



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**Descomposición de ideales monomiales vía grafos y complejos
simpliciales**

Autor:

Elvira Pérez Callejo

Tutor/es:

Philippe Giménez

*Dedicado a
mi familia*

Resumen

Los ideales monomiales en un anillo de polinomios forman una familia importante de ideales ya que varios problemas sobre ideales generales pueden reducirse al caso de un ideal monomial mediante un cálculo de base de Gröbner. Este trabajo se centra en la descomposición de un ideal monomial como intersección de ideales monomiales irreducibles. Tal descomposición es única si se pide que sea irredundante y permite obtener una descomposición primaria. Los ideales monomiales libres de cuadrados tienen especial interés ya que se les puede asociar estructuras combinatorias que permiten determinar la descomposición irreducible irredundante. A un ideal de aristas (edge ideal) se le representa con un grafo simple mientras la estructura combinatoria asociada a un ideal de Stanley-Reisner es un complejo simplicial. También se presenta un método puramente algebraico basado en la dualidad de Alexander para obtener la descomposición irreducible irredundante.

Índice general

Introducción	1
1. Ideales monomiales	5
1.1. Propiedades fundamentales	5
1.1.1. Conceptos básicos	5
1.1.2. Generadores	7
1.2. Operaciones en los ideales monomiales.	12
1.2.1. Intersección	12
1.2.2. Radical y radical monomial	12
1.2.3. Cociente	16
1.2.4. Potencia en corchete	19
1.3. Ideales m-irreducibles e irreducibles	20
1.4. Descomposiciones m-irreducibles e irreducibles	26
2. Métodos combinatorios	31
2.1. Ideales monomiales libres de cuadrados	31
2.2. Grafos e ideales de aristas	33
2.3. Descomposición de los ideales de aristas	34
2.4. Complejos simpliciales e ideales de Stanley-Reisner	38
2.5. Descomposición de los ideales de Stanley-Reisner	45
2.6. Ideales de facetas y su descomposición	49
3. Dualidad de Alexander	53
3.1. Dualidad en ideales monomiales libres de cuadrados	53
3.2. Dualidad en ideales monomiales arbitrarios	54
Un ejemplo que lo resume todo	62
Bibliografía	63

Introducción

En este Trabajo de Fin de Grado se tratan los ideales monomiales y sus descomposiciones irreducibles irredundantes. Es conocida la relación que hay entre el álgebra conmutativa y la combinatoria, por lo que tienen un interés especial los ideales monomiales libres de cuadrados al poder verse dentro de la combinatoria como grafos (o, más generalmente, como complejos simpliciales), que son objetos más visuales. Esto desvela otras vías para analizar las descomposiciones irreducibles irredundantes, ya que el estudio de las descomposiciones por métodos algebraicos es, en muchas ocasiones, largo y tedioso. Por esta razón se buscará extraer del análisis de estos grafos (o complejos simpliciales) la mayor cantidad posible de información que pueda expresarse en función de los monomios que generan al ideal.

Este trabajo consta de tres partes:

- 1 En la primera, se demuestra que si I es un ideal monomial sobre un anillo de polinomios en d variables, entonces I admite (salvo ordenación) un único sistema minimal de generadores monomiales, es decir, $I = \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle$. Además, este sistema minimal de generadores no depende del anillo de coeficientes tomado para construir el anillo de polinomios (siempre y cuando el ideal sea monomial visto en ese anillo de polinomios, un hecho que sí depende del anillo de coeficientes).

Para probar estas afirmaciones, se considerará durante todo el primer capítulo que A es un anillo conmutativo unitario y se trabajará sobre $R = A[X_1, \dots, X_d]$. Se probará que muchas de las operaciones entre ideales son cerradas para el conjunto de los ideales monomiales sin depender del anillo de coeficientes, y que cuando sí dependan del anillo de coeficientes para ser operaciones cerradas, se pueden definir unas operaciones alternativas, muy similares, que son cerradas y no dependen de A . En particular, en el Teorema 1.1.20 se demuestra la existencia y unicidad del sistema minimal de generadores monomiales independientemente de las características del anillo de coeficientes.

Cuando una propiedad o un objeto asociados a un ideal monomial

dependen exclusivamente de los monomios que generan al ideal, no es relevante el anillo de coeficientes. Entonces, se puede considerar en cada ocasión el anillo de coeficientes más conveniente. Puede considerarse el anillo de los enteros \mathbb{Z} , o un cuerpo como \mathbb{Q} o \mathbb{R} ya que entonces podríamos utilizar algoritmos basados en bases de Gröbner que están implementados en programas especializados, o incluso el cuerpo de dos elementos para facilitar los cálculos.

- II En la segunda parte, se probará que la descomposición irreducible irredundante de un ideal monomial es única (salvo ordenación de las componentes), y se encontrarán métodos combinatorios de calcularla.

Para ello se tratan los ideales monomiales libres de cuadrados, ya que se pueden relacionar con elementos combinatorios como grafos y complejos simpliciales. Analizando las coberturas de vértices minimales y las facetas de estas estructuras (conceptos que se definen en el capítulo 2) se obtiene directamente la descomposición irreducible irredundante buscada.

Es un resultado muy útil, ya que aunque en el Lema 1.3.4 se proporciona un algoritmo muy sencillo de obtener una descomposición irreducible, esta está generalmente muy lejos de ser irredundante, como se observa en el Ejemplo 1.4.10 y despejar de ahí una descomposición irredundante no es una tarea sencilla desde un punto de vista computacional.

Por eso, disponer de métodos que calculan directamente la descomposición irredundante es una herramienta valiosa.

- III En la última parte, se describirá la dualidad de Alexander, que proporciona un método eficiente para obtener directamente la descomposición irreducible irredundante de un ideal monomial arbitrario: si I y J son dos ideales monomiales que son el dual de Alexander el uno del otro, entonces el sistema minimal de generadores monomiales de uno está relacionado con la descomposición irreducible irredundante del otro. Este método se definió a priori para complejos simpliciales e ideales de Stanley-Reisner pero luego se generalizó para ideales monomiales arbitrarios, no solo para aquellos que son libres de cuadrados.

El interés de este resultado radica en que se obtiene una descomposición irreducible irredundante de J si y solo si se parte de un sistema minimal de generadores monomiales de I . Por tanto es un método muy eficiente para calcular la descomposición irreducible irredundante de cualquier ideal monomial directamente a partir de su sistema minimal de generadores monomiales.

Se termina este trabajo con un ejemplo que ilustra los resultados principales obtenidos a lo largo de esta memoria.

Capítulo 1

Ideales monomiales

Para comenzar se definirán y enunciarán algunos resultados necesarios sobre ideales monomiales. Se trabajará con anillos de polinomios, sus ideales y los generadores de estos. Durante todo el capítulo, A es un anillo no nulo conmutativo y unitario, y $R = A[X_1, X_2, \dots, X_d]$ el anillo de polinomios en d variables con coeficientes en A . Se exige que $A \neq 0$ ya que si $A = 0$ entonces $R = A[X_1, \dots, X_d] = 0$ y todo ideal $J \subseteq R$ cumple que $J = 0 = R$, lo que tiene poco interés.

A lo largo del capítulo, habrá muchos resultados que no se demostrarán, todos ellos se pueden encontrar entre los capítulos 1-3 de [11].

1.1. Propiedades fundamentales

1.1.1. Conceptos básicos

Para comenzar se van a introducir una serie de conceptos, que serán necesarios para el desarrollo del trabajo.

Definición 1.1.1. Un ideal monomial en R es un ideal de R que puede ser generado por monomios en X_1, X_2, \dots, X_d .

Notación 1.1.2. Para cada ideal monomial $I \subseteq R$, se denotará $[[I]]$ el conjunto de todos los monomios contenidos en I . Se tiene que $[[I]] = I \cap [[R]]$.

Notación 1.1.3. $X_1 X_2 \dots X_d$ se expresará como \underline{X} y dado $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_d^{n_d}$ un monomio en R , se denotará como $\underline{X}^{\underline{n}}$ siendo $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$.

Aunque $[[I]]$ no es un ideal, se tiene que $I = \langle [[I]] \rangle$, es decir, I es el ideal engendrado por $[[I]]$.

Teorema 1.1.4. *Si se tienen $\underline{X}^n, \underline{X}^{i_1}, \underline{X}^{i_2}, \dots, \underline{X}^{i_m}$ monomios en R , entonces*

$$\underline{X}^n \in \langle \underline{X}^{i_1}, \underline{X}^{i_2}, \dots, \underline{X}^{i_m} \rangle \Leftrightarrow \underline{X}^n \in \langle \underline{X}^{i_j} \rangle$$

para algún $j, 1 \leq j \leq m$; es decir \underline{X}^n está en un ideal monomial finitamente generado si y solo si es múltiplo de alguno de los monomios generadores de ese ideal.

Más adelante, en la sección 1.1.2, se demostrará que no es necesaria la hipótesis de que el ideal esté finitamente generado, o bien aplicando el Lema de Dickson (1.1.13) si el anillo no es noetheriano, o bien aplicando el Teorema de la Base de Hilbert, cuando sí se tenga noetherianidad.

Definición 1.1.5. Para cada polinomio

$$f = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{N}^d \\ \text{finita}}} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}} \in R,$$

se define el soporte de f como

$$\gamma(f) = \{\underline{n} \in \mathbb{N}^d \mid a_{\underline{n}} \neq 0\}.$$

Nota 1.1.6. En general, $\gamma(f)$ es un conjunto finito tal que $f = \sum_{\underline{n} \in \gamma(f)} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}}$.

Además, $\gamma(f) = \emptyset$ si y solo si $f = 0$.

Lema 1.1.7. *Sea I un ideal en R . Entonces, son equivalentes:*

- (I) I es un ideal monomial.
- (II) Para cada polinomio $f \in I$, $\underline{X}^{\underline{n}} \in I, \forall \underline{n} \in \gamma(f)$.

Definición 1.1.8. El grafo de un ideal monomial I es

$$\Gamma(I) = \{\underline{n} \in \mathbb{N}^d \mid \underline{X}^{\underline{n}} \in I\}.$$

Nota 1.1.9. En el segundo capítulo del trabajo, se usará la palabra grafo para denotar otro objeto. Hay autores que llaman a $\Gamma(I)$ “exponent set”, pero se considera que no da lugar a confusión la repetición del término, luego se mantendrá el llamarlo grafo.

Nota 1.1.10. Igual que con los naturales se tiene que dado $a \in \mathbb{N}$,

$$\langle a \rangle = \{b \in \mathbb{N} \mid b = k \cdot a \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\},$$

es posible, dado $(n_1, n_2, \dots, n_d) = \underline{n} \in \mathbb{N}^d$, definir

$$\langle \underline{n} \rangle = \{\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d \mid m_i \geq n_i \text{ para todo } i, 1 \leq i \leq d\}.$$

La Definición 1.1.8 es muy útil ya que permite representar los ideales monomiales, al menos en 2 variables, como un subconjunto de \mathbb{N}^2 como se puede ver a continuación.

Lema 1.1.11. Si $I = \langle \underline{X}^{n_1}, \underline{X}^{n_2}, \dots, \underline{X}^{n_m} \rangle$ entonces

$$\Gamma(I) = \langle \underline{n}_1 \rangle \cup \langle \underline{n}_2 \rangle \cup \dots \cup \langle \underline{n}_m \rangle.$$

Ejemplo 1.1.12. Sea el ideal monomial $I = \langle X^4, X^3Y, Y^2 \rangle$. Entonces $\Gamma(I) = \langle (4, 0) \rangle \cup \langle (3, 1) \rangle \cup \langle (0, 2) \rangle$ y en 1.1 se puede observar como se representa en \mathbb{N}^2 .

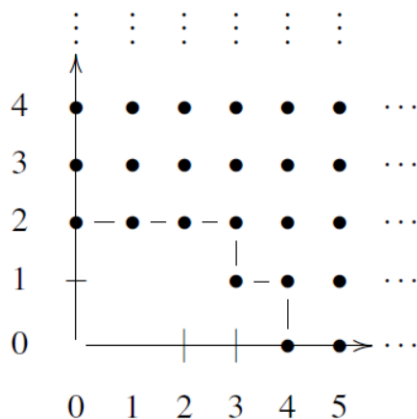


Figura 1.1: $I = \langle X^4, X^3Y, Y^2 \rangle$

El grafo correspondiente a la suma de ideales es la unión de los grafos de todos los ideales. Gráficamente, se puede observar que el grafo anterior es la unión de los grafos de $I_1 = X^4$, $I_2 = X^3Y$ e $I_3 = Y^2$, y que $I = I_1 + I_2 + I_3$.

1.1.2. Generadores

Hay apartados en la sección anterior que sólo se pueden establecer para ideales monomiales que sean finitamente generados, como 1.1.4 o 1.1.11. El siguiente resultado muestra que la suposición de generación finita es innecesaria ya que es una condición inherente en los ideales monomiales:

Lema 1.1.13 (Lema de Dickson). *Todo ideal monomial de R está finitamente generado, es más, está generado por un conjunto finito de monomios.*

Demostración. Sea $I \subseteq R$ un ideal monomial, se puede asumir $I \neq 0$. La prueba de que I está finitamente generado por monomios se hace por inducción sobre el número de variables d :

- $d = 1$: En este caso $R = A[X]$. Se toma $r = \min\{e \geq 0 \mid X^e \in I\}$.
Por definición $X^r \in I$ lo que implica que $\langle X^r \rangle \subseteq I$. Solo falta probar que $I \subseteq \langle X^r \rangle$ para tener la igualdad, ya que significaría que I está generado por un monomio. Como se tiene que $I = \langle [[I]] \rangle$, basta con probar que $\langle X^r \rangle \supseteq [[I]]$. Para ello, se toma $X^s \in I$, entonces $s \geq r$ por definición de r y $X^s \in \langle X^r \rangle$.
- Asumiendo $d \geq 2$ y que todo ideal monomial en $A[X_1, \dots, X_{d-1}]$ es finitamente generado por monomios, se toma un ideal monomial $I \subseteq A[X_1, \dots, X_d]$. Sea

$$G = \{\text{monomios } f \in A[X_1, \dots, X_{d-1}] \mid \exists a \geq 0 \text{ que cumple } fX_d^a \in I\}$$

y sea $J = \langle G \rangle$. J es un ideal monomial en $A[X_1, \dots, X_{d-1}]$ y, por la hipótesis de inducción, está engendrado por un conjunto finito de monomios en $A[X_1, \dots, X_{d-1}]$, es decir $J = \langle S \rangle$ con $S \subseteq G$ finito. Para cada $f \in S$ existe un entero $e_f \geq 0$ tal que $fX_d^{e_f} \in I$. Como el conjunto S es finito, entonces existe un entero $e \geq 0$ tal que $fX_d^e \in I, \forall f \in S$.

Para cada $m = 0, \dots, e - 1$, se define

$$G_m = \{\text{monomios } g \in A[X_1, \dots, X_{d-1}] \mid gX_d^m \in I\}$$

y $J_m = \langle G_m \rangle$. J_m es un ideal monomial en $A[X_1, \dots, X_{d-1}]$ y, por inducción está engendrado por un número finito de monomios, es decir $J_m = \langle G_m \rangle$ con S_m un subconjunto finito de $[[G_m]]$.

Sea I' el ideal de $A[X_1, \dots, X_d]$ generado por los monomios fX_d^e y gX_d^m con $f \in S$ y $g \in S_m$ para $m = 0, \dots, e - 1$:

$$I' = \left\langle \{fX_d^e \mid f \in S\} \cup \left(\bigcup_{m=0}^{e-1} \{gX_d^m \mid g \in S_m\} \right) \right\rangle.$$

Se tiene que el conjunto generador de I' es finito. Por definición, se tiene que $fX_d^e, gX_d^m \in I$ para cada $f \in S$ y $g \in S_m$, así que $I' \subseteq I$.

A continuación se prueba que $I' = I$, por lo que se concluye que I está generado finitamente por monomios, lo que concluye la prueba:

Basta con probar que $I \subseteq I'$. Como $I = \langle [[I]] \rangle$, es suficiente probar que $[[I]] \subseteq I'$, así que se toma $\underline{X}^p \in [[I]]$, siendo $\underline{p} = (p_1, \dots, p_d)$.

- (I) Si $p_d \geq e$, $X_1^{p_1} \cdots X_{d-1}^{p_{d-1}} \in G \subseteq J = \langle S \rangle$ en $A[X_1, \dots, X_{d-1}]$. Por el Teorema 1.1.4 $X_1^{p_1} \cdots X_{d-1}^{p_{d-1}} \in \langle f \rangle$ para algún $f \in S$. Escribiendo $X_1^{p_1} \cdots X_{d-1}^{p_{d-1}} = ff'$ para algún $f' \in A[X_1, \dots, X_{d-1}]$ se tiene el resultado buscado:

$$\underline{X}^p = X_1^{p_1} \cdots X_{d-1}^{p_{d-1}} X_d^{p_d} = ff' X_d^e X_d^{p_d-e} = (f X_d^e)(f' X_d^{p_d-e}) \in \langle f X_d^e \rangle \subseteq I'$$

- (II) Si $p_d < e$ entonces $X_1^{p_1} \cdots X_{d-1}^{p_{d-1}} \in G_{p_d} \subseteq J_{p_d} = \langle S_{p_d} \rangle$. El Teorema 1.1.4 implica que $X_1^{p_1} \cdots X_{d-1}^{p_{d-1}} \in \langle g \rangle$ para algún $g \in S_{p_d}$. Escribiendo $X_1^{p_1} \cdots X_{d-1}^{p_{d-1}} = gg'$ para algún $g' \in A[X_1, \dots, X_{d-1}]$ se obtiene

$$\underline{X}^p = X_1^{p_1} \cdots X_{d-1}^{p_{d-1}} X_d^{p_d} = gg' X_d^{p_d} = (g X_d^{p_d})(g') \in \langle g X_d^{p_d} \rangle \subseteq I'$$

como queríamos demostrar. □

Algunas consecuencias del Lema de Dickson son:

Corolario 1.1.14. *Sea $I = \langle S \rangle$, con $S \subseteq [[R]]$. Entonces existe un conjunto finito $\{s_1, \dots, s_n\} \subseteq S$ tal que $I = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$.*

Teorema 1.1.15. *Son ciertas las siguientes afirmaciones:*

- I (CCA) *Dada una cadena $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ de ideales monomiales en R , existe un entero $N \geq 1$ tal que $I_N = I_{N+1} = \cdots$.*
- II *Dado un conjunto no-vacío Σ de ideales monomiales en R , existe un ideal $I \in \Sigma$ tal que para todo $J \in \Sigma$, si $I \subseteq J$, entonces $I = J$. Es más, para todo $K \in \Sigma$, existe un ideal $I \in \Sigma$ tal que $K \subseteq I$ y tal que para todo $J \in \Sigma$, si $I \subseteq J$ entonces $I = J$.*

Nota 1.1.16. Se recuerda que un anillo R es noetheriano si satisface alguna de las tres condiciones siguientes que son equivalentes:

- I Todo ideal de R está finitamente generado.
- II Todo conjunto no vacío de ideales de R contiene un elemento maximal.
- III Toda cadena ascendente de ideales de R es estacionaria.

Nota 1.1.17. El Teorema 1.1.15 se asemeja a la definición de anillo noetheriano, restringiéndose a los ideales monomiales. Esto afianza la idea principal del trabajo, que es estudiar estos ideales, ya que cumplen unas propiedades muy valoradas en el estudio de los mismos, independientemente del anillo de coeficientes en el que se construyen.

El Teorema de la Base de Hilbert afirma que si un anillo A es noetheriano, entonces $A[X]$ también lo es, lo cual implica directamente que si A es noetheriano, entonces $R = A[X_1, \dots, X_d]$ lo es.

Como ya se ha probado este teorema en la asignatura de “Álgebra conmutativa y computacional”, no se procede a escribir aquí su demostración. La prueba mostrada en clase utiliza argumento clásicos del Álgebra Conmutativa tal como se hace en [12].

El Lema 1.1.13 se deduce de forma directa del Teorema de la Base de Hilbert cuando A es noetheriano pero el Lema de Dickson es cierto sin ninguna hipótesis sobre el anillo A y por eso se ha incluido aquí su demostración. También es cierto al revés, es decir, se puede obtener el Teorema de la Base de Hilbert a partir del Lema de Dickson tal y como se demuestra en el Teorema 4 de la sección 5 del capítulo 2 en [3].

Estos resultados permiten estudiar ideales monomiales a través de listas finitas de monomios. Además, la definición siguiente da la clave para poder estudiar listas finitas de la manera más eficiente.

