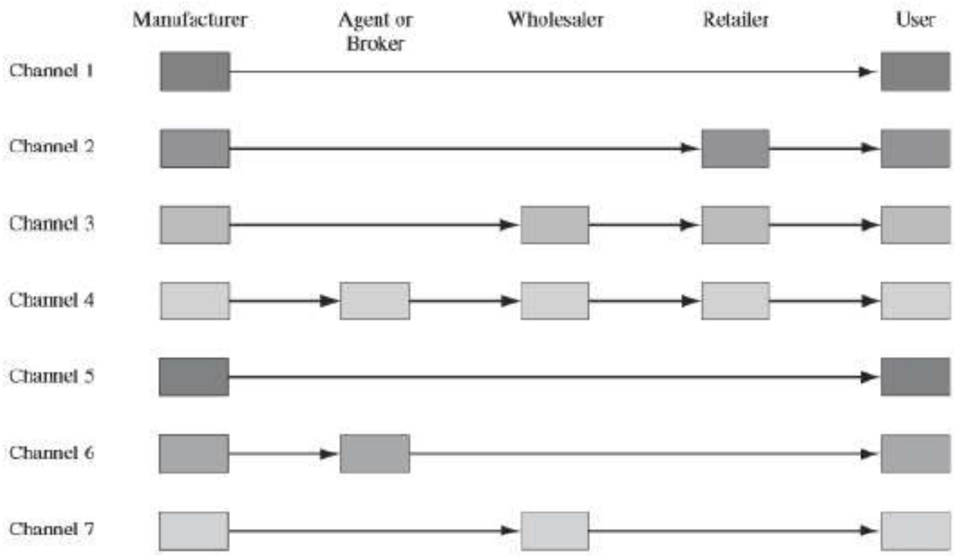


Figure 1.3 Channels of distribution.

Aunque algunas compañías venden sus productos directamente al consumidor final, en la mayor parte de los casos se usan intermediarios en el proceso de distribución (agentes, mayorista, minoristas o distribuidores)

Una forma común de ahorrar en costes logísticos es usando economías de escala en el transporte consolidando envíos pequeños en envíos mayores.

Medios de transporte: Existen cinco medios de transporte básicos: barco, tren, camión, aire y conductos, que pueden ser combinados para obtener un servicio puerta a puerta.

Cuando se selecciona un transportista, el remitente debe tener en cuenta dos parámetros fundamentales: coste y tiempo de tránsito. El costo es la suma de todos los costos asociados con la operación de terminales y vehículos. El tiempo de tránsito es el tiempo que tarda un envío en llegar desde su origen a su destino (puede estar influenciado por variables aleatorias como el tiempo o el tráfico)

1.3.-OBJETIVOS EN LA GESTIÓN DE LA LOGÍSTICA

Cuando se está llevando a cabo la estrategia logística de una compañía, el objetivo de los directivos es llegar a un nivel aceptable en la consecución de los tres objetivos básicos: reducción de capital, reducción de costes y mejora en los niveles de servicios.

Reducción de capital: el objetivo es reducir tanto como sea posible la inversión en los sistemas logísticos, lo que dependerá de si los equipos logísticos son propios y de la existencia de inventarios. Así, una compañía deberá decidir si tener almacenes propios o públicos, vehículos propios o usar una compañía de transportes, etc. Por supuesto, la reducción de inversión en Logística, conlleva unos costes más altos de operación.

Reducción de costes: el segundo objetivo es minimizar el coste total asociado al transporte y el almacenaje. Por ejemplo, se pueden operar los propios almacenes y vehículos o subcontratar ambos.

Mejora del nivel de servicios: el nivel de servicios logísticos influye considerablemente en el nivel de satisfacción del cliente, lo cual tiene un impacto importante en los ingresos. Por tanto, mejorar los servicios logísticos dará lugar a un aumento en los ingresos, especialmente en los mercados homogéneos de precios bajos, donde la competencia no está basada en las características del producto.

El nivel de servicios logísticos se expresa habitualmente a través de la medida "tiempo de ciclo de pedido" (order-cycle time) definida como el tiempo transcurrido desde que un pedido es lanzado hasta que el cliente recibe los bienes o servicios. Esta medida es una variable aleatoria con distribución de probabilidad multinomial.

Relación entre el coste y el nivel de servicios: cada sistema logístico se caracteriza por un nivel de inversión, coste y nivel de servicios. Por ejemplo un sistema con almacenes y flota propios se caracteriza por un nivel alto de inversión, relativamente bajos costos y un alto nivel de servicios logísticos. Un sistema A se dice que está dominado por un sistema B si el coste de A es mayor o igual al coste de B y el nivel de servicios de A es inferior o igual al nivel de B, y al menos una de las dos inecuaciones se mantiene estrictamente. Por ejemplo en figura adjunta los sistemas 2, 3, 4 y 5 están dominados por el número 1.

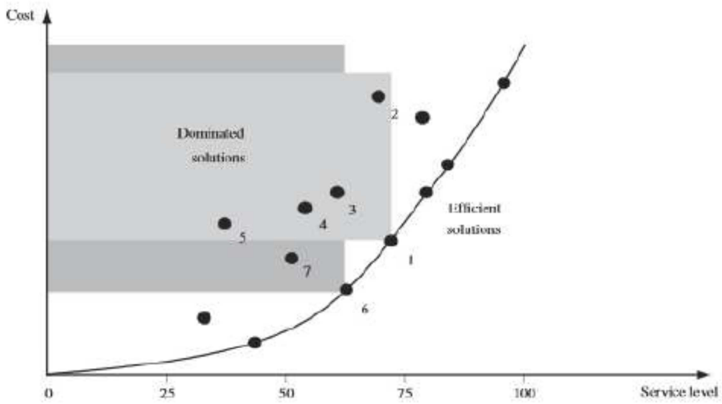


Figure 1.8 Cost versus level of service curve (the level of service is defined as the percentage of orders having an order-cycle time less than or equal to a given number of working days (e.g. four days)).

Relación entre ventas y nivel de servicios: el nivel de servicios logísticos influye considerablemente en el volumen de ventas. Si el servicio es precario, se generan pocas ventas. Si el servicio se mejora respecto a la competencia, las ventas crecen, ya que se captan las ventas de los competidores como consecuencia de una mejora considerable en el nivel de servicios logísticos (si los competidores no cambian sus sistemas). Si las mejoras se llevan a cabo demasiado rápido, las ventas tienden a crecer pero de una forma más lenta.

Determinar el nivel de servicios óptimo: la relación entre el coste y nivel de servicios, así como la relación entre ventas y nivel de servicios, pueden ayudar a determinar el nivel de servicios que maximiza el beneficio de la compañía (ver figura adjunta). El nivel de servicios óptimos está entre el nivel más bajo y más alto. En la práctica se fija el nivel de servicios y posteriormente se diseña el sistema con objeto de alcanzar ese nivel de servicios fijados.

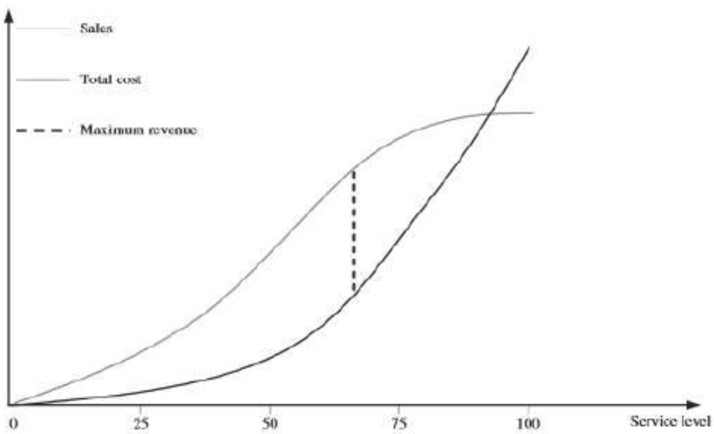


Figure 1.9 Determination of the optimum service level.

1.4.- TENDENCIAS EMERGENTES EN LOGÍSTICA

En los últimos años, los sistemas logísticos se han visto influidos por numerosos cambios. Son de especial mención los efectuados debido a la globalización, tecnologías de la información y el comercio electrónico.

Globalización: un elevado número de compañías debido a la globalización de los mercados operan en la actualidad a nivel mundial con objeto de beneficiarse de costos de fabricación o disponibilidad de materias primas a un precio inferior. Esto se consigue habitualmente mediante adquisiciones o alianzas con otras compañías. Al ser necesario un mayor número de movimientos de productos semiterminados entre los centros de producción, el mercado del transporte se ha hecho cada vez más complejo y costoso. Como resultado, se ha de poner mayor énfasis en el diseño eficiente y la gestión de las cadenas de producción.

Tecnologías de la información: tanto los proveedores como los fabricantes hacen uso del intercambio de datos electrónicos, de forma que pueden compartir en estado real el nivel de stock, tiempos de entrega, posición de los bienes en tránsito, etc. A nivel operacional, los sistemas de información geográfica (GIS) y de posicionamiento (GPS) permiten conocer la posición exacta de los vehículos y la comunicación con los conductores. Todas estas tecnologías permiten a las compañías una mejor gestión de los sistemas logísticos.

Comercio electrónico (e-commerce): Es cada vez más común el número de compañías que realizan transacciones comerciales a través de internet. Como resultado, el volumen de ventas entre productores y distribuidores ha disminuido, mientras que la venta directa del productor al consumidor final se ha visto incrementada. El comercio electrónico ha dado lugar a sistemas logísticos más complejos (e-logistic) que deben poder gestionar pequeños y medianos envíos a un mayor número de clientes, alrededor del mundo. Además, debe hacer frente a un mayor tránsito de bienes devueltos por defectos de fabricación (reverse logistic)

1.5.- TOMA DE DECISIONES EN LOGÍSTICA.

Cuando se diseña y opera un sistema logístico, es necesario analizar varios problemas fundamentales. Por ejemplo, ¿Deberían abrirse nuevas instalaciones (fabricación, centros de distribución centrales, regionales…)? ¿Cuál es la mejora configuración en cuanto a tamaño y localización? ¿Deberían cerrarse o disminuirse alguna de las instalaciones existentes?¿Dónde deben comprarse y almacenarse los materiales y componentes? ¿Dónde deben almacenarse los bienes terminados? ¿Almacenes propios o alquilados? ¿Dónde deben almacenarse los repuestos? ¿Cómo planificar la producción? ¿Cómo deben operar los almacenes? ¿Para el desempeño de las tareas de almacenaje, picking, etc. debe usarse un equipo humano o utilizar medios automatizados? ¿Qué medio de transporte debe usarse? ¿Cuándo y cómo debe ser reeemplazado el stock de productos? Los vehículos de transporte deben ser propios o alquilados? ¿Cuál es el tamaño de flota óptimo? ¿Cómo organizar los envíos?...

Así, las decisiones logísticas pueden clasificarse como: estratégicas, tácticas u operaciones.

Decisiones estratégicas: tienen efecto a largo plazo. Incluyen decisiones sobre el diseño del sistema logístico y adquisición de instalaciones de gran costo (localización de instalaciones, definición de tamaños, diseño de plantas y almacenes, tamaño de la flota) Dado que los datos son a menudo imprecisos, las decisiones estratégicas se basan usualmente en datos agregados (obtenidos por ejemplo agrupando productos individuales en familias, agregando clientes individuales por zonas)

Decisiones tácticas: se realizan en el medio plazo (ej: Mensual o trimestralmente) , e incluyen planificación de la producción y distribución, asignación de almacenaje, estrategias de gestión de pedidos, modo de selección del transporte, estrategia de consolidación.

Decisiones operacionales: se realizan diariamente o en tiempo real y tienen un estrecho alcance. Incluyen órdenes de recogida en almacenes, envíos y despacho de vehículos. Están basados en datos detallados.

El análisis cuantitativo es esencial para la toma de decisiones inteligentes en el campo de la logística. La investigación de operaciones ofrece una gran variedad de herramientas de planificación.

Hay tres situaciones básicas en las que el análisis cuantitativo puede ser de utilidad:

- Si el sistema logístico ya existe, puede ser de interés comparar el sistema actual (o política de operaciones actual) con un sistema estándar.
- Evaluar alternativas específicas. En particular se podría analizar la respuesta a un número de preguntas "Qué pasaría si" relacionadas con alternativas específicas al sistema existente.
- Generar una configuración (o política) óptima respecto a otra dada.

Evaluación comparativa (Benchmarking): consiste en la comparación de un escenario logístico dado con otro estándar de mejores prácticas. El más popular está basado en las referencias de operaciones de la cadena de suministro (SCOR: supply chain operations references). El SCOR-model es un Modelo de Referencia; no tiene descripción matemática ni métodos heurísticos, en cambio estandariza la terminología y los procesos de una Cadena de suministro para modelar y, usando KPI ́s (Key Performance Indicators) o Indicadores Clave de Rendimiento), comparar y analizar diferentes alternativas y estrategias de las entidades de la Cadena de suministro.

Simulación: con este método se evalúa el comportamiento de una configuración particular o política considerando la dinámica del sistema. Por ejemplo, se puede usar un modelo simulado para estimar el tiempo medio de recuperación en un almacén dado cuando se está usando una determinada política. Cada vez que se tiene que evaluar una alternativa diferente, se ejecuta una nueva simulación. Por ejemplo, si se aumenta el número de preparadores de pedidos en uno, será necesaria una nueva simulación. Los modelos de simulación pueden incorporar fácilmente una gran cantidad de detalles, tantos como patrones de pedido de cada tipo de cliente individual. Sin embargo, los modelos de simulación consumen demasiado tiempo y pueden ser muy pesados cuando se considera un número alto de alternativas.

Optimización: el proceso de toma de decisiones en los sistemas logísticos puede ser modelizado mediante problemas de optimización matemáticos. Los problemas de optimización “sencillos” (polinomiales) pueden ser resueltos consistentemente empleando un tiempo razonable, incluso si el tamaño del problema es elevado. Este es el caso, por ejemplo de los problemas de Programación Linear (LP) y en particular, de los problemas de flujo lineales (problemas con decenas de cientos de variables y restricciones pueden ser optimizados rápidamente mediante un PC) La mayor parte de los problemas de programación entera (IP) y entera mixta (MIP) son complicados de optimizar. Desafortunadamente, varios tipos de decisiones logísticas (producción, planificación, localización, rutas de vehículos, etc.) solo pueden ser modelizados mediante problemas de programación entera y entera mixta. Esto ha motivado el desarrollo de algoritmos heurísticos que buscan una buena solución, aunque no necesariamente la mejor. La clave al usar la optimización es modelizar con el menor tamaño posible. Como resultado, a diferencia de los modelos de simulación, los de optimización no consideran habitualmente problemáticas de dinámica del sistema.

Métodos de Aproximación Continua: los métodos de aproximación continua se pueden usar siempre y cuando los clientes sean tan numerosos que la demanda pueda ser vista como una función espacial continua. Este método produce soluciones cerradas y pueden ser usados como heurísticas simples.

2.- PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN. OPTIMIZACIÓN DEL USO DE LA RED.

2.1.- INTRODUCCIÓN A LOS PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN.

En el capítulo anterior, hemos desarrollado el concepto de logística, los componentes de los sistemas logísticos de distribución y la problemática asociada a su gestión y diseño.

En este apartado vamos a desarrollar los modelos matemáticos más usuales para resolver problemas de distribución en redes logísticas.

Dentro de los problemas de distribución encontramos dos tipos de problemas diferenciados:

- **Problemas de diseños de redes:** constituyen un área de problemas donde se tiene que encontrar la configuración o el diseño óptimo de una red, de forma que se cumplan ciertos criterios de servicio y conectividad. Estos problemas son el objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado.
- **Problemas de optimización del uso de una red:** cuando el objetivo no es el diseño de una red (se dispone de una red ya configurada), sino la optimización del uso de la misma.

Problemas de optimización del uso	Problemas de Diseño
Problemas de transporte (varias versiones, incluyendo transporte con fuente única)	Problemas de localización con costos fijos, transporte con costos fijos
Flujos en redes un producto	Flujos en redes con costos fijos
Flujos en redes multiproducto	Flujos en redes multiproducto con costos fijos
Transporte en dos etapas	Sistemas de distribución en dos etapas

En la tabla anterior podemos ver los diferentes problemas de optimización del uso de una red, y los problemas de diseño equivalentes. La diferencia general entre ellos será la presencia de costos fijos.

Posteriormente, analizaremos en detalle cada uno de estos problemas, así como la problemática asociada a la planificación y gestión del transporte (relacionado con problemas de optimización) y al diseño de redes (relacionado con problemas de diseño)

Veamos ahora, qué problemas de diseño u optimización aplicarían en cada uno de los esquemas vistos en el capítulo anterior, para el diseño de un sistema de distribución.

Esquema con transporte directo (productos transportados directamente desde plantas a centros de distribución finales). El problema de diseño para este tipo de sistema para un único producto se modela como un problema de localización con costos fijos, en una de sus tres variantes: no capacitado (UFLP: Uncapacited Facility Location Problem), capacitado (CFLP: Capacited Falicility Location Problem) o capacitado de fuente única (SSCFLP: Single Source

Capacitated Falicity Location Problem) La optimización de un sistema ya diseñado se reduce al problema de transporte clásico.

En el caso del esquema de Almacenamiento (productos almacenados en almacenes intermedios) El problema de optimización para un producto es un problema de transporte en dos etapas, que también puede modelizarse como un problema de flujo en redes. El problema de diseño de la red de almacenes para el caso multiproducto se reduce a un problema de programación entera mixta.

En el esquema de terminales de carga o Crossdocking, explicado con anterioridad, el problema de optimización es un problema de flujo en redes multiproducto, donde los nodos pueden corresponder a plantas, terminales de carga, puertos o puntos de demanda. El problema de diseño es un problema de flujos en redes multiproducto con costos fijos.

2.2.- INTRODUCCIÓN A LA PLANIFICACIÓN Y GESTIÓN DEL TRANSPORTE DE MERCANCÍAS DE LARGA DISTANCIA.

El transporte de la mercancía juega un papel fundamental en cualquier cadena de suministros actual. Es esencial el movimiento de materias primas a las plantas, de los productos semi-terminados entre fábricas, y el producto final a los clientes y minoristas.

Como ya se indicó en la introducción, los sistemas de transporte son organizaciones complejas que requieren una considerable mano de obra, financiación y recursos materiales. De hecho, los costos de transporte suponen una parte considerable del gasto dentro del sistema logístico.

Participantes: en el sistema de transporte actúan varios partes. Expedidores (tanto fabricantes como intermediarios), originan la demanda de transporte. Los transportistas (de líneas ferroviarias, motor, barcos) proveen los servicios de transporte. Algunos expedidores operan sus propias líneas de transporte, de forma que actúan también como transportistas. Los gobiernos, son otra parte del sistema de transporte, ya que construyen y operan las infraestructuras de transporte (líneas ferroviarias, carreteras, puertos, aeropuertos) y regulan algunos aspectos de la industria.

Larga distancia&Corta distancia: en problemas de transporte de larga distancia, los materiales pueden ser transportados mediante camiones, trenes, barco o avión, o mediante combinación de varios medios de transporte. Los transportes de corta distancia, se realizan habitualmente mediante camiones.

Clasificación de los servicios de transporte de larga distancia: los servicios de transporte se pueden clasificar en dos grupos en función de si son llevados a cabo por un expedidor o por una agencia de transportes. En sistemas de transporte privados, la carga debe ser transportada desde un número restringido de orígenes (ej. Plantas, almacenes) hasta un número más amplio de destinos (ej. Minoristas o clientes) Este es el caso de “pocos a muchos” (few to many), cuya gestión es mucho más simple del caso “ muchos a muchos”, como es el caso de una agencia de transportes que da servicio a multitud de clientes, cada uno de ellos con un origen, un destino, un tipo de producto y una carga.

Costes relevantes en un sistema de transporte (pueden ser coste de transporte o costes de operación)

Coste de operación de flota: los principales costos son los recursos humanos, salarios, consumo de combustible, depreciación de vehículos, mantenimiento, seguros, administración y ocupación. Los salarios y los seguros dependen del tiempo, el consumo y mantenimiento de la distancia, la depreciación depende de ambos y administración y ocupación son costos fijos anuales.

Coste por envío: el coste que paga un transportista por un envío es arbitrario y difícil de calcular, porque envíos diferentes comparte algunos costos comunes. Por ejemplo, cuando un camión lleva varios envíos simultáneamente, no es claro definir cuál es el coste a asignar a cada envío.

Coste por alquiler de vehículos.

Coste por usar una agencia de transportes: cuando un expedidor usa una agencia de transporte, el coste por transportar un envío se calcula basándose en las tarifas publicadas por el transportista. Este costo va a depender de la distancia, del tamaño de la carga (peso, densidad…) y del tipo de vehículo usado.

Costes de manipulación: cuando se insertan ítems individuales dentro de un pallet o container, se cargan en vehículos de salida y al llegar a destino se tiene que revertir la operación.

2.2.1.- CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE TRANSPORTE

En principio, la gestión de un sistema de transporte da lugar a que surjan varios tipos de problemas que hay que decidir cómo solucionar.

Problemas comunes: incluyen a nivel estratégico, una definición extensa de la estrategia de operación del sistema, el diseño físico de la red (si no existe) y la adquisición de recursos costosos, como por ejemplo, aviones. El nivel táctico cubre la distribución de los recursos existentes (vehículos, personal, etc), así como la compra de capacidad adicional que cubra variaciones en la demanda. Al nivel operacional, se han de ajustar los vehículos y el personal, de forma que se tengan en cuenta los eventos de última hora, modificaciones en los pedidos, fallos en equipos, huelgas o condiciones climáticas adveras.

Sistemas de transporte operados de forma privada: las decisiones a tomar son relativamente simples. Si la demanda varía a lo largo del año, se debe determinar el nivel óptimo de vehículos propios y alquilados. Además en el corto plazo, las decisiones han de tomarse sobre la consolidación de pedidos y la programación de envíos. Usualmente, el objetivo es minimizar el costo total manteniendo un nivel de servicios pre-establecido.

