Universidad de Valladolid

Enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en Bachillerato

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de idiomas

(Departamento de Estadística)

Junio 2019

Alumno: Miguel Asensio Mucientes

Tutores: David Conde del Río

Cesáreo Jesús González Fernández

Índice

"Es notable que una ciencia que comenzó con consideraciones sobre juegos de azar haya llegado a ser el objeto más importante del conocimiento humano".

Marqués de Laplace (1749-1827)

AGRADECIMIENTOS

A David Conde por Todo

A Ana López por tanto.

1. RESUMEN

Este Trabajo fin de Máster tiene como objetivo la enseñanza de la probabilidad en Educación secundaria obligatoria y Bachillerato. Para ello se hará un análisis de los principales errores o sesgos cometidos por nuestra intuición a la hora de calcular probabilidades, de tal manera que podamos mejorar la enseñanza de la probabilidad, ilustrando al alumnado del peligro de fiarse de la intuición. Se incluye una propuesta de mejora para la mejor comprensión por parte del alumnado, que incluye el manejo de software estadístico, como Statgraphics.

Palabras clave: Heurística, intuición, aleatorio, regresión a la media, falacia, sesgo, error…

ABSTRACT

This Master's Thesis aims to teach probability in Compulsory Secondary Education and Baccalaureate. To this end, an analysis of the main errors or biases made by our intuition when calculating probabilities will be made, in such a way that we can improve the teaching of probability, showing to students the danger of trusting intuition. It is included a proposal for improvement for better understanding by students, which includes the use of statistical software, such as Statgraphics or Geogebra.

Key words: Heuristic, intuition, random, regression to the mean, fallacy, bias, error.

2. JUSTIFICACIÓN

¿Por qué nos falla nuestra intuición? ¿Qué fallos nos hace cometer nuestro propio razonamiento? ¿Cómo podemos evitarlos? Estas cuestiones son vitales en la resolución de los problemas asociados a la estadística y a la probabilidad, puesto que los seres humanos no somos buenos a la hora de calcular probabilidades.

La intuición personal es la que facultad de comprensión inmediata de un acontecimiento sin que por ello intervenga el razonamiento. Este concepto está relacionado con la idea de presentimiento, pues nuestro cerebro completa la información parcial que cree percibir mediante la búsqueda de patrones similares, hechos personales y costumbres. En este sentido, el ser humano tiene la capacidad de relacionar conceptos que en un principio parecen dispares, pero que sin embargo por la nuestra capacidad de *asociatividad*, estrechamente ligada con los propios prejuicios que hacemos a priori, y que pueden hacer que nos equivoquemos en nuestras propias predicciones.

En los juicios bajo incertidumbre confiamos en reglas simples llamadas heurísticas que tienen aparente validez, pero a menudo llevan a sesgos predecibles. Estos errores tienen una base psicológica, y la comprensión de las leyes de probabilidad no es suficiente para superarlos.

Este Trabajo Final de Máster, versará sobre sobre los errores o sesgos que existen en los razonamientos intuitivos a la hora de abordar problemas de probabilidad, y que impiden la correcta comprensión de los mismos, lo que se traduce en dificultades a la hora de resolver correctamente un problema. Se diseñarán ejemplos específicos y actividades adecuadas para prever y superar dichas dificultades y ayudar así a la mejor comprensión del problema.

Específicamente se va a tratar la búsqueda de soluciones ante problemas. A esta *ciencia del descubrimiento* se le conoce como *heurística*, que procede del griego antiguo y significa hallar o inventar. Está relacionada con la palabra *Eureka*, pues consiste en el hecho de tomar decisiones, haciendo uso métodos, estrategias, algoritmos, criterios o formas de pensamiento lateral distintas para resolver dichos problemas.

Nuestra labor docente en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en el aula, consistirá en tener en cuenta las dificultades de los alumnos y sus pensamientos intuitivos, para abordar los problemas de razonamiento probabilístico y dar técnicas, métodos y pautas con el fin último de comprender un problema y poder resolverlo.

Para ello, según como describe (Díaz) **[3]** se hará un repaso de las metodologías de resolución de problemas, teniendo en cuenta los fallos más habituales a los que denotaremos como sesgos o falacias. Así pues describiremos:

- **Sesgos**
- **Heurística de la Representatividad**
    - Insensibilidad al tamaño de la muestra.
        - Ley de los pequeños números
    - Concepciones erróneas sobre el Azar.
        - Falacia del jugador-apostador
        - Falacia de las tasas base

        - Falacia de la conjunción o probabilidad de la unión menor que probabilidad de la intersección
- **Heurística de la Disponibilidad**
    - Sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos
    - Experiencias personal
- **Sesgo de la equiprobabilidad**
- **Probabilidad frecuencial**
- **Probabilidad condicional y no condicional**
    - Problema de Monty hall

Al final a lo que se pretende llegar es a que los alumnos de bachillerato comprendan mejor los procesos aleatorios, para ello proponemos ayudarnos de ejercicios dinámicos y con materiales cotidianos para crear experiencias de aprendizaje y conseguir un verdadero aprendizaje significativo. Dichos ejercicios se adecuarán al calendario, pues como es de sobra conocido los tiempos marcan qué tipo de actividades se pueden emplear o no. Dichos problemas pretenden despertar la motivación y el interés del alumno, así como hacerle ver los distingos errores en los que se cae al hacer uso de la intuición. Por ello se han estructurado según la clasificación hecha por (Cañizares Castellano, 1987) **[2],** los cuales la mayoría son experiencias de probabilidad basadas en juegos fáciles, útiles y relacionados con la cotidianidad del alumno. Esta "gamificación del aula" permite una personalización del contenido mediante tanto en trabajo individual, como por parejas y grupal. A todo esto hay que sumarle el uso de las TICs implementadas en el aula a través de sesiones para aprender a manejar software estadísticos de manera sencilla. Por último, mencionar el uso de videos, noticias y programas informativos que hagan de la clase más interactiva y entendible.

3. MARCO LEGISLATIVO.

El objeto de este trabajo es abordar de manera consciente el desarrollo de Bloque IV de Estadística y Probabilidad en la asignatura de matemáticas tanto en bachillerato. Para ello se tomará la legislación vigente recogida en

- ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León
- Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE)
- RD 1105/2014 de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato

Los contenidos impartidos en Bachillerato están en divididos en 2 cursos, 1º y 2º de bachillerato según el tipo de matemáticas escogidas. Así pues tenemos dos tipos de matemáticas: las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, enfocadas a un bachillerato de rama de sociales y luego Matemáticas I y II, para aquellos alumnos que optan por un bachillerato de ciencias, tecnológico o de la salud.

En ambos tipos de bachillerato los contenidos son parecidos, aunque es cierto que en el que está orientado a las enseñanzas sociales, en la legislación vigente se encuentra una cierta más proclive a la estadística. En este sentido, solo remarcaremos la enseñanza de probabilidad tanto uno como en otro bachillerato, puesto que este es nuestro objeto de estudio.

Objetivos

Con la impartición de los contenidos de probabilidad se pretende:

- Afrontar los errores o sesgos y para ello optaremos por introducir la probabilidad en el aula de modo experimental, es decir las que los alumnos se den cuenta de los procesos aleatorios y puedan distinguir variables continuas y discretas.
- Incidir también, en desarmar los esquemas mentales y las creencias personales de carácter determinista en cuanto a la propia intuición de los alumnos, eliminando sesgos y sensibilizándolos en el uso de la razón y la objetividad de las propias leyes de la probabilidad.
- A su vez, se dará la oportunidad de resolver problemas factibles, relacionados con el entorno del alumnado, de manera que requieran una recogida de datos o una simulación de los mismos, para favorecer la toma de decisiones y el aprendizaje autónomo.
- Se llevará a cabo, la sensibilización ante los errores, sesgos y falacias más comunes
- Se realizarán investigaciones con los alumnos, para descubrir sus procesos de razonamiento a la hora de afrontar problemas de probabilidad
- Se advertirá de los peligros de confiar en la intuición, así como de los riesgos de la ludopatía juvenil.

Contenidos de probabilidad a impartir:

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I

En esta matemáticas se recalca el hecho de la interdisciplinaridad de las matemáticas, como herramientas de conexión con otras materias como son la Geografía, la Sociología, la Economía…Son por tanto un instrumento de interpretación de fenómenos económicos, sociales, históricos y geopolíticos necesarios para la mundo global. Mediante el razonamiento y la interpretación de datos, permiten desarrollar modelos e hipótesis sobre hechos observables para darles utilidad y poder manejar esa información. La formalidad del lenguaje matemático permite a los alumnos la argumentación veraz y la explicación de dichos fenómenos.

Es por eso que esta rama cobre real importancia las matemáticas en cuento análisis, cálculo, medida, estimación de datos de tal manera que ayuden al alumno a argumentar de forma rigurosa, para comprender mejor el significado de los datos y su valoración. En este sentido las matemáticas a enseñar en el Bloque IV de Estadística y probabilidad, serán: la estadística descriptiva bidimensional, la profundización en el cálculo de probabilidades de sucesos, la modelización de posibles sucesos mediante la distribución binomial y la distribución normal, así como la estadística paramétrica. A continuación se recogen los contenidos extraídos de los documentos oficiales.

1. *Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.*
2. *Axiomática de Kolmogorov.*
3. *Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.*
4. *Experimentos simples y compuestos.*
5. *Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.*
6. *Variables aleatorias discretas.*
7. *Distribución de probabilidad. Parámetros: Media, varianza y desviación típica.*
8. *Distribución binomial.*
9. *Caracterización e identificación de modelo.*
10. *Cálculo de probabilidades. Manejo de tablas.*
11. *Variables aleatorias continuas.*
12. *Función de densidad y de distribución. Interpretación de la media, varianza y desviación típica.*
13. *Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal.*
14. *Manejo de la tabla de la función de distribución normal estándar.*
15. *Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal. Corrección por continuidad.*

Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II

1. *Axiomática de Kolmogorov.*
2. *Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Profundización en la Teoría de la Probabilidad*
3. *Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos.*

4. *Teorema de la probabilidad total y Teorema de Bayes.*
5. *Probabilidades iniciales (a priori) y finales (a posteriori) y verosimilitud de un suceso.*
6. *Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra. Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual.*
7. *Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Teorema central del límite.*
8. *Distribución de probabilidad de la media muestral en una población normal.*
9. *Distribución de probabilidad de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes.*
10. *Estimación por intervalos de confianza. Relación entre nivel de confianza, error máximo admisible y tamaño muestral.*
11. *Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida.*
12. *Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes*

Matemáticas I (1º BTO)

La probabilidad de las matemáticas enfocadas al ámbito científico permiten el desarrollo del pensamiento y razonamiento lógico-deductivo. El hecho de utilizar algoritmos para resolver problemas así como la adquisición de pensamiento razonado para el contraste de hipótesis y su utilización dentro y fuera del aula en situaciones cotidianas de la vida personal del alumno, en las cuales deba analizar e interpretar datos, permite al alumnado dar soluciones a los distintos problemas en materias como económica, tecnología. Ciencias naturales…

El hecho de dotar herramientas de aprendizaje a los alumnos, como son la interpretación de datos, la discriminación y análisis de los mismos de forma rigurosa, la síntesis o conclusión mediante la deducción de consecuencias o uso debe ampliar la visión de la realidad del alumno, para poder desarrollar nuevas heurísticas y poder autoreconocer los propios errores a priori y posteriori en los problemas planteados.

En cuanto al temario a impartir en 1er curso de bachillerato contiene mucho más contenido en estadística que de probabilidad cómo se puede observar que en 2º curso. En el bloque IV a desarrollar se verá, la estadística descriptica bidimensional, la dependencia e independencia de variables estadísticas y la regresión lineal, la probabilidad de sucesos, el estudio de variables aleatorias y las distribuciones tanto binomial como la normal.

1. *Estadística descriptiva bidimensional: Tablas de contingencia.*
2. *Distribución conjunta y distribuciones marginales.*
3. *Medias y desviaciones típicas marginales.*
4. *Distribuciones condicionadas. Independencia de variables estadísticas.*
5. *Estudio de la dependencia de dos variables estadísticas.*
6. *Representación gráfica: Nube de puntos.*
7. *Dependencia lineal de dos variables estadísticas.*
8. *Covarianza y correlación: Cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal.*
9. *Regresión lineal. Recta de regresión.*

10. *Estimación. Predicciones estadísticas y fiabilidad de las mismas.*

Matemáticas II (2ºBTO)

1. *Experimento aleatorio. Espacio muestral. Sucesos.*
2. *Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa.*
3. *Axiomática de Kolmogorov.*
4. *Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades.*
5. *Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada.*
6. *Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes.*
7. *Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso.*
8. *Variables aleatorias discretas.*
9. *Distribución de probabilidad. Parámetros: Media, varianza y desviación típica.*
10. *Distribución binomial.*
11. *Caracterización e identificación del modelo.*
12. *Tabla de la distribución binomial. Cálculo de probabilidades.*
13. *Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Tabla de la función de distribución normal estándar.*
14. *Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.*

Criterios de evaluación

1. *Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones bidimensionales, con variables discretas o continuas, procedentes de contextos relacionados con la economía y otros fenómenos sociales y obtener los parámetros estadísticos más usuales mediante los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora, hoja de cálculo) y valorando la dependencia entre las variables.*
2. *Interpretar la posible relación entre dos variables y cuantificar la relación lineal entre ellas mediante el coeficiente de correlación, valorando la pertinencia de ajustar una recta de regresión y de realizar predicciones a partir de ella, evaluando la fiabilidad de las mismas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos económicos y sociales.*
3. *Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad, empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales.*
4. *Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados.*
5. *Utilizar el vocabulario y la notación adecuados para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de*

comunicación, la publicidad y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.

Estándares de aprendizaje evaluables.

