Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Valoraciones, Cuerpos de Hardy y Estructuras o-minimales

Autor: Antonio Casares Santos

Tutor: Fernando Sanz Sánchez

Índice general

Introducción

En este Trabajo Fin de Grado se presenta una introducción a la teoría de cuerpos de Hardy, que son cuerpos de gérmenes de funciones estables por derivación. Estas estructuras proporcionan un marco perfecto para tratar la condición de no oscilación, y la valoración asociada a ellos permite formalizar y cuantificar la idea de orden de infinitud de una función. Las estructuras o-minimales, introducidas en el último capítulo, permiten realizar una "geometría moderada" posibilitando el estudio de la no-oscilación en dimensión superior. Es por ello que a partir de las funciones de una estructura o-minimal vamos a poder crear nuevos cuerpos de Hardy con propiedades especialmente buenas. A lo largo de este trabajo se hará un recorrido por diversos temas en los que se aplican y amplían los contenidos vistos en distintas asignaturas del Grado (álgebra, análisis en una y varias variables, variable compleja, ecuaciones diferenciales...). Además, el estudio de las estructuras o-minimales y temas relacionados ha sido una ocasión para empezar a conocer los lenguajes lógicos y ver cómo la lógica puede aplicarse a otras ramas de las matemáticas. Todo ello ha sido una oportunidad para ilustrar cómo se pueden relacionar todas estas áreas de las matemáticas en un tema transversal como es la teoría de cuerpos de Hardy.

Aunque el término y su definición actual no se acuñó hasta mucho más tarde, se puede decir que el estudio de los cuerpos de Hardy surgió a finales del siglo XIX a partir de los trabajos de Paul du Bois-Reymond sobre órdenes de infinitud de funciones de una variable real [Bou07, Har10]. En ellos se definían formas de comparar el crecimiento asintótico de funciones, siendo éste uno de los primeros sistemas en el que la propiedad arquimediana no era válida. También se exhibía la dificultad que entrañaba esta cuestión, con la existencia de ejemplos patológicos de funciones que no se pueden comparar de forma adecuada entre ellas. Este tema suscitó el interés de numerosos matemáticos de la época como Borel, Hadamard, Lindelöf, etc. (Interés que se enmarca en la procupación existente por entender los conceptos de infinito y de límite). Es destacable el influyente artículo *Orders of Infinity* de G.H. Hardy, [Har10], en el que revisa y dota de rigor las ideas de du Bois-Reymond. En él define las L-funciones (que surgen al componer logaritmos, exponenciales y funciones racionales); estudia el comportamiento de las relaciones de comparación por derivación e integración y estudia patologías surgidas en muchos casos de algún tipo de oscilación de las funciones. Por ejemplo, muestra cómo la función $f(x) = (x^{\gamma+\delta}\cos^2 x + x^{\gamma-\delta}\sin^2 x)e^{x^\rho}$ (para valores convenientes de γ, δ *y* ρ) es monótona, al igual que todas sus derivadas, pero a pesar de ello oscila entre las funciones $x^{\gamma+\delta}e^{x^\rho}$ y $x^{\gamma-\delta}e^{x^\rho}$, impidiendo su comparación adecuada con las L-funciones (figura 1).

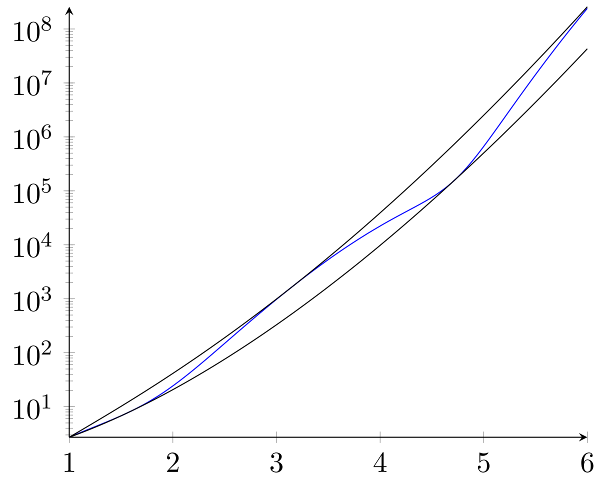

Figura 1: Gráfica de la función $(x\cos^2 x + \sin x)e^{x^{1,6}}$ oscilando entre $e^{x^{1,6}}$ y $xe^{x^{1,6}}$ (en escala logarítmica).

Fue Bourbaki (en la primera edición de 1951 de [Bou07]) quien utilizó por primera vez el término *cuerpo de Hardy*, definiéndolo como un cuerpo de gérmenes de funciones cerrado por derivación. Este concepto generaliza las L-funciones de Hardy, y nos proporciona una estructura en la que las propiedades deseadas de no oscilación son satisfechas (y que de hecho, permiten precisar el concepto de no oscilación buscado por Hardy).

El avance en la teoría de cuerpos de Hardy fue propulsado notablemente por Rosenlicht y Boshernitzan en los años ochenta. Desde entonces, numerosos resultados y aplicaciones han sido hallados, y han dado lugar a una activa área de investigación. En estos trabajos tiene gran relevancia la valoración que se define en un cuerpo de Hardy a partir de las relaciones de comparación de funciones, permitiendo cuantificar los órdenes de infinitud y trabajar con ellos, aplicando los conocimientos ya existentes sobre la teoría de las valoraciones. Esta valoración fue propuesta por primera vez por Lightstone y Robinson en 1975 (según [Ros83a]), sorprendentemente tarde teniendo en cuenta que se encuentra en gran medida presente de forma implícita en los trabajos de Hardy y Borel en sus intentos por representar órdenes de infinito con símbolos [Har10, pág. 34] [Bor99, pág. 17]. Además, le regla de l'Hôpital para límites de funciones se traduce en propiedades de esta valoración, dándonos una interpretación más clara de este teorema en términos de los órdenes de crecimientos de funciones y sus derivadas.

Como un ejemplo de la utilidad de estas propiedades se presentará en este trabajo (sección 2.6) la demostración de un resultado conjeturado por Borel en 1899 [Bor99] en el que se afirma, dicho de forma algo imprecisa, que las soluciones no oscilantes de ecuaciones diferenciales algebraicas de orden n tienen un crecimiento asintótico acotado por n composiciones de exponenciales. Nos hemos basado en una prueba dada por L. van den Dries en un trabajo manuscrito, [Dri82], que parece no haber sido publicado. Hemos querido transcribir y completar aquí todos los detalles de esta prueba para familiarizarnos con las técnicas vinculadas a las valoraciones de l'Hôpital, polinomios diferenciales y comportamiento de la función exponencial en términos de esta valoración. En este sentido, el subapartado 2.6 contiene, junto con el 2.2, la parte más técnica de este TFG. En este otro apartado mencionado, el 2.2, se probará que las extensiones de un cuerpo de Hardy por una función f que satisface una ecuación algebraica o diferencial de primer orden y primer grado sigue siendo de Hardy. Para ello se combinarán diversos resultados vistos en el grado (haciendo un notable uso del teorema de las funciones implícitas, además de varios resultados de álgebra).

Antes de adentrarnos en el estudio de los cuerpos de Hardy, se dedicará el primer capítulo a la teoría de valoraciones. Las primeras ideas que suscitaron la noción de valoración tienen su origen en los trabajos de Dedekind y Weber sobre lugares en 1882, y en aquellos de Hensel sobre los números p-ádicos (1897) [Bou06]. En estos trabajos se buscaba aplicar procedimientos más propios del análisis, como el desarrollo en serie de potencias, a la teoría de números y al álgebra. Una abstracción de los conceptos allí utilizados dieron lugar al concepto de valor absoluto (Kürschak, 1913), que a su vez dio lugar al de valoración, introducido por primera vez por Krull en 1931. El lenguaje de las valoraciones es especialmente útil para expresar y cuantificar cuestiones relativas a la divisibilidad en anillos, utilizando para ello los grupos ordenados. Esta teoría tiene importantes aplicaciones en áreas como geometría algebraica (concretamente, pero no únicamente, en resolución de singularidades) o teoría de números. Es un tema muy amplio, y en este trabajo nos centraremos únicamente en los aspectos que serán más relevantes en su aplicación posterior a los cuerpos de Hardy (como el estudio de valoraciones con rangos superiores a 1), sin discutir, por ejemplo, las valoraciones discretas.

A lo largo de esta memoria se encuentran numerosos ejemplos que pretenden ilustrar y aclarar las ideas presentadas. Asimismo, se ha realizado un esfuerzo por motivar los conceptos que surgen en el desarrollo de la teoría, y por resaltar la importancia o utilidad de los resultados demostrados en relación con la temática general de los cuerpos de Hardy y sus aplicaciones.

Al principio de los capítulos 1 y 3 se mencionarán los libros o artículos en los que están basados de forma predominante. En el segundo capítulo esta anotación se hará al principio de cada sección, debido a la mayor variabilidad en la bibliografía utilizada. Se proporcionarán referencias concretas para las afirmaciones de las que no se incluya una demostración detallada.

La teoría de cuerpos de Hardy tiene aplicaciones que van mucho más allá de lo mostrado en esta memoria. Algunas de ellas tienen relación con el estudio cuantitativo de soluciones de ecuaciones diferenciales y curvas integrales de campos de vectores; desarrollos asintóticos de funciones en distintas escalas o con las transseries y el análisis no estándar. Este trabajo ha sido una buena oportunidad para introducirse a los fundamentos de estos temas y atisbar las múltiples vías de continuación en su estudio.

Finalmente, quería agradecer al profesor Fernando Sanz el haber aceptado dirigir este trabajo a pesar de que yo no me haya encontrado en Valladolid este año. Sus explicaciones y correcciones han sido de gran valor, y me ha permitido conocer diversas líneas actuales de investigación en matemáticas.

Notación

En este trabajo todos los anillos y cuerpos se considerarán conmutativos y unitarios. Para los grupos abelianos se usará notación aditiva (la operación de grupo se denotará por $+$ y el elemento neutro por 0). La clase de un elemento $a \in A$ en un cociente A/B se denotará por $[a]$, pudiento omitirse los corchetes si no hay lugar a confusión. $\mathbb{R}^0$ denota el conjunto $\{0\}$. Para una función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ se denotará la derivada parcial respecto a la componente i-ésima en $\mathbf{x_0}$ por $\partial_{x_i} f(\mathbf{x_0})$, siendo x_i el símbolo elegido para nombrar a esta componente.

$\mathbb{N}$	Números naturales, sin incluir el 0
$\mathbb{Z}$	Números enteros
$\mathbb{Q}$	Números racionales
$\mathbb{R}$	Números reales
$\mathbb{C}$	Números complejos
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	Números enteros no negativos
$\mathbb{R}_{>0}$	Números reales extrictamente positivos
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (Recta completada)
$A \backslash B$	Diferencia conjuntista de A y B
A^c	Complementario de A (en un conjunto ambiente determinado)
A^*	Grupo de unidades del anillo A
$Frac(A)$	Cuerpo de fracciones del dominio de integridad A
$\mathbb{F}_q$	Cuerpo finito con q elementos
$\mathcal{C}^k(I)$	Conjunto de funciones de clase $\mathcal{C}^k$ en el intervalo I
$\mathring{A}$	Interior del conjunto A
$\overline{A}$	Clausura del conjunto A
∂A	Frontera del conjunto A

Capítulo 1

Valoraciones de cuerpos

En este primer capítulo se desarrollarán algunas nociones sobre valoraciones de cuerpos. Este capítulo está dividido en dos secciones. En la primera se definirán los grupos ordenados, se presentarán algunas primeras propiedades de ellos y se definirá lo que es un grupo arquimediano. Se demostrará que todo grupo arquimediano es un subgrupo de $\mathbb{R}$, y se presentará el producto de grupos ordenado con el orden lexicográfico como el ejemplo prototipo de grupo no-arquimediano. La importancia de este ejemplo se pone de manifiesto con el *Teorema de Hahn* (del que no se incluye demostración). Los subapartados finales está dedicados a definir el rango y rango racional, noción que surge de forma natural al tener en mente el producto de grupos ordenados, y se estudiará su relación con la propiedad de un grupo de ser arquimediano.

En la segunda sección se define el concepto de valoración sobre un cuerpo. Después de presentar las propiedades más características de una valoración y sus estructuras asociada (el anillo de valoración y su cuerpo de residuos) se desarrollan varios ejemplos, algunos de ellos con gran relación respecto a la valoración que se estudiará en el capítulo 2. En el último apartado se incluye un ejemplo que muestra cómo obtener valoraciones de distintas combinaciones de rangos y rangos racionales. Este ejemplo será similar a los que aparecerán más adelante en el contexto de los cuerpos de Hardy.

Las referencias usadas principalmente en este capítulo han sido [Bou06, cap. 6], [ZS76, cap. 6] y [Rib99, caps. 1,2,3].

1.1. Grupos ordenados

Definición 1.1 (Grupo ordenado). Llamaremos *grupo ordenado* a un grupo abeliano $(\Gamma, +)$, en el que se ha definido una relación de orden, $\leq$, que sea total y compatible con la operación del grupo, es decir, que cumpla:

$$\forall\ a, b, c \in \Gamma,\ \ a \leq b \ \ \Rightarrow \ \ a + c \leq b + c \tag{1.1}$$

Se denotará $a < b$ si $a \leq b$ y $a \neq b$.

Propiedades 1.2.

i) La condición dada en la definición es equivalente a:

$$\forall a, b, c, d \in \Gamma, a \leq b,\ \ c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$$

ii) Dados $a, b \in \Gamma$, si $a \leq b$ entonces $na \leq nb$ $\forall n \in \mathbb{N}$. También se tiene que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na < nb$, entonces $a < b$.

iii) Si $a > 0$, entonces $-a < 0$

Demostración. i) Si se tiene 1.1 y $c \leq d$, entonces $c + b \leq d + b$. Si $a \leq b$, $a + c \leq b + c \leq b + d$ por transitividad.

ii) Ambas afirmaciones son equivalentes (una es el contrarrecíproco de la otra). Usando indución, $(n + 1)a \leq na + b \leq nb + b = (n + 1)b$.

iii) Sumando $-a$ a ambos lados de la desigualdad se obtiene el resultado. □

Observaciones.

- Estas propiedades permiten definir los elementos positivos y negativos de un grupo ordenado. El orden queda determinado por el conjunto $P = \{a \in \Gamma \,|\, a \geq 0\}$, denominado *cono positivo.*
- La definición de grupo ordenado se puede dar de forma más general (en un grupo no abeliano, y/o con un orden no total), pero en este trabajo nos restringiremos a tratar únicamente grupos abelianos en los que el orden es total.
- Todo subgrupo de un grupo ordenado es un grupo ordenado con el orden inducido.

Notación. Dado un grupo ordenado $(\Gamma, \leq)$ y $a \in \Gamma$, se usará la siguiente notación:

$|a| = \text{máx}\{-a, a\}$

$\Gamma^+ = \{a \in \Gamma \,|\, a > 0\}$ y $\Gamma^- = \{a \in \Gamma \,|\, a < 0\}$

Obsérvese que se cumple la desigualdad triangular, $|a + b| \leq |a| + |b|$. (Debido a las propiedades 1.2, se tiene la igualdad si ambos elementos tienen el mismo signo y en caso contrario $|a+b| < \text{máx}\{|a|, |b|\} \leq |a|+|b|$). Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|na| = n|a|$.

Ejemplos 1.3.

- El grupo formado por un único elemento, $\{0\}$, forma un grupo ordenado, al que se llamará *grupo trivial*.
- Los grupos aditivos de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{Z}$ son grupos ordenados con el orden usual.
- También lo son grupos como $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ (orden usual) y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con el orden lexicográfico y suma definida por componentes (se profundizará en estos ejemplos más adelante).
- Los grupos multiplicativos de $\mathbb{R}_{>0}$ ó $\mathbb{Q}_{>0}$ con el orden usual.

Definición 1.4 (Morfismo de grupos ordenados)**.** Sean $(\Gamma_1, \leq_1)$ y $(\Gamma_2, \leq_2)$ dos grupos ordenados. Llamaremos un *morfismo de grupos ordenados* a un morfismo de grupos $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ que conserve el orden, es decir,

$$\text{Si } a, b \in \Gamma_1,\ \ a \leq_1 b, \text{ entonces } \varphi(a) \leq_2 \varphi(b)$$

Se dirá que φ es un *isomorfismo de grupos ordenados* si es un isomorfismo de grupos y conserva el orden.
En caso de existir tal isomorfismo se dirá que $(\Gamma_1, \leq_1)$ y $(\Gamma_2, \leq_2)$ son *isomorfos como grupos ordenados.*

Nota. Si φ es un morfismo inyectivo, si conserva el orden se tiene que $a \leq_1 b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq_2 \varphi(b)$. Sin embargo, si no es inyectivo no tiene por qué ser así. Se puede tener $\varphi(a) = \varphi(b)$ y $b <_1 a$ (por ejemplo, tomando simplemente el morfismo nulo de grupos).
En particular, φ es un isomorfismo de grupos ordenados si y sólo si lo es su inversa.

Ejemplo 1.5. Por ejemplo, los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ son isomorfos como grupos ordenados (con isomorfismo dado por las aplicaciones e^x y $\log x$).

Proposición 1.6. *Todo grupo ordenado es sin torsión, es decir, el único elemento con orden finito es el* 0*. En particular, todo grupo ordenado no trivial es infinito y el grupo ordenado más pequeño es* $\mathbb{Z}$*, en el sentido de que dado un grupo ordenado* Γ*, existe un morfismo de grupos ordenados inyectivo* $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \Gamma$*.*

Demostración. Sea $a \in \Gamma$ con $a > 0$. Entonces, los elementos $\{n \cdot a \mid n \in \mathbb{Z}\}$ son todos distintos. En efecto, se ve por inducción que si $n \in \mathbb{N}$, $-na < -(n-1)a < \cdots < -a < 0 < a < \cdots < (n-1)a < na$. Por lo tanto $na \neq 0$ y el orden de a es infinito. Si $a < 0$, su orden es el mismo que el de $-a$.
De esta forma se ha visto también que la aplicación $i : \mathbb{Z} \to \Gamma$ dada por $i(m) = ma$ es un morfismo de grupos inyectivo que conserva el orden. $\square$

1.1.1. Grupos arquimedianos y orden lexicográfico

Definición 1.7 (Grupo arquimediano)**.** Se dice que un grupo ordenado Γ es *arquimediano* si para todos $a, b \in \Gamma, \ \ b > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \leq n \cdot b$ (i.e. cumple la *propiedad arquimediana*). En caso contrario, se dirá que es *no-arquimediano*.

Ejemplos 1.8.
$\mathbb{R}$ es un grupo arquimediano. Este hecho es bien conocido y la demostración de la propiedad arquimediana en $\mathbb{R}$, realizada en el grado, se puede encontrar en [Rud76].
Es claro que cualquier subgrupo de uno arquimediano debe serlo, y por lo tanto grupos como $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ y $\mathbb{Q}$ lo son.
Pero, ¿existen grupos arquimedianos que no sean subgrupos de $\mathbb{R}$? El siguiente teorema afirma que no.

Nota. Para demostrarlo, se explicitará una inmersión de un grupo arquimediano cualquiera en $\mathbb{R}$. Como se puede imaginar, será necesario tener en cuenta la naturaleza de los números reales para ello. Recordemos que una forma de definir los números reales es a partir de los llamados *cortaduras de Dedekind*. Una cortadura de Dedekind es un subconjunto A de $\mathbb{Q}$ tal que

a) A no es ni vacío ni total

b) Si $p \in A\,, q \in \mathbb{Q}, \ \ y \ \ q < p\,,$ entonces $q \in A$

c) A no tiene máximo

Estos conjuntos formalizan la idea de un intervalo $(-\infty, a), \ \ a \in \mathbb{R}$ haciendo uso únicamente de los números racionales. Se definen los números reales como el conjunto de cortaduras de Dedekind, que está totalmente ordenado por inclusión y se pueden definir en él las operaciones aritméticas de forma adecuada. En concreto, la suma de dos cortaduras A yB es:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, \ b \in B\}$$

Una descripción más detallada de esta construcción se puede encontrar en [Rud76].

Teorema 1.9. *Todo grupo ordenado arquimediano es isomorfo (como grupo ordenado) a un subgrupo de* $(\mathbb{R}, +)$.

Demostración. Sea Γ un grupo ordenado arquimediano. Si $\Gamma = \{0\}$, el resultado es cierto. Si no, fijemos $a \in \Gamma^+$ y definamos $\varphi_a : \Gamma \to \mathbb{R}$ (que depende de a) de la siguiente forma:
Para cada $b \in \Gamma$ se define el conjunto:

$$C_b = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \ \ (n > 0) \ \mid \ ma < nb\}$$

Veamos que el conjunto C_b define una cortadura de Dedekind:

a) C_b no es vacío ni total. Si $b > 0$, entonces $0 \in C_b$. Si $b \leq 0$, por ser Γ arquimediano existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $-na < b$, por lo que $-n \in C_b$. También existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b < ma$ por lo que $m \notin C_b$.

b) Si $\frac{m_1}{n_1} \in C_b$ y $\frac{m_2}{n_2} < \frac{m_1}{n_1}$, entonces $\frac{m_2}{n_2} \in C_b$, pues $m_2 n_1 a < m_1 n_2 a < n_1 n_2 b$, lo que implica que $m_2 a < n_2 b$ (pues n se puede suponer positivo).

c) C_b no tiene máximo, pues si $ma < nb$, entonces $nb - ma > 0$ y por ser un grupo arquimediano existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $Mnb - Mma > a$, por lo que $\frac{(Mm+1)}{Mn} \in C_b$, pudiendo encontrar un elemento de C_b mayor que cualquier otro $\frac{m}{n}$ dado.

Definimos entonces $\varphi_a(b) = C_b$. Comprobemos que esta aplicació es un morfismo de grupos. Para ello hay que verificar que $C_{b_1} + C_{b_2} = C_{b_1+b_2}$. Por definición $C_{b_1} + C_{b_2} = \{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \mid \frac{m_1}{n_1} \in C_{b_1}, \frac{m_2}{n_2} \in C_{b_2}\}$, y dado un elemento en este conjunto, $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$ se cumple que $(m_1 n_2 + m_2 n_1)a < n_1 n_2 b_1 + n_1 n_2 b_2 = n_1 n_2 (b_1 + b_2)$, por lo que también pertenece a $C_{b_1+b_2}$. Recíprocamente, si $\frac{m}{n} \in C_{b_1+b_2}$, entonces $ma < nb_1 + nb_2$. Tomemos $l \in \mathbb{N}$ tal que $l(n(b_1 + b_2) - ma) > ma$, y $l_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $l_1 ma < lnb_1 < (l_1 + 1)ma$. Definamos $l_2 = l - l_1$. Entonces $l_2 ma < lnb_2$ (de lo contrario $(l_1 + l_2 + 1)ma = (l+1)ma \geq (n(b_1 + b_2)\ )$ y $\frac{m}{n} = \frac{l_1 m}{ln} + \frac{l_2 m}{ln}$, quedando demostrado que pertenece a $C_{b_1} + C_{b_2}$.

Este morfismo es inyectivo, pues si $\varphi_a(b) = 0$, significa que $C_b = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid ma < nb\} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid m < 0,\ n > 0\}$. Por tanto $b \geq 0$, pues de ser $b < 0$, existiría $n \in \mathbb{N}$ con $-a > nb$. Además para todo $c \in \Gamma^+$, $b < c$, pues existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nc > a > nb$. El único elemento no negativo menor que cualquier elemento positivo es 0 (si no, sería estrictamente menor que él mismo), luego φ es inyectiva.

El morfismo φ_a conserva el orden, pues si $b_1 \leq b_2$, entonces $C_{b_1} \subseteq C_{b_2}$, pues dado $\frac{m}{n} \in C_{b_1}$, $ma < nb_1 \leq nb_2$.
El hecho de ser inyectivo y conservar el orden implica que induce un isomorfismo de orden con su imagen, un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

$\square$

A continuación se presenta una forma usual de construir grupos no-arquimedianos.

Orden lexicográfico

Sean $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ grupos ordenados. El producto cartesiano $\prod_{k=1}^{n} \Gamma_k$ es un grupo con la suma por componentes y en él se puede definir el orden total dado por:

$$(a_1, ..., a_n) < (b_1, ..., b_n) \Leftrightarrow \text{Existe } j,\ 1 \leq j \leq n \text{ tal que } a_i = b_i\ \forall\ i < j \text{ y } a_j < b_j$$

Se tiene que si $n > 1$, y los Γ_i son no triviales, el grupo $\prod_{k=1}^{n} \Gamma_k$ es no-arquimediano, pues $(\alpha_1, 0, \ldots, 0) > n(0, \alpha_2, \ldots, 0)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, con $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Esto permite ver, por ejemplo, $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ como grupos ordenados no-arquimedianos.

Orden lexicográfico en productos infinitos

La definición anterior se puede extender a productos de la forma $\prod_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$. Con más generalidad, si I es un conjunto de índices bien ordenado, se puede dotar a $\prod_{k\in I} \Gamma_k$ de un orden total compatible con la suma. (Recordemos que $\prod_{k\in I} \Gamma_k$ es un grupo con la suma definida por componentes y que un conjunto $(I, \leq)$ se dice bien ordenado si todo subconjunto no vacío de I tiene un elemento mínimo). Definimos:

$$(a_i)_{i\in I} < (b_i)_{i\in I} \ \Leftrightarrow a_m < b_m \text{ siendo } m = \text{mín}\{j \in I \,|\, a_j \neq b_j\} \tag{1.2}$$

(El índice m de (1.2) está bien definido por ser I bien ordenado, y este orden es compatible con la suma.)

Con este orden se pueden considerar, por ejemplo, $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *y* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como grupos ordenados.