Sistemas de transporte basados en la consolidación: a nivel estratégico, las agencias de transporte deben decidir qué tipo de materiales transportar y qué pares de orígenes-destinos servir. Además, es necesario determinar el número de terminales y su localización. Este es el tipo de problemas de localización vistos con anterioridad. Además, es necesario determinar las característica de las terminales (forma, número de puertas, etc) A nivel táctico es importante decidir el diseño de la red de transporte. Este problema consiste en determinar las características (frecuencia, número de paradas intermedias, etc) de las rutas a operar, la forma en que se opera el tráfico, las reglas de operación para cada terminal así como la reposición de vehículos vacíos y containers.

Sistemas de transporte adaptado: A nivel estratégico, se debe decidir cuál es la flota y personal óptimo. A nivel táctico, se debe determinar el precio de los transportes a plena carga. A nivel operacional, se deben tomar decisiones importantes en cuanto a la distribución dinámica de los recursos como tractores, trailers, containers y personal, sin tener un conocimiento completo de los requerimientos futuros. Una vez un recurso es asignado a una petición, no estará disponible por un intervalo determinado de tiempo. Una vez vuelva a estar disponible, se volverá a asignar en una nueva localización. Por tanto, en estas situaciones se debe tener claro cómo decir qué peticiones han de ser aceptadas y cuáles rechazadas, además de decidir cómo se servirán las peticiones aceptadas y cómo se reasignarán los recursos en reposo. Otro problema adicional a nivel operacional es el spot Price (precio actual) por ejemplo de la capacidad de los vehículos no asignados. Tanto en los sistemas de transporte consolidados como adaptados, el objetivo del transportista es maximizar los beneficios esperados sobre un horizonte pre establecido.

2.3.- PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN. OPTIMIZACIÓN DEL USO DE LA RED.

A continuación vamos a desarrollar la formulación matemática de los problemas de optimización del uso de la red más usuales.

2.3.1.- PROBLEMA DEL TRANSPORTE.

El problema general del transporte se refiere a la distribución de cualquier bien desde un conjunto de *m* orígenes o centros de abastecimiento a un conjunto de *n* destinos o puntos de demanda con el mínimo coste posible.

Asociado a cada centro *i* de abastecimiento existe un coeficiente s_i representando la oferta o cantidad máxima que dicho centro puede suministrar.

A cada punto demanda *j* le asociamos un coeficiente d_j representando la cantidad requerida en dicho punto del bien o utilidad a transportar.

Por último, asociado a cada trayectoria (arco) desde cada centro de abastecimiento i a cada punto demanda j existen:

El parámetro c_{ij} que representa el coste en el que se incurre si una unidad del bien es transportada desde i a j

Una variable x_{ij} que representa la cantidad del bien a transportar desde el punto i al j.

El planteamiento general del problema del transporte será por tanto:

$$
\begin{aligned}
&\min && \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\
&\text{sujeto a :} && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \qquad \forall i = 1,\dots,m \\
& && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \qquad \forall j = 1,\dots,n \\
& && x_{ij} \ge 0 \qquad \forall i, j
\end{aligned}
\qquad [1]
$$

La matriz del espacio de restricciones del problema del transporte tiene la siguiente forma:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & & & \dots & & & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \dots & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & \\
 & & \dots & & & & \dots & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \dots \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Como problema del transporte consideramos todo problema de P.L. cuya matriz del espacio de restricciones tenga una forma análoga a la anterior, sin que necesariamente, el objetivo radique en la distribución de algún bien. De hecho, muchos problemas de producción e inventario o de planificación de la mano de obra pueden considerarse como problemas de transporte si admite una formulación similar a la dada en [1]

Para un problema de transporte se define la oferta total como la suma de ofertas: $O_T = \sum_{i=1}^{m} s_i$

Y la demanda total como la suma de demandas: $D_T = \sum_{j=1}^{n} d_j$.

Se dice que el problema está balanceado si la oferta total es igual a la demanda total:

$O_T = D_T$, es decir si $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$

En el caso de un problema del transporte balanceado, todas las restricciones, salvo las de no negatividad, se cumplen en forma de igualdad, y el problema se puede formular como:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\
\text{sujeto a :} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad \forall i = 1,\dots,m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad \forall j = 1,\dots,n \\
& x_{ij} \geq 0 \qquad\quad \forall i, j
\end{aligned}$$

Si un problema no está balanceado, es fácil convertirlo en uno balanceado. Así, si la oferta total excede la demanda total, añadimos un punto demanda ficticio con demanda igual al excedente de la oferta. Como los envíos hacia este nuevo punto demanda no son reales se les asigna un coste nulo. Estos envíos hacia el punto demanda ficticio representan la capacidad de la oferta no usada. Son por tanto, las variables de holgura de las restricciones de oferta o capacidad.

Si la demanda total excede la oferta total, el problema es no factible.

El modelo de transporte con igualdades, conocido como el modelo clásico ya formulado en los años 40, tiene numerosas variantes o extensiones, como son las siguientes:

- ***Problemas no balanceados, con desigualdades.*** Si el problema no está balanceado y $O_T > D_T$ ya hemos visto que puede formularse el modelo con desigualdades.

- ***Problemas de maximización.*** En algunas ocasiones se trata de maximizar una utilidad o beneficio, siendo las restricciones las del problema de transporte.

- ***Rutas prohibidas (grafo no completo).*** En ocasiones no es posible enviar unidades desde algunos orígenes hasta algunos destinos, es decir en principio el grafo no es completo. Si se plantea el problema como uno de redes no hay ninguna dificultad. Otra posibilidad es considerar el grafo completo pero las rutas prohibidas están penelizadas con un coeficiente de costo muy elevado, para obligar a que la correspondiente variable valga cero.

- ***Caso capacitado.*** Para el problema del transporte, puede ocurrir que por un arco (*i*, *j*) no pueda pasar más de una cantidad $u_{ij} > 0$ de flujo. Lógicamente por un arco cualquiera (*i*, *j*) puede pasar como mucho $u_{ij} = \min\{s_i, d_j\}$ unidades de flujo. Si existe algún arco (*i*, *j*) tal que $u_{ij} < \min\{s_i, d_j\}$ decimos que el problema está capacitado, y entonces hay que añadir las restricciones $0 \le x_{ij} \le u_{ij}$ para todas las rutas con capacidad.

2.3.1.1.- PROBLEMA DEL TRANSPORTE MULTIPRODUCTO.

En gran cantidad de ocasiones, de los puntos oferta de un problema de transporte, pueden salir distintos bienes o productos que pueden ser requeridos, todos o algunos de ellos, desde los puntos demanda. En este caso son muchos los parámetros que intervienen en el problema, ya que asociado a cada producto, tendremos la oferta para cada nodo origen, la demanda para cada nodo destino y el coste de transportar una unidad del producto desde cada nodo origen a cada nodo destino. El modelo puede complicarse si además, existe una capacidad de flujo total asociada a cada arco o ruta.

De forma general consideraremos:
m = número de puntos oferta.
n = número de puntos demanda.
p = número de productos ofertados y demandados.
s_i^k = oferta del producto *k* en el nodo oferta *i*.
d_j^k = demanda del producto *k* en el nodo demanda *j*.
u_{ij} = cantidad máxima de flujo permitida en el arco (*i, j*).
c_{ij}^k = coste de transportar una unidad del producto *k* del nodo *i* al nodo *j*.
X_{ij}^k = unidades del producto *k* transportadas del nodo *i* al nodo *j*.

El problema de encontrar la distribución de los productos con el mínimo coste posible se formula del modo siguiente.

$$\min \quad \sum_{i,j,k} c_{ij}^k X_{ij}^k$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_i X_{ij}^k \ge d_j^k \quad \forall j,k$$

$$\sum_j X_{ij}^k \le s_i^k \quad \forall i,k$$

$$\sum_k X_{ij}^k \le u_{ij} \quad \forall i,j$$

$$X_{ij}^k \ge 0 \quad \forall i,j,k$$

El primer grupo de restricciones refleja que se debe satisfacer la demanda que cada nodo demanda tiene de cada producto.

El segundo grupo indica que no se debe superar la oferta que cada nodo oferta tiene de cada uno de los productos.

Las restricciones siguientes indican la necesidad de respetar la capacidad de flujo de cada arco. Por último, las condiciones de no negatividad quedan reflejadas con el último grupo.

2.3.1.2. – PROBLEMA DEL TRANSPORTE DE FUENTE ÚNICA.

En una solución del problema de transporte, un punto de demanda, en general puede ser abastecido desde varios orígenes. Por ejemplo, en un problema de dimensiones 4x5, se obtuvo la siguiente solución:

	Puntos de demanda			
Puntos Oferta	0	0	1500	3000
	2500	2000	0	450
	0	0	1980	500
	0	1200	0	0

Así, el punto de demanda 1 ve cubierta toda su demanda (2500) por el punto oferta 2. Sin embargo, por ejemplo, el punto de demanda 4, ve cubierta su oferta desde tres puntos distintos: el 1, 2 y 3.

Esto suele dar lugar a gastos administrativos y en ocasiones puede resultar interesante exigir a la solución óptima que todo punto de demanda sea cubierto desde un único punto origen. A esta restricción la denominamos "restricción de fuente única". Esta restricción es una restricción lógica, que hará aumentar el costo total. Es por tanto, *de interés conocer cuál es el incremento que tendrá lugar en el coste si se exige la condición de fuente única.*

Modelo 1

La restricción de fuente única equivale a lo siguiente:

Para el punto de demanda j, las variables que indican cómo es cubierta la demanda j, son las variables x_{1j} , x_{2j} ..... x_{mj} y la restricción lo que indica es que solo una de estas m variables puede tomar un valor positivo en la solución óptima.

Esto es un caso especial de la restricción lógica denominada "máximo número de variables", que en este caso se reduce a que como mucho una variable entre m, puede ser positiva.

Esta condición se modeliza introduciendo variables binarias $y_{ij} \in \{0, 1\}$, *i = 1..m; j = 1...n y las restricciones :*

$$x_{ij} \leq u_{ij} y_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \leq 1$$

Así, el modelo completo quedaría:

$$minimizar \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{c_{ij} x_{ij}}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{x_{ij}} \geq \mathrm{d_j} \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \leq u_{ij} y_{ij} \;\; i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \leq 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \;\; i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \;\; i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$$

Modelo 2

Si en el modelo original se dividen las restricciones por la demanda d_j y se realiza el cambio de variable:

$$\frac{x_{ij}}{d_j} = y_{ij}$$

Nos resulta un modelo de transporte equivalente al original, pero donde las variables $0 \leq y_{ij} \leq 1$, y representarán la fracción de demanda del punto j cubierta desde el origen i.

El modelo resultante sería el siguiente (sustituir $x_{ij} = d_j y_{ij}$)

$$minimizar \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{c_{ij} d_j y_{ij}}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_{ij} \ \leq \ s_i \quad \forall \ i = 1, \ldots., m$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \ = 1 \quad \forall \ j = 1, \ldots., n$$

$$0 \leq y_{ij} \ \leq 1 \ \ i = 1, \ldots., m; j = 1, \ldots., n$$

Ahora, si en este modelo se sustituyen las restricciones $0 \leq y_{ij} \ \leq 1 \ \ i = 1, \ldots., m; j = 1, \ldots., n$ por $y_{ij} \ \in \ \{0, 1\} \ \ i = 1, \ldots., m; j = 1, \ldots., n$ se cumplirá la restricción de fuente única, debido a las restricciones de demanda $\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \ = 1 \quad \forall \ j = 1, \ldots., n$

Por tanto, el problema de fuente única se puede modelizar como un problema con todas las variables binarias.

2.3.2.- PROBLEMA DE FLUJO EN REDES.

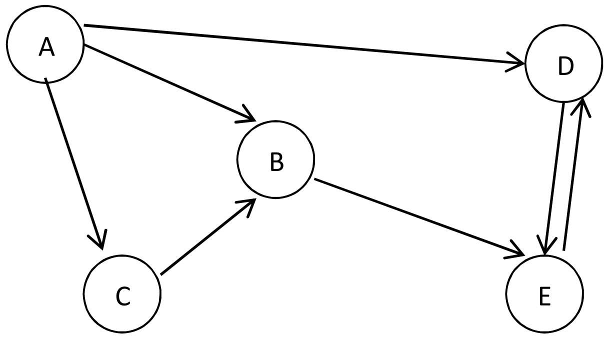
Veamos previamente la terminología usada en redes:

Un grafo es un conjunto de puntos y un conjunto de líneas que unen algunos pares de puntos. Los puntos reciben el nombre de **nodos** o vértices y las líneas **arcos.** Un grafo es la estructura definida por un par (N, A) donde N es un conjunto de nodos y A el conjunto de arcos que relacionan los elementos de N (cada arco corresponde a un par de nodos).

Los arcos de una red pueden estar diseñados para permitir el paso de algún **flujo**. Así, por ejemplo, en el caso de una red de estaciones de servicio, los nodos son las estaciones de servicio, los arcos son los caminos que unen unas estaciones con otras y el flujo los viajeros o los vehículos que los transitan. Si el flujo a través de un arco se permite sólo en una dirección se dice que el **arco es dirigido**, en caso contrario arco no dirigido. Una red que tiene sólo arcos dirigidos se dice **red dirigida**. De igual manera, si todos los arcos de una red son no dirigidos se dice que la red es **no dirigida**. Toda red puede considerarse dirigida sustituyendo los arcos no dirigidos por un par de arcos dirigidos con direcciones opuestas.

Una **trayectoria** entre dos nodos es una sucesión de arcos distintos que conectan ambos nodos. Cuando algunos o todos los arcos de una red son arcos dirigidos, distinguimos entre **trayectorias dirigidas** y **trayectorias no dirigidas**: una trayectoria dirigida **o camino** del nodo i al nodo j es una sucesión de arcos cuya dirección (si la tienen) es hacia el nodo j, de manera que el flujo del nodo i al nodo j a través de esta trayectoria sea factible. Una trayectoria no dirigida **o cadena** del nodo i al nodo j es una sucesión de arcos cuya dirección si la tienen, es hacia o desde el nodo j. Obsérvese que toda trayectoria dirigida es en particular no dirigida, pero no toda trayectoria no dirigida es dirigida.

Para ilustrar estas definiciones obsérvese la siguiente figura.



La red (N,S) viene definida por el conjunto de nodos $N=\{A,B,C,D,E\}$ y el conjunto de arcos $S=\{(A,C),(A,B),(A,D),(C,B),(B,E),(D,E),(E,D)\}$. La sucesión de arcos {(*C,B*), (*B,E*), (*E,D*)} es una trayectoria dirigida del nodo *C* al nodo *D*.

Vamos a modelizar el problema de flujo en redes.

Sea $G=(N,A)$ un grafo dirigido con un conjunto de nodos $N=\{1,...,m\}$ y un conjunto de arcos *A* representados por pares (*i, j*) con $i,j\in N$. La red correspondiente al grafo *G* tiene los siguientes elementos adicionales:

Asociado a cada nodo $i\in N$ se tiene una cantidad b_i que representa la oferta o demanda de cierto producto en ese nodo.

Si $b_i>0$ se dice que el nodo *i* es un **nodo oferta**, con un nivel de oferta (existencias o producción) de b_i.

Si $b_i<0$ el nodo *i* se dice que es un **nodo demanda**.

Si $b_i=0$ se dice que *i* es un **nodo intermedio o de transbordo**.

Para cada nodo $i\in N$ consideramos los conjuntos de nodos ∂_i^+ y ∂_i^- donde:

$\partial_i^+=\{j\in N:(i,j)\in A\}$ -> conjunto de nodos a los que se llega desde *i.*

$\partial_i^-=\{j\in N:(j,i)\in A\}$ -> el conjunto de nodos desde los que se llega a *i.*

Asociado a cada arco $(i,j)\in A$ se tiene:

La variable de decisión $x_{ij}\geq 0$, que representa la cantidad de producto o flujo sobre el arco .

c_{ij} el coste por unidad del producto transportada a lo largo del arco.

En muchas ocasiones se tiene una capacidad de flujo u_{ij} sobre el arco (i,j), y entonces se aplica la restricción $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$.

El problema de *flujo de coste mínimo en una red*, o abreviadamente, problema de optimización en redes, consiste en encontrar el valor de los flujos sobre la red que, satisfaciendo las ofertas y demandas, tenga coste total mínimo. La formulación de este problema es la siguiente:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}\, x_{ij} & \\ \text{sujeto a} & \sum_{j\in\partial_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in\partial_i^-} x_{ji} = b_i & \forall i \in N \\ & x_{ij} \geq 0 & \forall (i,j) \in A \end{array} \qquad [1]$$

El problema tiene por tanto, una variable para cada arco y una restricción para cada nodo de la red.

Las restricciones del problema se conocen como las *ecuaciones de conservación del flujo, ecuaciones de balance o ecuaciones de Kirchoff* e indican que el flujo de salida en el nodo i menos el flujo de entrada en i, debe ser igual a la oferta o demanda del dicho nodo.

En el modelo [1] las variables x_{ij} no tienen cota superior explícita. Frecuentemente el flujo x_{ij} sobre el arco (*i, j*) tiene una cota superior o capacidad $u_{ij} > 0$. En este caso el **modelo se dice con capacidades** y se obtendría sustituyendo en [1] las restricciones de no negatividad por las restricciones de cotas superiores:

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

Si el número de arcos en el grafo es *n* y representamos por $x = (x_{ij})$ el vector de variables o flujos, el problema [1] puede formularse en forma matricial como sigue:

$$\begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde *A* es la matriz de coeficientes del sistema de las ecuaciones de balance. La variable x_{ij} asociada al arco $(i, j) \in A$ aparecerá con coeficiente 1 en la restricción correspondiente al nodo *i* y con coeficiente -1 en la restricción correspondiente al nodo *j*. Entonces el vector columna a_{ij} asociado a x_{ij} en la matriz de coeficientes tendrá la forma $a_{ij} = e_i - e_j$, siendo e_i el vector unitario en $\Re^m$ con un 1 en la fila *i*. La matriz *A* es conocida como *matriz de incidencias nodos-arcos* para un grafo dirigido cualquiera.

Propiedad de integridad. El modelo de flujo en redes tiene una propiedad importante que puede enunciarse en los siguientes términos: si las ofertas y demandas son números enteros, existe una solución óptima con todas las variables enteras. Esto implica dos cosas:

Aunque el problema tenga restricciones de enteros, por ejemplo $x_{ij} \geq 0$ enteros, aunque se resuelva sólo con $x_{ij} \geq 0$, vamos a obtener valores enteros.

En segundo lugar, esta propiedad se traduce en que las versiones especializadas del *método simplex para redes* no necesitan efectuar divisiones, y resultan algoritmos mucho más rápidos y eficientes que el método simplex general para PL.

Al igual que en el problema del transporte, se definen:

Oferta total como la cantidad positiva $O_T = \sum_{\{i:b_i>0\}} b_i$ (la suma de todas las ofertas)

Demanda total como la cantidad positiva $D_T = -\sum_{\{i:b_i<0\}} b_i$ (suma, cambiada de signo, de todas las demandas).

Diremos que una red está **balanceada** si la oferta total es igual a la demanda total, esto es, si $O_T = D_T$, o dicho de otra forma, si $\sum_i b_i = 0$.

Propiedad: Si un problema de redes de la forma [1] es factible entonces la red está balanceada. Para ver por qué es cierta esta propiedad, basta sumar las ecuaciones de balance para formar una sola ecuación. Como toda variable tiene solamente un coeficiente +1 y un coeficiente -1, el lado izquierdo de la ecuación quedará en la forma: $\sum_{(i,j)\in A} 0x_{ij}$ que es 0, y en el lado derecho $\sum_{i\in N} b_i$, luego tiene que ser finalmante $\sum_i b_i = 0$, y la red estar balanceada.

Sin embargo el recíproco de esta propiedad no es cierto, esto es, una red puede estar balanceada y no tener ninguna solución factible. Basta poner un ejemplo, como el siguiente: una red con tres nodos, arcos: (1,2), (1,3), (2,3) y (3,2) y ofertas/demandas: b_1=-5, b_2=3 y b_3=2. Aunque la red está balanceada, no es posible llevar la oferta desde los nodos 2 y 3 hasta el punto de demanda 1, y por lo tanto no hay soluciones factibles.

En muchos casos prácticos sucede que la oferta total no coincide con la demanda total. Por ejemplo, es muy habitual que $O_T > D_T$. En estos casos las restricciones $\sum_{j\in\partial_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in\partial_i^-} x_{ji} = b_i$

correspondientes a nodos oferta, se pueden sustituir por $\sum_{j\in\partial_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in\partial_i^-} x_{ji} \le b_i$ (*) puesto que parte del flujo ofertado no va a ser distribuido. Sin embargo, a la hora de programar y resolver un problema de redes mediante un programa informático, no resulta cómodo tener que distinguir entre restricciones de nodos oferta y nodos demanda o de tránsito. Para evitar esta situación y recurrir a la formulación general dada en [1], basta añadir un nodo ficticio de demanda, unido a cada nodo de oferta mediante un arco dirigido desde el nodo oferta hasta el nuevo nodo, con coste cero y con demanda igual a $D_T - O_T < 0$. De esta forma conseguimos una red balanceada. **Los flujos de estos arcos ficticios corresponden, en el grafo original, a las ofertas no demandadas.** Los valores de estos flujos se corresponden con el valor de las variables de holgura de las restricciones (*).

Como última cuestión referente al modelo de redes, hay que destacar que los costes y las capacidades están siempre situados sobre los arcos. Entonces, si en algún problema hay un coste o una capacidad en un nodo, hay que desdoblar el nodo en un arco (ficticio), y representar sobre él el costo o la capacidad. Ejemplos típicos de estos son costos de producción y capacidades de almacenamiento. Otras variantes sencillas del modelo básico pueden incluir cotas inferiores distintas de 0, como $l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}$.
Obsérvese que el problema del transporte, formulado con igualdades, es un caso particular del problema general de flujo en redes con coste mínimo, con la formulación equivalente:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} & \\ \text{sujeto a :} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & \forall i = 1,\dots,m \\ & -\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -d_j & \forall j = 1,\dots,n \\ & x_{ij} \ge 0 & \forall i, j \end{array}$$

Lo que caracteriza al problema de transporte respecto del general de redes es que sólo hay arcos desde orígenes a destinos (el grafo es bipartido), y es posible ir desde cualquier orígen a cualquier destino (grafo bipartido completo).

