



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Curso 2018-2019

**Métodos iterativos para sistemas lineales de ecuaciones e inecuaciones
basados en proyecciones sucesivas**

Autor: D. Juan González Antolín

Tutor: Dr. Luis M^a Abia Llera

Prefacio

El trabajo de Fin de Grado que presentamos tiene como objetivo el análisis del algoritmo de Proyecciones Alternadas de Von Neumann y su aplicación en distintos problemas del álgebra lineal y la optimización. El algoritmo de proyecciones alternadas en su forma más general se formula en el ámbito de un espacio de Hilbert, y requiere por tanto de algunos de los elementos básicos de la teoría de estos espacios, que recopilamos sin prueba, en su mayoría, en el capítulo 1.

El núcleo del trabajo lo conforman los capítulos 2 y 3. En el capítulo 2 probamos el teorema de Von Neumann de las proyecciones alternadas entre dos subespacios cerrados y su extensión por Halperin, a la intersección de un número finito de subespacios (cerrados). Consideramos también la cuestión de la velocidad asintótica de convergencia del método que requiere introducir nociones de ángulos entre subespacios de un espacio de Hilbert.

El capítulo 3 selecciona algunos algoritmos del álgebra lineal numérica que pueden reinterpretarse en términos del método de proyecciones alternadas. Esta selección no pretende ser exhaustiva, estando condicionada por la tipología que se describe en algunos textos como algoritmos de acción por filas ([2, 3]). Los teoremas de convergencia de estos algoritmos están dispersos en diferentes publicaciones (cuando se apartan de las hipótesis del teorema de las proyecciones alternadas) y hemos seleccionado algunos de ellos.

En Valladolid, a 12 de julio de 2019

Índice general

1. Preliminares: Espacios de Hilbert	1
1.1. Introducción	1
1.2. Conceptos previos	2
1.2.1. Productos internos	2
1.2.13. Ortogonalidad	4
1.3. Operadores de proyección	5
2. Teoremas de Von Neumann y Halperin	9
2.1. Teorema de Von Neumann	9
2.2. Teorema de extensión de Halperin.	11
2.3. Velocidad de convergencia.	14
2.3.1. Ángulo entre subespacios.	14
2.3.6. Velocidad de convergencia de MAP.	16
2.4. Técnicas de aceleración.	20
3. Métodos de acción por filas	23
3.1. Introducción	23
3.2. Algunos métodos de Acción por Filas.	24
3.2.1. El Método de Kaczmarz	24
3.2.2. El algoritmo de Cimmino	25
3.2.3. El Método de Relajación de Agmon, Motzkin y Schoenberg (MAMS)	26
3.2.4. El algoritmo de Hildreth	27
3.2.5. El método de relajación de Herman	28
3.3. El método de Kaczmarz y la inversa generalizada.	29
3.4. El método de reconstrucción algebraica (ART)	36
3.4.1. Formulación matemática del problema	38
3.4.2. Técnicas de reconstrucción algebraica (ART)	40
3.5. Algunos experimentos numéricos	41
3.6. Conclusiones	44
A. Programas de Matlab	49

Capítulo 1

Preliminares: Espacios de Hilbert

1.1. Introducción

El objetivo de esta trabajo es el estudio del método de proyecciones alternadas en subespacios y variedades afines y su relación con diferentes algoritmos para el tratamiento de problemas como:

1. El problema de la resolución de sistemas $Ax = b$, con A matriz $m \times n$ real, y b no necesariamente en el rango de A (en cuyo caso consideraremos soluciones de mínima norma).
2. El problema de la factibilidad en sistemas de inecuaciones lineales.
3. Resolución de problemas de optimización con restricciones lineales.
4. Técnicas de reconstrucción algebraica en el tratamiento de imágenes.

El método de proyecciones alternadas, al que nos referiremos genéricamente como MAP, en su versión más simple se debe a John Von Neumann que consideró el problema de la proyección de un punto en un espacio de Hilbert a la intersección de dos subespacios cerrados del mismo. Posteriormente, este resultado fué generalizado por Halperin a la intersección de un número finito de subespacios cerrados, y por Dykstra a la intersección de un número finito de convexos cerrados no vacíos.

La memoria sólo considerará el método de proyecciones alternadas en subespacios cerrados en un espacio de Hilbert en las versiones de Von Neumann y de Halperin. Por ello en este primer capítulo reunimos resultados básicos de la teoría de espacios de Hilbert [1, 7, 10], en su mayoría sin prueba, por estar éstos incluidos en los programas de asignaturas del Grado. Básicamente nos limitaremos a probar sólo que un operador $T : H \rightarrow H$, H espacio de Hilbert, es un operador de proyección si y sólo si es lineal,

acotado, autoadjunto e idempotente, y está caracterizado por el subespacio $R(T)$, el rango de T .

Dedicaremos el capítulo 2 a la prueba del teorema de Von Neumann y a su extensión por Halperin. En el contexto del teorema de Von Neumann, la velocidad asintótica de convergencia está estrechamente relacionada con los ángulos entre los subespacios sobre los que se alternan las proyecciones. Describimos esta vinculación y algunas técnicas generales de aceleración de la convergencia.

Finalmente el capítulo 3 selecciona algunos algoritmos que pueden re-interpretarse en términos del método MAP en áreas como la solución de sistemas de ecuaciones lineales, solución de sistemas de inecuaciones lineales, determinados o sobredeterminados, y algunos problemas de optimización con restricciones. Describimos también una aplicación al tratamiento de imágenes médicas, que se conoce genéricamente con el nombre de técnicas de reconstrucción algebraica (ART).

Un análisis experimental completo de la familia de algoritmos propuestos se escapa al alcance de este trabajo, sobre todo tras comprobar con algunos ejemplos que resultan poco competitivos con algoritmos directos (en el caso de sistemas lineales determinados, si el tamaño del sistema es moderado), e incluso con otros métodos iterativos clásicos. No obstante tienen su interés cuando se considera la solución de sistemas sobredeterminados, o indeterminados, sujetos a restricciones en las variables de la solución.

1.2. Conceptos previos

1.2.1. Productos internos

1.2.2 Definición. Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Un producto interno sobre E es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ en \mathbb{K} que verifica las siguientes propiedades:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todos $x, y, z \in E$.
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todos $x, y \in E$.
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in E$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si, y solo si, $x = 0$.

Un espacio prehilbertiano o con producto interno es un par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde E es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre E .

1.2.3 Proposición. Sea E un espacio vectorial y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre E . Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$

2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ para todos $x, y, z \in E$.

3. $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, y \rangle = 0$ para todos $x, y \in E$.

4. Si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in E$, entonces $x = 0$.

1.2.4 Teorema. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sea E un espacio prehilbertiano. Si $x, y \in E$ se verifica que

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

La igualdad se da si, y sólo si, los vectores x e y son linealmente dependientes.

1.2.5 Proposición. Sea E un espacio prehilbertiano. La aplicación $\| \cdot \|$ de E en \mathbb{R} , definida por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad x \in E. \quad (1.1)$$

es una norma sobre E .

1.2.6 Definición. Un espacio de Hilbert es un espacio prehilbertiano completo para la norma definida por el producto interno como en (1.1).

1.2.7 Lema. Sean E un espacio prehilbertiano y $x, y \in E$. Entonces:

$$\|x + y\|^{1/2} = \|x\|^{1/2} + \|y\|^{1/2} + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle).$$

1.2.8 Proposición. Sea E un espacio prehilbertiano y $x, y \in E$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Identidad del paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

2. Identidades de polarización:

a) Si E es real,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

b) Si E es complejo,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) &= \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ \operatorname{Im}(\langle x, y \rangle) &= \frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) \end{aligned}$$

1.2.9 Nota. Si E es un espacio normado en el que se verifica la ley del paralelogramo, entonces existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

para cada $x \in E$.

1.2.10 Proposición. Sea E un espacio prehilbertiano. La aplicación $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ de $E \times E$ en \mathbb{K} es continua.

1.2.11 Proposición. Sean E un espacio prehilbertiano y $a \in E$. El operador $x \rightarrow \langle x, a \rangle$ de E en \mathbb{K} es lineal y continuo.

1.2.12 Proposición. El completizado de un espacio prehilbertiano es un espacio de Hilbert.

1.2.13. Ortogonalidad

1.2.14 Definición. Sea E un espacio prehilbertiano.

1. Se dice que dos elementos de E son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$ y se representa por $x \perp y$.
2. Un subconjunto A de E se dice que es ortogonal si $x \perp y$ para todos $x, y \in A$, $x \neq y$. Si además $\|x\| = 1$ para todo $x \in A$ se dice que A es un conjunto ortonormal.
3. Se dice que un conjunto A es ortogonal a un conjunto B si $x \perp y$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$, y se representa por $A \perp B$.
4. Si A es un conjunto de E , se define el conjunto ortogonal de A por

$$\begin{aligned} A^\perp &= \{x \in E : x \perp y \text{ para todo } y \in A\} \\ &= \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in A\}. \end{aligned}$$

1.2.15 Proposición. Sea E un espacio prehilbertiano y sean A y B dos subconjuntos de E . Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $A \subseteq B$ entonces $B^\perp \subseteq A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A \subseteq A^{\perp\perp}$ y $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
4. $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
5. $E^\perp = \{0\}$ y $\{0\}^\perp = E$
6. A^\perp es un subespacio vectorial cerrado de E .

1.2.16 Teorema. Sea E un espacio prehilbertiano y $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto ortogonal finito de elementos de E . Entonces

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

1.3. Operadores de proyección

Consideramos ahora una clase muy importante de operadores en espacios de Hilbert: las proyecciones.

1.3.1 Definición. Sean (E, d) un espacio métrico, F un subconjunto no vacío y $a \in E$. Una proyección de a sobre F es un punto $b \in F$ tal que $d(a, F) = d(a, b)$. En general un punto no tiene necesariamente proyección sobre un conjunto y si la tiene no es necesariamente única.

1.3.2 Teorema. Sea H un espacio de Hilbert y C un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de H . Cada punto de H tiene una única proyección sobre C , es decir, dado $x \in H$ existe un único $y \in C$ tal que $d(x, C) = \|x - y\|$.

Demostración. Sea $\alpha = \inf \{\|x\| : x \in C\} = d(0, C)$. Veremos que existe un $c \in C$ tal que $\|c\| = \alpha$. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de C tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \alpha$. Por convexidad, se tiene que para todo $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in C \Rightarrow \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\| \geq \alpha \Leftrightarrow \|x_n + x_m\|^2 \geq 4\alpha^2.$$

Aplicando la ley del paralelogramo:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2 \\ &\leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\alpha^2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } n, m \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Entonces, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en H que es completo, por lo tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia un $c \in H$. Como $x_n \in C$ y C es cerrado, se tiene que $c \in C$ y además:

$$\|c\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \alpha.$$

Veamos ahora la unicidad. Sea $v \in C$ y $\|v\| = \alpha$, como antes se deduce que $\frac{1}{2}(v + c) \in C$. Se concluye que:

$$\|c - v\|^2 = 2\|c\|^2 + 2\|v\|^2 - \|c + v\|^2 \leq 0.$$

Por lo tanto $c = v$. Sea $x \in H$ arbitrario. Consideramos el conjunto trasladado por x . $C' = C - x = \{y - x : y \in C\}$, que será un conjunto cerrado, convexo y no vacío. Por lo visto anteriormente 0 tendrá una proyección sobre C' , que llamaremos c' . Entonces, $c' = c - x$ para un cierto $c \in C$, y:

$$\|c - x\| = \|c'\| = d(0, c') = d(0, C') = d(x, C).$$

Con lo que podemos concluir que c es una proyección de x en C . La unicidad se deduce de manera análoga a lo hecho anteriormente. \square

1.3.3 Nota. Si C es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de H , representaremos por $P_C(x)$ la única proyección de x sobre C .

1.3.4 Proposición. Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H . Si $x \in H$ y $P_M(x)$ es la proyección de x sobre M , entonces $x - P_M(x) \in M^\perp$.

1.3.5 Corolario. Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H . Entonces $H = M \oplus M^\perp$.

1.3.6 Corolario. Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H , distinto de H . Entonces existe $z \in H$, $z \neq 0$, tal que $z \in M^\perp$ (es decir, $M^\perp \neq \{0\}$).

1.3.7 Proposición. Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H . Entonces $M = M^{\perp\perp}$.

1.3.8 Corolario. Sea H un espacio de Hilbert y A un subconjunto de H . Entonces $A^{\perp\perp} = \overline{\langle A \rangle}$, donde $\langle A \rangle$ es el subespacio vectorial generado por A .

1.3.9 Corolario. Sean H un espacio de Hilbert y A un subconjunto no vacío de H . Entonces $\langle A \rangle$ es denso en H si, y sólo si, $A^\perp = \{0\}$.

1.3.10 Proposición. Sean H un espacio de Hilbert y M un subespacio vectorial cerrado de H . La aplicación $P_M : H \rightarrow H$ que envía cada punto x sobre $P_M(x)$, la proyección ortogonal de x sobre M , verifica que:

1. P_M es un operador lineal continuo tal que $\|P_M\| = 0$ ó $\|P_M\| = 1$.
2. $P_M(x) = x$ para cada $x \in M$.
3. $P_M(H) = M$ y $P_M(M) = M$.
4. $P_M(M^\perp) = \{0\}$, de donde $\text{Ker}(P_M) = M^\perp$.
5. $P_M^2 = P_M$ (P_M es idempotente).
6. $P_{M^\perp} = I - P_M$, donde I es la aplicación identidad.