Exactamente de la misma forma se puede ver como un grupo ordenado la suma directa de grupos $\bigoplus_{k\in I} \Gamma_k := \{(a_i)_{i\in I} \,|\, a_i \in \Gamma_i$ y $a_i = 0\ \forall i \in I$ excepto para un número finito de índices$\}$. Además, si I es bien ordenado $\bigoplus_{k\in I} \Gamma_k$ es un subgrupo de $\prod_{k\in I} \Gamma_k$, y el orden definido como en (1.2) coincide con el orden inducido como subgrupo. Pero lo más interesante en este caso es que no se necesita que I esté bien ordenado. El hecho de que sólo un número finito de componentes sean distintas de 0 permite comparar cualquier par de elementos como en (1.2), pues m sigue estando bien definido. Es inmediato que es compatible con la suma.

En lo que sigue, siempre que aparezca un grupo producto de grupos ordenados se considerará ordenado por el orden lexicográfico, a no ser que se indique lo contrario.

1.1.2. Rango y clases arquimedianas de un grupo ordenado

Se ha visto que los productos del tipo $\mathbb{R}^n$ son grupos ordenados con el orden lexicográfico. Se puede ver $\mathbb{R}$ como un subgrupo de $\mathbb{R}^n$ de n formas distintas, quedándose con la i-ésima componente, $1 \leq i \leq n$. Más en general, hemos visto que en varios ejemplos se puede ver un grupo ordenado como un producto de grupos arquimedianos. El objetivo de esta sección es formalizar cómo contar el número de componentes arquimedianas de un grupo ordenado cualquiera, a lo que se denominará el rango del grupo.

Definición 1.10. Se llama un *subgrupo aislado* de un grupo ordenado $(\Gamma, \leq)$ a un subgrupo $A \leq \Gamma$ propio (i.e. distinto del total) tal que para todos $a \in A$, $b \in \Gamma$, $|b| \leq |a|$ implica $b \in A$.

Observación. Para ver que un subgrupo A es aislado basta comprobar que si $a \in A$, $b \in \Gamma$, y $0 \leq b \leq a$ entonces $b \in A$. Esto es así puesto que en un subgrupo A, $\alpha \in A \Leftrightarrow -\alpha \in A$.

Proposición 1.11. *El conjunto de subgrupos aislados de un grupo ordenado está totalmente ordenado por inclusión.*

Demostración. Sean A y B subgrupos aislados de un grupo ordenado Γ. Si ninguno estuviese contenido en el otro, existirían $a \in A$, $b \in B$ tales que $a \notin B$, $b \notin A$. Ahora bien, si $|b| \leq |a|$, entonces $b \in A$, y si $|a| \leq |b|$, entonces $a \in B$. En cualquier caso tenemos una contradicción. $\square$

Definición 1.12. Se define el *rango* de un grupo ordenado Γ como el número de subgrupos aislados de Γ, en caso de que éste sea finito, y se dirá que es infinito en caso contrario. Se denotará por $rg(\Gamma)$.

Nota. Se puede hacer una diferenciación más precisa en el caso de que un grupo tenga infinitos grupos aislados, definiendo el rango como el tipo de ordinal del conjunto de grupos aislados (bien definido pues este conjunto está bien ordenado). Esta es la definición que se encuentra en [ZS76], pero que no será pertinente en este trabajo.

Definición 1.13. Dos elementos no nulos a, b de un grupo ordenado Γ se dicen *arquimedianamente equivalentes* si existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$|a| \leq n_1|b| \ \ y \ \ |b| \leq n_2|a|$$

Esta relación es de equivalencia en $\Gamma \setminus \{0\}$ y las clases de equivalencia se denominarán *clases arquimedianas*. El conjunto de estas clases se denotará por $\Delta(\Gamma)$.

Proposición 1.14. *Sea Γ un grupo ordenado. El conjunto $\Delta(\Gamma)$ está totalmente ordenado por*

$$[a] \leq [b] \ \Leftrightarrow \ [a] = [b] \quad o \quad [a] \neq [b] \ \ y \ \ |a| < |b|$$

Demostración. En primer lugar, esta definición no depende de los representantes elegidos, pues si $[a] \neq [b]$ y $|a| < |b|$, entonces $|a| < n|b|\ \forall n \in \mathbb{N}$. Si $[a_1] = [a]$ y $[b_2] = [b]$, entonces $|b| < m|b_2|$ para un $m \in \mathbb{N}$ y

$$m|a_1| < N|a| < |b| < m|b_2| \text{ para un } N \in \mathbb{N}$$

De acuerdo con la propiedad ii) de 1.2, $|a_1| < |b_2|$.
Es transitiva y antisimétrica por serlo el orden de Γ. □

Proposición 1.15. *Sea Γ un grupo ordenado. Si $rg(\Gamma)$ es finito, coincide con el cardinal de $\Delta(\Gamma)$, y de ser infinito, también lo es el cardinal de $\Delta(\Gamma)$.*

Demostración. Vamos a dar una correspondencia entre los elementos de $\Delta(\Gamma)$ y los subgrupos aislados de Γ. Dado $[b] \in \Delta(\Gamma)$ definimos

$$G_{[b]} = \bigcup_{[a]<[b]} [a]$$

El conjunto $G_{[b]}$ es un subgrupo de Γ, pues si $a_1, a_2 \in G_{[b]}$, $|a_1| \geq |a_2|$, entonces $|a_1 - a_2| < |b|$, pues en caso contrario $|b| \leq |a_1 - a_2| \leq 2|a_1|$, contradiciendo que $[a_1] < [b]$ en $\Delta(\Gamma)$. Además, este subgrupo es aislado, pues si $a \in G_{[b]}$, $c \in \Gamma$ y $0 \leq c \leq a$, entonces $[c] < [b]$, luego $c \in G_{[b]}$, y $G_{[b]}$ no es el total, pues $b \notin G_{[b]}$.
La aplicación de $\Delta(\Gamma)$ en los subgrupos aislados de Γ así definida es inyectiva por ser el orden definido en $\Delta(\Gamma)$ total. Por tanto, si $rg(\Gamma)$ es finito, también lo será el cardinal de $\Delta(\Gamma)$.
Por otro lado, dada una cadena de subgrupos aislados $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots$, se pueden tomar elementos $a_i \in A_i \setminus A_{i-1}$ para $i = 1, 2, \dots$. Estos elementos cumplen que $[a_i] < [a_{i+1}]$, por lo que $G_{[a_i]} \subsetneq G_{[a_{i+1}]}$. Ésto prueba que si $rg(\Gamma)$ es infinito, el cardinal de $\Delta(\Gamma)$ también lo es, y también prueba el enunciado en el caso finito, pues en ese caso el conjunto de subconjuntos aislados es una cadena finita. □

Ejemplos 1.16.

- El único grupo ordenado de rango 0 es el grupo trivial (que no tiene subgrupos propios). En todo otro grupo, $\{0\}$ forma un subgrupo aislado.
- $rg(\mathbb{Z}) = rg(\mathbb{R}) = 1$
- $rg(\mathbb{Z}^n) = rg(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^n) = rg(\mathbb{R}^n) = n$. Las clases arquimedianas de uno de estos grupos son los conjuntos formados por los elementos cuya primera coordenada no nula es la m-ésima, $m = 1, \dots, n$.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ó $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}$ son de rango infinito.

Proposición 1.17. *Un grupo ordenado no trivial es arquimediano si y sólo si es de rango 1.*

Demostración. Sea Γ un grupo arquimediano, $A \leq \Gamma$ un subgrupo aislado no trivial y sea $a \in A^+$. Para todo $m \in \mathbb{Z}$, $ma \in A$, y por ser Γ arquimediano, para todo $b \in \Gamma$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq |b| \leq ma$. Por definición de grupo aislado, todo elemento de Γ pertenecerá a A, que no será propio. Luego el único subgrupo aislado es el trivial, y Γ es de rango 1.
Recíprocamente, si Γ es de rango 1, dado un elemento $a \in \Gamma^+$ consideramos el conjunto

$$\mathcal{A} = \{b \in \Gamma \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } |b| < na\}$$

$\mathcal{A}$ es un subgrupo de Γ, pues dados $b, c \in \mathcal{A}$, existen n_1 y n_2 tales que $|b| < n_1 a$, $|c| < n_2 a$ y se cumple $|b-c| \leq |b|+|c| \leq n_1 a + n_2 a = (n_1+n_2)a$, por lo que $b - c \in \mathcal{A}$. También a pertenece a $\mathcal{A}$, pues $a < 2a$, y por lo tanto $\mathcal{A} \neq \{0\}$. Además, si $\mathcal{A}$ no fuese el total sería un grupo aislado, pues dados $c \in \Gamma$, $b \in \mathcal{A}$ tales que $|c| < |b|$, se cumple $|c| < |b| < na$ y c pertenecería a $\mathcal{A}$. Como Γ es de rango 1, no tiene grupos aislados no triviales y por tanto $\Gamma = \mathcal{A}$, por lo que cumple la propiedad arquimediana por construcción.

□

Para los grupos ordenados de rango superior conviene tener en mente un ejemplo como $\mathbb{R}^n$. En él, el subgrupo formado por las m últimas componentes $(0 \leq m < n)$ es aislado, y estos son todos sus subgrupos aislados, claramente ordenados por inclusión. Si se realiza el cociente del subgrupo de las $m+1$ últimas componentes por el de las m últimas, obtenemos un grupo isomorfo a $\mathbb{R}$, que consiste en ver las coordenadas de la posición $n-(m+1)$. A continuación se muestran tres enunciados que formalizan estas ideas para productos más generales. No incluimos sus demostraciones, que se pueden encontrar en [ZS76, Págs. 48,49],[Bou06, Págs. 108-111].

Proposición 1.18. *Si A es un subgrupo aislado de Γ, Γ/A es un grupo ordenado con el orden inducido por el paso al cociente. Además, Γ/A se puede ver como un subgrupo de Γ, y el orden anterior coincide con el de subgrupo. En particular, hay una correspondencia entre los subgrupos aislados de Γ/A y los de Γ que contienen a A.*

Corolario 1.19. *Si $\{0\} = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_{n-1}$ son todos los subgrupos aislados de $\Gamma = A_n$, entonces $\Gamma_i = A_i/A_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$ son grupos arquimedianos y Γ es isomorfo a $\prod_{i=1}^{n} \Gamma_k$.*

Corolario 1.20. *Si Γ_1, Γ_2 son dos grupos ordenados,*

$$rg(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = rg(\Gamma_1) + rg(\Gamma_2)$$

1.1.3. Rango racional de un grupo ordenado

Además de contar el número de subgrupos aislados de un grupo ordenado, nos vamos a interesar por otra medida de su tamaño: el rango racional. Esta noción no es exclusiva de grupos ordenados, sino que puede establecerse para cualquier grupo abeliano. La idea es sencilla, transformar un grupo abeliano (un $\mathbb{Z}$-módulo) en un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial y mirar su dimensión [Bou06].

Definición 1.21. Se define el *rango racional* de un grupo abeliano Γ, que se denotará por $rt.rg(\Gamma)$, como la dimensión del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial

$$\Gamma_{\mathbb{Q}} = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

Al igual que con el rango, en caso de no ser finito sólo se indicará que es de rango racional infinito.

Se dice que $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ se ha obtenido por *extensión de escalares*, y es, intuitivamente, el menor $\mathbb{Q}$-e.v. que contiene a Γ (se ha permitido multiplicar por números racionales).

Observación. Algunos grupos ya forman un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial ($\mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n$...), y $\Gamma_{\mathbb{Q}} = \Gamma$ para ellos. Concretamente, para los grupos sin torsión (como es el caso de los grupos ordenados), aquellos que son $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales son exactamente los *grupos divisibles*. Un grupo Γ se dice *divisible* si para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo $a \in \Gamma$ existe un $b \in \Gamma$ tal que $n \cdot b = a$.

Se puede dar una definición equivalente de una forma algo más explícita utilizando la noción de *dependencia racional* [ZS76].

Definición 1.22. Sea Γ un grupo abeliano. Se dice que un subconjunto $A \subset \Gamma$ es *racionalmente dependiente* si existen elementos $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$ y números enteros $n_1, n_2 \ldots, n_m$, no todos nulos, tales que $n_1 a_1 + n_2 a_2 + \cdots + n_m a_m = 0$.
En caso contrario, se dirá que A es *racionalmente independiente*, o que sus elementos son *racionalmente independientes*.

Proposición 1.23. *El rango racional de un grupo abeliano Γ es el mayor cardinal de un subconjunto racionalmente independiente de Γ.*

Demostración. La dimensión de un espacio vectorial es el cardinal del mayor conjunto linealmente independiente. Basta ver por tanto que las condiciones de dependencia lineal en $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ y la de dependencia racional en Γ son equivalentes. En primer lugar, notemos que todo elemento de $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ se puede expresar como un tensor puro, pues $a_1 \otimes \frac{p_1}{q_1} + a_2 \otimes \frac{p_2}{q_2} = q_2 p_1 (a_1 \otimes \frac{1}{q_1 q_2}) + q_1 p_2 (a_2 \otimes \frac{1}{q_1 q_2}) = (q_2 p_1 a_1 + q_1 p_2 a_2) \otimes \frac{1}{q_1 q_2}$. Si se considera una combinación lineal de los elementos $a_1 \otimes q_1, a_2 \otimes q_2, \ldots, a_m \otimes q_m \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$ (sobre $\mathbb{Q}$) que sea igual a 0, se pueden quitar los denominadores de los escalares y los elementos q_i. De este modo, sólo aparecen números enteros en la expresión, que se podrán considerar multiplicando a los elementos del grupo Γ. De esta forma se ha visto que la independencia lineal de un conjunto en $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ es equivalente a la de independencia racional. $\square$

Proposición 1.24 (Rango racional de un producto)**.** *Sean Γ_1 y Γ_2 dos grupos abelianos de rango racional finito. Se cumple que*

$$rt.rg(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = rt.rg(\Gamma_1) + rt.rg(\Gamma_2)$$

Demostración. Basta señalar que $\Gamma_1 \times \Gamma_2 = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ como $\mathbb{Z}$-módulos y que $(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq (\Gamma_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \oplus (\Gamma_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. $\square$

Ejemplos 1.25.

- $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ tienen rango racional 1. ($\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$).
- $\mathbb{Z}^n$ tiene rango racional n, pero el de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^n$ es $2n$. (Resaltemos que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ como grupo, ¡pero no como grupo ordenado si a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se le dota del orden lexicográfico!)
- $\mathbb{R}$ tiene rango racional infinito.

Proposición 1.26. *Sea Γ un grupo ordenado. Entonces se tiene*

$$rg(\Gamma) \leq rt.rg(\Gamma)$$

Demostración. Para demostrar este hecho vamos a ver que si Γ tiene n subgrupos aislados distintos $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$, con $\Gamma_0 \subsetneq \Gamma_1 \subsetneq \Gamma_2 \cdots \subsetneq \Gamma_{n-1} \subsetneq \Gamma_n = \Gamma$ podemos encontrar n elementos racionalmente independientes en Γ. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Gamma$ tales que $a_i \in \Gamma_i \backslash \Gamma_{i-1}$ (en particular todos ellos distintos y no nulos). Supongamos que existiese una combinación $m_1 a_1 + \cdots + m_n a_n = 0$, con $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ no todos nulos, y sea k el mayor subíndice tal que $m_k \neq 0$. Se tiene que $m_k a_k = -m_1 a_1 - m_2 a_2 - \cdots - m_{k-1} a_{k-1}$. Todos los elementos del lado de la derecha pertenecen a Γ_{k-1}, y por lo tanto también $m_k a_k$, lo que nos lleva al absurdo de que $a_k \in \Gamma_{k-1}$, pues es un subgrupo aislado y $0 \leq |a_k| \leq |m_k a_k|$.

$\square$

1.1.4. Teorema de la Inmersión de Hahn

En la sección 1.1.1 se probó que todo grupo arquimediano es subgrupo de $\mathbb{R}$, y se dieron ejemplos de distintos grupos no-arquimedianos. Pero, ¿se pueden describir todos los grupos ordenados como subgrupo de algún grupo modelo? ¿Son los ejemplos presentados todos los posibles?
La respuesta a la primera pregunta es afirmativa, y tal descripción la proporciona el llamado Teorema de la Inmersión de Hahn, demostrado por

Hans Hahn en 1907 [Ehr95]. Concretamente, afirma que todo grupo ordenado es isomorfo (como grupo ordenado) a un subgrupo de un "Producto de Hahn" de copias de $\mathbb{R}$. Este producto de Hahn generaliza el orden lexicográfico cuando el conjunto I que indexa un producto no es necesariamente bien ordenado. Además, nos permite construir grupos con un conjunto Δ de clases de comparabilidad (totalmente ordenado) cualquiera. Presentamos a continuación esta construcción y el enunciado del teorema, del que se puede encontrar una demostración en [Gra56]. En [Ehr95] se encuentra una detallada explicación de la interpretación de este resultado junto a una interesante digresión histórica.

Sea Δ un conjunto totalmente ordenado. Definimos:

$$W(\Delta) = \left\{(a_i) \in \prod_{i\in\Delta} \mathbb{R} \;\middle|\; \{i \in \Delta \mid a_i \neq 0\} \text{ está bien ordenado } \right\}$$

Dotamos a este conjunto con una estructura de grupo ordenado con la suma definida por componentes y el orden dado por (1.2) (bien definido por habernos restringido a los subconjuntos bien ordenados de Δ). Son destacables otras formas de representar este grupo. Recordemos que el producto $\prod_{i\in\Delta} \mathbb{R}$ es el conjunto de aplicaciones de Δ en $\mathbb{R}$. Por tanto, un elemento de $W(\Delta)$ se puede representar como lo que se llama una *serie de Hahn*:

$$\sum_{i\in\Delta} a_i X^i \;\;,\;\; a_i \in \mathbb{R}\,;\; \{i \in \Delta \mid a_i \neq 0\} \text{ bien ordenado}$$

Enunciemos finalmente las propiedades del grupo $W(\Delta)$.

Proposición 1.27. *$W(\Delta)$ es un grupo divisible, y su conjunto de clases arquimedianas es Δ.*

Teorema 1.28 (Teorema de la Inmersión de Hahn)**.** *Sea Γ un grupo ordenado y $\Delta(\Gamma)$ su conjunto de clases arquimedianas. Entonces Γ es isomorfo a un subgrupo de $W(\Delta(\Gamma))$.*

Teorema 1.29 (Teorema de Completitud de Hahn)**.** *No existe una extensión propia de $W(\Delta)$ que tenga a Δ como conjunto de clases arquimedianas. (Se dice que $W(\Delta)$ es arquimediano-completo).*

Los grupos ordenados con los que nos encontraremos en los ejemplos propuestos a lo largo de este trabajo serán fundamentalmente productos cartesianos, o sumas directas. Sin embargo, también nos encontraremos con grupos de los que no sabremos dar una descripción explícita. Este teorema nos permite tener constancia de que todos los grupos ordenados "se comportan de forma similar" a los ejemplos dados, y que el estudio de estos ejemplos proporciona una buena idea de la generalidad de la teoría.

Estos resultados han sido ampliamente generalizados (a grupos parcialmente ordenados, cuerpos ordenados... Ver [Ehr95]).

1.2. Valoraciones

1.2.1. Definiciones y propiedades básicas

Dado un grupo ordenado Γ, se denotará por Γ_∞ al conjunto $\Gamma \cup \{\infty\}$ (siendo ∞ un elemento que no pertenezca a Γ). Se extiende a él el orden total de Γ por $a < \infty \ \forall\ a \in \Gamma$, y se define la operación $\infty + a = \infty \ \forall\ a \in \Gamma_\infty$. De este modo $+$ sigue siendo compatible con este orden en Γ_∞.

Definición 1.30 (Valoración)**.** Sea K un cuerpo. Una *valoración sobre* K es una aplicación sobreyectiva $v : K \setminus \{0\} \to \Gamma$, donde Γ es un grupo ordenado, que verifica:

(V1) $v(xy) = v(x) + v(y)$

(V2) Si $x \neq -y$, $v(x+y) \geq \text{mín}\{v(x), v(y)\}$.

Una tal aplicación se extiende a todo K definiendo $v(0) = \infty$, extendiendo el dominio de llegada a Γ_∞.
Al par (K, v) le llamaremos *cuerpo valuado.*

Observaciones.

- La condición (V1) indica que v es un homomorfismo del grupo multiplicativo $(K^*, \cdot)$ en $(\Gamma, +)$. El grupo imagen Γ se llama *grupo de la valoración*, o *grupo de valores de* v.
- La desigualdad (V2) se denomina *desigualdad ultramétrica.*
- En cualquier cuerpo K, la aplicación definida por $v(x) = 0$ si $x \neq 0$, $v(0) = \infty$ es una valoración, que se denomina *valoración trivial* o *impropia.*
- Si el grupo de valores de v es $\mathbb{Z}$, se dice que v es una *valoración discreta.*
- La restricción de una valoración $v : K \to \Gamma_\infty$ a un subcuerpo de K, $L \subseteq K$, es una valoración de L.

Directamente de la definición de valoración se pueden deducir algunas primeras propiedades:

Propiedades 1.31.
Sea (K, v) un cuerpo valuado con grupo de valores Γ.

i) $v(1) = 0$

ii) $v(w) = 0$ para todo $w \in K$ *raíz de la unidad.* (Es decir, si existe $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ tal que $w^n = 1$)

iii) $v(-x) = v(x)\ \ \forall x \in K$

iv) $v(x-y) \geq \text{mín}\{v(x), v(y)\}\ \ \forall x, y \in K$

v) $v(\frac{1}{x}) = -v(x)\ \ \forall x \in K,\ \ x \neq 0$

vi) $v(\frac{y}{x}) = v(y) - v(x)\ \ \forall x, y \in K,\ \ x \neq 0$

vii) $v(\sum_{i=1}^{n} x_i) \geq \text{mín}\{v(x_i) : i = 1 \dots n\}$

Demostración. i) $v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) + v(1)$ por (V1). Luego debe cumplirse $v(1) = 0$.
ii) Si $w^n = 1$ se debe cumplir, (por (V1)), que $v(w^n) = nv(w) = v(1) = 0$. Por ser Γ sin torsión, $v(w) = 0$.
iii) $v(-x) = v(-1) + v(x) = 0 + v(x)$.
iv) $v(x-y) = v(x + (-y)) \geq \text{mín}\{v(x), v(-y)\} = \text{mín}\{v(x), v(y)\}$.
v) $0 = v(1) = v(x \cdot \frac{1}{x}) = v(x) + v(\frac{1}{x})$, por lo que $v(\frac{1}{x}) = -v(x)$.
vi) $v(\frac{y}{x}) = v(y) + v(\frac{1}{x})$.
vii) Basta aplicar inducción. Para $n = 1$ ó $n = 2$ se cumple por definición, y suponiéndolo cierto para $n-1$, $v(\sum_{i=1}^{n} x_i) = v(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n) \geq v(\text{mín}\{v(x_i) : i = 1 \dots n-1\} + x_n)$, que a su vez, por (V2), es mayor o igual que $\text{mín}\{\text{mín}\{v(x_i) : i = 1 \dots n-1\}, v(x_n)\} = \text{mín}\{v(x_i) : i = 1 \dots n\}$. □

Proposición 1.32. *Sea (K, v) un cuerpo valuado. Si para un conjunto de elementos $x_1, \dots, x_n \in K$ el minimo de los valores $v(x_i)$ es alcanzado por uno sólo de ellos, entonces*

$$v(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \text{mín}\{v(x_i) : i = 1 \dots n\} \tag{1.3}$$

En particular

$$v(x+y) = v(x) \text{ si } v(x) < v(y) \tag{1.4}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $v(x_1) < v(x_i)\ \forall i = 2, \dots, n$. Por un lado se tiene que $v(x_1 + \cdots + x_n) \geq \text{mín}\{v(x_i) : i = 1 \dots n\} = v(x_1)$. Si se cumpliese $v(x_1 + \cdots + x_n) > v(x_1)$, se tendría que $v(x_1) = v((x_1 + \cdots + x_n) - (x_2 + \cdots + x_n)) \geq \text{mín}\{v(x_1 + \cdots + x_n), v(x_2 + \cdots + x_n)\} > v(x_1)$, pues $v(x_2 + \cdots + x_n) > v(x_1)$ por hipótesis, llegando así a una contradicción. □

Observación. Una familia importante de valoraciones son aquellas cuyo grupo de valores es un subgrupo de $\mathbb{R}$ (llamadas *valoraciones reales*). Este hecho permite, entre otras cosas, trasladar la topología de $\mathbb{R}$ al cuerpo K considerado, definir una noción de "sucesión de Cauchy" en él y construir el "completado de K" para esa valoración de una forma análoga a como se construye $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$. Un estudio detallado de esta construcción y la teoría a la que da lugar este tipo de valoraciones se puede encontrar en [Rib99].

Definición 1.33 (Valoraciones equivalentes)**.** Dadas dos valoraciones del cuerpo K, $v_1 : K \to \Gamma^1_\infty$ y $v_2 : K \to \Gamma^2_\infty$, se dirá que son *equivalentes* si exite un isomorfismo de grupos ordenados, $\varphi : \Gamma^1 \to \Gamma^2$ tal que para todo $x \in K^*$, $v_2(x) = \varphi(v_1(x))$.