1.1. *Elabora e interpreta tablas bidimensionales de frecuencias a partir de los datos de un estudio estadístico, con variables discretas y continuas.*
1.2. *Calcula e interpreta los parámetros estadísticos más usuales en variables bidimensionales para aplicarlos en situaciones de la vida real.*
1.3. *Halla las distribuciones marginales y diferentes distribuciones condicionadas a partir de una tabla de contingencia, así como sus parámetros para aplicarlos en situaciones de la vida real.*
1.4. *Decide si dos variables estadísticas son o no estadísticamente dependientes a partir de sus distribuciones condicionadas y marginales para poder formular conjeturas.*
1.5. *Usa adecuadamente medios tecnológicos para organizar y analizar datos desde el punto de vista estadístico, calcular parámetros y generar gráficos estadísticos.*

2.1 Distingue la dependencia funcional de la dependencia estadística y estima si dos variables son o no estadísticamente dependientes mediante la representación de la nube de puntos en contextos cotidianos.

2.2. Cuantifica el grado y sentido de la dependencia lineal entre dos variables mediante el cálculo e interpretación del coeficiente de correlación lineal para poder obtener conclusiones. Calcula las rectas de regresión de dos variables y obtiene predicciones a partir de ellas.

2.3 Evalúa la fiabilidad de las predicciones obtenidas a partir de la recta de regresión mediante el coeficiente de determinación lineal en contextos relacionados con fenómenos económicos y sociales.

3.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.

3.2. Construye la función de probabilidad de una variable discreta asociada a un fenómeno sencillo y calcula sus parámetros y algunas probabilidades asociadas.

3.3. Construye la función de densidad de una variable continua asociada a un fenómeno sencillo y calcula sus parámetros y algunas probabilidades asociadas.

4.1. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica.

4.2. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica y las aplica en diversas situaciones.

4.3. Distingue fenómenos que pueden modelizarse mediante una distribución normal, y valora su importancia en las ciencias sociales.

4.4. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica, y las aplica en diversas situaciones.

4.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida.

5.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística.
5.2. Razona y argumenta la interpretación de informaciones estadísticas o relacionadas con el azar presentes en la vida cotidiana.

4. ERRORES COMUNES EN PROBABILIDAD

En los juicios bajo incertidumbre confiamos en reglas simples o atajos llamadas heurísticas que tienen aparente validez, pero a menudo llevan a sesgos predecibles. Estos errores tienen una base psicológica y la comprensión de las leyes de probabilidad no es suficiente para superarlos.

Para entender la probabilidad, se va a hacer hincapié en las distintas falacias y errores más usuales en los razonamientos probabilísticos de manera que permitan reflexionar al alumno para que se dé cuenta de ellos al enfrentarse a un problema.

Dichos sesgos o prejuicios provocan una alteración en nuestro pensamiento lógico deductivo que nos hace cambiar la percepción de la realidad y por la cual nos lleva a tomar decisiones erróneas.

A la hora de la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad dentro del aula, cada uno de estos errores entraña un tipo de prejuicio distinto. Por lo tanto se propondrán ejemplos sencillos de fácil comprensión para el alumnado.

A continuación se recogen distintos tipos de estos sesgos o prejuicios.

4.1. Sesgos

El hecho de que el ser humano sea un animal social permite desarrollar en él conductas que por el hecho de ser aceptado en un determinado grupo tome de manera consciente o inconscientemente decisiones por la permanencia o no en dicho grupo. Dichas decisiones pueden estar influenciadas por las opiniones, costumbres, tradiciones, formas de comportamiento del determinado grupo ante una situación. Es por eso que los prejuicios a la hora de emitir un juicio nos pueden traicionar. Esto es a lo que se conoce como sesgos cognitivos, con los cuales el ser humano consciente o inconscientemente realiza una acción o dicta una opinión debido a la presión social, costumbre o ética marcadas por una determinada sociedad o situación. Esto hace que sean muy difíciles de eliminar.

Como ejemplo sencillo sería cualquier tipo de sexismo o racismo. Este hecho de que ocurra una distorsión en el inconsciente y afecte directamente a nuestra interpretación lógica de los hechos que están ocurriendo se da también en los juegos de azar, y por ende en la probabilidad.

Dichos sesgos o prejuicios hacen que varíen nuestras predisposiciones conductuales debido a los prejuicios sociales. A la hora de jugar a un juego en el que haya probabilidad, existen distintas creencias, manías, que imagina el jugador a la hora satisfacer su deseo. Dicha creencia supone un modelo de desviación de la conducta racional, puesto que dará como válido dicho comportamiento. Mediante la investigación y la experimentación se estudian estos comportamientos.

Algunos autores han manifestado la existencia de ciertos errores sistemáticos y conductas estereotipadas continuadas por parte de las personas ante sucesos aleatorios y probabilísticos. La mayoría de los cuales son de tipo psicológico, por lo que nuestra labor como docentes no se debe enfocar solamente a la explicación de los contenidos y leyes de probabilidad para poder superarlos. Dichos errores o sesgos están muy interiorizados por parte de los alumnos y es por tanto que pueden incluso a dificultar el aprendizaje de los conceptos formales.

Para entender de manera sencilla lo que es un sesgo se propone el siguiente ejemplo:

Ejemplo de sesgo: Figuras Takete y baluba

También conocido como efecto kiki y bouba, el psicólogo Wolfgang Köhler, llevó a cabo en Canarias en 1929, el siguiente experimento en el cual se preguntaba a distintas personas cómo creían ellas que se llamaban cada una de estas figuras, si "takete" o "baluba".

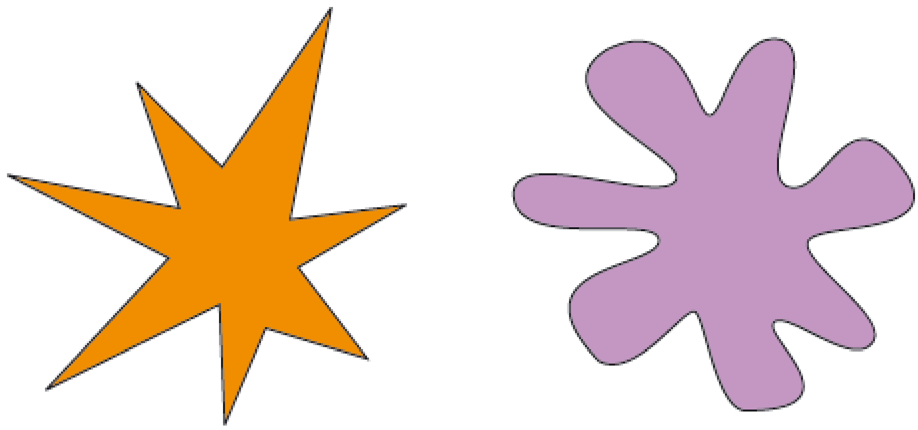


Ilustración 1.Formas puntiaguda y redondeada del experimento de Köhler

Es curioso que la mayoría de los entrevistados asociaron la palabra "takete" a la figura puntiaguda y "baluba" a la redondeada. La explicación es que nuestro cerebro asocia de alguna manera, las formas y los sonidos, por eso los sonidos "k" para los hispanohablantes nos resultan más afilados un ejemplo de ello son las palabras pico, piquete, taco,… normalmente objetos con aristas. Mientras que los sonidos de la "b" o "m" más labiales y suaves, un ejemplo de ellos son palabras como melocotón, burbuja, viento... que nos evocan elementos livianos. Este sesgo está relacionado con la sinestesia o capacidad que tenemos de atribuir una sensación (auditiva, olfativa, visual, gustativa, táctil) a un objeto al cual no le corresponde convencionalmente.

Esta desviación condicionante es lo que denominamos sesgo cognitivo, pues altera nuestra capacidad de razonamiento y nos auto sometemos al prejuicio.

Enfocado a la probabilidad podemos decir que los sesgos más importantes que afectan a la hora de analizar un problema en el que intervenga cierta dosis de azar son los siguientes:

4.1.1. Sesgo de confirmación.

El sesgo de confirmación es uno de los más importantes. Es el prejuicio por el cual se nos hace más fácil entablar amistad con las personas que son afines a nuestra forma de ser e ideas. También por el mismo principio leemos un tipo de periódico determinado para saber la visión exactamente sobre los hechos (sobre todo políticos), realizamos determinadas actividades, aficiones según nuestra forma de ser, nos gustan determinadas y tenemos nuestras propias creencias y tradiciones.

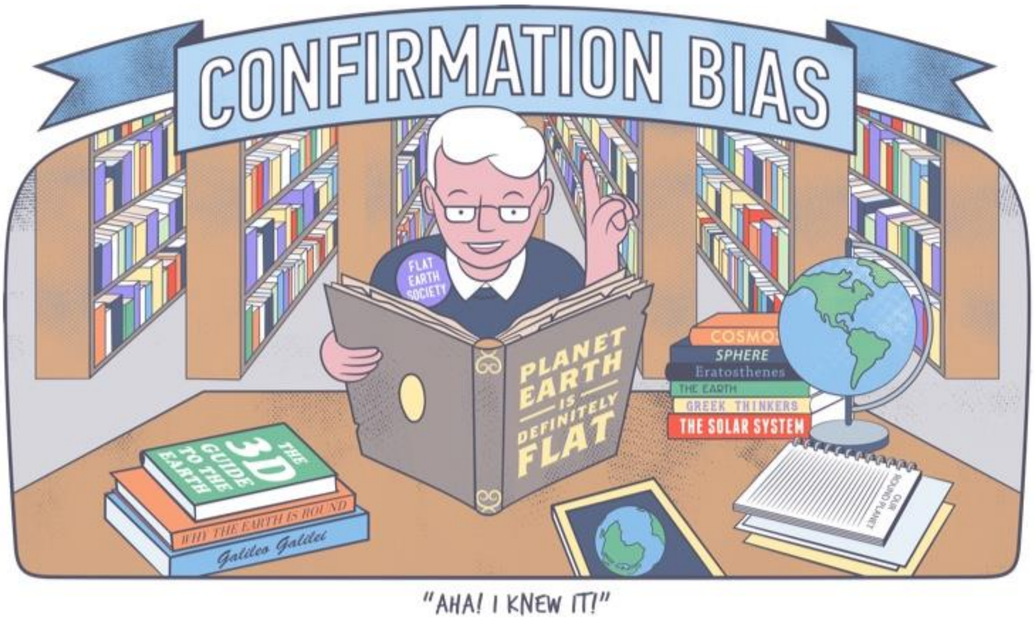


Ilustración 2. SESGO DE CONFIRMACIÓN. (¡ajá , lo sabía!

Incluso, a veces hasta involuntariamente, nos retroalimentamos de nuestras propias opiniones, es por ello nos es más fácil recordar mejor los sucesos que confirman nuestras propias ideas. En otras palabras, se trata de auto confirmarnos nuestras propias ideas prefijadas, lo que conlleva como principal ventaja que nos une a otra gente piensa parecida o de la misma forma que uno mismo: facilita relaciones y tiende puentes con gente semejante, favoreciendo la creación de grupos con una misma opinión y causa.

Sin embargo, esta tendencia a interpretar la información según convenga puede acarrear que en el propio individuo surja la intolerancia hacia las demás opiniones que sean distintas a las de uno mismo. En este sentido, la búsqueda de un solo tipo de información, o información sesgada de la realidad, puede hacer que el individuo se radicalice, de ahí deriva la importancia de mantenerse informado por distintas vías, de manera que se evite el conductismo de la voluntad del propio individuo, sin menospreciar su propia autonomía y pensamiento crítico.

La mayoría de empresas en internet, utilizan este tipo de sesgo de manera, que nos ofrecen unos servicios aceptando previamente unas “cookies” o normativa por la cual nos venden la idea de que nos conceden unos productos más personalizados en función de nuestros propios gustos. Esto a priori, puede parecer satisfactorio pues te remiten a enlaces con contendido similar al que has buscado.

Ilustración 3. Spam de páginas web

Es por eso que para evitar que se retroalimente al individuo con la misma información, amparándose en sus gustos y preferencias, se debe enseñar a respetar las distintas opiniones, sacando lo bueno de cada una de ellas, pues todas tienen ventajas y desventajas. En definitiva, el aprendizaje para ser asertivos, respetando la opinión de los demás es básico para ampliar la visión de nuestros propios alumnos y crear climas de tolerancia y respeto.

Ejemplo. Letras y números

Supongamos que tenemos las siguientes cuatro cartas con letras y números: A B 2 3, y queremos, dando la vuelta al menor número de cartas posibles, averiguar si la siguiente afirmación es cierta: “Cada carta con una vocal en un lado tiene un número par en el otro”.

Normalmente el orden más común es: A, 2, 3, B, lo cual es erróneo:

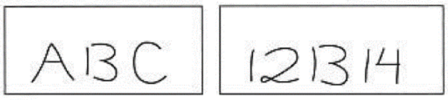
- Elegir primero “A” es acertado, ya que el enunciado es falso si no hay un número par al otro lado.
- Sin embargo, levantar en segundo lugar “2” no sirve de nada: si tiene una vocal al otro lado la afirmación es cierta y tenemos que seguir levantando cartas para ver si las demás convierten la frase en falsa, pero si no tiene una vocal esto no prueba que la afirmación sea cierta o falsa, pues se busca que las cartas con una vocal tengan un número par al otro lado, y nada impide que un número par tenga una consonante.
- Es más acertado, antes que levantar “2”, levantar “3”, ya que si tiene una vocal al otro lado demostraría que la afirmación es falsa. Igualmente es más acertado levantar “B” antes que “2”: si hay una vocal al otro lado se demostraría que la afirmación es falsa.

El sesgo de confirmación se muestra en que tendemos a buscar conformidad con la evidencia antes que disconformidad, es decir, elegimos “2” antes que “3” o “B” porque buscamos números pares.

4.1.2. Efecto de ambigüedad.

Es la aversión a lo incierto. Consiste en un rechazo directo de las opciones que por falta de información parecen tener una probabilidad incierta o desconocida.

Ejemplo: ¿Qué vemos en los siguientes recuadros?



Seguramente leamos en la izquierda ABC y 12 13 14 en la derecha, pero los elementos centrales de ambos objetos son idénticos. ¿Por qué no hemos leído A13C o 12B14? La misma forma es leída como una letra en un contexto de letras y como un número en un contexto de números. El contexto entero ayuda a determinar la interpretación de cada elemento. La forma es ambigua, pero hemos saltado a una conclusión sobre su identidad y sin darnos cuenta de la ambigüedad que hemos resuelto.