Existen otros problemas de redes que generalizan el modelo básico, y que son importantes por la gran cantidad de aplicaciones en diferentes sectores. Se indican los más importantes:

- Redes Generalizadas (también conocidas como Redes con pérdidas y ganancias).
- Redes Multiproducto.
- Redes con costos fijos.
- Redes no lineales, cuando la función objetivo es no lineal.

APLICACIONES:

Las aplicaciones más importantes de los problemas de flujo en redes se dan en problemas de distribución, los que estamos tratando en este TFG. En éstos, generalmente hay puntos de producción u origen, puntos de demanda o destino y puntos de almacenamiento intermedios.

En algunos caso especiales, que van a corresponder a un problema de transporte, solamente se permiten "envíos" desde un nodo origen a un nodo destino. Sin embargo, en la mayor parte de las situaciones en las que se desea conocer la distribución de una mercancía con el mínimo coste posible, intervienen puntos intermedios de almacenamiento o de distribución, entre los centros de abastecimiento y los centros de consumo. La red asociada a un problema de transporte, no es por tanto, una representación válida para estos casos. Su formulación se corresponde por tanto, con un problema general de flujo en redes con coste mínimo.
El modelo de redes también se ha aplicado a la optimización de otros sistemas que no corresponden a distribución física, como pueden ser las *redes de espacio/tiempo.* Un ejemplo de estas redes puede darse al modelizar problemas de producción/inventario para un producto y varios métodos.

2.3.3.- EL PROBLEMA DEL FLUJO EN REDES MULTIPRODUCTO

El problema del flujo en redes multiproducto es una extensión del problema de redes al caso de varios productos. Los datos serían:

Sea G=(N,A) un grafo dirigido con un conjunto de nodos N={1,…,n}
Sea A={ (i,j) con i, j ∈ N} el conjunto de arcos con origen y destino en N
Sea p el número de productos, donde K={1,…,p}, el índice de productos

Los parámetros y variables asociados son:

c_{ijk} = coste unitario de transporte del producto k por el arco (i,j)

x_{ijk} = flujo del producto k por el arco (i,j)

b_{ik} = oferta/demanda del producto k en el nodo i

u_{ij} = capacidad del arco (i,j)

El problema del flujo multiproducto de coste mínimo consiste en encontrar el valor de los flujos sobre la red, que satisfaciendo la demanda y la oferta de cada producto, tenga un coste total mínimo.

Formulación:

Minimizar $\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in A} c_{ijk}\, x_{ijk}$ (1)

Sujeto a

$$\sum_{j\in N:(i,j)\in A} x_{ijk} - \sum_{j\in N:(j,i)\in A} x_{jik} = b_{ik} \quad \forall\, i \in N, k \in K \qquad (2)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \qquad \forall\, (i,j) \in A, k \in K$$

$$\sum_{k\in K} x_{ijk} \leq u_{ij} \qquad \forall\, (i,j) \in A, k \in K \quad (3)$$

La función objetivo (1), minimiza el costo total.
La ecuación balance (2) indica que el flujo neto del producto k en el nodo i, debe ser igual a la demanda del producto k en el nodo i

Veamos algunas analogías y diferencias entre los modelos de flujo en redes para un producto y multiproducto:

- Las restricciones (3) son comunes a todos los productos. Si no existieran esas restricciones bastaría con resolver p problemas de redes independientes, uno para cada producto.

- Mientras que un modelo de redes para un único producto las unidades que llegan a un nodo se mezclan, en el caso multiproducto es esencial mantener la identidad del producto.

- Al igual que en el caso de un solo producto, para que el problema tenga soluciones factibles es necesario que sea balanceado para cada producto, es decir:

$$\sum_{i \in N} b_{ijk} = 0$$

- El caso multiproducto no cumple la propiedad de integralidad, es decir, aunque las ofertas y demandas sean enteras, la solución óptima puede no ser entera.

Como caso particular vamos a ver los problemas de transporte entre diferentes pares Orígen-Destino. Así, cuando en un sistema de distribución se están transportando simultáneamente diferentes productos, que comparten los mismos recursos o capacidad de transporte, se tiene de forma natural el modelo de redes multiproducto.

APLICACIÓN:

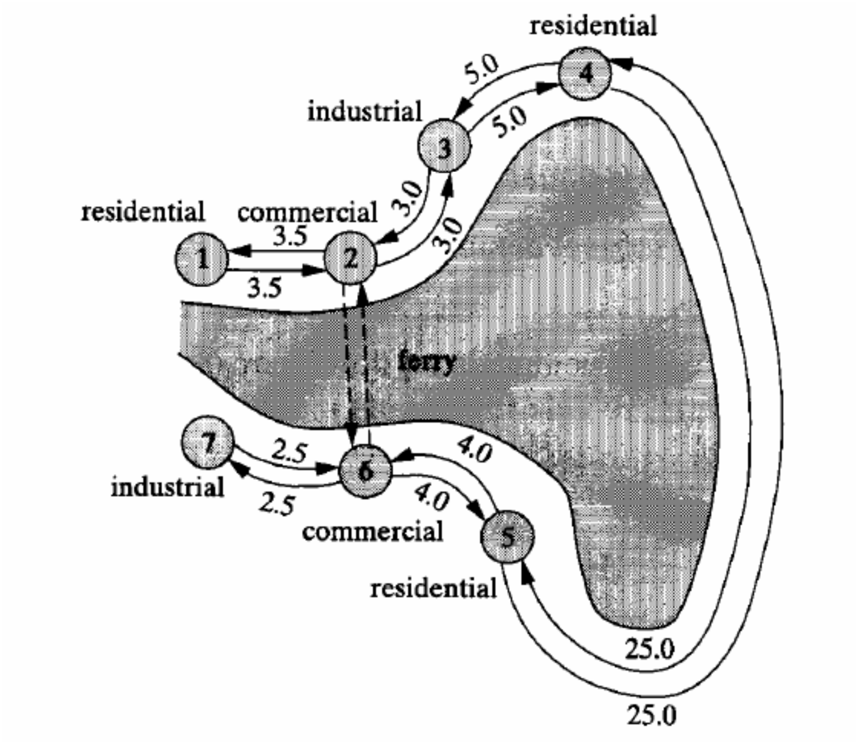
El ferry de la Bahía

En la gráfica final se representa una bahía, rodeada por una carretera. Los 7 nodos o puntos de intereses, que pueden ser de tipo residencial, comercial o industrial, así como la distancia de cada posible desplazamiento. Cada mañana, la población de las tres zonas residenciales (nodos 1, 4 y 5) debe desplazarse a las zonas de trabajo industriales y comerciales. En la tabla aparecen los datos principales de población y desplazamientos:

		Viajes al destino						
Orígen	**Total**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	2.850		900	750	40	10	600	550
4	6.000	100	2.000	1.100		150	1.400	1.250
5	12.250	110	4.000	2.200	200		3.300	2.440

Estos desplazamientos origina un número de 21.000 desplazamientos diarios, con un recorrido de 399.250 Kilómetros. Los gestores regionales están pensando en la posibilidad de añadir un ferry para el paso de vehículos entre los puntos 2 y 6, lo que reduciría el número de kilómetros y, por lo tanto, la contaminación. La capacidad del ferry sería de 2.000 vehículos diarios en cada dirección.

Se trata de plantear un modelo de redes multiproducto, y calcular en cuanto se reduciría el número de kilómetros con la introducción del ferry.



Este problema se resuelve como un problema de flujo multiproducto donde el número de nodos es n= 7 y el número de productos son las tres zonas residenciales 1, 4 y 5.
Las variables x_{ijk} serían el número total de desplazamientos por el arco (i, j) para el residencial k.

Para ver el modelo en detalle, ver Anexo I. A continuación se adjunta la solución al problema obtenida con E.

Desplazamientos desde el Residencial 1	Desplazamientos desde el Residencial 4	Desplazamientos desde el Residencial 5
x(1,2,1) = 2850	x(2,1,2) = 100	x(2,1,3) = 110
x(2,3,1) = 790	x(2,6,2) = 840	x(3,2,3) = 2110
x(2,6,1) = 1160	x(3,2,2) = 2940	x(4,3,3) = 4310
x(3,4,1) = 40	x(4,3,2) = 4040	x(5,4,3) = 4510
x(6,5,1) = 10	x(4,5,2) = 1960	x(5,6,3) = 7740
x(6,7,1) = 550	x(5,6,2) = 1810	x(6,2,3) = 2000
	x(6,7,2) = 1250	x(6,7,3) = 2440

Total Kilómetros
280.770

Existe un problema, muy común en los sistemas de distribución de productos, donde el concepto de producto es muy diferente, pues aquí cada producto representa la carga que hay que transportar entre cada par Orígen/Destino. Se supone un conjunto N= {1,..., n} de puntos y una matriz $D = (d_{ij})$ de demandas para cada par (i, j) de puntos Orígen/Destino. Esto significa que hay que mover o transportar d_{ij} unidades desde el origen i hasta el destino j.

Otros datos del problema son:

c_{ij}: costo de transportar una unidad del origen i hasta el destino j.

u_{ij}: capacidad de transporte del punto i hasta el punto j. Esta capacidad indica la cantidad total de productos (unidades o toneladas por ejemplo) que puede moverse por ese tramo, independientemente de su origen o destino.

En principio, el problema debería ser multiproducto, considerando cada producto como cada par Orígen/Destino. Así, si n=100, se tendrían 10.000 productos. Sin embargo, si el coste unitario de transporte es independiente del par Orígen/Destino, es suficiente mantener la identidad del origen, de forma que se tendrían 100 productos. Como ejemplos de este problema, las compañías de transporte (Seur, Federal Express, etc.) o los sistemas de transporte de enfermos entre diferentes ciudades.

2.3.4.- MODELO TRANSPORTE EN DOS ETAPAS.

El modelo del transporte en dos etapas incluye una nueva variante en la teoría del transporte. Estudia un modelo de dos pasos donde la mercancía pasa por un punto de tránsito o almacenes intermedios (donde no se acumula la mercancía) a partir del cual llega a su destino final.

Sea m el número de orígenes, y los índices $i = 1, \dots., m$.
Sea p el número de almacenes intermedios, y los índices $k = 1, \dots., p$.
Sea n el número de destinos, y los índices $j = 1, \dots., n$.

Cada origen $i = 1, \dots., m$ tiene asociado una oferta s_i y cada destino $j = 1, \dots., n$ una demanda d_j .

Sea x_{ik}^1 las variables de decisión que representan la cantidad de flujo transportado en la primera fase, es decir desde el origen i al almacén intermedio k. Sea c_{ik}^1 el coste de transportar una unidad de producto desde el origen i al almacén intermedio k.

Sea x_{kj}^2 las variables de decisión que representan la cantidad de flujo transportado en la segunda fase, es decir desde el almacén intermedio k al destino j. Sea c_{kj}^2 el coste de transportar una unidad de producto desde el almacén intermedio k al destino j.

El modelo sería:

Minimizar $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} c_{ik}^{1}\, x_{ik}^{1} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}^{2}\, x_{kj}^{2}$

Sujeto a:

$\sum_{k=1}^{p} x_{ik}^{1} \leq s_i \quad \forall\, i = 1, \dots, m$ (1)

$\sum_{k=1}^{p} x_{kj}^{2} \geq d_j \quad \forall\, j = 1, \dots, n$ (2)

$\sum_{i=1}^{m} x_{ik}^{1} = \sum_{j=1}^{n} x_{kj}^{2} \quad \forall\, k = 1, \dots, p$ (3)

$x_{ik}^{1} \geq 0\,;\ x_{kj}^{2} \geq 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$

La restricción (1) establece que de cada origen i debe salir, a lo sumo una cantidad de producto menor o igual a su oferta.

La restricción (2) establece que a cada destino j debe llegar, como mínimo una cantidad de producto mayor o igual a su demanda.

La restricción (3) establece que la cantidad de producto que llega a cada nodo de tránsito, debe ser igual a la que sale del nodo de tránsito.

3.- PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN. DISEÑO DE UNA RED.

3.1.- INTRODUCCIÓN AL DISEÑO DE REDES.

En el diseño de redes logísticas, el punto más importante a tener en cuenta es determinar el número, localización, equipamiento y tamaño de las nuevas instalaciones, así como la desinversión, deslocalización o disminución de tamaño de instalaciones existentes. Por supuesto, el objetivo y las restricciones varían dependiendo del sector, y del tipo de instalación (plantas, centros de distribución central, centros regionales, vertederos, parking de ambulancias, etc.)

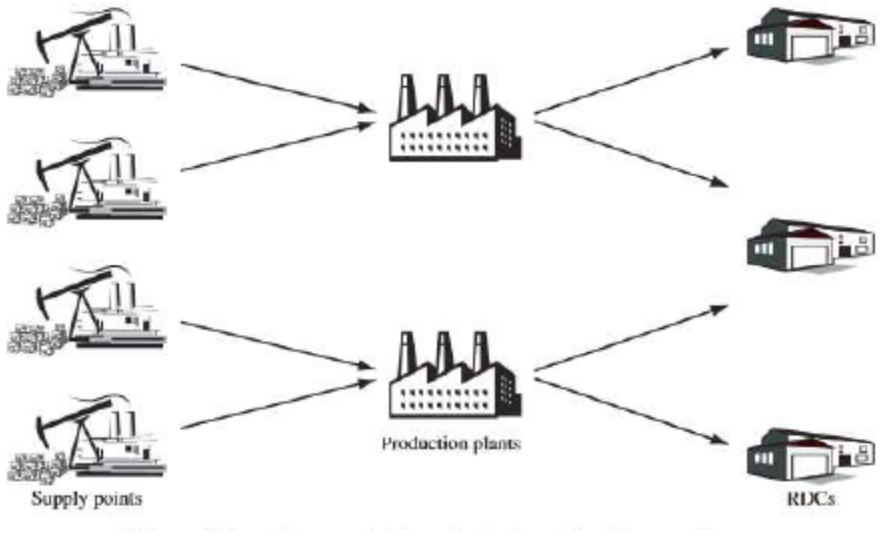
El objetivo general es la minimización del coste total anual en logística sujeto a restricciones tales como la capacidad de las instalaciones, los niveles de servicio requeridos por el cliente, etc. Como norma, el coste a minimizar estará asociado con los costos de operación de la instalación (fabricación, almacenaje, clasificación, parking, etc.) y con el transporte entre instalaciones o entre instalaciones y usuarios.

La investigación en el diseño de redes logísticas se remonta a las teorías de localización del siglo 19. Desde entonces se han propuesto una gran variedad de modelos y metodología. Antes de ver los modelos más relevantes, veamos algunos puntos a tener en cuenta.

Cuándo se necesita una decisión sobre localización: obviamente las decisiones sobre localización en un sistema logístico, son necesarias cuando un sistema se comienza desde el inicio. También pueden ser requeridos en el caso de variaciones en los patrones de demanda o una distribución territorial, o si hay modificaciones en los materiales, energía o costos de mano de obra. En particular, las decisiones sobre localización se realizan a menudo cuando se lanzan nuevos productos o servicios, o productos obsoletos se retiran del mercado.

Las decisiones de localización pueden ser estratégicas o tácticas: mientras las instalaciones se compran o construyen, las decisiones de localización implican inversiones considerables. En este caso, cambiar la localización o equipos es improbable en el corto o medio plazo. Por otro lado, si las instalaciones y los equipos son alquilados, o las operaciones son subcontratadas, las decisiones de localización pueden ser reversibles a medio plazo.

Las decisiones de localización y distribución están entrelazadas: las decisiones de localización están estrictamente relacionadas con aquellas de definición de los áreas de distribución de las instalaciones. Por ejemplo en figura siguiente, abrir un nuevo RDC (centro de distribución regional) tendrá que venir acompañado de una redefinición de las áreas de venta junto con una distribución diferente entre los centros regionales y centrales (RDC/CDC), y de los centrales a las plantas.



Las decisiones de localización pueden afectar a la demanda: la localización de instalaciones puede afectar al volumen de demanda. Por ejemplo, la apertura de nuevo centro de distribución regional (RDC) puede incrementar la demanda de clientes que por motivos de lejanía no estaban satisfechos con el servicio y al acercarles el centro de distribución consumen más.

3.1.1.- CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS DE LOCALIZACIÓN.

Los problemas de localización se pueden clasificar, en términos logísticos de la siguiente forma:

Horizonte temporal: en problemas de periodo simple, las decisiones de localización han de ser tomadas al inicio, basándose en requerimientos logísticos previstos. Los problemas multi-periodo, una vez se ha decidido al inicio del horizonte de planeación, se usan para establecer una serie de cambios dados en un instante determinado dentro del horizonte de planeación.

Tipo de instalación: pueden ser instalación única, si solo se va a establecer un tipo único de instalación (por ejemplo solo centros de distribución regional). Por el contrario, en problemas multi-instalación se requerirán varios tipos.

Flujo de materiales: en problemas del tipo single-commodity se asume que se distribuye un único tipo de materiales (o materiales homogéneos) en el sistema logístico. Por el contrario, en los problemas multicommodity, existen varios tipos de diferentes características. En el último caso, cada tipo de material tiene un patrón de flujo propio.

Interacción entre instalaciones: en sistemas logísticos complejos puede haber materiales que se distribuyan entre instalaciones del mismo tipo (por ejemplo, flujo de componentes entre plantas) En este caso, la localización óptima depende no solo de la distribución territorial del producto terminado, sino también de la posición mutua de las instalaciones (problemas de localización con interacciones)

Flujos dominante de materiales: los problemas del tipo Single-echelon, son aquellos en las que o bien el flujo de materiales que sale o bien el flujo que entra es despreciable. En los problemas del tipo Multi-Echelon, tanto el flujo de entrada como el de salida son relevantes. Este es el caso, por ejemplo, en el que los centros de distribución centrales tienen que ser localizados teniendo en cuenta tanto el coste de transporte de las plantas al centro, como del centro al cliente. En este tipo de problemas se deben considerar las restricciones destinadas a equilibrar el flujo de entrada y salida.

Divisibilidad de la demanda: en algunos sistemas de distribución se requiere que por razones administrativas o motivos financieros, cada centro o cliente sea atendido por un centro único, mientras que en otras instalaciones, una instalación o cliente puede ser servido por más de un centro. En el primer caso se denomina demanda divisible y en el segundo indivisible.

Influencia del transporte en las decisiones de localización: la mayor parte de los problemas de localización asumen los costos de transporte entre dos instalaciones o entre una instalación y un cliente como: tarifa de transporte x volumen de carga x distancia entre los puntos. Este cálculo es adecuado en el caso de que los vehículos realizan rutas directas. Sin embargo, si el vehículo realiza entregas en varios puntos, el coste de transporte no se calcula tan fácilmente. En estos casos, las rutas seguidas por los vehículos han de ser tenidas en cuenta a la hora de establecer la localización de las instalaciones..

Localización de puntos de venta minoristas: cuando se planifica una red de almacenes, el asunto más importantes es localizar de forma óptima el conjunto de puntos de venta de forma que compitan con otros almacenes por los clientes. En este contexto, predecir los ingresos esperados debido a una nueva instalación es difícil ya que depende de un gran número de factores como la localización, área de ventas y nivel de competencia.

3.2.- PROBLEMAS DE DISTRIBUCIÓN. DISEÑO DE UNA RED.

En el apartado anterior hemos desarrollado los modelos más comunes de la optimización cuando una red ya ha sido definida. A continuación desarrollaremos los problemas de diseño más usuales, cuyo objetivo será determinar la configuración óptima de una red, de forma que se cumplan ciertos criterios de servicio y conectividad. Es decir, habrá que decidir qué arcos o tramos de la red han de usarse. Generalmente hay costos fijos o bien en los nodos (plantas, o almacenes) o bien en los arcos o tramos.

Esta área tiene muchas aplicaciones prácticas, especialmente en problemas de redes de comunicaciones (cable, gas, electricidad) y en redes logísticas de distribución.

3.2.1.-MODELOS DE LOCALIZACIÓN CON COSTOS FIJOS.

Este modelo es el equivalente al problema de transporte, en la versión de diseño.

Utilizaremos la siguiente notación:

Sea M={1, …, m} el conjunto de los puntos de demanda de cierto servicio.

Sea N={1, …, n} el conjunto de los puntos donde puede estar situada una instalación.

En este tipo de modelos, cada punto de demanda $i \in M$ tiene asociada **una demanda d_i** de cierto servicio, y para cada posible instalación $j \in N$ **un coste fijo f_j de** apertura o mantenimiento de la instalación (independientemente de la demanda que sirva).

Además, se tiene un **coste variable o unitario c_{ij}** , que será el coste de servir una unidad de producto al punto de demanda o cliente i, desde la instalación j (en general este costo será proporcional a la distancia del punto i a la instalación j, d_{ij}.

Si suponemos primero que las instalaciones pueden servir cualquier cantidad de demanda, tenemos el Modelo de Localización sin capacidades (habitualmente sus siglas son UFL o Uncapacitated Facility Location)

Minimizar $\sum_{j=1}^{n} f_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_{ij}$ (1)

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = d_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} \leq M x_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \qquad (3)$$

$$z_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m \;\; j = 1, \ldots, n \quad (4)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \;\; j = 1, \ldots, n \quad (5)$$

Las variables de este modelo son de dos tipos:

Las variables binarias x_j , que corresponden a las decisiones de apertura o no de las instalaciones. Es decir, si la instalación j se abre, la variable x_j será igual a 1, en caso contrario será igual a 0.

Las variables continuas z_{ij} indican las cantidades que se sirven desde cada instalación hasta cada cliente o punto de demanda, es decir indican la cantidad de producto desde la instalación j al punto de demanda i.

La función a minimizar es el costo total.