1.3.11 Teorema. (de representación de Riesz) Sea H un espacio de Hilbert y T un operador lineal con llegada en K (un funcional lineal) sobre H . Son equivalentes:

1. T es continuo en H .
2. Existe $y \in H$ tal que $Tx = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in H$.

Además, en estas condiciones, el punto y es único y $\|T\| = \|y\|$.

1.3.12 Teorema. Un operador T es una proyección ($T = P_S$) si, y sólo si:

1. T es lineal y acotado.
2. T es autoadjunto: $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$.
3. $T^2 = T$ (idempotente).

Además S esta unívocamente determinado por $R(T)$.

Demostración. (\Rightarrow) Sean x e y pertenecientes a H .

(1) Linealidad: Si $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ con $x_1, y_1 \in S$, $x_2, y_2 \in S^\perp$ entonces $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$ es la descomposición ortogonal de $x + y$ en S y S^\perp . Por tanto $P_S(x + y) = x_1 + y_1 = P_S(x) + P_S(y)$. Si α es un escalar, $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2$ y $P_S(\alpha x) = \alpha x_1 = \alpha P_S x$. Acotación: $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ por el teorema de Pitágoras, y se tiene que $\|P_S x\|^2 = \|x_1\|^2 = \|x\|^2 - \|x_2\|^2 \leq \|x\|^2$. Por lo tanto P_S es acotado.

(2) Autoadjunto: $\langle x, P_S y \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle P_S x, y \rangle$

(3) Idempotente: Para todo $x \in H$, $P_S x \in S$ se tiene que $P_S(P_S x) = P_S x$. Por lo tanto $P_S^2 = P_S$.

Unicidad de S : Si existiera otro subespacio cerrado S tal que $T = P_S$ entonces para todo $x \in H$, $T_S x = P_S x$, y tenemos dos posibilidades:

Si $x \in S$, entonces $P_S x = x \in R(T)$.

Si $x \notin S$, entonces $Tx = P_S x \neq x$. $S = \{x \in H : Tx = x\}$, y $S \subset R(T)$. Sea x un elemento de H , y sea $Tx = y \in R(T)$. Entonces $T^2 x = Ty$, y como $T^2 = T$, tenemos que $Ty = y$ e $y \in S$. $R(T) \subset S$. Finalmente tenemos $S = R(T)$.

(\Leftarrow) Sea $S = R(T)$ entonces S es un subespacio lineal por ser T un operador lineal. Veamos ahora que S es cerrado. Para ello bastará con ver que T es continuo. Por la desigualdad de Cauchy-schwartz tenemos que:

$$\|Tx\|^2 = \|\langle Tx, Tx \rangle\| = |\langle T^2 x, x \rangle| = |\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \text{ para todo } x \in H.$$

De donde se sigue que $\|Tx\| \leq \|x\|$. Por lo tanto para todo x e $y \in H$:

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq \|x - y\|.$$

Entonces T es continuo en H y S es un subespacio cerrado.

Queda ver que $T = P_S$. Para ello probaremos que T actuando sobre S es la identidad y que T actuando sobre S^\perp es el operador cero. Si $y \in S$, entonces $y = Tx$ para algún $x \in H$. $Ty = T^2 x = Tx = y$. Por otro lado tenemos que si $z \in S^\perp$, para algún $u \in H$,

$$\langle u, Tz \rangle = \langle Tu, z \rangle = 0.$$

Luego $Tz = 0$ si $z \in S^\perp$. Finalmente, para cada $x \in H$ podemos escribir $x = y + z$ con $y \in S$ y con $z \in S^\perp$. Entonces $Tx = Ty + Tz = y$. Luego T es la proyección sobre S . \square

De la prueba del teorema anterior deducimos que si $T = P_S$ podemos describir T como el operador lineal que restringido a S es la identidad, (es decir S es el conjunto de todas las soluciones de $Tx = x$) y que actuando sobre S^\perp es el operador cero.

1.3.13 Teorema. *Sea H un espacio de Hilbert*

1. Sean U, V proyecciones en H . Es condición necesaria y suficiente para que UV sea proyección que $UV = VU$.
2. Si $U = P_M$ y $V = P_N$, entonces $UV = P_{M \cap N}$

Demostración. Claramente UV es lineal, acotado, univaluado y $D(UV) = H$. Por otro lado $\langle UVx, y \rangle = \langle Vx, Uy \rangle = \langle x, VUy \rangle$ la condición $UV = VU$ es necesaria y suficiente para que $\langle UVx, y \rangle = \langle x, UVy \rangle$. Además, la condición $UV = VU$ es suficiente para mostrar que

$$(UV)^2 = UVUV = UUVV = UV.$$

La condición $UV = VU$ es necesaria y suficiente para que UV sea proyección.

Si $x \in H$, entonces $U(Vx) \in M$ y $V(Ux) \in N$. Si $UV = P_L$ entonces $UV = VU$ y $L \subseteq M \cap N$.

Por otro lado, si $x \in M \cap N$, entonces $Ux = x$ y $Vx = x$. Por consiguiente, $UVx = Ux = x$, y $x \in L$, así que $(M \cap N) \subseteq L$. y finalmente tenemos que $L = M \cap N$. □

Capítulo 2

Teoremas de Von Neumann y Halperin

2.1. Teorema de Von Neumann

Dados dos subespacios cerrados M y N en un espacio de Hilbert, denotaremos por P_M y P_N a los respectivos operadores proyección. Además se tiene que $P_M P_N = P_N P_M \Leftrightarrow P_M P_N = P_{M \cap N}$. En particular estaremos interesados en el caso en que ambos operadores no conmutan. El teorema de Von Neumann establece que:

$$\text{''Para cada } x \in H \text{ } \lim_{n \rightarrow \infty} (P_M P_N)^n x = P_{M \cap N} x \text{''}$$

Vemos que este resultado sugiere un algoritmo de proyecciones alternadas (MAP) que podemos escribir de la siguiente manera

$$x_{n+1} = P_N P_M x_n$$

La geometría del algoritmo MAP consiste en obtener la mejor aproximación de x en $M \cap N$ proyectando sucesivamente y de forma alternativa en los subespacios M y N . De esta forma generamos una sucesión de elementos que en virtud del teorema de Von Neumann sabemos que converge a un elemento de $M \cap N$.

2.1.1 Teorema (Von Neumann [8]). *Sea H un espacio de Hilbert. Para todo $x \in H$ se tiene que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_M P_N)^n x = P_{M \cap N} x$$

Demostración. Consideramos las sucesiones de operadores $P_M, P_N P_M, P_M P_N P_M, \dots$; y $P_N, P_M P_N, P_N P_M P_N, \dots$, denotadas por Σ_1 y Σ_2 respectivamente. Probaremos que ambas sucesiones tienen límite T y que este es $P_{M \cap N}$.

Sea T_n el n -ésimo elemento de la sucesión de operadores Σ_1 :

$$\langle T_m x, T_n y \rangle = \langle T_{m+n-\delta} x, T y \rangle$$

Donde δ vale 1 ó 0 dependiendo de si m y n tienen la misma paridad.

Necesitamos probar que para todo $x \in H$ el $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ existe, para ello veremos que la sucesión $\{T_n x\}$ es de Cauchy:

$$\|T_m x - T_n x\|^2 = \langle T_m x - T_n x, T_m x - T_n x \rangle \quad (2.1)$$

$$= \langle T_m x, T_m x \rangle - \langle T_m x, T_n x \rangle - \langle T_n x, T_m x \rangle + \langle T_n x, T_n x \rangle \quad (2.2)$$

$$= \langle T_{2m-1} x, x \rangle + \langle T_{2n-1} x, x \rangle - 2\langle T_{m+n-\delta} x, x \rangle \quad (2.3)$$

$$= \langle T_{2m-1} x, x \rangle + \langle T_{2n-1} x, x \rangle - 2\langle T_{2k-1} x, x \rangle \quad (2.4)$$

en la última expresión hemos tenido en cuenta que como $m+n-\delta$ es siempre impar lo podemos sustituir por $2k-1$, para cierto k .

Por otro lado se tiene que:

$$\langle T_{2i-1} x, x \rangle = \langle T_i x, T_i x \rangle = \|T_i x\|^2$$

y

$$\|T_{i+1} x\|^2 = \langle T_{2i+1} x, x \rangle$$

Podemos escribir T_{i+1} como $P_M T_i x$ o $P_N T_i x$ y teniendo en cuenta que la norma de una proyección es siempre o cero o uno:

$$\|T_{i+1} x\|^2 \leq \|T_i x\|^2$$

de lo que se sigue que:

$$\langle T_1 x, x \rangle \geq \langle T_3 x, x \rangle \geq \langle T_5 x, x \rangle \geq \dots \geq 0$$

Entonces existe el $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle T_{2i-1} x, x \rangle$ y de (2.4) se tiene que:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|T_m x - T_n x\| = 0$$

Finalmente podemos concluir que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$. Lo denotaremos por x^* .

El operador definido como $Tx = x^*$ es lineal, continuo, univaluado, su dominio es H , y cumple que $\langle Tx, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$. Por lo tanto será una proyección de la forma P_L .

Veamos ahora que necesariamente $L = M \cap N$. Si $x \in M \cap N$, entonces $P_M x = P_N x = x$, $T_n x = x$ y $Tx = x$. Por lo tanto $x \in L$ y se tiene que $(M \cap N) \subset L$. A continuación, $P_M T_{2i} = T_{2i+1}$ y $P_N T_{2i-1} = T_{2i}$, haciendo tender i a infinito tenemos que: $P_M T = T$ y $P_N T = T$. Para cada $y \in H$ sea $Ty = x \in L$. Entonces, $P_M x = P_M Ty = Ty = x \in M$, y $P_N x = P_N Ty = Ty = x \in N$. Concluimos que $L \subseteq (M \cap N)$ y que $L = M \cap N$.

Finalmente intercambiando los papeles de P_M y P_N en el argumento previo tenemos que Σ_2 tiene límite $T' = P_{M \cap N}$. Necesariamente $T = T'$ y la demostración queda completada. \square

2.2. Teorema de extensión de Halperin.

Consideramos ahora el caso en el que el número de subespacios sea mayor que dos. Denotaremos por P_{M_i} ($i = 1 \dots r$) el operador proyección sobre el subespacio M_i de un espacio de Hilbert.

2.2.1 Teorema. (Halperin [5]) Sean $M_1, M_2, M_3, \dots, M_r$ subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H . Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{M_r} P_{M_{r-1}} \dots P_{M_1})^n x = P_{\cap_1^r M_i} x$$

Realizaremos ahora un pequeño inciso sobre notación:

T, T_i, P denotan como ya es usual operadores lineales y acotados.

$M + N = \{x + y : x \in M, y \in N\}$; donde M y N son subespacios cerrados.

$$S_0(T) \equiv \{x \in H : Tx = 0\};$$

$$S_1(T) \equiv \{x \in H : Tx = x\};$$

$$TM \equiv \{Tx : x \in H\};$$

$$K(T) \equiv \sup_n \|T^n\|;$$

T es un operador no expansivo si $\|T\| \leq 1$.

Decimos que T es normal si $T^*T = TT^*$. Todo operador autoadjunto es normal.

Para la prueba del teorema de Halperin necesitaremos unos lemas previos.

2.2.2 Lema. Si T es no expansivo entonces $S_1(T) = S_1(T^*)$.

Demostración. Como T es no expansivo se tiene que $\|T\| = \|T^*\|, \|T^*\| \leq 1$ (T^* es no expansivo).

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle \leq \|x\| \|T^*x\| \leq \|x\|^2;$$

por lo tanto

$$\langle x, T^*x \rangle = \|x\| \|T^*x\| \text{ y } \|T^*x\| = \|x\|.$$

De donde se deduce que,

$$\|x - T^*x\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, T^*x \rangle - \langle T^*x, x \rangle + \|T^*x\|^2 = 0,$$

lo que implica que $T^*x = x$.

Intercambiando los papeles de T y de T^* en el argumento anterior se sigue que $S_1(T) = S_2(T^*)$, tal y como queríamos probar. \square

2.2.3 Lema. Si T es no expansivo entonces $\overline{R(I - T)}$ es el complemento ortogonal de $S_1(T)$ y $S_1(T) + \overline{R(I - T)} = H$.