4.1.3. Sesgo de arrastre.

También conocido como efecto vagón, (*bandwagon* en inglés) o coloquialmente "subirse al carro". Este sesgo consiste simplemente en apoyar una causa, seguir un suceso, comprar un producto por el hecho de que está de moda. Es decir, la popularidad de dicho producto hace que lo percibamos como más deseable para nosotros porque puede reportarnos beneficios como reconcomiendo social, fama, prestigio, dinero…

Ilustración 4. EFECTO DE ARRASTRE.(El precio de esta super grapadora es tan solo 299 dólares , es nuestro producto más vendido)

En este sentido este tipo de sesgo facilita y sostiene las siguientes falacias a su vez:

- "***Argumentum ad populum***" mediante el cual se generaliza una opinión, refiriéndose a la supuesta opinión de todo un grupo, en vez de por la validez del argumento en sí mismo. Sumarse al bando vencedor, porque está la mayoría no es un argumento válido en sí mismo.

- *“**Argumentum ad verecundiam”*** pues atribuye la autoridad a una persona o grupo simplemente porque lo dice alguien famoso o con aceptado prestigio social.
- *“**Argumentum ad hominem”,*** este tipo de falacia es la contraria a la anterior pues deslegitimiza la autoridad o valor de un razonamiento de una persona, solo por ser dicha persona.

Para combatir este tipo de sesgo, debemos depender menos de las opiniones de los demás, sopesar la información que tenemos disponible y también forjar nuestra propia personalidad.

Ejemplo. Seguimiento del líder

Es habitual, en salones de juego y casinos, en los cuales muchos de sus jugadores al llegar a una mesa y ver al jugador que más fichas posee, seguirle y apostar a los números que él apuesta, de tal manera que se crea la errónea creencia de que el jugador experimentado tiene el control sobre dicho suceso aleatorio y puede maximizar sus beneficios

4.1.4. Efecto de anclaje.

A este efecto también se le conoce como "efecto ancla" (*Anchoring*, en inglés) debido a que se fija una parte de la información que en muchas ocasiones la terquedad del individuo en favor de una determinada opción hace que se empeñe en tomar una decisión por costumbre, suerte o por favoritismo.

Cuando vamos al supermercado y existe una oferta de un producto que está un tanto por ciento rebajado, nuestra predisposición inicial es pensar que dicho producto está bien y tiene un precio adecuado, si, tener en cuenta siquiera la relación con otros productos similares. La tendencia a creer y juzgar un suceso, en este caso un producto, solamente en base información recibida recientemente hace que no analicemos en su totalidad la realidad percibida y por lo tanto seamos susceptibles de errar a la hora de decidir una opción u otra.

Otro ejemplo de dicho efecto es que el valor que le damos a un producto depende del precio que tenga y el precio prefijado que le tenemos asociado. En este sentido si sabemos que una barra de pan, que supongamos normalmente cuesta 0.70€ (precio supuesto y fijado "anclado" a priori), su precio es mayor o menor que este, entonces la valoraremos como cara o barata. Según Kahneman **[4]** *"las personas consideran un valor particular para una cantidad desconocida antes de estimar esa cantidad".*

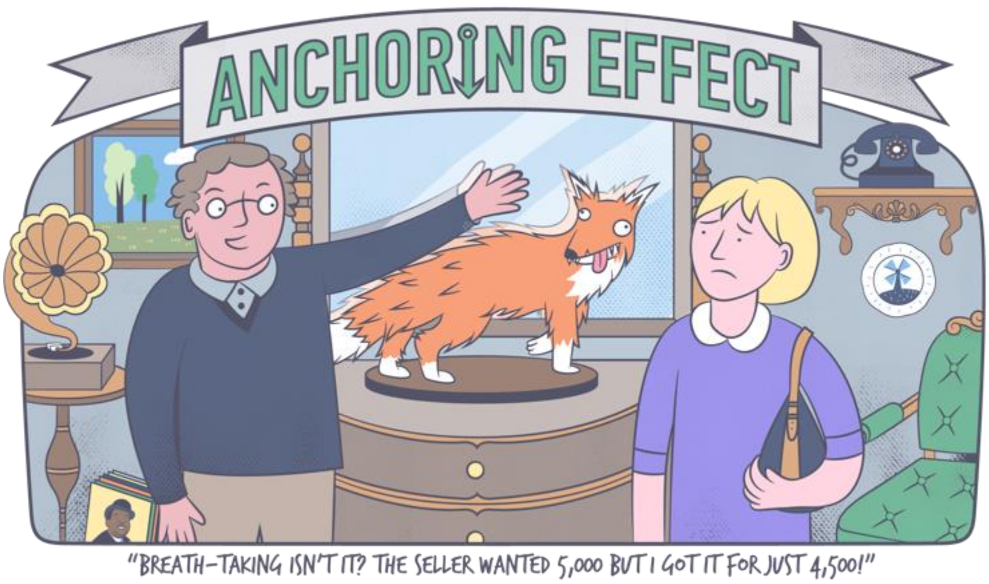


Ilustración 5.EFECTO DE ANCLAJE. (¿Increíble no?, me pedían 5000 dólares y lo conseguí por sólo 4500¡)

Otro ejemplo: ¿Qué edad tenía Gandhi cuando murió si superó los 104 años? La pregunta en sí misma, así como el dato, nos condiciona. Y lo tomamos como punto de anclaje y de partida sobre el que hacer nuestras conjeturas. Dicho número nos influye a la hora de estimar la edad de fallecimiento, puesto que si fuese por ejemplo 35 años, nuestra respuesta sería distinta. Es por eso que el número de años que nos den condiciona y vamos "ajustando" la cantidad según nuestro punto de anclaje.

Este sesgo también se puede ver como un efecto de "priming" o sugestión, es decir simplemente por hacer una pregunta de una determinada forma, podemos condicionar la respuesta. Por ejemplo: ¿Es cierto que te duele la pierna? Mucha gente sentirá que puede que la tenga un tanto entumecida o no, aunque en la realidad no sea así.

Ejemplo. Disposición de donaciones

En un estudio para el Exploratorium (Museo de ciencias de San Francisco) se animaba a participar, haciendo una donación anual de dinero ante los problemas de contaminación creados por los grandes buques petroleros en la costa oeste de EE.UU salvando a las aves marinas de la costa. Para ello se realizó la siguiente pregunta de anclaje: ¿Estaría usted dispuesto a pagar 5 dólares…? antes de hacerles la pregunta con qué cantidad estarían dispuestos a contribuir a la causa. A otros participantes se les aumentó la cantidad de anclaje y a otros no se les mencionó la pregunta de anclaje.

El resultado fue el siguiente:

Grupos de Participantes	Pregunta	Cantidad de anclaje	Disposición a pagar promedio
A	No se menciona	0	64 $
B		5 dólares	20 $
C		400 dólares	143 $

Esto indica la poderosa influencia del anclaje en el condicionamiento de la respuesta. Pues los distintos participantes, ajustaban su donación en función de la cantidad preestablecida. Es decir sopesaban según dicha cantidad dejándose influir por ella. Por tanto, las “anclas” son evidentemente aleatorias y subjetivas pero pueden ser proporcionarnos información sustancial o desinformarnos totalmente.

4.1.5. Efecto Dunning-Kruger. Confianza excesiva

El nombre de dicho efecto se debe a los dos catedráticos de la Universidad de Cornell que estudiaron dicho sesgo consiste en el efecto cognitivo ilusorio por el cual un individuo de poca capacidad se cree con habilidad suficiente para realizar una tarea. Esta ilusión de superioridad también se da en sentido contrario, pues personas que son capaces de hacer ciertas tareas auto subestiman sus propias competencias.

Ilustración 6. EFECTO DE EXCESIVA CONFIANZA. (¿Usted, En qué estaba pensando?, Me pareció el siguiente paso más lógico, después de haber ganado el premio de natación de 200 m ¡)

Este hecho de saber de lo que uno es capaz de hacer y lo que no, es de vital importancia. Para evitarlo, lo primero es ser consciente de las capacidades y limitaciones de uno mismo, pues no hay que compararse con los demás sino que hay que tomar a uno mismo como referencia para dar lo mejor de nosotros sin importar los demás. Es decir aumentar la autoestima y el poner en valor nuestras habilidades sin darle crédito a las opiniones ajenas.

Ejemplo. Casas de apuestas

El aumento de las casas de apuestas en Castilla y león se debe al hecho de que estas se nutren de personas cada vez más jóvenes que se creen con la "suerte" necesaria para triunfar en dicho juegos de azar.

Este sesgo, de creencia de superioridad sumado a las facilidades que dan las propias casas para poder atraer clientes, hace de ellas un atractivo juvenil al alcance de los bolsillos más jóvenes. Todo ello sumado a unas campañas de publicidad muy agresivas, bombardeando todos los medios y redes sociales, así como la utilización de personajes públicos, estrellas de fútbol, etc están creando generaciones tempranas de ludópatas.

Se recoge aquí una noticia del periódico del Norte de castilla en el cual se explica detalladamente como las casa de apuestas han aumentado gracias a aprovecharse del efecto Dunning-Krueger:

https://www.elnortedecastilla.es/valladolid/casas-apuestas-consolidan-20181002120246-nt.html

4.1.5. Sesgos según las experiencias personales o antrópico

Dicho efecto se refiere a que simplemente por el hecho de ser humanos, nos obstinamos en sesgar o no creer las evidencias probadas mediante una selección selectiva de la información. Esto genera juicio propio al individuo, lo cual es bueno, pero sin embargo para desacreditar dicho argumento se generaliza el prejuicio, así como a la entidad e incluso se puede llegar a proponer uno como entidad investigadora y acreditadora.

Ejemplo: en una partida de cartas, desacreditar al que baraja las cartas y proponerse uno mismo como *crupier*. Otro ejemplo sencillo pero de temática distintas sería menospreciar el arte abstracto, por el hecho de que es "todo igual" y que "yo podría hacerlo".

Según (Kahneman & Tversky , 2011) **[4]** las experiencias personales ante la probabilidad influyen en nuestra forma de percibir la realidad. Así pues damos respuestas, rápidas (irracionales) y lentas (racionales) a problemas complejos según la ocasión. Dicha aleatoriedad en las respuestas nos hace que la realidad percibida sea personal y propia de cada uno de los individuos y con lo cual totalmente subjetiva a la hora de razonar sobre ella. Así, tenemos:

Ilusión de control.

La falsa creencia de poder influir en distintos sucesos. Las supersticiones o los rituales es una de las grandes falacias de todos los tiempos. Nuestra capacidad de control sobre un suceso aleatorio es una falsa interpretación de la realidad, en base a nuestras experiencias personales.

> ***Ejemplo:*** Pensar que al lanzar una moneda al aire de la misma forma, con la misma, mano y la misma velocidad, pueda hacer que salga la cara que yo quiera.

Sesgo de proyección.

La generalización inconsciente sobre un acontecimiento, comparándola con la propia experiencia actual del individuo.

> ***Ejemplo****:* Un partido propone en campaña electoral unas ideas que cree que son lo mejor para el país y que los ciudadanos van a votar porque comparten esa misma opinión, pero esto no ocurre.

Efecto Keinshorm.

Se trata de la predisposición a contradecir las opiniones de otras personas sin tan siquiera llegar a escucharlas.

> ***Ejemplo*. **Los políticos cuando se interrumpen y no se respetan el turno de palabra.

Efecto Forer o Barnum.

Aceptación de descripciones generalistas como si fuesen excepcionales, cuando en la realidad podrían ser aplicables a cualquiera.

> ***Ejemplo*:** Creencias en los horóscopos.

4.1.6. Sesgos referidos al lenguaje.

Otra dificultad añadida a los alumnos en cuanto a la estimación probabilística consiste en la imprecisión de la propia lengua. Utilizamos palabras, frases, expresiones, a las cuales asignamos distintos grados de probabilidad en función de un suceso que nos parece que puede ocurrir o no. El propio mal uso que hacemos con los términos probabilidad y posibilidad es un sesgo que provoca confusión a la hora de determinar probabilidad en un suceso. Según la Real Academia Española de la Lengua se definen cómo:

- ***Posible****:* Que puede ser o suceder. Que se puede ejecutar. Posibilidad, facultad, medios para hacer algo.
- ***Probable:*** Verosímil o que se funda en razón prudente .que se puede probar. Dicho de una cosa: que hay buenas razones para creer que se verificará o sucederá.

La confusión de ambas definiciones hace que se usen indistintamente en nuestro idioma en diferentes ámbitos. Este hecho sumado a la inmensa cantidad de palabras prejuiciosas que tenemos en el imaginario colectivo por las cuales asignamos distinto grado de probabilidad según el suceso, contribuyen aún más si cabe, a que la propia intuición nos falle y no podamos confiar en ella a la hora de establecer probabilidad.

Ejemplo. Asigna grados de probabilidad a expresiones

En el siguiente conjunto de palabras, asigna el grado de probabilidad entre 0 y 1 a las siguientes expresiones probabilísticas según consideres el grado de implicación que indiquen.

Expresión	Grado	Expresión	Grado
Dudoso		Alta posibilidad	
Quizás		Las posibilidades son grandes	
Podría ser		Se puede esperar que…	
Casi seguro		Posibilidad razonable	
Poca posibilidad		Muy posible	

4.2. Heurística de la representatividad

La heurística de la representatividad es un tipo de estrategia en la cual según (Cañizares Castellano, 1987),**[2]** "*se dice que un sujeto asigna la probabilidad a un suceso basándose en la semejanza del mismo con la población de la cual se extrae o en el parecido de éste con el proceso por medio del cual se generan los resultados.*"

El hecho de que nosotros como seres humanos tengamos la capacidad de razonamiento, es decir el proceso de recepción de información disponible y elaboración de nueva a partir de ella, nos permite sacar una conclusión general a través de unas premisas particulares, a través del *razonamiento inductivo o inferencial*, así como viceversa, e ir de lo general a lo particular mediante el *razonamiento deductivo*.