Ejemplo 1.34. Si Γ es un subgrupo no trivial de $\mathbb{R}$ (es decir, de rango 1), la aplicación $\varphi_c : \Gamma \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_c(a) = c \cdot a$, con $c \in \mathbb{R}_{>0}$, induce un ismorfismo ordenado con su imagen (pues si $a < b$, $ca < cb$ por ser $c > 0$).
Por tanto, dada una valoración con llegada en un subgrupo de $\mathbb{R}$, se pueden construir valoraciones equivalentes multiplicando sus valores por una constante positiva.
De igual forma, si Γ es un subrupo de $\mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$), se pueden construir valoraciones equivalentes multiplicando cada componente por una constante positiva. Es decir, fijando $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_{>0}$ y definiendo la aplicación

$$\varphi_{c_1,\ldots,c_n} : \Gamma \to \mathbb{R}^n \ , \ \ \varphi_{c_1,\ldots,c_n}(a_1, \ldots, a_n) = (c_1 \cdot a_1, \ldots, c_n \cdot a_n)$$

En [Rib99, Págs. 10,11] se encuentra una demostración del hecho de que para las valoraciones reales, toda valoración equivalente es de la forma explicada en este ejemplo.

Proposición 1.35. *Si K es un cuerpo finito, su única valoración es la trivial.*

Demostración. Supongamos que K tiene q elementos ($K \simeq \mathbb{F}_q$), y sea $v : K \to \Gamma_\infty$ una valoración suya. Dado $a \in K^*$, se cumple que $a^{q-1} = 1$, y por la propiedad ii) $v(a) = 0$. □

Nota. En [Rib99, Pág. 112] se demuestra que los únicos cuerpos que sólo admiten una valoración son las extensiones algebraicas de $\mathbb{F}_p$.

Definición 1.36 (Rango y rango racional)**.** Sea $v : K \to \Gamma_\infty$ una valoración del cuerpo K. Se define el *rango* de v, denotado por $rg(v)$, como el rango de su grupo de valores, Γ. Del mismo modo, se define su *rango racional*, $rt.rg(v)$, como el rango racional de Γ.

En muchos casos, una forma práctica de definir valoraciones en un cuerpo K es definirlas en un subanillo A tal que K sea (isomorfo a) su cuerpo de fracciones y extenderla usando la propiedad vi). Este hecho se detalla en la siguiente proposición:

Proposición 1.37. *Sea A un dominio de integridad, K su cuerpo de fracciones, Γ un grupo ordenado y $v : A \setminus \{0\} \to \Gamma$ una aplicación cumpliendo las propiedades (V1) y (V2) de la definición 1.30. Entonces la aplicación $\tilde{v} : K \to \Gamma_\infty$ definida por*

$$\begin{cases} \tilde{v}(\frac{a}{b}) = v(a) - v(b) & , \ si \quad a, b \in A^* \\ \tilde{v}(x) = \infty & , \ si \quad x = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

es una valoración de K, cuya restricción a $A\setminus\{0\}$ es v. Además, es la única valoración de K con esta propiedad.

Demostración. En primer lugar, la aplicación $\tilde{v}$ está bien definida independientemente del representante de $\frac{a}{b}$ elegido. Si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, entonces $a_1b_2 = a_2b_1$, y $v(a_1) + v(b_2) = v(a_2) + v(b_1)$, por cumplir v la propiedad (V1). En consecuencia $\tilde{v}(\frac{a_1}{b_1}) = v(a_1) - v(b_1) = v(a_2) - v(b_2) = \tilde{v}(\frac{a_2}{b_2})$.
De existir una valoración $\widehat{v}$ de K que coincida en $A \setminus \{0\}$ con v debe ser esta aplicación, pues se debe cumplir la propiedad vi) para todo elemento $\frac{a}{b} \in K$, y se quiere que $\widehat{v}(a) = v(a)\,\forall\, a \in A^*$.
La aplicación $\tilde{v}$ es una valoración, pues si $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \in K$ se tiene:

(1) • Si $a \neq 0$ y $c \neq 0$,

$$\tilde{v}(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}) = \tilde{v}(\frac{ac}{bd}) = v(ac)-v(bd) = (v(a)-v(b))+(v(c)-v(d)) = \tilde{v}(\frac{a}{b})+\tilde{v}(\frac{c}{d})$$

• Si a ó c son 0, $\tilde{v}(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}) = \tilde{v}(0) = \infty$, y $\tilde{v}(\frac{a}{b}) + \tilde{v}(\frac{c}{d}) = \infty + \alpha = \infty$.

(2)

$$\tilde{v}(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}) = v(ad+cb)-v(bd) \geq \min\{v(a)+v(d), v(c)+v(b)\}-v(b)-v(d) =$$

$$\begin{cases} v(a) - v(b) = \tilde{v}(\frac{a}{b}) & \text{si} \quad v(a) + v(d) \leq v(c) + v(b) \quad \text{i.e, si} \quad \tilde{v}(\frac{a}{b}) \leq \tilde{v}(\frac{c}{d}) \\ v(c) - v(d) = \tilde{v}(\frac{c}{d}) & \text{si} \quad v(c) + v(b) \leq v(a) + v(d) \quad \text{i.e, si} \quad \tilde{v}(\frac{c}{d}) \leq \tilde{v}(\frac{a}{b}) \end{cases}$$

(3) El único elemento que es enviado a ∞ es el 0.

□

Nota. En lo que sigue, siempre que se haga uso de esta propiedad se denotará de la misma forma la aplicación v y su extensión, incurriendo en un pequeño abuso de notación.

1.2.2. Anillo de valoración. Cuerpo residual

En este apartado vamos a asociar a una valoración $v : K \to \Gamma_\infty$ algunos objetos algebraicos que proporcionarán información relevante sobre ella. En particular lo que se llamará el anillo de la valoración determinará completamente dicha valoración. Ello permite establecer una correspondencia entre las valoraciones y algunos tipos de anillos, facilitando el estudio de ambos conceptos.

Proposición y Definición 1.38 (Anillo de una valoración. Cuerpo residual)**.** *Sea K un cuerpo y sea $v : K \to \Gamma_\infty$ una valoración sobre K.*

- *El conjunto $\mathcal{A}_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ es un subanillo de K. Se le denominará anillo de la valoración.*

- *Las unidades del anillo $\mathcal{A}_v$ son exactamente los elementos $x \in K$ tales que $v(x) = 0$. Es decir, $\mathcal{A}_v^*$ es el núcleo de v (como homomorfismo del grupo K^* en Γ).*
- *El conjunto $\mathfrak{m}_v = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ es el único ideal maximal de $\mathcal{A}_v$, (es decir, $\mathcal{A}_v$ es un anillo local). Se le denomina el ideal de la valoración.*
- *Si $x \in K \backslash \mathcal{A}_v$, $x^{-1} \in \mathfrak{m}_v$.*
- *El cociente $\kappa_v = \mathcal{A}_v / \mathfrak{m}_v$ es un cuerpo, llamado el cuerpo residual de la valoración (o también cuerpo de residuos). La imagen de un elemento de $\mathcal{A}_v$ por el paso al cociente en κ_v se denomina su v-residuo.*

Demostración. En primer lugar, $0, 1 \in \mathcal{A}_v$. Dados $x, y \in \mathcal{A}_v$, $v(x-y) \geq \text{mín}\{v(x), v(y)\} \geq 0$, y $v(xy) = v(x) + v(y) \geq 0$, por lo que $x - y$ y xy pertenecen a $\mathcal{A}_v$, que será entoces un subanillo de K.
Si $x \in \mathcal{A}_v^*$, existe $u \in \mathcal{A}_v$ tal que $xu = 1$, luego $v(x) + v(u) = v(1) = 0$. Al ser $v(x)$ y $v(u)$ no negativos, deben ser ambos nulos. Recíprocamente, si $v(x) = 0$, sabemos que su inverso en K cumple $v(x^{-1}) = -v(x) = 0$. Por tanto $x^{-1} \in \mathcal{A}_v$ y x es inversible en $\mathcal{A}_v$.

El conjunto $\mathfrak{m}_v$ es exactamente $\mathcal{A}_v \backslash \mathcal{A}_v^*$, por lo que en caso de ser ideal, debe ser maximal y el único con esta propidad. Efectivamente, $\mathfrak{m}_v$ es ideal, por el mismo razonamiento que prueba que $\mathcal{A}_v$ es subanillo (con desigualdades estrictas). Esto implica que κ_v es un cuerpo.
Por último, si $x \in K \backslash \mathcal{A}_v$, entonces $v(x) < 0$, $v(x^{-1}) = -v(x) > 0$ y $x^{-1} \in \mathfrak{m}_v$. □

En la siguiente proposición comprobamos el hecho de que una valoración está totalmente determinada por su anillo de valoración.

Proposición 1.39. *Dos valoraciones sobre un mismo cuerpo K tienen el mismo anillo de valoración si y sólo si son equivalentes. En este caso tendrán además los mismos ideales maximales y cuerpos de residuos.*

Demostración. Sean $v_1 : K \to \Gamma^1_\infty$ y $v_2 : K \to \Gamma^2_\infty$ dos valoraciones, con anillos de valoración $\mathcal{A}_{v_1}$ y $\mathcal{A}_{v_2}$ respectivamente.
Si v_1 y v_2 son equivalentes, existe un isomorfismo de grupos ordenados $\varphi : \Gamma^1 \to \Gamma^2$ tal que para todo $x \in K^*$, $v_2(x) = \varphi(v_1(x))$. Por ser isomorfismo de grupos ordenados, cumple $v_2(x) = \varphi(v_1(x)) \geq 0 = \varphi(0) \Leftrightarrow v_1(x) \geq 0$, por lo que $\mathcal{A}_{v_1}$ y $\mathcal{A}_{v_2}$ coinciden. Al ser $\mathcal{A}_{v_1} = \mathcal{A}_{v_2}$ anillos locales, su único ideal maximal debe coincidir y también coincidirán sus cuerpos residuales.

Supongamos ahora que los anillos de valoración coinciden. Se construye un isomorfismo entre Γ^1 y Γ^2 de la siguiente forma. Dado $a \in \Gamma^1$ existe $x \in K$ tal que $a = v_1(x)$, y definimos $\varphi : \Gamma^1 \to \Gamma^2$, $\varphi(v_1(x)) = v_2(x)$. Hace falta comprobar que la definición no depende del elemento x elegido. Si se tiene que $v_1(x) = v_1(x')$, entonces $v_1(\frac{x}{x'}) = 0$, es decir, $\frac{x}{x'} \in \mathcal{A}_{v_1}^* = \mathcal{A}_{v_2}^*$, y por tanto también $v_2(\frac{x}{x'}) = 0$, por lo que $v_2(x) = v_2(x')$, como se quería ver. Este mismo argumento demuestra que φ es inyectiva. φ es sobreyectiva por serlo v_2 y también es morfismo de grupos, pues $\varphi(v_1(x) + v_1(y)) = \varphi(v_1(xy)) = v_2(xy) = v_2(x) + v_2(y)$.

Sólo falta comprobar que conserva el orden. Si $v_1(x) \leq v_1(y)$, entonces $v_1(\frac{y}{x}) \geq 0$ y $\frac{y}{x} \in \mathcal{A}_{v_1}$. Al coincidir los dos anillos de valoración también se cumple que $v_2(x) \leq v_2(y)$.

□

Observación (Anillo de valoración)**.** Debido a la proposición 1.39 se puede establecer la equivalencia entre las nociones de valoración y de lo que se denomina un *anillo de valoración.* Esto permite definir valoraciones de otra forma, lo que contribuye a una mayor generalidad y aplicabilidad de esta teoría.

Concretamente, se define un *anillo de valoración* como un dominio de integridad A tal que todo $x \in Frac(A)^*$ cumple que o bien $x \in A$, ó $x^{-1} \in A$. Ya hemos visto que el anillo de una valoración cumple esta propiedad. Recíprocamente, dado un anillo de valoración A se puede definir una valoración en su cuerpo de fracciones como se puede ver en [Bou06, Pág. 100].

1.2.3. Ejemplos característicos de valoraciones

Vamos a considerar y analizar aquí algunos de los ejemplos más significativos de valoraciones, frecuentemente usados en muchos ámbitos de las matemáticas y que, en buena medida, han motivado el desarrollo de la teoría.

Valoración p-ádica en $\mathbb{Z}$

Sabemos que todo número entero m admite una factorización en numeros primos de la forma

$$m = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$$

con $p_1, \ldots p_n \in \mathbb{Z}$ primos distintos, y $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Además, esta factorización es "esencialmente única" (única salvo posibles elecciones del signo de los p_i y reordenación de éstos).

Por tanto, fijado un número primo p, cada número entero m se escribe en la forma $m = p^r \cdot m'$, siendo m' un entero no divisible por p y $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ bien definido a partir de p y m. Definiremos el *orden de m en p* como el exponente r de p en esta descomposición, y lo denotaremos como $v_p(m)$. La aplicación $v_p : \mathbb{Z}\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$ así obtenida cumple las propiedades (V1) y (V2) de una valoración. En efecto, si $m_1 = p^{r_1} m_1'$ y

$m_2 = p^{r_2}m_2'$ se tiene que $m_1 \cdot m_2 = p^{r_1+r_2}m_1'm_2'$, por lo que se cumple (V1). Además, $m_1 + m_2 = p^{\text{mín}\{r_1,r_2\}}(p^{r_1-\text{mín}\{r_1,r_2\}}m_1' + p^{r_2-\text{mín}\{r_1,r_2\}}m_2')$ y $v_p(m_1+m_2) \geq \text{mín}\{r_1,r_2\}$, cumpliéndose (V2).

Aplicando la proposición 1.37 se obtiene una valoración del cuerpo $\mathbb{Q}$ dada por

$$\begin{gathered} v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}_\infty \\ v_p(\tfrac{m}{n}) = v_p(m) - v_p(n) \;\; si \;\; m \neq 0 \\ v_p(0) = \infty \end{gathered} \tag{1.6}$$

que lleva el nombre de *valoración p-ádica.*

Se puede demostrar (ver [Rib99, Secc. 1.3] ó [ZS76, p.39]) que éstas son las únicas valoraciones no triviales que se pueden definir en $\mathbb{Q}$.

Veamos ahora cuál es el anillo, ideal y cuerpo residual de esta valoración. Sea $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ con m y n primos entre sí. Se cumple que $v_p(\frac{m}{n}) \geq 0 \Leftrightarrow v_p(m) \geq v_p(n) \Leftrightarrow p \nmid n$. Por ello tenemos

$$\mathcal{A}_{v_p} = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,\ p \nmid n\}$$

Del mismo modo,

$$\mathfrak{m}_{v_p} = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,\ p|m \;\text{ y }\; p \nmid n\}$$

Es decir, $\mathcal{A}_{v_p}$ es exactamente la localización $\mathbb{Z}_{(p)}$.
Mostremos ahora que el cuerpo de residuos es (isomorfo a) $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$. Consideramos el paso al cociente $\varphi : \mathcal{A}_{v_p} \to \kappa_{v_p}$, y su restricción a $\mathbb{Z}$, $\varphi|_\mathbb{Z}$. El núcleo de φ es $\mathfrak{m}_{v_p}$, y por tanto el de $\varphi_{|\mathbb{Z}}$ es $\mathfrak{m}_{v_p} \cap \mathbb{Z} = (p)$, por lo que $\mathbb{Z}/(p) \simeq Im(\varphi|_\mathbb{Z})$. Basta ver que la restricción a $\mathbb{Z}$ sigue siendo sobreyectiva, pero esto es claro, pues si m y n son primos entre sí, el valor de m/n es el mismo que el de m.

Esta aplicación fue estudiada por primera vez de forma implícita por Hensel en 1887, y la noción de valoración surge en gran medida de su generalización como "medida de la multiplicidad de un elemento". El propio Hensel desarrolló la teoría de los números p-ádicos, donde la valoración p-ádica se puede utilizar para definir una métrica.

Esta valoración se puede generalizar al cuerpo de fracciones de cualquier Dominio de Factorización Única (DFU) sin grandes modificaciones. En particular, en $K(x)$ se puede considerar la valoración $p(x)$-ádica asociada a un polinomio irreducible $p(x) \in K[x]$, siendo el próximo ejemplo un caso particular de ésto.

Valoración de orden en el cuerpo de funciones racionales

Dado K un cuerpo, el *cuerpo de funciones racionales con coeficientes en* K es el cuerpo de fracciones de $K[x]$, que se denotará por $K(x)$.
Fijado un $a \in K$ se define para un $f \in K[x]$ su *orden en* a por:

$$ord_a(f) = \text{mín}\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^{(r)}(a) \neq 0\}$$

Donde $f^{(r)}$ denota la derivada formal r-ésima de f. Coincide con el valor $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ para el que

$$f(x) = (x-a)^r \tilde{f}(x) \;\; ; \;\; \tilde{f} \in K[x]\,,\; \tilde{f}(a) \neq 0$$

Denotando por $deg(f)$ el grado de un polinomio no nulo $f \in K[x]$, se generaliza la noción de orden para $a = \infty$ como:

$$ord_\infty(f) = -deg(f)$$

De este modo, para todo $a \in K \cup \{\infty\}$ la aplicación $v_a : K[x]\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$, $v_a(f) = ord_a(f)$ cumple las propiedades (V1) y (V2) de la definición 1.30. Para $a \in K$, ésto se comprueba igual que en el caso anterior, y para $a = \infty$ basta ver que dados $f, g \in K[x]\backslash\{0\}$ $deg(f \cdot g) = deg(f) + deg(g)$ y $v_\infty(f+g) = -deg(f+g) \geq \text{mín}\{v_\infty(f), v_\infty(g)\}$, pues $deg(f+g) \leq \text{máx}\{deg(f), deg(g)\}$. Gracias a la proposición 1.37 se obtiene entonces una valoración sobre $K(x)$, llamada *valoración de orden en un punto* a:

$$\begin{gathered} v_a : K(x) \to \mathbb{Z}_\infty \\ v_a(\tfrac{f}{g}) = ord_a(f) - ord_a(g) \\ v_\infty(0) = \infty \end{gathered} \tag{1.7}$$

Si $a \in K$, mediante un argumento de divisibilidad exactamente igual al del ejemplo anterior obtenemos que $\mathcal{A}_{v_a}$ es la localización $K_{(x-a)}$ y su cuerpo residual es $\kappa_{v_a} \simeq K[x]/(x-a)$.

El caso $a = \infty$ es algo distinto. Tenemos que $v_\infty(\frac{f}{g}) \geq 0$ (resp. $= 0$) $\Leftrightarrow$ $deg(g) \geq deg(f)$ (resp. $deg(g) = deg(f)$. Luego el anillo y el ideal de esta valoración son, respectivamente:

$$\mathcal{A}_{v_\infty} = \{f/g \mid f, g \in K[x],\; g \neq 0,\; deg(f) \leq deg(g)\} \cup \{0\}$$

$$\mathfrak{m}_{v_\infty} = \{f/g \mid f, g \in K[x],\; g \neq 0,\; deg(f) < deg(g)\} \cup \{0\}$$

Veamos que en este caso el cuerpo de residuos κ_{v_∞} es isomorfo a K. Definimos una aplicación $\varphi : \mathcal{A}_{v_\infty} \to K$ que asocia a un cociente $f/g \in \mathcal{A}_{v_\infty}$, $f = a_0 + \cdots + a_n x^n$, $g = b_0 + \cdots + b_m x^m$, el valor 0 si $deg(f) < deg(g)$ (ó si $f = 0$) y a_n/b_n si $deg(f) = deg(g)$. Es inmediato comprobar que φ es un morfismo de anillos sobreyectivo, y por definición su núcleo es $\mathfrak{m}_{v_\infty}$. Por tanto $\kappa_{v_\infty} \simeq K$.

Nota. Si K es un subcuerpo de $\mathbb{R}$, los elementos de $K(x)$ definen funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y esta valoración mide "lo rápido que tienden a 0" en un entorno de a. El v_a-residuo de una fracción es exactamente el límite en a de esta función, si pertenece a $\mathbb{R}$. Este límite define en K lo que se llama un *lugar*. Este concepto de lugar se puede generalizar a cualquier cuerpo, y resulta ser equivalente al de valoración, como se muestra en [ZS76].
La asignación $v(0) = \infty$ se puede interpretar de una forma coherente por ser 0 una función que tiende a 0 más rápido que cualquier otra.
Éste ha sido también un buen ejemplo para ilustrar la interpretación geométrica de la localización de un anillo.

Series meromorfas formales

Se define el *anillo de series formales con coeficientes en un cuerpo K* como el conjunto $K[[x]]$ de aplicaciones $s : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to K$. Escribimos uno de estos elementos como

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{donde } a_n = s(n)$$

Se define la suma y multiplicación en $K[[x]]$ de forma análoga a las operaciones respectivas con polinomios.

Dada una serie $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se define su *orden* como $ord(s) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid a_n \neq 0\}$ si este conjunto es no vacío (i.e. si $s \neq 0$), y $ord(0) = \infty$. Como se ha visto en la asignatura de Ecuaciones Algebraicas, se tiene una representación de los elementos del cuerpo de fracciones de $K[[x]]$, $K((x))$, como series meromorfas, más concisa y cómoda que como cocientes de series formales. Por ello daremos la definición de la valoración directamente en esos otros términos.

Teniendo en cuenta que los elementos inversibles de $K[[x]]$ son precisamente las series de orden 0, un cociente de series formales $\frac{s_1}{s_2}$ se puede escribir de la forma $\frac{s_1}{x^r \tilde{s_2}}$, con $r = ord(s_2)$, y por tanto $\tilde{s_2}$ invertible, y $\frac{s_1}{s_2} = x^{-r}(s_1 \tilde{s_2}^{-1})$. Por tanto el cuerpo de fracciones de $K[[x]]$ es:

$$K((x)) = \{ \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n \mid n_0 \in \mathbb{Z},\ a_n \in K \ \forall n \geq n_0 \}$$

Se define el *orden* de un elemento $s \in K((x))$ del mismo modo que en $K[[x]]$: si $s(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n \neq 0$, se puede suponer que $a_{n_0} \neq 0$, y $ord(s) = n_0$. Si $s(x) = 0$, se define $ord(s) = \infty$.
La aplicación

$$w : K((x)) \backslash \{0\} \to \mathbb{Z}$$

$$w(s) = ord(s)$$

es una valoración. En efecto, al multiplicar dos series el menor exponente es la suma de los dos órdenes y al sumar dos series nunca va a aparecer un término de orden más negativo que los que ya había.

Observación. Nótese que la restricción de esta valoración al anillo de polinomios $K[x]$ es la valoración de orden en 0 (y por tanto también al restringirla al cuerpo $K(x)$, que se puede ver como un subcuerpo de $K((x))$).

Para la valoración w se tiene que

$$\mathcal{A}_w = \{ \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n \ \mid \ n_0 \geq 0\} = K[[x]]$$

$$\mathfrak{m}_w = \{ \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n \mid n_0 > 0\} = \{s \in K[[x]] \mid s \text{ no tiene término independiente}\}$$

Es claro que $\kappa_w \simeq K$, pues el término independiente de un elemento $s \in K[[x]]$ determina su clase de equivalencia en $\mathcal{A}_w/\mathfrak{m}_w$. Concretamente, el morfismo $\varphi : \mathcal{A}_w \to K$, $\varphi(s) = s(0)$ es sobreyectivo y su núcleo es $\mathfrak{m}_w$.

Intersección de curvas algebraicas

Mostramos ahora un ejemplo de valoración para medir "la cantidad de contacto" entre dos curvas planas en un punto (por ejemplo, $O = (0,0) \in \mathbb{C}^2$). Éste será el primer ejemplo en el que necesitaremos más de un valor para cuantificar una propiedad, en concreto, será una valoración de rango 2. Para las definiciones y resultados sobre la multiplicidad de intersección se ha consultado [Ful08, cap. 3].

Dado un polinomio irreducible $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, todo otro polinomio $g(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ se escribe de forma única como

$$g = f^r \tilde{g} \ ; \ f \nmid \tilde{g}$$

El exponente r se denomina la *multiplicidad de la componente* f en g. De este modo f y $\tilde{g}$ son curvas sin componentes comunes, pero siguen pudiendo tener contacto en el punto $O = (0,0)$, medido por su *multiplicidad de intersección en* O. Definimos $v_f : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por $v_f(g) = (r,m)$, con r el exponente en la descomposición $g = f^r \tilde{g}$, $f \nmid \tilde{g}$ y m la multiplicidad de intersección de f y $\tilde{g}$. Se considera $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ordenado por el orden lexicográfico, lo que corresponde con la idea de que tener una multiplicidad de componente mayor corresponde a un mayor contacto que cualquier multiplicidad de intersección arbitraria. Las propiedades necesarias para verificar que cumple (V1) y (V2) se pueden consultar en [Ful08]. Por tanto, v_f se extiende al cuerpo de fracciones $\mathbb{C}(x,y)$.

1.2.4. Construcción de valoraciones con rango y rango racional arbitrario

En la sección 1.1 hemos podido dar numerosos ejemplos de grupos ordenados con distintos rangos y rangos racionales. Sin embargo, no es tan sencillo definir valoraciones de forma que sus grupos de valores sean los grupos de esos ejemplos. De hecho, la única valoración presentada hasta ahora cuyo grupo de valores no es $\mathbb{Z}$ es la última expuesta (con grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$). A continuación nos disponemos a presentar una clase de ejemplos que permiten construir valoraciones de cualquier combinación de rango y rango racional. Nos basamos en las referencias [ZS76, Págs. 100-103] y [Bou06, Págs. 102-103].

En primer lugar, veamos que para cualquier $n, m \in \mathbb{N}$ dados se puede construir un grupo ordenado de rango n y rango racional $n+m$ definiendo en $\mathbb{Z}^{n+m}$ un orden adecuado. En el caso $m = 0$, basta tomar el orden lexicográfico, y para $n = 1$, $m > 0$ se pueden tomar m elementos $\alpha_1 = 1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, algebraicamente independientes (por ejemplo $\alpha_i = \sqrt{n_i}$, siendo n_i el i-ésimo natural que no es un cuadrado perfecto) y dotar a $\mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] \subseteq \mathbb{R}$ del orden inducido como subgrupo. Para el resto de casos se puede tomar una combinación de ambos $\Gamma = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$.