La restricción número (2) garantiza que la demanda de cada cliente quede servida, mientras que la restricción número (3), con M suficientemente grande, garantiza que si una instalación no está abierta, no puede servir a ningún cliente, es decir, modeliza las implicaciones:

$$\mathrm{x_j} = 0 \ \rightarrow \ z_{ij} = 0 \quad i = 1, \ldots., m$$

Si realizamos el cambio de variable $\mathrm{y_{ij}} = \ \mathrm{z_{ij}} / \ \mathrm{d_i}$, la variable $\mathrm{y_{ij}}$ indicará la fracción de la demanda del cliente i cubierta desde la instalación j, y verifica que $0 \ \leq \ \mathrm{y_{ij}} \ \leq 1$. Con este modelo, se tiene el modelo más comúnmente utilizado que el anterior.

Minimizar $\sum_{j=1}^{n} f_j x_j \ + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, d_i \ y_{ij}$ (6)

Sujeto a

$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \ 1 \ \forall \, i = 1, \ldots., m$ (7)

$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} d_i \ \leq m x_j \ \ \forall \, j = 1, \ldots., n$ (8)

$0 \ \leq y_{ij} \ \leq 1 \quad i = 1, \ldots., m \ \ j = 1, \ldots., n$ (9)

$x_j \ \in \{0, 1\} \ \ j = 1, \ldots, n$ (10)

Notar, que ahora no es preciso poner una cantidad grande M sino el número de puntos de demanda m.

Si para cada posible instalación $j \ \in N$ hay una capacidad u_j para la demanda total que puede servir, se tiene el modelo de Localización con Capacidades (CFL: Capacitated Facility Location), cuya formulación sería:

Minimizar $\sum_{j=1}^{n} f_j x_j \ + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \, d_i \ y_{ij}$ (11)

Sujeto a

$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \ 1 \ \forall \, i = 1, \ldots., m$ (12)

$\sum_{i=1}^{m} d_i y_{ij} \ \leq u_j x_j \ \ \forall \, j = 1, \ldots., n$ (13)

$0 \ \leq y_{ij} \ \leq 1 \quad i = 1, \ldots., m \ \ j = 1, \ldots., n$ (14)

$x_j \in \{0,1\} \; j = 1, \dots, n$ (15)

Esta sería la denominada formulación débil o agregada. La restricción $\sum_{i=1}^{m} d_i y_{ij} \leq u_j x_j \;\; \forall\, j = 1, \dots, n$ además de modelizar las restricciones de capacidad, aseguran las condiciones lógicas vistas anteriormente:

$$x_j = 0 \;\rightarrow\; y_{ij} = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

El siguiente grupo de restricciones hace el mismo papel, y además refuerza considerablemente la relajación lineal del problema:

$$y_{ij} \leq x_j \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

Cuando estas restricciones se añaden a la formulación débil se obtiene la denominada formulación fuerte.

3.2.1.1.- MODELO DE LOCALIZACIÓN DE FUENTE ÚNICA.

Es una variante del modelo anterior, donde se exige que cada punto de demanda sea cubierto por una única instalación. Esta restricción, al igual que en el caso del problema del transporte, se conoce como de fuente única. En el caso del modelo sin capacidades, la solución óptima puede tomarse verificando esta condición (pues al no haber capacidades, cada punto de demanda será servido por la instalación abierta más cercana) Sin embargo, en el caso capacitado, lo anterior ya no puede garantizarse. Y se obtiene así el Modelo de Localización con Capacidades y Fuente Única (SSCFL: Single Source Capacitated Facility Location):

Minimizar $\sum_{j=1}^{n} f_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, d_i\, y_{ij}$ (16)

Sujeto a

$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1 \;\forall\, i = 1, \dots, m$ (17)

$\sum_{i=1}^{m} d_i y_{ij} \leq u_j x_j \;\; \forall\, j = 1, \dots, n$ (18)

$y_{ij} \in \{0,1\} \;\; i = 1, \dots, m \;\; j = 1, \dots, n$ (19)

$x_j \in \{0,1\} \; j = 1, \dots, n$ (20)

En este modelo, tantos las variables de las instalación, como las variables de asignación son binarias. Este modelo es considerablemente más difícil que el CFL normal, y generalmente debe recurrirse al uso de heurísticas para su resolución aproximada.

APLICACIÓN:

Drinksa es una compañía que se dedica a la fabricación y distribución de bebidas no alcohólicas. Recientemente han aumentado considerablemente las ventas de un nuevo producto muy de moda entre los jóvenes. La gerencia está considerando la posibilidad de abrir nuevas plantas donde se fabricaría el nuevo producto.

El proceso de producción usa, fundamentalmente , agua y extractos de azúcar, pero los costes de estos productos son despreciables en comparación a los costos de distribución. La ubicación de las nuevas plantas se ha limitado a 10 posibles puntos, que indicaremos por P1, …., P10 y actualmente se tienen establecidos 6 puntos de distribución, que indicaremos por D1,….,D6. En la siguiente tabla aparecen las distancias en kilómetros entre cada posible planta y cada centro de distribución.

	D1	D2	D3	D4	D5	D6
P1	0	76,1	30,4	139,4	72,6	11,7
P2	76,1	0	71,2	77,2	144,5	83,7
P3	20,8	92,9	47,2	156,1	47,5	11,7
P4	54,7	113,3	52,9	187,2	93	45,2
P5	13,5	85,5	28	148,7	67,3	9,3
P6	30,4	71	0	138,2	94,5	38,1
P7	139,4	77,2	138,2	0	207,9	146,9
P8	47,8	106,5	46,2	180,2	86,7	38,9
P9	72,6	144,5	94,5	207,9	0	63,4
P10	11,7	83,7	38,1	146,9	63,4	0

Nota: cuando la distancia es cero es que el punto de distribución está ubicado en la misma localidad que la posible planta.

Los costos de operación anual (en Euros por año) y las capacidades de producción anuales (en hectolitros) de cada posible planta están dadas en las dos primeras columnas de la siguiente tabla, así como las demandas estimadas anuales de cada punto de distribución.

	costo	capacidad	área	demanda
P1	81400	22000	D1	14000
P2	83800	24000	D2	10000
P3	88600	28000	D3	8000
P4	91000	30000	D4	12000
P5	79000	20000	D5	10000
P6	86200	26000	D6	9000
P7	88600	28000		
P8	91000	30000		
P9	79000	20000		
P10	80200	21000		

Los costos de transporte se calculan observando que cada camión tiene una capacidad de 150 hectolitros y hace los viajes de ida lleno, y los de vuelta vacío, siendo el coste por kilómetro de 0,92 EUR. Así, para calcular el costo de satisfacer toda la demanda (de 14000 Hl) del centro D1 desde la planta 2, serán necesarios 14000/150 = 94 viajes, entonces:

$$c_{21} = 2\ x\ 76{,}1\ x\ 0{,}92\ x\ 94 = 13162{,}25$$

La empresa quiere conocer en qué plantas se ha de efectuar la producción de forma que el costo total sea mínimo.

Se implementa el modelo en Mosel y se resuelve con Xpress Ive, siendo la solución obtenida:

Valor Objetivo: costo total 342.820

	D1	D2	D3	D4	D5	D6
P1	14000	0	8000	0	0	0
P2	0	10000	0	0	0	0
P3	0	0	0	0	0	0
P4	0	0	0	0	0	0
P5	0	0	0	0	0	0
P6	0	0	0	0	0	0
P7	0	0	0	12000	0	0
P8	0	0	0	0	0	0
P9	0	0	0	0	10000	9000
P10	0	0	0	0	0	0

Variables de localización:
x(1) = 1
x(2) = 1
x(3) = 0
x(4) = 0
x(5) = 0
x(6) = 0
x(7) = 1
x(8) = 0
x(9) = 1
x(10) = 0

Es decir, las plantas se localizarán en P1, P2, P7 y P9.
P1 sirve la demanda total de los centros de distribución D1 y D3.
P2 solo sirve la demanda a D2 y P7 solo a D4.
La Planta P9 sirve la demanda tanto a D5 como a D6.

Para ver en detalle la formulación del modelo, ver Anexo II.

3.2.2.- FLUJO EN REDES CON COSTOS FIJOS.

El modelo de de flujo en redes con costos fijos (FCNP) es un caso especialmente importante del modelo general de costes fijos, con el cual pueden modelizarse diferentes problemas de diseño de redes.

En estos problemas se tiene un grafo dirigido G = (N,A), con N = {1, . . . , n} un conjunto de nodos y A un conjunto de arcos, donde cada arco corresponde a un par (i, j) de nodos $i, j \in N$.

Asociado a cada arco (i, j) existen:

Una variable de flujo con valores $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ donde u_{ij} es una cota superior del flujo asociado al arco (i, j)
Y una variable binaria $y_{ij} \in \{0,1\}$, que vale 1 cuando se 'usa' el arco (i, j), es decir, cuando xij > 0. Para que se cumpla esta relación entre ambas variables, es necesario que estén presentes las restricciones:

$$x_{ij} \leq u_{ij} y_{ij}$$

Así cuando $x_{ij} > 0$, necesariamente $y_{ij} = 1$. Las variables $\boldsymbol{y_{ij}}$ **son las variables de diseño,** pues son las que dan la configuración o el diseño final de la red. Éstas, tienen asociado en la función objetivo **un coste fijo $\boldsymbol{f_{ij}}$** (costo de construcción del tramo, costo de mantenimiento de la ruta, etc).

En algunas ocasiones, las variables de flujo x_{ij} tienen asociado **un costo variable $\boldsymbol{c_{ij}}$,** como puede ser el costo de transporte por unidad de flujo. En problemas de diseño puro, estas variables serán sólo auxiliares y no tienen asociado ningún costo.

Las restricciones del problema corresponden a las ecuaciones de balance o de conservación del flujo de redes (ecuaciones de Kirchoff). Así, para cada nodo $i \in N$se tiene la oferta o demanda de el nodo es $\boldsymbol{b_i}$ (si es positiva es un nodo de oferta, y si es negativa es un nodo de demanda).

El modelo completo es el siguiente modelo de Redes con Costos Fijos:

Minimizar $\sum_{(i,j) \in A} (f_{ij} y_{ij} + c_{ij} x_{ij})$ (1)

Sujeto a

$\sum_j x_{ij} \; - \; \sum_j x_{ji} \; = \; b_i \quad i \in N$ (2)

$x_{ij} \; \leq \; u_{ij} \, y_{ij} \quad (i,j) \in A$ (3)

$x_{ij} \; \geq \; 0 \quad (i,j) \in A$ (4)

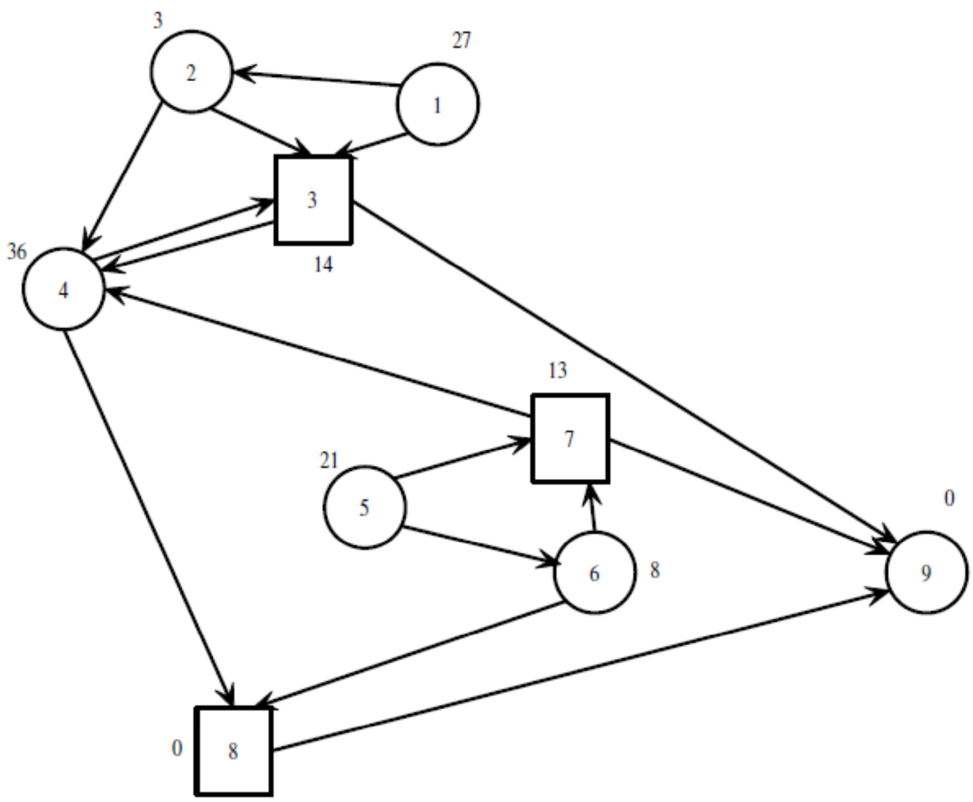
$y_{ij} \; \in \; \{0, 1\}$ (i, j) $\in A$ (5)

En este caso, cada arco $(i,j) \in A$ tiene una variable de flujo $x_{ij} \; \geq \; 0$ y una variable binaria auxiliar $y_{ij} \; \in \; \{0, 1\}$ indicando si se usa o no el arco. Se supone que la red está balanceada, es decir que $\sum_{i \in N} b_i \; = 0.$

Este tipo de modelo ha sido ampliamente utilizado para el diseño de redes de telecomunicaciones y otras redes de distribución de elec tricidad, agua, gas, etc.
El costo fijo indica el costo de construcción del tramo correspondiente, mientras que el costo variable es el costo por unidad de flujo.

APLICACIÓN:

Se está diseñando una red para la evacuación y tratamiento de las aguas residuales de una ciudad y todas las zonas de población adyacentes. En el grafo de la figura adjunta se representan las unidades de población (en los nodos), y los posibles tramos:



En este grafo, los nodos con un cuadrado indican las posibles plantas de tratamiento, y el nodo 9 final representa el punto de vertido de todas las aguas ya depuradas. El coste de estas plantas está incluido en el coste fijo del arco hasta el nodo final 9. En la siguiente tabla se dan los costos fijos y variables de cada tramo:

Arco	Costo fijo	Costo Variable
(1, 2)	240	21
(1. 3)	350	30
(2. 3)	200	22
(2, 4)	750	58
(3, 4)	610	43
(3, 9)	3800	1
(4, 3)	1850	49
(4, 8)	780	63
(5, 6)	620	44
(5, 7)	800	51
(6, 7)	500	56
(6, 8)	630	94
(7, 4)	1120	82
(7, 9)	3800	1
(8, 9)	2500	2

Los costos fijos corresponden fundamentalmente a los costos de expropiación y de apertura de zanjas, mientras que los costos variables dependen mucho de la pendiente de cada tramo y la necesidad o no de bombeo.

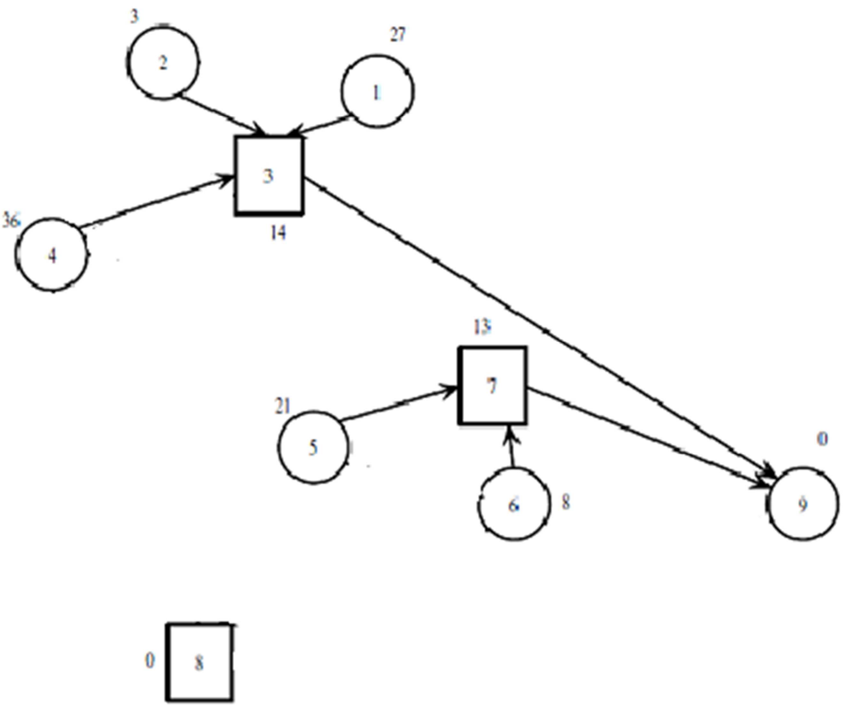
Para construir el modelo de Redes con costos fijos, primero calculamos la demanda total, que es D= 122, e introducimos la demanda en el nodo 9, con $d_9 = -122$ *y en el resto de nodos con la demanda real. De esta forma tenemos la red balanceada. Para completar el modelo faltaría poner las cotas, para ellos podemos poner como cota general* u_{ij} *= 122 o bien cotas específicas para cada arco como por ejemplo* u_{12}*= 27,* u_{13}*= 27.*

Se implementa el modelo en Mosel y se resuelve con Xpress Ive, siendo la solución obtenida:

Costo total = 15581
Costo fijo = 11300
Costo variable = 4281

Variables de flujo	Variables de diseño			
x(1,2) = 0	y(1,1) = 0	y(3,4) = 0	y(5,7) = 1	y(8,1) = 0
x(1,3) = 27	y(1,2) = 0	y(3,5) = 0	y(5,8) = 0	y(8,2) = 0
x(2,3) = 3	y(1,3) = 1	y(3,6) = 0	y(5,9) = 0	y(8,3) = 0
x(2,4) = 0	y(1,4) = 0	y(3,7) = 0	y(6,1) = 0	y(8,4) = 0
x(3,4) = 0	y(1,5) = 0	y(3,8) = 0	y(6,2) = 0	y(8,5) = 0
x(3,9) = 80	y(1,6) = 0	y(3,9) = 1	y(6,3) = 0	y(8,6) = 0
x(4,3) = 36	y(1,7) = 0	y(4,1) = 0	y(6,4) = 0	y(8,7) = 0
x(4,8) = 0	y(1,8) = 0	y(4,2) = 0	y(6,5) = 0	y(8,8) = 0
x(5,6) = 0	y(1,9) = 0	y(4,3) = 1	y(6,6) = 0	y(8,9) = 0
x(5,7) = 21	y(2,1) = 0	y(4,4) = 0	y(6,7) = 1	y(9,1) = 0
x(6,7) = 8	y(2,2) = 0	y(4,5) = 0	y(6,8) = 0	y(9,2) = 0
x(6,8) = 0	y(2,3) = 1	y(4,6) = 0	y(6,9) = 0	y(9,3) = 0
x(7,4) = 0	y(2,4) = 0	y(4,7) = 0	y(7,1) = 0	y(9,4) = 0
x(7,9) = 42	y(2,5) = 0	y(4,8) = 0	y(7,2) = 0	y(9,5) = 0
x(8,9) = 0	y(2,6) = 0	y(4,9) = 0	y(7,3) = 0	y(9,6) = 0
	y(2,7) = 0	y(5,1) = 0	y(7,4) = 0	y(9,7) = 0
	y(2,8) = 0	y(5,2) = 0	y(7,5) = 0	y(9,8) = 0
	y(2,9) = 0	y(5,3) = 0	y(7,6) = 0	y(9,9) = 0
	y(3,1) = 0	y(5,4) = 0	y(7,7) = 0	y(9,9) = 0
	y(3,2) = 0	y(5,5) = 0	y(7,8) = 0	
	y(3,3) = 0	y(5,6) = 0	y(7,9) = 1	

La red obtenida es la siguiente:



Puede visualizarse la formulación del modelo completo en el Anexo III.

3.2.3.- FLUJO EN REDES MULTIPRODUCTO.

Es una generalización del problema anterior. En este caso, también habrá que decidir qué arcos usar y cómo transportar la mercancía por los arcos seleccionados, la diferencia es que existirán p productos, siendo el índice de productos:
$k = 1, \dots., p$

Sea x_{ij}^{k} el flujo de producto k que pasa por el arco (i, j) $\forall\ (i,j) \in A, k\ \in K$

Sea y_{ij} variable binaria cuyo valor será 1, en caso de usarse el arco (i, j) y 0 en caso contrario.

Sea c_{ij}^{k} el coste de transportar una unidad del producto k, por el arco (i, j)

u_{ij}^{k} es la capacidad del arco (i, j) para el producto k
u_{ij} es la capacidad total del arco (i, j)

Asociado a cada arco (i, j) existirá un costo fijo f_{ij} (costo de construcción del tramo, costo de mantenimiento de la ruta, etc).

Así, para cada nodo $i \in N$se tiene la oferta o demanda de el nodo es b_{i}^{k} para el producto k (si es positiva es un nodo de oferta, si es negativa es un nodo de demanda y si es igual a cero será un nodo de tránsito).

El modelo completo sería:

Minimizar $\sum_{k\ \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k}\ \ \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij}$ (1)

Sujeto a:

$\sum_{j\ \in N; (i,j) \in A} x_{ij}^{k} - \sum_{j\ \in N; (j,i) \in A} x_{ji}^{k} = b_{i}^{k} \quad \forall\ i\ \in N;\ \forall\ k\ \in K$ (2)

$x_{ij}^{k} \leq u_{ij}^{k} \quad (i,j) \in A, k\ \in K$ (3)

$\sum_{k\ \in K} x_{ij}^{k} \leq u_{ij} y_{ij} \quad (i,j) \in A$ (4)

$x_{ij}^{k} \geq 0 \quad (i,j) \in A, k\ \in K$ (5)

$y_{ij} \in \{0, 1\}\ (i,j) \in A$ (6)

La función objetivo establece obtener el costo total mínimo.
La restricción número (2) es la ecuación de conservación del flujo para cada vértice i y cada producto k.
La restricción número (3) establece que el flujo de cada producto no puede ser superior a la capacidad de cada arco (i, j) en el producto k.

La restricción (4) nos indica que para cada arco (i, j) el flujo total será cero si el arco no se usa, y no superior a la capacidad del arco en caso contrario.