En este sentido, el razonamiento inferencial, por el cual partiendo de unas o varias proposiciones particulares (premisas) inferimos o extraemos un juicio (conclusión), implica que podamos errar si olvidamos uno de estos dos aspectos:

- ***La representatividad de la muestra**:* la muestra proporciona información sobre la población. Si la muestra representa a la población, esto permite la generalización de los resultados obtenidos de la muestra parcial a la población total.
- ***La variabilidad de la muestra***: las muestras varían entre sí.

Entonces a la hora de dar solución a estos problemas según (Kahneman & Tversky , 2011) **[4]** debemos recurrir a la heurística de la representatividad, *para conocer el grado de similitud entre la muestra escogida con la población de la que fue extraída*. Dicho método para resolver este problema permite que a mayor grado de representatividad de la muestra, mayor será la probabilidad de que ocurra. Pero conlleva que podamos caer en los siguientes errores:

4.2.1. Insensibilidad a resultados probabilísticos previos.

A la hora de estimar una probabilidad de un proceso hay que tener muy en cuenta la probabilidad previamente existente o también llamada *frecuencia de tasa base* de los resultados.

Falacia de las tasa base

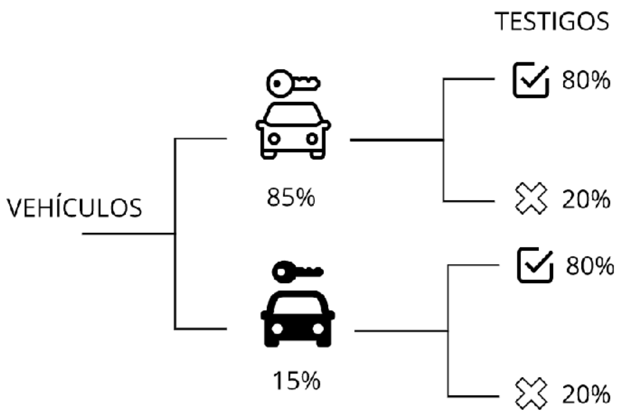
Cuando se ignora la información general sobre la probabilidad de un evento y se focaliza solamente en información más específica.

Ejemplo. Taxis y Ubers en la ciudad.

En una ciudad existen 2 compañías de taxis, los blancos (taxis normales) y los negros (Uber).El 85% son blancos y el 15% negros. Uno de estos tipos de vehículos se ha visto implicado en un accidente de tráfico, y un testigo ha declarado que el coche era negro. Según unos datos anteriores sobre la veracidad de la identificación de color hecha por testigos indican que el 80%

de los casos son correctos y por lo tanto aciertan, pero sin embargo el 20% son incorrectos. ¿Cuál es la probabilidad de que el coche del accidente en realidad fuera negro?

Por tanto la respuesta al problema la podríamos visualizar según el siguiente diagrama en árbol:



Este test fue realizado a alumnos universitarios que no habían recibido instrucción de contenidos en probabilidad, y la respuesta que dieron fue que la probabilidad era del 80%, sin pararse a considerar la información de que el 85% del total de taxis eran blancos y el 15% negros, mientras que otros muchos contestan categóricamente que el vehículo era de color negro, sin tener en cuenta los porcentajes dados ni la aleatoriedad del problema.

La respuesta correcta implica el uso del el *Teorema de Bayes:*

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) * P(A)}{P(B)}$$

La probabilidad que queremos es la de que el taxi fuera efectivamente negro condicionado a que el testigo afirma que es negro:

$$P(Negro/Testigo\ dice\ Negro) = \frac{P(Testigo\ dice\ Negro/Negro) * P(Negro)}{P(Testigo\ dice\ Negro)}$$

P(Blanco) = 0.85, P(Negro) = 0.15

P(Testigo dice Negro/Negro) = 0.8, P(Testigo dice Blanco/Negro) = 0.2

P(Testigo dice Blanco/Negro) = 0.8, P(Testigo dice Negro/Blanco) = 0.2

Luego

$$P(Negro/Testigo\ dice\ Negro) = \frac{0.8 * 0.15}{0.8 * 0.15 + 0.2 * 0.85} = 0.4137$$

Es decir, que la probabilidad de que el taxi sea realmente negro no es del 80% sino más o menos la mitad.

Ejemplo. Test del nuevo cáncer

Según un informe este tipo de cáncer nuevo tiene una incidencia en la población del 1%. (Nuestra tasa base). Según las investigaciones el test es fiable en el 79% de los casos pero da falso positivo en cáncer el 21% de los casos, cuando en verdad no hay presencia de enfermedad.

Si hago el test y me da positivo, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga cáncer?

Para la gente normalmente la respuesta rápida sería tendríamos un 79% de posibilidades de padecer cáncer pero no hemos tenido en cuenta el dato base sobre que se hace el test pues solo afecta a 1% de la población. Entonces según el teorema de Bayes nos quedaría 3.66% de probabilidad de padecer este tipo de cáncer:

P(con Cáncer) = P(C) = 0.01
P (sin Cáncer) = P (¬C) = 0.99

P (Positivo) = P(P) = 0.79
P (Falso positivo) = P (FP) = 0.21

$$P(Cáncer/Positivo) = \frac{P(Cáncer/Positivo) * P(Cáncer)}{P(Positivo)}$$
$$= \frac{P(C/P) * P(C)}{P(C/P) * P(C) + P(\neg C/P) * P(\neg C)} = \frac{0.79 * 0.01}{(0.79 * 0.01) * (0.21 * 0.99)}$$
$$= 0.0366$$

Aunque el test tenga una fiabilidad del 79%, la probabilidad de tener cáncer es bajísima.

4.2.2. Insensibilidad al tamaño de la muestra.

Ley de los pequeños números

Se conoce con el término de *Ley de los pequeños números* a pensar que una pequeña muestra pueda ser igual de representativa de las características de la población total que una muestra grande.

Dentro de los sesgos cognitivos más comunes, encontramos el de no tener en cuenta el tamaño de la muestra. Nuestro cerebro realiza y busca patrones y completa información (intuición) y a veces no tiene en cuenta cuán grande o pequeña es la muestra que está manejando. Esta teoría va en total contraposición con la Ley de los grandes números o también llamada regresión a la media por la cual se explica que el promedio de una muestra aleatoria de una población de gran tamaño tiende a aproximarse a la media de la población completa.

Nuestra forma de pensamiento rápido y automático es muy rápido a la hora de identificar las relaciones causales entre sucesos, aunque estos sean falsos. Un solo suceso aleatorio no nos proporciona una información por sí solo, sin embargo muchos sucesos azarosos tienen un comportamiento más regular.

Un ejemplo de ello sería si pensamos una gran urna de bolas de colores blancas y negras. Supongamos además que un robot extrae 4 bolas a ciegas, y realiza las siguientes tareas

1. Anota el número de muestras homogéneas, del mismo color.
2. Vuelve a meter la bolas en la urna
3. Repite el primer paso.

Los resultados obtenidos, si repetimos el proceso infinitas veces, se indican en la siguiente tabla.

Resultados	Proporción
BBBB	≈ 1/16
BNNN	≈ 4/16
BBNN	≈ 6/16
NBBB	≈ 4/16
NNNN	≈ 1/16

Ahora bien si repitiésemos el experimento con dos personas, de manera que volvieran anotar los resultados de muestras homogéneas, pero una de ellas sacase 7 bolas en vez de 4, llegaríamos a la conclusión por la cual las muestras de las 4 bolas dan resultados extremos (todas iguales) con más frecuencia que las muestras de 7 bolas.

La explicación se debe a la estadística, pues los resultados extremos altos o bajos son más probables en muestras pequeñas que en muestras grandes. Por lo tanto, estas últimas son más fiables, pues siguen la ley de los grandes números y son más precisas, por lo que permiten resultados menos extremos que las muestras pequeñas que son azarosas e interviene la suerte.

Dicha variación de la muestras supone un fastidio y auténtica traba a la hora de realizar una observación sobre un proceso aleatorio. La elección del tamaño de la muestra no es en absoluto banal, pues necesitamos una muestra los suficientemente grande porque es la única manera de reducir el riesgo de error. Pero ¿cómo calcular el tamaño de la muestra para reducir el riesgo de fracaso a un nivel aceptable? La respuesta es contundente, mediante el cálculo y desechando la intuición estadística.

Ejemplo. Número de caras de una moneda al aire

Si al lanzar una moneda al aire, apuntamos el número de caras, a medida que vamos aumentando el número de lanzamientos, la frecuencia relativa con la que sale las caras va tendiendo a la media, es decir se van equilibrando el número de veces que sale Cara y cruz.

Número de Lanzamientos (N)	Número de Caras (n)	Frecuencia relativa (n/N)
Número muy pequeño		Muy alta
…	…	…
10	7	0.70
30	14	0.46
60	36	0.60
120	49	0.4083
180	86	0.47
240	124	0.516
300	154	0.513
…	…	…
Número muy grande	Regresión a la media	0.5

Ejemplo. Nacimientos de niños/as en dos Hospitales

En una ciudad existen dos hospitales A y B, nacen niños y niñas. En el A hay 45 nacimientos al día y en el hospital B nacen 15 bebes. Normalmente el 50% de los nacimientos son niñas, pero los porcentajes varían cada día. ¿Qué hospital de los dos, registrará más días en los que el 60% de los bebés son niñas?

¿En el Hospital A, o en el B, o en los 2 será aproximadamente igual?

A la mayoría de los alumnos encuestados les pareció que existía la misma probabilidad en el hospital A que en el B. Ambos hospitales son igualmente representativos de la población general. Sin embargo, según lo aprendido sobre el tamaño de las muestras, el número esperado de días en los que más del 60% de los recién nacidos son varones es más alta en el hospital B, por ser más pequeño que el grande A, porque un muestra grande es menos probable que tome valores extremos y se aleje de la media 0.5. Por tanto es contraintuitiva esta visión del cálculo probabilístico a nuestro razonamiento.

Y por tanto las nociones de probabilidad no entran en el razonamiento intuitivo de la gente. Es lo mismo que cuando se tira una moneda al aire; es más fácil y probables sacar 100% de Caras si tiramos solamente 3 veces que si tiramos 30. (Llaneras, 2017) **[11]**

Ejemplo. Bolsa llena de bolas

En una bolsa repleta de bolas rojas y blancas, hay 2/3 de un color y 1/3 que son de otro distinto. Una persona saca 5 bolas de la bolsa y encuentra 4 rojas y 1 blanca. Otra persona saca 20 bolas y encuentra 13 rojas y 7 blancas. ¿Cuál de las dos confiará más en que la urna contenga 2/3 de las bolas rojas y 1/3 de las bolas blancas y no al revés? [1] (Kahneman & Tversky , 2011)[**4**]

	Bolas Rojas	Proporción	Bolas Blancas	Proporción
Caso 1	4	0.8	1	0.2
Caso 2	13	0.65	7	0.35

Para la mayoría de la gente, la primera muestra ofrece una prueba mucho más convincente de que la urna es predominantemente roja, pues la proporción de rojas es mayor en la primera muestra que en la segunda. Sin embargo, la muestra del caso 1 es de tan solo 5 bolas, por lo que hay que tener mucho cuidado al extraer conclusiones con una muestra tan pequeña, al extraer conclusiones. La muestra del caso 2 es bastante mayor, tiene 20 bolas, luego más fiable a la hora de fiarnos de sus resultados. En este caso la proporción de rojas en la segunda muestra, 0.65, es casi la misma que la de la bolsa, 0.66.

Ejemplo: Nacimientos

Tomamos una muestra de 6 nacimientos de bebes en un hospital. La secuencia de niñas y niños es totalmente aleatoria, con sucesos independientes uno de otros puesto que el sexo de un bebe no afecta de ninguna manera el del siguiente. Considerando las siguientes frecuencias

Secuencia	Niños(M)	Niñas (F)
MMMFFF	3	3
FFFFFF	0	6
MFMMFM	4	2

[1] Apéndice A. El juicio bajo incertidumbre: Heurísticas y sesgos. Insensibilidad al tamaño de la muestra, Pág. 421

La pregunta que subyace es si estas posibles secuencias tienen todas ellas la misma probabilidad de salir. La respuesta intuitiva y rápida es no, pues no todas las secuencias de 6 nacimientos pueden ser igual de probables como otra cualquiera. Nos parece que la 3ª secuencia es más aleatoria que las otras y por lo tanto parece mucho más probable.

Pensamos que es más difícil que salga una secuencia todo niñas o niños a que salga una secuencia mixta. Pero esto indica que no estamos teniendo el tamaño de la muestra que nos están dando. En este sentido, estamos buscando patrones en los cuales haya una causa o intención externa. No pensamos que haya una regularidad en este proceso. Aunque los procesos aleatorios produzcan a veces secuencias que parecen estar prefijadas y no ser del todo aleatorias.

Mediante el razonamiento asociativo buscamos causas, patrones que expliquen este comportamiento. Esta búsqueda acarrea en nosotros problemas a la hora de evaluar sucesos aleatorios. Por ejemplo a la hora de demostrar que los números irracionales no siguen ningún patrón en sus infinitos decimales nos supone un conflicto racional, pues pensamos que debe de haber un patrón.

Esta ilusión cognitiva está bastante extendida y se debe en gran medida a una herencia de nuestros ancestros. El hecho de estar vigilantes, buscar pautas, prever o intuir un acontecimiento antes de que pase, es una cualidad inherente de los primeros seres humanos. Pues debían adelantarse a los movimientos de los depredadores que estaban al acecho, y por tanto lo mejor, más seguro y recomendable era estar alerta ante un suceso que no podíamos controlar.

Como conclusión, solo resta indicar que la nuestra ilusión general en tener mucha confianza sobre las pequeñas muestras hace que estemos más atentos al contenido que a la fiabilidad de dicho contenido y por ende aceptamos una visión más simplista de la realidad para comprenderla mejor. Y también debemos tener en cuenta que los procesos aleatorios parecen que piden una justificación o causa, pero se deben única y exclusivamente al azar.