Demostración. Por el lema previo sabemos que $S_1(T) = S_1(T^*)$. Por tanto $(I - T)^*x = 0$ es lo mismo que $\langle (I - T)^*x, y \rangle = 0$ para todo y .

$$\langle (I - T)^*x, y \rangle = \langle x, (I - T)y \rangle = 0,$$

Se sigue que $(I - T)^* = 0$ es equivalente a $x \perp R(I - T)$ para todo x . Por lo tanto $S_1(T) = S_1(T^*) = S_0((I - T)^*)$ es el complemento ortogonal de $\overline{R(I - T)}$. De lo anterior tenemos que $S_1(T) + \overline{R(I - T)} = H$, tal y como queríamos probar. \square

2.2.4 Lema. *T es no expansivo e idempotente si, y sólo si, T es una proyección. Además T es la proyección sobre $S_1(T)$.*

Demostración. Si T es una proyección de las propiedades del operador proyección sabemos que T es no expansivo e idempotente. Supongamos ahora que T es no expansivo e idempotente. Por el teorema (1.3.12) T será una proyección si se tiene que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$. Sabemos que $H = S_1(T) + \overline{R(I - T)}$, por lo tanto para cada $x \in H$ se tiene que: $x = x_s + x_r$ donde $x_s \in S_1(T)$ y $x_r \in \overline{R(I - T)}$. En primer lugar tenemos que, $T(x_s) = x_s$ por definición de $S_1(T)$. Por otro lado, $x_r = (I - T)y$ para un cierto $y \in H$, $T((I - T)y) = T(y - Ty) = Ty - Ty = 0$. De donde se sigue que : $Tx = Tx_s + Tx_r = x_s$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \langle T(x_s + x_r), y_s + y_r \rangle = \langle x_s, y_s + y_r \rangle = \langle x_s, y_s \rangle + \langle x_s, y_r \rangle = \\ &= \langle x_s, y_s \rangle = \langle x_r, y_s \rangle + \langle x_s, y_s \rangle = \langle x_r + x_s, y_s \rangle = \langle x, Ty \rangle \end{aligned}$$

luego $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$, T es autoadjunto y por lo tanto es una proyección. Además, $T = P_{S_1}$ puesto que $R(T) = S_1$. \square

2.2.5 Lema. *Si para $i = 1, \dots, r$ se tiene que $\|T_i x\| < \|x\|$ cuando $T_i x \neq x$. Sea $T = T_1 \dots T_r$ entonces $\|Tx\| < \|x\|$ cuando $Tx \neq x$ y $Tx = x$ si y solo si $T_i x = x$ para todo i .*

Demostración. Si $T_i x = x$ para todo i , entonces $Tx = T_1 \dots T_r x = x$. Por otro lado, si $T_i x \neq x$ para algún i , sea k el mayor i tal que:

$$\|Tx\| = \|T_1 \dots T_k x\| \leq \|T_k x\| < \|x\|.$$

Por lo tanto, $Tx \neq x$, $\|Tx\| < \|x\|$, y $Tx = x$ si, y solo si $T_i x = x$ para todo i . \square

2.2.6 Lema. *Si para cada $i = 1 \dots r$ se tiene que:*

$$\|x - T_i x\|^2 \leq k_i (\|x\|^2 - \|T_i x\|^2) \quad (2.5)$$

Para algún $k_i \in (0, \infty)$ y para todo $x \in H$.

Además, si $T = T_1 \dots T_r$ existe algún $k \in (0, \infty)$ tal que para todo $x \in H$ se tiene que:

$$\|x - Tx\|^2 \leq k (\|x\|^2 - \|Tx\|^2) \quad (2.6)$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\|x - T_1 T_2 x\|^2 &\leq (\|x - T_2 x\| + \|T_2 x - T_1 T_2 x\|)^2 \\
&\leq [2 \max(\|x - T_2 x\|, \|T_2 x - T_1 T_2 x\|)]^2 \\
&\leq 4(\|x - T_2 x\|^2 + \|T_2 x - T_1 T_2 x\|^2) \\
&\leq 4 \max(k_1, k_2)(\|x\|^2 - \|T_2 x\|^2 + \|T_2 x\|^2 - \|T_1 T_2 x\|^2) \\
&= 4 \max(k_1, k_2)(\|x\|^2 - \|T_1 T_2 x\|^2),
\end{aligned}$$

entonces $T_1 T_2$ verifican la propiedad (2.6). Por inducción concluimos que $T = T_1 \dots T_r$ cumple la misma propiedad, tal y como queríamos demostrar. \square

Podemos observar que si se satisface (2.5) entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N \|T^n x - T^{n+1} x\| &\leq \sum_{n=0}^N k(\|T^n x\|^2 - \|T^{n+1} x\|^2) \\
&= k(\|x\|^2 - \|T^{n+1} x\|^2) \\
&\leq k\|x\|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T^n x - T^{n+1} x\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, de donde tenemos que $(T^n - T^{n+1})x \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $x \in H$.

2.2.7 Lema. *Sea T un operador que satisface*

$$\|x - Tx\|^2 \leq k(\|x\|^2 - \|Tx\|^2)$$

para algún $k \in (0, \infty)$ si se tiene que $Tx \neq x$ entonces $\|Tx\| < \|x\|$.

Demostración. Si:

$$\begin{aligned}
Tx \neq x &\Rightarrow x - Tx \neq 0 \\
&\Rightarrow \|x - Tx\| \neq 0 \\
&\Rightarrow k(\|x\|^2 - \|Tx\|^2) > 0 \\
&\Rightarrow k\|x\|^2 > k\|Tx\|^2 \\
&\Rightarrow \|x\|^2 > \|Tx\|^2 \\
&\Rightarrow \|x\| > \|Tx\|.
\end{aligned}$$

Tal y como queríamos demostrar. \square

2.2.8 Teorema. *Sea T un operador que satisface la propiedad (2.6) entonces la sucesión de operadores T^n converge fuertemente a P_{S_1} .*

Demostración. Se deduce de forma directa de los lemas (2.2.3), (2.2.4) y (2.2.7). \square

A continuación expondremos un corolario que es consecuencia directa de los lemas (2.2.5), (2.2.6) y del teorema (2.2.8).

2.2.9 Corolario. Si T_i con $i = 1 \dots r$ cumple la propiedad (2.5) y $T = T_1 \dots T_r$, entonces cuando $n \rightarrow \infty$:

$$T^n \rightarrow P \equiv P_{\cap_1^r S_1(T_i)}$$

Además $Px = x$ si y solo si $T_i x = x$ para algún i .

Para finalizar esta sección, y la demostración del teorema de extensión de Halperin, veremos a continuación que todas las proyecciones cumplen la propiedad (2.6) para $k = 1$:

Sea T un operador proyección, para todo $x \in H$ se sigue que:

$$\begin{aligned} \|x - Tx\|^2 &= \langle x - Tx, x - Tx \rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle Tx, x \rangle - \langle x, Tx \rangle + \|Tx\|^2 \end{aligned}$$

Como T es autoadjunto e idempotente:

$$\langle Tx, x \rangle = \langle T^2 x, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2$$

por lo tanto:

$$\|x - Tx\|^2 = \|x\|^2 - \|Tx\|^2$$

Es fácil ver que el teorema de extensión de Halperin ha quedado ya demostrado por ser un caso particular del corolario anterior.

2.3. Velocidad de convergencia.

La velocidad de convergencia de MAP dependerá de los ángulos entre los distintos subespacios involucrados. Este concepto merece nuestra atención.

Veamos en primer lugar que si x e $y \in H$ en ángulo θ entre x e y se define como el ángulo cuyo coseno viene dado por $\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$.

2.3.1. Ángulo entre subespacios.

La siguiente definición, introducida originariamente por Friedrichs en 1937, es la más aceptada en la literatura referente a MAP para trabajar con el ángulo entre dos subespacios.

2.3.2 Definición. El ángulo $\theta(M, N)$ entre los dos subespacios cerrados M y N de H es el ángulo en $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno $c(M, N)$ esta dado por:

$$\sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in M \cap (M \cap N)^\perp, \|x\| \leq 1, y \in N \cap (M \cap N)^\perp, \|y\| \leq 1\}$$

Es frecuente ver que otros autores definen el ángulo $\theta(M, N)$ sin considerar el factor $(M \cap N)^\perp$ de la expresión anterior.

2.3.3 Definición. El ángulo minimal $\theta_0(M, N)$ entre M y N es el ángulo en $[0, \frac{\pi}{2}]$ cuyo coseno $c_0(M, N)$ esta dado por:

$$\sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in M, \|x\| \leq 1, y \in N, \|y\| \leq 1\}$$

2.3.4 Nota. (a) Es claro que si $M \cap N = \{0\}$ ambas definiciones coinciden, $c_0(M, N) = c(M, N)$.

(b) A continuación expodremos unas consecuencias que se deducen de forma inmediata de las definiciones:

1. $0 \leq c(M, N) \leq c_0(M, N) \leq 1$.
2. $c(M, N) = c(N, M)$ y $c_0(M, N) = c_0(N, M)$.
3. $c(M, N) = c_0(M \cap (M \cap N)^\perp, N \cap (M \cap N)^\perp)$.
4. $|\langle x, y \rangle| \leq c_0(M, N)\|x\|\|y\|$ para todo $x \in M, y \in N$ (desigualdad de Schwarz refinada)

En el siguiente lema incluimos algunas propiedades útiles:

2.3.5 Lema.

1. $c(M, N) = c_0(M, N \cap (M \cap N)^\perp) = c_0(M \cap (M \cap N)^\perp, N)$
2. $c_0(M, N) = \|P_M P_N\| = \|P_M P_N P_N\|^{1/2}$.
3. $c(M, N) = \|P_M P_N - P_{M \cap N}\| = \|P_M P_N P_{(M \cap N)^\perp}\|$.

Demostración. Demostraremos en primer lugar 1.: Si $x \in M$ $x = P_{M \cap N}x + P_{(M \cap N)^\perp}x$ con $P_{(M \cap N)^\perp}x = x - P_{M \cap N}x \in M$. Sea $y \in N \cap (M \cap N)^\perp$. Entonces, $\langle x, y \rangle = \langle P_{M \cap N}x + P_{(M \cap N)^\perp}x, y \rangle = \langle P_{(M \cap N)^\perp}x, y \rangle$ con $P_{(M \cap N)^\perp}x \in M \cap (M \cap N)^\perp$, luego:

$$\begin{aligned} & \{|\langle x, y \rangle| : x \in M, \|x\| \leq 1, y \in N \cap (M \cap N)^\perp, \|y\| \leq 1\} = \\ & \{|\langle x, y \rangle| : x \in M \cap (M \cap N)^\perp, \|x\| \leq 1, y \in N \cap (M \cap N)^\perp, \|y\| \leq 1\} \end{aligned}$$

Pasaremos ahora a demostrar 3. En primer lugar debemos ver que $P_{M \cap N}$ conmuta con P_M . Basta ver que $P_M P_{M \cap N} = P_{M \cap (M \cap N)} = P_{M \cap N}$.

Tenemos que $P_{M \cap N}x \in M$ por lo tanto $P_M P_{M \cap N}x = P_M(P_{M \cap N}x) = P_{M \cap N}$ y ambos operadores conmutan.

$$\begin{aligned} c(M, N) &= c(M \cap (M \cap N)^\perp, N \cap (M \cap N)^\perp) \\ &= \|P_{M \cap (M \cap N)^\perp} P_{N \cap (M \cap N)^\perp}\| \\ &= \|P_M P_{(M \cap N)^\perp} P_N P_{(M \cap N)^\perp}\| \\ &= \|P_M P_N (I - P_{M \cap N})\| \\ &= \|P_M P_N - P_{M \cap N}\|. \end{aligned}$$

□

Nótese que combinado el apartado primero del lema previo y el punto 4 de la nota es trivial obtener de la desigualdad de Schwarz refinada para $c(M, N)$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq c_0(M, N) \|x\| \|y\| \text{ para todo } x \in M, y \in N,$$

cuando al menos x o y pertenecen a $(M \cap N)^\perp$. Cabe resaltar, aunque no lo demostraremos, que si empleamos la primera definición de ángulo se tiene que el ángulo entre dos subespacios es el mismo que entre sus complementos ortogonales. Esto no es cierto si empleamos la segunda definición, de ahí nuestra preferencia por la primera.

2.3.6. Velocidad de convergencia de MAP.

Del teorema de extensión de Halperin concluimos que $(P_r \dots P_2 P_1)^n x$ converge a $P_M x$ para cada x en H (donde $M = \bigcap_{i=1}^r M_i$ y $P_i = P_{M_i}$, $i = 1, \dots, r$). Sin embargo la tasa de convergencia puede ser arbitrariamente lenta. De hecho, es posible encontrar ejemplos incluso para $r = 2$ que ilustran la lentitud de MAP. Sin embargo, se han desarrollado técnicas para acelerar dicha convergencia. En la siguiente sección analizaremos algunas de estas técnicas en profundidad. Ahora trataremos de analizar la tasa de convergencia de MAP en subespacios.

En primer lugar notamos que para cada $i = 1, \dots, r$, $P_i P_M = P_M$ y que $P_i P_{M^\perp} = P_{M_i \cap M^\perp}$ (se tiene que $P_i P_{M^\perp} = P_i (I - P_M) = P_i - P_i P_M = P_i - P_M P_i = P_{M^\perp} P_i$). De aquí se puede deducir que para todo $x \in H$:

$$\begin{aligned} \|(P_r \dots P_2 P_1)^n x - P_M x\| &\leq \|(P_r \dots P_2 P_1)^n - P_M\| \|x\| \\ &= \|(P_r \dots P_2 P_1 P_{M^\perp})^n\| \|x\| \\ &\leq \|(P_r \dots P_2 P_1 P_{M^\perp})^n\| \|x\|. \end{aligned}$$

De lo anterior se observa que la tasa de convergencia depende de la norma del operador $P_r \dots P_2 P_1 P_{M^\perp}$. En particular, para el caso en que $r = 2$ aplicando el lema (2.3.5) se deduce que

$$\|(P_2 P_1)^n - P_M\| \leq \|P_2 P_1 P_{M^\perp}\|^n = c(M_1, M_2)^n.$$

Sin embargo para el caso de dos subespacios esta cota es mejorable. Para cada $x \in H$ y para cada entero $n \geq 1$, se tiene

$$\|(P_2 P_1)^n x - P_M x\| \leq c(M, N)^{2n-1} \|x\|,$$

y veremos en el siguiente teorema que $c(M, N)^{2n-1}$ coincide con la norma del operador $(P_2 P_1)^n - P_M$ y por lo tanto la cota no se puede mejorar.