Definición 1.1.18. Sea I un ideal de R , y sean $\underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_m} \in [[I]]$ tales que $I = \langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_m} \rangle$. La lista $\{\underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_m}\}$ es un sistema minimal de generadores monomiales (SMGM) de I si cada $j \in \{1, \dots, m\}$ satisface

$$\langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_{j-1}}, \underline{X}^{i_{j+1}}, \dots, \underline{X}^{i_m} \rangle \subsetneq I.$$

La prueba de la siguiente proposición (que se emplea en la demostración del Teorema 1.1.20) se puede leer en [11].

Proposición 1.1.19. Sea I un ideal monomial de R y sean los monomios $\underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_m} \in [[I]]$ tales que $I = \langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_m} \rangle$. Entonces son equivalentes:

- I \underline{X}^{i_j} no es múltiplo de \underline{X}^{i_k} si $j \neq k$.
- II Cada $j \in \{1, \dots, m\}$ satisface $\underline{X}^{i_j} \notin \langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_{j-1}}, \underline{X}^{i_{j+1}}, \dots, \underline{X}^{i_m} \rangle$.
- III El sistema monomial de generadores $\{\underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_m}\}$ es minimal.

Teorema 1.1.20. Sea I un ideal monomial de R , entonces I admite un SMGM, que es único salvo por el orden.

Demostración. La demostración consta de dos partes:

I Existencia:

Sea I un ideal monomial, por definición, existe un sistema de generadores monomial de I , es decir $I = \langle S \rangle$, para algún $S \subseteq [[R]]$. El Corolario 1.1.14 afirma que $I = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$, siendo s_i un monomio de S , $\forall i$. Si el conjunto $\{s_1, \dots, s_n\} = S'$ es redundante, eso significa por la Proposición 1.1.19 que existe un índice i tal que $\langle s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n \rangle = I$, y como S' es un conjunto finito, se puede repetir este proceso hasta obtener un SMGM en un número finito de pasos.

II Unicidad:

Supongamos que $I = \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \langle t_1, \dots, t_m \rangle$, siendo $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ y $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ dos SMGM.

Se fija un índice i . Como $s_i \in I = \langle T \rangle$, entonces por 1.1.4 se tiene que $s_i \in \langle t_j \rangle$ para algún j . Por el mismo razonamiento, existe un índice k tal que $t_j \in \langle s_k \rangle$. Por la transitividad de la división en los monomios, entonces $s_i \in \langle s_k \rangle$, y como S es un SMGM, debe ser $i = k$ por lo comentado en 1.1.19. Se tiene entonces que $s_i | t_j$ y $t_j | s_i$, por lo que $s_i = t_j$.

Existe entonces una permutación σ de forma que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe un $j = \sigma(i)$ tal que $s_i = t_j$. Como los s_i son todos distintos entre sí, y los t_j también, se tiene que $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, y haciendo un razonamiento simétrico, existe otra permutación $\delta : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que $s_{\delta(j)} = t_j$ y es inyectiva. Entonces $m = n$ y $\delta = \sigma^{-1}$ ya que $m = n$ implica que σ es sobreyectiva. Luego $\#S = \#T$ y $s_i = t_{\sigma(i)}$, como queríamos demostrar.

□

Nota 1.1.21. Al ser constructiva esta demostración se ha obtenido un algoritmo para sacar el único SMGM de I partiendo de un sistema de generadores monomiales de I arbitrario. Este algoritmo solo manipula monomios y es independiente del anillo de coeficientes A . Existen otros algoritmos para determinar el SMGM, uno de ellos consiste en calcular la base de Gröbner reducida del ideal respecto de un orden monomial arbitrario. Para ello se deben tomar coeficientes en un cuerpo, lo cual no supone ninguna traba ya que esto siempre es posible (en esta demostración se ha visto que el SMGM es único si el ideal es monomial, sea cual sea A , luego se puede considerar un cuerpo). No se entra en detalle sobre este tema ya que se aleja del estudio principal del trabajo. El método de la base de Gröbner también permite determinar si un ideal es monomial o no, lo cual es útil cuando no se dispone de

un sistema de generadores monomial y se desconoce si el ideal es monomial o no. El algoritmo basado en bases de Gröbner permite determinar si el ideal es o no monomial, y si lo es, proporciona su SMGM.

1.2. Operaciones en los ideales monomiales.

En esta sección se estudiarán las propiedades que cumplen las operaciones usuales dentro del conjunto de los ideales monomiales cuando son operaciones cerradas para ese conjunto. Cuando no sean cerradas se definirá otra operación similar a la anterior que sí lo sea en el conjunto de los ideales monomiales.

1.2.1. Intersección

Teorema 1.2.1. *Si I_1, \dots, I_n son ideales monomiales de R , entonces la intersección $I_1 \cap \dots \cap I_n$ está generada por el conjunto de monomios en $I_1 \cap \dots \cap I_n$. En particular, el ideal $I_1 \cap \dots \cap I_n$ es un ideal monomial de R y $[[I_1 \cap \dots \cap I_n]] = [[I_1]] \cap \dots \cap [[I_n]]$.*

El resultado anterior implica $\Gamma(I_1 \cap \dots \cap I_n) = \Gamma(I_1) \cap \dots \cap \Gamma(I_n)$.

Proposición 1.2.2. *Sean $\underline{X}^n, \underline{X}^m \in [[R]]$, entonces se tiene*

$$\langle \underline{X}^n \rangle \cap \langle \underline{X}^m \rangle = \langle \text{mcm}(\underline{X}^n, \underline{X}^m) \rangle$$

donde $\text{mcm}(\underline{X}^n, \underline{X}^m)$ es el mínimo común múltiplo de \underline{X}^n y de \underline{X}^m , es decir $\text{mcm}(\underline{X}^n, \underline{X}^m) = \underline{X}^p$ donde $p_i = \max\{n_i, m_i\}$.

Teorema 1.2.3. *Si $I = \langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_m} \rangle$ y $J = \langle \underline{X}^{j_1}, \dots, \underline{X}^{j_n} \rangle$, entonces $I \cap J$ está generado por el conjunto de monomios*

$$\{\text{mcm}(\underline{X}^{i_k}, \underline{X}^{j_l}) \mid 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n\}.$$

1.2.2. Radical y radical monomial

Una noción básica del álgebra conmutativa es la siguiente:

Definición 1.2.4. Sea I un ideal de R . El radical de I es el conjunto

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid x^n \in I \text{ para algún } n \geq 1\}.$$

El radical de un ideal monomial no es un ideal monomial si existen elementos nilpotentes en el anillo de coeficientes. Por esta razón, en el segundo capítulo del trabajo se considerará A un dominio de integridad (DI), evitando esta situación, y a continuación, se explica en un ejemplo el porqué de esta desigualdad.

Ejemplo 1.2.5. Para ilustrar esta patología, se toma el anillo de polinomios con coeficientes en \mathbb{Z}_4 en una sola variable, donde el ideal $I = \langle X \rangle$ es un ideal monomial, pero su radical $\sqrt{I} = \langle 2, X \rangle$ no lo es. Esto se debe a que 2 es un elemento nilpotente en \mathbb{Z}_4 , y como el cero está en todo ideal, en particular aparece en el radical, luego el 2 también se encuentra en el radical ya que $2^2 = 0$.

En general todos los elementos nilpotentes se encuentran en el radical (porque $\forall x$ nilpotente $\exists n | x^n = 0$), lo que implica que el radical de un ideal monomial no es un ideal monomial ya que dichos elementos forman parte del anillo de coeficientes.

La siguiente definición, no necesaria en \mathbb{Z} o \mathbb{R} , evita esa patología en otros anillos, como el del ejemplo anterior en el cual se ha visto que considerando la operación usual de hallar el radical no se dispone de una operación cerrada en el conjunto de los ideales monomiales.

Definición 1.2.6. Sea I un ideal monomial en R . El radical monomial (o m-radical) de I es el ideal monomial $\text{m-rad}(I) = \langle S \rangle$ donde

$$S = \sqrt{I} \cap [[R]] = \{ \underline{X}^m \in [[R]] \mid (\underline{X}^m)^n \in I \text{ para algún } n \geq 1 \}.$$

En el ejemplo visto anteriormente, $\text{m-rad}(I) = \langle X \rangle$, por lo que, si A tiene elementos nilpotentes, $\text{m-rad}(I) \subsetneq \sqrt{I}$.

En los DI, casos más interesantes como \mathbb{R} o \mathbb{Z} , se ha observado que estas definiciones coinciden. De hecho coinciden siempre que \sqrt{I} sea un ideal monomial. Los enunciados que se añaden a continuación, aunque vienen definidos para el m-radical, son válidos para el radical si A es DI.

Proposición 1.2.7. Sean I, J ideales monomiales en R :

1. $J \subseteq \text{m-rad}(J)$.
2. $[[\text{m-rad}(J)]] = \sqrt{J} \cap [[R]]$.
3. Si $I \subseteq J$, entonces $\text{m-rad}(I) \subseteq \text{m-rad}(J)$.
4. $\text{m-rad}(J) = \text{m-rad}(\text{m-rad}(J))$.

5. $\text{m-rad}(J) = R$ si y solo si $J = R$.
6. $\text{m-rad}(J) = 0$ si y solo si $J = 0$.
7. Si n es un entero positivo, entonces $\text{m-rad}(J) = \text{m-rad}(J^n)$.
8. $\text{m-rad}(I + J) = \text{m-rad}(I) + \text{m-rad}(J)$.
9. $\text{m-rad}(I \cdot J) = \text{m-rad}(I) \cdot \text{m-rad}(J)$.

Las siguientes definiciones están dirigidas a la búsqueda de sistemas generadores monomiales para $\text{m-rad}(J)$ en función de los generadores de J .

Definición 1.2.8. Se define el soporte de $\underline{X}^n \in [[R]]$ como

$$\text{Supp}(\underline{X}^n) = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq d \text{ y } n_i \neq 0\}.$$

La definición que se había dado de soporte de un polinomio en 1.1.5 era $\gamma(f) = \{\underline{n} \in \mathbb{N}^d \mid a_{\underline{n}} \neq 0\}$, luego no da lugar a equívoco ya aunque no sean exactamente el mismo concepto ambos proporcionan informaciones similares. Un ejemplo de ello:

Ejemplo 1.2.9. Tomando el polinomio $f = X^2 + XY^2 + Y^2Z^3 - XY^2Z^3$ en $A[X, Y, Z]$, se tiene que

$$\gamma(f) = \{(2, 0, 0), (1, 2, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3)\} \subseteq \mathbb{N}^3.$$

Si se calculan los soportes de los monomios que contiene f se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Supp}(X^2) &= \{1\} & \text{Supp}(XY^2) &= \{1, 2\} \\ \text{Supp}(Y^2Z^3) &= \{2, 3\} & \text{Supp}(XY^2Z^3) &= \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

La información que proporciona el soporte de un monomio indica las variables que aparecen en él, mientras que el soporte de un polinomio indica además cuál es el exponente de cada una.

Definición 1.2.10. Se define la reducción de \underline{X}^n como el monomio

$$\text{red}(\underline{X}^n) = \prod_{i \in \text{Supp}(\underline{X}^n)} X_i.$$

En otras palabras, el soporte de un monomio es el conjunto de índices i tales que $X_i \mid \underline{X}^n$. La reducción de un monomio es el producto de todas las variables que lo dividen:

$$\text{red}(\underline{X}^n) = \prod_{X_i \mid \underline{X}^n} X_i.$$

Por ejemplo, si $I = \langle X_1^4 X_2 X_4^3 \rangle$ entonces

$$\text{Supp}(I) = \{1, 2, 4\} \text{ y } \text{red}(I) = X_1 X_2 X_4.$$

Proposición 1.2.11. *Sea J un ideal monomial en R y $\underline{X}^m \in [[R]]$. Entonces:*

- I *Existe un entero $n \geq 1$ tal que $\text{red}(\underline{X}^m)^n \in \langle \underline{X}^m \rangle$.*
- II *Si $\underline{X}^m \in J$, entonces $\text{red}(\underline{X}^m) \in \text{m-rad}(J)$.*

Demostración. I Sea $n = \max\{m_1, \dots, m_d\}$.

Se tiene que $\text{Supp}(\underline{X}^m) = \{i_1, \dots, i_k\}$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d$. Reordenando las variables si es necesario, se puede asumir que $\text{Supp}(\underline{X}^m) = \{1, \dots, k\}$. De esta forma $\text{red}(\underline{X}^m) = X_1 \cdots X_k$ y $\underline{X}^m = X_1^{m_1} \cdots X_k^{m_k}$. Como $n \geq m_i$ para $i = 1, \dots, d$:

$$\underline{X}^m = X_1^{m_1} \cdots X_k^{m_k} | X_1^n \cdots X_k^n = \text{red}(\underline{X}^m)^n$$

por lo que $\text{red}(\underline{X}^m)^n \in \langle \underline{X}^m \rangle$, como queríamos demostrar.

- II Asumiendo que $\underline{X}^m \in J$, por el primer apartado se tiene que existe un entero $n \geq 1$ tal que $\text{red}(\underline{X}^m)^n \in \langle \underline{X}^m \rangle \subseteq J$. De esta manera se obtiene $\text{red}(\underline{X}^m) \in \text{m-rad}(J)$. □

Teorema 1.2.12. *Si $S \subseteq [[R]]$ y $J = \langle S \rangle$, entonces*

$$\text{m-rad}(J) = \langle \{\text{red}(\underline{X}^n) \mid \underline{X}^n \in S\} \rangle.$$

Demostración. Sea $T = \{\text{red}(\underline{X}^m) \mid \underline{X}^m \in S\}$ y $K = \langle T \rangle$.

Cada $\underline{X}^m \in S$ cumple, por el lema anterior $\text{red}(\underline{X}^m) \in \text{m-rad}(J)$. Entonces $T \subseteq \text{m-rad}(J)$, así que $K \subseteq \text{m-rad}(J)$.

Para la contención que falta, se toma $\underline{X}^n \in [[\text{m-rad}(J)]] = \text{rad}(J) \cap [[R]]$, luego existe un entero $k \geq 1$ tal que $\underline{X}^{nk} \in [[J]]$. El Teorema 1.1.4 proporciona un monomio $\underline{X}^m \in S$ tal que $\underline{X}^m | \underline{X}^{nk}$, así que $\text{red}(\underline{X}^m) | \text{red}(\underline{X}^{nk}) = \text{red}(\underline{X}^n) | \underline{X}^n$. Por lo tanto, $\underline{X}^n \in \langle \text{red}(\underline{X}^m) \rangle \subseteq \langle T \rangle = K$. Se concluye con que $\text{m-rad}(J) \subseteq K$. □

En consecuencia, si $J = \langle X_{t_1}^{e_1}, \dots, X_{t_k}^{e_k} \rangle$, $\text{m-rad}(J) = \langle X_{t_1}, \dots, X_{t_k} \rangle$. En particular, $\text{m-rad}(X_1, \dots, X_d) = \langle X_1, \dots, X_d \rangle$.

Ejemplo 1.2.13. Gracias a este teorema, se dispone de un método muy sencillo para calcular el m-radical de un ideal monomial (ya que si el ideal no es monomial, el cálculo de su radical no es en absoluto trivial en general): Consiste en calcular las reducciones de los monomios generadores, y una vez obtenidos, suprimir las redundancias, por ejemplo como se ha visto en el Teorema 1.1.20.

Considerando $I = \langle X^3, X^2Y, XY^3, X^2Y^2, Y^4 \rangle$, se observa que un SMGM de I es $\{X^3, X^2Y, XY^3, Y^4\}$ ya que $X^2Y | X^2Y^2$ y

$$\begin{aligned} X^3 &\notin \langle X^2Y, XY^3, Y^4 \rangle \subsetneq \langle X^3, X^2Y, XY^3, Y^4 \rangle \\ X^2Y &\notin \langle X^3, XY^3, Y^4 \rangle \subsetneq \langle X^3, X^2Y, XY^3, Y^4 \rangle \\ XY^3 &\notin \langle X^3, X^2Y, Y^4 \rangle \subsetneq \langle X^3, X^2Y, XY^3, Y^4 \rangle \\ Y^4 &\notin \langle X^3, X^2Y, XY^3 \rangle \subsetneq \langle X^3, X^2Y, XY^3, Y^4 \rangle \end{aligned}$$

por lo que se tiene que $\{X^3, X^2Y, XY^3, Y^4\}$ es el SMGM de I .

Calculando las reducciones de sus generadores tenemos:

$$\text{red}(X^3) = X \quad \text{red}(X^2Y) = XY \quad \text{red}(XY^3) = XY \quad \text{red}(Y^4) = Y$$

por lo que $\text{m-rad}(I) = \langle X, XY, XY, Y \rangle$. Se ve sin dificultad que $\{X, XY, XY, Y\}$ no es un SMGM, pero se tiene que $\{X, Y\}$ sí que lo es, luego se puede representar $\text{m-rad}(I) = \langle X, Y \rangle$ en función de su SMGM, que sabemos único salvo el orden.

1.2.3. Cociente

Definición 1.2.14. Sea S un subconjunto de R y J un ideal de R . El ideal cociente de J con S es:

$$(J :_R S) = \{r \in R \mid rs \in J \text{ para todo } s \in S\}.$$

Para cada $s \in R$, $(J :_R s) = (J :_R \{s\})$.

Notación 1.2.15. En adelante, se usará la notación $(J : I)$ en lugar de $(J :_R I)$ ya que no se considera que induzca a error el hecho de no aclarar el anillo de polinomios sobre el cual estamos trabajando.

Teorema 1.2.16. Si I y J son ideales monomiales de R , entonces el ideal cociente $(J : I)$ es un ideal monomial de R .

Demostración. En primer lugar, si $I = \langle \underline{X}^m \rangle$, se toma

$$f = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{N}^d \\ \text{finita}}} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}} \in (J : \underline{X}^{\underline{n}}).$$

Se tiene que probar que cada monomio perteneciente a f está en $(J : \underline{X}^{\underline{n}})$. Por definición de f , se tiene que $f \underline{X}^{\underline{m}} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \mathbb{N}^d \\ \text{finita}}} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}+\underline{m}} \in J$. El Lema 1.1.7 afirma que si $a_{\underline{n}} \neq 0$, entonces $\underline{X}^{\underline{n}+\underline{m}} \in J$, ya que J es un ideal monomial, y

de esa forma $\underline{X}^m \underline{X}^n = \underline{X}^{n+m} \in J$. Eso es lo mismo que decir que si $a_n \neq 0$, entonces $\underline{X}^n \in (J : I)$, como queríamos demostrar.

Si I es un ideal monomial arbitrario, por el Lema de Dickson se tiene que está generado por un conjunto finito de monomios, es decir

$$(J : I) = (J : \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle).$$

Probaremos el siguiente hecho:

$$(J : \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle) = \bigcap_{i=1}^k (J : \langle \underline{X}^{n_i} \rangle).$$

Para la primera contención, sea $r \in (J : \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle)$, entonces por definición de cociente se tiene que $rs \in J$ para todo $s \in \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle$, en particular $r \underline{X}^{n_i} \in J$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, por lo que $r \in (J : \langle \underline{X}^{n_i} \rangle)$ para todo i , luego está en la intersección de todos los ideales cocientes.

Para la segunda contención sea

$$r \in \bigcap_{i=1}^k (J : \langle \underline{X}^{n_i} \rangle),$$

entonces $r \in (J : \langle \underline{X}^{n_i} \rangle)$ para $i = 1, \dots, k$, que es lo mismo que decir que para $i = 1, \dots, k$ se cumple que $rs_i \in J$ para todo $s_i \in \langle \underline{X}^{n_i} \rangle$ por lo que $rs \in J$ para todo $s \in \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle$, es decir $r \in (J : \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle)$, como queríamos demostrar.

Aplicándolo, se llega a que

$$(J : I) = (J : \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle) = \bigcap_{i=1}^k (J : \langle \underline{X}^{n_i} \rangle).$$

Es decir, $(J : I)$ es intersección finita de ideales monomiales. Por el Teorema 1.2.1, eso implica que $(J : I)$ es un ideal monomial. \square

El objetivo ahora es, dados I, J ideales monomiales, describir el conjunto $[[[J : I]]]$ en función de $[[[I]]]$ y $[[[J]]]$. Como se tiene que $J \subseteq (J : I)$, entonces $[[[J]]] \subseteq [[[(J : I)]]]$. Se va a describir como calcular un sistema monomial de generadores de $(J : I)$ en función de sistemas monomiales de generadores de J y de I . Para ello se usa la siguiente notación:

Notación 1.2.17. Dados vectores $\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{N}^d$, se denota

$$(\underline{p} - \underline{q})_i^+ = \max\{p_i - q_i, 0\}.$$

Por definición, $(\underline{p} - \underline{q})^+ \in \mathbb{N}^d$.

Teorema 1.2.18. Sean $I = \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle, J = \langle \underline{X}^{m_1}, \dots, \underline{X}^{m_l} \rangle$ ideales monomiales en R , entonces

$$(J : I) = \bigcap_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^l (\langle \underline{X}^{m_j} \rangle : \underline{X}^{n_i}) \right).$$

Se puede encontrar una prueba de este teorema en [11], no se demuestra aquí ya que requiere de unas cuantas nociones de cociente entre ideales y además se ha demostrado en un contexto mucho más general en la asignatura Álgebra Conmutativa y Computacional.