En la práctica, se pueden incluir restricciones adicionales, por ejemplo, en el caso de que los arcos compartan un recurso común (H), se añadiría la restricción lineal:

$$\sum_{(i,j)\in A} h_{ij} y_{ij} \leq H$$

donde h_{ij} es el consumo del recurso H debido al arco (i, j)

Veamos a continuación un caso particular, llamado PROBLEMA DE DISEÑO DE REDES CON COSTE LINEAR FIJO., en el que los costes de transporte por unidad de flujo c_{ij}^k son constantes, por tanto la función objetivo es lineal.

El modelo completo sería:

Minimizar $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^k x_{ij}^k \;\; \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij}$ (7)

Sujeto a:

$\sum_{j \in N;(i,j)\in A} x_{ij}^k - \sum_{j \in N;(j,i)\in A} x_{ji}^k = b_i^k \quad \forall\ i \in N;\ \forall\ k \in K$ (8)

$x_{ij}^k \leq u_{ij}^k \quad (i,j) \in A, k \in K$ (9)

$\sum_{k \in K} x_{ij}^k \leq u_{ij} y_{ij} \quad (i,j) \in A$ (10)

$x_{ij}^k \geq 0 \quad (i,j) \in A, k \in K$ (11)

$y_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A$ (12)

Este modelo se puede resolver, con un esfuerzo considerable mediante los algoritmos “branch and bound “, para ejemplos con unos cientos de arcos y decenas de productos. Dado que los casos que serán de aplicación tendrán mayor número de arcos y productos, habitualmente se usan las heurísticas. Para evaluar si la solución obtenida mediante heurísticas es útil obtener límites inferiores de la solución óptima. Veamos a continuación dos tipos de relajación de continuidad y una heurística simple para ilustrar esto.

Relajación Débil.

La relajación débil se obtiene relajando los requisitos de integridad de las variables de diseño.

Minimizar $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^k x_{ij}^k \;\; \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij}$ (13)

Sujeto a:

$\sum_{j \in N;(i,j) \in A} x_{ij}^k - \sum_{j \in N;(j,i) \in A} x_{ji}^k = b_i^k \quad \forall \; i \in N; \; \forall \, k \in K$ (14)

$x_{ij}^k \leq u_{ij}^k \quad (i,j) \in A, k \in K$ (15)

$\sum_{k \in K} x_{ij}^k \leq u_{ij} y_{ij} \quad (i,j) \in A$ (16)

$x_{ij}^k \geq 0 \quad (i,j) \in A, k \in K$ (17)

$0 \leq y_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in A$ (18)

Es fácil verificar que cada solución óptima de esta relajación satisface cada restricción (16) como igualdad, ya que cada coste fijo f_{ij} es no negativo. Por tanto, las variables de diseño y_{ij} pueden expresarse en función de las variables de flujo x_{ij}^k como:

$y_{ij} = \sum_{k \in K} x_{ij}^k / u_{ij}$

Por tanto, la restricción (16) puede reemplazarse por esta otra:

$\sum_{k \in K} x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad (i,j) \in A$

Por tanto el problema relajado, puede formularse de forma equivalente como sigue:

Minimizar $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^k + f_{ij} / u_{ij}) x_{ij}^k$ (19)
Sujeto a:

$\sum_{j \in N;(i,j) \in A} x_{ij}^k - \sum_{j \in N;(j,i) \in A} x_{ji}^k = b_i^k \quad \forall \; i \in N; \; \forall \, k \in K$ (20)

$x_{ij}^k \leq u_{ij}^k \quad (i,j) \in A, k \in K$ (21)

$\sum_{k \in K} x_{ij}^k \leq u_{ij} \quad (i,j) \in A$ (22)

$x_{ij}^k \geq 0 \quad (i,j) \in A, k \in K$ (23)

Llamaremos LB_w^* al límite inferior de la función objetivo dado por la resolución del problema de la relajación débil.

Relajación Fuerte.

Se obtiene añadiendo la desigualdad:

$x_{ij}^{k} \leq u_{ij}^{k} y_{ij} \ \ (i,j) \in A, k \in K$

Y eliminando la restricción de integridad de las variables de diseño, teniendo en cuenta, que el modelo está dominado por la desigualdad anterior, y por tanto, puede ser eliminada.

Así, el problema quedaría:

Minimizar $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k} \ \ \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij}$ (24)

Sujeto a:

$\sum_{j \in N;(i,j) \in A} x_{ij}^{k} - \sum_{j \in N;(j,i) \in A} x_{ij}^{k} = b_{i}^{k} \quad \forall\ i \in N;\ \forall\ k \in K$ (25)

$x_{ij}^{k} \leq u_{ij}^{k} y_{ij} \ \ (i,j) \in A, k \in K$ (26)

$\sum_{k \in K} x_{ij}^{k} \leq u_{ij} y_{ij} \ \ (i,j) \in A$ (27)

$x_{ij}^{k} \geq 0 \ \ (i,j) \in A, k \in K$ (28)

$0 \leq y_{ij} \leq 1 \ \ (i,j) \in A$ (29)

Llamaremos LB_{S}^{*} al límite inferior de la función objetivo dado por la resolución del problema de la relajación fuerte.

Comparando ambos LB_{W}^{*} y LB_{S}^{*}, se tiene que el límite de la relajación fuerte es siempre mejor que el de la relajación débil, es decir:

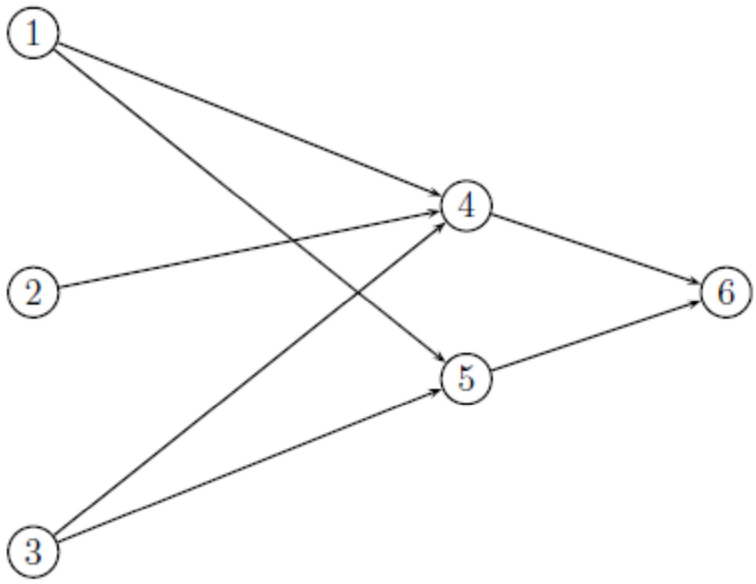
$LB_{S}^{*} \geq LB_{W}^{*}$

Estudios computacionales han probado que LB_{W}^{*} puede ser a lo sumo un 40% inferior que LB_{S}^{*}

Resaltar que cualquiera de las dos formulaciones (la fuerte y la débil) son formulaciones válidas, es decir, con cualquiera de las dos se llega al mismo valor óptimo. La diferencia entre ellas es que la relajación fuerte tiene muchas más restricciones que la débil (esto parece una desventaja), pero produce una relajación lineal con valor muy cercano al óptimo, de forma que en la fase de branch and bound se necesita examinar muchos menos nodos. Como resultado final, aunque la formulación fuerte tenga muchas más restricciones, se encuentra el óptimo entero antes que con la relajación débil.

APLICACIÓN:

El siguiente grafo representa la red de distribución de Avis, una compañía de productos avícolas, que distribuye 4 productos.



Los nodos 1, 2 y 3 corresponden a tres granjas de producción, 4 y 5 corresponden a dos almacenes intermedios y el nodo 6 al punto de distribución final. En la siguiente tabla se dan los costes de transporte de cada producto en cada tramo, y el coste fijo anual de mantenimiento asociado a cada tramo.

tramo	p1	p2	p3	p4	costo fijo
(1, 4)	20	15	17	22	100
(2, 4)	15	15	15	30	75
(3, 4)	30	30	10	10	100
(1, 5)	30	25	27	22	150
(3, 5)	10	9	11	10	75
(4, 6)	75	75	75	75	200
(5, 6)	80	80	80	80	20

Por otro lado, las ofertas anuales de las granjas y la demanda anual el punto 6 son las siguientes (en decenas de toneladas)

punto	p1	p2	p3	p4
1	100	100	40	
2	100	200	50	50
3	40	100	75	100
6	150	200	50	75

Con estos datos, se trata de encontrar la red de distribución con costo total mínimo.

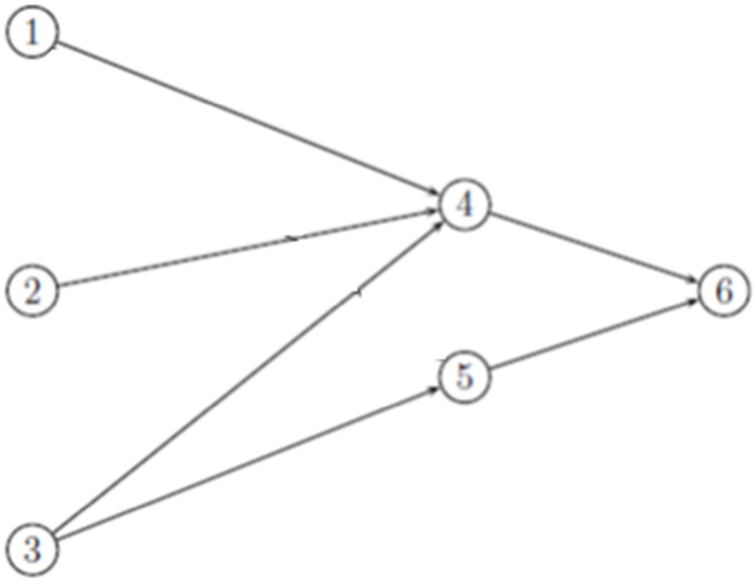
Se implementa el modelo en Mosel y se resuelve con Xpress Ive, siendo la solución obtenida:

Costo total = 42.825

Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4	Red de distribución, arcos en uso:
x(1,4,1) = 10	x(1,7,2) = 100	x(1,7,3) = 40	x(2,7,4) = 50	
x(1,7,1) = 90	x(2,4,2) = 100	x(2,7,3) = 50	x(3,4,4) = 75	1->4
x(2,4,1) = 100	x(2,7,2) = 100	x(3,4,3) = 50	x(3,7,4) = 25	1->7
x(3,5,1) = 40	x(3,5,2) = 100	x(3,7,3) = 25	x(4,6,4) = 75	2->4
x(4,6,1) = 110	x(4,6,2) = 100	x(4,6,3) = 50		2->7
x(5,6,1) = 40	x(5,6,2) = 100			3->4
				3->5
				3->7
				4->6
				5->6

Para balancear la red hemos incluido el nodo 7, de forma que la demanda en este punto es el exceso de oferta.
La solución obtenida, ha de interpretarse teniendo en cuenta esto. Así, por ejemplo, en el producto 1 la cantidad total de producto que pasa por el arco (1, 4) es 10 decenas de toneladas, y por el arco ficticio (1, 7) pasarían 90 decenas de toneladas, lo cual nos indica que en el punto 1 se oferta un exceso de 90 d.ton del producto 1.

El diseño de la red sería el siguiente:



Para más detalle de la formulación del modelo, ver Anexo IV.

APLICACIÓN:

FHL es una compañía Austriaca de transportes localizada en Lienz, cuyo principal negocio es el transporte de paquetes de pequeño tamaño y productos refrigerados de alto valor (como reactivos químicos usados por hospitales y laboratorios) Los bienes son recogidos desde los almacenes de los fabricantes en pequeñas furgonetas y llevados al centro de transporte más próximo operado por la compañía. Estos bienes son empaquetados en pallets y transportados a terminales de destino por medio de grandes camiones. Una vez que la mercancía es descargada y entregada a los clientes mediante pequeñas furgonetas (del mismo tipo que las que se emplean para la recogida)

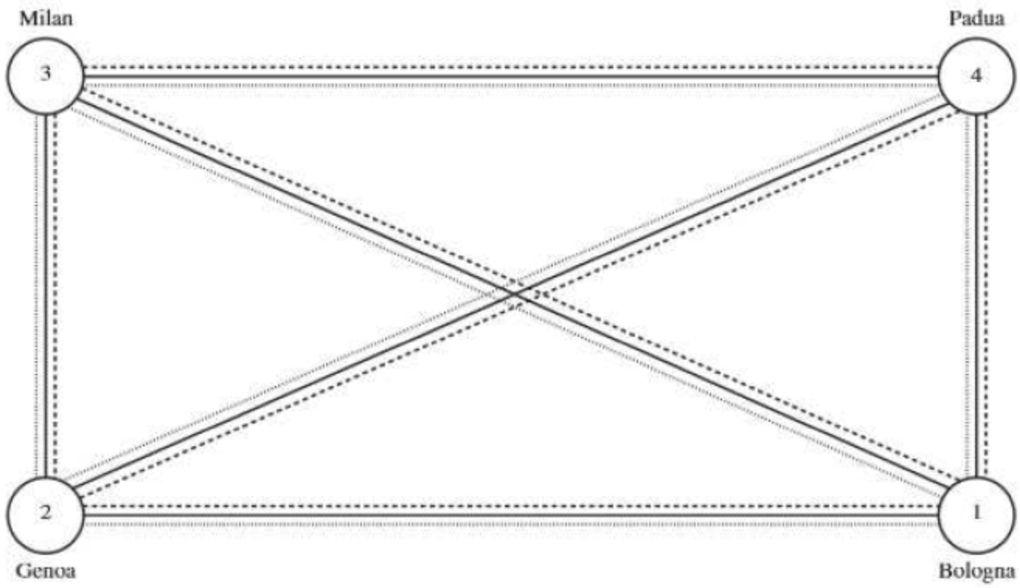
Con objeto de no realizar grandes inversiones de capital en equipamiento, FHL hace uso de un modo de alquiler de camiones. Recientemente, la compañía ha decidido entrar en el mercado italiano del transporte rápido abriendo cuatro terminales en las ciudades de Bologna, Genoa, Padua y Milán. Esta decisión hace necesaria una revisión completa de la red de servicios. La decisión se complicó por la necesidad de transportar los bienes refrigerados en vehículos especialmente equipados con frigoríficos, mientras que los paquetes pueden transportarse mediante cualquier tipo de vehículo.

Véase a continuación las demandas estimadas de ambos tipos de productos:

	Demanda estimada de bienes refrigerados (pallets/día)			
	Bologna	**Genoa**	**Milán**	**Padua**
Bologna		3	8	2
Genoa	0		1	2
Milán	4	2		1
Padua	3	1	1	

	Demanda estimada de bienes a temperatura ambiente (pallets/día)			
	Bologna	**Genoa**	**Milán**	**Padua**
Bologna		3	4	2
Genoa	1		1	0
Milán	6	2		2
Padua	1	1	1	

Entre cada par de terminales, la compañía puede operar una o más líneas (ver figura siguiente)



Nota: se dibuja un solo borde para cada par de arcos opuestos.

Los vehículos son de dos tipos:

- *Camiones con compartimentos refrigerados, con una capacidad de 12 pallets y un costo total (incluyendo todos los costos) de 0,4 EUR/Km.*
- *Camiones con compartimentos a temperatura ambiente, con capacidad de 18 pallets y un coste (incluyendo todos los cargos) de 0,5 EUR/Km.*

Adicionalmente, la compañía considera la posibilidad de transportar los bienes a temperatura ambiente a través de otra compañía de transportes, pagando 0,1 EUR/Km por cada pallet.

Las distancias entre terminales pueden verse en la siguiente tabla.

	Distancias entre terminales			
	Bologna	**Genoa**	**Milán**	**Padua**
Bologna	0	225	115	292
Genoa	225	0	226	166
Milán	115	226	0	362
Padua	292	166	362	0

El modelo de diseño de costo mínimo puede formularse como un problema de diseño de redes con coste linear fijo para k= 22 productos (uno por cada combinación de pares origen-destino con demanda positiva y un tipo de producto)

Llamamos A_1 y A_2 al conjunto de líneas operadas por medio de los camiones con capacidad de 12 pallets y 18 respectivamente, y llamamos A_3 al conjunto de líneas operadas por el proveedor de transporte externo. Los parámetros de los arcos serán:

$$c_{ij}^{k} = 0 \ \ (i,j) \epsilon \ A_1 \, , k \ \in K$$

$$f_{ij} = 0{,}4 \ \ d_{ij}, (i,j) \in \ A_1$$

$$u_{ij} = 12 \ \ (i,j) \in \ A_1$$

$$c_{ij}^{k} = 0 \ \ (i,j) \epsilon \ A_2 \, , k \ \in K$$

$$f_{ij} = 0{,}5 \ \ d_{ij}, (i,j) \in \ A_2$$

$$u_{ij} = 18 \ \ (i,j) \in \ A_2$$

$$c_{ij}^{k} = 0{,}1 \, d_{ij} \ (i,j) \epsilon \ A_3 \, , k \ \in K$$

$$f_{ij} = 0 \ \ (i,j) \in \ A_3$$

$$u_{ij} = 0 \ \ (i,j) \in \ A_3$$

Donde d_{ij} es la distancia entre el terminal i y el j.

El modelo se formularía como sigue:

Minimizar $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k} + \sum_{(i,j) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3} f_{ij} y_{ij}$

Sujeto a:

$\sum_{j \in N; (i,j) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3} x_{ij}^{k} - \sum_{j \in N; (j,i) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3} x_{ij}^{k} = b_i^k \qquad \forall \ i \ \in N; \ \forall \, k \ \in K$

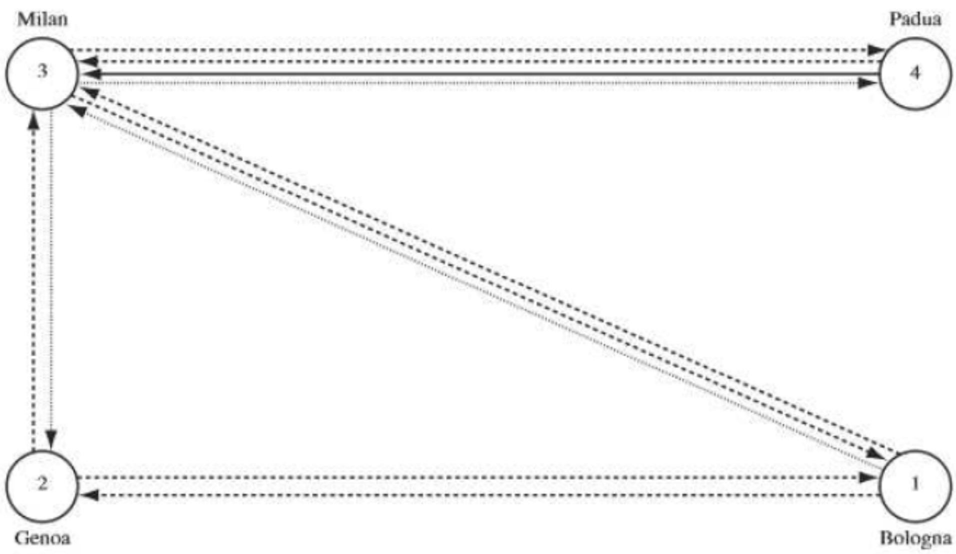
$x_{ij}^{k} \ \leq \ u_{ij}^{k} \ \ (i,j) \in A_1 \cup \ A_2 \cup A_3, k \ \in K$

$\sum_{k \in K} x_{ij}^{k} \leq u_{ij} y_{ij} \quad (i,j) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$x_{ij}^{k} \geq 0 \quad (i,j) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3, k \in K$

$y_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$

La relajación fuerte da un límite inferior LB_S^*= 534.60 EUR/día. Un algoritmo branch and bound basado en la relajación fuerte, examinó un total de 696 nodos para llegar a la solución óptima. La solución de menor coste es de 886,70 EUR/día, siendo la red óptima la del gráfico siguiente. En ésta, se operan 7 líneas mediante camiones con capacidad para 12 pallets, mientras que una sola línea es operada por un camión con capacidad para 18 pallets (que va desde Bologna a Milán con 5 pallets de paquetes) El número de pallets transportados entre cada par de terminales por medio de camiones de capacidad 12 y por proveedores externos. Estos datos pueden verse en:



	Nº de pallets de bienes a temperatura ambiente /nº pallets de bienes refriegerados mediante camiones de capacidad 12 pallets.			
	Bologna	**Genoa**	**Milán**	**Padua**
Bologna		4/8		4/8
Genoa	0/7		2/10	
Milán		5/7		
Padua	8/3	4/5		

Nº de pallets de bienes a temperatura ambiente /nº pallets de bienes refriegerados mediante transporte externo

	Bologna	Genoa	Milán	Padua
Bologna		1/0		
Genoa			4/0	9/0
Milán				
Padua				

3.2.4.- SISTEMAS DE DISTRIBUCIÓN EN DOS ETAPAS.

En el mundo real, la empresa no sólo se encuentra con el problema de múltiples demandas, sino que también producen múltiples productos. Un ejemplo claro puede ser el de las fábricas de coches, las cuales producen varios modelos de coches en distintas fábricas, teniendo en muchos casos los puntos de demanda lejos y realizando un primer transporte a los almacenes y un segundo transporte a dichos puntos de demanda.