2.3.7 Teorema. $\|(P_2 P_1)^n - P_M\| = c(M, N)^{2n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Demostración. En primer lugar introduciremos la siguiente notación $Q_i = P_i P_{M^\perp} = P_{M_i \cap M^\perp}$ donde $i = 1, 2$. Entonces $\|Q_2 Q_1\| = \|P_2 P_{M^\perp} P_1 P_{M^\perp}\| = \|P_2 P_1 P_{M^\perp}\|$.

Ahora se tiene que,

$$[(Q_2 Q_1)^n]^* = [(Q_2 Q_1)^*]^n = (Q_2 Q_1)^n,$$

entonces

$$\begin{aligned} \|(Q_2 Q_1)^n\|^2 &= \|(Q_2 Q_1)^n [(Q_2 Q_1)^n]^*\| \\ &= \|(Q_2 Q_1)^n (Q_2 Q_1)^n\| \\ &= \|(Q_2 Q_1 Q_2)^{2n-1}\|, \end{aligned}$$

y como $Q_2 Q_1 Q_2$ es autoadjunto y por lo tanto normal, se sigue que

$$\|(Q_2 Q_1 Q_2)^{2n-1}\| = \|Q_2 Q_1 Q_2\|^{2n-1}.$$

Además,

$$\|Q_2 Q_1 Q_2\| = \|Q_2 Q_1 Q_1 Q_2\| = \|(Q_2 Q_1)(Q_2 Q_1)^*\| = \|Q_2 Q_1\|^2.$$

Por consiguiente,

$$\|(Q_2 Q_1)^n\|^2 = \|Q_2 Q_1 Q_2\|^{2n-1} = \|Q_2 Q_1\|^{2(2n-1)},$$

Finalmente,

$$\|(Q_2 Q_1)^n\| = \|Q_2 Q_1\|^{2n-1}.$$

y el resultado que queríamos probar se deduce del lemma (2.3.5) \square

La tasa de convergencia de MAP se puede especificar en términos de los ángulos entre los subespacios involucrados, por el contrario para el caso $r \geq 2$ no podemos presentar una expresión exacta para la norma del operador en términos de los ángulos. Sin embargo, proporcionar una cota superior si que nos es posible.

2.3.8 Teorema. *Para cada $i = 1, \dots, r$ sea M_i un subespacio cerrado de H . Entonces para cada $x \in H$ y para cada entero $n \geq 1$, se tiene que*

$$\|(P_{M_r} P_{M_{r-1}} \dots P_{M_1})^n x - P_{\cap_{i=1}^r M_i} x\| = c^{n/2} \|x - P_{\cap_{i=1}^r M_i} x\|,$$

donde

$$c = 1 - \prod_{i=1}^{r-1} \sin^2 \theta_i,$$

θ_i es el ángulo entre M_i y $\cap_{j=i+1}^r M_j$.

Demostración. Denotemos por M la intersección de los distintos subespacios $\cap_{i=1}^r M_i$ por $P = P_{M_r} P_{M_{r-1}} \dots P_{M_1}$ y por $y = P_{\cap_{i=1}^r M_i} x$. Será suficiente probar que

$$\|P^n x - y\|^2 \leq c^n \|x - y\|^2.$$

teniendo en cuenta que $y \in M$ y P es la identidad en M la desigualdad anterior puede escribirse con sigue

$$\|P^n(x - y)\|^2 \leq c^n \|x - y\|^2.$$

Llamando $v = x - y$ (con $v \in M^\perp$), se tiene que basta con probar

$$\|Pv\|^2 \leq c\|v\|^2.$$

Lo demostraremos por inducción sobre r .

Si $r = 1$ es claro que se verifica nuestro resultado. Sea $M' = M_r \cap M_{r-1} \cap \dots \cap M_2$ y $P' = P_{M_r} P_{M_{r-1}} \dots P_2$. Para todo $v \in M^\perp$ se escribe

$$v = w + v_1$$

con $w \in M_1$ y con $v_1 \in M_1^\perp$,

$$Pv = P'_w.$$

A continuación escribimos

$$w = w' + w'',$$

con $w' \in M'$ y con $w'' \in M'^\perp$, de tal forma que

$$P'w = w' + P'w''.$$

Por otro lado tenemos que

$$\langle P'w'', w' \rangle = \langle w'', P_{M_2} P_{M_3} \dots P_{M_r} w' \rangle = \langle w'', w' \rangle = 0,$$

Vemos que $P'w''$ y w' son ortogonales, por el teorema de Pitágoras se sigue que

$$\|P'w\|^2 = \|w'\|^2 + \|P'w''\|^2.$$

Finalmente por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\|P'w''\|^2 \leq \left[1 - \prod_{i=2}^{r-1} \sin^2 \theta_i \right] \|w''\|^2.$$

De las últimas expresiones se obtiene que

$$\|P'w\|^2 \leq \|w'\|^2 + \left[1 - \prod_{i=2}^{r-1} \sin^2\theta_i\right] \|w''\|^2 \quad (2.7)$$

$$= \|w'\|^2 + \left[1 - \prod_{i=2}^{r-1} \sin^2\theta_i\right] (\|w\|^2 - \|w'\|^2) \quad (2.8)$$

$$= \left[1 - \prod_{i=2}^{r-1} \sin^2\theta_i\right] \|w\|^2 + \prod_{i=2}^{r-1} \sin^2\theta_i \|w'\|^2. \quad (2.9)$$

Por otra parte, se puede escribir $w = v - v_1$ con $v \in M^\perp$ y $v_1 \in M_1^\perp$, para todo $a \in M$,

$$\langle w, a \rangle = \langle v - v_1, a \rangle = \langle v, a \rangle - \langle v_1, a \rangle = 0,$$

por lo tanto se tiene que $w \in M_1$ es ortogonal a $M = M_1 \cap M'$. Además, $w' = w - w''$, con $w \perp M = M_1 \cap M'$ y $w'' \in M'^\perp$, para todo $a \in M$,

$$\langle w', a \rangle = \langle w - w'', a \rangle = \langle w, a \rangle - \langle w'', a \rangle = 0;$$

luego, $w' \in M'$ y es ortogonal a $M = M' \cap M_1$.

Teniendo en cuenta que el ángulo entre M y M' es como mínimo θ_1 , se sigue que

$$\|w'\|^2 = \langle w', w' \rangle = \langle w - w'', w' \rangle = \langle w, w' \rangle \leq \cos\theta_1 \|w\| \|w'\|;$$

entonces

$$\|w'\| \leq \cos\theta_1 \|w\|.$$

Reemplazando esta última expresión en (2.9) y operando

$$\begin{aligned} \|P'w\|^2 &\leq \left[1 - \prod_{i=2}^{r-1} \sin^2\theta_i\right] \|w\|^2 + \prod_{i=2}^{r-1} \sin^2\theta_i [1 - \sin^2\theta_1] \|w\|^2 \\ &= \left[1 - \prod_{i=1}^{r-1} \sin^2\theta_i\right] \|w\|^2. \end{aligned}$$

Para finalizar, como $Pv = P'w$ y $\|w\| \leq \|v\|$ se cumple por tanto que $\|Pv\|^2 \leq c\|v\|^2$ y la demostración queda finalizada. \square

En el caso en que la sucesión $\{x_k\} \subset H$ converja hacia un $x^* \in H$, estaremos interesados en incluir una serie de definiciones relacionadas con la velocidad de convergencia y que involucraran a los vectores de error $e_k = x_k - x^*$.

2.3.9 Definición. Diremos que la sucesión e_k converge hacia 0 con q -orden p si existe una constante $c > 0$ y un $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|e_{k+1}\| \leq c\|e_k\|^p \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Por ejemplo, si $p = 1$ diremos que hay convergencia q -lineal y si $p = 2$ diremos que la convergencia es q -cuadrática

2.3.10 Definición. Diremos que e_k converge hacia 0 con r -orden p si existe una sucesión b_k y un $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|e_k\| \leq \|b_k\| \text{ para todo } k \geq k_0 \text{ y } b_k \text{ converge a } 0 \text{ con } q\text{-orden } p.$$

De acuerdo con estas definiciones es fácil ver que la convergencia de MAP es r -lineal.

2.4. Técnicas de aceleración.

MAP tiene una velocidad de convergencia r -lineal la cual puede ser muy lenta cuando los ángulos entre los subespacios involucrados son muy pequeños. En esta sección presentaremos y analizaremos un esquema de aceleración para encontrar la proyección de un punto a la intersección de un número finito de subespacios en un espacio de Hilbert. Este esquema de aceleración tiene un fuerte carácter geométrico.

Como es ya usual, denotaremos por x al punto de partida, por M a la intersección de los distintos subespacios M_i , y por Q la composición de los operadores de proyección, esto es $Q = P_r P_{r-1} \dots P_1$, donde P_i es el operador proyección sobre el subespacio M_i para todo i . Definimos:

$$c = \sup \left\{ \|Qz\| : z \in M^\perp, \|z\| = 1 \right\}.$$

Es fácil ver que $0 \leq c \leq 1$. A fin de describir la técnica de aceleración, sea x^k el k -ésimo iterante, y sea Qx^k el iterante resultante de aplicar MAP. La idea será buscar a lo largo de la línea que une los puntos x^k y Qx^k para obtener el punto más cercano a nuestra solución $P_M x$. Podemos representar los puntos de dicha línea de la siguiente manera:

$$x_t^k = tQx^k + (1-t)x^k = x^k + (Qx^k - x^k)t,$$

para algún número real t . Sea t_k el valor de t para el cual el punto $x_{t_k}^k$ es el más próximo a $P_M x$. Por consiguiente, $(x_{t_k}^k - P_M x)$ deberá ser ortogonal a $(x^k - Qx^k)$, es decir,

$$\langle x_{t_k}^k - P_M x, x^k - Qx^k \rangle = 0. \quad (2.10)$$

Como $P_M x \in M$ y las proyecciones P_i son autoadjuntas,

$$\langle P_M x, Qx^k \rangle = \langle P_1 \dots P_r P_M x, x^k \rangle = \langle P_M x, x^k \rangle.$$

Por lo tanto, $\langle P_M x, x^k - Qx^k \rangle = 0$ y podemos eliminar $P_M x$ en (2.10) para obtener

$$\langle x_{t_k}^k, x^k - Qx^k \rangle = 0. \quad (2.11)$$

Despejando para t_k obtenemos

$$t_k = \frac{\langle x^k, x^k - Qx^k \rangle}{\|x^k - Qx^k\|^2}, \quad (2.12)$$

y la técnica de aceleración puede ser descrita mediante el siguiente algoritmo. Partimos de un iterante inicial $x^0 = x \in H$, en cada iteración obtenemos Qx^k mediante la aplicación de MAP, acto seguido se calcula t_k mediante la fórmula dada anteriormente, realizamos la asignación $x^{k+1} = x_{t_k}^k$, y procedemos de manera iterativa. El siguiente resultado establece la convergencia del esquema de aceleración y nos muestra su efecto.

2.4.1 Teorema. *Sea x^n la sucesión de iterantes generados tras la aplicación de MAP con el esquema de aceleración partiendo un punto inicial x . Entonces, para cada entero $k \geq 1$,*

$$\|x^k - P_M x\| \leq \|x - P_M x\| \left(\prod_{i=0}^{k-1} f_i \right) c^k,$$

donde $0 \leq f_i \leq 1$ y satisface

$$\|x^{i+1} - P_M x\| = f_i \|Qx^i - P_M x\|.$$

Demostración. Para cada $k \geq 0$,

$$\|x^{k+1} - P_M x\| = f_k \|Qx^k - P_M x\| = f_k \|Q(x^k - P_M x)\|.$$

Sin embargo como $(x^k - P_M x) \in M^\perp$ de la definición de c se sigue,

$$\|Q(x^k - P_M x)\| \leq c \|x^k - P_M x\|,$$

y por lo tanto

$$c \|x^{k+1} - P_M x\| \leq c f_k \|x^k - P_M x\|.$$

Con un argumento recursivo se finaliza la demostración. \square

Del teorema anterior se puede observar que la tasa de convergencia con el esquema de aceleración sigue siendo lineal, sin embargo vemos que el factor c del método original se va reduciendo en cada iteración por los factores $f_k \leq 1$.

Capítulo 3

Métodos de acción por filas

3.1. Introducción

Los métodos de acción por filas son métodos iterativos diseñados originalmente para resolver sistemas de ecuaciones o inecuaciones en espacios de dimensión finita. A continuación discutiremos aspectos teóricos y prácticos de algunos métodos de acción por filas tanto para resolver sistemas lineales ($Ax = b$), determinados y sobredeterminados, como para problemas de factibilidad (encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax \leq b$). Seguimos en esta presentación el artículo [2] y la monografía [3]

Un método de acción por filas usual requerirá de proyecciones ortogonales alternadas y tendrá las siguientes propiedades:

1. No se realizan cambios en la matriz original del problema (A).
2. Sólo se trabaja con una única fila por iteración.
3. En cada iteración, para computar el siguiente iterante únicamente se emplea el iterante previo.
4. Para problemas de dimensión finita solo se utiliza aritmética vectorial como productos internos y sumas, lo que los hace apropiados para problemas de dimensiones moderadas o grandes.

Antes de presentar métodos específicos introduciremos algunas notaciones de uso común. Muchas situaciones llevan a sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

que representaremos también en la forma

$$\langle a_i, x \rangle = b_i, \quad i \in M,$$

con $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ con $a_i \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar euclídeo, en cuyo caso a_i^T representa la fila i -ésima de la matriz A y $b^T = [b_1, \dots, b_m]$.