Proposición 1.2.19. Sean $\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{N}^d$. Se tiene que $(\langle \underline{X}^{\underline{p}} \rangle : \underline{X}^{\underline{q}}) = \langle \underline{X}^{(\underline{p}-\underline{q})^+} \rangle$.

Demostración. Primero se prueba $(\langle \underline{X}^{\underline{p}} \rangle : \underline{X}^{\underline{q}}) \subseteq \langle \underline{X}^{(\underline{p}-\underline{q})^+} \rangle$: Sea $r \in (\langle \underline{X}^{\underline{p}} \rangle : \underline{X}^{\underline{q}})$, por definición se tiene que $r \underline{X}^{\underline{q}} \in \langle \underline{X}^{\underline{p}} \rangle$, luego $r = \underline{X}^{\underline{r}}$, siendo $\underline{r} \in \mathbb{N}^d$ ($\Rightarrow r_i \geq 0$ para todo i) tal que $r_i + q_i \geq p_i$ para todo i , es decir $r_i \geq p_i - q_i$ para todo $i = 1, \dots, d$. Entonces $\underline{X}^{\underline{r}} \in \langle \underline{X}^{(\underline{p}-\underline{q})^+} \rangle$.

Para demostrar $(\langle \underline{X}^{\underline{p}} \rangle : \underline{X}^{\underline{q}}) \supseteq \langle \underline{X}^{(\underline{p}-\underline{q})^+} \rangle$: Sea $r \in (\langle \underline{X}^{\underline{p}} \rangle : \underline{X}^{\underline{q}})$ se toma $r \in \langle \underline{X}^{(\underline{p}-\underline{q})^+} \rangle$. Por definición $r_i \geq p_i - q_i$ para $i = 1, \dots, d$ (siendo $r_i \geq 0$). Por ello $X_i^{r_i} X_i^{q_i} \geq X_i^{p_i}$ para todo i , lo que significa que $\underline{X}^{\underline{r}} \underline{X}^{\underline{q}} \in \langle \underline{X}^{\underline{p}} \rangle$. Con esto se tiene $r \in (\langle \underline{X}^{\underline{p}} \rangle : \underline{X}^{\underline{q}})$ como queríamos demostrar. \square

El teorema y la proposición anterior proporcionan un algoritmo para calcular un sistema de generadores explícito del ideal cociente de cualquier par de ideales monomiales. Se muestra un ejemplo de este cálculo:

Ejemplo 1.2.20. Sea $J = \langle X^4, X^2Y, XZ^3, Z^5 \rangle$ y $I = \langle Y^2Z, Z^2 \rangle$ en $R = A[X, Y, Z]$. Aplicando el resultado del Teorema 1.2.18 se tiene:

$$(J : I) = ((\langle X^4 \rangle : Y^2Z) + (\langle X^2Y \rangle : Y^2Z) + (\langle XZ^3 \rangle : Y^2Z) + (\langle Z^5 \rangle : Y^2Z)) \cap \\ \cap ((\langle X^4 \rangle : Z^2) + (\langle X^2Y \rangle : Z^2) + (\langle XZ^3 \rangle : Z^2) + (\langle Z^5 \rangle : Z^2)).$$

Cada cociente de la forma $(\langle \underline{X}^{\underline{n}} \rangle : \underline{X}^{\underline{m}})$ se calcula gracias a la Proposición 1.2.19:

$$(J : I) = (\langle X^4 \rangle + \langle X^2 \rangle + \langle XZ^2 \rangle + \langle Z^4 \rangle) \cap (\langle X^4 \rangle + \langle X^2Y \rangle + \langle XZ \rangle + \langle Z^3 \rangle).$$

Sumando los ideales y eliminando las redundancias se obtiene que

$$(J : I) = \langle X^2, XZ^2, Z^4 \rangle \cap \langle X^4, X^2Y, XZ, Z^3 \rangle.$$

1.2.4. Potencia en corchete

El ideal I^n no es el ideal engendrado por las potencias n -ésimas de los generadores de I , sino que

$$I^n = \langle \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in I \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n\} \rangle.$$

Por lo que se define lo siguiente:

Definición 1.2.21. Sea I un ideal monomial de R . Para todo $k \in \mathbb{N}$ la k -ésima potencia en corchete (“bracket power”) de J es el ideal $J^{[k]} = \langle T_k \rangle$ donde $T_k = \{ \underline{X}^{kn} \mid \underline{X}^n \in [[J]] \}$.

Lema 1.2.22. Sean $S \subseteq [[R]]$, $J = \langle S \rangle$ y un entero $k \geq 1$. Si $\underline{X}^n \in [[R]]$, entonces $\underline{X}^n \in J$ si y solo si $\underline{X}^{kn} \in J^{[k]}$.

Demostración. Para la primera implicación, sea $\underline{X}^n \in J$. Como J es un ideal monomial, el Lema de Dickson proporciona un subconjunto finito de monomios $S' \subseteq S$ tal que $J = \langle S' \rangle$. Entonces $\underline{X}^n \in \langle \underline{X}^m \rangle$ para algún $\underline{X}^m \in S'$ por el Teorema 1.1.4, lo que implica que $\underline{X}^{kn} \in \langle \underline{X}^{km} \rangle \subseteq J^{[k]}$.

Para la implicación inversa, se asume $\underline{X}^{kn} \in J^{[k]}$. Se tiene que el conjunto $S_k = \{ \underline{X}^{km} \mid \underline{X}^m \in S \}$ es un sistema monomial de generadores de $J^{[k]}$. Por lo tanto, existe un subconjunto finito de monomios $S'_k \subseteq S_k$ tal que $J^{[k]} = \langle S'_k \rangle$. El Teorema 1.1.4 implica de nuevo que $\underline{X}^{kn} \in \langle \underline{X}^{km} \rangle$ para algún $\underline{X}^{km} \in S'_k$. Entonces $km \geq kn \Rightarrow m \geq n$, luego $\underline{X}^n \in \langle \underline{X}^m \rangle \subseteq J$, como queríamos demostrar. \square

Proposición 1.2.23. Sea $J = \langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_n} \rangle$ un ideal monomial de R , entonces $J^{[k]} = \langle \underline{X}^{ki_1}, \dots, \underline{X}^{ki_n} \rangle$.

Demostración. Sea $T_k = \{ \underline{X}^{km} \mid \underline{X}^m \in [[J]] \}$. Por definición $J^{[k]} = \langle T_k \rangle$ por lo que hay que demostrar que $\langle S_k \rangle = \langle T_k \rangle$ siendo $S_k = \{ \underline{X}^{ki_1}, \dots, \underline{X}^{ki_n} \}$. Como se ha definido T_k de forma que $S_k \subseteq T_k$ entonces $\langle S_k \rangle \subseteq \langle T_k \rangle$. Para ver la otra contención hay que demostrar que $T_k \subseteq \langle S_k \rangle$. Un elemento cualquiera de T_k es de la forma $\underline{X}^{km} \in J^{[k]}$.

El lema anterior implica que $\underline{X}^m \in J = \langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_n} \rangle$ luego se tiene $\underline{X}^{km} \in \langle S_k \rangle = \langle \underline{X}^{ki_1}, \dots, \underline{X}^{ki_n} \rangle$. \square

Ejemplo 1.2.24. Una potencia en corchete de un ideal se puede ver como un modelo a otra escala de ese mismo ideal. Por ejemplo, sea el ideal $J = \langle X^3, X^2Y, Y^2 \rangle$, entonces $J^{[2]} = \langle X^6, X^4Y^2, Y^4 \rangle$, y gráficamente se representan de la siguiente forma:

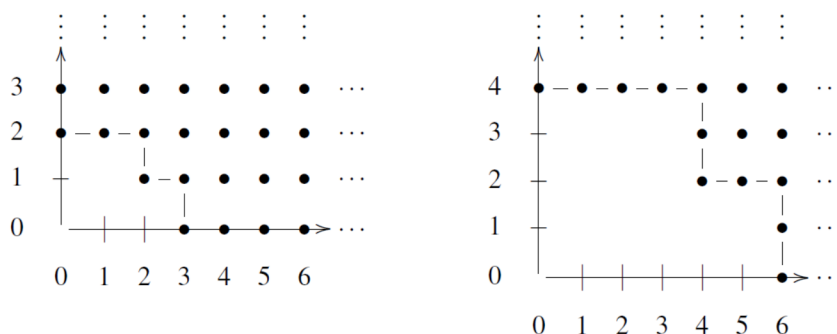


Figura 1.2: $J = \langle X^3, X^2Y, Y^2 \rangle$ $J^{[2]} = \langle X^6, X^4Y^2, Y^4 \rangle$

Como puede observarse en la imagen anterior, la potencia en corchete “modifica” la escala de un ideal.

Lema 1.2.25. Sean I y J ideales monomiales en R y un entero $k \geq 1$ fijo.

- $I \subseteq J$ si y solo si $I^{[k]} \subseteq J^{[k]}$.
- $I = J$ si y solo si $I^{[k]} = J^{[k]}$.

Proposición 1.2.26. Sean I_1, \dots, I_n ideales monomiales de R . Si k es un entero positivo, entonces

$$\left(\bigcap_{i=1}^n J_i \right)^{[k]} = \bigcap_{i=1}^n J_i^{[k]}.$$

1.3. Ideales m-irreducibles e irreducibles

Así como los ideales irreducibles son aquellos que no pueden escribirse como intersección no trivial de ideales, los ideales m-irreducibles son ideales monomiales que no pueden escribirse como intersección no trivial de ideales monomiales. Los ideales m-irreducibles no son siempre irreducibles (si A es un DI sí lo son) pero son los ideales monomiales más sencillos. Se explica de donde procede esta patología con un ejemplo:

Ejemplo 1.3.1. Sea $A = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \dots, \bar{5}\}$, que no es un DI, ya que hay elementos que son divisores de cero: $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$. Para más comodidad, ya que no hay confusión posible, se suprime la barra que indica la clase. Sea $I = \langle X \rangle \subseteq A[X]$, es trivial que I es m-irreducible, pero $\langle X \rangle = \langle X, 0 \rangle = \langle X, 2 \rangle \cap \langle X, 3 \rangle$. Luego existen ideales $J_1 = \langle X, 2 \rangle$ y $J_2 = \langle X, 3 \rangle$ tales que

$I = J_1 \cap J_2$ y $I \subsetneq J_1$ ya que $2 \notin I, 2 \in J_1$, y por el mismo razonamiento $I \subsetneq J_2$. Por lo que I es reducible en $\mathbb{Z}_6[X]$.

En general, si el anillo de coeficientes no es un DI, se da la situación de que el producto de dos elementos a, b puede ser nulo con $a \neq 0 \neq b$, y como $I = \langle S \rangle = \langle S, 0 \rangle$ siempre, se tiene que $I = \langle S, a \rangle \cap \langle S, b \rangle$. Por lo tanto si A tiene divisores de 0, un ideal monomial m-irreducible no es irreducible.

El objetivo es demostrar que todo ideal monomial tiene una descomposición m-irreducible (es decir, se puede escribir como una intersección finita de ideales monomiales m-irreducibles). Una de las razones de ello, es que se puede ver que la descomposición m-irreducible irredundante (mDII) de un ideal de aristas (“edge ideal”) de un grafo finito simple contiene información fundamental de la teoría de grafos sobre ese grafo.

Definición 1.3.2. Un ideal monomial $J \subseteq R$ es m-reducible si existen ideales monomiales $J_1, J_2 \neq J$ tales que $J = J_1 \cap J_2$. Un ideal $J \subseteq R$ es m-irreducible si no es m-reducible.

Ejemplo 1.3.3. El ideal monomial $J = \langle X^3, X^2Y, Y^3 \rangle$ de $R = A[X, Y]$ es m-reducible y se puede ver, por ejemplo usando el Teorema 1.2.3, que $J = \langle X^2, Y^3 \rangle \cap \langle X^3, Y \rangle$. Además, los ideales en los que se descompone J son m-irreducibles por el Teorema 1.3.5 que se mostrará a continuación.

Lema 1.3.4. Sea J un ideal monomial de R con un SMGM $\langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_k} \rangle$. Se asume que $\underline{X}^{i_k} = X_1^e \underline{X}^n$, donde $e \geq 1$ y $X_1 \nmid \underline{X}^n$ y $\underline{X}^n \neq 1$.

Sea $I = \langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_{k-1}}, X_1^e \rangle$ y $I' = \langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_{k-1}}, \underline{X}^n \rangle$. Entonces se tiene que $J = I \cap I'$ con $J \subsetneq I$ y $J \subsetneq I'$. En particular, J es m-reducible.

Demostración. Primero, se muestra que $J = I \cap I'$. Para ello, se usa el Teorema 1.2.3 y se obtiene el siguiente sistema de generadores de $I \cap I'$:

$$\underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_{k-1}}, \dots, \text{mcm}(\underline{X}^{i_j}, X_1^e), \text{mcm}(\underline{X}^{i_j}, \underline{X}^n), \dots, \text{mcm}(X_1^e, \underline{X}^n).$$

Dado que $\text{mcm}(\underline{X}^{i_j}, X_1^e), \text{mcm}(\underline{X}^{i_j}, \underline{X}^n) \in \langle \underline{X}^{i_j} \rangle$ para $j = 1, \dots, k-1$, y como se tiene que $\text{mcm}(X_1^e, \underline{X}^n) = \underline{X}^{i_k}$ se pueden quitar redundancias de esta lista por el algoritmo descrito en la demostración del Teorema 1.1.20 y obtener que $I \cap I' = \langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_{k-1}}, \underline{X}^{i_k} \rangle = J$, luego se ha probado la igualdad $J = I \cap I'$.

Para mostrar que $J \subseteq I$, basta observar que $J = I \cap I' \subseteq I$. Para ver que $J \neq I$, hay que probar que $X_1^e \notin J$. Por reducción al absurdo, se supone que $X_1^e \in J$. Entonces $\underline{X}^{i_j} | X_1^e$ para algún j , por el Teorema 1.1.4. Como $X_1^e | \underline{X}^{i_k}$, se tiene que $\underline{X}^{i_j} | \underline{X}^{i_k}$. Como $\langle \underline{X}^{i_1}, \dots, \underline{X}^{i_k} \rangle$ es un SMGM, debe tenerse $j = k$. Entonces, $\underline{X}^{i_k} | X_1^e$ y $X_1^e | \underline{X}^{i_k}$, luego $X_1^e = \underline{X}^{i_k} = X_1^e \underline{X}^n$, lo que implica $\underline{X}^n = 1$,

que contradice la hipótesis del lema, luego se ha llegado a un absurdo y se tiene que $J \subsetneq I$.

Un razonamiento equivalente pero probando que $\underline{X}^n \notin J$ muestra que $J \subsetneq I'$. En particular, eso implica que J es m-reducible, como queríamos demostrar. \square

Este lema permite obtener un primer algoritmo para descomponer un ideal monomial, no es el algoritmo más eficiente que hay, pero proporciona una descomposición en ideales m-irreducibles.

El siguiente teorema, resultado principal de la sección, caracteriza los ideales monomiales m-irreducibles no nulos como ideales generados por potencias puras de variables, es decir, monomios de la forma $X_i^{e_i}$.

Teorema 1.3.5. *Sea J un ideal monomial no nulo de R . Entonces el ideal J es m-irreducible si y solo si existen enteros positivos $k, t_1, \dots, t_k, e_1, \dots, e_k$ tales que $1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq d$ (siendo d el número de variables que tiene el anillo) y $J = \langle X_{t_1}^{e_1}, \dots, X_{t_k}^{e_k} \rangle$.*

Demostración. Para la primera implicación, se asume que J está generado por potencias puras de las variables. Reordenando las variables se puede considerar que J está generado por potencias puras de X_1, \dots, X_k con $k \geq 1$, por lo que existen enteros $e_1, \dots, e_k \geq 1$ tales que $J = \langle X_1^{e_1}, \dots, X_k^{e_k} \rangle$. Se tiene que $J \subseteq \langle X_1, \dots, X_k \rangle \subseteq \langle X_1, \dots, X_d \rangle$, por lo que $J \neq R$.

Se fijan ideales monomiales $J_1, J_2 \subseteq R$ tales que $J = J_1 \cap J_2$. Se supone que $J \subsetneq J_i$ para $i = 1, 2$ y se fijan monomios $\underline{X}^m \in [[J_1]] \setminus [[J]]$ y $\underline{X}^n \in [[J_2]] \setminus [[J]]$. Para $i = 1, \dots, d$, sea $p_i = \max(m_i, n_i)$.

Si $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $m_i < e_i$: Si no fuera así, entonces $m_i \geq e_i$ para algún i , y una comparación de los exponentes muestra que $\underline{X}^m \in \langle X_i^{e_i} \rangle \subseteq J$, que es una contradicción. De la misma manera, si $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $n_i < e_i$, y entonces $p_i = \max(m_i, n_i) < e_i$. Ese razonamiento se puede aplicar para todo $1 \leq i \leq k$, se llega a que $\text{mcm}(\underline{X}^m, \underline{X}^n) = \underline{X}^p \notin J$. Pero por la Proposición 1.2.2 se tiene que $\text{mcm}(\underline{X}^m, \underline{X}^n) \in J_1 \cap J_2 = J$ llegando a un absurdo, por lo que es necesario que $J = J_1$ o $J = J_2$ y se tiene que J es m-irreducible.

Para la otra implicación, se razona por contrareciproco. Se parte de que J no está generado por potencias puras de algunas variables, y se demostrará que J es m-reducible. Sea $J = \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle$. Al asumir $J \neq 0$ se tiene que $k \geq 1$. Por esta razón \underline{X}^{n_i} no es potencia pura de una de las variables, y reordenando los monomios se puede considerar que es \underline{X}^{n_k} el monomio que no es potencia pura de una de las variables. Reordenando las variables si es necesario, se puede asumir que $\underline{X}^{n_k} = X_1^e g$ con $e \geq 1$, $X_1 \nmid g$ y $g \neq 1$. Por

el Lema 1.3.4 se tiene que J es m-reducible, por lo que queda terminada la demostración. \square

Como se quiere estudiar la descomposición en ideales irreducible de ideales monomiales es necesario ver la relación existente entre ideales m-irreducibles e ideales irreducibles.

El objetivo es demostrar que estos conceptos son equivalentes en el caso de que A sea un DI, para poder hablar exclusivamente de ideales irreducibles en el siguiente capítulo, en el que se considera A un DI.

Esto se probará en el Teorema 1.3.7, que precisa del Lema 1.3.6 para su desarrollo. Obsérvese que el lema es aplicable a cualquier anillo no nulo conmutativo unitario, aunque no sea DI.

Lema 1.3.6. *Fijados enteros $k, e_1, \dots, e_k \geq 1$ con $k \leq d$, consideramos el ideal $J = \langle X_1^{e_1}, \dots, X_k^{e_k} \rangle$. Sea I un ideal de R tal que $J \subsetneq I$. Entonces, existe un polinomio $h_k = z\hat{h}(X_{k+1}, \dots, X_d) \in I \setminus J$ donde $z = X_1^{e_1-1} \dots X_k^{e_k-1}$.*

Demostración. Se fija un polinomio $h \in I \setminus J$. Entonces

$$h = \sum_{\underline{n} \in \gamma(h)} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}} = \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(h) \\ \underline{n} \notin \Gamma(J)}} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}} + \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(h) \\ \underline{n} \in \Gamma(J)}} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}} = f + g$$

donde

$$f = \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(h) \\ \underline{n} \notin \Gamma(J)}} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}} \text{ y } g = \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(h) \\ \underline{n} \in \Gamma(J)}} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}}.$$

Por construcción, cada monomio de g está en J , luego $g \in J$. Por otro lado, la condición de que $h \notin J$ y que $g \in J$ implica que $f = h - g \notin J$. En particular, $f \neq 0$. También, como se asume que $h \in I$, entonces el hecho de que $g \in J \subseteq I$ implica que $f = h - g \in I$.

Además, se tiene $\gamma(f) = \{\underline{n} \in \gamma(h) \mid \underline{n} \notin \Gamma(J)\}$ luego si $\underline{n} \in \gamma(f)$ y $i \in \{1, \dots, k\}$ entonces se tiene que $n_i < e_i$: Si no fuera así, entonces $n_i \geq e_i$, por lo que $\underline{X}^{\underline{n}} \in \langle X_i^{e_i} \rangle \subseteq J$, contradiciendo la condición de que $\underline{n} \notin \Gamma(J)$.

Por ello, la existencia de f es un resultado más fuerte que la existencia de h . No solo se tiene que $f \in I$ y $f \notin J$, sino que todo monomio en f cumple que no está en J . Entonces, la prueba de la existencia de h se basa en probar la existencia de f .