Un orden así definido induce un *orden monomial* en el anillo $K[x_1, \ldots, x_{n+m}]$ (esto es, un buen orden en el conjunto de los monomios de este anillo compatible con las operaciones, similar al visto en la asignatura de Ecuaciones Algebraicas para tratar la división de polinomios). Dado un polinomio $p(x_1, \ldots, x_{n+m}) \in K[x_1, \ldots, x_{n+m}]$, llamaremos *monomio líder* al mayor monomio de p para el orden considerado. Se define el *grado de un polinomio* p como el elemento de $\mathbb{Z}^{n+m}$ correspondiente al exponente del monomio líder de p y se denotará por $deg(p)$. Se define la aplicación

$$v : K[x_1, \ldots, x_{n+m}] \backslash \{0\} \to \Gamma$$
$$v(p(x_1, \ldots, x_{n+m})) = -deg(p)$$

Veamos que cumple los axiomas de una valoración. El monomio líder del producto de dos polinomios p y q será el producto de sus monomios líderes, y sus exponentes se sumarán, por lo que $v(p \cdot q) = v(p) + v(q)$, verificando (V1). Por otro lado, al sumar dos polinomios no puede aparecer ningún término de grado mayor que $\max\{deg(p), deg(q)\}$, (al igual que en el caso de una variable), por lo que se cumple (V2). La aplicación es sobreyectiva pues los exponentes de los monomios se corresponden con los elementos de $\mathbb{Z}^{n+m}$. Por la proposición 1.37, queda definida una valoración en el cuerpo $K(x_1, \ldots, x_{n+m})$. Debido a haber elegido el grupo Γ de esta forma, esta valoración tendrá rango n y rango racional $n + m$.

Se puede realizar una construcción exactamente igual para polinomios en infinitas variables, $K(x_i \,|\, i \in I)$, haciendo la correspondencia de los exponentes con un orden en $\bigoplus_{k\in I} \mathbb{Z}$.

En el siguiente capítulo encontraremos otras valoraciones con rangos superiores a 1. Como se verá, muchas de ellas serán similares a las presentadas en este ejemplo en el sentido de que serán valoraciones de una extensión de K por un conjunto de elementos comparables entre ellos, siendo algunos infinitamente mayores a los otros.

Otra forma de construir valoraciones con rangos arbitrarios es utilizando las *series de Hahn* presentadas en la sección 1.1.4. Si Γ es un grupo ordenado, se puede definir una multiplicación en el conjunto

$$K[X^\Gamma] = \{s(X) = \sum_{i\in\Gamma} a_i X^i \ \Big|\ a_i \in K \ , \ \{i \in \Gamma \mid a_i \neq 0\} \ \text{ bien ordenado } \}$$

que hace de él un cuerpo [Ehr95, Pág. 185]. La aplicación $v : K[X^\Gamma] \to \Gamma\,,\ v(s) = \text{mín}\{i \in \Gamma \mid s(i) \neq 0\}$ es una valoración con grupo de valores Γ. Estas series son una generalización de las *series de Puiseux*, contenidas en el cuerpo de las series de Hahn para $\Gamma = \mathbb{Q}$. Las series de Puiseux tienen gran importancia por su utilidad para parametrizar curvas algebraicas y por formar un cuerpo algebraicamente cerrado.

Además, un teorema de Kaplansky (cf. [Ehr95, Pág. 192]) nos indica que todo cuerpo valuado (con algunas condiciónes adicionales si es de característica $p > 0$) es isomorfo a un subcuerpo de $\mathbb{R}[X^\Gamma]$, y la valoración inducida por este isomorfismo en $\mathbb{R}[X^\Gamma]$ es equivalente a la dada anteriormente.

Capítulo 2

Cuerpos de Hardy

En este segundo capítulo, que constituye el grueso del trabajo, se definirán y estudiarán los cuerpos de Hardy. El objetivo que se persigue introduciendo estas estructuras es el de obtener un marco adecuado para estudiar las propiedades del crecimiento asintótico de funciones no oscilantes. Se comenzará mostrando las primeras propiedades de estos cuerpos, que permiten dotarlos de una rica estructura de cuerpo diferencial ordenado (no arquimediano en muchos casos).

En la segunda sección se demostrará que la extensión de un cuerpo de Hardy por un elemento algebraico sobre él es un cuerpo de Hardy; y que la extensión por un elemento que satisface una ecuación diferencial algebraica de primer orden adecuada también es de Hardy. Para llegar a demostrar este segundo teorema tendremos que definir el concepto de cuerpo real-cerrado y ver que el conjunto de funciones algebraicas sobre un cuerpo de Hardy es un cuerpo de Hardy real-cerrado. Con estos resultados podremos construir formalmente el cuerpo de las L-funciones de Hardy en la sección 2.3.

A continuación se definirán las relaciones de comparación de gérmenes de funciones con la notación introducida por du Bois-Reymond, que se ha vuelto estándar en el área tras su uso por Hardy y Bourbaki. Se mostrarán ejemplos de su uso, los límites de su aplicación y la conveniencia de los cuerpos de Hardy para su empleo. Estas relaciones de comparación llevan a la definición de una valoración en un cuerpo de Hardy, que "mide" el orden de infinitud de las funciones. La conocida regla de l'Hôpital permite obtener importantes propiedades de esta valoración. Al final de la sección se analizan las nociones de rango y rango racional en esta valoración, viendo algunos ejemplos y conclusiones que se pueden obtener.

Finalmente, se aplicará todo lo visto a lo largo del capítulo en la demostración del teorema de Borel-Van den Dries, un ejemplo de cómo las herramientas aquí introducidas permiten obtener resultados que de otra forma serían mucho más díficiles de demostrar.

2.1. Definición y propiedades

Para esta sección seguiremos principalmente el apéndice del capítulo V de [Bou07].

Queremos estudiar el crecimiento de funciones de variable real con llegada en $\mathbb{R}$ en los entornos de un punto $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Notemos en primer lugar que podremos restingir nuestro estudio al crecimiento asintótico de funciones en entornos de ∞. En efecto, si se quieren estudiar las funciones cerca de un punto $a \in \mathbb{R}$, basta hacer el cambio de variable $x \mapsto \frac{1}{x-a}$, y para las funciones definidas en un entorno de $-\infty$, el cambio $x \mapsto -x$.

Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de funciones a valores reales definidas en un entorno de infinito, es decir,

$$\mathcal{H} = \{f : [a, \infty) \to \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\}$$

Se denotará $D_f \subseteq \mathbb{R}$ al dominio de definición de una función $f : D_f \to \mathbb{R}$.

Definimos una relación en $\mathcal{H}$ como:

$$f \sim g \iff \exists\, b \in D_f \cap D_g \text{ tal que } f(x) = g(x)\ \forall\, x \geq b$$

Es decir, dos funciones de $\mathcal{H}$ están relacionadas si existe un intervalo $[b, \infty)$ en el que ambas están definidas y sus restricciones a él coinciden. Esta relación es de equivalencia. Sea $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}/_\sim$ el conjunto de clases de equivalencia por esta relación. La clase de una función f en $\mathcal{H}_\infty$ se denominará su *germen en el infinito*.

La construcción de este conjunto $\mathcal{H}_\infty$ nos permite varias cosas. Por un lado, centramos nuestra atención en los valores de la función “cerca de ∞”. Se dirá que una propiedad en $\mathcal{H}$ es *local* si es compatible con esta relación de equivalencia (es decir, si no depende del representante). Son precisamente estas propiedades las que estamos interesados en estudiar (son propiedades locales, por ejemplo, ser derivable o tener un signo constante para $x > a$ para algún $a \in \mathbb{R}$). Por otro lado, el conjunto $\mathcal{H}_\infty$ tiene una estructura de $\mathbb{R}$-álgebra (es un anillo y un $\mathbb{R}$-espacio vectorial). En efecto, definimos la suma (resp. multiplicación) de dos gérmenes de funciones como la suma (resp. multiplicación) usual de la restricción de dos representantes al dominio de definición común. El elemento neutro para la suma es el germen de la función idénticamente nula, y para el producto el germen de la función constante de valor 1.

Mientras no haya lugar a confusión se denotará igual una función y su germen. Siempre que se diga que un germen $\tilde{f} \in \mathcal{H}_\infty$ tiene una propiedad P, será equivalente a decir que para todo representante f de $\tilde{f}$ existe un valor $M \in \mathbb{R}$ tal que f cumple P en $[M, \infty]$. También se dirá (haciendo un uso incorrecto pero práctico de esta palabra) que f cumple P *eventualmente*, o *en el infinito*. Diremos que una función $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *se anula indefinidamente* si existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, $x_n \to \infty$ tal que $f(x_n) = 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Todas las propiedades que se van a estudiar son claramente locales, y en la mayoría de los casos no haremos mención expresa de este hecho.

Nota. En este trabajo nos centraremos únicamente en el estudio de funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}$ con llegada en $\mathbb{R}$. Esto se puede generalizar, por un lado a funciones definidas en un conjunto filtrado cualquiera (en nuestro caso la base del filtro son los intervalos $[a, \infty)$), y por otro lado a aplicaciones con llegada en un espacio vectorial normado (sobre $\mathbb{R}$ o incluso sobre un cuerpo valuado cualquiera). De esta forma se podrían definir cuerpos de Hardy sobre conjuntos más generales. Una presentación detallada de estas definiciones se encuentra en [Bou07].

Observación (Composición de gérmenes)**.** Es relevante comentar que en general no está definida la composición de gérmenes de funciones. Sin embargo, si una función f tiende a infinito cuando $x \to \infty$, todos los representantes de su germen tendrán este comportamiento, y para todo germen $\tilde{g} \in \mathcal{H}_\infty$, la composición $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ está bien definida tomando el germen de la composición de representantes.
También es posible hacer referencia al concepto distinto de la composición de un germen $\tilde{f}$ de $\mathcal{H}_\infty$ con una función $g \in \mathcal{H}$ que tenga por dominio $D_g = I$, si todo representante de $\tilde{f}$ toma eventualmente valores en I. La composición $g \circ \tilde{f}$ es en este caso un elemento bien definido de $\mathcal{H}_\infty$, que tiene por representante $g \circ f$, siendo f un representante cualquiera de $\tilde{f}$.

Definición 2.1 (Cuerpo de Hardy)**.** Un cuerpo de Hardy k es un subanillo de gérmenes de funciones de $\mathcal{H}_\infty$ que cumple:

(H1) Es un cuerpo.

(H2) Es estable por derivación. Es decir, si $\tilde{f} \in k$, existe un entorno de infinito, $[a, \infty)$, en el que un representante f es derivable, y (el germen de) su derivada pertenece a k.

Una función f de un cuerpo de Hardy debe cumplir que para cada $n \geq 0$, su derivada n-ésima $f^{(n)}$ existe eventualmente y es continua. Una función que cumpla esta condición se dirá que es *infinitamente derivable en infinito.*

Una función $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ que sea de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un intervalo (a', ∞) es infinitamente derivable en infinito, pero el recíproco es falso. Se podría considerar una función que fuese obteniendo más regularidad a medida que x creciese (por ejemplo que fuesen de clase $\mathcal{C}^n$ pero no $\mathcal{C}^{n+1}$ en cada intervalo $[n, n+1)$). Así pues, no podemos concluir de la definición que los elementos de un cuerpo de Hardy admitan representantes de clase C^∞. No obstante, en todos los ejemplos que vamos a tratar en esta memoria, los elementos admiten representantes de clase C^∞ (incluso, en la mayor parte de los casos, analíticos).

La noción de cuerpo de Hardy, pese a su aparente simplicidad, impone condiciones restrictivas a sus elementos, y van a restringir nuestro estudio a una clase de funciones que tendrán un comportamiento muy conveniente para comparar su crecimiento asintótico. La condición (H1) indica que todo germen f de k no idénticamente nulo debe ser invertible. Esta condición se cumple si y sólo si un representante de f no toma el valor 0 en un intervalo de la forma $[a, \infty)$. Como f debe ser continua, será estrictamente positiva o negativa a partir de un momento (f tendrá un signo bien definido). De acuerdo con la condición (H2), este hecho se aplica igualmente a su derivada f', por lo que f será estrictamente creciente, decreciente o constante. Y se aplicará también a sus derivadas de cualquier orden, lo que hace que tenga un "crecimiento muy regular" y la definición de cuerpo de Hardy impone una *condición de no oscilación* sobre sus elementos.

Sin embargo, la condición de no oscilación dada por que una función f pueda pertenecer a un cuerpo de Hardy es más restrictiva que el hecho de que f y todas sus derivadas tengan un signo constante en infinito. En efecto, hay funciones tales que tanto ella como todas sus derivadas tienen un signo constante en infinito, y sin embargo no pueden formar parte de ningún cuerpo de Hardy. Un ejemplo sencillo es la función $f(x) = e^x + \sin(x)$, que cumple que $f^{(n)}(x) > 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \geq 1$. Sin embargo, f no puede formar parte de ningún cuerpo de Hardy, pues $f - f' = \sin(x) - \cos(x)$, se anula en todo $x = \pi/4 + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, es decir, estas funciones oscilan entre ellas (figura 2.1).

A continuación se resumen las propiedades ya comentadas:

Propiedades 2.2.
Sea k un cuerpo de Hardy y $f \in k$.

i) Cualquier representante de f toma valores únicamente estrictamente positivos, estrictamente negativos o nulos para x superiores a un valor $a \in \mathbb{R}$. Escribiremos $f > 0$, $f < 0$ ó $f = 0$ respectivamente.

ii) Cualquier representante de f es eventualmente estrictamente creciente,

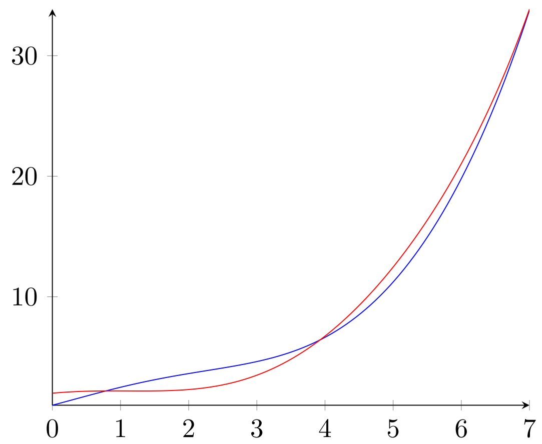

Figura 2.1: Funciones $e^{x/2} + \sin x$ y $e^{x/2} + \cos x$ oscilando entre ellas.

estrictamente decreciente, o constante.

iii) Para cualquier representante de f existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ en $\overline{\mathbb{R}}$.

iv) La relación definida en k por

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f - g \leq 0$$

dota a k de un orden total tal que $(k, +)$ es un grupo ordenado y $\forall \; f, g, h \in k, \;\; h \geq 0 \;\; f \leq g \;\; \Rightarrow \;\; f \cdot h \leq g \cdot h$.
Un cuerpo con un orden que satisface estas propiedades es llamado *cuerpo ordenado*.

Demostración. Como ya se ha dicho, i) y ii) se siguen de la existencia de inversa de f y f' y de su continuidad. La propiedad iii), se deduce del hecho de que f sea creciente, decreciente o constante en un entorno de infinito.
iv): Es claro que esta relación es un orden, y es total pues si $f, g \in k$, $f - g \in k$ y cumple i). La compatibilidad con la suma y el producto son propiedades básicas de las funciones. □

Observación. Todo cuerpo ordenado $(k, \leq)$ debe ser de característica 0 (pues el grupo $(k, +)$ es sin torsión, de acuerdo con la proposición 1.6). Se dice que un cuerpo ordenado es arquimediano si lo es su grupo aditivo $(k, +)$, siendo esto equivalente a que $\mathbb{Q}$ sea denso en k [Pre84, Prop. 1.19].
La mayoría de cuerpos de Hardy no serán arquimedianos.

Además, en un cuerpo de Hardy podemos tomar la derivada de cualquier elemento, obteniéndose así lo que se denomina un *cuerpo diferencial* (en el sentido algebraico). En general, un cuerpo diferencial es simplemente un cuerpo dotado de una operación unaria que se comporta de forma similar a la derivación de funciones (que cumpla la regla de Leibniz). En términos precisos:

Definición 2.3 (Cuerpo diferencial. Cuerpo de constantes)**.** Llamaremos *cuerpo diferencial* a un cuerpo k junto con una aplicación $d : k \to k$ que cumpla

1. $d(f+g) = d(f)+d(g)\ \forall f, g \in k$ (es homomorfismo del grupo $(k, +)$).
2. $d(f \cdot g) = d(f) \cdot g + f \cdot d(g)\ \forall f, g \in k$.

El subconjunto de un cuerpo diferencial $\mathcal{C} = \{f \in k \mid d(f) = 0\}$ es un subcuerpo denominado *cuerpo de constantes de* k.

Resumiendo, si $k \subseteq \mathcal{H}_\infty$ es un cuerpo de Hardy, entonces $(k\,,\ \leq\,,\ ')$ es un cuerpo ordenado diferencial. En las secciones siguientes vamos a ver que también podemos dotar a k de una valoración natural que "mide" el orden de magnitud de los valores que toma un elemento cuando el argumento x es suficientemente grande y analizaremos la relación que existe entre las estructuras de orden, diferencial y valorada de un cuerpo de Hardy.

Ejemplos 2.4.
Son cuerpos de Hardy:

- $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$, identificando cada número con el germen de la función constante que toma ese valor. En general, cualquier subcuerpo de $\mathbb{R}$ lo será, y éstos son los únicos arquimedianos.
  Todo cuerpo de Hardy k tiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo, y su cuerpo de constantes será el mayor subcuerpo de $\mathbb{R}$ contenido en k.
- El cuerpo $\mathbb{R}(x)$ de funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{R}$. (Basta comprobar que la derivada de una función racional es una función racional).
- $\mathbb{R}(x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Q})$ ó $\mathbb{R}(x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R})$
- $\mathbb{R}(x, e^x, \log(x))$, como se demostrará en la siguiente sección.

En todos estos ejemplos se podría sustituir $\mathbb{R}$ por un subcuerpo suyo. En lo que sigue consideraremos principalmente cuerpos de Hardy que contengan a $\mathbb{R}$. Además, gracias a la siguiente proposición, podremos suponerlo en nuestros argumentos cuando sea necesario.

Proposición 2.5. *Si k es un cuerpo de Hardy, el cuerpo $k(\mathbb{R})$ (menor extensión de k que contiene todas las constantes reales) es de Hardy.*

Demostración. Admitamos por ahora que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el cuerpo $k(\alpha)$ es de Hardy. Consideremos el conjunto $K = \{g \in \mathcal{H}_\infty \mid \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in$

$\mathbb{R}$ tales que $g \in k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$. Aplicando un número finito de veces el hecho de que $\tilde{k}(\alpha)$ es de Hardy para un $\tilde{k}$ de Hardy cualquiera, la extensión $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ también lo es. Por tanto para toda $g \in K$, g^{-1} y g' pertenecen a K. Además, si $g, h \in K$, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ para los que $g, h \in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$. Por ello, $g - h$ y gh están en K, y por tanto K es un cuerpo de Hardy. K está claramente contenido en $k(\mathbb{R})$, de donde se deduce que $k(\mathbb{R}) = K$ es de Hardy.
Para demostrar que $k(\alpha)$ es de Hardy para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos razonar viendo que para todo polinomio $P(T) \in k[T]$, $P(\alpha)$ es una función diferenciable que no se anula indefinidamente. (Por inducción en el grado de P, por ejemplo, dividiendo por el coeficiente dominante se obtiene un polinomio de un grado menor que toma el mismo valor indefinidamente). Este resultado será también una consecuencia inmediata de los teoremas de la próxima sección. □

2.2. Extensiones de cuerpos de Hardy

Se busca ahora poder construir nuevos cuerpos de Hardy a partir de los ya conocidos. En concreto, los resultados presentados en esta sección permiten dar condiciones sobre una función $f \in \mathcal{H}_\infty$ y un cuerpo de Hardy k para que se pueda construir un nuevo cuerpo de Hardy añadiendo f a k. Usualmente, la función f que queremos añadir al cuerpo de Hardy suele no ser explícita, pero sabemos que es solución de algún problema natural en términos del cuerpo base k. Aquí nos ceñimos a las dos situaciones más comunes: si f es algebraica sobre k, o si f es solución de una ecuación diferencial de primer orden adecuada. Se presentan estos resultados siguiendo a [Ros83a]. Para el estudio de cuerpos reales-cerrados se ha consultado [Lan05, cap. 11] y [Pre84, caps. 1,2,3].

2.2.1. Extensiones algebraicas

Teorema 2.6 (Extensión algebraica de un cuerpo de Hardy)**.** *Sea k un cuerpo de Hardy y $f \in \mathcal{H}_\infty$ un germen de una función continua tal que existe un polinomio $P(T) \in k[T]$ con coeficientes en k tal que $P(f) = 0$ (es decir, f algebraico sobre k). Entonces el anillo $k[f] \subseteq \mathcal{H}_\infty$ es un cuerpo de Hardy.*

Nota. Si f perteneciese a una extensión de cuerpos de k (o simplemente a un dominio de integridad), el hecho de que $k[f]$ es igual a su cuerpo de fracciones sería conocido. Sin embargo, en principio con nuestras hipótesis no podemos asegurar que esto ocurra. La particularidad del anillo $\mathcal{H}_\infty$ (de poder evaluar las funciones en puntos) nos permitirá remitirnos al caso conocido.

Demostración. Probemos en primer lugar que $k[f]$ es un cuerpo. Si se pudiese tomar un polinomio anulador de f, $P(T)$, que fuese irreducible en $k[T]$, entonces $k[f]$ sería isomorfo a $k[T]/(P)$, y sería por tanto un cuerpo (de acuerdo con el primer teorema de isomorfismo, y el hecho de que $k[T]$ es un dominio de ideales principales y (P) es un ideal maximal si P es irreducible). Probemos por tanto que existe un polinomio irreducible en $k[T]$ que anula a f.

Sea $P(T) \in k[T]$ no nulo de grado mínimo tal que $P(f) = 0$ (es decir, $P(f)(x) = 0$ para todo x en un intervalo $I = [a, \infty)$ para representantes de f y de los coeficientes de P). Supongamos que P se puede escribir como un producto de la forma $P = P_1 P_2$, siendo P_1 y P_2 polinomios no constantes. Podemos suponer P_1 y P_2 primos entre sí, pues si al tomar la factorización en irreducibles de P aparecen factores distintos, basta separarlos entre P_1 y P_2 sin que aparezca ningún factor común. Si P fuese de la forma R^m, siendo R un polinomio irreducible, entonces $P(f)(x) = (R(f)(x))^m = 0$ para todo x en I, por lo que R anularía a f y contradecería la minimalidad del grado de P. Existe por tanto una identidad de Bezout en $k[T]$ de P_1 y P_2,

$$A(T)P_1(T) + B(T)P_2(T) = 1 \ , \ A, B \in k[T]$$

Por tanto, $P_1(f)$ y $P_2(f)$ no se pueden anular simultáneamente (en un intervalo $I = [a, \infty)$ para a suficientemente grande). Pero por otro lado, para cada $x \in I$, $P_1(f)(x) = 0$ ó $P_2(f)(x) = 0$, por lo que se podría separar I en $P_1(f)^{-1}(\{0\})$ y $P_2(f)^{-1}(\{0\})$, dos conjuntos cerrados disjuntos, (pues cada $P_i(f)$ es continua). Para no contradecir la conexión del intervalo se debe tener que uno de los polinomios P_i anula a f en I, y en este caso se contradice el hecho de haber tomado P de grado mínimo. Se concluye que $k[f]$ es un cuerpo.

Veamos que $k[f]$ es estable por derivación. Basta comprobar que (un representante de) f es derivable y su derivada pertenece a $k[f]$, pues de ser así cualquier elemento $R(f) \in k[f]$ será derivable con derivada en ese cuerpo en virtud de la regla de la cadena.

Sea $P(T)$ un polinomio anulador de f irreducible. Notemos que los coeficientes de P son funciones diferenciables definidas en I, por lo que podemos verlo como una función diferenciable en dos variables, $P(x, T)$. Tenemos por lo tanto una ecuación que nos da una fórmula implícita para f:

$$P(x, f(x)) = 0 \quad \text{en} \quad (a, \infty)$$

Se busca poder aplicar el teorema de la función implícita, para lo que bastaría comprobar que $\partial_T P(x, f(x)) \neq 0$ en (a, ∞) (por $\partial_T P$ denominaremos la derivada respecto a la segunda componente, y por $\partial_x P$ respecto a la primera). Al ser P irreducible, es primo con su polinomio derivado, $\partial_T P$, por lo que se puede tomar una identidad de Bezout como anteriormente, y al ser $P(x, f(x)) = 0$ en I, $\partial_T P(x, f(x))$ no puede anularse en ese intervalo.

De acuerdo con el teorema de la función implícita se deduce que f es diferenciable en I y derivando la función constante $P(x, f(x)) = 0$ se obtiene:

$$f'(x) = -\frac{\partial_x P(x, f(x))}{\partial_T P(x, f(x))}$$

que se encuentra en $k(f)$, como se quería demostrar.

$\square$

Ejemplo 2.7. Como corolario se obtiene que si k es un cuerpo de Hardy que contiene a la función $Id(x) = x$, para toda función $f \in k$, las extensiones

$$k[\sqrt{|f|}] \ ; \ \ k[|f|^{\frac{p}{q}}] \text{ (con } \ p, q \in \mathbb{Z}) \ , \ \text{ ó } \ k[|f|^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Q}]$$

son cuerpos de Hardy. En efecto, la función $f^{\frac{p}{q}}$ es raíz del polinomio $T^q - f^p$. Esto muestra el carácter de cuerpo de Hardy para los dos primeros ejemplos. El tercer ejemplo es consecuencia de esta última propiedad teniendo en cuenta que cualquiera de sus elementos está en una extensión finita de la forma

$$k \subseteq k[f^{\alpha_1}, f^{\alpha_2}, ..., f^{\alpha_r}]$$

Tras el teorema 2.10 se verá que los exponentes α se pueden tomar en $\mathbb{R}$, resultado esperable pero que no se deduce fácilmente con los resultados vistos hasta ahora.