3.1.1 Definición. Una sucesión de índices $\{i_k\}$ es una secuencia de control de un método de acción por filas si en la k -ésima iteración se utiliza el conjunto convexo C_i asociado a la i_k -ésima fila del sistema; es decir,

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \langle a_i, x \rangle = b_i\}, \quad i = 1, \dots, m$$

A continuación damos una serie de secuencias de control muy utilizadas.

1. Control cíclico: $i_k = k \pmod{m} + 1$, donde m es el número de conjuntos convexos del problema (normalmente el número de filas de la matriz A)
2. Control casi cíclico: $i_k \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ para todo $k \geq 0$, y existe un entero \overline{M} tal que para todo k , $M \subset \{i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_{k+\overline{M}}\}$.
3. Control mediante máxima distancia: i_k es escogido de manera que

$$d(x_k, C_{i_k}) = \max\{d(x_k, C_i) : i \in M\}$$

donde x_k es el k -ésimo iterante del método, y $d(x_k, C_i)$ representa la distancia de x_k al conjunto C_i .

4. Control aleatorio: i_k es escogido del conjunto $1, 2, \dots, m$ de manera aleatoria por una función de probabilidad que garantiza que cada conjunto es escogido una vez en cada barrido de proyecciones.

Finalizaremos la sección introduciendo el concepto de parámetro de relajación. La idea geométrica subyacente es que en vez de proyectar sobre cada conjunto convexo en cada iteración nos movemos en la recta que une el iterante anterior y el conjunto. Este parámetro de relajación aporta libertad adicional a la manera de implementar los distintos métodos de acción por fila y en muchas ocasiones puede entenderse como una técnica de aceleración de la convergencia del método. Frecuentemente el valor del parámetro de relajación ω_k , en la iteración k , suele tomarse en el intervalo $(0, 2)$.

3.2. Algunos métodos de Acción por Filas.

A continuación presentaremos una recopilación de los principales métodos de acción por filas.

3.2.1. El Método de Kaczmarz

El algoritmo de Kaczmarz considera la solución de $Ax = b$, con A una matriz $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Suponiendo que el método tiene solución el algoritmo procede de la siguiente forma:

Inicialización: Se toma $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario,

Iteración: En cada paso, ponemos

$$x_{k+1} = x_k + \omega_k \frac{b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x_k \rangle}{\|a_{i_k}\|^2} a_{i_k}.$$

El parámetro ω_k es un parámetro de relajación que varía en cada iteración en el rango $(0, 2)$. La sucesión de control $\{i_k\}$ es cíclica, o casi cíclica. Si H_i , $i = 1, \dots, m$, denota el hiperplano de ecuación

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle = b_i\}$$

entonces, cuando se toma $\omega_k = 1$, la expresión del iterante x_{k+1} no es otra que la proyección ortogonal de x_k sobre el hiperplano H_{i_k} .

En otras palabras, con $\omega_k = 1$ para todo k , el método proyecta sucesivamente y de forma cíclica cada iterante sobre los diferentes hiperplanos H_{i_k} , repitiendo esta secuencia hasta que se obtiene convergencia a la solución. Los resultados obtenidos en el capítulo anterior aplicados al control cíclico nos aseguran que la sucesión de iterantes converge al punto más próximo del conjunto solución. Además, si el sistema tiene infinitas soluciones, los iterantes convergen a la solución de mínima norma supuesto que $x_0 \in R(A^T)$, el rango de la matriz A^T .

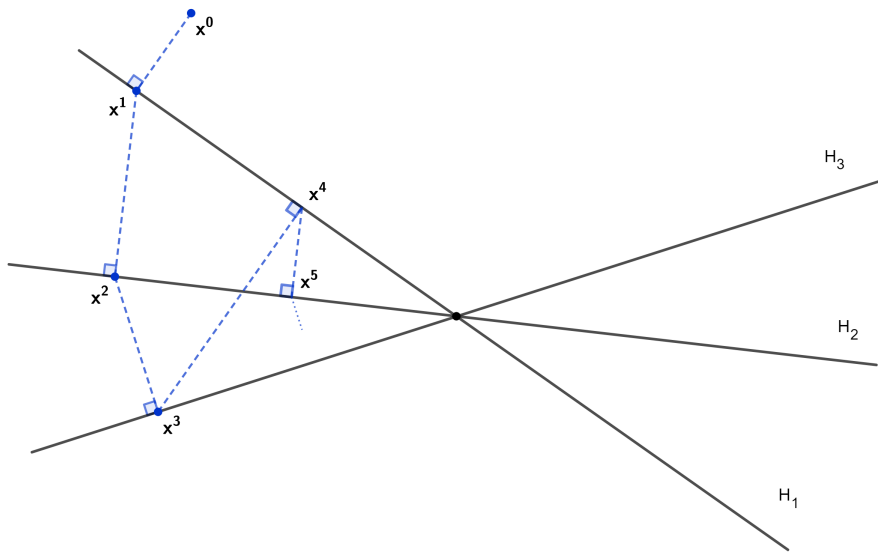


Figura 3.1: Interpretación geométrica del método de Kaczmarz con $\omega = 1$

3.2.2. El algoritmo de Cimmino

Para resolver el sistema $Ax = b$, con A una matriz $m \times n$, Cimmino introdujo en 1938 un algoritmo que se relaciona estrechamente con el algoritmo

de Kaczmarz. En vez de proyectar los sucesivos iterantes de forma cíclica en los hiperplanos H_i , $i = 1, \dots, m$, en el algoritmo de Cimmino se proyecta x_0 simultaneamente en todos los subespacios H_i , $i = 1, \dots, m$, y se toma como nuevo iterante el promedio de estas proyecciones. Denotando con P_{H_i} al operador proyección ortogonal sobre el hiperplano H_i , uno tiene

$$x_{k+1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_{H_i}(x_k).$$

Los métodos de Cimmino y Kaczmarz se aplican a la resolución de $Ax = b$, produciendo una sucesión $\{x_k\}$ que converge a un punto de $\cap_{i=1}^m H_i$, intersección de los hiperplanos H_i . El algoritmo de Kaczmarz con parámetro de relajación $\omega_k = 1$, después de un ciclo de proyecciones sobre los H_i , $i = 1, \dots, m$, equivale a computar la imagen de x_k por el operador

$$T_K = P_{H_m} P_{H_{m-1}} \cdots P_{H_1},$$

mientras que para el método de Cimmino, el operador involucrado es

$$T_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m P_{H_i}.$$

Aunque cada uno de los operadores de proyección P_{H_i} , $i = 1, \dots, m$, es autoadjunto, no ocurre lo mismo con el operador T_K que corresponde a un ciclo de iteraciones del método de Kaczmarz. Sin embargo T_C si es autoadjunto, una circunstancia que puede explotarse para producir esquemas de aceleración de la convergencia.

3.2.3. El Método de Relajación de Agmon, Motzkin y Schoenberg (MAMS)

En el método de relajación de Agmon, Motzkin y Schoenberg se considera la solución del sistema de inecuaciones $Ax \leq b$, con A una matriz $m \times n$, y $b \in \mathbb{R}^m$. Este problema equivale al problema de la factibilidad en programación lineal. Al igual que con el método de Kaczmarz este problema se puede generalizar a espacios de Hilbert, puesto que se trata de encontrar un x en la intersección de m hemiespacios que vendran dados por:

$$S_i = \{x \in H : \langle a_i, x \rangle \leq b_i\}$$

para cada $i \in M$.

El algoritmo toma la aproximación inicial x_0 arbitraria y calcula:

$$x_{k+1} = x_k + \delta_k a_{i_k},$$

donde

$$\delta_k = \min \left(0, \omega_k \frac{b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x_k \rangle}{\langle a_{i_k}, a_{i_k} \rangle} \right).$$

Como en el algoritmo de Kaczmarz, los factores de relajación ω_k varían en el rango $0 < \epsilon \leq \omega_k \leq 2 - \epsilon < 2$ para todo k , con ϵ pequeño y positivo. La sucesión de control puede ser la cíclica o, alternativamente, casi cíclica. La interpretación geométrica es análoga a la del método de Kaczmarz: con factores de relajación $\omega_k = 1$ para todo k , el algoritmo equivale a realizar de forma cíclica sobre los distintos hemiespacios del sistema proyecciones ortogonales de los sucesivos iterantes hasta alcanzar la convergencia. Nótese que la proyección de z sobre el hemiespacio S_i es la proyección ortogonal sobre el hiperplano H_i , cuando z no está en el hemiespacio, o se reduce al propio z si $z \in S_i$. Es importante señalar que en este tipo de métodos no se garantiza la convergencia al elemento del conjunto de soluciones factibles más próximo al iterante inicial x_0 .

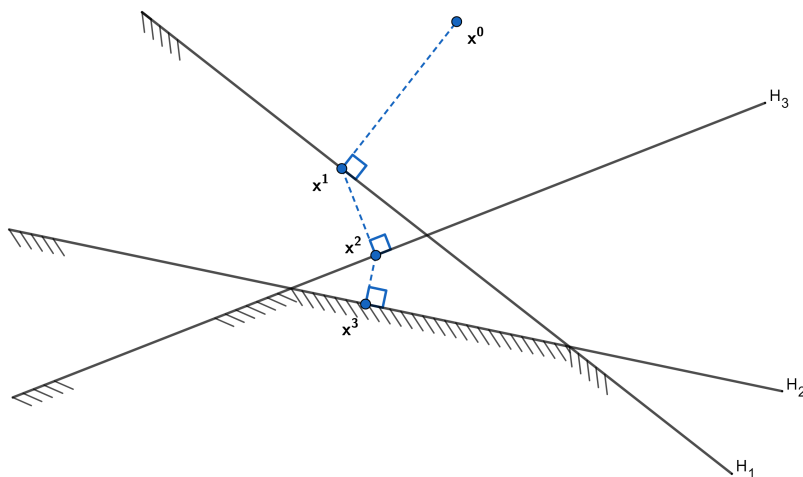


Figura 3.2: Interpretación geométrica del método MAMS con $\omega = 1$

3.2.4. El algoritmo de Hildreth

El algoritmo de Hildreth determina la solución de norma euclídea mínima del conjunto de inecuaciones lineales $Ax \leq b$, con A una matriz real $m \times n$, y $b \in \mathbb{R}^m$.

El algoritmo parte de una aproximación inicial $z_0 \in \mathbb{R}_+^n$, y define $x_0 = -A^T z_0$. Entonces en cada iteración computa

$$x_{k+1} = x_k + \delta_k a_{i_k}, \quad z_{k+1} = z_k - \delta_k e_{i_k},$$

con

$$\delta_k = \min \left((z_k)_{i_k}, \omega_k \frac{b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x_k \rangle}{\langle a_{i_k}, a_{i_k} \rangle} \right),$$

y e_{i_k} el vector de la base canónica, que tiene 1 en la coordenada i_k -ésima. De nuevo, el factor de relajación se toma en el rango $0 < \epsilon \leq \omega_k \leq 2 - \epsilon < 2$. La sucesión de control puede ser cíclica o casi cíclica. La interpretación geométrica es análoga a la del método de Agmon, Motzkin y Schoenberg, con la diferencia de que si x_k está en el interior del hemiespacio S_{i_k} entonces x_{k+1} o es la proyección ortogonal sobre H_{i_k} o se queda en el interior de S_{i_k} en el rayo ortogonal desde x_k al hiperplano H_{i_k} . La sucesión de control es cíclica o casi cíclica.

El método anterior se modifica para tratar la situación frecuente en la que se tienen desigualdades lineales en ambos sentidos; es decir, las desigualdades a resolver aparecen como

$$c_i \leq \langle a_i, x \rangle \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

El algoritmo determina todavía la solución de norma euclídea mínima y procede del siguiente modo: Se pone inicialmente $x_0 = 0$ y $z_0 = 0$. Entonces en cada paso se computa

$$x_{k+1} = x_k + \delta_k a_{i_k}, \quad z_{k+1} = z_k - \delta_k e_{i_k},$$

con

$$\delta_k = \text{med} \left((z_k)_{i_k}, \frac{b_{i_k} - \langle a_{i_k}, x_k \rangle}{\langle a_{i_k}, a_{i_k} \rangle}, \frac{c_{i_k} - \langle a_{i_k}, x_k \rangle}{\langle a_{i_k}, a_{i_k} \rangle} \right)$$

donde $\text{med}(a, b, c)$ denota la mediana de los tres valores a, b, c . El método se ha probado convergente sólo en el caso en que los parámetros de relajación ω_k son igual a 1.

3.2.5. El método de relajación de Herman

El problema que se plantea es encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$b_i - \alpha_i \leq \langle a_i, x \rangle \leq b_i + \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Este es un problema de factibilidad lineal. Goffin observó que para obtener convergencia rápida una estrategia conveniente es usar la proyección ortogonal cuando los iterantes están alejados de la banda definida por las restricciones de intervalo anteriores, y usar reflexiones cuando los iterantes están ya próximos a dicha banda. El método propuesto por Herman procede de la siguiente forma.