Se va a probar por inducción sobre j el hecho de que para $j = 1, \dots, k$, existen polinomios $h_j \in I \setminus J$ tales que para cada $\underline{m} \in \gamma(h_j)$ se satisface que $m_i = e_i - 1$ con $1 \leq i \leq j$, y $m_i \leq e_i - 1$ con $j + 1 \leq i \leq k$.

- $j = 1$. Se considera la menor potencia de X_1 que aparece en los monomios de f , que es

$$r_1 = \min\{n_1 \in \mathbb{N} \mid \underline{n} \in \gamma(f)\}.$$

Se tiene que $r_1 < e_1$, ya que si no fuera así, cada monomio que aparece en f estaría contenido en $\langle X_i^{e_i} \rangle$, y eso implicaría que $f \in J$, lo que contradice la hipótesis de f . Por lo cual se tiene que $e_1 - r_1 \geq 1$.

Se escribe

$$f = \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(f) \\ n_1 = r_1}} a_{\underline{n}} X^{\underline{n}} + \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(f) \\ n_1 > r_1}} a_{\underline{n}} X^{\underline{n}} = f_1 + g_1$$

donde

$$f_1 = \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(f) \\ n_1 = r_1}} a_{\underline{n}} X^{\underline{n}} \text{ y } g_1 = \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(f) \\ n_1 > r_1}} a_{\underline{n}} X^{\underline{n}}$$

y se ve que

$$\begin{aligned} \gamma(f_1) &= \{\underline{n} \in \gamma(f) \mid n_1 = r_1\} \neq \emptyset \\ \gamma(g_1) &= \{\underline{n} \in \gamma(f) \mid n_1 \geq r_1 + 1\}. \end{aligned}$$

Se toma $h_1 = X_1^{e_1 - r_1 - 1} f_1 \neq 0$.

Para mostrar que h_1 tiene las propiedades deseadas, primero se mostrará que $X_1^{e_1 - r_1 - 1} g_1 \in J \subseteq I$: si $\underline{n} \in \gamma(g_1)$, entonces $n_1 \geq r_1 + 1$. Por construcción,

$$X_1^{e_1 - r_1 - 1} g_1 = X_1^{e_1 - r_1 - 1} \sum_{\underline{n} \in \gamma(g_1)} a_{\underline{n}} X^{\underline{n}} = \sum_{\underline{n} \in \gamma(g_1)} a_{\underline{n}} X_1^{e_1 - r_1 - 1} X^{\underline{n}}.$$

Entonces, si $\underline{m} \in \gamma(X_1^{e_1 - r_1 - 1} g_1)$, se tiene que

$$m_1 = (e_1 - r_1 - 1) + n_1 \geq (e_1 - r_1 - 1) + r_1 + 1 = e_1,$$

por lo que $X_1^{e_1 - r_1 - 1} g_1 \in \langle X_1^{e_1} \rangle \subseteq J$.

Como $f \in I$, entonces

$$h_1 = X_1^{e_1 - r_1 - 1} f_1 = X_1^{e_1 - r_1 - 1} f - X_1^{e_1 - r_1 - 1} g_1 \in I.$$

Cada monomio en h_1 es de la forma $X^{\underline{m}} = X_1^{e_1 - r_1 - 1} X^{\underline{n}}$ para algún $\underline{n} \in \gamma(f_1)$. La condición $\underline{n} \in \gamma(f_1)$ implica que $n_1 = r_1$, por lo que

$$m_1 = e_1 - r_1 - 1 + n_1 = e_1 - r_1 + r_1 - 1 = e_1 - 1.$$

Además, si $i \geq 2$, entonces la condición $\underline{n} \in \gamma(f_1)$ implica que $m_i = n_i < e_i$, es decir, $m_i = n_i \leq e_i - 1$.

Para completar la demostración del caso $j = 1$, es preciso comprobar que $h_1 \notin J$. Como J es un ideal monomial, según el Lema 1.1.7 es suficiente comprobar que no existe ningún monomio \underline{X}^m en h_1 que esté en J . Volviendo a escribir $\underline{X}^m = X_1^{e_1-r_1-1} \underline{X}^n$ para algún $\underline{n} \in \gamma(f_1)$ y suponiendo que $\underline{X}^m \in J = \langle X_1^{e_1}, \dots, x_k^{e_k} \rangle$, se puede aplicar el Teorema 1.1.4 que implica que $\underline{X}^m \in \langle X_i^{e_i} \rangle$ para algún $i \leq k$, luego se tiene que $m_i \geq e_i$. Eso contradice el hecho de que $m_i \leq e_i - 1$, que ya se había probado para todo i .

- El paso de inducción es bastante similar al caso $j = 1$, por lo que, sin entrar en detalle, se asume por inducción que $1 \leq j \leq d - 1$ y que h_j ha sido definido en el paso anterior. Se quiere construir entonces h_{j+1} .

Para ello se toma

$$r_{j+1} = \min\{n_{j+1} \in \mathbb{N} \mid \underline{n} \in \gamma(h_j)\}.$$

Y con ello se muestra que $r_{j+1} \leq e_{j+1} - 1$. Se puede escribir

$$h_j = \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(h_j) \\ n_{j+1} = r_{j+1}}} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}} + \sum_{\substack{\underline{n} \in \gamma(h_j) \\ n_{j+1} > r_{j+1}}} a_{\underline{n}} \underline{X}^{\underline{n}} = f_{j+1} + g_{j+1}.$$

Se toma $h_{j+1} = X_{j+1}^{e_{j+1}-r_{j+1}-1} f_{j+1}$ y se comprueba que h_{j+1} tiene las propiedades buscadas.

Existe entonces un polinomio $h_k \in I \setminus J$ tal que si $\underline{n} \in \gamma(h_k)$, entonces $n_i = e_i - 1$ cuando $1 \leq i \leq k$. En otras palabras, cada monomio contenido en h_k tiene la forma zw donde $z = X_1^{e_1-1} \cdots X_k^{e_k-1}$ y w es un monomio en las variables X_{k+1}, \dots, X_d . Por lo que se tiene que existe un polinomio $\hat{h}(X_{k+1}, \dots, x_d)$ tal que $h_k = z\hat{h}(X_{k+1}, \dots, X_d)$, como queríamos demostrar. \square

Teorema 1.3.7. *Sea A un DI y $R = A[X_1, \dots, X_d]$. Un ideal monomial no nulo $J \subseteq R$ es irreducible si y solo si es m -irreducible.*

Demostración. La implicación hacia adelante es directa: si J no puede ser escrito como una intersección no trivial de dos ideales, no puede ser escrito como una intersección no trivial de dos ideales monomiales.

Para lo contrario, se asume que J es m -irreducible. Según el Teorema 1.3.5 J está generado por potencias puras de variables en R . Se puede asumir sin

pérdida de generalidad que $J = \langle X_1^{e_1}, \dots, X_k^{e_k} \rangle$. Sea $z = X_1^{e_1-1} \dots X_k^{e_k-1}$, y se puede ver fácilmente que entonces $z \notin J$ (ya que no es divisible por ninguno de los generadores de J).

Por reducción al absurdo, se supone que existen ideales $I, K \subseteq R$ tales que $J = I \cap K$ y $J \subsetneq I$ y $J \subsetneq K$. Por el lema anterior, 1.3.6, se tienen que existen los polinomios:

$$\begin{aligned} f_k &= z\hat{f}(X_{k+1}, \dots, X_d) = z\hat{f} \in I \setminus J \\ g_k &= z\hat{g}(X_{k+1}, \dots, X_d) = z\hat{g} \in K \setminus J. \end{aligned}$$

De la propiedad de que $f_k \in I$, se concluye que $z\hat{f}\hat{g} = f_k\hat{g} \in I$. De forma similar, la condición de que $g_k \in K$ implica que $z\hat{f}\hat{g} \in K$, luego $z\hat{f}\hat{g} \in I \cap K = J$. Como $\hat{f} = \hat{f}(X_{k+1}, \dots, X_d)$ y $\hat{g} = \hat{g}(X_{k+1}, \dots, X_d)$, entonces todo monomio w que está en $z\hat{f}\hat{g}$ tiene la forma

$$w = zv = X_1^{e_1-1} \dots X_n^{e_n-1} X_{n+1}^{m_{n+1}} \dots X_d^{m_d}.$$

Como J es un ideal monomial, por el Lema 1.1.7 todo monomio en $z\hat{f}\hat{g}$ está en J . La condición $w \in J$ implica que hay un índice j tal que $1 \leq j \leq k$ y $X_j^{e_j} | w$. Comparando los exponentes, se deduce que $e_j \leq e_j - 1$, lo que es imposible.

Se concluye que el polinomio $z\hat{f}\hat{g}$ no contiene ningún monomio, es decir, $z\hat{f}\hat{g} = 0$. Como A es un DI (es aquí cuando se necesita esa hipótesis y no basta con que sea un anillo conmutativo unitario) y z es un monomio, entonces o bien $\hat{f} = 0$ o $\hat{g} = 0$. Si $\hat{f} = 0$, entonces $0 = z\hat{f} = f_k \notin J$, lo que es imposible. Suponiendo que $\hat{g} = 0$, se llega a que $0 = z\hat{g} = g_k \notin J$, lo que también es imposible. Entonces, el ideal J es irreducible, como queríamos probar. \square

1.4. Descomposiciones m-irreducibles e irreducibles

El objetivo ahora es demostrar que todo ideal monomial puede ser escrito como descomposición de ideales m-irreducibles, y por el Teorema 1.3.7 obtener entonces que si A es DI todo ideal puede descomponerse como intersección de ideales irreducibles.

Definición 1.4.1. Sea $J \subseteq R$ un ideal monomial. Una descomposición m-irreducible de J es una expresión $J = \bigcap_{i=1}^n J_i$ con $n \geq 1$, donde cada J_i es m-irreducible.

Sobra decir, que todo ideal $J \subseteq R$ m-irreducible tiene una descomposición m-irreducible trivial $J = \bigcap_{i=1}^1 J_i$ con $J_1 = J$.

Ejemplo 1.4.2. En el Ejemplo 1.3.3 se ha visto que $J = \langle X^2, Y^3 \rangle \cap \langle X^3, Y \rangle$ y que esos ideales eran m-irreducibles, se trata pues de una descomposición m-irreducible de J .

En cambio, en el Ejemplo 1.2.20 se había obtenido, en $R = A[X, Y, Z]$, $(J : I) = \langle X^2, Z^2 \rangle \cap \langle X^4, X^2Y, XZ, Z^3 \rangle$, que no es una descomposición m-irreducible, por el 1.3.5 no son irreducibles, pero se puede aplicar el algoritmo definido en el Lema 1.3.4 y se obtiene:

$$\begin{aligned} (J : I) &= \langle X^2, Z^2 \rangle \cap \langle X^4, X^2, XZ, Z^3 \rangle \cap \langle X^4, Y, XZ, Z^3 \rangle \\ &= \langle X^2, Z^2 \rangle \cap \langle X^4, X^2, X, Z^3 \rangle \cap \langle X^4, X^2, Z, Z^3 \rangle \cap \\ &\quad \cap \langle X^4, Y, X, Z^3 \rangle \cap \langle X^4, Y, Z, Z^3 \rangle. \end{aligned}$$

Por último, se suprimen los generadores redundantes por el algoritmo descrito en el Teorema 1.1.20 y se obtiene:

$$(J : I) = \langle X^2, Z^2 \rangle \cap \langle X, Z^3 \rangle \cap \langle X^2, Z \rangle \cap \langle X, Y, Z^3 \rangle \cap \langle X^4, Y, Z \rangle$$

que es una descomposición m-irreducible de $(J : I)$.

Teorema 1.4.3. *Todo ideal monomial $J \subsetneq R$ tiene una descomposición m-irreducible.*

Demostración. Si $J = 0$ entonces J es m-irreducible, por lo que tiene una descomposición m-irreducible trivial.

Por reducción al absurdo, se supone que $J \subseteq R$ es un ideal monomial no nulo que no tiene ninguna descomposición m-irreducible. Entonces, el conjunto Σ de todos los ideales monomiales no nulos $J \in R$ que no tienen descomposición m-irreducible es un conjunto no-vacío de ideales monomiales en R . El Teorema 1.1.15 implica que Σ tiene elemento maximal, el cual podemos suponer sin pérdida de generalidad que es J . En particular J no es m-irreducible, por lo que existen ideales monomiales $I, K \subseteq R$ tales que $J = I \cap K$ y $J \subsetneq I, J \subsetneq K$. Se tiene $0 \neq I \neq R, 0 \neq K \neq R$ y la condición de que J es maximal en Σ implica que $I, K \notin \Sigma$. Luego ambos tienen descomposiciones m-irreducibles $I = \bigcap_{j=1}^m I_j$ y $K = \bigcap_{i=1}^n K_i$. Entonces se tiene

$$J = I \cap K = \left(\bigcap_{j=1}^m I_j \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n K_i \right)$$

por lo que J tiene descomposición m-irreducible, en contradicción con que J es el elemento maximal de Σ . Como se ha llegado a un absurdo, se tiene que todo ideal monomial tiene una descomposición m-irreducible. \square

Definición 1.4.4. Sea $J \subsetneq R$ un ideal monomial. Se dice que una descomposición m-irreducible $J = \bigcap_{i=1}^n J_i$ es redundante si existe un índice j tal que $J = \bigcap_{i \neq j} J_i$. Una descomposición m-irreducible es irredundante si no es redundante, es decir, si cada $j \in \{1, \dots, n\}$ satisface $J \neq \bigcap_{i \neq j} J_i$. Como $J = \bigcap_{i=1}^n J_i \subseteq \bigcap_{i \neq j} J_i$ entonces una descomposición es mDII si y solo si para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ se satisface $J \subsetneq \bigcap_{i \neq j} J_i$.

Es fácil ver que toda descomposición m-irreducible se puede transformar en una mDII retirando las redundancias.

La mDII de un ideal monomial es única, salvo ordenación de las variables, como muestra el siguiente teorema, que se apoya en este lema:

Lema 1.4.5. Sean I, J_1, \dots, J_n ideales monomiales en R tales que I es m-irreducible. Si $\bigcap_{i=1}^n J_i \subseteq I$, entonces existe un índice j tal que $J_j \subseteq I$.

Se puede encontrar una prueba de este resultado en [11]

Teorema 1.4.6. Si J es un ideal monomial en R con mDII $J = \bigcap_{i=1}^n J_i = \bigcap_{h=1}^m I_h$, entonces $m = n$ y existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $J_t = I_{\sigma(t)}$ para $t = 1, \dots, n$.

Demostración. Primero se probará que para $t = 1, \dots, n$ existe un único índice u tal que $I_u = J_t$. Para ello, se calcula:

$$\bigcap_{h=1}^m I_h = J = \bigcap_{i=1}^n J_i \subseteq J_t.$$

Por el lema anterior (1.4.5) se tiene que existe un índice u tal que $I_u \subseteq J_t$. De la misma forma,

$$\bigcap_{i=1}^n J_i = J = \bigcap_{h=1}^m I_h \subseteq I_u$$

y por el Lema 1.4.5 existe un índice v tal que $J_v \subseteq I_u \subseteq J_t$. Como la descomposición $\bigcap_{i=1}^n J_i$ es irredundante, la contención $J_v \subseteq J_t$ implica que $v = t$, luego $J_t \subseteq I_u \subseteq J_t$, es decir $I_u = J_t$. Falta ver que u es único: Si $I_u = J_t = I_{u'}$, entonces la irredundancia de la intersección $\bigcap_{h=1}^m I_h$ implica que $u = u'$.

Ahora se define $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tomando $\sigma(t) = u$, siendo u el índice único que cumple $I_u = J_t$.

Como de forma simétrica se puede ver que para $u = 1, \dots, m$ existe un único índice t tal que $I_u = J_t$, se define $\omega : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tomando $\omega(u) = t$, siendo t el índice único que cumple que $I_u = J_t$. Por construcción se tiene que $\omega = \sigma^{-1}$, luego $m = n$ y se ha encontrado la permutación nombrada en el enunciado. \square

En el Teorema 1.4.3 se ha demostrado que todo ideal tiene una descomposición m-irreducible, y en el Lema 1.3.4 se ha mostrado un método para calcular una descomposición m-irreducible. Mas aún, en el Teorema 1.4.6 se ha probado que la mDII es única salvo ordenación de las componentes. A continuación enunciamos una proposición que permite establecer un algoritmo para calcular la descomposición mDII a partir de una descomposición m-irreducible, por lo que, a partir de cualquier ideal monomial expresado en función de monomios, aplicando la Proposición 1.1.19, se tiene un SMGM, y con el algoritmo descrito en 1.3.4 se dispone de una descomposición m-irreducible, y se puede calcular la mDII.

Proposición 1.4.7. *Sea J un ideal monomial en R con descomposición m-irreducible $J = \cap_{i=1}^n J_i$ Son equivalentes:*

- I *La descomposición $J = \cap_{i=1}^n J_i$ es redundante.*
- II *Existen índices $j \neq j'$ tales que $J_{j'} \subseteq J_j$.*

Nota 1.4.8. Sea J un ideal monomial con descomposición m-irreducible $J = \cap_{i=1}^n J_i$. Usando 1.1.19 y la proposición anterior se comprueba si la descomposición es irredundante:

- Si para todos los índices $j \neq j'$ se tiene que $J_j \not\subseteq J_{j'}$ entonces la descomposición es la mDII y se ha terminado.
- Si existen índices $j \neq j'$ tales que $J_j \subseteq J_{j'}$, entonces la descomposición es redundante, y se suprime el ideal $J_{j'}$ de la descomposición y se vuelve a comprobar si la descomposición es irredundante.

Como la descomposición m-irreducible está tomada por un número finito de ideales, entonces este algoritmo termina en un número finito de pasos, y se tiene un método para calcular la mDII de ideales.

Ejemplo 1.4.9. Sea $J = \langle X^4, X^3YZ^2, XY^3, Y^2, XZ^3 \rangle$. Como $XY^3 \in \langle Y^2 \rangle$, $\{X^4, X^3YZ^2, XY^3, Y^2, XZ^3\}$ es un sistema de generadores redundante de J , pero $\{X^4, X^3YZ^2, Y^2, XZ^3\}$ es SMGM. Haciendo uso del algoritmo descrito en el Lema 1.3.4 y retirando redundancias se tiene que

$$\begin{aligned} J &= \langle X^4, X^3, Y^2, XZ^3 \rangle \cap \langle X^4, YZ^2, Y^2, XZ^3 \rangle \\ &= \langle X^4, X^3, Y^2, XZ^3 \rangle \cap \langle X^4, Y, Y^2, XZ^3 \rangle \cap \langle X^4, Z^2, Y^2, XZ^3 \rangle \\ &= \langle X^3, Y^2, XZ^3 \rangle \cap \langle X^4, Y, XZ^3 \rangle \cap \langle X^4, Z^2, Y^2 \rangle. \end{aligned}$$

Y repitiendo el proceso para que no aparezca el término XZ^3 :

$$\begin{aligned} J &= \langle X^3, Y^2, X \rangle \cap \langle X^3, Y^2, Z^3 \rangle \cap \langle X^4, Y, X \rangle \cap \langle X^4, Y, Z^3 \rangle \cap \langle X^4, Z^2, Y^2 \rangle \\ &= \langle Y^2, X \rangle \cap \langle X^3, Y^2, Z^3 \rangle \cap \langle Y, X \rangle \cap \langle X^4, Y, Z^3 \rangle \cap \langle X^4, Z^2, Y^2 \rangle. \end{aligned}$$

Haciendo uso del algoritmo descrito en 1.4.8 para quitar redundancias, como $\langle X^3, Y^2, Z^3 \rangle, \langle Y^2, X \rangle \subseteq \langle Y, X \rangle$ obtenemos finalmente

$$J = \langle Y, X \rangle \cap \langle X^4, Y, Z^3 \rangle \cap \langle X^4, Z^2, Y^2 \rangle$$

que es la única mDII de J (salvo reordenación).

Se puede definir una descomposición irreducible irredundante (DII) de un ideal J general como $J = \bigcap_{i=1}^n J_i$ donde cada J_i es irreducible y distinto de los demás. Como esa definición no es especial para ideales monomiales, la existencia de ella y sus propiedades dependen de la noetherianidad del anillo, pero no es objeto de interés en este trabajo. Y como se ha visto que en un DI un ideal monomial no nulo $J \subseteq R$ es irreducible si y solo si es m-irreducible, para los ideales que se tratarán en adelante siempre se tiene la DII con todas las propiedades vistas.