4.2.3. Concepciones erróneas sobre el azar.

Al pensar que un proceso aleatorio puede tener un patrón y estar marcado por una secuencia y por lo tanto una pequeña muestra pueda representar de forma fidedigna el proceso entero. En esta casuística nos encontramos con los errores más comunes en los juegos de azar son *la falacia del jugador o la falacia de la conjunción.*

Falacia del jugador

La falacia del jugador apostador consiste en un pensamiento erróneo que considera que los sucesos pasados en un experimento aleatorio afectan a los futuros. Se da en los juegos de azar, de ahí que sea conocida también como la Falacia de Montecarlo, por sus casinos. Básicamente, se basa en la idea equivocada de que un suceso aleatorio tiene más probabilidad de ocurrir si no ha ocurrido recientemente.

Esta falacia puede ilustrarse considerando el lanzamiento sucesivo de una moneda equilibrada, de modo que los lanzamientos son independientes y en cada lanzamiento la probabilidad de cara es exactamente 0.5. Así, la probabilidad de que salgan 2 caras seguidas es $0.5^2=0.25$, la de que salgan 3 seguidas es $0.5^3=0.125$, y así sucesivamente.

Supongamos que han salido 4 caras seguidas. Un creyente en la falacia del jugador diría: "Si en el siguiente lanzamiento sale otra cara, habrían salido 5 consecutivas; la probabilidad de que esto suceda es 0.5^5=0.03125, es decir 1 entre 32, luego es más probable que salga cruz". Esto es un error: la probabilidad es siempre 0.5 tanto para cara como para cruz, y la probabilidad de 0.03125 para 5 caras consecutivas solo vale antes del primer lanzamiento. Y precisamente antes del primer lanzamiento la probabilidad de 5 caras consecutivas es la misma que la de 4 caras consecutivas y una cruz. Por lo tanto, tras las primeas cuatro caras, sigue siendo igual de probable que el quinto lanzamiento sea cara o sea cruz.

Veamos otra ilustración de la falacia del jugador con el mismo experimento de la moneda equilibrada. Que la probabilidad de cara sea 0.5 implica, en virtud de la ley de los grandes números (*), que cuanto más alto sea el número de lanzamientos, más se aproximará el promedio de caras a 0.5, es decir, más se acercará el número de caras a la mitad del número de lanzamientos. Supongamos que se han sacado 19 cruces y 1 caras. La proporción de caras es 1/20 = 0.05, muy lejos de la proporción 0.5 a la que se aproximará el promedio de muchos lanzamientos. Dicho de otra manera, el número de caras, 1, está muy lejos de la mitad de lanzamientos, 10. Un creyente en la falacia del jugador diría: "Dado que el número de caras se aproxima a la mitad conforme aumentamos el número de lanzamientos, en los siguientes lanzamientos deben salir más caras que cruces, esto es, la probabilidad de cara ha de ser mayor que la de cruz, pues si no no hay forma de compensar la diferencia actual. El error de este razonamiento consiste en tener en cuenta los 20 lanzamientos realizados. Si realizamos 1000 lanzamientos, que es un número elevado, tendremos más o menos la mitad de caras, es decir 500. El número total de caras es 500+1=501, que está bastante cerca de la mitad de los lanzamientos totales: (1000+20)/2 = 510. Así, hemos demostrado que el número de caras se ha aproximado a la mitad del número de lanzamientos con independencia del resultado de los primeros 20 lanzamientos, no hay más que realizar un número elevado de lanzamientos adicionales.

(*) Ley de los grandes números. Regresión a la media

La ley de los grandes números es un teorema fundamental de la teoría de la probabilidad que indica que si repetimos muchas veces (tendiendo al infinito) un mismo experimento, la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser una constante.

En concreto, sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias que toman el valor 1 si sucede un determinado suceso A y 0 si no sucede el suceso A, independientes entre sí, y sea $\mu = EX_i = p(A)$, i=1,...,n. La ley de los grandes números indica que el límite de $(X_1 + ... + X_n)/n$ cuando n tiende a infinito es μ, es decir, p(A).

Falacia de la conjunción.

Creencia de que la Probabilidad de la intersección es mayor que la probabilidad de la unión.

La falacia de la intersección o de la conjunción de dos conjuntos, consiste en asumir como verdaderas las condiciones locales o específicas al pensar que son más probables que una condición general que englobe a ambos conjuntos. Pero matemáticamente la probabilidad de dos eventos que ocurren juntos (conjunción) siempre es menor o igual que la probabilidad de uno de ellos ocurriendo solo.

$$Pr(A) \geq Pr(A \cap B) \leq Pr(B)$$

Ejemplo. Linda la banquera

Linda tiene treinta y un años, es soltera, franca y muy brillante. Se especializó en filosofía. De estudiante le preocupaban mucho los asuntos de discriminación y justicia social, y también participó en manifestaciones antinucleares. ¿Cuál de las alternativas es más probable? (Kahneman & Tversky , 2011)**[4]:** [2]

a) Linda es cajera de un banco
b) Linda es cajera de un banco y activista del movimiento feminista.

Al 85% de los estudiantes encuestados de varias de la universidad más importantes, eligieron la opción 2, contra toda lógica. Pero siguiendo el cálculo matemático y las representaciones de los diagramas de Venn, la probabilidad de que sea cajera de banco y activista del movimiento feminista siempre es mayor que se cumplan las dos a la vez (conjunción). Si suponemos:

Ilustración 7. Conjunción de eventos según el diagrama de Venn

$Pr(A) = \; Probabilidad\ de\ linda\ cajera\ de\ banco = \; 0.05$

$Pr(B) \; = \; Probabilidad\ de\ Linda\ activista\ movimiento\ feminista \; = \; 1 - \; P(A) \; = \; 0.95$

$P\,r(A \cap B) = 0.05 * 0.95 = 0.0475$ (Suponiendo independencia)

La probabilidad de la intersección es más pequeña que de la probabilidad de que sea cajera de banco. Dichos juicios se guían por la representatividad, pues buscan patrones similares a los estereotipos del dato base, que en este caso sería la descripción inicial de la cuales mucho dedujeron su simpatía por el movimiento feminista. Pero hay que deshacernos de este sesgo pues Linda no tiene por qué ser necesariamente activista del movimiento feminista. Según la forma matemática para el manejo de probabilidades, debemos desechar el atajo mental intuitivo pues funciona en la mayoría de casos, pero no a la hora de extraer conclusiones para evaluar sucesos probabilísticos.

[2] Capítulo 15. Linda: menos es más. Pág. 158-161

4.3. Heurística de la disponibilidad

Evaluamos la probabilidad de un suceso por la facilidad con que recordamos ejemplos: *"se evocan con más facilidad ejemplos de clases grandes que ejemplos de categorías menos frecuentes*" (Kahneman & Tversky , 2011) **[4].**

La disponibilidad, según (Cañizares Castellano, 1987) **[2]** *consiste en la tendencia a hacer predicciones sobre la probabilidad de un suceso, basándose en la mayor o menor facilidad con la cual es posible recordar o construir ejemplos de ese suceso"*. Dicha disponibilidad crea en nosotros un sesgo sistemático al hacer estimaciones de probabilidades, pues tendemos a pensar que los resultados que se pueden recordar con mayor facilidad son los más probables.

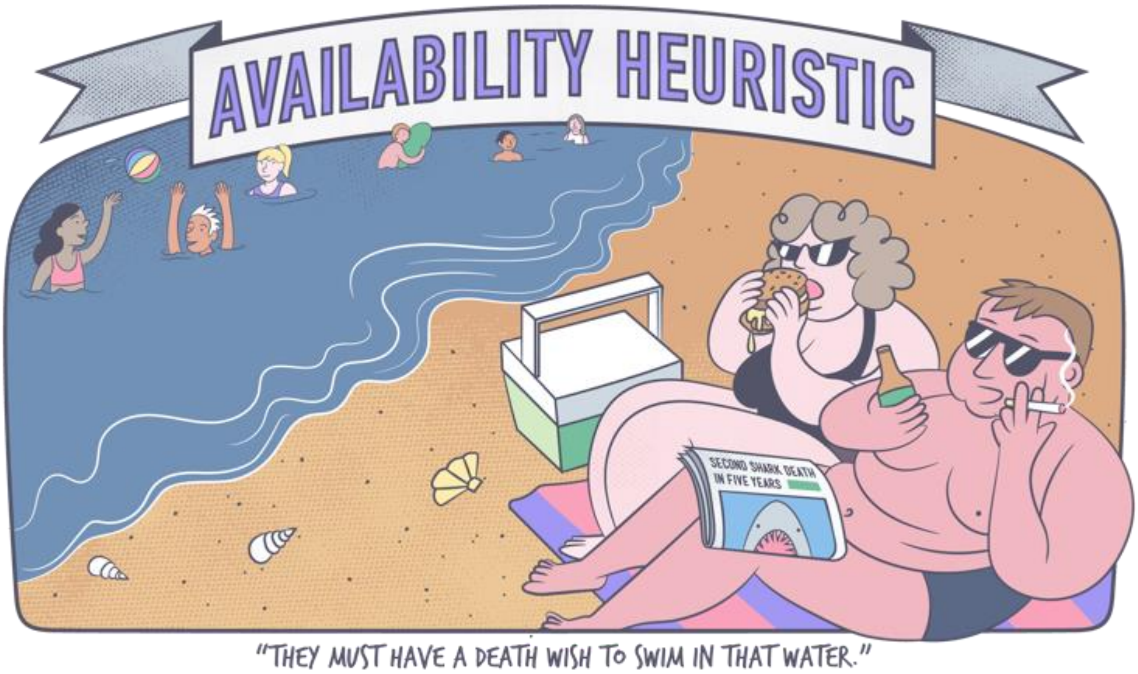


Ilustración 8.HEURÍSTICA DE LA DISPONIBILIDAD. (Deben querer matarse para meterse en el agua) Noticia del periódico: Segunda muerte por tiburón en 5 años

Consiste en una predicción sesgada en pos de un beneficio mayor, es decir aumentar el conocimiento de la situación, tener todas los factores en cuenta y actuar para alcanzar los sucesos más interesantes o emocionantes para el individuo. En este caso la heurística de la disponibilidad considera que según la accesibilidad de un suceso, se supondrá que sea más accesible y frecuente. Según si la información es más intensa y viva, entonces se recordará más fácilmente y que si algún suceso es muy evidente entonces por razonamiento deductivo será causa de un proceso anterior.

Se puede definir la heurística de la disponibilidad como el proceso evaluar la frecuencia de un suceso por la facilidad con que los ejemplos vienen a la mente. En general esto funciona correctamente porque los sucesos que ocurren con mayor frecuencia se recuerdan mejor que los menos frecuentes. Sin embargo, esto puede encubrir los siguientes errores:

4.3.1. Sesgos debido a la facilidad para recuperar ejemplos.

Una categoría cuyos ejemplos se recuperan fácilmente parece más probable que otra de igual frecuencia pero menos recuperables.

Ejemplo. ¿Qué son más frecuentes: las palabras en castellano que empiezan por la letra s o las que su tercera letra sea la s?

Según (Kahneman & Tversky , 2011)**[4],** la mayoría de la gente concluye erróneamente que son más las que empiezan por s que las que su tercera letra es una s, y que esto se debe a la heurística de disponibilidad, según la cual la probabilidad o la frecuencia de un suceso está relacionada con la facilidad o dificultad de recordar ejemplos de ese suceso. Como es más fácil para la mayoría de la gente encontrar palabras que empiezan por s, la mayoría concluye que las palabras que empiezan por s son más frecuentes. La realidad es que hay más del triple de palabras en castellano cuya tercera letra es una s que las que empiezan por s, como se puede comprobar en https://www.listasdepalabras.es/p/s/1/palabrasprimaletras.htm

4.3.2. Experiencia personal.

Cuando hacemos algo con otra persona, podemos recordar nuestro punto de vista mejor de lo recordamos el punto de vista de la otra persona.

Ejemplo. ¿Cuál sería tu contribución personal, expresada en porcentaje, a mantener las cosas ordenadas en casa, con respecto a tu pareja?

Por el sesgo de disponibilidad, cada miembro de la pareja recuerda sus esfuerzos y contribuciones individuales con mucha más claridad que los del otro, y la diferencia de disponibilidad lleva a una diferencia en la frecuencia juzgada.

Más ejemplos:

"Solo porque el mes pasado dos aviones chocaron en pleno vuelo, ella prefiere ahora tomar el tren. Eso es una tontería. El riesgo no ha cambiado realmente; es un sesgo de disponibilidad."

"Él ha visto demasiadas películas de espías últimamente, por eso ve conspiraciones en todas partes."

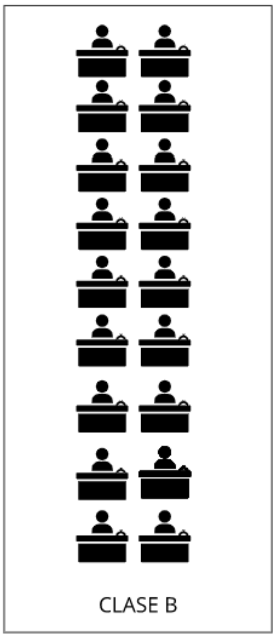
"El director ha cosechado un éxito tras otro, por eso no le viene fácilmente a la mente la idea del fracaso. El sesgo de disponibilidad le está volviendo demasiado confiado."

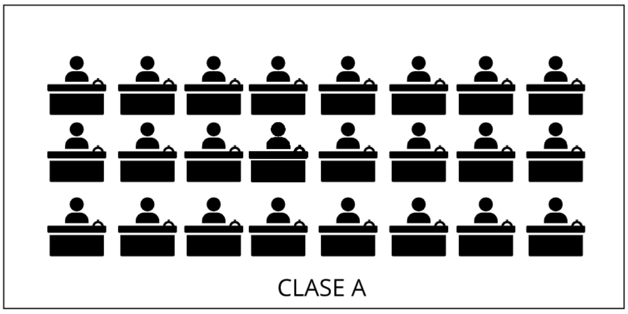
Otros ejemplos de la heurística de la disponibilidad:

Ejemplo. Los pupitres de la clase.