Se toma $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, y en cada paso se computa

$$x_{k+1} = x_k + \delta_k \frac{a_{i_k}}{\|a_{i_k}\|^2},$$

donde

$$\delta_k = \begin{cases} 0 & \text{si } |b_i - \langle a_i, x_k \rangle| \leq \alpha_i, \\ b_i - \langle a_i, x_k \rangle & \text{si } |b_i - \langle a_i, x_k \rangle| \geq 2\alpha_i, \\ 2(b_i + \alpha_i - \langle a_i, x_k \rangle) & \text{si } b_i + \alpha_i < |\langle a_i, x_k \rangle| < b_i + 2\alpha_i, \\ 2(-b_i + \alpha_i + \langle a_i, x_k \rangle) & \text{si } b_i - 2\alpha_i < |\langle a_i, x_k \rangle| < b_i - \alpha_i, \end{cases}$$

3.3. El método de Kaczmarz y la inversa generalizada.

En esta sección ampliamos la teoría de convergencia del algoritmo de Kaczmarz para considerar el problema de la aproximación de la pseudoinversa de Penrose de una matriz A , $m \times n$. La teoría de convergencia que aporta el teorema de proyecciones alternadas de Von Neumann debe extenderse para cubrir esta situación.

Consideramos, pues, el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

donde A es una matriz real de dimensiones $m \times n$ (posiblemente $m > n$) y x y b son vectores columna reales n - y m -dimensionales respectivamente.

Dada la matriz A y un vector b la solución de dicho sistema no tiene por que existir necesariamente. El problema es decir cuando el sistema tiene solución o no y también encontrar todos los vectores solución si estos existen. A lo largo de esta sección veremos que el método de acción por fila de Kaczmarz converge para cualquier sistema de ecuaciones lineales con filas no nulas, incluso cuando el sistema es singular e inconsistente. Además, el número de operaciones requeridas en cada iteración del método es pequeño. Finalmente, el método de Kaczmarz nos proporcionará un algoritmo para calcular la inversa generalizada de la matriz A .

Como ya es usual, A^T denotará la transpuesta de A . Debemos destacar que toda matriz puede ser identificada como un operador lineal acotado entre espacios de Hilbert. De esta manera, dada una matriz real A de m filas y n columnas la notación $\|A\|$ hará referencia a la norma del operador lineal acotado asociado a la matriz A , es decir:

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Tal y como hemos visto previamente el sistema lineal $Ax = b$ puede ser descrito mediante productos internos de la siguiente manera

$$H_i = \langle x, a_i \rangle = b_i \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

donde a_i es la i -ésima columna de nuestra matriz A^T .

$$P_{H_i} = x - \frac{\langle x, a_i \rangle - b_i}{\alpha_i} a_i \text{ para } i = 1, \dots, m$$

Denota la proyección sobre el hiperplano H_i y $\alpha_i = \langle a_i, a_i \rangle$. Un ciclo completo de proyecciones sucesivas del método de Kaczmarz puede ser descrito mediante el siguiente operador

$$\begin{aligned} F(b, x) &= P_{H_1} \circ P_{H_2} \circ P_{H_3} \dots \circ P_{H_{m-1}} \circ P_{H_m} \\ &= P_{H_1}(\dots(P_{H_{m-2}}(P_{H_{m-1}}(P_{H_m}(x))))\dots). \end{aligned}$$

De esta manera podemos generar nuestra ya conocida sucesión de iterantes mediante la relación de recurrencia siguiente

$$x^{i+1} = F(b, x^i) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Hemos visto previamente que si el sistema es compatible determinado la sucesión anterior converge a la solución de dicho sistema. Ahora demostraremos que la sucesión de iterantes del método de Kaczmarz converge cualquiera que sea el iterante inicial x_0 , para cualquiera que sean A y b .

Cada proyección P_{H_i} puede expresarse en términos de la matriz A de la siguiente manera

$$P_{H_i} = P_i x + \frac{b_i}{\alpha_i} a_i \quad \text{para } i = 1, \dots, m,$$

donde P_i denota el operador de proyección sobre el hiperplano definido por

$$\langle x, a_i \rangle = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m.$$

A su vez cada P_i puede escribirse de manera matricial como sigue

$$P_i = I - \frac{1}{\alpha_i} a_i a_i^T = \left(\delta_{kl} - \frac{a_{ik} \bar{a}_{il}}{\alpha_i} \right).$$

De esta manera vemos que cada P_{H_i} constituye una transformación afín.

Sea $Q_i = P_1 P_2 \dots P_i$ ($i = 1, \dots, m$), donde $Q_0 = I$. Sea R la matriz real de n filas y de m columnas cuyo i -ésimo vector columna viene dado por la expresión:

$$\frac{1}{\alpha_i} Q_{i-1} a_i.$$

El producto matricial Rb adquiere entonces la siguiente forma

$$Rb = \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{\alpha_i} Q_{i-1} a_i.$$

Finalmente, nuestro ciclo completo de proyecciones puede escribirse:

$$F(b, x) = Qx + Rb,$$

donde $Q = Q_m$ y la matriz R depende única y exclusivamente de la matriz del problema A .

3.3.1 Proposición. $Q + RA = I$

Demostración. La i -ésima columna de R y la i -ésima fila de A son respectivamente, $\frac{1}{\alpha_i}Q_{i-1}a_i$ y a_i^T . Se tiene entonces que.

$$\begin{aligned} RA &= \frac{1}{\alpha_1}a_1a_1^T + \frac{1}{\alpha_2}Q_1a_2a_2^T + \frac{1}{\alpha_3}Q_2a_3a_3^T + \dots + \frac{1}{\alpha_m}Q_{m-1}a_ma_m^T \\ &= (I - P_1) + Q_1(I - P_2) + \dots + Q_{m-1}(I - P_m) \\ &= I - Q_m, \end{aligned}$$

puesto que $Q_{i-1}P_i = Q_i$ por definición. \square

Nuestro espacio de Hilbert \mathbb{R}^n puede ser descrito mediante suma directa de los subespacios $\text{Ker}(A)$ y $\text{Im}(A^T)$, es decir

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A^T).$$

donde $\text{Im}(A^T)$ es el subespacio generado por los vectores fila de A .

3.3.2 Lema.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A) &= \bigcap_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n; P_i x = x\} \\ \text{Im}(A^T) &= \left\langle \bigcup_{i=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n; P_i x = 0\} \right\rangle, \end{aligned}$$

3.3.3 Lema.

$$\|Qx\| = \|x\| \text{ si, y solo si } x \in \text{Ker}(A).$$

Demostración. Si x no pertenece a $\text{Ker}(A)$, entonces existe un entero $i_0 \leq m$ tal que $P_{i_0}x \neq x$. Tomemos i_0 como el mayor de estos números. Entonces,

$$\|P_{i_0}P_{i_0+1}\dots P_mx\| = \|P_{i_0}x\| < \|x\|.$$

Como cada proyección P_i tiene norma exactamente 1, se tiene que para $i = 1, 2, \dots, m$

$$\|Q_i\| = \|P_1P_2\dots P_i\| \leq \|P_1\|\|P_2\|\dots\|P_i\| = 1.$$

Por lo tanto,

$$\|Q_mx\| = \|Q_{i_0-1}\|\|P_{i_0}P_{i_0+1}\dots P_mx\| < \|x\|.$$

Por otro lado, si $x \in \text{Ker}(A)$, entonces

$$P_ix = x \text{ para } i = 1, 2, \dots, m;$$

de donde se obtiene

$$Qx = P_1P_2\dots P_mx = x.$$

Concluyéndose así la demostración \square

3.3.4 Corolario.

$\|Q\| \leq 1$. Si el rango de $A < n$ entonces $\|Q\| = 1$.

3.3.5 Corolario.

$Qx = x$ si, y solo si $x \in \text{Ker}(A)$.

3.3.6 Teorema. 1. $\text{Ker}(A)$ e $\text{Im}(A^T)$ son subespacios invariantes por la aplicación lineal Q , además $Q|_{\text{Ker}(A)} = I$, es decir

$$Q = P_{\text{Ker}(A)} \oplus \tilde{Q} \text{ y } P_{\text{Ker}(A)}\tilde{Q} = \tilde{Q}P_{\text{Ker}(A)} = 0,$$

donde $\tilde{Q} = QP_{\text{Im}(A^T)}$.

2. $\|\tilde{Q}\| = \sup \{\|Qx\| < 1\}$ cuando $x \in \text{Im}(A^T)$ y $\|x\| = 1$.

Demostración. De la demostración del lema anterior tenemos $Q|_{\text{Ker}(A)} = I_{\text{Ker}(A)}$. De forma similar se tiene $Q^T|_{\text{Ker}(A)} = I_{\text{Ker}(A)}$, puesto que $Q^T = P_m P_{m-1} \dots P_1$. Entonces para todo $x \in \text{Ker}(A)$ y para todo $y \in \text{Im}(A^T)$ tenemos

$$\langle x, Qy \rangle = \langle Q^T x, y \rangle = \langle x, y \rangle = 0.$$

Así $Qy \in (\text{Ker}(A))^\perp = \text{Im}(A^T)$. Teniendo en cuenta que $P_{\text{Ker}(A)} + P_{\text{Im}(A^T)} = I$ y $P_{\text{Ker}(A)}P_{\text{Im}(A^T)} = P_{\text{Im}(A^T)}P_{\text{Ker}(A)} = 0$, tenemos demostrada la primera parte del teorema. Del corolario 3.3.4 se sigue que

$$\|\tilde{Q}\| \leq \|Q\| \leq 1.$$

Si $\|\tilde{Q}\| = 1$, entonces existe un vector no nulo $x_0 \in \text{Im}(A^T)$ tal que $\|Qx_0\| = \|x_0\|$, esto es debido a que el operador $\|Qx\|$ es continuo en el conjunto compacto

$$\{x \in \text{Im}(A^T); \|x\| = 1\}.$$

Del lema 3.3.3 se sigue que $x_0 \in \text{Ker}(A)$, y por lo tanto $x_0 = 0$. Esto claramente contradice nuestra hipótesis con lo que queda probado nuestro resultado. \square

Nótese que si el rango de A es n , entonces $Q = \tilde{Q}$ y $\|Q\| < 1$. Puesto que $Q = P_{\text{Ker}(A)} \oplus \tilde{Q}$ se deduce el siguiente corolario

3.3.7 Corolario.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q^i = P_{\text{Ker}(A)}.$$

Dados una serie de vectores no nulos x, a_1, a_2, \dots, a_m (posiblemente dependientes), es un problema frecuente el calcular la componente de x ortogonal a cada uno de los vectores a_1, a_2, \dots, a_m : $P_{\text{Ker}(A)}x$. El siguiente corolario nos proporciona un algoritmo basado en el método de Kaczmarz para solventar dicho problema.

3.3.8 Corolario. Sea $b = 0$, el algoritmo (3.1)

$$x^{i+1} = F(0, x^i) = Qx^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

genera una secuencia de iterantes x^i la cual converge a $P_{\text{Ker}(A)}$, donde x^0 es un vector inicial.

Aplicando el proceso iterativo (3.2) del corolario anterior a los n vectores iniciales que forman la base canónica de \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T, \mathbf{e}_2 = [0, 1, \dots, 0]^T, \dots, \mathbf{e}_n = [0, 0, \dots, 1]^T,$$

podemos calcular la matriz del operador de proyección $P_{\text{Ker}(A)}$, esto se debe a que el vector $P_{\text{Ker}(A)}\mathbf{e}_i$ constituye la i -ésima columna de dicha matriz.

3.3.9 Teorema. $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^i Q^j R$ existe y además se tiene que:

$$(I - Q')^{-1} R = \sum_{j=0}^{\infty} Q^j R.$$

Demostración. Para todo $x \in \text{Ker}(A)$, se tiene que para $i = 1, 2, \dots, m$

$$\langle Q_{i-1}a_i, x \rangle = \langle a_i, Q_{i-1}^T x \rangle = \langle a_i, x \rangle = 0,$$

puesto que $Q_i^T = P_i P_{i-1} \dots P_1$. Entonces los vectores columna $\frac{1}{\alpha_i} Q_{i-1} a_i$ de la matriz R están en el subespacio $\text{Im}(A^T)$. Por consiguiente, se tiene que

$$\sum_{j=0}^i Q^j R = \sum_{j=0}^i \tilde{Q}^j R.$$

Puesto que $\|\tilde{Q}\| < 1$, tenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{Q}^j R = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{Q}^j \right) R = (I - \tilde{Q})^{-1} R.$$

Finalmente,

$$(I - \tilde{Q})^{-1} R = \sum_{j=0}^{\infty} Q^j R.$$

□

3.3.10 Teorema. *La matriz de n filas y m columnas*

$$G = (I - \tilde{Q})^{-1}R$$

es una inversa generalizada de la matriz A de nuestro problema, es decir:

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad GA = P_{\text{Ker}(A)}, \quad AG = P,$$

donde P es la proyección sobre $\text{Im}(A)$ a través de $\text{Ker}(R)$. $GA = P_{\text{Ker}(A)}$ puede ser reemplazada por $(GA)^T = GA$.

Demostración. Es claro que los vectores que constituyen las columnas de A^T están en el subespacio $\text{Im}(A^T)$, por lo tanto,

$$(I - Q)A^T = (I - \tilde{Q})A^T.$$

Por la proposición (3.3.1), se tiene que

$$RA = I - Q.$$

Entonces.

$$RAA^T = (I - \tilde{Q})A^T,$$

de donde

$$(I - \tilde{Q})RAA^T = A^T.$$

Esto quiere decir que

$$AGA = A \quad \text{y} \quad (GA)^T = GA.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} RA(I - \tilde{Q})^{-1} &= (I - Q)(I - \tilde{Q})^{-1} \\ &= (I - \tilde{Q} - P_{\text{Ker}(A)})(I - \tilde{Q})^{-1} \\ &= I - P_{\text{Ker}(A)}((I - \tilde{Q})^{-1}) \\ &= I - P_{\text{Ker}(A)}, \end{aligned}$$

ya que $P_{\text{Ker}(A)}\tilde{Q} = 0$. Entonces tenemos

$$RA(I - \tilde{Q})^{-1}R = (I - P_{\text{Ker}(A)})R = R,$$

puesto que los vectores columna de R están en el subespacio $\text{Im}(A^T)$.