Para terminar este capítulo se muestra en un ejemplo sencillo que, aunque el método definido en 1.3.4 proporciona una descomposición irreducible de ideales monomiales, no es trivial obtener una descomposición irredundante a partir de la descomposición obtenida, y con ello, motivar el estudio de los siguientes capítulos ya que proporcionan métodos más eficientes de obtener directamente la DII de un ideal monomial, libre de cuadrados en el caso del capítulo 2, y arbitrarios en el capítulo 3.

Ejemplo 1.4.10. Sean $I = \langle X, Y, Z \rangle$, $J = \langle V, W, T \rangle$ ideales irreducibles en $A[X, Y, Z, V, W, T]$, siendo A DI (aunque se podrían considerar m-irreducibles y estudiar su mDII si el anillo de coeficientes es cualquier anillo conmutativo unitario). Es claro entonces, aplicando 1.2.3 que

$$\begin{aligned} I \cap J &= \langle X, Y, Z \rangle \cap \langle V, W, T \rangle \\ &= \langle XV, XW, XT, YV, YW, YT, ZV, ZW, ZT \rangle \end{aligned}$$

El SMGM de este ideal está generado por 9 monomios producto de dos variables, luego al aplicar el método descrito en 1.3.4 se obtendría una descomposición de $2^9 = 512$ ideales, y sabemos que la irredundante está formada por dos ideales, por lo que el proceso de eliminación de ideales sobrantes requiere eliminar $2^9 - 2 = 510$ ideales, que obviamente no es algo trivial.

Capítulo 2

Métodos combinatorios

Después de haber explicado los conceptos necesarios sobre las descomposiciones de los ideales monomiales, se va a ver como se pueden relacionar los ideales monomiales con la teoría de grafos y la combinatoria. En especial se tratará el ideal de aristas de un grafo simple, el ideal de Stanley-Reisner y el ideal de facetas de un complejo simplicial. Para ello hay que conocer mejor este tipo de ideales. Se considera durante todo el capítulo A un DI, $R = A[X_1, X_2, \dots, X_d]$ e introduciendo un vértice para cada variable se define $V = \{v_1, \dots, v_d\}$.

Por el Teorema 1.3.7, si A es un DI, un ideal monomial es irreducible si y solo si es m -irreducible y por tanto a lo largo de este capítulo solo se estudian las descomposiciones irreducibles.

2.1. Ideales monomiales libres de cuadrados

Definición 2.1.1. Un monomio $\underline{X}^n \in [[\mathbb{R}]]$ es libre de cuadrados si cada n_i está en $\{0, 1\}$. Un ideal monomial $J \subseteq R$ es libre de cuadrados si tiene un sistema de generadores formado por monomios libres de cuadrados.

Ejemplo 2.1.2. Los monomios libres de cuadrados en $A[X, Y, Z]$ son:

$$1, X, Y, Z, XY, XZ, YZ, XYZ.$$

Un monomio es libre de cuadrados si y solo si no tiene ningún factor de la forma X_i^2 , es decir, si y solo si $\underline{X}^n = \text{red}(\underline{X}^n)$ según la definición 1.2.10.

Proposición 2.1.3. *Un ideal monomial $J \subseteq R$ es libre de cuadrados si y solo si $m\text{-rad}(J) = J$. En particular $m\text{-rad}(J)$ es libre de cuadrados.*

Como aplicación directa del Teorema 1.3.5, obtenemos que los ideales monomiales libres de cuadrados e irreducibles son aquellos generados por variables.

Proposición 2.1.4. *Un ideal monomial $J \subseteq R$ es libre de cuadrados e irreducible si y solo si existen enteros positivos k, t_1, \dots, t_k tales que*

$$1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq d$$

y $J = \langle X_{t_1}, \dots, X_{t_k} \rangle$.

Definición 2.1.5. Para cada subconjunto $V' \subseteq V$:

- sea $P_{V'} \subseteq R$ el ideal generado por las variables correspondientes a los elementos de V' , es decir $P_{V'} = \langle X_i | v_i \in V' \rangle$.
- sea $\underline{X}^{V'} \in R$ el monomio producto de las variables correspondientes a los elementos de V' , es decir $\underline{X}^{V'} = \prod_{v_i \in V'} X_i$.

Ejemplo 2.1.6. Algunos ejemplos que ilustran estos conceptos:

- $P_\emptyset = 0$.
- $\underline{X}^\emptyset = 1$.
- $P_{\{v_1, v_5\}} = \langle X_1, X_5 \rangle$.
- $\underline{X}^{\{v_1, v_5\}} = X_1 X_5$.
- $P_V = \langle X_1, \dots, X_d \rangle$.
- $\underline{X}^V = X_1 \cdots X_d$.

Proposición 2.1.7. *Un ideal monomial $J \subseteq R$ es libre de cuadrados si y solo si existen subconjuntos $V_1, \dots, V_n \subseteq V$ tales que $J = \bigcap_{i=1}^n P_{V_i}$.*

No se demuestra las dos proposiciones anteriores ya que su prueba se obtiene aplicando varios de los resultados expuestos a lo largo del trabajo.

Esta sección se concluye con unas notas de interés:

Nota 2.1.8. Si $V', V'' \subseteq V$, entonces $P_{V'} \subseteq P_{V''}$ si y solo si $V' \subseteq V''$.

Nota 2.1.9. Un ideal monomial $J \subseteq R$ es libre de cuadrados e irreducible si y solo si existe un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que $J = P_{V'}$.

Nota 2.1.10. Para d arbitrario, $d \geq 1$, por definición, para cada $V' \subseteq V$, el monomio $\underline{X}^{V'}$ es libre de cuadrados. Y todo monomio libre de cuadrados en R es de la forma $\underline{X}^{V'}$ para algún $V' \subseteq V$, siendo $V' = \text{Supp}(\underline{X}^{V'})$. Además, dados $V', V'' \subseteq V$, se tiene que $P_{V'} \subseteq P_{V''}$ si y solo si $\underline{X}^{V''} \in \langle \underline{X}^{V'} \rangle$.

2.2. Grafos e ideales de aristas

Geoméricamente, un grafo es un conjunto de vértices y aristas (líneas que unen vértices), pero se puede ver desde un punto de vista más combinatorio, y así se pueden relacionar grafos con ideales monomiales.

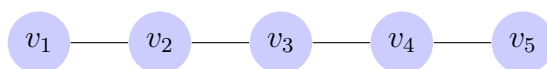
Definición 2.2.1. Un grafo con conjunto de vertices V es un par ordenado $G = (V, E)$, donde E es un conjunto de pares desordenados $v_i v_j$, con $v_i \neq v_j$. Un elemento v_i es un vértice de G . El conjunto E es el conjunto de aristas de G . Dada una arista $e = v_i v_j$, los puntos finales de e son v_i y v_j . Dos vértices son adyacentes si existe una arista e que les tiene como puntos finales. En este caso se dice que la arista $v_i v_j$ es incidente en v_i y v_j .

Esta definición implica que los grafos que se van a considerar son finitos y que son simples, es decir, sin bucles ni aristas múltiples.

A continuación se muestran algunos ejemplos de los grafos más conocidos.

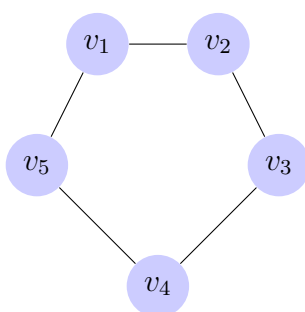
Para cada $d \geq 1$ se define la n -cadena P_d como el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, \dots, v_{d+1}\}$ y cuyo conjunto de aristas es $\{v_1 v_2, \dots, v_d v_{d+1}\}$.

Ejemplo 2.2.2. P_4 es de la forma:



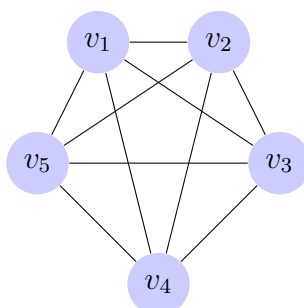
Para cada entero $d \geq 3$, un d -ciclo (denotado C_d) es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, \dots, v_d\}$ y cuyo conjunto de aristas es $v_1 v_2, \dots, v_{d-1} v_d, v_d v_1$.

Ejemplo 2.2.3. C_5 es de la forma:



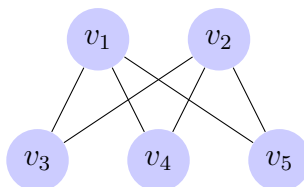
Para cada entero $d \geq 2$, el grafo completo en d vértices (denotado K_d) es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, \dots, v_d\}$, y cuyo conjunto de aristas es $\{v_i v_j | 1 \leq i < j \leq d\}$.

Ejemplo 2.2.4. K_5 es de la forma:



Dados $m, n > 1$, el grafo completo bipartito $K_{m,n}$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$ y $\{u_i v_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ su conjunto de aristas.

Ejemplo 2.2.5. $K_{2,3}$ es de la forma:



Definición 2.2.6. El ideal de aristas del grafo G es el ideal $I_G \subseteq R$ que está generado por los monomios correspondientes a las aristas de G :

$$I_G = \langle \{X_i X_j \mid v_i v_j \text{ es una arista en } G\} \rangle.$$

Por definición, el ideal de aristas I_G es libre de cuadrados.

Ejemplo 2.2.7. Por ejemplo, algunos ideales de aristas de los grafos conocidos:

- $I_{C_3} = (X_1 X_2, X_2 X_3, X_1 X_3) \subseteq A[X_1, X_2, X_3]$.
- $I_{K_4} = (X_1 X_2, X_1 X_3, X_1 X_4, X_2 X_3, X_2 X_4, X_3 X_4) \subseteq A[X_1, X_2, X_3, X_4]$.
- $I_{K_{2,3}} = (X_1 Y_1, X_1 Y_2, X_1 Y_3, X_2 Y_1, X_2 Y_2, X_2 Y_3) \subseteq A[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3]$.

2.3. Descomposición de los ideales de aristas

Ahora que se ha visto como son los grafos más sencillos, el objetivo es caracterizar las descomposiciones irreducibles de los ideales de aristas. Se va a mostrar un método para encontrar las descomposiciones irreducibles de los ideales monomiales libres de cuadrados cuadráticos. Pero antes es necesario introducir unos conceptos.

Definición 2.3.1. Si G es un grafo sobre el conjunto de vértices V , una cobertura de vértices de G es un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que para cada arista $v_i v_j$ en G o bien v_i o bien v_j está en V' .

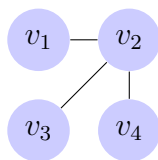
Se dice que una cobertura de vértices es una cobertura minimal de vértices (CMV) si no contiene ninguna otra cobertura de vértices de G .

Como V siempre es una cobertura de vértices, todo grafo admite una cobertura de vértices. Además, G no tiene aristas si y solo si \emptyset es una cobertura de vértices de G , y eso solo pasa si todo subconjunto de V es una cobertura de vértices de G .

Nota 2.3.2. Sea G un grafo sobre el conjunto de vértices V , y sean los conjuntos $V'', V' \subseteq V$. Entonces:

- Si V' es una cobertura de vértices de G y $V' \subseteq V''$, entonces V'' es una cobertura de vértices de G también.
- Como V es finito, cualquier cobertura de vértices de G contiene una CMV de G .

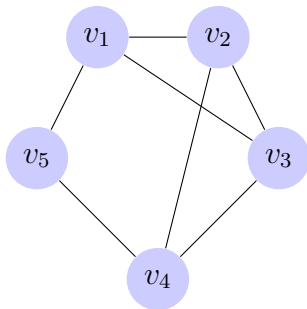
Ejemplo 2.3.3. Un grafo puede tener varias CMV distintas, e incluso que estas pueden ser de distinto tamaño, por ejemplo, tomando G el grafo siguiente:



se ve claramente que $\{v_2\}$ y $\{v_1, v_3, v_4\}$ son dos CMV distintas.

A continuación se muestra un ejemplo más completo del cálculo de las CMV de un grafo.

Ejemplo 2.3.4. Sea G el grafo siguiente:



- Primero se busca la mínima cobertura de vértices que contiene v_1 , y tenemos que v_1v_2, v_1v_3 y v_1v_5 están cubiertos, luego quedan las aristas v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4 y v_4v_5 .
 - Si se añade v_2 quedan sin cubrir v_3v_4 y v_4v_5 que se pueden cubrir añadiendo v_3 y v_5 o v_4 y se tendrían las dos posibles CMV $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ y $\{v_1, v_2, v_4\}$.
 - Si no se añade v_2 , hay que añadir v_3 y quedan sin cubrir v_2v_4 y v_4v_5 , por lo que se añade v_4 y se obtiene la cobertura de vértices $\{v_1, v_3, v_4\}$.
- Ahora se buscan CMV que no contengan v_1 , y entonces tiene que contener necesariamente v_2, v_3 y v_5 para que estén cubiertas las aristas que tienen a v_1 como punto final. Como están todos los vértices cubiertos se ha terminado con $\{v_2, v_3, v_5\}$, que implica que la cobertura $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ no es minimal.

Hay por lo tanto tres CMV, que son: $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$ y $\{v_2, v_3, v_5\}$.

Se estudia ahora la relación que existe entre las coberturas de vértices de un grafo y las descomposiciones irreducibles.

Lema 2.3.5. *Sea G un grafo sobre el conjunto de vértices V y sea $V' \subseteq V$, entonces $I_G \subseteq P_{V'}$ si y solo si V' es una cobertura de vértices de G .*

Demostración. Se puede asumir $V' = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \{v_1, \dots, v_d\}$ sin pérdida de generalidad.

Para la primera implicación, se asume que $I_G \subseteq P_{V'}$ y se quiere ver que V' es una cobertura de vértices de G . Sea v_iv_j una arista en G . Entonces $X_iX_j \in I_G \subseteq P_{V'} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Eso significa que $X_iX_j \in \langle X_k \rangle$ para algún $1 \leq k \leq n$ por lo que o bien $i = k$ o $j = k$, es decir o bien $v_i = v_k$ o bien $v_j = v_k$. Como $v_k \in V'$, V' es una cobertura de vértices de G .

Para la otra implicación, se asume que V' es una cobertura de vértices de G y se quiere probar que $I_G \subseteq P_{V'}$. Para ello hay que demostrar que todos los generadores de I_G están en $P_{V'}$. Se fija un generador $X_iX_j \in I_G$, que corresponde a una arista v_iv_j en G . Como V' es una cobertura de vértices de G , entonces o bien $v_i \in V'$ o bien $v_j \in V'$. Eso implica que o $X_i \in P_{V'}$ o $X_j \in P_{V'}$. Se llega a que $X_iX_j \in P_{V'}$, como queríamos demostrar. \square

El objetivo de esta sección era caracterizar las descomposiciones irreducibles de los ideales de aristas, que es precisamente lo que se demuestra a continuación.

Teorema 2.3.6. *Sea G un grafo sobre el conjunto de vértices V , entonces el ideal de aristas $I_G \subseteq R$ tiene las siguientes descomposiciones irreducibles:*

$$I_G = \bigcap_{V'} P_{V'} = \bigcap_{V' \text{ min.}} P_{V'}$$

donde la primera intersección es tomando todas las coberturas de vértices de G y la segunda intersección es tomando las CMV, y entonces es la DII.

Demostración. Por 2.1.8, $P_{V'} \subseteq P_{V''}$ si y solo si $V' \subseteq V''$, luego como toda cobertura de vértices contiene una minimal, se tiene $P_{V' \text{ min.}} \subseteq P_{V'}$ luego $\bigcap_{V' \text{ min.}} P_{V'} \subseteq \bigcap_{V'} P_{V'}$ y además la intersección correspondiente a las CMV es irredundante ya que no hay ninguna otra cobertura de vértices contenida en una CMV.

La contención $\bigcap_{V'} P_{V'} \subseteq \bigcap_{V' \text{ min.}} P_{V'}$ es trivial, por lo que las dos descomposiciones corresponden al mismo ideal.

El hecho de que $I_G \subseteq \bigcap_{V'} P_{V'}$ viene dado por el lema anterior.

Para la última contención, $I_G \supseteq \bigcap_{V'} P_{V'}$, se observa que I_G es libre de cuadrados, y por la Proposición 2.1.7, existen subconjuntos V_1, \dots, V_n tales que $I_G = \bigcap_{j=1}^n P_{V_j}$. Cada índice j satisface que $I_G \subseteq P_{V_j}$, y por el lema anterior V_j es una cobertura de vértices de G . Entonces $I_G = \bigcap_{j=1}^n P_{V_j} \supseteq \bigcap_{V'} P_{V'}$. \square

Ejemplo 2.3.7. Volviendo al Ejemplo 2.3.4, se ha visto que las CMV de G eran: $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$ y $\{v_2, v_3, v_5\}$. Luego aplicando el Teorema 2.3.6, se tiene que

$$\begin{aligned} I_G &= \langle X_1X_2, X_1X_3, X_1X_5, X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4, X_4X_5 \rangle \\ &= \langle X_1, X_2, X_4 \rangle \cap \langle X_1, X_3, X_4 \rangle \cap \langle X_2, X_3, X_5 \rangle. \end{aligned}$$

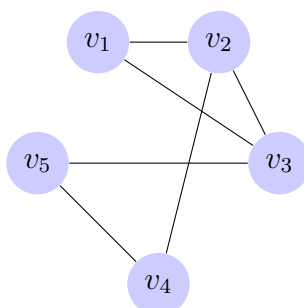
Como se tiene que la DII es única salvo ordenación por 1.4.6, si la DII de I_G es $\bigcap_{i=1}^n P_{V_i}$, se tiene que las CMV de G son precisamente V_1, \dots, V_n .

Es sencillo identificar los ideales que son de la forma I_G para algún grafo G sobre el conjunto de vértices V , ya que son precisamente aquellos cuyo SMGM solo contiene elementos de la forma X_iX_j con $i \neq j$, es decir, los ideales monomiales cuadráticos (es decir aquellos cuyos generadores son monomios de segundo grado) libres de cuadrados. Por lo que se ha visto una forma sencilla, a través de los grafos, de calcular la DII de este tipo de ideales, para aclarar esto, se añade un ejemplo.

Ejemplo 2.3.8. Se considera en $A[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$ el ideal

$$I = \langle X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3, X_2X_4, X_3X_5, X_4X_5 \rangle.$$

Tomando el conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, se puede identificar I con el grafo G sobre V tal que $I = I_G$ de la siguiente manera:



Igual que anteriormente, se buscan las CMV de G y obtenemos:

$$\{v_1, v_2, v_5\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_5\}.$$

Y aplicando el Teorema 2.3.6 la DII de I es:

$$I = \langle X_1, X_2, X_5 \rangle \cap \langle X_1, X_3, X_4 \rangle \cap \langle X_2, X_3, X_4 \rangle \cap \langle X_2, X_3, X_5 \rangle.$$

2.4. Complejos simpliciales e ideales de Stanley-Reisner

Anteriormente se ha descrito un método para calcular las DII de los ideales monomiales cuadráticos libres de cuadrados. Ahora se presentan algunas herramientas que permiten el mismo cálculo para ideales monomiales libres de cuadrados en general (no necesariamente aquellos que son generados únicamente por monomios de segundo grado). Para ello se utiliza la noción de complejo simplicial, que se puede representar como si fuera un grafo en mayores dimensiones ya que no sólo tiene vértices y aristas, sino que también puede tener triángulos sombreados, tetraedros sólidos, etc. Se aborda nuevamente desde un punto de vista combinatorio para dar una definición formal, aunque son elementos interesantes en otras áreas.

Definición 2.4.1. Un complejo simplicial en V es un conjunto no vacío Δ de subconjuntos de V tal que dados dos subconjuntos $F, G \subseteq V$, si $F \subseteq G$ y $G \in \Delta$, entonces $F \in \Delta$.

Un elemento de Δ se llama una cara de Δ .

Una cara de la forma $\{v_i\}$ se llama un vértice de Δ .

Una cara de la forma $\{v_i, v_j\}$ se llama una arista de Δ .

Un elemento maximal de Δ respecto a la inclusión es una faceta de Δ .

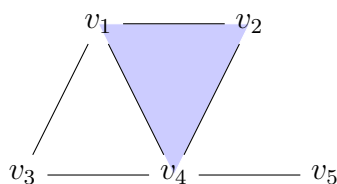
El $(d-1)$ -símplice está formado por todos los subconjuntos de V y se denota por Δ_{d-1} .

Como V es finito, todas las caras de Δ están contenidas en alguna faceta de Δ , y como Δ es no vacío y cerrado para la inclusión, se tiene que $\emptyset \in \Delta$, es decir, es una cara de Δ .

Todo grafo G produce un complejo simplicial, en concreto el que contiene \emptyset junto con los conjuntos unipuntuales $\{v_i\}$ y todo par $\{v_i, v_j\}$ tal que $v_i v_j$ es una arista de G .