Un profesor imparte clase a 2 aulas de 24 alumnos y 18 alumnos respectivamente. El profesor distribuye a los pupitres de los alumnos de la siguiente, en la clase A, los coloca en 3 filas y 8 columnas, mientras que en la clase B, los coloca en 9 filas y 2 columnas. ¿En cuál de las dos clases, tiene el profesor más accesibilidad de pasar de la primera fila a la última?

a) En la clase A
b) En la clase B
c) En ambas





En primer lugar parece más probable que el profesor tenga más formas posibles de llegar a la última fila en el Aula A, pues aparenta ser más sencillo encontrar caminos. Pero sin embargo la respuesta es que en ambas existe el mismo número de formas posibles para pasar de la primera fila a la última, lo que pasa es que nuestro razonamiento sesgado por la "disponibilidad" es decir el cómo están dispuestos los pupitres en las imágenes, pues en el aula A parece que como solo hay 3 filas parece menor el recorrido que tenemos que hacer con respecto al B y hace que erremos a la hora de emitir un juicio y por lo tanto nuestra intuición que nos ha indicado que supuestamente parezca más sencilla la opción A porque solamente tendría que recorrer el profesor 3 filas de pupitres es errónea.

Caminos posibles en A:

$$VR8{,}3 = 8\text{^}3 = 512\ posibilidades$$

Caminos posibles en B:

$$VR2{,}9 = 2\text{^}9 = 512\ posibilidades$$

Ejemplo. Representantes del aula.

En un aula de 10 alumnos, el profesor debe formar equipos de trabajo distintos, y los distribuye equipos de 8 personas y parejas. Además cada alumno puede formar parte de más de un equipo.

¿Hay más equipos de trabajo distintos formados por 8 alumnos que de 2, o hay exactamente el mismo número equipos agrupándolos de las 2 formas?

En principio, la tendencia usual es que parece más complicado encontrar equipos de trabajo de 8 alumnos que de 2, pero sin embargo hay exactamente el mismo número pues se trata al final de que el sesgo de la disponibilidad nos ha vuelto a engañar nuestro juicio, pues matemáticamente se trataría de combinaciones de 10 elementos tomados en orden 2 u 8, con lo que uno es el inverso del otro.

Equipos de trabajo de 10 alumnos tomados en parejas o de 8 en 8:

$$C_{10,2} = C_{10,8} = \binom{10}{2} = \binom{10}{8} = \frac{10!}{8! * 2!} = 45 \text{ posibilidades}$$

Ejemplo. Mi abuelo fumó hasta los 90 años y murió de viejo.

He aquí una expresión comúnmente empleada que denota la heurística de la disponibilidad, en este caso se emite un juicio de valor sobre "fumar mata" banalizándolo con el hecho de que un pariente próximo (información disponible del sujeto) no cumplió con la hipótesis de partida, (morirse por tabaquismo).

Ejemplo. Jugadores profesionales de póquer.

Es comúnmente sabido que los jugadores profesionales ponderan sus juicios debido a la información de la que disponen (cartas) y de la que reciben constantemente del resto de jugadores, pues seleccionan sus recursos de los que disponen para optimizar sus jugadas.

4.4. Sesgo de equiprobabilidad

El concepto de equiprobabilidad consiste en la creencia de que uno o varios sucesos casuales e independientes tienen la misma probabilidad de ocurrir, cuando no tienen relación causal.

Es una de las tendencias de pensamiento probabilístico más comunes entre la gente. La asignación de un tipo de probabilidad a un determinado suceso ocurre constantemente, nuestras previsiones de planes futuros, nuestra intuición sobre hechos que creemos que tienen bastantes posibilidades de ocurrir es una de las características inherente como seres humanos. Tomamos referencias de la realidad para poder entenderla. Estas representaciones mentales, cuando las consideramos útiles las almacenamos y recordamos para poder aumentar el conocimiento de nuestra realidad. Para analizar una pregunta, utilizando el pensamiento rápido e intuitivo, nuestra respuesta rápidamente será sustituir esa cuestión por una más fácil de comprender, a esto se le conoce como Atributo de sustitución. La heurística, es decir el atajo mental para llegar a una solución de un problema no es más que dicha sustitución, pues equiparamos dos sucesos con elementos comunes para poder simplificarlo y entenderlo. Este proceso cognitivo puede explicar en parte el sentido del uso de sesgo de equiprobabilidad.

En el sesgo de equiprobabilidad los individuos normalmente consideran que un suceso sea impredecible es una característica inherente al fenómeno aleatorio y por lo tanto puede ocurrir o no, por lo que no se tiene en cuenta el análisis sobre la equidistribución y simetría del aleatorizado ni tampoco el análisis combinatorio de los resultados esperables. Es por ello que se ignora el cuestionarse los diferentes pesos de los elementos que conforman el espacio muestral al no tener en cuenta el razonamiento combinatorio en los sucesos.

El mayor exponente en el caso de la equiprobabilidad es (Lecoutre, 1992)**,[6]** el cual describe la creencia de todos los individuos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento estocástico. Según él, este pensamiento no se debe a la falta de razonamiento combinatorio sino a que no se asocian fácilmente estos con situaciones en las que interviene el azar.

Ejemplo: Lanzar dos dados.

Al lanzar 2 dados y sumar sus resultados se tiene la creencia popular que sacar un 6 es igual de probable que sacar un 5. Este sesgo de equiprobabilidad choca con el análisis combinatorio del hecho aleatorio pues existen más combinaciones para conseguir un 6 que un 5. Pero esto no se ve a simple vista, hay que estudiarlo detenidamente. Para la obtención de la probabilidad de los distintos resultados sumando las caras de ambos dados, las posibles combinaciones de los dos dados (D1 y D2) serían las variaciones con repetición de 6 elementos (las posibles caras de un dado Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} tomados de dos en dos.

$$VR6{,}2\ = 6^2 = 36\ posibles\ combinaciones\ entre\ el\ Dado\ azul\ y\ el\ Dado\ naranja$$

Las posibles combinaciones se muestran en la siguiente tabla.

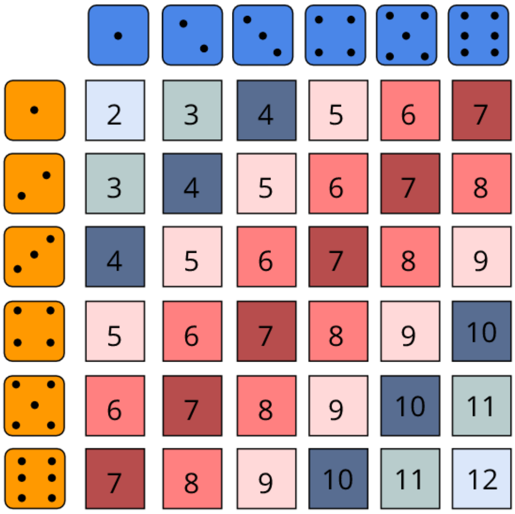


Ilustración 9.Cuadro que muestra la suma de las caras del Dado Azul y el Dado Naranja

Las posibles combinaciones de la suma de las caras serían:

Para formar el 2 o 12, una única combinación;

$$2 = 1 + 1$$

$$12 = 6 + 6$$

Para formar el 3 u 11, se puede poner como 2 combinaciones;

$$3 = 2 + 1;\ 3 = 1 + 2$$

$$11 = 6 + 5;\ 11 = 5 + 6$$

Para formar el 4 o 10, se puede poner como 3 combinaciones;

$$4 = 3 + 1;\ 4 = 2 + 2;\ 4 = 1 + 3$$

$$10 = 6 + 4;\ 10 = 5 + 5;\ 10 = 4 + 6$$

Para formar el 5 o 9, se puede poner como 4 combinaciones;

$$5 = 4 + 1;\ 5 = 3 + 2;\ 5 = 2 + 3;\ 5 = 1 + 4$$

$$9 = 6 + 3;\ 9 = 5 + 4;\ 9 = 4 + 5;\ 9 = 3 + 6$$

Para formar el 6 o 8, se puede poner como 5 combinaciones;

$$6 = 5 + 1; 6 = 4 + 2;\ 6 = 3 + 3;\ 6 = 2 + 4;\ 6 = \ 1 + 5$$

$$8 = 6 + 2;\ 8 = 5 + 3;\ 8 = 4 + 4;\ 8 = 3 + 5;\ 8 = 2 + 6$$

Para formar el 7, se puede poner como 6 combinaciones;

$$7 = 6 + 1; 7 = 5 + 2; 7 = 4 + 3; 7 = 3 + 4; 7 = 2 + 5; 7 = 1 + 6$$

Según la regla de la Laplace:

$$P(x) = \frac{n}{N} = \frac{Nº\ de\ casos\ favorables}{Nº\ total\ de\ resultados\ posibles} = \frac{n}{36}$$

El Espacio muestral de las posibles sumas que pueden formar ambas caras sería E={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, $x \in M$, teniendo en cuenta que no podemos formar ni el 1 ni el 0

$$P\ (x = 0)\ =\ P(x = 1)\ =\ 0$$

$$P(x = 2)\ =\ P(x = 12)\ = 1/36\ =\ 0.027$$

$$P(x = 3)\ =\ P(x = 11) =\ 2/36\ =\ 0.055$$

$$P(x = 4)\ =\ P\ (x = 10)\ = 3/36\ =\ 0.083$$

$$P(x = 5)\ =\ P(x = 9) =\ 4/36\ =\ 0.111$$

$$P(x = 6)\ = P(x = 8)\ = 5/36\ =\ 0.1388$$

$$P(x = 7)\ =\ 6/36\ =\ 0.166$$

Se puede observar entonces aplicando el cálculo sobre el proceso aleatorio, que la probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es del 11.11%, menor que la de sacar un 6 que es 13.88%. Este es un claro ejemplo de que no debemos confiarnos y abandonarnos a nuestra intuición.

4.5. Probabilidad frecuencial.

Según el investigador (Konold.C, 1989)**[5]** las personas tenemos dificultades a la hora de interpretar un solo experimento como parte de una serie de experimentos repetidos. Es decir tendemos a centrarnos en el resultado aisladamente, sin tener en cuenta el contexto. Las cuestiones probabilísticas sobre poblaciones aleatorias a menudo tratan de predecir el resultado como si fuese un ensayo simple, en vez de interpretar dichos fenómenos de forma analítica y buscar la probabilidad de ocurrencia. Según dicha interpretación frecuencial, para estimar la probabilidad de una serie larga de sucesos probabilísticos, tenemos en cuenta la frecuencia relativa del suceso. Por tanto *no es correcto aplicar esta perspectiva a un experimento del que sólo hay un ensayo aislado y único, a menos que imaginariamente pueda repetirse el experimento.*[3] (Díaz)**[3]**. Sin embargo esta interpretación frecuentista requiere que el individuo considere a los resultados de una larga serie de ensayos como idénticos, para después poder calcular la frecuencia de aparición de cada acontecimiento particular.

En la interpretación frecuencial de la probabilidad, la probabilidad se estima a partir de la frecuencia relativa del suceso en una serie larga de experimentos. Así, por ejemplo, si según datos de los últimos 20 años, el número medio de los días de abril en los que llueve es 15, entonces podemos estimar la probabilidad de que llueva un día cualquiera de abril como 15/30 = 0.5, o, en porcentaje, 50%.

El problema surge cuando solo hay un ensayo aislado y único: en este caso no podemos aplicar esta perspectiva al interpretar un experimento, a menos que podamos repetirlo imaginariamente. Según (Konold.C, 1989) **[5],** tenemos dificultad al interpretar un experimento como parte de una serie de experimentos idénticos repetidos, en lo que se conoce como "enfoque en el resultado aislado".

Cuando solo hay un ensayo aislado y único, y las preguntas sobre la probabilidad se interpretan de forma no probabilística, es decir, el fin no es llegar a la probabilidad de ocurrencia, sino predecir con éxito el resultado de un ensayo simple, entonces surgen los errores.

Ejemplo. En clase cojo un dado de seis caras y pido a los alumnos que, sin más, elijan una cara y lancen el dado a ver si aciertan. ¿Se puede deducir alguna conclusión después de haber lanzado el dado una sola vez? ¿Ayudaría lanzar el dado más veces a saber qué cara es la más probable?

Obviamente, con un solo lanzamiento no podemos extraer ninguna conclusión. Necesitamos más lanzamientos para averiguar si hay una cara más probable que las demás.

Ejemplo. ¿Qué significa que la predicción meteorológica diga que mañana hay una probabilidad de lluvia del 70%? Si resulta que mañana no llueve, ¿podríamos decir que la predicción se ha equivocado? Supongamos que queremos averiguar cómo de buenas son las predicciones de una agencia meteorológica, y observamos que durante 10 días para los que había una predicción de lluvia del 70%, no llovió en 3 de 10 días, ¿qué podríamos concluir sobre la predicción?

[3] Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico y sus implicaciones en la enseñanza estadística. Página 2.

Una probabilidad de lluvia del 70% implica que si tomáramos muchos días con esa probabilidad de lluvia, en aproximadamente 70 de cada 100 llovería. Si resulta que mañana no llueve no podemos decir que la predicción se ha equivocado, pues que no llueva tienen una probabilidad del 30%, elevada. Podríamos decir que se ha equivocado la predicción si no hubiera llovido con una probabilidad de lluvia del 100%. Si no llovió en 3 de cada 10 días, eso significa que llovió en los restantes 7, por lo que es imposible dar una predicción más aproximada a lo que sucedió.

Ejemplo. Tenemos un dado balanceado (todas las caras tienen la misma probabilidad de salir, 1/6). Si lo lanzamos una vez, ¿qué es más probable, sacar un 6 o un número menor que 6? Si lo lanzamos dos veces, ¿qué es más probable, sacar dos números menores que 6 o un número menor que 6 y un 6? Si lo lanzamos seis veces, ¿qué es más probable, sacar seis números menores de 6 o cinco y un 6?