Es claro que la clausura algebraica de un cuerpo de Hardy k no es un cuerpo de Hardy (ni siquiera un subcuerpo de $\mathcal{H}_\infty$) pues las soluciones complejas de ecuaciones algebraicas no forman parte del anillo $\mathcal{H}_\infty$. Sin embargo, restingiéndonos a las soluciones que sí son funciones reales obtenemos lo que se conoce como *clausura real* del cuerpo k, que será en efecto un cuerpo de Hardy. Antes de demostrar este resultado (clave en la prueba del teorema 2.10), presentaremos estos conceptos. Para una demostración de la siguiente afirmación se puede consultar [Pre84] o [Lan05].

Proposición y Definición 2.8 (Cuerpo Real-Cerrado)**.** *Sea k un cuerpo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *$k[\sqrt{-1}]$ es una extensión propia (esto es, distinta a k) algebraicamente cerrada.*

ii) *k no es algebraicamente cerrado y todo polinomio $P \in k[T]$ se descompone en producto de factores lineales y factores cuadráticos de discriminante negativo.*

iii) *-1 no es una suma de cuadrados en k y k no admite extensiones algebraicas propias con esta propiedad.*

Se dirá que un cuerpo k es real-cerrado si cumple alguna de estas condiciones.

Observación. También es notable que la condición de que -1 no sea suma de cuadrados en k es equivalente al hecho de que k admita un orden total (es sencillo de ver que si k admite un orden, los axiomas de cuerpo ordenado fuerzan que los cuadrados sean positivos y por tanto también su suma). Los cuerpos que cumplan esta condición se denominan *reales*. Por otro lado, de la misma manera que se prueba que todo cuerpo tiene una clausura algebraica, se puede probar que si k es un cuerpo real, entonces existe una única (salvo isomorfismo) extensión minimal K de k que es real-cerrada. A esta extensión se le llamará la *clausura real-cerrada de k*.

Se denotará por $\mathcal{H}^0_\infty$ el subanillo de $\mathcal{H}_\infty$ formado por los gérmenes que admiten un representante continuo en un entorno de infinito.

Del teorema 2.6 se desprende el siguiente resultado:

Corolario 2.9. *Sea k un cuerpo de Hardy, y denotemos por K el conjunto de elementos de $\mathcal{H}^0_\infty$ algebraicos sobre k. Entonces K es un cuerpo de Hardy y es real-cerrado. Es además la clausura real-cerrada de de k*

Demostración. Sean f y g dos elementos de K. De acuerdo con el teorema 2.6, $k[f]$ y $k[f][g] = k[f,g]$ son cuerpos de Hardy, y además son extensiones algebraicas de k, por lo que están contenidos en K. Por lo tanto, la suma, multiplicación, inversos y derivadas n-ésimas de f y g pertenecen a $k[f,g] \subseteq K$, quedando probado que K es un cuerpo de Hardy.

Demostremos ahora que K es real-cerrado, para lo que veremos que $K[i]$ es algebraicamente cerrado (donde i es una raíz cuadrada de -1). Esto es equivalente a que $K[i]$ sea la clausura algebraica de k (pues la extensión $K[i]/k$ es algebraica) y basta probar que cualquier polinomio $P(T) \in k[T]$ irreducible de grado $n > 0$ admite n raíces en $K[i]$: si fuese así y $K[i]$ admitiese una extensión algebraica, E, todo elemento a de E tendría un polinomio anulador irreducible en k que se descompondría en $K[i]$ en factores lineales, por lo que $a \in E$.

Sea por tanto $P(x,T) = a_0(x) + \cdots + a_n(x)T^n \in k[T]$ un polinomio irreducible. Los coeficientes a_i son gérmenes de k, para los que podemos tomar un $M \in \mathbb{R}$ y representantes suyos que estén definidos y sean continuos en $I = [M, \infty)$. Al ser P irreducible, será coprimo con su polinomio derivado, y se puede tomar una identidad de Bezout

$$A(x,T)P(x,T) + B(x,T)\partial_T P(x,T) = 1 \;\forall\, x \in I$$

como en 2.6. Por lo tanto, para cada $x_0 \in I$, $P(x_0,T) \in \mathbb{R}[T]$ tiene n raíces complejas, $z_1(x_0), \ldots, z_n(x_0)$, que son distintas, pues no pueden ser raíces de su polinomio derivado de acuerdo con la identidad de Bezout. Queremos ver que estas raíces se pueden tomar como funciones continuas de x, y que pertenecen a $K[i]$ (es decir, que sus partes reales e imaginarias son algebraicas sobre k). Para ello usaremos el teorema de las funciones implícitas.

El polinomio P define una función $P : I \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(x, z) \longmapsto P(x, z)$ de forma que para cada $x_0 \in I$ fijo, $P(x_0, z)$ es una función de variable compleja que es holomorfa, por ser un polinomio. Sean u y v la parte real e imaginaria respectivamente de esta función. Identifiquemos también $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ haciendo uso de las variables $z = y + iw$ y veamos entonces P como la aplicación (en variables reales):

$$\psi : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\psi(x, y, w) = P(x, y + iw) = (u(x, y, w), v(x, y, w))$$

De este modo, denotando por $u_j(x)$ y $v_j(x)$ las partes reales e imaginarias de cada cero $z_j(x)$, tenemos que $\psi(x, u_j(x), v_j(x)) = 0$ en todo $x \in I$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemman para la función holomorfa $z \mapsto P(x_0, z)$ en cada $x_0 \in I$ establecen que para cada (x_0, y_0, w_0) donde ψ está definida se verifica:

$$\partial_y u(y_0, w_0) = \partial_w v(y_0, w_0) \quad \text{y} \quad \partial_y v(y_0, w_0) = -\partial_w v(y_0, w_0)$$

Por lo tanto, el jacobiano de ψ toma en cada punto $x_0 \in I$ y en cada cero $z_j(x_0)$ el valor:

$$J_\psi(x_0, u_j(x_0), v_j(x_0)) = \det \begin{pmatrix} \partial_y u & \partial_w u \\ \partial_y v & \partial_w v \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, u_j(x_0), v_j(x_0))} = \partial_y u \partial_w v(x_0, u_j(x_0), v_j(x_0)) -$$
$$-\partial_w u \partial_y v(x_0, u_j(x_0), v_j(x_0)) = \big(\partial_y u(x_0, u_j(x_0), v_j(x_0))\big)^2 + \big(\partial_y v(x_0, u_j(x_0), v_j(x_0))\big)^2$$

Y por tanto

$$J_\psi(x_0, u_j(x_0), v_j(x_0)) = \big|\partial_T P((x_0, u_j(x_0), v_j(x_0))\big|^2 \neq 0$$

pues la derivada $\partial_T P$ no se anula en los ceros de P. Esto nos permite aplicar el teorema de las funciones implícitas y deducir que para cada $x \in I$ existe un entorno suyo en el que las funciones u_j y v_j son continuas. Por lo tanto, I está recubierto de intervalos abiertos tales que en cada uno de ellos las funciones u_j y v_j son continuas para $j = 1, \ldots, n$. Un intervalo maximal en el que esto se cumpla debe ser el propio I, pues cualquier otro intervalo (a, b) se podría extender al tomar $x = a$ ó $x = b$.

Veamos finalmente que u_j y v_j son algebraicas sobre k. Si $z_j(x)$ es una raíz de $P(x, T)$, también lo será su función conjugada, $\overline{z_j}(x)$, y se tiene que $u_j = \frac{1}{2}(z_j + \overline{z_j})$ y $v_j = \frac{1}{2}(z_j - \overline{z_j})$. Por otro lado, hemos visto que z_j y $\overline{z_j}$ son elementos algebraicos sobre k, y por tanto pertenecen a su clausura algebraica $\overline{k}$, por lo que su suma y diferencia pertenecen también a $\overline{k}$ y u_j y v_j son algebraicas sobre k. $\square$

2.2.2. Extensiones por soluciones de EDOs

Al ser un cuerpo de Hardy k un cuerpo diferencial, es natural preguntarse si sería posible generalizar el resultado anterior y si las soluciones de ecuaciones diferenciales algebraicas con coeficientes en k también podrían formar parte de una extensión de k. Esto es falso en general. Basta observar que la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ tiene entre sus soluciones la función $\sin(x)$, que no puede formar parte de ningún cuerpo de Hardy. Sin embargo, si nos limitamos a considerar ecuaciones diferenciales algebraicas de primer orden y primer grado, podremos deducir que la extensión de k por una solución de ellas sigue siendo un cuerpo de Hardy.

Teorema 2.10 (Extensión por solucion de una EDO de primer orden y primer grado)**.** *Sea k un cuerpo de Hardy, $P(T), Q(T) \in k[T]$ y f el germen de una función continua y derivable verificando que $Q(f)$ tiene eventualmente signo constante $\neq 0$ y*

$$f' = \frac{P(f)}{Q(f)}$$

Entonces el anillo $k[f]$ es un dominio de integridad, y su cuerpo de fracciones $k(f)$ es un cuerpo de Hardy.

Demostración. El resultado es trivial si $f = 0$, por lo que supondremos en lo que sigue que f no es idénticamente nula. Veamos que en ese caso basta probar lo siguiente:

Para todo polinomio $R(T) \in k[T]$, la función $R(f)$ es o bien eventualmente nula o bien no toma el valor 0 para x suficientemente grandes.

En efecto, si esto fuese cierto $k[f]$ sería un dominio de integridad y se podría considerar su cuerpo de fracciones, $k(f)$. Éste sería un cuerpo de Hardy, ya que la regla de la cadena y la ecuación que satisface f' nos garantizan que sería estable por derivación. Denotaremos por $I = [M, \infty]$ un intervalo en el que todas las funciones mencionadas estén definidas y cumplan las hipótesis impuestas a los gérmenes.

Sea $R(T) \in k[T]$, y supongamos que $R(f)$ no es idénticamente nula pero se anula para valores de x en una sucesión x_n con $x_n \to \infty$. Si tomamos K la extensión de k como en el corolario 2.9, $R(T)$ se puede ver en $K[T]$ y descompone allí en factores de grado 1 y de grado 2 con discriminante negativo. Se debe tener que alguno de estos factores se anula en la sucesión x_n al componer con f. Denotemos a uno de tales factores por $R_1(T)$ (que podemos suponer mónico). En primer lugar, $R_1(T)$ debe ser de grado 1, pues de no ser así su discriminante (un elemento de K, cuerpo de Hardy) sería negativo y para x suficientemente grande el discriminante de $R(x, T)$ sería también negativo y no podría anularse en el valor $f(x)$. Por lo tanto existe un $g \in K$ tal que $f - g$ se anula en los valores de x_n. Veamos por qué este hecho conlleva una contradicción.

En primer lugar, podemos suponer que es f quien se anula en los x_n sustituyendo f por $f - g$, pues $f - g$ cumple la ecuación diferencial

$$(f-g)' = \frac{\tilde{P}(f-g)}{\tilde{Q}(f-g)} \text{ con } \tilde{Q} = Q(T+g) \text{ y } \tilde{P}(T) = P(T+g) - g'\tilde{Q}(T)$$

$\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$ polinomios en $K[T]$, siendo $\tilde{Q}(f-g)$ no nula de signo constante. También podemos suponer que los polinomios $P(T) = a_0 + \cdots + a_nT^n$ y $Q(T) = b_0 + \cdots + b_mT^m$ no tienen factores comunes. Escribamos $P(T) = T^rP_1(T)$, con $P_1(T) \in K[T]$ y $r \geq 0$. Al tener ceros arbitrariamente grandes, y no ser la función 0, f no puede ser constante, por lo que $f' = P(T)/Q(T)$ no es idénticamente nula y entonces $P_1(T) \neq 0$. Además, r debe ser 0, pues de no ser así la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y^rP_1(x,y)}{Q(x,y)}$$

admitiría la solución trivial ($y = 0$) y también $y = f$, que coincidirían en el conjunto de ceros de f, contradiciendo el teorema de unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias (en realidad, el teorema de unicidad de ecuaciones diferenciales sólo nos dice que f debería ser nula en un entorno de cada punto x_n de la sucesión, pero considerando las soluciones maximales de la ecuación, usando que $Q(f)$ no se anula nunca, tendríamos que las soluciones f e $y = 0$ deberían coincidir en todo el dominio de definición común). Por tanto $a_0(x)$ debe ser distinto de 0 y $b_0(x)$ también (pues por hipótesis $Q(f)$ no se anula). Al ser funciones de K, a_0 y b_0 tendrán un signo constante en I. Tomemos dos ceros consecutivos , $x_1 < x_2$, de f en I tales que f no es nula en el intervalo (x_1, x_2). Al ser f continua tendrá un signo constante en dicho intervalo, y sus derivadas $f'(x_1) = \frac{a_0(x_1)}{b_0(x_1)}$ y $f'(x_2) = \frac{a_0(x_2)}{b_0(x_2)}$ deben tener signo distinto (nótese que $f'(x_i) \neq 0$ al ser $a_0(x_i) \neq 0$ para $i = 1, 2$), llegando a una contradicción. □

Como corolario obtenemos los siguientes ejemplos y propiedades:

Ejemplos 2.11.
Sea k un cuerpo de Hardy, y f una función de k^* con un representante continuo en un intervalo de la forma $[M, \infty)$.

- El cuerpo $k(x)$ es de Hardy, pues x verifica $y' = 1$. Podremos por tanto suponer que un cuerpo de Hardy contiene la función identidad cuando sea necesario.
- Podemos considerar una extensión del cuerpo k en la que f tenga una primitiva. En efecto, por ser f continua $F(x) = \int_M^x f(t)dt$ es una

primitiva de f, solución de la ecuación $y' = f$, por lo que $k(F)$ es un cuerpo de Hardy.

- Las extensiones $k(\log|f|)$ y $k(e^f)$ son cuerpos de Hardy, pues $\log|f|$ y e^f satisfacen las ecuaciones $y' = \frac{f'}{f}$ y $y' = f'y$ respectivamente. En particular esto prueba que $\mathbb{R}(e^x)$, $\mathbb{R}(\log x)$, $\mathbb{R}(x, e^x, \log x)$, etc... Son cuerpos de Hardy.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ pertenece a k, $k(|f|^\alpha)$ es un cuerpo de Hardy, pues $|f|^\alpha$ satisface $y' = \alpha\frac{f'y}{f}$. Con un argumento similar al de la demostración de la proposición 2.5 se prueba que si $\mathbb{R} \subseteq k$, entonces $k(|f|^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R})$ es un cuerpo de Hardy.

Observación. En el teorema 2.10 sólo se han considerado ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado (es decir, una ecuación de la forma $F(y, y')$ donde $F \in k[y, y']$ y de grado 1 en la variable y'). El resultado no es necesariamente cierto para ecuaciones diferenciales algebraicas de primer orden y grado cualquiera. Sin embargo, exiten varios trabajos que establecen condiciones para que las extensiones de k por soluciones de esas ecuaciones sean cuerpos de Hardy, y también para extender cuerpos de Hardy por soluciones de ecuaciones de órdenes superiores (ver [Ros83a]).

Ejemplo 2.12 (Función Gamma)**.** También pueden formar parte de un cuerpo de Hardy funciones que no son soluciones de ecuaciones diferenciales, pero que surgen de forma natural al tratar de resolver algún problema en matemáticas. Este es el caso de la función Gamma de Euler, definida en $\mathbb{R}_{>0}$ como $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. El cuerpo de funciones meromorfas reales $\mathbb{R}((\Gamma(x)))$ es de Hardy, aunque $\Gamma(x)$ no es solución de ninguna ecuación diferencial algebraica con coeficientes en $\mathbb{R}(x)$ (teorema de Hölder). Una demostración de ambas afirmaciones se encuentra en [Ros83b].

2.3. L-funciones de Hardy

Nos disponemos a continuación a presentar el cuerpo de Hardy en el que están incluidas las funciones elementales que surgen de forma habitual al operar con exponenciales y logaritmos. Queremos que este cuerpo contenga funciones del tipo $e^{xe^{3x^5+1}+x^{3/4}} + \frac{x}{\sqrt{\log x}}\log\bigl(\log\bigl(x^3+2\bigr)\bigr)e^x$, etc... Esta clase de funciones fueron estudiadas por Hardy en [Har10].
De forma un poco más general probamos el siguiente resultado que se encuentra en [Bou07, V. 41]:

Proposición 2.13. *Si k es un cuerpo de Hardy, existe un cuerpo de Hardy $H(k)$ que contiene a k, y tal que para toda función $f \in H(k)$ no nula, e^f y $\log|f|$ pertenecen a $H(k)$.*

Demostración. Se ha visto que las extensiones $k(e^f)$ y $k(\log|f|)$, con $f \in k^*$, son cuerpos de Hardy. Vamos a considerar el conjunto de todas las funciones de $\mathcal{H}_\infty$ que están en una torre de extensiones de k por exponenciales y logaritmos. Este conjunto será el cuerpo de Hardy deseado.

Más formalmente, sea $H(k)$ el subconjunto formado por las $f \in \mathcal{H}_\infty$ tales que existe una sucesión de cuerpos de Hardy $k_0, k_1, \ldots, k_n$ tales que $f \in k_n$, $k_0 = k$, y para $i = 1, \ldots, n$ $k_i = k_{i-1}(u_i)$, donde $u_i = e^{h_i}$ ó $u_i = \log|h_i|$, para algún elemento $h_i \in k_i$. Se dirá que las $u_1, \ldots, u_n$ forman una *sucesión de definición de f desde k*. Notemos que $k_n = k(u_1, \ldots, u_n)$.

Con esta definición, para cada $f \in H(k)$, f pertenece a un cuerpo de Hardy $k(u_1, \ldots, u_n)$ contenido en $H(k)$, por lo que su inversa $1/f$ y su derivada f' también pertenecen a $H(k)$. Por otro lado, dada otra función $g \in H(k)$, existe una sucesión de definición de g, $v_1, \ldots, v_m$. Concatenando las dos sucesiones de definición, es claro que se obtiene una nueva sucesión de definición para ambas funciones f y g. Por lo tanto $f, g \in k(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m) \subseteq H(k)$, por lo que $H(k)$ es en efecto un cuerpo de Hardy. Este cuerpo es cerrado al tomar logaritmos y exponenciales, pues por definición e^f o $\log|f|$ tendrán una sucesión de definición de una unidad mayor de longitud que la función f. $\square$

Observación. El cuerpo $H(k)$ construido en esta demostracción es además el mínimo cuerpo de Hardy con las propiedades del enunciado. Será por tanto también igual a la intersección de todos los cuerpos de Hardy que verifican que son cerrados por exponenciales y logaritmos y que contienen a k.

Notación. Se denotará por $e_n(x)$ y $l_n(x)$ a la composición de n funciones exponenciales y logarítmicas respectivamente, es decir:

$$e_0(f) = f \ , \ e_n(f) = e^{e_{n-1}(f)} \quad \text{para } n \geq 1$$
$$l_0(f) = f \ , \ l_n(f) = \log(l_{n-1}(|f|)) \quad \text{para } n \geq 1$$

Dado un cuerpo de Hardy k, y una función f en $H(k)$, se define el *orden de f respecto a $H(k)|_k$* como la longitud mínima de una sucesión de definición de f desde k.

Definición 2.14 (Cuerpo de las L-funciones)**.** Llamaremos *cuerpo de L-funciones*, que será denotado por L, al cuerpo de Hardy $H(\mathbb{R}(x))$. El *orden* de una L-función será su orden respecto a $L|_{\mathbb{R}(x)}$.

Una propiedad interesante del cuerpo de L-funciones, aparte de ser estable para exponenciales y logaritmos, es que es estable por composición. Precisamente:

Proposición 2.15. *Si $f, g \in L$ son L-funciones tales que $f \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, entonces la composición $g \circ f$ pertenece a L.*

Demostración. Se demostrará por inducción sobre el orden de g. Si este orden es 0, g pertenece a $\mathbb{R}(x)$, y $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P y Q polinomios de variable real. Al ser L un cuerpo, $P(f)$, $Q(f)$ y $g \circ f = P(f)/Q(f)$ estarán en L.

Supongamos ahora que g tiene una sucesión de definición $u_1, \ldots, u_n$. Sea $k = \mathbb{R}(x, u_1, \ldots u_{n-1})$ y $g \in k(u_n)$, siendo $u_n = \log|h|$ ó $u_n = e^h$ para un elemento $h \in k$. Por hipóstesis de inducción $h \circ f \in L$, pues h tiene un orden menor que g, pero L es cerrado por logaritmos y exponenciación, por lo que $u_n \circ f = \log|h \circ f|$ (ó $u_n \circ f = e^{h \circ f}$) también pertenece a L. También, por la misma razón, para cada $v \in k$ se tiene $v \circ f \in L$. Finalmente, La función g es suma, multiplicación y cocientes de las funciones $x, u_1, \ldots u_n$, por lo que al ser L un cuerpo, y estar la composición de f con cada una de ellas en L, $g \circ f$ también pertenece a L. □

2.4. Relaciones de comparación de funciones

En esta sección se formalizará la comparación del orden de crecimiento de gérmenes de funciones en un entorno de ∞. Estas nociones son conocidas desde comienzos del grado, donde se presentan mediante las notaciones de la *O de Landau*. Aquí se repasarán estas definiciones, introduciendo la notación usada en [Har10], y haciendo especial hincapié en su relación con los cuerpos de Hardy y en las propiedades que nos permitirán definir y estudiar la valoración asociada a uno de estos cuerpos en la sección 2.5. Se seguirá principalmente [Bou07, cap. 5].

Definición 2.16 (Relaciones de comparación débiles)**.** Sean $f, g \in \mathcal{H}_\infty$ dos gérmenes de funciones.

- Se dirá que f es menor o igual que g y se escribirá $f \leq g$ si existe un intervalo $I = [a, \infty)$ en el que dos representantes suyos están definidos y $f(x) \leq g(x) \;\; \forall\, x \in I$.
- Sean $f, g \in \mathcal{H}_\infty$. Se dirá que *g domina a f* y se escribirá $f \preceq g$ si existe una constante $M \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f| \leq M|g|$.
- Si se cumple $f \preceq g$ y $g \preceq f$, se dirá que *f y g son similares* y se denotará por $f \asymp g$.
- Se dice que dos funciones f y g son *débilmente comparables* si $f \preceq g$ ó $g \preceq f$.

Nota. Remarquemos que la negación de $f \leq g$ no implica que $f > g$.

Observaciones.

- La relación $\leq$ extiende la definida para los elementos de un cuerpo de Hardy a todo $\mathcal{H}_\infty$. Al igual que en ese caso, es compatible con las operaciones de suma y multiplicación. Sin embargo, aquí la estructura de orden es únicamente parcial (por ejemplo las funciones 0 y $\sin x$ no son comparables por esta relación de orden).

- La relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva, pero no es un orden, pues $f \preceq g$ y $g \preceq f$ sólo implica que f y g son similares (no es antisimétrica). Una relación con estas propiedades se denomina un *preorden*. Para todo preorden la relación definida como $\asymp$ es de equivalencia, y el preorden induce un orden (parcial) en el conjunto cociente por esta relación.

Ejemplos 2.17.

- Para todo $\lambda \neq 0$, $f \preceq g$ si y sólo si $f \preceq \lambda g$. Nótese que no se está comparando el signo que toman las funciones, únicamente sus valores. Por ejemplo, $x \preceq -x^2$.
- Si $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ son polinomios, $p \preceq q$ si y sólo si el grado de p es menor o igual al de q ($n \leq m$). Si p y q son funciones racionales esto sigue siendo cierto, definiendo su grado como el del numerador menos el del denominador.
- $\log x \preceq p(x) \preceq e^x$ para toda función polinómica p no constante.
- $f \preceq 1$ si y sólo si f está acotada. $f \asymp 1$ equivale a que existen $\varepsilon, A > 0$ tales que $\varepsilon \leq |f| \leq A$ en el infinito. Esto equivale a su vez que la función $\log |f|$ esté acotada en el infinito.
- El conjunto de ceros de dos funciones similares f y g debe ser el mismo para algún entorno de infinito (si no fuese así y g se anulase en una sucesión $x_n \to \infty$ mientras que f no, se tendría que $0 < |f(x_n)| \leq M|g(x_n)| = 0$). Esta condición no es suficiente para que $f \asymp g$ ni siquiera cuando estas funciones se anulan indefinidamet-ne. Por ejemplo, las funciones $\sin x$ y $\sin^2 x$ comparten el conjunto de ceros, pero no se puede tener $\sin x \leq M \sin^2 x$ para ningún $M > 0$. Se cumple únicamente $\sin^2 x \preceq \sin x$.
- Las función constante 1 y $x \sin x$ no son débilmente comparables. En efecto, $x \sin x$ se anula indefinidamente, por lo que $1 \not\leq M x \sin x$ para ningún $M > 0$, pero no es acotada, por lo que $x \sin x \not\preceq 1$.

Con respecto al comportamiento de las relaciones de comparación débiles frente a las operaciones de suma y multiplicación de gérmenes se tienen las siguientes propiedades:

Propiedades 2.18.

(i) Sean $f_1, f_2, g \in \mathcal{H}_\infty$ tales que $f_1 \preceq g$ y $f_2 \preceq g$. Entonces $f_1 + f_2 \preceq g$.

(ii) Sean $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{H}_\infty$ tales que $f_1 \preceq g_1$ y $f_2 \preceq g_2$. Entonces $f_1 f_2 \preceq g_1 g_2$. En particular si $f_1 \asymp g_1$ y $f_2 \asymp g_2$, entonces $f_1 f_2 \asymp g_1 g_2$.