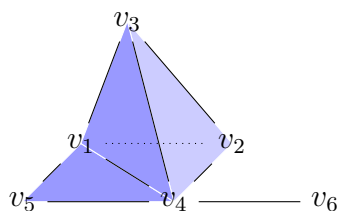
Como se ha hecho con los grafos de aristas, es bastante útil representar geoméricamente los complejos simpliciales, al menos cuando el tamaño de las caras es pequeño. La idea es la siguiente: cada vértice corresponde a un punto, cada arista al segmento que une dos vértices, cada cara de la forma $\{v_i, v_j, v_k\}$ con i, j, k distintos a un triángulo sombreado entre esos vértices, y cada cara de la forma $\{v_i, v_j, v_k, v_l\}$ con i, j, k, l distintos corresponde a un tetraedro sólido, etc. El ejemplo siguiente ilustrará esta idea.

Ejemplo 2.4.2. Se muestran los siguientes complejos simpliciales:



Este complejo simplicial Δ_1 consiste en un triángulo sombreado, y tres aristas (además de las aristas que delimitan el triángulo). Tiene las siguientes caras:

- Trivial $\rightarrow \emptyset$.
- Vértices $\rightarrow \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}$.
- Aristas $\rightarrow \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}$.
- Triángulos sombreados $\rightarrow \{v_1, v_2, v_4\}$.
- Facetas $\rightarrow \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}$.



Este complejo simplicial Δ_2 consiste en un tetraedro sólido, un triángulo sombreado (sin contar los que delimitan el tetraedro) y una arista (sin contar las que delimitan tanto el triángulo como el tetraedro). Tiene las siguientes caras:

- Trivial $\rightarrow \emptyset$.
- Vértices $\rightarrow \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}$.
- Aristas $\rightarrow \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}$.
- Triángulos sombreados $\rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}$.
- Tetraedros sólidos $\rightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
- Facetas $\rightarrow \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}$.

Definición 2.4.3. Sea Δ un complejo simplicial en V , y $R = A[X_1, \dots, X_d]$. El ideal de Stanley-Reisner asociado a Δ es el ideal generado por las no-caras de Δ , es decir:

$$J_\Delta = \langle \underline{X}^{V'} \mid V' \subseteq V \text{ y } V' \notin \Delta \rangle.$$

Por definición, como $\underline{X}^{V'}$ es libre de cuadrados, el ideal de Stanley-Reisner J_Δ también lo es.

Ejemplo 2.4.4. Sean Δ_1 y Δ_2 los dos complejos simpliciales del Ejemplo 2.4.2. Los ideales Stanley-Reisner asociados a cada complejo simplicial son:

- Usando las caras de Δ_1 determinadas en el Ejemplo 2.4.2, se observa que sus no-caras son:

$$\begin{aligned} & \{v_1, v_5\} \quad \{v_2, v_5\} \quad \{v_2, v_3\} \quad \{v_3, v_5\} \\ & \{v_1, v_2, v_3\} \quad \{v_1, v_2, v_5\} \quad \{v_1, v_3, v_4\} \quad \{v_1, v_3, v_5\} \quad \{v_1, v_4, v_5\} \quad \{v_2, v_3, v_4\} \\ & \quad \{v_2, v_3, v_5\} \quad \{v_2, v_4, v_5\} \quad \{v_3, v_4, v_5\} \\ & \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \{v_1, v_2, v_3, v_5\} \quad \{v_1, v_2, v_4, v_5\} \quad \{v_1, v_3, v_4, v_5\} \quad \{v_2, v_3, v_4, v_5\} \\ & \quad \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \end{aligned}$$

Entonces los generadores de J_{Δ_1} son:

$$\begin{aligned} & X_1X_5 \quad X_2X_5 \quad X_2X_3 \quad X_3X_5 \\ & X_1X_2X_3 \quad X_1X_2X_5 \quad X_1X_3X_4 \quad X_1X_3X_5 \quad X_1X_4X_5 \quad X_2X_3X_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc}
& X_2X_3X_5 & X_2X_4X_5 & X_3X_4X_5 & & \\
X_1X_2X_3X_4 & X_1X_2X_3X_5 & X_1X_2X_4X_5 & X_1X_3X_4X_5 & X_2X_3X_4X_5 & \\
& & & X_1X_2X_3X_4X_5 & &
\end{array}$$

Eliminando las redundancias se obtiene que

$$J_{\Delta_1} = \langle X_1X_5, X_2X_5, X_2X_3, X_3X_5, X_1X_3X_4 \rangle.$$

- Repitiendo el mismo proceso para Δ_2 se obtiene

$$J_{\Delta_2} = \langle X_1X_6, X_2X_5, X_2X_6, X_3X_5, X_3X_6, X_5X_6 \rangle$$

Nota 2.4.5. Igual que en el caso de los ideales de aristas, es sencillo identificar los ideales que son de la forma J_{Δ} para algún complejo simplicial Δ sobre el conjunto de vértices V , ya que son precisamente los ideales monomiales libres de cuadrados.

Por definición, se tiene que todo ideal de Stanley-Reisner es libre de cuadrados, pero además, se puede observar que todo ideal libre de cuadrados se puede identificar como el ideal de Stanley-Reisner de un complejo simplicial:

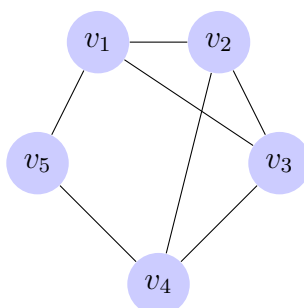
Si J es un ideal monomial libre de cuadrados en $A[X_1, \dots, X_d]$, se toma $V = \{v_1, \dots, v_d\}$ y se puede escribir J en función de su SMGM: $J = \langle \underline{X}^{V_1}, \dots, \underline{X}^{V_n} \rangle$ para algunos conjuntos $V_1, \dots, V_n \subseteq V$.

Tomando $\Delta = \{V' | V_k \not\subseteq V', \forall k \in \{1, \dots, n\}\}$, se tiene por definición que $J_{\Delta} = \langle \underline{X}^{V'} | V' \subseteq V \text{ y } V' \notin \Delta \rangle = \langle \underline{X}^{V'} | V' \subseteq V \text{ y } \exists k \in \{1, \dots, n\}, V_k \subseteq V' \rangle = \langle \underline{X}^{V'} | V' \subseteq V \text{ y } \underline{X}^{V'} \in J \rangle = J$. Se ha justificado que cualquier ideal monomial libre de cuadrados se puede identificar con el ideal de Stanley-Reisner de algún complejo simplicial, además, a lo largo de la memoria, se verán ejemplos donde se muestra de forma constructiva como encontrar el ideal Stanley-Reisner asociado.

En particular, dado un grafo G sobre el conjunto de vértices V , el ideal de aristas I_G se puede escribir también de la forma J_{Δ_G} para algún complejo simplicial Δ_G . El objetivo ahora es identificar ese complejo simplicial.

Definición 2.4.6. Sea G un grafo sobre el conjunto de vértices V . Se dice que un subconjunto $F \subseteq V$ es independiente en G si ninguno de los vértices de F son adyacentes en G . Se dice que un subconjunto independiente es maximal si lo es respecto a la contención. Se denotará Δ_G el conjunto de los subconjuntos independientes de G . Se llama el complejo independiente de G .

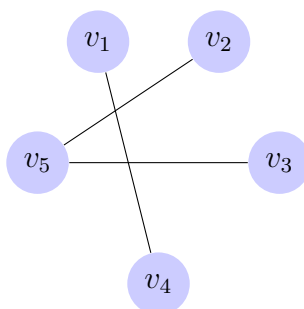
Ejemplo 2.4.7. Para el grafo del Ejemplo 2.3.4, que gráficamente es:



Sus conjuntos independientes son

- \emptyset .
- $\{v_1\}$ $\{v_2\}$ $\{v_3\}$ $\{v_4\}$ $\{v_5\}$.
- $\{v_1, v_4\}$ $\{v_2, v_5\}$ $\{v_3, v_5\}$.

Y los conjuntos maximales independientes son $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_3, v_5\}$. Gráficamente, Δ_G se puede ver como el “complementario” de G :



Nota 2.4.8. El conjunto vacío, así como los conjuntos unipuntuales son siempre conjuntos independientes. Y todo subconjunto de un conjunto independiente es también independiente.

Lema 2.4.9. *Existe la siguiente relación entre la cobertura de vértices de un grafo G y las caras de Δ_G :*

- (I) *Un subconjunto $F \subseteq V$ es independiente en G si y solo si $V \setminus F$ es una cobertura de vértices de G .*
- (II) *Un subconjunto independiente $F \subseteq V$ en G es maximal si y solo si la cobertura de vértices $V \setminus F$ es una CMV.*

Demostración. (I) Por definición si un conjunto F es independiente, ninguno de sus vértices son adyacentes entre sí, por lo que lo que todas las aristas tiene al menos un punto final en $V \setminus F$, lo que implica que $V \setminus F$ es una cobertura de vértices.

Y si $V \setminus F$ es una cobertura de vértices, entonces todas las aristas de G tienen un punto final en $V \setminus F$, luego F es un subconjunto independiente.

(II) Si F es maximal significa que todo vértice $v_i \in V \setminus F = K$ es adyacente a un vértice de F , por lo que $K \setminus \{v_i\}$ no sería una cobertura de vértices para todo $v_i \in K$, lo que implica que $K = V \setminus F$ es una CMV.

Y si $K = V \setminus F$ es una CMV, entonces para todo $v_i \in K$, $K \setminus \{v_i\}$ no es una cobertura de vértices, es decir, para todo $v_i \in K$ existe una arista $v_i v_j$ con $v_i, v_j \notin K \setminus \{v_i\}$, lo que implica $v_i, v_j \in F \cup \{v_i\}$ y son adyacentes, luego para todo $v_i \in K$, $F \cup \{v_i\}$ no es independiente, que significa que F es maximal. □

Teorema 2.4.10. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Sea $R = A[X_1, \dots, X_d]$. Entonces $I_G = J_{\Delta_G}$.*

Demostración. Para la primera contención, se considera un generador cualquiera de I_G , que es de la forma $X_i X_j$ para $v_i v_j \in E$. Como se tiene que $\{v_i, v_j\}$ son adyacentes en G , entonces no es un conjunto independiente, luego es una no-cara de Δ_G , y entonces $X_i X_j$ se encuentra en el ideal Stanley-Reisner asociado a Δ_G .

Para la contención inversa, se considera un generador de J_{Δ_G} , dado por una no-cara de Δ_G , $V' \notin \Delta_G$. Eso significa que V' no es independiente en G , luego debe contener al menos un par de vértices v_i, v_j que sean adyacentes en G . Entonces $X_i X_j$ es un generador de I_G y se tiene que $\underline{X}^{V'} \in \langle X_i X_j \rangle \subseteq I_G$, como queríamos demostrar. □

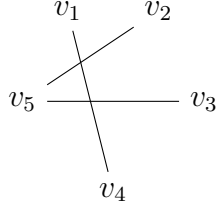
Ejemplo 2.4.11. Se va a ilustrar esa igualdad con el grafo del Ejemplo 2.3.4.

Se había visto en un ejemplo anterior que el ideal de aristas asociado a ese grafo era:

$$I_G = \langle X_1 X_2, X_1 X_3, X_1 X_5, X_2 X_3, X_2 X_4, X_3 X_4, X_4 X_5 \rangle$$

Sus conjuntos maximales independientes también se han estudiado:

$\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}$. Gráficamente se tenía Δ_G :



Por lo que las no-caras de Δ_G son los subconjuntos de $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ siguientes:

$$\begin{aligned} & \{v_1, v_2\} \quad \{v_1, v_3\} \quad \{v_1, v_5\} \quad \{v_2, v_3\} \quad \{v_2, v_4\} \quad \{v_3, v_4\} \quad \{v_4, v_5\} \quad \{v_1, v_2, v_3\} \\ & \{v_1, v_2, v_4\} \quad \{v_1, v_2, v_5\} \quad \{v_1, v_3, v_4\} \quad \{v_1, v_3, v_5\} \quad \{v_1, v_4, v_5\} \quad \{v_2, v_3, v_4\} \\ & \{v_2, v_3, v_5\} \quad \{v_2, v_4, v_5\} \quad \{v_3, v_4, v_5\} \quad \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad \{v_1, v_2, v_3, v_5\} \\ & \{v_1, v_2, v_4, v_5\} \quad \{v_1, v_3, v_4, v_5\} \quad \{v_2, v_3, v_4, v_5\} \quad \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \end{aligned}$$

Entonces, el ideal

$$J_{\Delta_G} = \langle X_1X_2, X_1X_3, X_1X_5, X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4, X_4X_5 \rangle = I_G$$

como ya se había visto, pero ejemplifica el teorema.

Definición 2.4.12. Sea Δ un complejo simplicial.

- La dimensión de una cara $F \in \Delta$ es $|F| - 1$.
- La dimensión de Δ , denotada $\dim(\Delta)$, es la mayor de las dimensiones de las caras de Δ .
- El complejo simplicial Δ es puro si todas sus facetas tienen la misma dimensión.
- Para $i = -1, 0, \dots, \dim(\Delta)$, el número de caras i -dimensionales de Δ se denota por $f_i(\Delta)$, y el f -vector de Δ es el vector

$$f(\Delta) = (f_0(\Delta), f_1(\Delta), \dots, f_{\dim(\Delta)}(\Delta)).$$

Ejemplo 2.4.13. Por la definición anterior, la única cara que tiene dimensión -1 es la cara vacía y un grafo (con al menos una arista) es de dimensión 1.

Como el conjunto de las facetas de un grafo es el conjunto de sus caras maximales, se puede calcular la dimensión de un complejo simplicial como la máxima de las dimensiones de sus facetas.

Para ilustrarlo se consideran los complejos simpliciales del Ejemplo 2.4.2.

Para Δ_1 se tiene que $\dim(\Delta_1) = 2$, ya que sus facetas son $\{v_1, v_2, v_4\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, y $f(\Delta_1) = (5, 6, 1)$.

Para Δ_2 se tiene $\dim(\Delta_2) = 3$ ya que sus facetas son $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_1, v_4, v_5\}$, $\{v_4, v_6\}$, y se tiene $f(\Delta_2) = (6, 9, 5, 1)$.

2.5. Descomposición de los ideales de Stanley-Reisner

El objetivo de esta sección es obtener un método de cálculo de DII para los ideales Stanley-Reisner de complejos simpliciales. De esta manera se obtendrá un método para calcular la DII de cualquier ideal monomial libre de cuadrados.

Definición 2.5.1. Para cada subconjunto $F \subseteq V$, se define $Q_F \subseteq R$ como el ideal generado por los no-elementos de F , es decir:

$$Q_F = \langle \{X_i | v_i \notin F\} \rangle.$$

Ejemplo 2.5.2. Sobre $V = \{V_1, \dots, V_6\}$ se tiene:

- $Q_\emptyset = \langle X_1, \dots, X_6 \rangle$.
- $Q_{\{v_2, v_5\}} = \langle X_1, X_3, X_4, X_6 \rangle$.
- $Q_V = \emptyset$.

En general, si $F \subseteq V$, entonces $Q_F = P_{V \setminus F}$ por definición.

Se había visto que una consecuencia del Teorema 1.3.5 era que un ideal monomial $J \subseteq R$ es libre de cuadrados e irreducible si y solo si existían subconjuntos $V' \subseteq V$ tales que $J = P_{V'}$, por lo que ahora se puede decir que un ideal monomial $J \subseteq R$ es libre de cuadrados e irreducible si y solo si existe un subconjunto $F \subseteq V$ tal que $J = Q_F$.

Nota 2.5.3. (I) Si $F, G \subseteq V$, entonces $Q_F \subseteq Q_G$ si y solo si $G \subseteq F$.

(II) Un ideal monomial $J \subseteq R$ es libre de cuadrados si y solo si existen subconjuntos $F_1, \dots, F_n \subseteq V$ tales que $J = \bigcap_{i=1}^n Q_{F_i}$ por la Proposición 2.1.7.

Igual que se hizo en su momento con los ideales de aristas, se va a demostrar la relación que hay entre las descomposiciones irreducibles de los ideales libres de cuadrados con las caras de los complejos simpliciales.

Lema 2.5.4. Sea Δ un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices V y $F \subseteq V$. Entonces $J_\Delta \subseteq Q_F$ si y solo si F es una cara de Δ .

Demostración. Analizaremos los tres casos siguientes:

- Si $F = \emptyset$, entonces se deduce fácilmente el resultado gracias al hecho de que $J_\Delta \subseteq \langle X_1, \dots, X_d \rangle = Q_\emptyset$, y $\emptyset \in \Delta$ siempre.

- El caso $F = V$ también se razona de forma sencilla ya que $Q_V = 0$, y como $J_\Delta = \langle \underline{X}^{V'} \mid V' \subseteq V \text{ y } V' \notin \Delta \rangle$, se tiene que $J_\Delta = 0$ si y solo si no hay ningún $V' \notin \Delta$, luego $V (= F)$ en particular es una cara de Δ , que es lo que se quería probar.
- Si $\emptyset \neq F \neq V$, se puede asumir que $F = \{v_1, \dots, v_n\}$ reordenando los vértices si es necesario, por lo que $V \setminus F = \{v_{n+1}, \dots, v_d\}$, luego $Q_F = \langle X_{n+1}, \dots, X_d \rangle$.

Para probar la primera implicación (\Rightarrow) se razona por contrarecíproco: Se asume que $F \notin \Delta$. Por definición, $\underline{X}^F = X_1 \cdots X_n \in J_\Delta$. Como es trivial que $\underline{X}^F \notin Q_F$, se tiene $J_\Delta \not\subseteq Q_F$, luego se ha terminado.

Para probar $F \in \Delta \Rightarrow J_\Delta \subseteq Q_F$, se asume que $F \in \Delta$, y se prueba que cada generador de J_Δ está contenido en Q_F . Para ello, se fija un generador $\underline{X}^{V'} \in J_\Delta$, siendo V' una no-cara de Δ , es decir $V' \notin \Delta$. Como $F \in \Delta$, la propia definición de complejo simplicial muestra que $V' \not\subseteq F$ (ya que es cerrado para la inclusión). Entonces existe i tal que $v_i \in V' \setminus F$, y entonces $X_i \in Q_F$. Se tiene que $\underline{X}^{V'} \in \langle X_i \rangle \subseteq Q_F$, como queríamos demostrar.

□

Teorema 2.5.5. *Sea Δ un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices V . El ideal de Stanley-Reisner $J_\Delta \subseteq R$ se descompone en ideales irreducibles de la siguiente forma:*

$$J_\Delta = \bigcap_{F \in \Delta} Q_F = \bigcap_{F \text{ faceta}} Q_F$$

donde la primera intersección se toma sobre todas las caras de Δ y la segunda sobre todas las facetas de Δ . La segunda intersección es la DII.

Demostración. Por lo comentado en el primer punto de la Nota 2.5.3, se tiene que la segunda descomposición es DII.

Es inmediato que $\bigcap_{F \in \Delta} Q_F \subseteq \bigcap_{F \text{ faceta}} Q_F$.

La contención $\bigcap_{F \text{ faceta}} Q_F \subseteq \bigcap_{F \in \Delta} Q_F$ viene del hecho que toda cara de Δ está contenida en una faceta junto con la aplicación del primer punto de 2.5.3 de nuevo. Luego las dos descomposiciones son equivalentes.

La contención $J_\Delta \subseteq \bigcap_{F \in \Delta} Q_F$ se ha demostrado en el Lema 2.5.4.

Para terminar, la contención $J_\Delta \supseteq \bigcap_{F \in \Delta} Q_F$ se basa en que J_Δ es un ideal libre de cuadrados, y aplicando en esta ocasión el segundo punto de la Nota 2.5.3 se tiene que existen subconjuntos F_1, \dots, F_n tales que $J_\Delta = \bigcap_{j=1}^n Q_{F_j}$. Cada índice j satisface por tanto $J_\Delta \subseteq Q_{F_j}$ luego aplicando de nuevo el Lema

2.5. DESCOMPOSICIÓN DE LOS IDEALES DE STANLEY-REISNER 47

2.5.4 se tiene que F_j debe ser una cara de Δ . Por lo que se ha obtenido que $J_\Delta = \bigcap_{j=1}^n Q_{F_j} \supseteq \bigcap_{F \in \Delta} Q_F$, como queríamos demostrar. \square

Ejemplo 2.5.6. El teorema anterior proporciona la DII de un ideal de Stanley-Reisner J_Δ a partir del cálculo de los ideales Q_F correspondientes a sus facetas.