Hay tres problemas principales en este tipo de sistemas:

- Cuántos almacenes tener
- Dónde localizarlos
- Cómo transportar los productos en el sistema

La siguiente figura muestra el funcionamiento de un sistema de dos etapas:

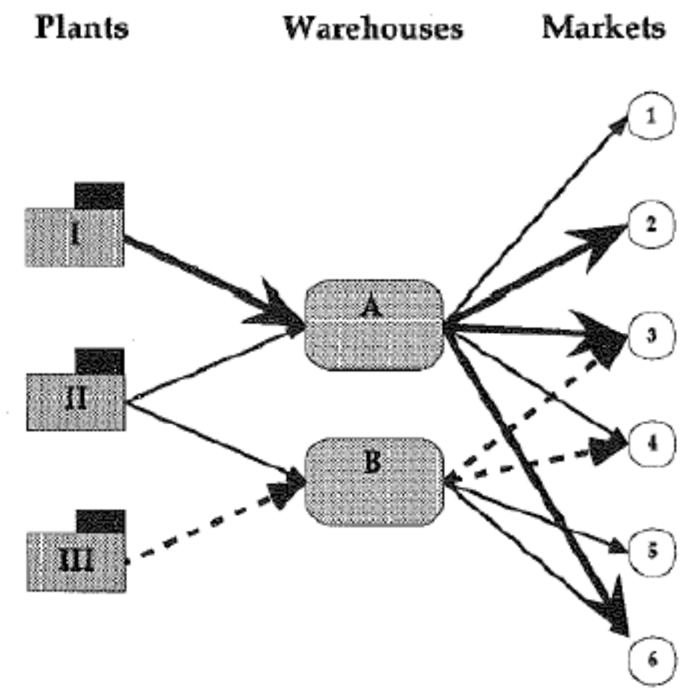


Figura: Esquema de un sistema de producción/distribución (Daskin, 1995)

Como se puede observar en la figura, la planta de producción 0 envía su producción al almacén A, la planta 2 lo hace a los almacenes A y B, y la planta 3 lo envía al B.

Después, dependiendo de la demanda de cada nodo, desde los almacenes se envían las producciones a los puntos de demanda en una segunda etapa del sistema de distribución.

La formulación del modelo es la siguiente:

Entradas:

h_i^k Demanda del producto k en el mercado i

f_j Costo de localizar el almacén candidato j

c_{ijm}^k Costo de producir una unidad del producto k en la planta m y transportarlo al mercado i a través del almacén j

S_m^k Capacidad de la planta m de producción del producto k.

M Un número muy grande

Variables de decisión:

Y_{ijm}^k Flujo del producto k desde la planta m al mercado i a través del almacén j

X_j Variable binaria con valor 1 si localizamos un almacén en la localización candidata j, y 0 en caso contrario.

Formulación del problema

Minimizar $\sum_j f_j X_j + \sum_i \sum_j \sum_m \sum_k c_{ijm}^k Y_{ijm}^k$ (1)

Sujeto a:

$\sum_i \sum_m \sum_k Y_{ijm}^k \leq MX_j \quad \forall\ j$ (2)

$\sum_j \sum_m Y_{ijm}^k \geq h_i^k \quad \forall\ i, k$ (3)

$\sum_i \sum_j Y_{ijm}^k \leq S_m^k \quad \forall\ m, k$ (4)

$Y_{ijm}^k \geq 0 \quad \forall\, i, j, m, k$ (5)

$X_j \in \{0, 1\} \ \forall\ j$ (6)

La función objetivo minimiza la suma de los costes fijos de la localización de almacenes y de los costes variables.

En la variable c_{ijm}^{k} se incorporan una gran cantidad de componentes, los cuales son: los costes unitarios de producción en la planta m, el coste unitario de transporte de la planta m al almacén candidato j, los costes variables de almacenamiento en el almacén candidato j y los costes de transporte entre el almacén candidato j y el mercado i.

Respecto a la primera restricción (2), la variable Y_{ijm}^{k} representa el flujo que atraviesa el almacén j. Por lo que esta restricción establece que este flujo sólo puede ser positivo si se localiza un almacén en la localización candidata j.

Respecto a la restricción (3), establece que la cantidad total del producto k que se transporta al mercado i desde todas las instalaciones, debe ser mayor o igual a la demanda del producto k en el mercado i.

Restricción (4), establece que la cantidad total del producto k que se transporta al mercado i desde todas las instalaciones debe ser menor o igual a la capacidad de la planta m del producto k.

Las otras dos restricciones son las de no negatividad (5) y la restricción de integridad (6)

4.- APLICACIÓN: ANÁLISIS DE LOCALIZACIÓN PARA LA GESTIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS EN LA REGIÓN CENTRAL DE PORTUGAL

4.1.- INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

Desde 1974 a 1993 la Región Central de Portugal (ver fig. 1), así como el resto del país, estaba experimentando intensos cambios políticos, económicos y sociales.

En 1970 Portugal aún era una sociedad mayormente rural. En esos tiempos, más del 30% de la población trabajaba en el sector de la agricultura, y las dos únicas ciudades con más de 100.000 habitantes (Lisboa y Oporto) generaban cantidades importante de residuos sólidos urbanos (MSW: Municipal Solid Waste). No obstante, incluso en esas ciudades, las cantidades de MSW producidas eran significativamente inferiores en comparación con las cantidades producidas en países más desarrollados.

Fig. 1: La región Central de Portugal ocupa 23.700 Km cuadrados. Está localizada entre el Océano Atlántico y la frontera con España. Está dividida en 78 municipios. El último censo de 1991 reportó una población de 1.714.000 habitantes, distribuidos uniformemente por toda la región. La población de la ciudad más poblada, es Coimbra y su área metropolitana, con 140.000 habitantes.

Dos décadas después, en 1991, el porcentaje de población dedicada a la agricultura, había disminuido a un 10%, y la generación de residuos sólidos urbanos (MSW) podría describirse como sigue (basándose en datos disponibles más bien inexactos):

1.- La media per cápita de MSW variaba desde 0,8 Kg al día en municipios con más de 60.000 habitantes, 0,65 Kg al día en municipios entre 30.000 y 60.000 habitantes y 0,5 Kg al día en pequeños municipios (ver Fig. 2)

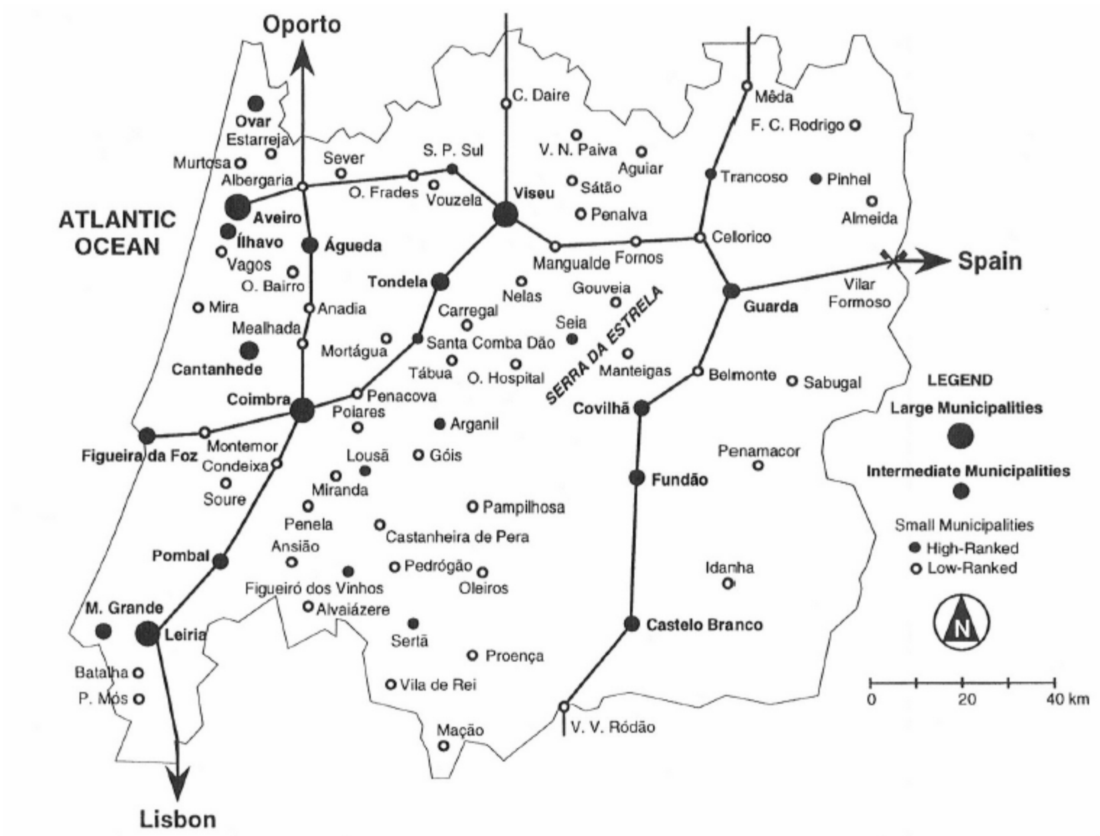


Fig. 2: las ciudades más grandes de la Región Central de Portugal están localizadas a lo largo de las carreteras portuguesas más importantes IP1(Lisboa- Oporto) e IP5 (Aveiro-Vilar Formoso) Este último pasa por el Norte de Serra da Estrela, el pico más alto de Portugal (2.ooo m) un excepcional Parque Natural que no debe ser atravesado por los vehículos de recolección de basura ni por los camiones de las estaciones de transferencia. Los municipios pequeños que se clasificaron como de “alto rango” fueron seleccionados por la Administración para recibir importantes beneficios a través de instalaciones públicas.

2.- Tasas de crecimiento iguales al 1,75% al año, en media, en municipios grandes, intermedios y pequeños.

Durante los años ochenta, las autoridades a nivel central y local empezaron a ser conscientes del problema de los residuos sólidos urbanos, y a principios de los noventa era claro que el problema era serio en casi todas las zonas del país.

Inicialmente, el esfuerzo de las autoridades se basó en adquirir modernas flotas de vehículos de recogida de basura. En 1991, el 90% de los hogares estaban cubiertos por servicios de recogida. Además, varios municipios recogían cristal, papel y otros materiales reciclables de manera separada.

Los municipios no prestaban tanta atención a la eliminación de los residuos. Habitualmente, disponían los mismos en vertederos al aire libre, donde la basura se quemaba de vez en cuando. La eliminación de basura a través de este método está reconocido como el peor método de eliminación posible.

Algunos municipios empezaron a ser conscientes de la necesidad de otro tipo de solución, por ello acudieron a soluciones dadas por los mismos vendedores de equipamiento de MSW. Estas soluciones habitualmente requerían de una capacidad financiero muy superior a la de los municipios.

De hecho, los municipios pronto comprendieron que no podrían conseguir los medios financieros necesarios y acudieron a las autoridades gubernamentales, de forma más precisa, a las Agencias de Coordinación Regionales.

Estas agencias, que administran el dinero del gobierno para promover el desarrollo local, se encontraron con una situación complicada de resolver, estando bajo la presión de los municipios, loso medios de comunicación y los ecologistas, sin tener una idea clara y global sobre lo que hacer y cuándo hacerlo.

Se solicitó a Antonio P. Antunes que realizara un estudio para la Agencia de Coordinación Central, con el propósito de aclarar la toma de decisiones para todas las partes y producir una solución al problema de la gestión de residuos sólidos urbanos. Esta solución serviría como punto de partida para futuras negociaciones. No entraba dentro del alcance la gestión de residuos peligrosos como los generados por hospitales, para los que el gobierno estaba trabajando en una solución específica.

4.2.- VISIÓN GENERAL DEL PROCESO DE GESTIÓN DE RESIDUOS SÓLIDOS URBANOS.

Para dar una solución al problema de la gestión de residuos sólidos urbanos, es fundamental tener una visión clara del proceso, es decir, de cada una de las fases desde que se genera el residuo hasta que se eliminan, preferiblemente en vertederos sanitarios. Existen numerosos textos que hacen referencia a esta materia, cuyas ideas principales pueden resumirse como sigue:

1.- El proceso de gestión incluye cuatro etapas básicas: generación, recogida, reducción y eliminación.

2.- Las acciones más eficientes para reducir la cantidad de residuos y separar los componentes se producen en la etapa de generación; sin embargo, después de ésta, siempre habrá una cantidad considerable de residuos a recoger y eliminar.

3.- El proceso de gestión no será adecuado si el destino final no es un vertedero sanitario, construido y gestionado según la normativa aplicable.

4.- Entre las etapas de recogida y eliminación, se realizan otros procesos con objeto de disminuir el espacio necesario para almacenar los residuos. Estas técnicas son la separación, compostaje y la incineración.

5.- Para reducir el espacio, la incineración y la compactación son las más efectivas, de tal forma que reducen los residuos a un 10 y 25% respectivamente de su volumen inicial. El compostaje es menos efectivo, y se aplica solo a la basura orgánica (menos del 40% de los residuos generados, y este porcentaje tiende a ser inferior con el tiempo) La separación se usa para recuperar las partes metálicas de los residuos y se usa normalmente con la incineración y compostaje. Una vez que la basura es recogida, es demasiado tarde para separar el cristal, papel, cartón, plástico y textiles debido a la contaminación que surgen durante la recogida.

6.- Aunque la incineración es la manera más efectiva de reducir el volumen de los residuos, desde un punto de vista económico y seguridad medioambiental no es una solución adecuada, salvo en casos severos de no disponibilidad de espacio. Los costos fijos de los incineradores son muy altos comparados con el coste de los vertederos, y la diferencia no se compensa por costos de operación más bajos.

7.- La compactación no es tan efectiva como la incineración, pero tiene la ventaja de que el equipamiento a utilizar es más económico. Resulta bastante interesante cuando las instalaciones están cerca de las fuentes de generación, ya que se reduce los costes de transporte en un 30% respecto a los costes de transportar residuos sin compactar. Los municipios pueden gestionar la compactación en una “estación de transferencia”, una instalación que recoge los residuos desde los vehículos de recogida, en estas estaciones se compactan fuertemente y se envían mediante camiones a otros destinos. Una camión puede transportar hasta 30 toneladas de basura diariamente en una distancia de 100 Km ida (200 Km ida y vuelta) pasando también el tiempo necesario para las operaciones de carga y descarga de residuos.

4.3.- PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA.

Para resolver el problema de Gestión de Residuos Sólidos Urbanos en la Región Central de Portugal, se formuló un marco general basándose en las siguientes ideas:

1.- Es en la etapa de Generación donde se han de reducir las cantidades de residuos generadas, antes del proceso de recogida.

2.- Usar las operaciones de compactación en las Estaciones de Transferencia para reducir el volumen de los residuos después de la etapa de recogida.

3.- No usar operaciones de separación, incineración y compostaje (en el caso del compostaje la decisión se tomó debido experiencias no satisfactorias en el pasado)

4.- Definir dos niveles de análisis: regional y local para simplificar el proceso de toma de decisiones.

A nivel regional se requería determinar las localizaciones aproximadas y tamaños de los vertederos, las estaciones de transferencia y su radio de acción, teniendo en cuenta sus limitaciones de capacidad y la longitud máxima diaria para los vehículos de recolección y los camiones de las estaciones de transferencia.

A nivel local, se quería determinar la localización exacta de ambos tipos de instalaciones, teniendo en cuenta sus tamaños y restricciones dictadas por la proximidad de zonas pobladas, infraestructuras de transportes, recursos de agua, reservas naturales, etc.

Se consideró que el nivel local estaba fuera del alcance de este estudio. Este nivel de análisis es muy importante, y a no ser que las autoridades seleccionen las localizaciones de las instalaciones de forma muy cuidadosa, presiones de las poblaciones pueden hacer extremadamente complicada la implementación de una solución. No obstante, ese tipo de decisiones se pueden tomar en una etapa posterior.

El problema a nivel regional encaja perfectamente dentro de los denominados problemas de localización, y lo resolveremos mediante Xpress Mosel.

La principal característica de los problemas del sector residuos es su naturaleza multiobjetivo. Una podría ser localizar los vertederos sanitarios tal lejos como sea posible de los centros urbanos (objetivo de máxima distancia) y simultáneamente tan cerca como sea posible de los centros de producción de residuos, para minimizar el costo (objetivo costo mínimo)

Ambos tipos de objetivos son relevantes, pero a nivel regional, es políticamente difícil sostener objetivos de máxima distancia porque éstos, nos llevarían a concentrar los vertederos en áreas con menor población, precisamente aquellas que producen menor cantidad de residuos. Basándose en estas consideraciones, optamos por un objetivo de coste mínimo para resolver el problema y buscar una solución compatible con opción regional, sus peculiaridades, capacidades de inversión y capacidad de gestión (para ser precisos, se tiene en cuenta coste anual equivalente de las estaciones de transferencia y el coste de transporte de los residuos. Se asume que el coste de los vertederos sanitarios es proporcional a su tamaño por encima de una capacidad dada)

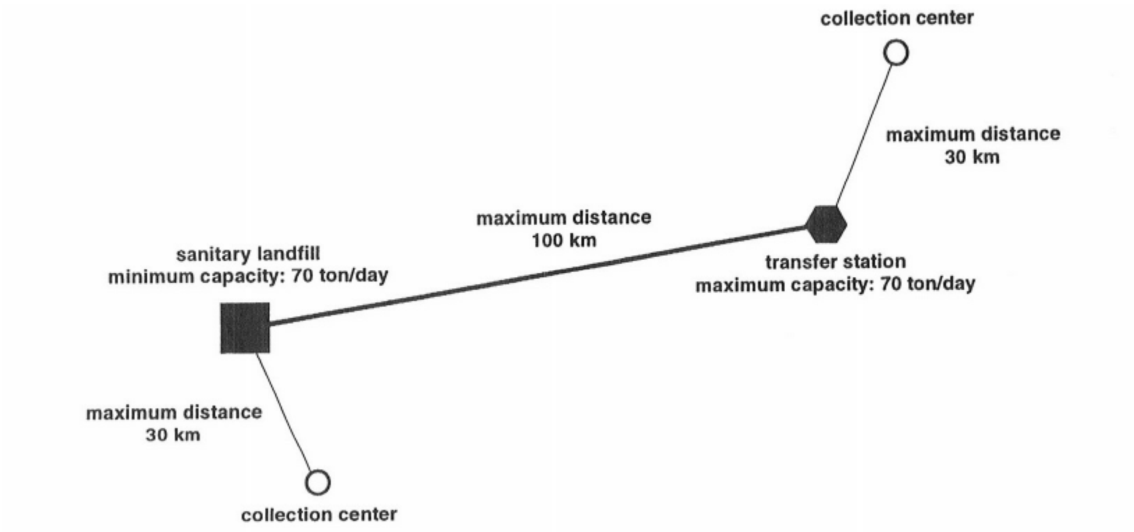
Los valores de generación de residuos usados son los esperados para 2014, basándose en tasas de crecimiento de la población y la generación de residuos per cápita y asumiendo también un incremento en las tasas de recogida de cristal y papel (25% para ambos materiales frente al actual valor del 12,5%) Este incremento es un objetivo político y se pone en marcha un programa para promoverlo.

Para alcanzar objetivo de coste mínimo, se tienen en cuenta las siguientes restricciones:

- Los vertederos sanitarios tienen una capacidad mínima de 70 toneladas al día, para obtener economías de escala.
- Los camiones que van desde las estaciones de transferencia hasta los vertederos (Transfer Trucks) pueden hacer viajes diarios de no más de 100 Km ida.

- Las estaciones de transferencia tienen una capacidad máxima de 70 toneladas al día de forma que sea posible que sean instalaciones específicas, totalmente automatizadas y adaptadas a las necesidades locales.
- Los vehículos de recogida realizarán viajes de no más de 30 Km ida.
- Los vertederos sanitarios estarán localizados en los municipios clasificados como "de alto rango" por las autoridades
- Los vehículos de recogida de residuos y los Transfer Trucks no debe atravesar el área de Serra da Estrela, una región montañosa y Parque Natural.
- La región de Santa Comba Dao, debe tener su propio vertedero según una iniciativa local que ya había comenzado al realizar este estudio.
- El área de Figueiró dos Vinhos, cuya recogida de residuos era ya servida por la compañía de Coimbra, debería usar o el vertedero de Coimbra (si existiera) o tener su propio vertedero.

El esquema según estas restricciones sería:



Los datos de los que disponemos son los siguientes:

Número de centros: 78

Número de potenciales vertederos: 22

Número de potenciales estaciones de transferencia: 78

Disponemos de las distancias euclídeas basadas en las coordenadas que pueden verse en el Anexo V de este documento.

Y de los datos de producción diaria de residuos sólidos urbanos en cada uno de los centros en toneladas (pueden verse igualmente en el mencionado Anexo V)

Capacidad máxima de las estaciones de transferencia 70 ton/día

Capacidad mínima de los vertederos 70 ton/día

El coste anual equivalente de las estaciones de transferencia (cf): 18.000.000 PTE

Coste de transporte anual para basura no compactada: 36.000 PTE (por ton y Km de distancia)

Coste de transporte anual para basura compactada: 12.000 PTE (por ton y Km de distancia)

El modelo sería el siguiente:

Minimizar

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{tu}\, d_{1jk} w_{jk} + \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} c_{tu}\, d_{2jl} v_{jl} + \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} c_{tc}\, d_{3kl} x_{kl} + \sum_{k \in K} c_f y_k \quad \textbf{(1)}$$

Sujeto a:

$$\sum_{k \in K} w_{jk} + \sum_{l \in L} v_{jl} = q_j, \quad \forall j \in J \quad \textbf{(2)}$$

$$\sum_{j \in J} w_{jk} = \sum_{l \in L} x_{kl}, \forall k \in K \quad \textbf{(3)}$$

$$w_{jk} \leq q_j y_k, \; \forall j \in J, k \in K \quad \textbf{(4)}$$

$$v_{jl} \leq q_j z_l, \; \forall j \in J, l \in L \quad \textbf{(5)}$$

$$x_{kl} \leq q z_l, \; \forall k \in K, l \in L \quad \textbf{(6)}$$

$$\sum_{l \in L} z_l \leq p \quad \textbf{(7)}$$

$$\sum_{j \in J} w_{jk} \leq S_{1max} \quad \forall k \in K \quad \textbf{(8)}$$

$$\sum_{j \in J} v_{jl} + \sum_{k \in K} x_{kl} \geq S_{2min} z_l \quad \forall l \in L \quad \textbf{(9)}$$

$$z_{S.C.Dao} = 1 \quad \textbf{(10)}$$

$$z_{F.Vinhos} + y_{F.Vinhos} = 1 \quad \textbf{(11)}$$

$$x_{F.Vinhos,Serta} = 0 \quad \textbf{(12)}$$

$$x_{F.Vinhos,Pombal} = 0 \quad \textbf{(13)}$$

$$w_{jk}, v_{jl}, x_{kl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in L$$

$$y_k, z_l \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, l \in L$$

Donde

C: coste total anual equivalente.