Premultiplicando la ecuación anterior por $(I - \tilde{Q})^{-1}$, tenemos

$$(I - \tilde{Q})^{-1}RA(I - \tilde{Q})^{-1}R = (I - \tilde{Q})^{-1}R,$$

esto es, $GAG = G$. Vemos que AG es idempotente y $\text{Im}(A) \subset \text{Im}(AG)$, ya que $AGA = A$. Es claro que

$$\text{Ker}(AG) = \text{Ker}(A(I - \tilde{Q})^{-1}R) \supset \text{Ker}(R).$$

Como $\text{Im}(AG) \oplus \text{Ker}(AG) = \mathbb{R}^m$, entonces $\text{Im}(A) \cap \text{Ker}(R) = \{0\}$. Pero $\text{Im}(A^T) = \text{Im}(R)$, porque el i -ésimo vector columna de la matriz R es de la forma

$$\frac{1}{\alpha_i} Q_{i-1} a_i = \frac{1}{\alpha_i} \left(a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_j a_j \right).$$

Entonces

$$\dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Im}(R^T)),$$

por lo tanto,

$$\dim(\text{Ker}(A^T)) = \dim(\text{Ker}(R)).$$

Finalmente deducimos que

$$\text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(R) = \mathbb{R}^n.$$

lo que completa nuestra demostración. \square

Acto seguido probaremos la convergencia del algoritmo (3.1)

3.3.11 Corolario. *Para toda matriz $m \times n$ real A con filas no nulas, y para cada vector m -dimensional b , el algoritmo proporcionado por el método de Kaczmarz (3.1) genera una sucesión convergente de iterantes $\{x^i\}$ tal que*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = P_{\text{Ker}(A)} x_0 + Gb.$$

donde $x^0 \in \mathbb{R}^n$ es un vector inicial arbitrario

Demostración. de la relación de recurrencia dada por el algoritmo (3.1) y de la expresión (3.3), se deduce que

$$x^i = Q^i x^0 + \left(\sum_{j=0}^{i-1} Q^j R \right) b.$$

Es consecuencia directa del corolario (3.3.7) y del teorema previo que el primero y el segundo término de (3.3.11) converjan a $P_{\text{Ker}(A)} x^0$ y a Gb , respectivamente, cuando i tiende a infinito. \square

Es ya conocido que nuestro sistema de partida $Ax = b$ tiene solución si, y sólo, si $AGb = b$. En este caso, $P_{\text{Ker}(A)} x^0 + Gb$ es solución del sistema para el iterante inicial arbitrario x_0 , y Gb es la solución de norma mínima. Entonces, el procedimiento para resolver el sistema $Ax = b$ será el siguiente:

1. Se computa Gb mediante la aplicación del algoritmo de (3.1) con el vector inicial $x^0 = 0$.
2. Se comprueba la consistencia del sistema, ya sea computando $A(Gb)$ directamente o observando el movimiento en el último ciclo de iteración. Si el sistema es inconsistente, entonces cualquier vector es necesariamente modificado por algún P_i ($1 \leq i \leq m$) en un ciclo de iteración.
3. Si el sistema es consistente, se calcula la matriz de $P_{\text{Ker}(A)}$ aplicando el proceso de (3.2) mencionado anteriormente. De esta manera podemos formar ya la variedad afín

$$\text{Im}(P_{\text{Ker}(A)}) + Gb$$

formada por los vectores solución del sistema.

Finalmente para obtener nuestra inversa generalizada G procedemos aplicando el algoritmo de (3.1) de forma sucesiva a cada uno de los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^m

$$\mathbf{b}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T, \mathbf{b}_2 = [0, 1, \dots, 0]^T, \dots, \mathbf{b}_n = [0, 0, \dots, 1]^T,$$

con el iterante inicial x^0 .

3.4. El método de reconstrucción algebraica (ART)

El término técnicas de reconstrucción algebraica (*ART Algebraic Reconstruction Technique*) se refiere a una metodología general en tratamiento de imágenes por la que se busca reproducir una imagen a partir de diferentes proyecciones de la misma [6]. Estas técnicas fueron propuestas por primera vez por Gordon, Bender y Herman [4] en el contexto de reconstrucción de imágenes médicas. En una de sus formas más primitivas, la técnica ART no es otra que el método de Kaczmarz presentado anteriormente. El objetivo de esta sección es introducir en el contexto del tratamiento de imágenes esta técnica reformulándola en términos matemáticos rigurosos.

El problema de la reconstrucción de imágenes aparece en muchas aplicaciones de gran interés: por ejemplo, en microscopía electrónica, en radiología, radio astronomía, etc. Para reformular el problema sin referirnos a un campo especializado concreto haremos algunas hipótesis en aras de la simplicidad y la precisión. Por ejemplo, supondremos que las imágenes de interés están encerradas en una región cuadrada.

Una *imagen* es una región cuadrada R del plano junto con una función que define el nivel de gris en todo punto de la región, mediante una función $f : R \rightarrow [0, 1]$: el 1 corresponde al negro absoluto. Dada una imagen y un entero positivo n , para digitalizar la imagen particionamos R en una malla

cuadrada $n \times n$ de cuadrados más pequeños disjuntos. Para cada uno de los cuadrados de la malla suponemos un nivel de gris uniforme. Cuanto mayor es n , mayor es la resolución, y la imagen digital más se parece a la imagen real.

Una *banda* es una región de la imagen entre dos líneas paralelas (no necesariamente paralelas a los ejes). Asociamos a cada imagen, a cada n y a cada banda las siguientes cantidades:

- (i) El nivel total de gris de la imagen dentro de la banda, que llamamos suma real en la banda, es la suma de los niveles de gris de la imagen real contenida en la banda.
- (ii) Al nivel total de gris de la versión digitalizada $n \times n$ de la imagen real contenida en la banda le llamaremos pseudo suma ponderada en la banda de la imagen.
- (iii) Al nivel total de gris de la versión digitalizada $n \times n$ de los subcuadrados cuyos centros están incluidos en la banda le llamaremos pseudo suma no ponderada de la versión digitalizada.

Una proyección es un conjunto de bandas, disjuntas, de igual amplitud, que recubren toda la imagen. El ángulo de la proyección es el que forman los lados de las bandas con el lado vertical del cuadrado, medido positivamente en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. Al referirnos a una imagen, la expresión datos reales de la proyección se referirá a las sumas reales de toda banda de un número finito de proyecciones. De forma similar, los pseudo datos ponderados y no ponderados de una imagen son las sumas asociadas a las bandas de un número finito de proyecciones. Dos conjuntos de datos proyectados se corresponden si se refieren a un mismo conjunto de proyecciones.

Con estas definiciones previas, el problema de la reconstrucción puede formularse en los siguientes términos: *Dado un conjunto de datos reales de la proyección de una imagen y un entero positivo n , estimar la versión digital $n \times n$ de la imagen.*

Surgen las siguientes dificultades:

- (i) Existen en general infinitas imágenes con idénticas proyecciones reales.
- (ii) Generalmente, los datos de una proyección real y los datos ponderados de la pseudoproyección (los datos de la versión digitalizada $n \times n$) serán diferentes. En general, no debe esperarse que los datos de la pseudoproyección coincidan con los correspondientes datos reales de la proyección.
- (iii) Si existe una imagen cuyos datos de la pseudoproyección coinciden con los datos de la proyección de la imagen real, entonces existen infinitas imágenes con tales datos, y sin embargo puede suceder que la imagen original no coincidiera con ninguna de ellas.

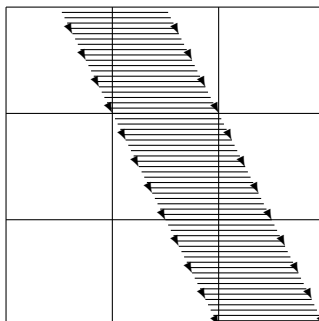
3.4.1. Formulación matemática del problema

Una versión digitalizada $n \times n$ de una imagen se puede representar por un vector columna n^2 -dimensional, donde la entrada j -ésima es el nivel de gris (uniforme) de la celda (cuadrado) j -ésima. En principio, el orden de numeración de las celdas es irrelevante, por lo que elijeremos uno conveniente: generalmente, el orden natural, en el que las celdas se numeran consecutivamente fila a fila. Por ejemplo, el vector

$$\rho = [0.2, 0.5, 0.4, 0.1, 0.3, 0.6, 0.0, 0.3, 0.5]^T$$

representa la versión digitalizada

0.2	0.5	0.4
0.1	0.3	0.6
0	0.3	0.5



Supongamos que los datos de cierta pseudo proyección ponderada corresponden a datos de m bandas. Denotemos con $\omega_{i,j}$ a la fracción del área del j -ésimo cuadrado que es intersecado por la banda i -ésima. Denotemos con ω_i al vector fila cuyo j -ésimo elemento es $\omega_{i,j}$. Por ejemplo, si consideramos una banda que forma un ángulo $\arctan(1/2)$, tal y como se muestra en la imagen de arriba, entonces

$$\omega_i = [0.25, 0.75, 0.0, 0.75, 0.25, 0.0, 0.25, 0.75]^T$$

Claramente la suma ponderada de la i -ésima banda es

$$\sum_j \omega_{i,j} \rho_j.$$

De forma similar, si

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si el centro del cuadrado } j \text{ está en la banda } i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces la suma no ponderada de la banda es

$$\sum_j \mu_{i,j} \rho_j,$$

Si introducimos el vector μ_i , vector fila cuya j -ésima entrada es $\mu_{i,j}$, entonces

$$\mu_i = [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1]^T.$$

Las suma ponderadas y no ponderadas de la pseudobanda para la banda de la figura son 1.25 y 1.3, respectivamente.

Sea W la matriz de dimensiones $m \times n^2$ cuya i -ésima fila es el vector ω_i . De manera análoga, U denota la matriz $m \times n^2$ que tiene por i -ésima fila a μ_i . Sean R , S y T , respectivamente, los vectores m -dimensionales cuyas i -ésimas entradas, R_i , S_i y T_i son la suma real de la i -ésima banda, la suma ponderada de la i -ésima banda y la suma no ponderada de la i -ésima banda. Toda la discusión anterior puede ser recogida y resumida mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} W\rho &= S, \\ U\rho &= T. \end{aligned}$$

Desafortunadamente, los datos reales de proyección nos proporcionan información sobre W , U y R , pero no sobre S ni T . Por lo tanto, las ecuaciones anteriores no nos sirven a la hora de determinar ρ a menos que hagamos una serie de suposiciones sobre la relación entre R y S , o R y T .

Si la imagen está digitalizada mediante una malla fina (n grande), y varía de forma suave, entonces R y S serán muy similares. Esto es cierto también para R y T si además elegimos la amplitud de las bandas de manera cuidadosa. De esta manera y con estas consideraciones podemos asumir que S o T pueden ser reemplazadas por R . Tenemos entonces la siguiente formulación del problema de reconstrucción.

Problema de reconstrucción sin restricciones (URP).

Dada una matriz $m \times n^2$ P y un vector columna m -dimensional R , queremos encontrar ρ tal que

$$P\rho = R.$$

Esto no es otra cosa que un conjunto de ecuaciones lineales. La dificultad en la resolución del problema sin restricciones URP radica en el hecho de que

P puede ser muy grande. Además, el planteamiento del problema ignora el hecho de que puede no haber una solución (si R no es exactamente S ó T) y además no indica que solución escoger si hay más de una.

Otro hecho importante ignorado por URP es que ρ representa una imagen digitalizada y por lo tanto debería ausmirse que $\rho_i \geq 0$, o incluso que $0 \leq \rho_i \leq 1$.

Esto nos conduce a la formulación de los siguientes problemas.

Problema de reconstrucción con restricciones parciales (PRP).

Dada una matriz P de tamaño $m \times n^2$ y un vector columna de tamaño m R , encontrar un ρ que cumpla que

$$P\rho = R.$$

y que $\rho_j \geq 0$, para $1 \leq j \leq n^2$.

Problema de reconstrucción con restricciones totales (FRP).

Dada una matriz $m \times n^2$ P y un vector columna m -dimensional R , buscamos ρ tal que

$$P\rho = R,$$

y $0 \leq \rho_j \leq 1$, para $1 \leq j \leq n^2$.

3.4.2. Técnicas de reconstrucción algebraica (ART)

Los algoritmos ART intentan solucionar el PRP en el caso especial en que la matriz P sea un matriz de ceros y unos. (Esto estaba basado en la hipótesis de que los datos reales de proyección R son aproximadamente los mismos que los datos de pseudo proyección no ponderados T). Sin embargo, los métodos son fácilmente generalizables, así que podran ser usados para los tres problemas de la sección anterior sin restricción alguna sobre la matriz P .

Asumimos que se tiene un matriz P de dimensiones $m \times n^2$ y un vector columna de dimensión m que denotaremos por R . Sea $p_{i,j}$ el (i,j) -ésimo elemento de la matriz P , y R_i el i -ésimo elemento del vector R . Para $1 \leq i \leq m$, se define

$$N_i = \sum_j P_{i,j}^2.$$

Nótese que si P es la matriz U de la sección anterior, entonces N_i es justamente el número de centros de los cuadrados de la malla que caen dentro de la banda i -ésima.