Por ejemplo, tomando J_{Δ_1} del Ejemplo 2.4.2, se tiene que

$$\begin{aligned} Q_{\{v_1, v_2, v_4\}} &= \langle X_3, X_5 \rangle, & Q_{\{v_1, v_3\}} &= \langle X_2, X_4, X_5 \rangle, \\ Q_{\{v_3, v_4\}} &= \langle X_1, X_2, X_5 \rangle, & Q_{\{v_4, v_5\}} &= \langle X_1, X_2, X_3 \rangle. \end{aligned}$$

En el Ejemplo 2.4.4 se había calculado

$$J_{\Delta_1} = \langle X_1 X_5, X_2 X_5, X_2 X_3, X_3 X_5, X_1 X_3 X_4 \rangle.$$

Y por el Teorema 2.5.5:

$$J_{\Delta_1} = \langle X_3, X_5 \rangle \cap \langle X_2, X_4, X_5 \rangle \cap \langle X_1, X_2, X_5 \rangle \cap \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$$

es su DII. Tomando J_{Δ_2} del mismo ejemplo, se calculan los ideales

$$Q_{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}} = \langle X_5, X_6 \rangle, \quad Q_{\{v_1, v_4, v_5\}} = \langle X_2, X_3, X_6 \rangle, \quad Q_{\{v_4, v_6\}} = \langle X_1, X_2, X_3, X_5 \rangle.$$

Se había calculado en 2.4.4

$$J_{\Delta_2} = \langle X_1 X_6, X_2 X_6, X_3 X_5, X_3 X_6, X_5 X_6, X_1 X_2 X_5, X_2 X_4 X_5 \rangle$$

y por 2.5.5:

$$J_{\Delta_2} = \langle X_5, X_6 \rangle \cap \langle X_2, X_3, X_6 \rangle \cap \langle X_1, X_2, X_3, X_5 \rangle.$$

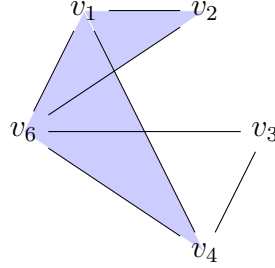
Ejemplo 2.5.7. Se va a mostrar un ejemplo de como calcular la DII de un ideal libre de cuadrados cualquiera, sea

$$J = \langle X_1 X_3, X_2 X_3, X_2 X_4, X_3 X_4 X_6, X_5 \rangle \subseteq A[X_1, \dots, X_6].$$

Primero hay que encontrar el complejo simplicial Δ sobre $V = \{v_1, \dots, v_6\}$ tal que $J = J_\Delta$. Como $J_\Delta = \langle \underline{X}^{V'} \mid V' \subseteq V \text{ y } V' \notin \Delta \rangle$ se busca Δ como el conjunto de caras correspondientes a los monomios libres de cuadrados que no están en J . Es decir:

$$\Delta = \{ \emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_6\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \\ \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}, \{v_1, v_2, v_6\}, \{v_1, v_4, v_6\} \}.$$

Geoméricamente, Δ es:



Por lo tanto, las facetas de Δ son:

$$\{v_1, v_2, v_6\}, \{v_1, v_4, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_6\}.$$

Por lo que, aplicando el Teorema 2.5.5 se tiene que

$$J = J_\Delta = \langle X_3, X_4, X_5 \rangle \cap \langle X_2, X_3, X_5 \rangle \cap \langle X_1, X_2, X_5, X_6 \rangle \cap \langle X_1, X_2, X_4, X_5 \rangle.$$

Teorema 2.5.8. *Sea G un grafo sobre el conjunto de vértices V . El ideal $I_G \subseteq R$ tiene entonces la siguiente descomposición irreducible:*

$$I_G = \bigcap_{F \text{ indep.}} Q_F = \bigcap_{F \text{ max. indep.}} Q_F$$

donde la primera intersección se toma sobre todos los subconjuntos independientes en G y la segunda sobre todos los subconjuntos independientes maximales en G . La segunda intersección es la DII.

Demostración. Por definición, los subconjuntos independientes en G son las caras de Δ_G , y los maximales son las facetas de Δ_G . Por tanto, el resultado se obtiene del Teorema 2.5.5. \square

Ejemplo 2.5.9. Se considera el ideal de aristas del Ejemplo 2.3.4:

$$I_G = \langle X_1X_2, X_1X_3, X_1X_5, X_2X_3, X_2X_4, X_3X_4, X_4X_5 \rangle$$

del cual se han identificado sus conjuntos independientes maximales en 2.4.7:

$$\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}.$$

Aplicando entonces el Teorema 2.5.8 se tiene

$$I_G = Q_{\{v_1, v_4\}} \cap Q_{\{v_2, v_5\}} \cap Q_{\{v_3, v_5\}} = \langle X_2, X_3, X_5 \rangle \cap \langle X_1, X_3, X_4 \rangle \cap \langle X_1, X_2, X_4 \rangle,$$

que coincide con lo obtenido en el Ejemplo 2.3.7.

En general, dada la DII $I_G = \bigcap_{i=1}^n P_{V_i}$ como se da en el Teorema 2.3.6, se deduce que los subconjuntos independientes maximales en G son precisamente $V \setminus V_1, \dots, V \setminus V_n$. El Teorema 2.5.8 proporciona la DII $I_G = \bigcap_{F \text{ max. inde.}} Q_F$, por lo que la unicidad de esta descomposición se deduce del Teorema 1.4.6.

2.6. Ideales de facetas y su descomposición

La idea de esta sección es estudiar una versión del ideal de aristas adaptado a los complejos simpliciales, que se llamará “ideal de facetas”. Proporciona una construcción algebraica definida en términos de los datos combinatorios de un complejo simplicial. Se mostrarán las propiedades combinatorias que proporcionan las descomposiciones irreducibles.

Definición 2.6.1. Sea Δ un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices V . El ideal de facetas de R asociado a Δ es el ideal generado por las facetas de Δ :

$$K_{\Delta} = \langle \underline{X}^F \mid F \text{ es una faceta en } \Delta \rangle.$$

Ejemplo 2.6.2. Se consideran los complejos simpliciales del Ejemplo 2.4.2 Δ_1 y Δ_2 .

Se habían calculado las facetas de $\Delta_1 : \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}$. Entonces el ideal de facetas de Δ_1 es. $K_{\Delta_1} = \langle X_1X_2X_4, X_1X_3, X_3X_4, X_4X_5 \rangle$.

De la misma forma se tienen las facetas de $\Delta_2 : \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}$ así que $K_{\Delta_2} = \langle X_1X_2X_3X_4, X_1X_4X_5, X_4X_6 \rangle$.

Por convención, se define $K_{\emptyset} = R$ y de esa forma $K_{\Delta} \neq 0$ para todo Δ .

El ideal de facetas es un ideal libre de cuadrados, de hecho, como las facetas de Δ no tienen relación de contención entre ellas, generan Δ_K directamente de forma irredundante, es decir, el conjunto $\{\underline{X}^F \mid F \text{ es una faceta en } \Delta\}$ es un SMGM de K_{Δ} .

Se trata ahora de identificar los ideales $P_{V'}$ que se encuentran en la DII de un ideal de facetas.

Definición 2.6.3. Sea Δ un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices V . Una cobertura de vértices de Δ es un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que para cada faceta $F \in \Delta$ el conjunto $F \cap V' \neq \emptyset$. Una cobertura de vértices se dice minimal si no contiene propiamente ninguna otra cobertura de vértices.

El conjunto de coberturas de vértices de Δ cumple que si $V' \subseteq V$ es una cobertura de vértices de Δ y $V' \subseteq V'' \subseteq V$ entonces V'' es también una cobertura de vértices de Δ . Como V es finito, toda cobertura de vértices contiene una cobertura minimal de vértices.

Ejemplo 2.6.4. Si $\Delta \neq \{\emptyset\}$ entonces V es una cobertura de vértices.

Si $\Delta = \{\{v_{i_1}\}, \dots, \{v_{i_n}\}, \emptyset\}$ entonces las coberturas de vértices son los subconjuntos de V que contienen a todos los v_{i_j} .

Se calculan las coberturas de vértices de Δ_1 del Ejemplo 2.4.2: Si $v_1 \in V'$ entonces están sin cubrir las facetas $\{v_3, v_4\}$ y $\{v_4, v_5\}$ que se cubren o bien

añadiendo v_4 o bien añadiendo $\{v_3, v_5\}$. Si $v_1 \notin V'$ entonces se necesita que esté $\{v_3, v_2\}$ o $\{v_3, v_4\}$ para cubrir las facetas que contienen a v_1 . En el primer caso queda sin cubrir $\{v_4, v_5\}$ por lo que habría que añadir v_5 (v_4 sería otra opción pero se llega a una cobertura no minimal). Se tiene entonces las coberturas minimales: $\{v_1, v_4\}, \{v_1, v_3, v_5\}, \{v_3, v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}$.

Se calculan de igual forma las coberturas de vértices de Δ_2 y se obtienen: $\{v_1, v_6\}, \{v_2, v_5, v_6\}, \{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\}$.

Se trata ahora de encontrar la conexión entre las coberturas de vértices y las descomposiciones irreducibles de los ideales de facetas.

Lema 2.6.5. *Sea Δ un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices V , y sea $V' \subseteq V$. Entonces $K_\Delta \subseteq P_{V'}$ si y solo si V' es una cobertura de vértices de Δ .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad se supone que $V' = \{v_1, \dots, v_n\}$ de forma que $P_{V'} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$.

Para la primera implicación se parte del hecho $K_\Delta \subseteq P_{V'}$. Sea F una faceta de Δ . Entonces $\underline{X}^F \in K_\Delta \subseteq P_{V'} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Por ello $\underline{X}^F \in \langle X_m \rangle$ para algún $m \leq n$. Eso implica que $v_m \in F$, así que $v_m \in F \cap V'$ por lo que V' es una cobertura de vértices de Δ .

Para la implicación inversa, se asume que V' es una cobertura de vértices de Δ . Hay que probar que todos los generadores $\underline{X}^F \in K_\Delta$ están en $P_{V'}$. \underline{X}^F corresponde a una faceta F en Δ por lo que la hipótesis de que V' es una cobertura de vértices de Δ implica que $v_j \in F \cap V'$ para algún j . En consecuencia $X_j \in P_{V'}$, por lo que $\underline{X}^F \in \langle X_j \rangle \subseteq P_{V'}$, como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.6.6. *Sea Δ un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices V . Entonces $K_\Delta \subseteq R$ tiene las descomposiciones irreducibles siguientes:*

$$K_\Delta = \bigcap_{V'} P_{V'} = \bigcap_{V' \text{ min.}} P_{V'}$$

donde la primera intersección se toma sobre todas las coberturas de vértices de Δ y la segunda sobre todas las minimales. La segunda intersección es DII.

Demostración. La prueba de este resultado procede de forma similar a la del Teorema 2.3.6, dado que la última igualdad estaba probada en ese teorema, y aplicando el Lema 2.6.5 y el hecho de que K_Δ es libre de cuadrados, se puede razonar como se ha explicado en la demostración de 2.3.6. \square

Ejemplo 2.6.7. En el Ejemplo 2.6.4 se han calculado las coberturas minimales de Δ_1 y Δ_2 . Aplicando entonces el teorema anterior se tiene que

$$\begin{aligned}K_{\Delta_1} &= \langle X_1, X_4 \rangle \cap \langle X_1, X_3, X_5 \rangle \cap \langle X_2, X_3, X_5 \rangle \cap \langle X_3, X_4 \rangle \\K_{\Delta_2} &= \langle X_1, X_6 \rangle \cap \langle X_2, X_5, X_6 \rangle \cap \langle X_3, X_5, X_6 \rangle \cap \langle X_4 \rangle.\end{aligned}$$

Capítulo 3

Dualidad de Alexander

Se conocen dos formas de describir un ideal de forma minimal: o bien a partir de su DII o dado su SMGM.

La dualidad de Alexander describe un método que, a partir del SMGM de un ideal monomial I arbitrario, construye un ideal J cuya DII se define a partir de los monomios generadores de I . Además, se cumple que la DII de I se puede definir a su vez en función de los monomios del SMGM de J .

3.1. Dualidad en ideales monomiales libres de cuadrados

Primero se define la dualidad de Alexander para ideales libres de cuadrados, ya que, aunque es un caso particular de la dualidad de Alexander, se puede definir de forma más sencilla:

Definición 3.1.1. Sea $I \subsetneq R$ un ideal monomial libre de cuadrados con SMGM $\{\underline{X}^{V_1}, \dots, \underline{X}^{V_n}\}$ siendo V_1, \dots, V_n subconjuntos de V . Se define el dual de Alexander o \vee -dual de I como el ideal

$$I^\vee = \bigcap_{i=1}^n P_{V_i}.$$

Proposición 3.1.2. Sea $I \subsetneq R$ un ideal monomial libre de cuadrados, se tiene que $I^{\vee\vee} = I$.

Ejemplo 3.1.3. No se demuestra esta proposición, ya que luego se va a generalizar la dualidad a ideales monomiales arbitrarios pero se muestra un ejemplo del cálculo del dual de Alexander en $A[X_1, X_2, X_3]$ donde se puede observar que se cumple que $I^{\vee\vee} = I$:

$$(\langle X_1X_3, X_2X_3 \rangle)^\vee = (\langle X^{\{1,3\}}, X^{\{2,3\}} \rangle)^\vee = \langle X_1, X_3 \rangle \cap \langle X_2, X_3 \rangle = \langle X_1X_2, X_3 \rangle$$

Y se tiene

$$(\langle X_1 X_2, X_3 \rangle)^\vee = (\langle X^{\{1,2\}}, X^{\{3\}} \rangle)^\vee = \langle X_1, X_2 \rangle \cap \langle X_3 \rangle = \langle X_1 X_3, X_2 X_3 \rangle$$

Luego $I^{\vee\vee} = I$.

Ejemplo 3.1.4. Se retoma el Ejemplo 1.4.10, que se presentó para introducir la utilidad de buscar algoritmos eficientes. En esta ocasión, se busca obtener la DII de $I = \langle XV, XW, XT, YV, YW, YT, ZV, ZW, ZT \rangle$ mediante el método que proporciona la dualidad de Alexander:

$$\begin{aligned} I^\vee &= \langle X, V \rangle \cap \langle X, W \rangle \cap \langle X, T \rangle \cap \langle Y, V \rangle \cap \langle Y, W \rangle \cap \langle Y, T \rangle \cap \langle Z, V \rangle \cap \langle Z, W \rangle \cap \langle Z, T \rangle \\ &= \langle X, VWT \rangle \cap \langle Y, VWT \rangle \cap \langle Z, VWT \rangle = \langle XYZ, VWT \rangle \end{aligned}$$

Por lo que

$$I = I^{\vee\vee} = (\langle XYZ, VWT \rangle)^\vee = \langle X, Y, Z \rangle \cap \langle V, W, T \rangle$$

que se sabe que es la DII de I y es claramente un método más eficiente (y programable) que el que se propone en 1.3.4.

3.2. Dualidad en ideales monomiales arbitrarios

Para simplificar la lectura del resto del capítulo, en el que se trata el caso de un ideal monomial I arbitrario se añade una serie de definiciones y notaciones:

Notación 3.2.1. Como se sabe que un ideal monomial es irreducible si y solo si está generado por potencias puras de variables, se usará la notación $I = \langle X_i^{b_i} | b_i \geq 1 \rangle = m^{\underline{b}}$ siendo $\underline{b} = (b_1, \dots, b_d)$ para referirse a un ideal irreducible y así, si J es un ideal monomial arbitrario, la DII de J se expresa $J = m^{\underline{b}_1} \cap \dots \cap m^{\underline{b}_n}$.

Se denotará como $\text{Irr}(I)$ el conjunto de las componentes de la DII de I y como $\text{S}(I)$ el conjunto de los monomios de SMGM de I .

Ejemplo 3.2.2. Por ejemplo, considerando $I = \langle X_1^4, X_3^2, X_4 \rangle \cap \langle X_1, X_2^3, X_5^2 \rangle$ en $A[X_1, \dots, X_5]$ entonces se escribe

$$I = m^{(4,0,2,1,0)} \cap m^{(1,3,0,0,2)} \quad \text{y} \quad \text{Irr}(I) = \{m^{(4,0,2,1,0)}, m^{(1,3,0,0,2)}\}.$$

Definición 3.2.3. Si $I = \langle \underline{X}^{b_1}, \dots, \underline{X}^{b_n} \rangle$ siendo $\{\underline{X}^{b_1}, \dots, \underline{X}^{b_n}\}$ su SMGM, se definen los siguientes vectores:

- \underline{a}^I el vector tal que $\underline{X}^{\underline{a}^I} = \text{mcm}(\underline{X}^{b_1}, \dots, \underline{X}^{b_n})$, es decir

$$\underline{a}^I = \left(\max_{\underline{b}|\underline{X}^{\underline{b}} \in S(I)} (b_1), \dots, \max_{\underline{b}|\underline{X}^{\underline{b}} \in S(I)} (b_d) \right).$$

- Para todo $\underline{a} \in \mathbb{N}^d$ y $\underline{b}|\underline{X}^{\underline{b}} \in S(I)$:

$$\underline{b}^{\underline{a}} = (b_1^{\underline{a}}, \dots, b_d^{\underline{a}}) \text{ tal que } b_i^{\underline{a}} = \begin{cases} a_i + 1 - b_i & \text{si } b_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$

- En particular, para $\underline{b}|\underline{X}^{\underline{b}} \in S(I)$:

$$\underline{b}^I = \underline{b}^{\underline{a}^I} = (b_1^I, \dots, b_d^I) \text{ tal que } b_i^I = \begin{cases} a_i^I + 1 - b_i & \text{si } b_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 3.2.4. Será interesante tener en cuenta estas definiciones para un desarrollo más ágil del resto del capítulo.

Por ejemplo tomando $I = \langle X_1^4 X_3^2 X_4, X_1 X_2^3 X_5^2 \rangle = \langle \underline{X}^{b_1}, \underline{X}^{b_2} \rangle$ en $A[X_1, \dots, X_5]$ entonces se escribe

$$\underline{a}^I = (4, 3, 2, 1, 2), \underline{b}_1^I = (1, 0, 1, 1, 0) \text{ y } \underline{b}_2^I = (4, 1, 0, 0, 1).$$

Se puede definir el dual de Alexander para cualquier vector \underline{a} tal que $a_i \geq a_i^I$ para todo $1 \leq i \leq d$, es decir, es necesario que todos los generadores de I dividan a $\underline{X}^{\underline{a}}$ para poder definir el dual de Alexander de I respecto de \underline{a} .

En esta situación:

Definición 3.2.5. Sea $I \subsetneq R$ un ideal monomial arbitrario con SMGM $I = \langle \underline{X}^{b_1}, \dots, \underline{X}^{b_n} \rangle$. Se define el dual de Alexander de I respecto de \underline{a} como el ideal

$$I^{[\underline{a}]} = \bigcap \{m^{b_i^{\underline{a}}} | \underline{X}^{b_i} \text{ es un generador minimal de } I\}.$$

En particular, si $\underline{a} = \underline{a}^I$ se denotará $I^{[\underline{a}]} = I^\vee$ y se llamará simplemente dual de Alexander de I .

Lo más común es emplear \underline{a}^I para construir el dual de I , pero se explicará más adelante porque se da la definición en función de un \underline{a} .

Ejemplo 3.2.6. Sea $I = \langle X_1^2 X_2, X_2^2 X_4, X_2 X_3 X_4^5 \rangle \in A[X_1, X_2, X_3, X_4]$. Se tiene $\underline{a}^I = (2, 2, 1, 5)$, luego:

$$\begin{aligned} \underline{X}^{b_1} = X_1^2 X_2 &\rightarrow \underline{b}_1 = (2, 1, 0, 0) \rightarrow \underline{b}_1^I = (1, 2, 0, 0) \rightarrow m^{b_1^I} = \langle X_1, X_2^2 \rangle \\ \underline{X}^{b_2} = X_2^2 X_4 &\rightarrow \underline{b}_2 = (0, 2, 0, 1) \rightarrow \underline{b}_2^I = (0, 1, 0, 5) \rightarrow m^{b_2^I} = \langle X_2, X_4^5 \rangle \\ \underline{X}^{b_3} = X_2 X_3 X_4^5 &\rightarrow \underline{b}_3 = (0, 1, 1, 5) \rightarrow \underline{b}_3^I = (0, 2, 1, 1) \rightarrow m^{b_3^I} = \langle X_2^2, X_3, X_4 \rangle \end{aligned}$$

De esta forma, $I^\vee = \langle X_1, X_2^2 \rangle \cap \langle X_2, X_4^5 \rangle \cap \langle X_2^2, X_3, X_4 \rangle$.