J: conjunto de centros (j= 1, …, J)

K: conjunto de posibles localizaciones de las estaciones de transferencia (Idem a los centros) (k=1,…, K)

L: conjunto de posibles localizaciones de los vertederos (l= 1, …, L)

w_{jk} : cantidad de residuos (en toneladas) generadas en el centro j y enviada a la estación de transferencia k.

v_{jl} : cantidad de residuos (en toneladas) generadas en el centro j y enviada al vertedero l.

x_{kl} : cantidad de residuos (en toneladas) enviada desde la estación de transferencia k al vertedero l.

y_k : variable binaria cuyo valor será 1 si una estación de transferencia está localizada en el sitio k, y 0 en caso contrario.

z_l : variable binaria cuyo valor será 1 si un vertedero está localizado en el sitio l, y 0 en caso contrario.

c_{tu} : coste de transporte por los residuos no compactados.

c_{tc} : coste de transporte por los residuos compactados.

d_{1jk} : distancia entre el centro j y el centro k (Si es menor o igual a 30, en caso contrario será ∞)

d_{2jl} : distancia entre el centro j y el centro l (Si es menor o igual a 30, en caso contrario será ∞)

d_{3kl} : distancia entre el centro k y el centro l (Si es menor o igual a 100, en caso contrario será ∞)

c_f : coste fijo de una estación de transferencia.

q_j : cantidad de residuos generados en el centro j.

q : cantidad de residuos generados en la región.

p : máximo número de vertederos sanitarios.

S_{1max} : capacidad máxima de una estación de transferencia.

S_{2min} : capacidad mínima de un vertedero.

En este modelo de programación entero mixto, el objetivo es minimizar la el costo total, asumiendo que por encima de la capacidad mínima, los costes de los vertederos son idénticos en cualquier localización y proporcional a su capacidad.

Los costos de transporte que se definen separados para residuos compactados y no compactados, incluyen gastos de combustible, mano de obra, mantenimiento de vehículos y depreciación de los mismos. Para el cálculo se usan las distancias euclídeas entre los centros, ya que la red de carreteras ha sido totalmente renovada y esta medida puede representar bastante bien las condiciones de transporte futuras.

Los de las estaciones de transferencia son fijos, según corresponde a un tipo específico de estaciones, totalmente adecuadas a las necesidades locales.

La restricción (2) se asegura que los residuos generados en cada centro de recogida será enviado o a un vertedero sanitario o a una estación de transferencia.

La restricción (3) garantiza que los residuos llegados a una estación de transferencia serán enviados a un vertedero sanitario.

Las restricciones (4) y (5) se aseguran que los centros de recogida estarán unidos a vertederos o estaciones de transferencia. La número (6) garantiza que las estaciones de transferencia estarán unidas a un vertedero sanitario.

La restricción (7) define un número máximo de vertederos sanitarios.

La (8) garantiza que se alcanzará la capacidad máxima de las estaciones de transferencia. La número (9) garantiza que se considere la capacidad mínima de los vertederos.

La restricción (10) asegura, que como requieren las autoridades, la población de Santa Comba Dao tenga su propio vertedero. La número (11) garantiza que la población Figueiró Dos Vinhos tenga o su propio vertedero o una estación de transferencia. En el caso de que sea una estación de transferencia, las restricciones (12) y (13)asegura que se excluyan los envíos desde la estación de Serta o Pombal, forzando sus envíos a Coimbra.

4.4.- SOLUCIÓN PROPUESTA

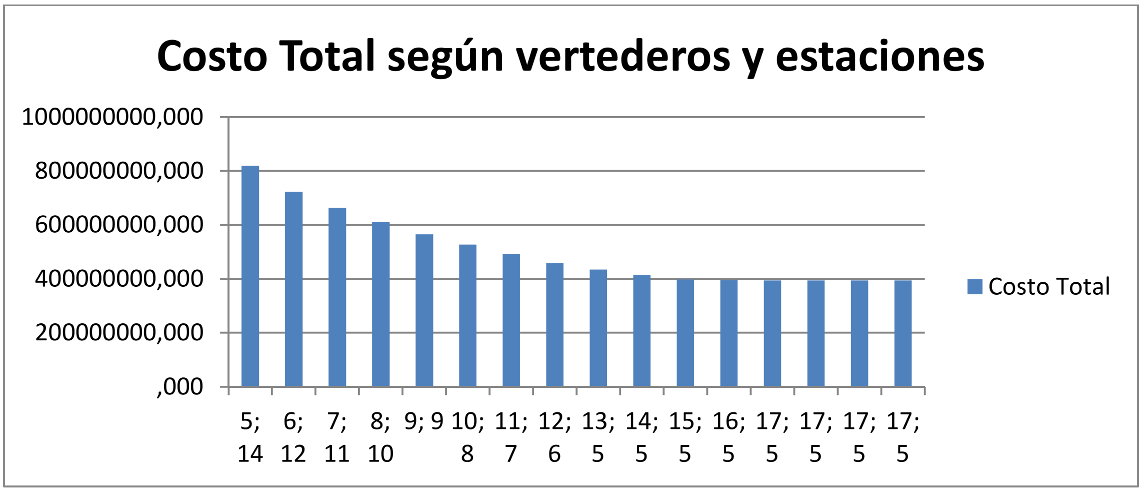
Implementamos el problema en Mosel y lo resolvemos con Xpress Ive tomando cinco como número mínimo de vertederos a considerar y veinte como máximo.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Parámetro "p" (vertederos)	Núm. Vertederos Obtenidos	Núm. Estaciones Obtenidas	Costo Total	% costo Dif
5	5	14	819.116.631,23	11,75%
6	6	12	722.869.022,73	8,28%
7	7	11	663.038.203,80	8,02%
8	8	10	609.832.672,80	7,43%
9	9	9	564.519.750,81	6,63%

10	10	8	527.105.944,23	6,66%
11	11	7	491.995.299,64	6,85%
12	12	6	458.305.137,14	5,14%
13	13	5	434.736.236,38	4,69%
14	14	5	414.357.037,73	4,00%
15	15	5	397.800.975,97	0,51%
16	16	5	395.769.628,22	0,40%
17	17	5	394.181.174,07	0,00%
18	17	5	394.181.174,07	0,00%
19	17	5	394.181.174,07	0,00%
20	17	5	394.181.174,07	--

Con el modelo hecho, podemos analizar la tabla para todos los valores de p elegidos, y como puede observarse, el costo total va disminuyendo progresivamente cuando el número de vertederos aumenta, a la misma vez que el número de estaciones obtenidas va disminuyendo y se estabiliza en 5. Esto mismo puede advertirse en el gráfico adjunto.



Se calcula la matriz de variaciones porcentuales entre cada estatus del problema.

Parámetro "p" (vertederos)	Nº Vertederos;Estaciones	5; 14	6; 12	7; 11	8; 10	9; 9	10; 8	11; 7	12; 6	13; 5	14; 5	15; 5	16; 5	17; 5	18; 5	19; 5	20; 5
5	5; 14		11,75%	19,05%	25,55%	31,08%	35,65%	39,94%	44,05%	46,93%	49,41%	51,44%	51,68%	51,88%	51,88%	51,88%	51,88%
6	6; 12		4	8,28%	15,64%	21,91%	27,08%	31,94%	36,60%	39,86%	42,68%	44,97%	45,25%	45,47%	45,47%	45,47%	45,47%
7	7; 11				8,02%	14,86%	20,50%	25,80%	30,88%	34,43%	37,51%	40,00%	40,31%	40,55%	40,55%	40,55%	40,55%
8	8; 10					7,43%	13,57%	19,32%	24,85%	28,71%	32,05%	34,77%	35,10%	35,36%	35,36%	35,36%	35,36%
9	9; 9						6,63%	12,85%	18,82%	22,99%	26,60%	29,53%	29,89%	30,17%	30,17%	30,17%	30,17%
10	10; 8							6,66%	13,05%	17,52%	21,39%	24,53%	24,92%	25,22%	25,22%	25,22%	25,22%
11	11; 7								6,85%	11,64%	15,78%	19,15%	19,56%	19,88%	19,88%	19,88%	19,88%
12	12; 6									5,14%	9,59%	13,20%	13,64%	13,99%	13,99%	13,99%	13,99%
13	13; 5										4,69%	8,50%	8,96%	9,33%	9,33%	9,33%	9,33%
14	14; 5											4,00%	4,49%	4,87%	4,87%	4,87%	4,87%
15	15; 5												0,51%	0,91%	0,91%	0,91%	0,91%
16	16; 5													0,40%	0,40%	0,40%	0,40%
17	17; 5														0,00%	0,00%	0,00%
18	17; 5															0,00%	0,00%
19	17; 5																0
20	17; 5																

Antunes resuelve el problema incrementando el número de vertederos de 5 a 10 para evaluar la disminución conjunta del número de estaciones de transferencia y el costo de transporte.

Él fija el número de vertederos mínimo en 5 para asegurar una distribución equitativa de los residuos en la región. Un menor número de vertederos podría requerir que algunas instalaciones reciban los residuos de localidades consideradas remotas, lo cual podría ser inaceptable para la población que reside en las localidades donde existen las instalaciones. Y fija el máximo número de vertederos en 10, por ser el número más alto compatible con las habilidades de gestión de residuos de las autoridades locales. Es más, por encima de 10 vertederos los residuos deberían transportarse desde los centros urbanos más importantes hasta áreas de menor población para satisfacer la restricción de capacidad mínima. Además, algún vertedero no podría operar bajo condiciones de economías de escala.

Nosotros hemos ampliado el rango de 5 a 20 vertederos con objeto de disponer de más datos para analizar la solución.

Una vez obtenidas las soluciones para el rango de vertederos de 5 a 10, Antunes presentó a las autoridades los resultados obtenidos. La solución elegida como óptima por los dirigentes políticos y gestores del momento, fue la de ocho vertederos. Para tomar esta decisión, se tuvieron en cuenta problemas de presupuesto y otras consideraciones políticas y geográficas. Además, es de resaltar, que esta solución se adoptó teniendo en cuenta las circunstancias del momento, y no tendrían por qué coincidir con la que tomaran en los tiempos actuales.

Al revisar los datos obtenidos en nuestra solución, donde, como ya he comentado el número de vertederos se ha variado desde 5 como mínimo hasta un máximo de 20, puede observarse que:

- El coste total disminuye muy rápidamente al principio (por ejemplo hemos pasado a una disminución de coste del 25,55% aumentando el número de vertederos de 5 a 8) Pueden observarse todas las variaciones porcentuales en la matriz adjunta.

- El costo empieza a disminuir en un porcentaje mínimo a partir de 15 vertederos. De hecho, se estabiliza a partir de 17 vertederos siendo el costo total de 394.181.174,07, que supone una disminución del costo respecto a la situación inicial de 5 vertederos en un 51,55%.

- Puede observarse, que para todos los valores de p superiores a 17, el total de vertederos obtenidos no es p, sino 17, en todos los casos. Esto nos hace pensar que 17 vertederos posiblemente sea el número óptimo de instalaciones. Seguramente si se hubiera incluido la restricción del “número de vertederos igual a p”, en lugar de la restricción con la desigualdad “número de vertederos $\leq$ p”, posiblemente el coste no se habría mantenido constante desde p=17 hasta 20, sino que aumentaría.

En cualquier caso, todo esto indica que no compensa tomar más de 17 vertederos. Por lo que tomamos como solución óptima ésta de 17 vertederos y 5 estaciones de transferencia.

Como ya ocurrió con Antunes al presentar su propuesta, el aplicar esta solución u otra, dependerá en gran parte del presupuesto disponible para ejecutar el proyecto, así como de otros intereses políticos, geográficos o empresariales, por citar algunos. Aun así, el modelo de diseño de redes, ayudaría a la toma de decisiones y serviría de base para el proyecto a ejecutar.

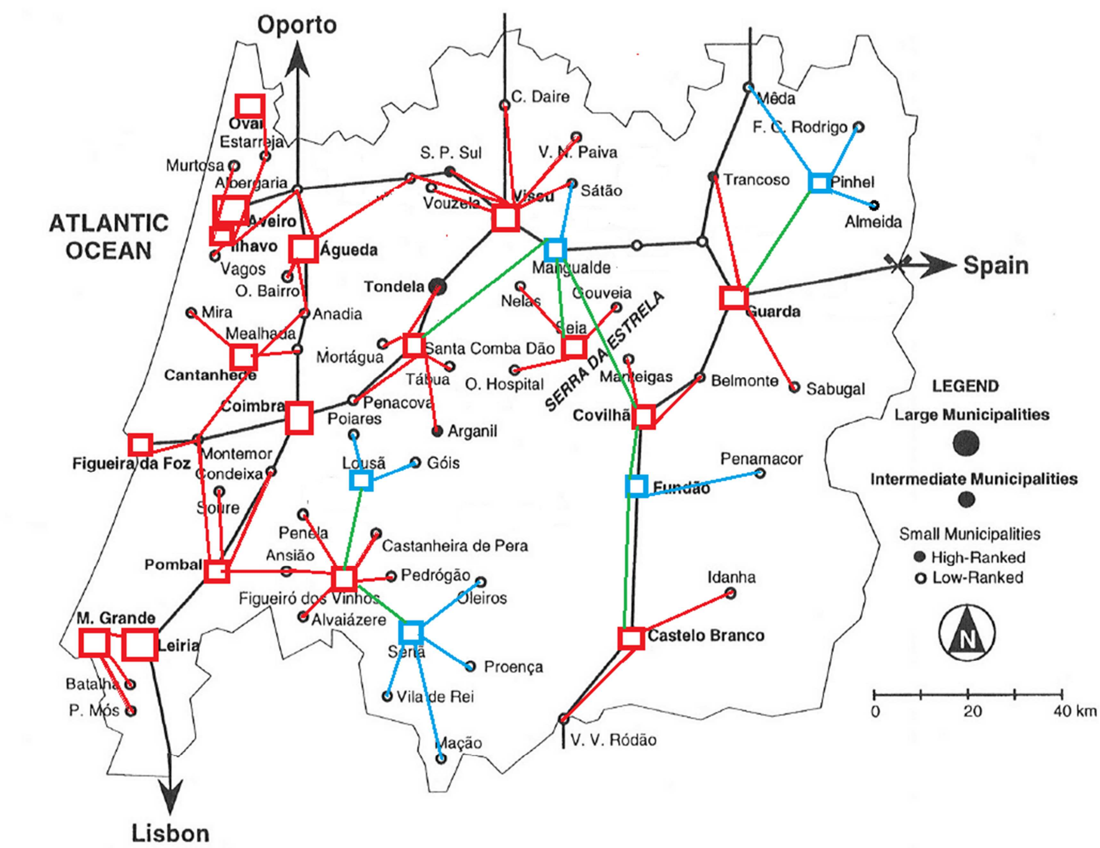
La solución para 17 vertederos y 5 estaciones de transferencia nos daría un costo total de 394.181.174.07 PTE.

Las instalaciones estarían situadas en las siguientes localidades y los residuos totales recibidos en cada una de ellas pueden visualizarse en la tabla adjunta.

Parámetro p	Tipo Instalación	Etiqueta	Residuos Tn/Día	Total residuos
17	Vertedero	Agueda	70	**1351,8**
	Vertedero	Aveiro	70	
	Vertedero	C.Branco	70	
	Vertedero	Cantanhede	70	
	Vertedero	Coimbra	140,5	
	Vertedero	Covilha	70	
	Vertedero	F.Foz	70	
	Vertedero	Guarda	70	
	Vertedero	Ilhavo	70	
	Vertedero	Leiria	100,9	
	Vertedero	Marinha	70	
	Vertedero	Ovar	70	
	Vertedero	Pombal	70	
	Vertedero	Seia	70	
	Vertedero	Viseu	130,4	
	Vertedero	F.Vinhos	70	
	Vertedero	S.C.Dao	70	
	Estación	Fundao	29,5	**126,5**
	Estación	Lousa	24,4	

	Estación	Mangualde	27,1	
	Estación	Pinhel	20,5	
	Estación	Serta	25	

El mapa de la región con la red resultante sería el siguiente:



ANEXO I

Formulación del modelo de la aplicación “El Ferry de la Bahía”

Minimizar

3.5 x(1,2,1) + 3.5 x(1,2,2) + 3.5 x(1,2,3) + 3.5 x(2,1,1) + 3.5 x(2,1,2) + 3.5 x(2,1,3) + 3 x(2,3,1) + 3 x(2,3,2) + 3 x(2,3,3) + 3 x(3,2,1) + 3 x(3,2,2) + 3 x(3,2,3) + 5 x(3,4,1) + 5 x(3,4,2) + 5 x(3,4,3) + 5 x(4,3,1) + 5 x(4,3,2) + 5 x(4,3,3) + 25 x(4,5,1) + 25 x(4,5,2) + 25 x(4,5,3) + 25 x(5,4,1) + 25 x(5,4,2) + 25 x(5,4,3) + 4 x(5,6,1) + 4 x(5,6,2) + 4 x(5,6,3) + 4 x(6,5,1) + 4 x(6,5,2) + 4 x(6,5,3) + 2.5 x(6,7,1) + 2.5 x(6,7,2) + 2.5 x(6,7,3) + 2.5 x(7,6,1) + 2.5 x(7,6,2) + 2.5 x(7,6,3)

Sujeto a:

balance(7,3): -x(6,7,3) + x(7,6,3) = -2440

balance(7,2): -x(6,7,2) + x(7,6,2) = -1250

balance(7,1): -x(6,7,1) + x(7,6,1) = -550

balance(6,3): -x(2,6,3) - x(5,6,3) + x(6,2,3) + x(6,5,3) + x(6,7,3) - x(7,6,3) = -3300

balance(6,2): -x(2,6,2) - x(5,6,2) + x(6,2,2) + x(6,5,2) + x(6,7,2) - x(7,6,2) = -1400

balance(6,1): -x(2,6,1) - x(5,6,1) + x(6,2,1) + x(6,5,1) + x(6,7,1) - x(7,6,1) = -600

balance(5,3): -x(4,5,3) + x(5,4,3) + x(5,6,3) - x(6,5,3) = 12250

balance(5,2): -x(4,5,2) + x(5,4,2) + x(5,6,2) - x(6,5,2) = -150

balance(5,1): -x(4,5,1) + x(5,4,1) + x(5,6,1) - x(6,5,1) = -10

balance(4,3): -x(3,4,3) + x(4,3,3) + x(4,5,3) - x(5,4,3) = -200

balance(4,2): -x(3,4,2) + x(4,3,2) + x(4,5,2) - x(5,4,2) = 6000

balance(4,1): -x(3,4,1) + x(4,3,1) + x(4,5,1) - x(5,4,1) = -40

balance(3,3): -x(2,3,3) + x(3,2,3) + x(3,4,3) - x(4,3,3) = -2200

balance(3,2): -x(2,3,2) + x(3,2,2) + x(3,4,2) - x(4,3,2) = -1100

balance(3,1): -x(2,3,1) + x(3,2,1) + x(3,4,1) - x(4,3,1) = -750

balance(2,3): -x(1,2,3) + x(2,1,3) + x(2,3,3) + x(2,6,3) - x(3,2,3) - x(6,2,3) = -4000

balance(2,2): -x(1,2,2) + x(2,1,2) + x(2,3,2) + x(2,6,2) - x(3,2,2) - x(6,2,2) = -2000

balance(2,1): -x(1,2,1) + x(2,1,1) + x(2,3,1) + x(2,6,1) - x(3,2,1) - x(6,2,1) = -900

balance(1,3): x(1,2,3) - x(2,1,3) = -110

balance(1,2): x(1,2,2) - x(2,1,2) = -100

balance(1,1): x(1,2,1) - x(2,1,1) = 2850

res_cota(7,6): x(7,6,1) + x(7,6,2) + x(7,6,3) <= 21100

res_cota(6,7): x(6,7,1) + x(6,7,2) + x(6,7,3) <= 21100

res_cota(6,5): x(6,5,1) + x(6,5,2) + x(6,5,3) <= 21100

res_cota(6,2): x(6,2,1) + x(6,2,2) + x(6,2,3) <= 2000 res_cota(5,6): x(5,6,1) + x(5,6,2) + x(5,6,3) <= 21100

res_cota(5,4): x(5,4,1) + x(5,4,2) + x(5,4,3) <= 21100

res_cota(4,5): x(4,5,1) + x(4,5,2) + x(4,5,3) <= 21100

res_cota(4,3): x(4,3,1) + x(4,3,2) + x(4,3,3) <= 21100

res_cota(3,4): x(3,4,1) + x(3,4,2) + x(3,4,3) <= 21100

res_cota(3,2): x(3,2,1) + x(3,2,2) + x(3,2,3) <= 21100

res_cota(2,6): x(2,6,1) + x(2,6,2) + x(2,6,3) <= 2000

res_cota(2,3): x(2,3,1) + x(2,3,2) + x(2,3,3) <= 21100

res_cota(2,1): x(2,1,1) + x(2,1,2) + x(2,1,3) <= 21100

res_cota(1,2): x(1,2,1) + x(1,2,2) + x(1,2,3) <= 21100

ANEXO II

Formulación del modelo de la empresa “Drinksa”

Minimizar

81400 x(1) + 83800 x(2) + 88600 x(3) + 91000 x(4) + 79000 x(5) + 86200 x(6) +

88600 x(7) + 91000 x(8) + 79000 x(9) + 80200 x(10) + 9381.61 y(1,2) + 3020.54 y(1,3) +

20519.7 y(1,4) + 8950.13 y(1,5) + 1291.68 y(1,6) + 13162.3 y(2,1) + 7054.56 y(2,3) +

11363.8 y(2,4) + 17814 y(2,5) + 9240.48 y(2,6) + 3597.57 y(3,1) + 11452.7 y(3,2) +

4689.79 y(3,3) + 22977.9 y(3,4) + 5855.8 y(3,5) + 1291.68 y(3,6) + 9460.91 y(4,1) +