Demostración. Sea $I = [a, \infty)$ un intervalo en el que todos los representantes considerados estén definidos y cumplan las desigualdades de la definición 2.16. Las hipótesis de (i) indican que existen M_1 yM_2 positivos tales que $|f_1| \leq M_1|g|$ y $|f_2| \leq M_2|g|$ en I. En virtud de la desigualdad triangular $|f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2| \leq (M_1 + M_2)|g|$ en I.
Para demostrar (ii) basta observar que $|f_1||f_2| = |f_1 f_2| \leq M_1 M_2 |g_1 g_2|$.

□

Observemos que no se tiene una propiedad similar a (ii) para la suma, pues se puede producir cancelación de términos. Por ejemplo, $x \preceq x^2 + 1$, $x \preceq -x^2 + 1$, pero $2x \not\preceq 2$. Lo que nunca se va a conseguir es que la suma de dos funciones domine estrictamente a la que crezca más rápido entre ellas. Este comportamiento, estudiado en el primer capítulo para funciones polinómicas, recuerda a las propiedades de una valoración.

Definición 2.19 (Relaciones de comparación fuertes)**.** Dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{H}_\infty$, se dirá que f es *despreciable* frente a g (o que g es *preponderante sobre* f) y se escribirá $f \lll g$ si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $|f| \leq \varepsilon|g|$.

Esta relación vuelve a ser transitiva, pero no es reflexiva. Es más, $f \lll f \ \Rightarrow f = 0$. Además tenemos las siguientes propiedades:

Propiedades 2.20.

(i) Si $f \lll g$ y $g \preceq h$, entonces $f \lll h$.

(ii) Si $f \preceq g$ y $g \lll h$, entonces $f \lll h$.

(iii) Si $f_1 \lll g$,$f_2 \lll g$, entonces $f_1 + f_2 \lll g$.

(iv) $f_1 \lll g_1$ y $f_2 \preceq g_2$ implica $f_1 f_2 \lll g_1 g_2$.

Demostración. (i). Existe $M > 0$ tal que $g \leq M|h|$. Para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que $|f| \leq \frac{\varepsilon}{M}|g| \leq \varepsilon|h|$. (ii) se demuestra de forma similar.
(iii). Para todo $\varepsilon > 0$, $|f_1 + f_2| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|g| + \frac{1}{2}\varepsilon|g| = \varepsilon|g|$.
(iv). Existe $M > 0$ tal que $|f_2| \leq M|g_2|$. Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, $|f_1 f_2| \leq \frac{\varepsilon}{M}|g_1|M|g_2| = \varepsilon|g_1 g_2|$.

□

Observación (Relación entre comparación débil y fuerte)**.** Es claro que $f \lll g$ implica $f \preceq g$. El recíproco, en cambio, no es cierto, (por ejemplo, $f \preceq f$, pero $f \lll f$ sólo si $f = 0$). Más generalmente, si $f \lll g$ y $g \preceq f$, entonces $f = g = 0$. Este hecho nos hace imaginar que una interpretación de $f \lll g$ puede ser: $f \preceq g$ "pero no de una forma ceñida".
Sin embargo, no es cierto que $f \preceq g \ \Rightarrow f \lll g$ ó $f \asymp g$. Por ejemplo,

$\sin x \preceq 1$, pero ni $1 \preceq \sin x$ ni $\sin x \preccurlyeq 1$. Lo mismo sucede con las funciones $g(x) = x$ y $f(x) = x\cos^2 x$ (figura 2.4). Estos ejemplos están propiciados por la oscilación de las funciones, y, como se verá más adelante, no pueden darse en el contexto de los cuerpos de Hardy.

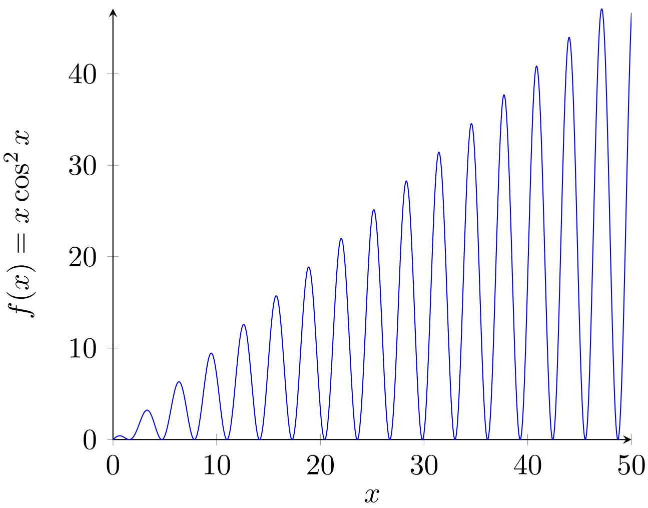

Figura 2.2: Gráfica de la función $x\cos^2 x$

Proposición y Definición 2.21. *Se define en $\mathcal{H}_\infty$ la relación*

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \lll g$$

Esta relación es de equivalencia, y se dirá que f y g son equivalentes si $f \sim g$. En ese caso, además $f \asymp g$.

Demostración. A primera vista puede parecer que esta definición no es simétrica respecto a los papeles que juegan f y g en ella. Veamos que sí lo es, y que $f - g \lll g$ si y sólo si $f - g \lll f$.
Si $f - g \lll g$, para todo $\varepsilon > 0$ $|f - g| \leq \varepsilon|g|$. De acuerdo con la desigualdad triangular inversa, $|g| - |f| \leq |f - g| \leq \varepsilon|g|$, por lo que $(1 - \varepsilon)|g| \leq |f|$. Para valores de ε entre 0 y 1, $\frac{1}{1-\varepsilon} > 0$, y por tanto $g \preceq f$. (Remarcar que no se tiene $g \lll f$). La propiedad (ii) de 2.20 nos permite concluir que $f - g \lll g$. Se ha visto además que $f \asymp g$.

Con esta propiedad, es fácil ver que $\sim$ es simétrica, pues $f - g \lll g \Leftrightarrow f - g \lll f \Leftrightarrow g - f \lll f$. Probemos su transitividad. Si $f - g \lll g$ y $g - h \lll h$, entonces $g - h \lll g$ y de acuerdo con la propiedad (iii) de 2.20 $(f - g) + (g - h) = f - h \lll g \preceq h$, por lo que $f - h \lll h$ y $f \sim h$.
La reflexividad es clara, pues toda función f cumple $0 \lll f$, por lo que queda probado que $\sim$ es una relación de equivalencia. $\square$

Ejemplo 2.22. Heurísticamente, el hecho de que dos funciones f, g sean equivalentes en este sentido quiere decir que son similares y "que sus términos dominantes tienen el mismo coeficiente" (aunque esto último no está definido en general, es precisamente lo que se intenta definir). Esto permite que se produzca su cancelación al restar. Por ejemplo, $x^3 + x^2 \sim x^3 + 1$ y $x^2e^x \sim x^2e^x + \log x$, pero $3x^3 + x^2 \nsim 2x^3 + 1$ y $x^2e^x \nsim -x^2e^x + \log x$. En particular, en esta relación sí se tiene en cuenta el signo que toman las funciones.

Lema 2.23. *Si $f, g \in \mathcal{H}_\infty$ cumplen que $f \sim g$ y g tiene signo constante en infinito, entonces f también tiene signo constante, que coincide con el de g.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $g > 0$. Como $f \sim g$, $f - g \lll g$, y para todo $\varepsilon > 0$ exite un intervalo $I = [a, \infty)$ (en el que podemos suponer que g es positiva), tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon|g(x)|$. Si existiese un $x \in I$ tal que $f(x) \leq 0$, se tendría que $|f(x) - g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \geq |g(x)|$, lo que contradice nuestra hipótesis. □

Definición 2.24. Se dirá que dos gérmenes f y g en $\mathcal{H}_\infty$ son *fuertemente comparables* (o simplemente *comparables*) si se cumple $f \lll g$, $g \lll f$ ó $f \sim \alpha g$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Ejemplo 2.25. Si dos funciones f, g son fuertemente comparables, también lo serán débilmente, pues $f \lll g \Rightarrow f \preceq g$, y si $f \sim \alpha g$ se tiene que $f - \alpha g \preceq g$, y como $\alpha g \preceq g$, al sumar se obtiene $f \preceq g$.
Sin embargo, el recíproco es falso. Por ejemplo, tomando $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1$, se cumple $\sin x \preceq 1$, pero estas funciones no son fuertemente comparables, pues $|\sin x| \nleq \frac{1}{2} \cdot 1$, $1 \nleq |\sin x|$ y tampoco se tiene $f \sim \alpha g$, pues para todo $\alpha \neq 0$, $|\sin x - \alpha| \nleq |\alpha| \cdot 1$.

En la siguiente proposición se caracterizan las relaciones de comparación en términos del límite del cociente de representantes de los gérmenes.

Proposición 2.26. *Sean $f, g \in \mathcal{H}_\infty$ tales que no se anulen eventualmente, y denotemos por las mismas letras dos respectivos representantes suyos. Entonces se cumple:*

(I) $f \preceq g \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ *es acotada* $\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ *para el que* $|\dfrac{g}{f}| > \varepsilon$.

(II) $f \lll g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f}{g}(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} |\dfrac{g}{f}| = \infty$.

(III) $f \asymp g \Leftrightarrow \log|\dfrac{f}{g}|$ *es acotada. Además, si el límite* $\lim\limits_{x\to\infty} f/g$ *existe, entonces* $f \asymp g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f}{g} \in \mathbb{R}^*$

(IV) $f \sim g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f}{g} = 1$

(V) Si f y g tienen signo constante en infinito, entonces son fuertemente comparables si y sólo si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f}{g}$ *existe (pudiendo ser $\pm\infty$).*

Demostración. Claramente $|f| \leq A|g| \Leftrightarrow |\frac{f}{g}| \leq A \Leftrightarrow \frac{1}{A} \leq |\frac{g}{f}|$, de donde se deducen (I) y (II). Para probar (III) basta notar que $\log|h|$ es acotada si y sólo si $|h|$ toma valores en un intervalo de la forma $[\varepsilon, M]$ y aplicar la primera propiedad.
(IV) Si $f \sim g$, $f - g \lll g$, y de acuerdo con la propiedad (II) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f-g}{g} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{g} - 1 = 0$. Recíprocamente, si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{g} = 1$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{g} - \frac{g}{g} = 0$, y se tiene que $f \sim g$.
Finalmente, para (V), se ha visto que las relaciones $f \lll g$ y $f \sim \alpha g$ son equivalentes a que el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{g}$ sea respectivamente 0 ó α. Al ser ambas de signo constante, $g \lll f$ es equivalente a que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{g} = \pm\infty$.

□

Lema 2.27. *Sean $f, g \in \mathcal{H}_\infty$ gérmenes con un signo constante en infinito. f y g son fuertemente comparables si y sólo si para todo $t \in \mathbb{R}$, salvo quizás uno, la función $f - tg$ tiene un signo constante en infinito.*

Demostración. Veamos que la condición es necesaria. Si f y g son fuertemente comparables, o bien $f \lll g$, o existe $\alpha \neq 0$ tal que $f \sim \alpha g$. En el primer caso $f - tg \sim -tg$ para todo $t \neq 0$, y de acuerdo con el lema 2.23, $f - tg$ tiene el mismo signo que $-tg$ (constante). En el segundo caso $f - \alpha g \lll \alpha g$, y para todo $t \neq \alpha$ se cumple $f - tg \sim (\alpha - t)g$, por lo que $f - tg$ tiene signo constante.

Supongamos ahora que $f - tg$ tiene signo constante para todo $t \in \mathbb{R}$ salvo quizás un valor. Por la proposición precedente sabemos que f y g son comparables si y sólo si el cociente $\frac{f}{g}$ tiene límite en $\overline{\mathbb{R}}$. Toda función h tiene al menos un punto de acumulación en $\overline{\mathbb{R}}$ (si h no está acotada $+\infty$ ó $-\infty$ serán puntos de acumulación por definición, y si lo está, su imagen estará contenida en un compacto de $\mathbb{R}$). Además, una función tiene límite en $\overline{\mathbb{R}}$ si y sólo si tiene un único punto de acumulación. Supongamos que $\frac{f}{g}$ tiene al menos dos valores de adherencia distintos $\alpha_1 < \alpha_2$. Para todo t entre ellos, existirían puntos x_1, x_2 arbitrariamente grandes tales que $\alpha_1 < \frac{f}{g}(x_1) < t < \frac{f}{g}(x_2) < \alpha_2$, por lo que $f - tg$ oscilaría indefinidamente para todos estos (infinitos) valores de t.

□

Nota. Puede darse el caso en el que $f - \alpha g$ oscile, siendo f y g fuertemente comparables, si ese valor de α provoca que los términos dominantes de las funciones se cancelen, dejando a la luz la parte oscilatoria de las funciones cuyo comportamiento asintótico estaba enmascarado. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x + \sin x$ y $g(x) = 3x + \cos x$ son comparables, pero $f - \frac{1}{3}g$

oscila. Esto tampoco puede suceder en el contexto de cuerpos de Hardy.

Corolario 2.28. *En un cuerpo de Hardy k todas las funciones son fuertemente comparables, y por lo tanto, también lo serán débilmente.*

Demostración. Podemos suponer que k contiene a $\mathbb{R}$, pues $k(\mathbb{R})$ es de Hardy. Por tanto, para todo par de funciones $f, g \in k$ y todo $t \in \mathbb{R}$, $f - tg \in k(\mathbb{R})$ debe tener signo constante en el infinito. □

Corolario 2.29. *Si f y g son gérmenes con signo constante y son fuertemente comparables, entonces $f \preceq g$ implica $f \lll g$ ó $f \asymp g$.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{H}_\infty$ de signo constante tales que $f \preceq g$. Por ser de signo constante, si son comparables también lo serán $|f|$ y $|g|$. Si no se cumple $f \lll g$, significa que existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $A > 0$ existe un $x > A$ tal que $|f(x)| > \varepsilon_0 |g(x)|$. Esta desigualdad se cumplirá también para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon]$ (hay infinitas opciones). De acuerdo con el lema 2.27, $|f| - \varepsilon|g|$ tiene signo constante, que debe ser positivo si $\varepsilon \in (0, \varepsilon]$, por lo que $|g| \leq \frac{1}{\varepsilon}|f|$ y $g \preceq f$.

□

2.5. Valoración de un cuerpo de Hardy

Nos disponemos a continuación a definir la valoración asociada a un cuerpo de Hardy. Esta valoración es una forma de cuantificar el orden de crecimiento de una función en infinito. Es una útil herramienta tanto para reinterpretar resultados ya conocidos, como la regla de l'Hôpital, como para facilitar la demostración de otras propiedades. En esta sección se seguirá principalmente [Ros83a] y [Ros83b].

Sea k un cuerpo de Hardy. Se ha definido en él la relación $\asymp$ que es de equivalencia. Podemos considerar por tanto el conjunto $\Gamma = {}^{k^*}\!/_{\asymp}$. Denotaremos por $v(f)$ la clase de una función $f \in k$, es decir, $v : k^* \to \Gamma$ será la aplicación de paso al cociente. En este conjunto se puede definir una operación de suma de la forma siguiente:

$$v(f) + v(g) = v(f \cdot g)$$

También se define en Γ un orden dado por:

$$v(f) \leq v(g) \quad \Leftrightarrow \quad g \preceq f$$

Gracias a la propiedad (ii) de 2.18 la operación de suma está bien definida y es compatible con este orden. Además, debido a que en un cuerpo de Hardy todo par de funciones son comparables, el orden así definido es total. Por tanto, $(\Gamma, +, \leq)$ es un grupo ordenado, que se denominará el *grupo de valores* de k (y se denotará Γ_k cuando se quiera resaltar el cuerpo k en el que se está trabajando).

Proposición y Definición 2.30. *La aplicación $v : k^* \to \Gamma$ es una valoración sobre k.*
A esta valoración se le denominará valoración canónica de k y para cada $f \in k^*$ se dirá que $v(f)$ es su valor.

Demostración. Por construcción se cumple que $v(fg) = v(f)+v(g)$ para todo $f, g \in k^*$. Sólo falta comprobar por tanto que $v(f+g) \geq \text{mín}\{v(f), v(g)\}$. Supongamos que $v(f) \leq v(g)$, i.e., $g \preceq f$. Como $f \preceq f$, la propiedad (i) de 2.18 nos indica que $f + g \preceq f$, y por tanto $v(f + g) \geq v(f)$. □

El elemento neutro del grupo Γ es la clase de funciones de k asintóticas a una constante no nula (pues si $\lim\limits_{x\to\infty} f = c \neq 0$, se cumple $fg \asymp g \;\; \forall g \in k^*$). Se escribirá por tanto $v(f) = 0$ en este caso.
Esta valoración mide el orden de crecimiento de las funciones de k. Una función $f \in k$ tendrá un valor más positivo cuanto "más rápido tienda a 0", y más negativo cuanto "más rápido tienda a ∞". Al igual que en el capítulo 1 extenderemos v a todo k denotando $v(0) = \infty$, lo que resulta acorde con esta interpretación.

Todo ello se resume en las siguientes propiedades:

Propiedades 2.31.
Sean f y g gérmenes de funciones pertenecientes a un cuerpo de Hardy k. Entonces

i) $0 \leq v(f) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} f \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; f \preceq 1$

ii) $v(f) > 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} f = 0$; $v(f) < 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} |f| = \infty$

iii) $v(f) < v(g) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g}{f} = 0 \;\Leftrightarrow g \lll f$

iv) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, $v(f)$ tiene el mismo signo que $v(f^\alpha)$. (Pues $1 \preceq f \;\Leftrightarrow\; 1^\alpha \preceq f^\alpha$ al ser la función $x \mapsto x^\alpha$ monótona).

Es importante remarcar que si se tiene una extensión de cuerpos de Hardy $k \subseteq K$, con Γ_k y Γ_K sus respectivos grupos de valores, entonces Γ_k se puede identificar de una forma natural como un subgrupo de Γ_K. En efecto, la aplicación $i : \Gamma_k \hookrightarrow \Gamma_K$ dada por $i(v(f)) = v(f)$ está bien definida y es un homomorfismo inyectivo de grupos, pues la relación $\asymp$ de similitud no depende del cuerpo en el que se consideren las funciones. Por tanto, la valoración canónica de K es una extensión de la valoración de k.

Para la valoración canónica de un cuerpo de Hardy el anillo de valoración $\mathcal{A}_v$ es el conjunto de funciones de k cuyo límite pertenece a $\mathbb{R}$, y su ideal maximal $\mathfrak{m}_v$ el conjunto de funciones cuyo límite es 0.

Ejemplos 2.32.

- $k \subseteq \mathbb{R}$ si y sólo si $v(f) = 0$ para todo $f \in k^*$, es decir, si $\Gamma_k = \{0\}$.
- Si $k = \mathbb{R}(x)$ la valoración canónica de k es exactamente la valoración v_∞ estudiada en el ejemplo 1.2.3, por lo que su grupo de valores es isomorfo a $\mathbb{Z}$.
- El grupo de valores del cuerpo $k = \mathbb{R}(x, e^x, \log x)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^3$ (con el orden lexicográfico). Un isomorfismo entre ellos viene dado por $\varphi : \Gamma_k \to \mathbb{Z}^3$, $\varphi(v(e^x)) = (-1, 0, 0), \varphi(v(x)) = (0, -1, 0), \varphi(v(\log x)) = (0, 0, -1)$.
- Para $k = \mathbb{R}(x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R})$ el grupo de valores es $\mathbb{R}$.
- El cuerpo $k = \mathbb{R}(e^x, e_2(x), e_3(x), \dots)$ es de Hardy (aplicando sucesivamente el teorema 2.10, pues $(e_n(x))' = e^x e_2(x) \cdots e_n(x)$). Es notable que $x \notin k$. Su grupo de valores es $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Nota. Estos ejemplos muestran valoraciones similares a las estudiades en la seción 1.2.4.

Para otros cuerpos de Hardy, como el de las L-funciones, no es sencillo determinar su grupo de valores, aunque el teorema de Hahn (cf. sección 1.1.4) nos indique cómo puede ser este grupo.

2.5.1. Valoración de l'Hôpital

Otra característica interesante de esta valoración es cómo se relaciona con la estructura de cuerpo diferencial de un cuerpo de Hardy. En particular, la conocida *regla de l'Hôpital*, se puede reescribir en términos de esta valoración. Recordemos primero una de las formas en las que se presenta este resultado, cuya prueba se realiza en el primer año de cálculo en el grado y se puede encontrar en [Rud76, Teor. 5.13].

Teorema 2.33 (Regla de L'Hôpital)**.** *Si f y g son funciones derivables en un intervalo $I = [M, \infty)$, tales que $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, y se verifica que,*

$$\textit{o bien } \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0, \textit{ o bien } \lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$$

entonces, si existe el límite $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ en $\overline{\mathbb{R}}$, también existe $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y coinciden.

Debido a que en un cuerpo de Hardy existe el límite de toda función, y al hecho de que $v(g) \neq 0$ implica que g no es constante (y por tanto $g' \neq 0$), la regla de l'Hôpital se traduce en las siguientes propiedades de la valoración canónica:

Corolario 2.34. *Sea k un cuerpo de Hardy y $f, g \in k^*$. Entonces*

(a) Si $v(f) \neq 0$ y $v(g) \neq 0$, entonces $v(f) \leq v(g) \Leftrightarrow v(f') \leq v(g')$.

(b) Si $v(f) > v(g)$ y $v(g) \neq 0$, entonces $v(f') > v(g')$.

Demostración. Basta remarcar que $v(\frac{f}{g}) = v(f) - v(g)$ y utilizar la regla de l'Hôpital. En efecto, se tiene que o bien $v(f), v(g) > 0$, ó $v(g) < 0$ ó $v(f) < 0$ (señalar que en (b) no se puede dar $v(f) = 0$ y $v(g) > 0$). De los tres casos se deduce que $v(f') - v(g')$ tiene el mismo signo que $v(f) - v(g)$. □

Ejemplo 2.35. Las hipótesis impuestas a las funciones f y g son necesarias. Por ejemplo, si se toma $f = 1/\log x$ y $g = 1 + \frac{1}{x}$, se tiene que $v(f) > v(g) = 0$, y sin embargo $v(f') < v(g')$, pues $f' = 1/(x \log^2 x)$ y $g' = -1/x^2$.

Observación. Las propiedades del corolario 2.34 se pueden usar para definir la noción de *valoración de l'Hôpital* en un cuerpo diferencial cualquiera.

La validez de la regla de l'Hôpital en esta valoración nos permite deducir interesantes propiedades sobre el crecimiento de funciones en un cuerpo de Hardy. En particular, algunas de estas propiedades serán fundamentales para poder demostrar el teorema de Borel-Van Den Dries.

Proposición 2.36. *Si f es una función de un cuerpo de Hardy tal que $v(f) \geq 0$, entonces $v(f') > v(\frac{1}{x})$. En particular $v(f') > 0$.*

Demostración. Se puede suponer que $g = \log x$ pertenece al cuerpo de Hardy considerado. Se cumple que $v(g) < 0 \leq v(f)$, por lo que aplicando el corolario 2.34 (b) se obtiene que $v(f') > v(g') = v(1/x)$. □

Este corolario nos indica que si una función que forma parte de un cuerpo de Hardy tiende a 0, entonces su derivada debe tender a 0 más rápido que $1/x$ (resutado que también se puede demostrar observando que la integral $\int_M^\infty f'(x)dx$ debe converger). Esta cota se puede mejorar tomando por ejemplo $g = \log\log x$, obteniendo que si $v(f) \geq 0$, entonces $v(f') > v(1/x \log x)$ (y así sucesivamente tomando el logaritmo iterado).

Ejemplo 2.37. Es notable la "falta de simetría" de la proposición 2.36 para los casos $v(f) \geq 0$ y $v(f) \leq 0$. Por ejemplo, la función $f = \log x$ cumple que $v(f) < 0$ pero $v(f') > 0$.

Proposición 2.38. *Sea k un cuerpo de Hardy, y $f \in k$. Si $v(f) \leq 0$, entonces*

$$v(f'/f) > v(|f|^\varepsilon) \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Demostración. Si $v(f) \leq 0$, entonces $v(|f|^{-\varepsilon}) \geq 0 \ \ \forall \varepsilon > 0$. Aplicando la proposición precedente, $v((|f|^{-\varepsilon})') = v(\pm\varepsilon|f|^{-\epsilon}f'/f) = v(|f|^{-\varepsilon}) + v(f'/f) > 0$, por lo que $v(\frac{f'}{f}) > v(|f|^{\varepsilon})$. □

Esta proposición nos indica que si $f \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, entonces su derivada no puede "crecer mucho más rápido que f".

2.5.2. Rango y rango racional

Definición 2.39. Sea k un cuerpo de Hardy. Se define el rango (resp. rango racional) de k como el rango (resp. rango racional) de su valoración canónica (es decir, como el de su grupo de valores Γ_k). Se denotará por $rg(k)$ (resp. $rt.rg(k)$).

Ejemplos 2.40.

- Un cuerpo de Hardy k tiene rango 0 si y sólo si $k \subseteq \mathbb{R}$.
- El cuerpo $\mathbb{R}(x)$ tiene rango y rango racional 1.
- $\mathbb{R}(x, \log x, e^x)$ tiene rango y rango racional 3.
- El cuerpo $k = \mathbb{R}(x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Q})$ tiene rango y rango racional 1, pues $\Gamma_k = \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{R}(x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R})$ tiene rango 1, pero rango racional infinito.
- El cuerpo $\mathbb{R}(e^x, e_2(x), e_3(x), \dots)$ y el de las L-funciones tienen rango y rango racional infinito.