ART es un método iterativo. Emplearemos ρ_j^q para denotar el valor estimado de ρ_j después de q iteraciones. Adicionalmente, usaremos un estimador auxiliar $\tilde{\rho}_j^q$. Definimos, para cada banda i y para cada q ,

$$R_i^q = \sum_j p_{i,j} \rho_j^q.$$

En todas las versiones de ART descritas en esta sección,

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_j^0 &= 0, \\ \tilde{\rho}_j^{q+1} &= \rho_j^q + p_{i,j} \frac{R_i - R_i^q}{N_i},\end{aligned}$$

donde

$$i = \begin{cases} m, & \text{si } (q+1) \text{ es divisible por } m. \\ \text{el resto de dividir } (q+1) \text{ por } m, & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

Esta definición de i implica que en cada paso del algoritmo las filas de P son utilizadas de manera cíclica.

Las tres versiones de ART discutidas en esta sección difieren en la forma en que ρ_j^q es obtenido de $\tilde{\rho}_j^q$. De esta manera tenemos:

1. ART sin restricciones.

$$\rho_j^q = \tilde{\rho}_j^q.$$

2. ART con restricciones parciales.

$$\rho_j^q = \begin{cases} 0, & \text{Si } \tilde{\rho}_j^q < 0. \\ \tilde{\rho}_j^q, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. ART con restricciones totales.

$$\rho_j^q = \begin{cases} 0, & \text{Si } \tilde{\rho}_j^q < 0. \\ \tilde{\rho}_j^q, & \text{Si } 0 \leq \tilde{\rho}_j^q \leq 1. \\ 1, & \text{Si } \tilde{\rho}_j^q > 1. \end{cases}$$

La principal razón para la introducción del ART sin restricciones se debe a que es más fácil de analizar a nivel teórico que las versiones con restricciones.

3.5. Algunos experimentos numéricos

Ejemplo 1. Consideramos el sistema, extraído de [9],

$$\begin{bmatrix} -3.2 & 2.9 & 1.6 & 0.1 \\ 0.0 & -1.1 & 2.3 & 1.0 \\ 5.1 & 4.8 & 0.2 & 4.9 \\ 2.0 & 1.1 & 1.9 & -2.9 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 2.2 \\ 15.0 \\ 2.1 \end{bmatrix}$$

La matriz es regular, y el sistema tiene la solución $x = [1, 1, 1, 1]^T$. La tabla siguiente muestra el iterante en el que se satisface el criterio de parada

Método de Kaczmarz

tol	10^{-6}	10^{-9}	10^{-11}
N. Ciclos	38	69	91
x_1	1.0000002706247	1.0000000003039	1.0000000000030
x_5	1.0000005142534	1.0000000006798	0.9999999999996
x_{80}	0.9646853769984	0.9646809944622	0.9646809896319
x_{84}	0.7083318423493	0.7083333315746	0.7083333333154

indican (la tabla sólo presenta valores numéricos para las componentes x_1 , x_5 , x_{80} y x_{84}).

Un interés adicional de este ejemplo es que la solución con eliminación Gaussiana y sin pivotaje (ni refinamiento iterativo) produce soluciones numéricas para x_{84} del orden de 10^{13} . Sin embargo, estos métodos iterativos dan aproximaciones que aunque no tienen más que una cifra significativa correcta (para x_{84}), son mejores que las proporcionadas por la eliminación Gaussiana.

Ejemplo 4. Consideramos el siguiente sistema lineal $Ax = b$, con matriz 6×4 .

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 3.0 & 2.0 & -1.0 \\ 1.0 & 2.0 & -1.0 & 2.0 \\ 1.0 & -1.0 & 2.0 & 3.0 \\ 2.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 5.0 & 5.0 & 4.0 & 1.0 \\ 4.0 & -1.0 & 5.0 & 7.0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5.0 \\ 0.0 \\ 5.0 \\ 5.0 \\ 15.0 \\ 15.0 \end{bmatrix}$$

El rango de dicha matriz es 3 y el sistema es consistente. La solución computada por el método de Kaczmarz se muestra en la siguiente tabla. El vector empleado como iterante inicial es $x = [7, 6, 10, 6]^T$. La solución real es $\mathbf{x} = [1, 1, 1, 1]^T$.

Método de Kaczmarz

tol	10^{-6}	10^{-9}	10^{-11}
N. Ciclos	38	60	74
x_1	1.0000100433911	1.0000000091225	1.0000000001057
x_2	0.9999981753989	0.9999999983426	0.9999999999807
x_3	0.9999894855657	0.9999999904495	0.9999999998892
x_4	1.0000015105722	1.0000000013720	1.0000000000159

Ejemplo 5. Encontrar la inversa generalizada G de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Mostramos los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de Kaczmarz con distintas tolerancias.

Para una tolerancia de 10^6 :

$$\begin{bmatrix} 0,249999958084479 & -0,000000038852564 & 0,250000060293264 \\ 0,499999850715657 & 0,999999861624540 & -0,499999785262356 \\ -0,499999916168957 & 0,000000077705129 & 0,499999879413472 \\ 0,249999958084479 & -0,000000038852564 & 0,250000060293264 \end{bmatrix}$$

Para tolerancia de 10^9 :

$$\begin{bmatrix} 0,249999999952388 & -0,00000000044133 & 0,250000000040654 \\ 0,499999999830426 & 0,99999999842817 & -0,49999999855209 \\ -0,49999999904775 & 0,00000000088266 & 0,49999999918692 \\ 0,249999999952388 & -0,00000000044133 & 0,250000000040654 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para 10^{11} :

$$\begin{bmatrix} 0,24999999999564 & -0,00000000000404 & 0,250000000000627 \\ 0,49999999998448 & 0,99999999998562 & -0,49999999997768 \\ -0,49999999999129 & 0,00000000000808 & 0,49999999998747 \\ 0,24999999999564 & -0,00000000000404 & 0,250000000000627 \end{bmatrix}$$

Mientras, la solución exacta es:

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0.0 & 0.25 \\ 0.5 & 1.0 & -0.5 \\ -0.5 & 0.0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.0 & 0.25 \end{bmatrix}$$

3.6. Conclusiones

Inicialmente se pensó en la aplicación de los métodos de acción por filas a grandes sistemas lineales como los que aparecen en la discretización de ecuaciones en derivadas parciales. Una ventaja potencial de los métodos de acción por fila es su eficiencia cuando se utilizan con matrices dispersas, ya que su implementación sólo requiere del cálculo de productos internos de las filas de estas matrices por vectores y éstos pueden calcularse económicamente. Sin embargo, la memoria no refleja algunas experiencias negativas con el uso de estos métodos con sistemas como el que surge al discretizar el Laplaciano en el cuadrado unidad; los métodos adolecen de una convergencia exasperantemente lenta y no parecen *a priori* competitivos con ninguno de los métodos iterativos clásicos.

En las publicaciones sobre estos métodos que hemos revisado no hemos encontrado ninguna referencia a la elección del parámetro de relajación ω que aparece en algunas de sus formulaciones. Las experiencias negativas que hemos tenido podrían aliviarse de contar con una teoría razonable para la elección de dichos parámetros.

Las aplicaciones de estos métodos parecen concentrarse en matrices llenas de tamaño moderado. Un área donde el método de Kaczmarz tiene bastante vigencia es el de la reconstrucción algebraica de imágenes a partir de proyecciones de las mismas, sobre todo en relación con imágenes médicas. Hemos presentado el contexto de este tipo de aplicaciones, aunque el uso actual de estas técnicas involucran datos con incertidumbre y requieren combinar estos métodos con técnicas estadísticas. Proseguir esta línea de desarrollo no entraba en los planes de este trabajo y hubiera requerido tiempo y espacio no disponibles.

Bibliografía

- [1] H. Brézis, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad Textos, Madrid, España, 1984. (Cited on p. 1)
- [2] Y. Censor, *Row-Action Methods for Huge and Sparse Systems and their Applications*, SIAM Review 23(4), 1981, pp. 444–466. (Cited on pp. III, 23)
- [3] R. Escalante y M. Raydan, *Alternation Projection Methods*, SIAM, Philadelphia, USA, 2011. (Cited on pp. III, 23)
- [4] R. Gordon, R. Berman y G. T. Herman, *Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for Three-dimensional Electron Microscopy and X-ray Photography*, J. Theor. Biol. 29, 1970, pp. 471. (Cited on p. 36)
- [5] I. Halperin, *The Product of Projections Operators*, Acta Sci. Math. (Szeged), 1962, 23:93-99. (Cited on p. 11)
- [6] G. T. Herman, *ART: Mathematics and Applications. A Report on the Mathematical Foundation and on the Applicability to Real Data of the Algebraic Reconstruction Techniques*, J. Theor. Biol. 42, 1973, pp. 1–32. (Cited on p. 36)
- [7] B.V. Limaye, *Functional Analysis*, Wiley, USA, 1981. (Cited on p. 1)
- [8] J. Von. Neumann, *Functional Operators. Vol.II. The Geometry of orthogonal Spaces.*, Princeton University Press, Princeton, USA, 1950. (Cited on p. 9)
- [9] K. Tanabe, *Projection method for solving a singular system of linear equations and its applications*, Numer. Math. 17, 1971, pp. 203–214. (Cited on pp. 41, 42)
- [10] A. Vera López y P. Alegría Ezquerra, *Un curso de Análisis Funcional*, AVL, Murcia, España, 1997. (Cited on p. 1)

Apéndice A

Programas de Matlab

En este apéndice incluimos los programas Matlab de los métodos de Kaczmarz, Cimmino, Hildreth y MAMS que hemos utilizado.

Kaczmarz.m

```
1 function [solsp, niter] = Kaczmarz(Asp, bsp, x0, tol,
   normmax, omega)
2 %
3 nrows = size(Asp,1);
4 for i = 1 : nrows
5     norm(i) = norm(Asp(i,:))^2;
6 end
7 dxnorm = 1.0e20;
8 niter = 0;
9 while ((dxnorm > tol) && (niter < normmax))
10     for i = 1 : nrows
11         if (norm(Asp(i,:),inf) == 0.0)
12             break
13         end
14         x1 = x0+omega*((bsp(i)-Asp(i,:)*x0)/norm(i))*
           (Asp(i,:)');
15         dxnorm = norm(x1-x0, inf);
16         x0 = x1;
17         niter = niter+1;
18     end
19 end
20 solsp = x0;
21 end
```

Cimmino.m

```
1 function [solsp, niter] = Cimmino(Asp, bsp, x0, tol,
   norm, nmax)
2 %
3 nrows = size(Asp,1);
4 norm = zeros(nrows,1);
5 for i = 1 : nrows
6     norm(i) = norm(Asp(i,:))^2;
7 end
8 dxnorm = 1.0e20;
9 niter = 0;
10 while ((dxnorm > tol) && (niter < nmax))
11     dx = zeros(size(x0));
12     for i = 1 : nrows
13         if (norm(Asp(i,:),inf) == 0.0)
14             break
15         end
16         dx = dx + ((bsp(i) - Asp(i,:) * x0)/norm(i)) *
           (Asp(i,:)');
17     end
18     dx = dx/nrows;
19     x0 = x0 + dx;
20     dxnorm = norm(dx,inf);
21     niter = niter+1;
22 end
23 solsp = x0;
24 end
```

Hildreth.m

```
1 function [solsp, niter] = Hildreth(Asp, bsp, z0, tol,
   norm, nmax, omega)
2 % HILDRETH encuentra la solucion de norma minima de
3 % A x <= b. z0 tiene componentes positivas;
4 % x0 = -A^T z0
5 %
6 nrows = size(Asp,1);
7 for i = 1 : nrows
8     norm(i) = norm(Asp(i,:))^2;
9 end
10 x0 = - Asp'*z0;
11 dxnorm = 1.0e20;
```



```

12 niter = 0;
13 while ((dxnorm > tol) && (niter < nmax))
14     for i = 1 : nrows
15         if (norm(Asp(i,:),inf) == 0.0)
16             break
17         end
18         delta = omega*((bsp(i) - Asp(i,:) * x0)/norm(i
19             ));
20         if (delta < z0(i))
21             x1 = x0 + delta * (Asp(i,:)');
22             z1(i) = z0(i) - delta;
23         else
24             x1 = x0 + z0(i) * (Asp(i,:)');
25             z1(i) = z0(i) - delta;
26         end
27         dxnorm = norm(x1-x0, inf);
28         x0 = x1;
29         z0 = z1;
30         niter = niter+1;
31     end
32 solsp = x0;
33 end

```

MAMS.m

```

1 function [solsp, niter] = MAMS(Asp, bsp, x0, tol, nmax
2     , omega)
3 %
4 nrows = size(Asp,1);
5 for i = 1 : nrows
6     norm(i) = norm(Asp(i,:))^2;
7 end
8 dxnorm = 1.0e20;
9 niter = 0;
10 while ((dxnorm > tol) && (niter < nmax))
11     for i = 1 : nrows
12         if (norm(Asp(i,:),inf) == 0.0)
13             break
14         end
15         delta = omega*((bsp(i) - Asp(i,:) * x0)/norm(i

```

```
16         x1 = x0 + delta * (Asp(i,:)');
17     else
18         x1 = x0;
19     end
20     dxnorm = norm(x1-x0, inf);
21     x0 = x1;
22     niter = niter+1;
23 end
24 end
25 solsp = x0;
26 end
```