13967.6 y(4,2) + 5256.14 y(4,3) + 27555.8 y(4,4) + 11465 y(4,5) + 4990.08 y(4,6) +

2334.96 y(5,1) + 10540.4 y(5,2) + 2782.08 y(5,3) + 21888.6 y(5,4) + 8296.74 y(5,5) +

1026.72 y(5,6) + 5257.98 y(6,1) + 8752.88 y(6,2) + 20343 y(6,4) + 11650 y(6,5) +

4206.24 y(6,6) + 24110.6 y(7,1) + 9517.22 y(7,2) + 13731.6 y(7,3) + 25629.9 y(7,5) +

16217.8 y(7,6) + 8267.49 y(8,1) + 13129.3 y(8,2) + 4590.43 y(8,3) + 26525.4 y(8,4) +

10688.4 y(8,5) + 4294.56 y(8,6) + 12556.9 y(9,1) + 17814 y(9,2) + 9389.52 y(9,3) +

30602.9 y(9,4) + 6999.36 y(9,6) + 2023.63 y(10,1) + 10318.5 y(10,2) + 3785.62 y(10,3) +

21623.7 y(10,4) + 7815.95 y(10,5)

Subjecto a :

res4(10,4): y(10,4) = 0

res4(10,2): y(10,2) = 0

res4(9,4): y(9,4) = 0

res4(9,3): y(9,3) = 0

res4(9,2): y(9,2) = 0

res4(9,1): y(9,1) = 0

res4(8,5): y(8,5) = 0

res4(8,4): y(8,4) = 0

res4(8,2): y(8,2) = 0

res4(7,6): y(7,6) = 0

res4(7,5): y(7,5) = 0

res4(7,3): y(7,3) = 0

res4(7,2): y(7,2) = 0

res4(7,1): y(7,1) = 0

res4(6,5): y(6,5) = 0

res4(6,4): y(6,4) = 0

res4(6,2): y(6,2) = 0

res4(5,4): y(5,4) = 0

res4(5,2): y(5,2) = 0

res4(4,5): y(4,5) = 0

res4(4,4): y(4,4) = 0

res4(4,2): y(4,2) = 0

res4(3,4): y(3,4) = 0

res4(3,2): y(3,2) = 0

res4(2,6): y(2,6) = 0

res4(2,5): y(2,5) = 0

res4(2,4): y(2,4) = 0

res4(2,3): y(2,3) = 0

res4(2,1): y(2,1) = 0

res4(1,5): y(1,5) = 0

res4(1,4): y(1,4) = 0

res4(1,2): y(1,2) = 0

res_3(10,6): -x(10) + y(10,6) <= 0

res_3(10,5): -x(10) + y(10,5) <= 0

res_3(10,4): -x(10) + y(10,4) <= 0

res_3(10,3): -x(10) + y(10,3) <= 0

res_3(10,2): -x(10) + y(10,2) <= 0

res_3(10,1): -x(10) + y(10,1) <= 0

res_3(9,6): -x(9) + y(9,6) <= 0

res_3(9,5): -x(9) + y(9,5) <= 0

res_3(9,4): -x(9) + y(9,4) <= 0

res_3(9,3): -x(9) + y(9,3) <= 0

res_3(9,2): -x(9) + y(9,2) <= 0

res_3(9,1): -x(9) + y(9,1) <= 0

res_3(8,6): -x(8) + y(8,6) <= 0

res_3(8,5): -x(8) + y(8,5) <= 0

res_3(8,4): -x(8) + y(8,4) <= 0

res_3(8,3): -x(8) + y(8,3) <= 0

res_3(8,2): -x(8) + y(8,2) <= 0

res_3(8,1): -x(8) + y(8,1) <= 0

res_3(7,6): -x(7) + y(7,6) <= 0

res_3(7,5): -x(7) + y(7,5) <= 0

res_3(7,4): -x(7) + y(7,4) <= 0

res_3(7,3): -x(7) + y(7,3) <= 0

res_3(7,2): -x(7) + y(7,2) <= 0

res_3(7,1): -x(7) + y(7,1) <= 0

res_3(6,6): -x(6) + y(6,6) <= 0

res_3(6,5): -x(6) + y(6,5) <= 0

res_3(6,4): -x(6) + y(6,4) <= 0

res_3(6,3): -x(6) + y(6,3) <= 0

res_3(6,2): -x(6) + y(6,2) <= 0

res_3(6,1): -x(6) + y(6,1) <= 0

res_3(5,6): -x(5) + y(5,6) <= 0

res_3(5,5): -x(5) + y(5,5) <= 0

res_3(5,4): -x(5) + y(5,4) <= 0

res_3(5,3): -x(5) + y(5,3) <= 0

res_3(5,2): -x(5) + y(5,2) <= 0

res_3(5,1): -x(5) + y(5,1) <= 0

res_3(4,6): -x(4) + y(4,6) <= 0

res_3(4,5): -x(4) + y(4,5) <= 0

res_3(4,4): -x(4) + y(4,4) <= 0

res_3(4,3): -x(4) + y(4,3) <= 0

res_3(4,2): -x(4) + y(4,2) <= 0

res_3(4,1): -x(4) + y(4,1) <= 0

res_3(3,6): -x(3) + y(3,6) <= 0

res_3(3,5): -x(3) + y(3,5) <= 0

res_3(3,4): -x(3) + y(3,4) <= 0

res_3(3,3): -x(3) + y(3,3) <= 0

res_3(3,2): -x(3) + y(3,2) <= 0

res_3(3,1): -x(3) + y(3,1) <= 0

res_3(2,6): -x(2) + y(2,6) <= 0

res_3(2,5): -x(2) + y(2,5) <= 0

res_3(2,4): -x(2) + y(2,4) <= 0

res_3(2,3): -x(2) + y(2,3) <= 0

res_3(2,2): -x(2) + y(2,2) <= 0

res_3(2,1): -x(2) + y(2,1) <= 0

res_3(1,6): -x(1) + y(1,6) <= 0

res_3(1,5): -x(1) + y(1,5) <= 0

res_3(1,4): -x(1) + y(1,4) <= 0

res_3(1,3): -x(1) + y(1,3) <= 0

res_3(1,2): -x(1) + y(1,2) <= 0

res_3(1,1): -x(1) + y(1,1) <= 0

res_2(6): y(1,6) + y(2,6) + y(3,6) + y(4,6) + y(5,6) + y(6,6) + y(7,6) + y(8,6) +

y(9,6) + y(10,6) = 1

res_2(5): y(1,5) + y(2,5) + y(3,5) + y(4,5) + y(5,5) + y(6,5) + y(7,5) + y(8,5) +

y(9,5) + y(10,5) = 1

res_2(4): y(1,4) + y(2,4) + y(3,4) + y(4,4) + y(5,4) + y(6,4) + y(7,4) + y(8,4) +

y(9,4) + y(10,4) = 1

res_2(3): y(1,3) + y(2,3) + y(3,3) + y(4,3) + y(5,3) + y(6,3) + y(7,3) + y(8,3) +

y(9,3) + y(10,3) = 1

res_2(2): y(1,2) + y(2,2) + y(3,2) + y(4,2) + y(5,2) + y(6,2) + y(7,2) + y(8,2) +

y(9,2) + y(10,2) = 1

res_2(1): y(1,1) + y(2,1) + y(3,1) + y(4,1) + y(5,1) + y(6,1) + y(7,1) + y(8,1) +

y(9,1) + y(10,1) = 1

res1(10): -21000 x(10) + 14000 y(10,1) + 10000 y(10,2) + 8000 y(10,3) + 12000 y(10,4) +

10000 y(10,5) + 9000 y(10,6) <= 0

res1(9): -20000 x(9) + 14000 y(9,1) + 10000 y(9,2) + 8000 y(9,3) + 12000 y(9,4) +

10000 y(9,5) + 9000 y(9,6) <= 0

res1(8): -30000 x(8) + 14000 y(8,1) + 10000 y(8,2) + 8000 y(8,3) + 12000 y(8,4) +

10000 y(8,5) + 9000 y(8,6) <= 0

res1(7): -28000 x(7) + 14000 y(7,1) + 10000 y(7,2) + 8000 y(7,3) + 12000 y(7,4) +

10000 y(7,5) + 9000 y(7,6) <= 0

res1(6): -26000 x(6) + 14000 y(6,1) + 10000 y(6,2) + 8000 y(6,3) + 12000 y(6,4) +

10000 y(6,5) + 9000 y(6,6) <= 0

res1(5): -20000 x(5) + 14000 y(5,1) + 10000 y(5,2) + 8000 y(5,3) + 12000 y(5,4) +

10000 y(5,5) + 9000 y(5,6) <= 0

res1(4): -30000 x(4) + 14000 y(4,1) + 10000 y(4,2) + 8000 y(4,3) + 12000 y(4,4) +

10000 y(4,5) + 9000 y(4,6) <= 0

res1(3): -28000 x(3) + 14000 y(3,1) + 10000 y(3,2) + 8000 y(3,3) + 12000 y(3,4) +

10000 y(3,5) + 9000 y(3,6) <= 0

res1(2): -24000 x(2) + 14000 y(2,1) + 10000 y(2,2) + 8000 y(2,3) + 12000 y(2,4) +

10000 y(2,5) + 9000 y(2,6) <= 0

res1(1): -22000 x(1) + 14000 y(1,1) + 10000 y(1,2) + 8000 y(1,3) + 12000 y(1,4) +

10000 y(1,5) + 9000 y(1,6) <= 0

Bounds

Binaries

x(1) x(2) x(3) x(4) x(5) x(6) x(7) x(8) x(9) x(10)

End

ANEXO III

Formulación modelo Aguas Residuales.

Minimizar

21 x(1,2) + 30 x(1,3) + 22 x(2,3) + 58 x(2,4) + 43 x(3,4) + x(3,9) + 49 x(4,3) +

63 x(4,8) + 44 x(5,6) + 51 x(5,7) + 56 x(6,7) + 94 x(6,8) + 82 x(7,4) + x(7,9) +

2 x(8,9) + 240 y(1,2) + 350 y(1,3) + 200 y(2,3) + 750 y(2,4) + 610 y(3,4) +

3800 y(3,9) + 1850 y(4,3) + 780 y(4,8) + 620 y(5,6) + 800 y(5,7) + 500 y(6,7) +

630 y(6,8) + 1120 y(7,4) + 3800 y(7,9) + 2500 y(8,9)

Sujeto a:

balance(9): -x(3,9) - x(7,9) - x(8,9) = -122

balance(8): -x(4,8) - x(6,8) + x(8,9) = 0

balance(7): -x(5,7) - x(6,7) + x(7,4) + x(7,9) = 13

balance(6): -x(5,6) + x(6,7) + x(6,8) = 8

balance(5): x(5,6) + x(5,7) = 21

balance(4): -x(2,4) - x(3,4) + x(4,3) + x(4,8) - x(7,4) = 36

balance(3): -x(1,3) - x(2,3) + x(3,4) + x(3,9) - x(4,3) = 14

balance(2): -x(1,2) + x(2,3) + x(2,4) = 3

balance(1): x(1,2) + x(1,3) = 27

res_cota(8,9): x(8,9) - 122 y(8,9) <= 0

res_cota(7,9): x(7,9) - 122 y(7,9) <= 0

res_cota(7,4): x(7,4) - 122 y(7,4) <= 0

res_cota(6,8): x(6,8) - 122 y(6,8) <= 0

res_cota(6,7): x(6,7) - 122 y(6,7) <= 0

res_cota(5,7): x(5,7) - 122 y(5,7) <= 0

res_cota(5,6): x(5,6) - 122 y(5,6) <= 0

res_cota(4,8): x(4,8) - 122 y(4,8) <= 0

res_cota(4,3): x(4,3) - 122 y(4,3) <= 0

res_cota(3,9): x(3,9) - 122 y(3,9) <= 0

res_cota(3,4): x(3,4) - 122 y(3,4) <= 0

res_cota(2,4): x(2,4) - 122 y(2,4) <= 0

res_cota(2,3): x(2,3) - 122 y(2,3) <= 0

res_cota(1,3): x(1,3) - 122 y(1,3) <= 0

res_cota(1,2): x(1,2) - 122 y(1,2) <= 0

Bounds

Binaries

y(1,2) y(1,3) y(2,3) y(2,4) y(3,4) y(3,9) y(4,3) y(4,8) y(5,6) y(5,7) y(6,7)

y(6,8) y(7,4) y(7,9) y(8,9)

ANEXO IV

Formulación modelo "Red Avícola"

Minimizar:

20 x(1,4,1) + 15 x(1,4,2) + 17 x(1,4,3) + 22 x(1,4,4) + 30 x(1,5,1) + 25 x(1,5,2) +

27 x(1,5,3) + 22 x(1,5,4) + 15 x(2,4,1) + 15 x(2,4,2) + 15 x(2,4,3) + 30 x(2,4,4) +

30 x(3,4,1) + 30 x(3,4,2) + 10 x(3,4,3) + 10 x(3,4,4) + 10 x(3,5,1) + 9 x(3,5,2) +

11 x(3,5,3) + 10 x(3,5,4) + 75 x(4,6,1) + 75 x(4,6,2) + 75 x(4,6,3) + 75 x(4,6,4) +

80 x(5,6,1) + 80 x(5,6,2) + 80 x(5,6,3) + 80 x(5,6,4) + 100 y(1,4) + 150 y(1,5) +

75 y(2,4) + 100 y(3,4) + 75 y(3,5) + 200 y(4,6) + 200 y(5,6)

Sujeto a:

balance(7,4): -x(1,7,4) - x(2,7,4) - x(3,7,4) = -75

balance(7,3): -x(1,7,3) - x(2,7,3) - x(3,7,3) = -115

balance(7,2): -x(1,7,2) - x(2,7,2) - x(3,7,2) = -200

balance(7,1): -x(1,7,1) - x(2,7,1) - x(3,7,1) = -90

balance(6,4): -x(4,6,4) - x(5,6,4) = -75

balance(6,3): -x(4,6,3) - x(5,6,3) = -50

balance(6,2): -x(4,6,2) - x(5,6,2) = -200

balance(6,1): -x(4,6,1) - x(5,6,1) = -150

balance(5,4): -x(1,5,4) - x(3,5,4) + x(5,6,4) = 0

balance(5,3): -x(1,5,3) - x(3,5,3) + x(5,6,3) = 0

balance(5,2): -x(1,5,2) - x(3,5,2) + x(5,6,2) = 0

balance(5,1): -x(1,5,1) - x(3,5,1) + x(5,6,1) = 0

balance(4,4): -x(1,4,4) - x(2,4,4) - x(3,4,4) + x(4,6,4) = 0

balance(4,3): -x(1,4,3) - x(2,4,3) - x(3,4,3) + x(4,6,3) = 0

balance(4,2): -x(1,4,2) - x(2,4,2) - x(3,4,2) + x(4,6,2) = 0

balance(4,1): -x(1,4,1) - x(2,4,1) - x(3,4,1) + x(4,6,1) = 0

balance(3,4): x(3,4,4) + x(3,5,4) + x(3,7,4) = 100

balance(3,3): x(3,4,3) + x(3,5,3) + x(3,7,3) = 75

balance(3,2): x(3,4,2) + x(3,5,2) + x(3,7,2) = 100

balance(3,1): x(3,4,1) + x(3,5,1) + x(3,7,1) = 40 balance(2,4): x(2,4,4) + x(2,7,4) = 50

balance(2,3): x(2,4,3) + x(2,7,3) = 50

balance(2,2): x(2,4,2) + x(2,7,2) = 200

balance(2,1): x(2,4,1) + x(2,7,1) = 100

balance(1,4): x(1,4,4) + x(1,5,4) + x(1,7,4) = 0

balance(1,3): x(1,4,3) + x(1,5,3) + x(1,7,3) = 40

balance(1,2): x(1,4,2) + x(1,5,2) + x(1,7,2) = 100

balance(1,1): x(1,4,1) + x(1,5,1) + x(1,7,1) = 100

res_cota(5,6): x(5,6,1) + x(5,6,2) + x(5,6,3) + x(5,6,4) - 955 y(5,6) <= 0

res_cota(4,6): x(4,6,1) + x(4,6,2) + x(4,6,3) + x(4,6,4) - 955 y(4,6) <= 0

res_cota(3,7): x(3,7,1) + x(3,7,2) + x(3,7,3) + x(3,7,4) - 955 y(3,7) <= 0

res_cota(3,5): x(3,5,1) + x(3,5,2) + x(3,5,3) + x(3,5,4) - 955 y(3,5) <= 0

res_cota(3,4): x(3,4,1) + x(3,4,2) + x(3,4,3) + x(3,4,4) - 955 y(3,4) <= 0

res_cota(2,7): x(2,7,1) + x(2,7,2) + x(2,7,3) + x(2,7,4) - 955 y(2,7) <= 0

res_cota(2,4): x(2,4,1) + x(2,4,2) + x(2,4,3) + x(2,4,4) - 955 y(2,4) <= 0

res_cota(1,7): x(1,7,1) + x(1,7,2) + x(1,7,3) + x(1,7,4) - 955 y(1,7) <= 0

res_cota(1,5): x(1,5,1) + x(1,5,2) + x(1,5,3) + x(1,5,4) - 955 y(1,5) <= 0

res_cota(1,4): x(1,4,1) + x(1,4,2) + x(1,4,3) + x(1,4,4) - 955 y(1,4) <= 0

Bounds

Binaries

y(1,4) y(1,5) y(1,7) y(2,4) y(2,7) y(3,4) y(3,5) y(3,7) y(4,6) y(5,6)

End

ANEXO V

Datos disponibles del modelo de localización para la gestión de residuos en la Región Central de Portugal.

DISTANCIAS EUCLÍDEAS.

Euclidean Distances calculated from the following coordinates		
Center	**X**	**Y**
A.Beira	79	60
Agueda	2	38
Albergaria	0	52
Almeida	132	48
Alvaiazere	2	-45
Anadia	2	24
Ansiao	-2	-35
Arganil	32	-3
Aveiro	-15	47
Batalha	-37	-60
Belmonte	92	9
C.Beira	103	40
C.Branco	77	-49
C.Daire	47	71
C.Pera	18	-26
C.Sal	38	20
Cantanhede	-12	14
Coimbra	0	0
Condeixa	-6	-12
Covilha	79	1
Estarreja	-7	59
F.Algodres	78	39
F.C.Rodrigo	128	66
F.Foz	-36	-6
F.Vinhos	11	-37
Fundao	78	-15
Gois	27	-10
Gouveia	73	25
Guarda	100	28
Idanha	99	-40
Ilhavo	-17	42
Leiria	-35	-51
Lousa	15	-14
M.Corvo	8	-15
Macao	33	-77
Mangualde	59	38
Manteigas	76	13
Marinha	-45	-50
Mealhada	0	16
Meda	103	75
Mira	-24	24
Montemor	-22	-5
Mortagua	19	17

Murtosa	-13	57
Nelas	51	30
O.Bairro	-2	32
O.Frades	26	54
O.Hospital	50	11
Oleiros	42	-37
Ovar	-11	71
P.Castelo	65	45
P.Mos	-37	-66
P.Serra	40	-22
Pedrogao	22	-36
Penacova	13	4
Penamacor	106	-13
Penela	2	-22
Pinhel	119	53
Pombal	-18	-34
Proenca	40	-56
S.C.Dao	27	17
S.P.Sul	35	56
S.Vouga	9	55
Sabugal	114	7
Satao	63	53
Seia	63	17
Serta	26	-49
Soure	-17	-17
Tabua	35	12
Tondela	32	30
Trancoso	95	55
V.N.Paiva	64	64
V.N.Poiares	13	-4
V.Rei	21	-63
V.V.Rodao	61	-68
Vagos	-18	37
Viseu	47	45
Vouzela	31	52

PRODUCCIÓN DIARIA DE RESIDUOS

Daily production of solid waste, tons (qj)	
Center	
A.Beira	3,8
Agueda	37,2
Albergaria	14,5
Almeida	5,9
Alvaiazere	4,9
Anadia	20,5
Ansiao	7,7
Arganil	7,5
Aveiro	78,1
Batalha	9,2
Belmonte	5,4
C.Beira	4,5

C.Branco	49,9
C.Daire	9,6
C.Pera	2,3
C.Sal	6,8
Cantanhede	28,6
Coimbra	140,5
Condeixa	7,7
Covilha	37
Estarreja	20,6
F.Algodres	3,7
F.C.Rodrigo	4,3
F.Foz	67,1
F.Vinhos	4,4
Fundao	25,5
Gois	2,6
Gouveia	9,6
Guarda	29,9
Idanha	6,7
Ilhavo	29,8
Leiria	114,3
Lousa	8,9
M.Corvo	6,9
Macao	4,8
Mangualde	14,1
Manteigas	2,4
Marinha	27,7
Mealhada	10,6
Meda	3,6
Mira	8,3
Montemor	15,8
Mortagua	6,2
Murtosa	5,8
Nelas	8,8
O.Bairro	13
O.Frades	6,9
O.Hospital	13,4
Oleiros	3,3
Ovar	54,1
P.Castelo	4,9
P.Mos	19,7
P.Serra	2,5
Pedrogao	2,1
Penacova	10
Penamacor	4
Penela	3,5
Pinhel	6,7
Pombal	39,3
Proenca	6,2
S.C.Dao	6,2
S.P.Sul	11,5
S.Vouga	8,8
Sabugal	9
Satao	8,2
Seia	23,7
Serta	9
Soure	12,9

Tabua	7,9
Tondela	19,3
Trancoso	6
V.N.Paiva	3,5
V.N.Poiares	3,5
V.Rei	1,7
V.V.Rodao	2,6
Vagos	12,5
Viseu	84,8
Vouzela	7,1
Total	**1351,8**

ANEXO VI: BIBLIOGRAFÍA BÁSICA.

- Introduction to Logistic Systems Planning and Control. Gianpaolo Ghiani, Gilbert Laporte, Roberto Musmanno.
- Network and Discrete Location. Models, Algorithms and Applications. Author: Mark S. Daskin
- Location Analysis Helps Manage Solid Waste in Central Portugal. Antonio P. Antunes.