Para calcular $I^{\vee\vee}$ se necesita disponer antes del SMGM de I^\vee :

$$I^\vee = \langle X_1X_2X_3, X_1X_2X_4, X_1X_4^5, X_2^2 \rangle$$

Y repitiendo el procedimiento anterior pero teniendo en cuenta que ahora, al cambiar el mcm de los monomios generadores, se construye el dual sobre el vector $\underline{a}^{I^\vee} = (1, 2, 1, 5)$:

$$\begin{aligned} \underline{X}^{b_1} &= X_1X_2X_3 \rightarrow \underline{b}_1 = (1, 1, 1, 0) \rightarrow \underline{b}_1^{\underline{a}^{I^\vee}} = (1, 2, 1, 0) \rightarrow m^{\underline{b}_1^{\underline{a}^{I^\vee}}} = \langle X_1, X_2^2, X_3 \rangle \\ \underline{X}^{b_2} &= X_1X_2X_4 \rightarrow \underline{b}_2 = (1, 1, 0, 1) \rightarrow \underline{b}_2^{\underline{a}^{I^\vee}} = (1, 2, 0, 5) \rightarrow m^{\underline{b}_2^{\underline{a}^{I^\vee}}} = \langle X_1, X_2^2, X_4^5 \rangle \\ \underline{X}^{b_3} &= X_1X_4^5 \rightarrow \underline{b}_3 = (1, 0, 0, 5) \rightarrow \underline{b}_3^{\underline{a}^{I^\vee}} = (1, 0, 0, 1) \rightarrow m^{\underline{b}_3^{\underline{a}^{I^\vee}}} = \langle X_1, X_4 \rangle \\ \underline{X}^{b_4} &= X_2^2 \rightarrow \underline{b}_4 = (0, 2, 0, 0) \rightarrow \underline{b}_4^{\underline{a}^{I^\vee}} = (0, 1, 0, 0) \rightarrow m^{\underline{b}_4^{\underline{a}^{I^\vee}}} = \langle X_2 \rangle \end{aligned}$$

$$I^{\vee\vee} = \langle X_1, X_2^2, X_3 \rangle \cap \langle X_1, X_2^2, X_4^5 \rangle \cap \langle X_1, X_4 \rangle \cap \langle X_2 \rangle$$

Se puede expresar $I^{\vee\vee}$ en función de su SMGM

$$I^{\vee\vee} = \langle X_1, X_2^2, X_3X_4^5 \rangle \cap \langle X_1X_2, X_4X_2 \rangle = \langle X_1X_2, X_2^2X_4, X_2X_3X_4^5 \rangle \neq I \quad (3.1)$$

Además, se tiene que no todos los generadores de I dividen a $\underline{X}^{\underline{a}^{I^\vee}}$:

$$X_1^2X_2 \nmid X_1X_2^2X_3X_4^5 = \underline{X}^{\underline{a}^{I^\vee}}.$$

Se observa en la ecuación (3.1) que $I^{\vee\vee} = (I^{[\underline{a}^I]})^{[\underline{a}^{I^\vee}]} \neq I$, y es aquí donde cobra sentido el haber definido $I^{[\underline{a}^I]}$ y no solo I^\vee , ya que $(I^{[\underline{a}^I]})^{[\underline{a}^I]} = I$ mientras que $I^{\vee\vee} \neq I$ en general (en los ideales libres de cuadrados sí ya que $\underline{a}^I = \underline{a}^{I^\vee}$ debido a que $a_i^I \in \{0, 1\}$). Esta es la clave de la dualidad de Alexander, ya que la igualdad $(I^{[\underline{a}^I]})^{[\underline{a}^I]} = I$ proporciona un método de calcular la DII de un ideal monomial arbitrario partiendo de su SMGM.

La siguiente proposición es un resultado previo al Teorema 3.2.9, el resultado principal del capítulo, ya que demuestra que está bien definida la operación $(I^{[\underline{a}^I]})^{[\underline{a}^I]}$ y que además cumple $(I^{[\underline{a}^I]})^{[\underline{a}^I]} = I$, que es el objetivo principal.

Nota 3.2.7. Si $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{N}^d$, $\underline{a} \preceq \underline{b} \Leftrightarrow a_i \leq b_i \forall i \in \{1, \dots, d\}$. Del mismo modo $\underline{a} \not\preceq \underline{b} \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, d\} | a_i > b_i$.

Proposición 3.2.8. *Sea I un ideal monomial y $\underline{a} \in \mathbb{N}^d$ tal que todos los generadores minimales de I dividen a $\underline{X}^{\underline{a}}$. Si $\underline{b} \preceq \underline{a}$ entonces $\underline{X}^{\underline{b}} \notin I$ si y solo si $\underline{X}^{\underline{a}-\underline{b}} \in I^{[\underline{a}]}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad se supone $I = \langle \underline{X}^{n_1}, \dots, \underline{X}^{n_k} \rangle$. Por el enunciado, $\underline{a} \succeq \underline{n}_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ y por definición se tiene que $\underline{X}^{\underline{b}} \notin I \Leftrightarrow \underline{b} \not\prec \underline{n}_i, \forall i \in \{1, \dots, k\} \Leftrightarrow \underline{a}-\underline{b} \not\prec \underline{a}-\underline{n}_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Esto es equivalente a decir que para $i \in \{1, \dots, k\}, \exists j \in \{1, \dots, d\} | a_j - b_j \geq a_i + 1 - n_{i_j}$, es decir, $\underline{X}^{\underline{a}-\underline{b}} \in \langle \underline{X}_j^{a_i+1-n_{i_j}} \rangle$, que ocurre si y solo si $\underline{X}^{\underline{a}-\underline{b}} \in m^{\underline{a}+1-\underline{n}_i}, \forall i \in \{1, \dots, k\}$, siendo $\underline{1}$ el vector con todas las coordenadas iguales a 1. Esto es equivalente a que $\underline{X}^{\underline{a}-\underline{b}} \in \cap_{i \in \{1, \dots, k\}} m^{\underline{a}+1-\underline{n}_i} = I^{[\underline{a}]} + m^{\underline{a}+1}$, donde la última igualdad viene dada por definición del dual de Alexander apareciendo el segundo sumando debido que está definido $b_i^{\underline{a}} = 0$ cuando $b_i = 0$. Pero como $\underline{b} \preceq \underline{a}$, se tiene $\underline{0} \preceq \underline{a} - \underline{b} \preceq \underline{a} \preceq \underline{a} + \underline{1}$, y entonces $\underline{X}^{\underline{a}-\underline{b}} \in I^{[\underline{a}]} + m^{\underline{a}+1} \Leftrightarrow \underline{X}^{\underline{a}-\underline{b}} \in I^{[\underline{a}]}$, como queríamos demostrar. \square

Teorema 3.2.9. *Sea I un ideal monomial y $\underline{a} \in \mathbb{N}^d$ tal que todos los generadores minimales de I dividen a $\underline{X}^{\underline{a}}$. Entonces todos los generadores minimales de $I^{[\underline{a}]}$ dividen a $\underline{X}^{\underline{a}}$ y se tiene $(I^{[\underline{a}]})^{[\underline{a}]} = I$.*

Demostración. Para la primera parte, se tiene $I = \langle \underline{X}^{b_1}, \dots, \underline{X}^{b_k} \rangle$ siendo $\{\underline{X}^{b_1}, \dots, \underline{X}^{b_k}\}$ el SMGM de I . Por definición, las potencias de las variables que generan las componentes irreducibles de $I^{[\underline{a}]}$ dividen a $\underline{X}^{\underline{a}}$. Como cada generador minimal de $I^{[\underline{a}]}$ puede ser expresado como el mínimo común múltiplo de algunas de esas potencias de variables, entonces todos los generadores minimales de $I^{[\underline{a}]}$ dividen a $\underline{X}^{\underline{a}}$.

Para probar $(I^{[\underline{a}]})^{[\underline{a}]} = I$ se toma un monomio $\underline{X}^{\underline{b}} \in I$. Por la Proposición 3.2.8, se tiene $\underline{X}^{\underline{b}} \in I \Leftrightarrow \underline{X}^{\underline{a}-\underline{b}} \notin I^{[\underline{a}]}$. Se realiza el cambio de variables

$$\underline{c} = \underline{a} - \underline{b} \quad J = I^{[\underline{a}]}$$

y volviendo a aplicar la Proposición 3.2.8, $\underline{X}^{\underline{c}} \notin J \Leftrightarrow \underline{X}^{\underline{a}-\underline{c}} \in J^{[\underline{a}]}$. Al deshacer el cambio de variables se obtiene $\underline{X}^{\underline{a}-\underline{b}} \notin I^{[\underline{a}]} \Leftrightarrow \underline{X}^{\underline{b}} \in (I^{[\underline{a}]})^{[\underline{a}]}$. Por lo que juntando las dos ecuaciones se tiene $\underline{X}^{\underline{b}} \in I \Leftrightarrow \underline{X}^{\underline{a}-\underline{b}} \notin I^{[\underline{a}]} \Leftrightarrow \underline{X}^{\underline{b}} \in (I^{[\underline{a}]})^{[\underline{a}]}$ como queríamos demostrar.

Se cumple además lo siguiente:

$$(\underline{b}^{\underline{a}})^{\underline{a}} = \underline{b} \text{ ya que } (\underline{b}^{\underline{a}})^{\underline{a}} = 0 \text{ si } b = 0 \text{ y } (\underline{b}^{\underline{a}})^{\underline{a}} = a_i + 1 - (a_i + 1 - b_i) = b_i \text{ si } b \neq 0.$$

Por ello, todos los generadores minimales de $(I^{[\underline{a}]})^{[\underline{a}]}$ dividen a $\underline{X}^{\underline{a}}$. \square

Ejemplo 3.2.10. Tomando el ideal del ejemplo anterior, del cual se conoce $I^{[\underline{a}^T]}$, por el Teorema de la Dualidad de Alexander se sabe que $(I^{[\underline{a}^T]})^{[\underline{a}^T]} = I$,

luego se puede obtener la DII de I directamente, calculando $(I^{[a^I]})^{[a^I]}$ sobre $\underline{a}^I = (2, 2, 1, 5)$.

$$\begin{aligned}\underline{X}^{b_1} &= X_1 X_2 X_3 \rightarrow \underline{b}_1 = (1, 1, 1, 0) \rightarrow \underline{b}_1^{a^I} = (2, 2, 1, 0) \rightarrow m^{b_1^{a^I}} = \langle X_1^2, X_2^2, X_3 \rangle \\ \underline{X}^{b_2} &= X_1 X_2 X_4 \rightarrow \underline{b}_2 = (1, 1, 0, 1) \rightarrow \underline{b}_2^{a^I} = (2, 2, 0, 5) \rightarrow m^{b_2^{a^I}} = \langle X_1^2, X_2^2, X_4^5 \rangle \\ \underline{X}^{b_3} &= X_1 X_4^5 \rightarrow \underline{b}_3 = (1, 0, 0, 5) \rightarrow \underline{b}_3^{a^I} = (2, 0, 0, 1) \rightarrow m^{b_3^{a^I}} = \langle X_1^2, X_4 \rangle \\ \underline{X}^{b_4} &= X_2^2 \rightarrow \underline{b}_4 = (0, 2, 0, 0) \rightarrow \underline{b}_4^{a^I} = (0, 1, 0, 0) \rightarrow m^{b_4^{a^I}} = \langle X_2 \rangle\end{aligned}$$

$$(I^{[a^I]})^{[a^I]} = \langle X_1^2, X_2^2, X_3 \rangle \cap \langle X_1^2, X_2^2, X_4^5 \rangle \cap \langle X_1^2, X_4 \rangle \cap \langle X_2 \rangle.$$

Se puede expresar $(I^{[a^I]})^{[a^I]}$ en función de su SMGM y se obtiene

$$(I^{[a^I]})^{[a^I]} = \langle X_1^2, X_2^2, X_3 X_4^5 \rangle \cap \langle X_1^2 X_2, X_4 X_2 \rangle = \langle X_1^2 X_2, X_2^2 X_4, X_2 X_3 X_4^5 \rangle = I$$

Durante el proceso se ha obtenido la DII de I :

$$I = \langle X_1^2 X_2, X_2^2 X_4, X_2 X_3 X_4^5 \rangle = \langle X_1^2, X_2^2, X_3 \rangle \cap \langle X_1^2, X_2^2, X_4^5 \rangle \cap \langle X_1^2, X_4 \rangle \cap \langle X_2 \rangle.$$

Teorema 3.2.11. *Sea I un ideal monomial y $\underline{a} \in \mathbb{N}^d$ tal que todos los generadores minimales de I dividen a $\underline{X}^{\underline{a}}$. Entonces I tiene una única DII dada por*

$$I = \bigcap \{m^{b^{\underline{a}}} | \underline{X}^b \text{ es un generador minimal de } I^{[\underline{a}]} \}.$$

Y de forma equivalente, el dual de Alexander de I respecto de \underline{a} está dado por el SMGM siguiente:

$$I^{[\underline{a}]} = \langle \underline{X}^{b^{\underline{a}}} | m^b \text{ es una componente irreducible de } I \rangle.$$

Para terminar el capítulo se enuncia un resultado que proporciona otro algoritmo para obtener el SMGM del dual de un ideal monomial I arbitrario, sin la necesidad de calcular el SMGM a partir de la DII de I^\vee . Solo precisa de un cálculo de cociente para obtener el SMGM de I^\vee por lo que permite calcular de forma más sencilla la DII de I ya que este cálculo está implementado en muchos programas informáticos:

Teorema 3.2.12. *Sea I un ideal monomial arbitrario. Si todos los generadores de I dividen a $\underline{X}^{\underline{a}}$, es decir $\underline{a} \succeq a^I$, entonces $(m^{a^I+1} : I^{[\underline{a}]}) = I + m^{a^I+1}$.*

Nota 3.2.13. Los dos últimos teoremas están demostrados en [10].

Como el Teorema 3.2.9 afirma que si \underline{a} es tal que todos los generadores minimales de I dividen a $X^{\underline{a}}$ entonces todos los de $I^{[\underline{a}]}$ también, se tiene, por el Teorema 3.2.12 que también se cumple $(m^{\underline{a}+1} : I) = I^{[\underline{a}]} + m^{\underline{a}+1}$. Un ejemplo de cómo aplicar este resultado para obtener la DII de un ideal monomial arbitrario es el siguiente:

Ejemplo 3.2.14. Sea $I = \langle X_1^4, X_1^2 X_2 X_3, X_2^4 X_3, X_1^3 X_2^2, X_2^2 X_3^2 \rangle$ en $A[X_1, X_2, X_3]$. Se tiene que $\underline{a}^I = (4, 4, 2)$, luego $m^{\underline{a}^I+1} = \langle X_1^5, X_2^5, X_3^3 \rangle$. Se calcula el cociente empleando la función correspondiente en *Singular*:

```
ring r = 0, (X,Y,Z), dp;
ideal I= X^4,X^2*Y*Z,Y^4*Z,X^3*Y^2,Y^2*Z^2;
I;
ideal J= X^5,Y^5,Z^3;
J;
ideal K = quotient(J,I);
K;
```

Figura 3.1: Código usado en *Singular*

obteniendo

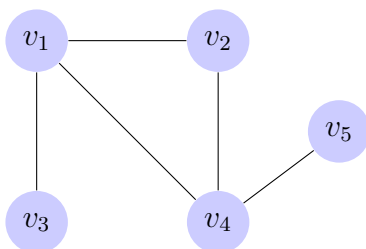
$$(m^{\underline{a}^I+1} : I) = \langle X_3^3, X_1^2 X_3^2, X_1^3 X_2 X_3, X_2^5, X_1 X_2^4, X_1^5, X_1 X_2^3 X_3^2, X_1^3 X_2^3 \rangle = I^{[\underline{a}^I]} + m^{\underline{a}^I+1}.$$

Entonces $I^{[\underline{a}^I]} = \langle X_1^2 X_3^2, X_1^3 X_2 X_3, X_1 X_2^4, X_1 X_2^3 X_3^2, X_1^3 X_2^3 \rangle$ y se puede aplicar el Teorema 3.2.9 para obtener la DII de I :

$$I = \langle X_1^3, X_3 \rangle \cap \langle X_1^2, X_2^4, X_3^2 \rangle \cap \langle X_1^4, X_2 \rangle \cap \langle X_1^4, X_2^2, X_3 \rangle \cap \langle X_1^2, X_2^2 \rangle.$$

Un ejemplo que lo resume todo

Para resumir lo explicado en los capítulos 2 y 3, se considera I el ideal $I = I_G = \langle X_1X_2, X_1X_3, X_1X_4, X_2X_4, X_4X_5 \rangle$, que se puede representar con el grafo G siguiente:



Veamos las diversas formas que se han explicado para calcular su DII:

- I Las coberturas minimales del grafo son: $\{v_1, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}$.

Se tiene

$$I_G = \bigcap_{V' \text{ cobertura minimal de } G} P_{V'}$$

donde

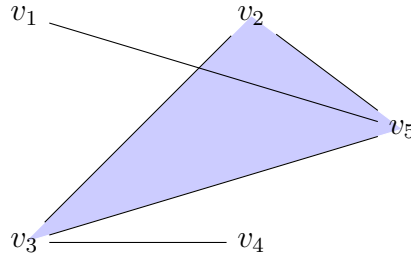
$$P_{\{v_1, v_4\}} = \langle X_1, X_4 \rangle, P_{\{v_1, v_2, v_5\}} = \langle X_1, X_2, X_5 \rangle, P_{\{v_2, v_3, v_4\}} = \langle X_2, X_3, X_4 \rangle.$$

$$\text{Por tanto, } I_G = \langle X_1, X_4 \rangle \cap \langle X_1, X_2, X_5 \rangle \cap \langle X_2, X_3, X_4 \rangle.$$

- II Los conjuntos independientes de G son:

$$\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_3, v_5\}.$$

Y son los elementos de Δ_G . Gráficamente, Δ_G se puede representar con el complejo simplicial



Del cual se pueden calcular sus caras:

- \emptyset .
- Vértices $\rightarrow v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$.
- Aristas $\rightarrow v_1v_5, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_4, v_3v_5$.
- Triángulos sombreados $\rightarrow v_2v_3v_5$.
- Facetas $\rightarrow v_2v_3v_5, v_1v_5, v_3v_4$.

De esta manera, como $I_G = J_{\Delta_G}$, siendo J_{Δ_G} el ideal de Stanley-Reisner, entonces

$$I_G = J_{\Delta_G} = \bigcap_{F \text{ faceta de } \Delta_G} Q_F$$

donde se tiene:

$$Q_{\{v_2, v_3, v_5\}} = \langle X_1, X_4 \rangle, Q_{\{v_1, v_5\}} = \langle X_2, X_3, X_4 \rangle, Q_{\{v_3, v_4\}} = \langle X_1, X_2, X_5 \rangle$$

luego se obtiene

$$I_G = \langle X_1, X_4 \rangle \cap \langle X_2, X_3, X_4 \rangle \cap \langle X_1, X_2, X_5 \rangle.$$

III Se puede calcular el dual de I_G :

$$\begin{aligned} I_G^\vee &= \langle X_1, X_2 \rangle \cap \langle X_1, X_3 \rangle \cap \langle X_1, X_4 \rangle \cap \langle X_2, X_4 \rangle \cap \langle X_4, X_5 \rangle \\ &= \langle X_1, X_2X_3X_4 \rangle \cap \langle X_2X_5, X_4 \rangle = \langle X_1X_2X_5, X_1X_4, X_2X_3X_4 \rangle \end{aligned}$$

luego se tiene que

$$I_G = I_G^{\vee\vee} = \langle X_1, X_2, X_5 \rangle \cap \langle X_1, X_4 \rangle \cap \langle X_2, X_3, X_4 \rangle.$$

Bibliografía

- [1] M.F.Atiyah, I.G.Macdonald, Introducción al Álgebra Conmutativa, Reverté (1978).
- [2] W. Bruns, J. Herzog, Semigroup rings and simplicial complexes, Journal of Pure and Applied Algebra **122** (1997) 185-208
- [3] D.A. Cox, J. Little, D. O’Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms. Undergraduate Text in Mathematics, Springer 4^a edición (2015).
- [4] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, SINGULAR 4-1-2 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de> (2019).
- [5] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press (2009).
- [6] J. Herzog, T. Hibi, Monomial Ideals, Graduate Texts in Mathematics **260**, Springer (2011).
- [7] M. Hochster, Cohen-Macaulay Varieties, Geometric Complexes, and Combinatorics. In: The Mathematical Legacy of Richard P. Stanley, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2016, 203-229.
- [8] D.G. Mendoza Ramírez, Anillos Stanley-Reisner y Dualidad de Alexander, Tesis para obtener el grado de Maestro en Matemáticas, Universidad Veracruzana (2015).
- [9] E. Miller, Alexander Duality for Monomial Ideals and Their Resolution, preprint, arXiv:math/9812095v1 (1998).
- [10] E. Miller, B. Sturmfels, Combinatorial Commutative Algebra, Graduate Texts in Mathematics **227**, Springer (2005).
- [11] W.F. Moore, M. Rogers, S. Sather-Wagstaff, Monomial Idels and Their Decompositions, Universitext, Springer (2018).

- [12] M. Reid, Undergraduate Commutative Algebra, London Mathematical Society, Student Text **29**, Cambridge University Press (1995).