Es interesante reinterpretar las clases arquimedianas del grupo de valores Γ (definición 1.13) en términos de las propias funciones de k. Se dice que dos elementos f, g, con $v(f) \neq 0 \neq v(g)$ están en la misma clase de comparabilidad si existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que

$$|f| \leq |g|^n \ \ , \ \ |g| \leq |f|^m$$

Como se vio en el capítulo 1, esta relación es de equivalencia y el número de clases de comparabilidad coincide con el rango.

El rango es un importante parámetro de un cuerpo de Hardy y muchos resultados y aplicaciones se derivan de su uso, como por ejemplo la existencia de un logaritmo asintótico o la posibilidad de realizar desarrollos asintóticos usando las funciones del cuerpo [Ros83b] (siendo especialmente adecuado el estudio en el caso de que el rango sea finito). A continuación se presenta un resultado destacable del que se pueden obtener varias aplicaciones: al añadir la solución de una ecuación diferencial algebraica a un cuerpo de Hardy con rango finito, el cuerpo obtenido sigue teniendo rango finito.

Lema 2.41. *Sea $k \subseteq K$ una extensión de cuerpos de Hardy y $f_1, \dots, f_r \in K^*$ algebraicamente dependientes sobre k. Entonces existen $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ tales que $v(f^{n_1} \dots f^{n_r}) \in v(k^*)$.*

Demostración. Por definición existe un polinomio $P(T_1, \dots, T_r) \in k[T_1, \dots, T_r]$ tal que $P(f_1, \dots, f_r) = 0$, y por tanto $v(P(f_1, \dots, f_r)) = \infty$. De acuerdo con la proposición 1.32 no puede haber un monomio de P con un valor mínimo y por tanto al menos dos monomios distintos, m_1 y m_2, tienen el mismo valor, $v(m_1(f_1, \dots, f_r)) = v(m_2(f_1, \dots, f_r))$. Dividiendo m_1 entre m_2 se obtiene que existe un $a \in k^*$ y $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ de forma que:

$$0 = v(af_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r}) = v(a) + v(f_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r})$$

Se obtiene por tanto que $v(f^{n_1} \dots f^{n_r}) = v(a^{-1}) \in v(k^*)$. □

Teorema 2.42. *Sea $k \subseteq K$ una extensión de cuerpos de Hardy de grado de transcendencia finito igual a n. Entonces*

$$rg(k) \leq rg(K) \leq rg(k) + n$$

Demostración. Es claro que por ser $k \subseteq K$ se cumple $rg(k) \leq rg(K)$. Supongamos que $rg(K) > rg(k)+n$, ésto es, que existen gérmenes $f_1, \dots, f_r \in K \backslash k$ (que podemos suponer positivos y crecientes tomando inversos) con $r > n$ tales que sus clases de comparación sean disjuntas dos a dos y disjuntas a las de los elementos de k. Por ser $r > n$ estos gérmenes deben ser algebraicamente dependientes (por definición de grado de transcendencia). Aplicando el lema 2.41 existen $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$ tales que $v(f^{n_1} \dots f^{n_r}) = v(b)$ para $b \in k^*$. Pero $v(f^{n_1} \dots f^{n_r}) = v(f_j) = v(b)$ para algún índice j (por la propiedad (iv) de 2.20), lo que contradice nuestra hipótesis sobre los f_j. □

Corolario 2.43. *Si k es un cuerpo de Hardy de rango finito, la función y es solución de una ecuación diferencial algebraica sobre k y $k(y, y', y'', ...)$ es un cuerpo de Hardy, entonces el rango de $k(y, y', y'', ...)$ es finito.*

Demostración. Si la función y es solución de una ecuación de orden n, los elementos $y, y', \dots y^{(n)}$ son algebraicamente dependientes sobre k y por tanto el grado de transcendencia de $k(y, y', y'', ...)$ sobre k es a lo máximo n. □

En [Ros83b] aparecen varias aplicaciones de este corolario. Por ejemplo, permite demostrar que la función zeta de Riemman, $\zeta(x) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^x}$, (definida en $\mathbb{R}_{>1}$) no es solución de ninguna ecuación diferencial algebraica.

2.6. El teorema de Borel-Van den Dries

Como aplicación de la teoría desarrollada en este capítulo se mostrará la demostración de un resultado conjeturado por Émile Borel en 1898 [Bor99, Pág. 30] y demostrado por Lou van den Dries en 1982 [Dri82] (no publicado). En la terminología de los cuerpos de Hardy éste se enuncia:

Teorema 2.44 (Borel-Van den Dries)**.** *Sea k un cuerpo de Hardy conteniendo la función identidad x y sea y una función perteneciente a una extensión de Hardy K. Si y verifica una ecuación diferencial algebraica de orden n*

$$P(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \ , \ \textit{donde} \quad P(T_0, T_1, \dots, T_n) \in k[T_0, T_1, \dots, T_n]$$

entonces $|y| < e_n(f)$ para una función $f \in k$. (Recordemos que $e_n(f)$ denota la composición de f con n exponenciales).

El estudio de esta propiedad por Borel está motivado por el hecho, conocido en la época, de que "las soluciones de ecuaciones algebraicas definen siempre órdenes infinitesimales determinados por los coeficientes". En [Bor99, IV], Borel da la cota $|y| < e_{n+1}(x)$ y se refiere únicamente a ecuaciones diferenciales con coeficientes en $\mathbb{R}(x)$ (aunque menciona la posibilidad de generalizarlo "fácilmente" a coeficientes cuyo orden de crecimiento sea "bien conocido"). Demuestra este resultado para $n = 1, 2$, suponiendo que y y sus derivadas son indefinidamente crecientes (aunque van den Dries sospecha que estas hipótesis no son suficientes para su demostración). Van den Dries afirma que es la noción de cuerpo de Hardy y su valoración lo que permite demostrar este teorema de una forma simple y general. Para ello se utilizan las ideas ya presentes en la demostración dada por Borel (notablemente el separar P en su parte homogénea de grado superior, y realizar el cambio de variable $z = y'/y$ para hacer disminuir un grado el orden de la ecuación).

Observación. En la sección 2.3 se demostró que todo cuerpo de Hardy k admite una extensión cerrada al tomar exponenciales y logaritmos. Siempre que sea necesario se supondrá que se está en una extensión de k a la que pertenecen estas funciones.

Lema 2.45. *Sea y una función de un cuerpo de Hardy K tal que $|y| \geq e^{x^2}$. Entonces $1 \leq y^{(i)}/y < |y|^{\varepsilon}$ para todo $i \geq 0$ y todo $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Procederemos por inducción. Para $i = 0$ el resultado es claro, pero también necesitaremos tratar separadamente el caso $i = 1$:
Si $|y| \geq e^{x^2}$, entonces $\log|y| \geq x^2$, y $v(\log|y|) \leq v(x^2) < 0$. Aplicando el corolario 2.34,(b) (L'Hôpital), obtenemos $v(y'/y) \leq v(2x) = v(x)$, por lo

que para una constante $M > 0$, $y'/y \geq Mx > 1$ (pues y y su derivada deben tener mismo signo). Para la desigualdad $y'/y < |y|^{\varepsilon}$ basta aplicar la proposición 2.38.
Supongamos ahora $i > 1$ y que el resultado es cierto para $i-1$. Escribamos

$$\frac{y^{(i)}}{y} = \frac{(y^{(i-1)})'}{y^{(i-1)}} \cdot \frac{y^{(i-1)}}{y}$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Aplicando la hipótesis de inducción se tiene que

$$1 \leq \frac{y^{(i-1)}}{y} < |y|^{\varepsilon/2} \tag{1}$$

Por tanto $|y^{(i-1)}| < |y|^{1+\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$, en particular $|y^{(i-1)}| < |y|^2$. Aplicando esto y el caso $i = 1$ se tiene que

$$1 \leq \frac{(y^{(i-1)})'}{y^{(i-1)}} < |y^{(i-1)}|^{\varepsilon/4} < |y|^{\varepsilon/2} \tag{2}$$

Multiplicando las desigualdades (1) y (2) obtenemos el resultado.

□

Lema 2.46. *Sea K un cuerpo de Hardy y $f, y \in K$ tales que $y \neq 0$ y $f \geq x^2$. Entonces*

(1) Si $y'/y < f$, entonces $|y| < e^{Mxf}$ para un $M \in \mathbb{R}_{>0}$.

(2) Si $y'/y < e_n(f)$ para un $n > 0$, entonces $|y| < e_{n+1}(f)$.

Demostración.

(1) Como $f \geq x^2$ se tiene que $f' > 0$ (pues $v(f) \leq v(x^2) < 0$ y se puede aplicar l'Hôpital), y entonces $(\log|y|)' = y'/y < f \leq f + xf' = (xf)'$. Tomando la valoración canónica y aplicando la regla de l'Hôpital se obtiene que $v(\log|y|) \geq v(xf)$, por lo que $\log|y| < Mxf$ y $|y| < e^{Mxf}$ para una constante $M > 0$.

(2) Si $|y| < e^{x^2}$, el resultado es cierto. Si $|y| \geq e^{x^2}$ entonces $\log|y| \geq x^2$, luego $v(\log|y|) \leq v(x^2) < 0$, y aplicando la regla de l'Hôpital se tiene que $v(y'/y) \leq v(2x) < 0$. Por otro lado, $e_n(f)' = f'e_1(f)\cdots e_n(f)$, y puesto que $v(f') < 0$ y $v(e_i(f)) < 0$ se tiene que $v(e_n(f)') < v(e_n(f)$, y aplicando la hipótesis $y'/y < e_n(f)$ obtenemos:

$$v(e_n(f)') < v(e_n(f) \leq v(y'/y) = v((\log|y|))' < 0$$

Volviendo a aplicar l'Hôpital se tiene que $v(e_n(f)) < v(\log|y|)$, luego $\log|y| < e_n(f)$ y $|y| < e_{n+1}(f)$.

□

Lema 2.47. *Sea f una función en un cuerpo de Hardy y sea $g = f'/f$ su derivada logarítmica. Entonces, para todo $i \geq 1$ se tiene que*

$$f^{(i)}/f = P_i(g, g', \ldots, g^{(i-1)})$$

para un polinomio $P_i \in \mathbb{Z}[T_0, T_1, \ldots, T_{i-1}]$ en i variables con coeficientes enteros.

Demostración. Procederemos por inducción. Para $i = 1$ basta tomar $P_1(T) = T$. Supongamos el resultado cierto para i. Entonces

$$(f^{(i)}/f)' = \frac{f^{(i+1)}f - f'f^{(i)}}{f^2} = \frac{f^{(i+1)}}{f} - \frac{f'}{f}\frac{f^{(i)}}{f}$$

Por lo tanto se tiene que

$$f^{(i+1)}/f = P_i(g, g', \ldots, g^{(i-1)})' + g \cdot P_i(g, g', \ldots, g^{(i-1)})$$

siendo la parte derecha de esta expresión la evaluación en $(g, g', \ldots, g^{(i)})$ de un polinomio en $i+1$ variables con coeficientes enteros, de acuerdo con la regla de la cadena. □

Demostración del teorema de Borel-Van den Dries: Nos disponemos a demostrar finalmente el teorema 2.44. Para ello demostraremos un enunciado algo más fuerte Sea k un cuerpo de Hardy que contiene $\mathbb{R}(x)$ y sea y en una extensión de Hardy K de k. Entonces

$$\begin{gathered}\textit{Si } |P(y, y', \ldots y^{(n)})| < g \textit{ para un polinomio } P \in k[T]_d \textit{ de orden } \leq n \\ \textit{y una función } g \in k, \textit{ entonces } |y| < e_n(f) \textit{ para alguna } f \in k.\end{gathered} \tag{A_n}$$

Demostremos esta afirmación por inducción sobre n. Si $n = 0$ entonces $|P(y)| = |f_k y^k + \cdots + f_0| < g$, $f_i \in k$, y podremos suponer este polinomio mónico dividiendo esta relación por f_k. Aplicando la desigualdad triangular inversa tenemos:

$$|y|^k < |y^{k-1}f_{k-1}| + \cdots + |f_0| + |g|$$

Tomando $f = 1 + |f_k| + \cdots + |f_0| + |g|$ se cumple $|y| < f = e_0(f)$. En efecto, si esto no fuese cierto se cumpliría que $|y| \geq 1$ y por tanto

$$|y|^k \geq |y^{k-1}|(1+|f_{k-1}|+\cdots+|f_0|+|g|) \geq |y^{k-1}|+|y^{k-1}f_{k-1}|+\cdots+|f_0|+|g|$$

contradiciendo lo obtenido anteriormente. Por tanto, se cumple (A_0).

Supongamos ahora $n \geq 1$, (A_{n-1}) cierto y que $|P(y, y', \ldots y^{(n)})| < g$. Si $|y| < e^{x^2}$ el resultado es cierto, por lo que supondremos $|y| \geq e^{x^2}$.

Sea $d > 0$ el grado total de este polinomio, y sea Q su parte homogénea de grado d. Escribamos $P = Q + R$, con R de grado $< d$. Remarquemos que todo monomio de R es de la forma $m = f \cdot y^{r_0}(y')^{r_1} \cdots (y^{(n)})^{r_n}$ con $f \in k$ y $r_0 + \cdots + r_n < d$. Si se divide este monomio por una potencia de y, y^ρ con $\rho > d - 1$, se cumple que $|m/y^\rho| \leq |f|$. En efecto, escribamos

$$m/y^\rho = f(\frac{y'}{y})^{r_0} \cdots (\frac{y^{(n)}}{y})^{r_n} \cdot \frac{1}{y^{\rho-(r_0+\cdots+r_n)}}$$

El lema 2.45 afirma que $|y^{(i)}/y| < |y|^{\varepsilon_i} \ \forall \varepsilon_i > 0$. Tomando $\varepsilon_i = 1/(n+1)r_i$ para los $r_i \neq 0$ se obtiene el resultado. Por tanto

$$|R(y, y', \ldots, y^{(n)})/y^\rho| < h \quad \text{con } h \in k \quad \text{si} \quad \rho > d - 1 \tag{*}$$

siendo h la suma de los valores absolutos de los coeficientes de los monomios de R. Trataremos dos casos separadamente:

a) Si ningún $y^{(i)}$ con $i > 0$ aparece en Q. Entonces se tiene que

$$|f_d y^d + R(y, y', \ldots, y^{(n)})| < g$$

Si se divide esta relación por $y^{d-\frac{1}{2}}$ y se aplica la desigualdad triangular inversa se obtiene

$$|f_d| \cdot |y^{1/2}| < g + |R(y, y', \ldots, y^{(n)})/y^{d-\frac{1}{2}}|$$

Teniendo en cuenta (*) obtenemos $|y| < (g+h)^2 |f_d|^{-2}$, finalizando la prueba en este caso.

b) En caso contrario dividamos entre $|y|^d$ la relación

$$|P(y, y', \ldots, y^{(n)})| = |Q(y, y', \ldots, y^{(n)}) + R(y, y', \ldots, y^{(n)})| < g$$

obteniendo

$$|Q(1, y'/y, \ldots, y^{(n)}/y + R(y, y', \ldots, y^{(n)})/y^d| < g/|y|^d$$

Al igual que en el caso anterior, aplicando (*) y la desigualdad triangular inversa, tenemos que

$$|Q(1, y'/y, \ldots, y^{(n)}/y + | < h \quad \text{para un} \quad h \in k$$

Realizando el cambio $z = y'/y \in K$ y aplicando el lema 2.47 se tiene que para cada $i \geq 1$ $y^{(i)}/y = Q_i(z, z', \ldots, z^{(i-1)})$ para un $Q_i \in \mathbb{Z}[T_0, \ldots, T_{i-1}]$. Sustituyendo estos valores en el polinomio Q, se obtiene un nuevo polinomio $\widetilde{Q}$ con coeficientes en k tal que

$$|\widetilde{Q}(z, z', \ldots, z^{(n-1)}| < h$$

Usando la hipótesis de inducción, existe una $f \in k$ tal que $|y'/y| = |z| < e_{n-1}(f)$. Podemos suponer que $f \geq x^2$, y por tanto el lema 2.46 nos permite afirmar que $|y| < e_n(f)$ (ó $|y| < e^{Mxf}$ si $n = 1$) finalizando la demostración del teorema. $\square$

Observaciones.

- El cuerpo de Hardy k en el que es usual tomar los coeficientes es $\mathbb{R}(x)$. En este caso se puede simplificar la conclusión del teorema diciendo que la solución y verifica $|y| < e_n(x^m)$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$.
- Para $k = \mathbb{R}(x)$ este resultado es óptimo en el sentido de que para todo $n \in \mathbb{N}$ se puede construir una ecuación diferencial algebraica de orden n para la que la función $e_n(x)$ es solución. Por ejemplo, para $e_2(x)$ una tal ecuación es
$$y''y - y'y - y' = 0$$
- Este resultado no es necesariamente cierto si la solución de la ecuación diferencial oscila (no pertenece a un cuerpo de Hardy), existiendo ejemplos de estas soluciones que crecen arbitrariamente rápido. Algunos de ellos fueron exhibidos ya por Borel en [Bor99, Nota 2, Pág. 47], y, más recientemente A. Rubel exhibió en [Rub81] una ecuación diferencial algebraica con coeficientes enteros (de orden 4 y grado 7) cuyas soluciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ son densas en $\mathcal{C}^0((-\infty, \infty))$.

Capítulo 3

Estructuras o-minimales

En este último capítulo se hará una breve presentación de las estructuras o-minimales. El desarrollo será más escueto que en los capítulos anteriores y no se incluirán las demostraciones de todos los enunciados, permitiendo dar una visión más amplia de la teoría sin sobrecargar esta memoria.

Comenzaremos con una motivación dada por los conjuntos semi-algebraicos. La teoría de las estructuras o-minimales puede verse como una axiomatización de esta última, y compartirán numerosas buenas propiedades, como la finitud de componentes conexas de sus conjuntos. Según van den Dries [Dri98], la teoría así surgida se adecúa perfectamente al marco buscado por A. Grothendiek en su *Esquisse d'un Programme* (sección 5: *Haro sur la topologie dite "générale", et réflexions heuristiques vers une topologie dite "modérée"* [Gro84], en el que se reclama la necesidad de una nueva geometría "moderada" que se adapte a nuestras intuiciones y en la que no sean compatibles ejemplos "salvajes" como curvas que llenen el plano. En efecto, en el contexto de las estructuras o-minimales no se podrán dar estos ejemplos, ni tampoco otros como el conjunto $\{(x, \sin(1/x)) \mid x \in (0, \pi)\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, ejemplo clásico de conjunto conexo pero no conexo por caminos. Por estas razones, las funciones de una estructura o-minimal no pueden tener un comportamiento oscilatorio y sus gérmenes formarán un cuerpo de Hardy con propiedades especialmente adecuadas. Este hecho se estudiará en la tercera y última sección.

Aunque en este trabajo motivamos el estudio de las estructuras o-minimales desde un punto de vista geométrico, éstas surgieron en un primer momento desde la lógica y la teoría de modelos. No entraremos en los detalles necesarios para desarrollar rigurosamente esta otra definición, pero sí se indicará en varios comentarios cómo se pueden relacionar las distintas perspectivas.

Para este capítulo se han utilizado fundamentalmente las referencias

[Dri98], [Cos00] y, para la sección 3.3, [Mil12].

3.1. Conjuntos semi-algebraicos

En el grado en matemáticas se estudian en asignaturas como Curvas Algebraicas los conjuntos definidos por sistemas de ecuaciones polinomiales. Trabajando en el cuerpo $\mathbb{R}$ (y en un cuerpo real en general), se dispone de la relación de orden, por lo que es natural considerar también los conjuntos dados por inecuaciones con polinomios. La geometría así surgida tiene importantes aplicaciones (en optimización, geometría computacional, robótica...), y aparece de forma notable en el problema 17 de Hilbert.

Definición 3.1. Un *conjunto semialgebraico de* $\mathbb{R}^n$ es una unión finita de conjuntos de la forma

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid f(\mathbf{x}) = 0 \ , \ g_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, g_k(\mathbf{x}) > 0\} \tag{3.1}$$

donde $f, g_1, \dots g_k \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$.
Una función $f : A \to \mathbb{R}^n, A \subseteq \mathbb{R}^m$, se dirá semi-algebraica si su grafo $\Gamma(f) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}$ es semi-algebraico.
Se denotará por $\mathcal{A}_n$ el conjunto de subconjuntos semialgebraicos de $\mathbb{R}^n$.

Nota. No se excluye que aparezcan varios polinomios igualados a 0, pues

$$f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = \cdots = f_r(\mathbf{x}) = 0 \iff (f_1(\mathbf{x}))^2 + (f_2(\mathbf{x}))^2 + \cdots + (f_r(\mathbf{x}))^2 = 0$$

No se puede suponer lo mismo para las desigualdades, y cómo reducir su número es un área de investigación actual. También notar que se permiten las relaciones $\geq$,$<$, $\leq$ y $\neq$ sin más que multiplicar por -1 y combinar las ya incluidas.

Directamente de la definición se deducen algunas propiedades de estabilidad por distintas operaciones.

Propiedades 3.2.

1. $\mathcal{A}_n$ es estable al tomar uniones e interseciones finitas y por complementarios. Es decir, $\mathcal{A}_n$ es un álgebra de Boole.

2. El producto cartesiano de conjuntos semialgebraicos $A \in \mathcal{A}_n$, $B \in \mathcal{A}_m$ es un conjunto semialgebraico $A \times B \in \mathcal{A}_{n+m}$.

3. Los conjuntos semialgebraicos de $\mathbb{R}$ son exactamente las uniones finitas de puntos e intervalos.

Demostración. 1. Las unión de dos conjuntos de la forma (3.1) es semi-algebraica por definición; para la intersección basta unir las restricciones impuestas y A^c viene determinado al sustituir "$=$" por "$\neq$" y "$>$" por "$\leq$".
2. Todo polinomio $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ se puede considerar como un polinomio en $n+m$ variables. Para definir el conjunto $A \times B$ basta unir las restricciones que definen A y B, las primeras expresadas sobre las m primeras variables $x_1, \ldots, x_m$ y las segundas sobre las n últimas $x_{m+1}, \ldots, x_n$.
3. Cada polinomio en una variable tiene un número finito de raíces. Las relaciones $f(x) = 0$ determinan un número finito de puntos y $g(x) > 0$ una unión finita de intervalos (como máximo uno más que raíces tenga g). Cualquier union finita de puntos e intervalos es un conjunto de $\mathcal{A}_1$. $\square$

Una propiedad mucho más difícil de demostrar es la estabilidad por proyecciones. Este hecho, conocido como el Teorema de Tarski-Seidenberg y enunciado a continuación, es la piedra angular en esta teoría, de la que se deducen importantes propiedades.

Teorema 3.3 (Tarski-Seidenberg). *Sea $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ la proyección en las n primeras coordenadas. Si $A \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ es un conjunto semialgebraico, entonces también lo es $\pi(A)$.*

Nota. Una demostración de este teorema se puede encontrar en [Łoj65, pág.110]. En ella se utiliza la estratificación de un conjunto semialgebraico (partición finita en conjuntos homeomorfos a algún $\mathbb{R}^k$). Esta idea es clave para generalizar las propiedades de los conjuntos semi-algebraicos a las estructuras o-minimales, y se hablará de su versión generalizada más adelante.

Es destacable que para los conjuntos únicamente algebraicos no se tiene la propiedad anterior. Por ejemplo, la proyección de la curva $y^2 = x$ en el eje x es el intervalo $[0, \infty)$, que no es un conjunto algebraico.

Observación (Lógica y geometría). Aunque en este capítulo no sigamos el tratamiento dado por la teoría de modelos, sí es relevante detenerse a señalar la relación con este otro punto de vista. Esto, además de mostrar la interrelación entre estas áreas de las matemáticas, clarificará el porqué de la terminología presentada más adelante.

Al considerar un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, concretizamos qué elementos pertenecen a él imponiendo propiedades que deben cumplir. Estas propiedades se expresan con diferentes símbolos, entre ellos los símbolos lógicos "$\vee$", "$\wedge$", "$\neg$" y cuantificadores "$\exists$", "$\forall$". En el caso de los conjuntos semialgebraicos también aparecen "$+$","$-$","$\cdot$","$=$", "$<$" y los números reales. Se dice que los conjuntos algebraicos son *definibles con parámetros en el cuerpo ordenado* $\mathbb{R}$.

Si dos conjuntos $A, B \in \mathbb{R}^n$ vienen descritos por las fórmulas $\phi(\mathbf{x})$ y $\psi(\mathbf{x})$ respectivamente, su union está definida por $\phi(\mathbf{x}) \vee \psi(\mathbf{x})$, su intersección por $\phi(\mathbf{x}) \wedge \psi(\mathbf{x})$ y A^c por $\neg\phi(\mathbf{x})$. Más interesante es la relación con los cuantificadores $\exists$ y $\forall$. Como ejemplo, sea $A \subseteq \mathbb{R}^3$ definido por $\phi(x, y, z)$ y consideremos

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R}\ \phi(x, y, z)\}\ ,\ A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall z \in \mathbb{R}\ \phi(x, y, z)\}$$

A_1 es exactamente la proyección sobre las dos primeras coordenadas de A, $\pi(A)$. A_2 es $(\pi(A^c))^c$ (siempre se pueden transformar los cuantificadores $\forall$ en $\exists$ modificando las apariciones de "$\forall z$" por "$\neg\exists z\neg$").

Con estos comentarios podemos entender otras formas de interpretar el teorema de Tarski-Seidenberg: "*El cuerpo ordenado* $\mathbb{R}$ *admite eliminación de cuantificadores*" o también "*Los conjuntos semialgebraicos son exactamente los conjuntos definibles con parámetros en el cuerpo ordenado* $\mathbb{R}$". Esto quiere decir que los conjuntos definidos con cuantificadores lógicos variando en conjuntos semi-algebraicos también serán semi-algebraicos. En particular, todos los conjuntos definidos por la notación $\varepsilon - \delta$ son semi-algebraicos.

Como aplicación de estas ideas mostraremos cómo se pueden demostrar las siguientes propiedades:

Proposición 3.4.

1. *Si f, g son funciones semi-algebraicas, también lo es* $\max(f, g)$.
2. *Si $A \subseteq \mathbb{R}^m$ es semi-algebraico, también lo son $\mathring{A}$ y $\overline{A}$.*
3. *Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función semi-algebraica, el conjunto D de puntos de (a, b) donde f es derivable es semi-algebraico, y la derivada $f' : D \to \mathbb{R}$ también lo es.*

Demostración. El grafo de $\max(f, g)$ se puede caracterizar por:

$$\Gamma(\max(f, g)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y = f(x)\ \vee\ y = g(x))\ \wedge\ y \geq f(x)\}$$

La adherencia e interior de A se pueden caracterizar por:

$$\overline{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \varepsilon \in (0, \infty),\ \forall \mathbf{a} \in A\ ,\ \sum_{i=1}^{m}(x_i - a_i)^2 < \varepsilon\}\ \ ;\ \ \mathring{A} = (\overline{A^c})^c$$

El conjunto D y el grafo de f' vienen dados por:

$$D = \{x \in (a, b) \mid \exists d \in \mathbb{R}\,,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \big(0 < t^2 < \delta\ \Rightarrow\ (\frac{(f(x+t) - f(x)}{t} - d)^2 < \varepsilon\big)\}$$

$$\Gamma(f') = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b)\,,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \big(0 < t^2 < \delta\ \Rightarrow\ (\frac{(f(x+t) - f(x)}{t} - y)^2 < \varepsilon\big)\}$$

$\square$

A continuación se presentan algunas de las buenas propiedades topológicas de los conjuntos semialgebraicos. Este buen comportamiento será el que se buscará generalizar con las estructuras o-minimales y está íntimamente ligado con la imposibilidad de que una función oscile infinitamente, posibilitando relacionar estas estructuras con los cuerpos de Hardy.

Proposición 3.5. *Todo conjunto semi-algebraico $A \subseteq \mathbb{R}^m$ tiene un número finito de componentes conexas, y cada una de ellas es semi-algebraica.*

Proposición 3.6. *Un conjunto semialgebraico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es localmente conexo, y es conexo si y sólo si es conexo por caminos.*

No presentamos la demostración de estas proposiciones, que se puede encontrar en [Łoj65, págs.76,110].

Ejemplos 3.7.

- La función $\sin x$ no es semi-algebraica. En efecto, si se interseca su grafo con el eje $y = 0$ se obtiene el conjunto $\{(2\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, con infinitas componentes conexas.
- La función e^x tampoco es semi-algebraica, a pesar de que realizando operaciones con su grafo no se contradicen las proposiciones 3.5 y 3.6. En este caso, se puede probar que toda función semi-algebraica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un crecimiento acotado por x^n para algún $n \in \mathbb{N}$ [Mil12].

3.2. Generalidades de las estructuras o-minimales

Es natural querer extender el estudio anterior a otras clases de conjuntos a los que poder aplicar las operaciones de unión, intersección, proyecciones... Sin embargo, es fácil que tras sucesivas aplicaciones de estas operaciones a algunos conjuntos de partida se creen conjuntos demasiado "caóticos", que es lo que se busca evitar. Aquí entra en juego el axioma de o-minimalidad, que forzará a que las estructuras que lo cumplan tengan un comportamiento "moderado".

Definición 3.8. Se define una *estructura en* $\mathbb{R}$ como una sucesión de colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_m)_{m=0}^{\infty}$ tales que:

(S1) $\mathcal{S}_m$ es un álgebra de Boole de subconjuntos de $\mathbb{R}^m$ (i.e., $\emptyset, \mathbb{R}^m \in \mathcal{S}_m$, es cerrado para uniones e intersecciones finitas y complementarios).

(S2) Si $A \in \mathcal{S}_m$ y $B \in \mathcal{S}_n$, entonces $A \times B \in \mathcal{S}_{m+n}$.

(S3) Las diagonales $\Delta_{i,j} = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_i = x_j\}$ pertenecen a $\mathcal{S}_m$.

(S4) Si $A \in \mathcal{S}_{m+1}$, entonces su proyección en las primeras m componentes, $\pi(A)$, pertenece a $\mathcal{S}_m$.

Se dirá que la estructura $\mathcal{S}$ es *o-minimal* si además cumple:

(O1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \in \mathcal{S}_2$.

(O2) Los conjuntos de $\mathcal{S}_1$ son exactamente las uniones finitas de puntos e intervalos.

Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ pertenece a $\mathcal{S}_m$ se dirá que A *pertenece a* $\mathcal{S}$ (o que *es definible en* $\mathcal{S}$).
Una función $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dirá que *pertenece a* $\mathcal{S}$ (o que *es definible en* $\mathcal{S}$), si su grafo $\Gamma(f)$ pertenece a $\mathcal{S}_{n+m}$.

Observaciones.

- Recordemos que una función f se define de forma conjuntista exactamente como el conjunto que determina su grafo, por lo que esta definición es la más natural posible.
- De igual forma se puede decir que una estructura $\mathcal{S}$ contiene una relación de $\mathbb{R}^{m_1}, \cdots \mathbb{R}^{m_r}$ si contiene el subconjunto del producto cartesiano que la define. En particular la condición (O1) indica que $\mathcal{S}$ contiene la relación de orden.
- De forma más general se puede dar la definición de estructura sobre un conjunto R cualquiera, y la de estructura o-minimal sobre un conjunto totalmente ordenado con un orden denso y sin extremos $(R, <)$. Concretamente, tienen gran relevancia las estructuras o-minimales sobre cuerpos reales-cerrados, pues si una estructura o-minimal $\mathcal{S}$ contiene dos operaciones $+$ y $\cdot$ que hacen de R un anillo ordenado, éste debe ser un cuerpo real-cerrado [Dri98, Pág. 21, Prop 4.6].
- El término *o-minimal* hace referencia a la relación de orden que aparece en estas estructuras y a la condición que reduce los conjuntos de $\mathcal{S}_1$ a los mínimos posibles (si se impone (O1) y que los conjuntos unipuntuales sean definibles, todos los intervalos son definibles). Es precisamente la relación de orden la que permite hablar de propiedades topológicas de los conjuntos definibles sobre una estructura o-minimal (recordemos que la topología de $\mathbb{R}$ coincide con la topología del orden).

Propiedades 3.9 (Propiedades de conjuntos definibles)**.**
Sea $\mathcal{S}$ una estructura:

i) Los conjuntos definidos por permutación de variables de un conjunto $A \in \mathcal{S}_m$ son definibles en $\mathcal{S}$. Es decir, si σ es una permutación de $\{1, \ldots, m\}$ entonces

$$A_\sigma = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) \in A\} \in \mathcal{S}_m$$

ii) Si $\pi_{i_1,\ldots,i_n} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la proyección en las componentes $i_1, \ldots, i_n$ y $A \in \mathcal{S}_m$, entonces $\pi_{i_1,\ldots,i_n}(A) \in \mathcal{S}_n$.

Demostración. i) Consideramos el conjunto siguiente (definible por (S1), (S2) y (S3))

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j=1}^{m} (\mathbb{R}^m \times A) \cap \Delta_{\sigma(j),m+j}$$

Lo que se ha conseguido es que en las m componentes izquierdas se "copien" los valores reordenándolos como indica σ. Tomando m proyecciones sucesivas de $\mathcal{A}$ (aplicar (S4)) se obtiene el conjunto A_σ.
ii) Basta reordenar las componentes para dejarlas en las n primeras posiciones y aplicar $m-n$ veces (S4). □

Propiedades 3.10 (Propiedades de funciones definibles)**.**
Sea $\mathcal{S}$ una estructura, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función definible en $\mathcal{S}$. Entonces:

i) $D \in \mathcal{S}_m$ y para todo $A \subseteq D$ definible en $\mathcal{S}$, $f(A) \in \mathcal{S}_n$ y la restricción $f|_A$ también es definible.

ii) Si $B \in \mathcal{S}_n$, entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}_m$.

iii) Si f es inyectiva, f^{-1} (definida en $f(D)$) es definible.

iv) Si $f(D) \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $g : E \to \mathbb{R}^p$ es definible, entonces la composición $g \circ f$ es definible.

Demostración. Los conjuntos de los enunciado se pueden escribir como:

i) $D = \pi_{1,..,m}(\Gamma(f))$, $f(A) = \pi_{m+1,..,m+n}\big(\Gamma(f) \cap (A \times \mathbb{R}^n)\big)$,
$\Gamma(f|_A) = \Gamma(f) \cap (A \times \mathbb{R}^n)$, *ii)* $f^{-1}(B) = \pi_{1,..,m}\big(\Gamma(f) \cap (\mathbb{R}^m \times B)\big)$,
iii) $\Gamma(f^{-1}) = \{(f(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in D\} = \Gamma(f)_\sigma$, (σ la permutación adecuada).
iv) Por simplicidad supondremos f y g de una variable
$\Gamma(g \circ f) = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ z = g(y)\} = \pi_{1,4}\big((\Gamma(f) \times \Gamma(g)) \cap \Delta_{1,3}\big)$

□

Proposición 3.11. *Dada una colección de estructuras $(\mathcal{S}^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ se puede definir su intersección $\mathcal{S}$ tomando para cada $m \geq 0$:*

$$\mathcal{S}_m = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{S}_m^\alpha$$

La colección $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_m)_{m=0}^\infty$ es una estructura. Además, si cada $\mathcal{S}^\alpha$ es o-minimal, también lo será $\mathcal{S}$.

Demostración. Es claro que si dos conjuntos A y B pertenecen a todas las estructuras $\mathcal{S}^\alpha$, entonces su unión, intersección, complementario, proyección y producto cartesiano con $\mathbb{R}$ pertenecerán a todas ellas también. También debe pertenecer a todo $\mathcal{S}^\alpha_m$ la diagonal $\Delta_{1,m}$, y si son o-minimales, los conjuntos indicados en (O1) y (O2). □

Esta proposición nos permite considerar la *estructura generada por una colección de conjuntos* (usualmente algunas operaciones o relaciones), tomando la intersección de todas las que los contienen. Se hablará, por ejemplo, de una *estructura sobre el grupo* $(\mathbb{R}, 0, +)$ si $\{0\} \in \mathcal{S}_1$ y $\Gamma(+) \in \mathcal{S}_3$. Se dirá que un conjunto es *definible en* $(\mathbb{R}, \{f_i\}_{i\in\Lambda})$ si lo es en la menor estructura que contiene a $\{f_i\}_{i\in\Lambda}$, llamémosla $\mathcal{S}$. Teniendo en cuenta lo dicho en la observación tras el teorema 3.3, los axiomas (S1), (S2) y (S4) indican que los conjuntos que surgen al imponer condiciones (finitas) usando las funciones f_i junto con los conectores y cuantificadores lógicos son definibles en $\mathcal{S}$. El axioma (S3) permite utilizar el símbolo "=" en estas fórmulas. La estructura $\mathcal{S}$ está formada exactamente por los conjuntos definidos de esta forma.

Como se verá más adelante, las estructuras o-minimales poseen muy buenas propiedades, y se desearía disponer de ellas para numerosas familias de conjuntos. Sin embargo, más allá de algún ejemplo simple, es muy difícil probar las propiedades de o-minimalidad (especialmente (S4) y (O2), a pesar de la aparente simplicidad de esta última). Encontrar ejemplos de estructuras o-minimales es una activa área de investigación. A continuación se muestran algunos.

Ejemplos 3.12.

- Tomando $\mathcal{S}_m = \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ se obtiene una estructura en la que todo conjunto es definible (y por tanto está lejos de ser o-minimal).
- Por lo dicho en la sección anterior, los conjuntos semi-algebraicos sobre $\mathbb{R}$ forman una estructura o-minimal.
- No es difícil ver que los conjuntos semi-afines (definidos por ecuaciones e inecuaciones de polinomios de grado 1) también son o-minimales.
- La estructura $\mathbb{R}_{exp}$, generada por $(\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot, e^x)$, es o-minimal. Este teorema fue demostrado en 1991 por A. Wilkie, dando un importante impulso a este área. [Dri98, Pág. 150]
- La estructura generada por $(\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot, \{x^\alpha\}_{\alpha\in A})$ es o-minimal para todo $A \subseteq \mathbb{R}$. [Mil12]

Resultados de geometría moderada

En el resto de esta sección se enunciarán, sin demostrar, las propiedades topológicas principales de las estructuras o-minimales. Se comenzará enunciando el *teorema de monotonía*, clave para el desarrollo de la teoría.

Teorema 3.13 (Teorema de monotonía, [Dri98, cap. 3, Prop. 1.2]). *Sea $\mathcal{S}$ una estructura o-minimal y $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función definible en $\mathcal{S}$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$). Entonces existen puntos $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ tales que en cada subintervalo (a_j, a_{j+1}) f es continua y es o bien constante o bien estrictamente monótona.*

Proposición 3.14 ([Dri98, cap. 3, Prop. 2.8]). *Si $\mathcal{S}$ es una estructura o-minimal, todo conjunto definible A tiene un número finito de componentes conexas, cada una de ellas definible en $\mathcal{S}$.*

Nota. A veces esta propiedad se toma para la definición de estructura o-minimal en lugar de (O2).

Proposición 3.15 ([Dri98, cap. 6, Prop. 3.2]). *Si $\mathcal{S}$ es una estructura o-minimal, todo conjunto definible A es localmente conexo, y es conexo si y sólo si es conexo por caminos.*

Por último, enunciaremos la *descomposición en celdas* de los conjuntos definibles, que generaliza las "particiones normales" presentadas en [Łoj65] para tratar el caso semi-analítico y semi-algebraico. Esta descomposición es fundamental en el estudio de las estructuras o-minimales, y en ella se basan una gran parte de resultados relativos a su geometría.
Fijemos una estructura o-minimal $\mathcal{S}$.

Definición 3.16. Dadas dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ definibles en $\mathcal{S}$ y continuas, escribimos:

$$(f, g)_A = \{(\mathbf{x}, r) \in A \times \mathbb{R} \mid f(\mathbf{x}) < r < g(\mathbf{x})\}$$

Extendemos esta definición permitiendo tomar $f = -\infty$ ó $g = \infty$.

Definición 3.17 (Celda). Definimos una *celda* de forma recursiva: los conjuntos unipuntuales $\{r\}$, $r \in \mathbb{R}$ y los intervalos $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ (con a, b posiblemente infinitos) son las celdas de $\mathcal{S}_1$.
Dada una celda $A \in \mathcal{S}_m$, los grafos $\Gamma(f)$ de funciones continuas $f : A \to \mathbb{R}$ son celdas de $\mathcal{S}_{m+1}$. También son celdas de $\mathcal{S}_{m+1}$ los conjuntos $(f, g)_A$.

De esta forma, cada celda se forma por una sucesión consistente en tomar grafos o zonas entre dos grafos de funciones. De este modo, a cada celda se le puede asociar una dimensión $k \geq 0$ y será homeomorfa a un cubo en $\mathbb{R}^k$.

Definición 3.18 (Descomposición Celular). Una *descomposición* de $\mathbb{R}^m$ es una partición de $\mathbb{R}^m$ en un número finito de celdas $\{A_i\}_{i=1}^n$ de tal forma que el conjunto de proyecciones $\pi(A_i)$ en las primeras $m - 1$ componentes forme una descomposición de $\mathbb{R}^{m-1}$ (siendo una descomposición de $\mathbb{R}$ una partición finita en celdas).

Dada una colección finita de conjuntos $C_1, \ldots, C_l \subseteq \mathbb{R}^m$, diremos que una descomposición de $\mathbb{R}^m$, $\{A_i\}_{i=1}^n$, es *compatible con esta colección* si cada C_j es unión de celdas de $\{A_i\}_{i=1}^n$.

Teorema 3.19 (Teor. Descomposición Celular [Dri98, cap. 3, Teor. 2.11])**.**

(E1) Para toda familia finita $C_1, C_2, \ldots, C_l$, $C_i \subseteq \mathbb{R}^m$ de conjuntos definibles en $\mathcal{S}$ existe una descomposición de $\mathbb{R}^m$ compatible con esta familia..

(E2) Para toda función definible $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, existe una descomposición de $\mathbb{R}^m$ compatible con $\{A\}$ tal que para toda celda $C \subseteq A$ en la descomposición, se cumple que la restricción $f|_C : C \to \mathbb{R}$ es continua.

Observación. Este teorema se puede refinar haciendo *descomposiciones de clase $\mathcal{C}^k$* (imponiendo a las funciones que definen las celdas ser de esta clase). De esta forma, las restricciones de la función f en (E2) se pueden obtener de clase $\mathcal{C}^k$ [Dri98, cap. 7, Teor. 3.2].

3.3. Cuerpo de Hardy de una estructura o-minimal

En esta sección $\mathcal{S}$ denotará una estructura sobre $\mathbb{R}$ que contenga las relaciones $<, +, \cdot$ y los subconjuntos unipuntuales de $\mathbb{R}$ (esto es, que expande el cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, >, 0, 1, +, \cdot)$).

Lema 3.20. *Si dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$ son definibles, $f + g, f \cdot g, -f$ y $1/f$ (si f no se anula) son definibles.*

Demostración. Demostraremos el resultado para $f + g$, suponiendo que f y g son de una variable para no sobrecargar la notación. El resto de casos son similares. Se puede expresar el grafo de $f + g$ como:

$$\Gamma(f+g) = \pi_{1,4}\big(\{(x,y,w,z) \in \mathbb{R}^4 \mid y = f(x),\ w = g(x),\ z = y + w\}\big) =$$
$$= \pi_{1,3}\Big(\big(\pi_{2,4}\big((\Gamma(f) \times \Gamma(g)) \cap \Delta_{1,3}\big) \times \mathbb{R}\big) \cap \Gamma(+)\Big)$$

□

Proposición 3.21 ([Dri98, cap. 7, (2.5)])**.** *Si $\mathcal{S}$ es o-minimal, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es definible, entonces f es derivable en todos los puntos de I, excepto quizá en un número finito de ellos. Además, la función derivada f' es definible en cada subintervalo de I en el que f sea derivable.*

Nota. Esta proposición es un caso particular de 3.19.

Teorema 3.22 ([Mil12, Teor. 3.1])**.** *Dada la estructura $\mathcal{S}$, son equivalentes:*

(i) $\mathcal{S}$ es o-minimal.

(ii) El conjunto de gérmenes de funciones $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ definibles en $\mathcal{S}$ forma un cuerpo de Hardy. Este cuerpo se denotará por $k_{\mathcal{S}}$.

(iii) Toda función $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ perteneciante a $\mathcal{S}$ es o bien eventualmente nula, o bien no se anula para valores mayores que un $M > 0$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii): Juntando la proposición 3.21 con el teorema de monotonía 3.13 deducimos que toda función f definible es eventualmente diferenciable y tiene eventualmente un signo constante (por lo que es invertible si su germen no es idénticamente nulo). $\mathcal{S}$ contiene la suma, multiplicación e inversos de funciones definibles (lema 3.20), por lo tanto esta familia de funciones forma un cuerpo de Hardy.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es claro, pues toda función de un cuerpo de Hardy lo debe cumplir.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Debemos mostrar que si $A \in \mathcal{S}_1$, A es unión finita de puntos e intervalos. Esto es equivalente a que su frontera, ∂A, sea un conjunto finito. En virtud del teorema de Bolzano- Weierstrass basta probar que ∂A es acotado y discreto. Sea κ_A la función característica de A ($\kappa_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 si no, definible pues su grafo es $(A \times \{1\}) \cup (A^c \times \{0\})$). Por hipótesis, a partir de un momento κ_A debe ser 0 ó 1, por lo que para un $b \in \mathbb{R}$, (b, ∞) o bien está contenido en A, o es disjunto a él. Razonando de igual forma para la función $\kappa_A(-x)$ se obtiene un resultado análogo para un $a_0 \in \mathbb{R}$ y $(-\infty, a_0)$, por lo que ∂A está acotado (pues está contenido en $[a_0, b]$).
Tomemos ahora un punto $x \in \partial A$, y definamos $C_x = \{\frac{1}{a-x} \mid a \in A \setminus \{x\}\}$ (conjunto definible por serlo la división y la resta). Considerando como antes las funciones $\kappa_{C_x}(x)$ y $\kappa_{C_x}(-x)$ obtenemos que entornos de $+\infty$ y $-\infty$ están contenidos en C_x o son disjuntos a él, por lo que para un $\varepsilon > 0$ $(x, x+\varepsilon)$ y $(x-\varepsilon, x)$ están o bien contenidos en A o son disjuntos a A. Por tanto $\partial A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = x$ y ∂A es un conjunto discreto como se quería probar. □

Los cuerpos de Hardy provenientes de una estructura o-minimal suelen ser grandes y difíciles de describir explícitamente, pero esto es debido a ser cerrados por más operaciones y tener una estructura más interesante. En particular son cerrados por composición y por inversa composicional. Esto demuestra que no todo cuerpo de Hardy proviene de una estructura o-minimal, pues por ejemplo en $k_1 = \mathbb{R}(e^x)$, $e^x \circ e^x \notin k_1$, y en $\mathbb{R}(x)$ la inversa de x^2, $\sqrt{x}$, no pertenece a $\mathbb{R}(x)$.

Proposición 3.23. *Si $k_{\mathcal{S}}$ es un cuerpo de Hardy proveniente de una estructura o-minimal $\mathcal{S}$ y f, g son elementos de $k_{\mathcal{S}}$ tales que $g \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ ($v(g) < 0$), entonces $f \circ g$ pertenece a k.*

Demostración. Por la propiedad iv) de 3.10, $f \circ g \in \mathcal{S}$, y por tanto forma parte de $k_{\mathcal{S}}$. □

Proposición 3.24. *Sea $k_{\mathcal{S}}$ un cuerpo de Hardy proveniente de una estructura o-minimal $\mathcal{S}$. Si $f \in k_{\mathcal{S}}$ y $f \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ ($v(f) < 0$), entonces su inversa composicional, f^{-1}, está definida en un entorno de infinito y su germen pertenece a $k_{\mathcal{S}}$.*

Demostración. Por ser eventualmente monótona, f es inyectiva en un entorno de infinito y tiene llegada en un intervalo (M, ∞), donde f^{-1} está definida. Por la propiedad iii) de 3.10 f^{-1} pertenece a $\mathcal{S}$. $\square$

Ejemplo 3.25. Podríamos intentar describir el cuerpo de Hardy de una estructura o-minimal explícitamente, pero pronto nos daríamos cuenta de la dificultad que esto entraña. Sea por ejemplo $\mathcal{S}$ la estructura de los conjuntos semi-algebraicos (la menor conteniendo $<, +$ y $\cdot$). ¿Cuál es el cuerpo $k_{\mathcal{S}}$? Debe contener las funciones racionales, también las potencias x^α con $\alpha \in \mathbb{Q}$ y ser cerrado por composición, por lo que contiene a

$$k = \mathbb{R}(P(x)^\alpha \mid P \in \mathbb{R}(x)\,,\ \alpha \in \mathbb{Q})$$

Sin embargo, si $k_{\mathcal{S}}$ consistiese únicamente en estas funciones se contradeciría el teorema de Galois que nos dice que existen ecuaciones algebraicas no resolubles por radicales. Esto muestra que los cuerpos de Hardy provenientes de estructuras o-minimales son algo más abstracto y sutil.

Bibliografía

[Bor99] Émile Borel. Mémoire sur les séries divergentes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3e série, 16:9–131, 1899.

[Bou06] N. Bourbaki. *Algèbre commutative: Chapitres 5 à 7*. Éléments de mathématique. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[Bou07] N. Bourbaki. *Fonctions d'une variable réelle: Théorie élémentaire*. Éléments de mathématique. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[Cos00] M. Coste. *An Introduction to O-minimal Geometry*. Dottorato di ricerca in matematica / Università di Pisa, Dipartimento di Matematica. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, 2000.

[Dri82] L. van den Dries. Bounding the rate of growth of solutions of algebraic differential equations and exponential equations in hardy fields. unpublished, 1982.

[Dri98] L. van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1998.

[Ehr95] P. Ehrlich. Hahn's Über die nichtarchimedischen grössensysteme and the development of the modern theory of magnitudes and numbers to measure them. *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, pages 165–213, 01 1995.

[Ful08] W. Fulton. *Curvas Algebraicas*. Editorial Reverté, 2008.

[Gra56] K.A.H. Gravett. Ordered abelian groups. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 7(1):57–63, 01 1956.

[Gro84] A. Grothendieck. Esquisse d'un programme. *London Math. Soc. Lect. Note Ser.*, 1:7–48, 1984.

[Har10] G.H. Hardy. *Orders of Infinity*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1910.

[Lan05] S. Lang. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2005.

[Łoj65] S. Łojasiewicz. *Ensembles semi-analytiques.* Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1965.

[Mil12] C. Miller. Basics of o-minimality and hardy fields. In *Lecture Notes on O-Minimal Structures and Real Analytic Geometry*, pages 43–69. Springer, 2012.

[Pre84] A. Prestel. *Lectures on Formally Real Fields.* Lecture notes in mathematics. Springer, 1984.

[Rib99] P. Ribenboim. *The Theory of Classical Valuations.* Springer Monographs in Mathematics. Springer New York, 1999.

[Ros83a] M. Rosenlicht. Hardy fields. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 93:297–311, 05 1983.

[Ros83b] M. Rosenlicht. The rank of a hardy field. *Transactions of the American Mathematical Society*, 280:659–671, 12 1983.

[Rub81] L.A. Rubel. A universal differential equation. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4(3):345–349, 1981.

[Rud76] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976.

[ZS76] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative Algebra II.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1976.