Si lo lanzamos una vez, es cinco veces más probable sacar un número menor que 6.

Si lo lanzamos dos veces, sacar dos números menores que 6 tiene una probabilidad de $(5/6)^2 = 25/36$, mientras que sacar un número menor que 6 y un 6 tiene una probabilidad de $(5/6)*(1/6)*2=10/36$, luego es más probable sacar dos números menores que 6.

Si lo lanzamos seis veces, sacar seis números menores que 6 tiene una probabilidad de $(5/6)^6=0.334898$, mientras que sacar un 6 y cinco números menores que 6 tiene una probabilidad de $(5/6)^5*(1/6)*6=0.4018776$, luego es más probable sacar un 6 y cinco números menores que 6.

Concepción clásica VS Concepción frecuentista de la probabilidad

La concepción clásica de la probabilidad, enunciada por Laplace en 1812 tiene su fundamento en la idea de que en un experimento aleatorio, sus posibles resultados son equiprobables y por lo tanto no hay ninguna predisposición hacia ninguno de ellos. Entonces la probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de resultados favorables a dicho suceso y el número total de resultados posibles.

La concepción frecuentista de la probabilidad se basa en que, al repetir muchas veces un experimento, la frecuencia con la que se observa un suceso es aproximadamente la probabilidad dicho suceso. A medida que aumentamos el número de repeticiones del experimento la frecuencia observada del suceso se aproxima en torno a un cierto valor numérico que sirve para medir el grado de incertidumbre sobre la posible aparición del suceso en experiencias futuras. Este valor es lo que se entiende por probabilidad de ocurrencia del suceso.

En líneas generales la concepción clásica es para procesos discretos y equiprobables, donde el cálculo de la probabilidad es muy sencillo mediante la regla de Laplace: *esta exige que el conjunto de los posibles resultados del proceso aleatorio sea finito*[4], (R.Martinez) [**9]** dando por sentado que los resultados del proceso sean igualmente posibles. En cambio la otra concepción se inclina más hacia procesos aleatorios continuos, en los cuales se puede determinar de forma experimental mediante ensayos y pruebas, la frecuencia relativa del suceso.

[4] Anexo tema 8. Concepciones de probabilidad .Concepción clásica, Página 2

4.6. Probabilidad condicionada VS Probabilidad no condicionada

La probabilidad condicional ayuda a apreciar la independencia de ensayos sucesivos de un mismo experimento[5] (Díaz) [3] y comprender que la probabilidad de un suceso pueda condicionarse por otro que haya ocurrido antes. Saber distinguir la probabilidad de que ocurra A habiendo ocurrido B, P (A/B) de la probabilidad de un suceso B dado un suceso A, P (B/A) y diferenciar entre sucesos independientes y sucesos mutuamente excluyentes, todo esto unido al hecho de saber interpretar el teorema de Bayes, es indispensable.

Teorema de Bayes. Probabilidad condicionada

$$P(A/B) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} = \frac{P(A) * P(B/A)}{P(B)}$$

La probabilidad condicional también interviene en la inferencia estadística, en la definición de las probabilidades de un error en una prueba, en la aceptación o no de dicha prueba, en el cálculo de sus regiones críticas y el concepto de potencia.

También influye en la estadística de bivariante y multivariante pues se definen las relaciones de dependencia e independencia de sucesos para poder trazar modelos lineales y hacer regresiones de datos.

En este sentido la falacia de la probabilidad condicional es según (Paulos, 1988)[6] **[8]** es uno de los errores más habituales. Por ejemplo la probabilidad de escoger a una persona al azar en un listín telefónico y que pese más de 120 kg es muy pequeña, pues hay pocos casos. Pero, si añadimos la condición de que sabemos que mide más de 2 m, la probabilidad condicional de que pese más de 120 kg es mucho mayor. Otro ejemplo donde se aplica la probabilidad condicional es en el juego del Black-Jack, tiene sentido recordar las cartas que han salido antes, pues condicionan a las que están por salir, pero sin embargo esto no ocurre en la ruleta pues “no tiene memoria” y acertar al negro tiene las mismas posibilidades todo el tiempo 18/38, es decir no le importa las jugadas pasadas y sucesivas pues son sucesos independientes.

Ejemplo. Rey de la Baraja Española

Otro ejemplo parecido sería la probabilidad de escoger a un Rey de una baraja española sabiendo que la carta escogida es una figura (Rey, caballo o sota de los 4 palos) es de 33.3%. Pero la probabilidad de que la carta escogida sea una figura condicionada a que sea un Rey es del 100%, pues el rey es ya por sí mismo una figura:

[5] *Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico y sus implicaciones en la enseñanza estadística*, Página 3
[6] *El hombre anumérico* Capítulo 3.7 La pseudociencia : Probabilidad condicionada, el Blackjack y la detección del consumo de drogas pg 67-70

$$P\ (Rey/Figura) = \frac{P(Rey\ \cap Figura)}{P(Figura)} = \frac{P(Rey) * P(Figura/Rey)}{P(Figura)} = \frac{\frac{4}{40} * 1}{\frac{12}{40}} = \frac{4}{12} = 0.33$$

$$P\ (Figura/Rey) = \frac{P(Figura\ \cap Rey)}{P(Rey)} = \frac{P(Figura) * P(Rey/Figura)}{P(Rey)} = \frac{\frac{12}{40} * \frac{4}{12}}{\frac{4}{40}} = 1$$

Ejemplo. Timo del Trilero

Un hombre tiene 3 cartas. Una de ellas es negra por las dos caras, otra roja por ambas caras y la tercera tiene una cara roja y la otra negra. Mete las cartas en una bolsa y sacamos una, pero solo podemos ver una de las caras. Supongamos que la cara vista es Roja. El trilero observa como la carta escogida no puede ser la que tiene 2 caras negras, con lo cual debe de ser una de las otras dos, roja-roja (RR) o roja-negra (RN). Seguidamente te ofrece apostar dinero a partes iguales, apostando él a favor de la carta roja-roja. ¿Está haciendo una apuesta limpia el trilero?

A primera vista podría parecer que sí. Como solo pueden ser dos cartas, él apuesta a que es una y tú a que es la otra.

El fallo está en que en realidad él tiene el doble de ventaja de acertar que tú: la cara roja vista de la carta escogida podría ser la cara RN, en cuyo caso ganas tú, o podría ser la cara roja de la carta RR en cuyo caso gana él, pero también puede ser la otra cara roja de la carta RR y vuelve a ganar él. Su probabilidad es ganar es de 2/3.

La probabilidad condicional de que la carta sea RR sabiendo que la cara vista es R es 2/3 y no 1/2 como podíamos haber pensado en un principio.

$$P\ (RR/R) = \frac{P(RR\ \cap R)}{P(R)} = \frac{P(RR) * P(R/RR)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} * 1}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo. Probabilidad de lluvia

Si denotamos A al suceso “llover” y “nubes negras” como B. La probabilidad de que llueva sabiendo que hay nubes negras es P(A/B). Sin embargo, la probabilidad contraria P (B/A) es distinta. La probabilidad de que haya nubes negras sabiendo que está lloviendo sucede a veces, pues, generalmente, cuando hay tormenta, el cielo suele estar nublado con nubes negras. Las nubes negras pueden provocar llover, pero no necesariamente al revés.

Ejemplo. Paradoja del Falso positivo

Suponemos que de una cierta población de individuos, sólo un 0.01 sufre cierta enfermedad. El resto de individuos están sanos. Se realiza un test a una persona que no tiene la enfermedad y existe una posibilidad del 1% de conseguir un falso positivo. Más tarde se aplica el mismo test pero a una persona enferma y existe un 1% de que nos dé un falso negativo.

Datos:

P(enfermo) = 0.01 ; P(Sano) = 0.99

P(Falso positivo/ Sano)= 0.01 ; P(Falso negativo/Sano) = 0.99

P(Falso positivo/Enfermo)=0.99 ; P(Falso negativo/Enfermo) = 0.01

- ***Probabilidad Sanos y dan falso negativo:***

$$P(\,Sanos\ \cap\ Falso\,negativo) =\ P\ (Sano) *\ P(Falso\,negativo/Sano) =$$

$$=\ 0.99 * 0.99 =\ 0.9801$$

- ***Probabilidad Enfermos y con falso positivo:***

$$P(\,Enfermos\ \cap\ Falso\,positivo) =\ P\ (enfermos) *\ P(Falso\,positivo/enfermo)$$

$$= 0.01\ * 0.99 = 0.0099$$

- ***Probabilidad Enfermos y con falso negativo***:

$$P(\,Enfermos\ \cap\ Falso\,negativo) =\ P\ (enfermos) *\ P(Falso\,negativo/enfermo)$$

$$= 0.01\ * 0.01 = 0.0001$$

- ***Probabilidad Sanos y con falso positivo:***

$$P(\,Sanos\ \cap\ Falso\,negativo) =\ P\ (sanos) *\ P(Falso\,positivo/sanos)$$

$$= 0.99\ * 0.01 = 0.0099$$

- ***Probabilidad de que un individuo dé positivo.***

$$P(falso\,positivo) = P(Sano\ \cap\ falso\,positivo) +\ P(Enfermedad\ \cap\ falso\,positivo)$$
$$=\ 0.0099 + 0.0099\ =\ 0.0198$$

- ***Probabilidad de que un individuo sano tenga la enfermedad dando en la prueba resultado positivo.***

$$P(enfermo\ /falso\,positivo)\ = \frac{P(\,Enfermos\ \cap\ Falso\,positivo)}{P(\,Falso\,positivo)} = \frac{0.0099}{0.0198} = 0.5$$

Es decir, en este ejemplo podemos observar que la probabilidad de que un individuo tenga un falso positivo y esté realmente enfermo es del 50% mientras que la probabilidad de que esté enfermo y obtenga un falso positivo en la prueba, según los datos del problema, es del 99%. Confundir estas dos tipos de probabilidades se conoce comúnmente como la falacia de la condicional transpuesta.

Debido a los datos escogidos estratégicamente para este problema, llegamos a la paradoja que la mitad de la gente que obtiene un positivo en la prueba en verdad está sana, con lo cual la prueba no es realmente eficaz para detectar dicha enfermedad.

Ejemplo: Problema de Monty hall

El Problema de Monty Hall es un problema de probabilidad inspirado en el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal (Hagamos un trato), famoso entre 1963 y 1986. Su nombre proviene del presentador: Monty Hall.

En el concurso, al concursante se le pide escoger una puerta entre tres, y el premio consiste en lo que se encuentre al abrir la puerta. Tras una de ellas hay un coche, y tras las otras dos una cabra. Sin embargo, antes de abrir la puerta elegida, el presentador, que sabe dónde está el coche, abre una de las otras dos puertas y muestra que hay una cabra detrás. Al concursante se le da la última oportunidad de cambiar la puerta escogida. ¿Qué debe hacer el concursante, mantener su elección original o escoger la otra puerta?

¿Cuál sería la opción correcta?

A. Quedarse con la puerta inicial
B. Cambiar a la otra puerta
C. Es irrelevante cambiar o no cambiar

A primera vista parece obvio que da igual (opción 3): la intuición dice que ahora, quitando una puerta sin premio, la puerta que nosotros escogimos tiene una probabilidad de 0.5 de tener una cabra y de 0.5 de tener un coche, y por tanto da igual cambiar que no hacerlo.

Sin embargo, esto no es correcto. Veamos que lo correcto es la opción 2: cambiar a la otra puerta.

Si nos quedamos con la puerta elegida inicialmente, entonces la probabilidad de que al abrirla haya un coche detrás es la probabilidad de haber elegido originalmente la puerta tras la que estaba el coche, esto es, una probabilidad de 1/3.

Si cambiamos a la otra puerta, la probabilidad de que al abrirla haya un coche detrás es la probabilidad de no haber elegido originalmente la puerta tras la que estaba el coche (recordemos que el presentador siempre abre una puerta tras la que hay una cabra: si habíamos elegido la puerta con coche abre una de las otras dos, y si habíamos elegido una puerta con cabra abre la otra puerta con cabra), esto es, una probabilidad de 2/3.

De modo que la opción correcta, en este problema, es cambiar siempre a la otra puerta, pues la probabilidad de llevarse el coche es 2/3, mientras que no cambiar tiene una probabilidad de llevarse el coche de 1/3.

Vemos que dejarnos llevar por la intuición de que hay una probabilidad de 0.5 de que el coche esté tras la puerta elegida (y de 0.5 de que no) es un error

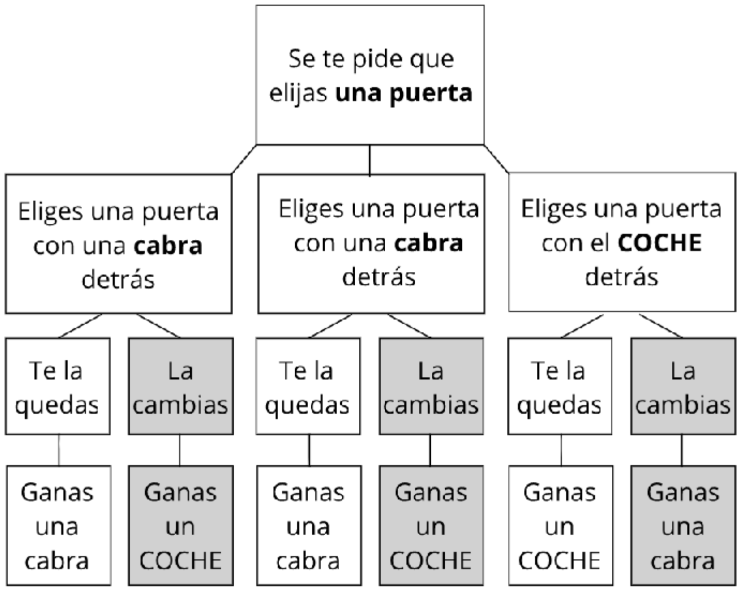


Ilustración 10. Hay 1/3 de posibilidades de ganar el coche sin cambiar y 2/3 cambiando.

5. ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN SECUNDARIA

La enseñanza de la probabilidad tanto en secundaria y bachillerato en uno de los grandes retos académicos que tenemos los docentes. No se trata de enseñar a los alumnos no solamente los contenidos pertinentes sino también dotarles de herramientas para evitar los sesgos asociados al razonamiento. Es por eso que nuestra tarea no es meramente formativa sino que también se trata de guiarles y hacerles ver los errores más comunes a la hora de enfrentarse a procesos estocásticos.

La aleatoriedad de sucesos, el azar y la estadística conviven con nosotros diariamente. Es por eso que la cotidianidad del tema a tratar es crucial para la vida del alumno, así como para formarlo académicamente y su desarrollo personal.

Entre los sesgos más comunes y arraigados entre los alumnos se encuentran: la representatividad, la disponibilidad, la falacia del jugador, etc. La insistencia de estos errores proporciona una razón fundamental y para la introducción del razonamiento probabilístico dentro de la matemática básica. Normalmente se introduce la materia mediante la axiomática de Kolgomorov (conjuntos, espacios muéstrales, variables aleatorias), es bastante usual que con este tipo de enseñanza teórica no ayudemos al alumnado a superar dichos errores por lo que se precisa mejor una metodología más experimental y heurística para poder superar los sesgos probabilísticos.

Para ello se propone realizar distintos problemas, determinando el sesgo que se pretende combatir con cada uno de ellos, de manera que el alumno a priori teorice la respuesta, utilizando su propia intuición. Este pensamiento rápido le dará una cierto pronóstico para más tarde realizar el problema experimentalmente con el cuál se dé cuenta del error y finalmente resolver el problema rigurosamente mediante el cálculo probabilístico.

Esta metodología empirista consiste en adquirir el razonamiento probabilístico derivado directamente de la experiencia del propio individuo. Buscamos en definitiva como dice (Kahneman & Tversky , 2011) **[4]** pensar despacio, es decir un razonamiento analítico mediante hechos, no reducirse a la mera aceptación de la fórmula o su utilización automática, sino en la trasformación de la propia adquisición de conocimiento en convicción, creencia y sentimiento de evidencia y que sea a su vez refrendada por los cálculos (Cañizares Castellano, 1987) **[2].** Es por tanto que para poder realizar un verdadero aprendizaje significativo y convertir dicha información adquirida no basta con una simple explicación teórica, sino que el alumnado ha de usarla para realizar sus propias acciones y alcanzar su desarrollo intelectual, y en consecuencia realizando un autoaprendizaje.

El proceso de enseñanza y aprendizaje a enseñar se basa en varias situaciones didácticas de acción, formulación y validación. Así pues detallaremos los siguientes pasos a dar a la hora de enfrentarnos a un problema

- ***Interacción inicial.***
  Consiste en realizar experimentos aleatorios diversos (con monedas, dados, ruletas,…) planeando juegos con reglas sencillas.
- ***Descubrir las irregularidades.***
  Observar la estabilidad de las frecuencias relativas y compararlas con las estimaciones intuitivas a priori. Realizar experimentos y representaciones gráficas (tablas, diagramas

en árbol…) a continuación de razonamientos más simples que se basen en la proporcionalidad. Este paso se considera un paso indispensable pues para comprender la probabilidad se compara las probabilidades teóricas con las obtenidas mediante la estimación de la frecuencia relativa.

- ***Búsqueda de isomorfismos***
  El objetivo de este paso consiste en ver los elementos comunes de sucesos parecidos para poder sustituir unos por otros. Por ejemplo utilizar juegos de "cara o cruz", juegos de "par o impar", etc., equiprobables.
- ***Representación.***
  Utilizar distintos sistemas de representación para los resultados posibles y sus probabilidades respectivas: tablas, diagramas de sectores, diagramas en árbol… De tal manera que se pueda deducir las propiedades de los sucesos probabilísticos: reglas de Laplace, probabilidad de un suceso contrario, etc.
- ***Formalización del sistema.***
  Este paso se realizará después de todos los anteriores, para llegar a presentación del formal del cálculo del problema.

En este sentido enunciaremos los principales problemas que son los cimientos sobre lo que se basa toda la teoría de la probabilidad. Así pues tenemos según (Cañizares Castellano, 1987)[**2**]

5.1. La intuición del azar.

Piaget afirma según sus estudios que tanto el niño-adolescente como el hombre adulto no poseen una intuición innata sino que el ser humano desde sus orígenes ha buscado respuestas a fenómenos aleatorios mediante la religión (voluntad de los dioses) u otras causas. Es por ello que se centra más en el hecho de cómo se desarrolla la intuición en la razonamiento infantil y juvenil. Para ello desarrolla un experimento, el cual consiste en una bandeja sobre un prisma triangular en su parte central, en la cual se colocan 8 bolas blancas y 8 bolas rojas. Al equilibrase la bandeja se produce una mezcla aleatoria de las bolas. La primera intuición del joven es pensar que las bolas cambiaran de posición, las blancas al lugar de las rojas y viceversa o también se puede creer que aunque se mezclen luego las bolas regresan al lugar de origen. Estas concepciones erróneas responden a que el joven presupone el carácter reversible de una mezcla en un proceso en el que interviene el azar y los sucesos son totalmente independientes. Por lo que se puede observar que aquí podemos distinguir si un suceso es aleatorio o determinista, también la propia impredecibilidad del fenómeno sin cálculos.

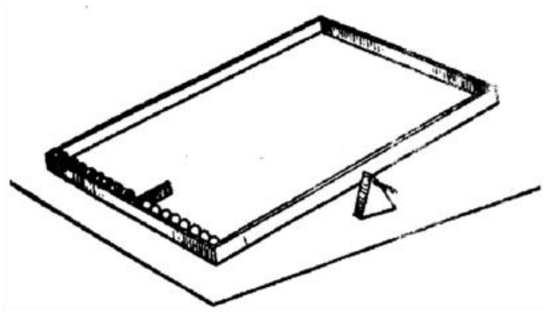


Ilustración 11. Balancín de Piaget para procesos aleatorios

5.2. La intuición de la frecuencia relativa

Otro sesgo que se necesita combatir es el de la falacia del jugador, por la cual se piensa que los procesos aleatorios siguen un patrón o frecuencia y son dependientes. En este sentido un ejemplo para aplicar en el aula sería la presentación al alumno 2 luces de colores diferentes una Verde (V) y otra Roja (R), que se van encendiendo de manera intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo de 0.75 y 0.25 respectivamente. La actividad consiste en que el alumno debe predecir cuál de los dos luces se encenderá en el siguiente turno. Cuando se enciende un piloto de luz azul, el sujeto debe indicar cuál cree de las dos bombillas R o V se encenderá en el próximo turno, y deberá pulsar el interruptor de debajo de cada una de las luces.

Cuando hablamos de aprendizaje probabilístico nos referimos a la inclinación de un individuo por ajustar sus predicciones a las frecuencias reales de los sucesos, es decir la probabilidad que se da un suceso tiende a igualar la probabilidad del estímulo correspondiente. En este sentido tendemos a estar más sesgados cuanta más experiencia hayamos tenido en sucesos aleatorios.

Otro sesgo evidente es la propia mala compresión del concepto “frecuencia relativa”. En este sentido Piaget insiste en que el adolescente agrupa las relaciones no determinadas de sucesos aleatorios en función de unos esquemas operacionales preconcebidos. En sentido contrario otros autores defienden la idea de que el alumno intenta evitar lo impredecible a la hora de reconocer probabilidades y busca dependencias causales para reducir la incertidumbre, haciendo conexiones cuando no existen tales. El no saber cuándo se trata de un proceso independiente o tener una mala comprensión del concepto de azar provoca dichos errores. Esto se puede justificar mediante las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna que determina el pensamiento hacia explicaciones deterministas unívocas. Es por eso que como docentes debemos hacer hincapié en que solo el auténtico razonamiento científico lógico y matemático tiene cabida a la hora de enfrentarse a procesos de intuición y azar y que cualquier otro método no es válido frente a la rigurosidad del cálculo.

5.3. Estimación de posibilidades y la noción de probabilidad.

Diferentes autores han afirmado que los jóvenes tienden a confiar en la ley de los pequeños números por la cual no tienen en cuenta el tamaño de la muestra. En este sentido se les presenta como evidente que grupos reducidos se puedan asemejar a la totalidad. He aquí un pequeño ejemplo: supongamos que un alumno debe sacar una bola a ciegas de una de estas dos urnas. En la primera urna hay 3 bolas blancas y 3 bolas negras y en la segunda urna hay 3 bolas blancas y 5 negras. Si saca una bola blanca gana. Está claro con este tipo de ejercicio tan sencillo la probabilidad se ve a simple vista. Para resolver casos más complejos utilizaremos en este caso comparaciones binarias

5.4. Operaciones combinatorias

Dotándoles del uso del diagrama en árbol, como método para el desarrollo de operaciones formales, podemos hacerles ver la importancia de la probabilidad condicionada y su aplicación en el teorema de Bayes. Todo ello sumado al hecho de que puedan ver los diferentes diagramas de Venn para darse cuenta de las relaciones entre sucesos probabilísticos hace que sea vital.

5.5 Ejercicios.

A la hora de definir los diferentes ejercicios a realizar en las sesiones didácticas tendremos en cuenta el tiempo disponible de programa. Puede resultar interesante como refuerzo a la propia unidad didáctica o como forma metodológica innovadora, de manera que permita que se trabaje conjuntamente todo el aula y nos ayudemos de material interactivo. El objetivo último de estos ejercicios no es otro que permitir al alumno superar los sesgos propios a través de la experimentación de forma gradual de los ejercicios, de manera que se vaya aumentando el nivel de dificultad según vaya reforzando los conceptos adquiridos. Dichos ejercicios entre otros se recogen en (Cañizares Castellano, 1987)**[2]** entre otros.

Fenómenos aleatorios

Situación didáctica:

- Lanzamiento de monedas

Objetivos.

- Sesgo a evitar Falacia del jugador.
- Determinar sucesos Equiprobables
- Experimentar la dependencia e independencia de sucesos

Presentación al alumnado.

Seguramente habrás jugado alguna vez a lanzar una moneda. Si tomas una moneda que tiene cara y cruz, este suceso se denomina equiprobable pues asumimos que puede salir CARA (C) o CRUZ (X) con un 0.5 de probabilidad.

- Con un compañero vas a hacer la siguiente prueba que consiste en tirar la moneda al aire 5,10 y 25 veces seguidas. Anótalo en la siguiente tabla.

Nº de lanzamientos	Resultados	Nº Caras	%	Nª Cruces	%	Cara esperada en la siguiente tirada
5 tiradas						
10 tiradas						
25 tiradas						

- ¿Crees que antes de lanzar de nuevo la moneda podrías decir con seguridad cuál será el próximo resultado?
- ¿Qué ocurre con los porcentajes? ¿Crees que si cambiases de tipo de moneda te daría un resultado distinto?
- Supongamos que al lanzar dicha moneda te salen 10 caras seguidas, podríamos decir que la monea está trucada ¿Por qué?
- En parejas los alumnos, van a jugar al juego de las torres, pare ello se necesitan piezas encajables. El juego consiste en lanzar una moneda al aire. Si sale C, el Jugador 1 toma una pieza del montón. Si sale X la pieza para el Jugador 2. Con las piezas obtenidas van a formar un torre. Proponemos una situación inicial en la que después de 10 jugadas la situación es la siguiente. La torre del jugador 1 tiene 4 pisos y la del jugador 2 tiene 6 pisos.
  - ¿Cuántas veces se obtuvo cara y cruz en cada caso?
  - ¿Piensas que el jugador 2 tiene ventaja sobre el jugador 1? ¿Por qué?
  - Jugad una partida y comparad el resultado de vuestro juego con el del resto de compañeros de la clase y completad el cuadro siguiente anotando la suma total del número de caras, cruces, cuántas veces gana los equipos de las caras y cuántas los de las cruces y cuál es la diferencia entre ambos.

Equipo	Nº de Caras	Nº de Cruces	Ganan caras	Ganan cruces
1				
2				
3				
…				
Suma total				

Frecuencias relativas

Situación didáctica:

- Extracción de bolas

Objetivos.

- Experimento aleatorio y carácter imprevisibles del azar.
- Evitar la Falacia del jugador.
- Comprender Concepción frecuentista; frecuencia absoluta y relativa.
- Entender la Ley de los pequeños números.
- Enumerar de elementos del espacio muestral finito.

Presentación al alumnado.

Por parejas los alumnos introducen en una bolsa, dos bolas un verde (V) y una roja (R). Supongamos una situación en la cual después de remover las bolas, el jugador 1 extrae una bola y resulta ser R. Introducen de nuevo la bola otra vez en la bolsa, la remueven y hacen otra extracción. ¿De qué color crees que será esta vez la bola?

- Realiza este experimento 5 veces y comprueba si aciertas. ¿Consideras que es más fácil obtener el una bola de color Rojo que Verde?
- Supongamos que dos jugadores han obtenido el siguiente resultado al repetir el experimento 10 veces: RVVRVRVVRV. En total han sacado 4 veces la bola roja y 6 la verde. Expresa la proporción según la regla de Laplace.
- Si tenemos como en el experimento anterior 4 bola rojas y 6 bolas verdes y repetimos el experimento 20 veces. Estima la cantidad de bolas de cada tipo antes del experimento. Comprueba y completa el cuadro adjunto. Nota. También se realizarán grupos que tengan 15 bolas (6 bolas rojas y 9 verdes). Al mantener las proporciones ¿crees también que los resultados mantienen?
- Estudia los resultados obtenidos por el resto de compañeros de clase y discute sobre qué color ha salido más a frecuentemente. Completa la siguiente tabla.

10 bolas	Bolas Rojas		Bolas verdes	
	Fracción	**Nº de veces**	**Fracción**	**Nº de veces**
Estimación inicial	R/20		V/20	
20 extracciones				

- Compara los resultados obtenidos con la estimación hecha antes de realizar el experimento.
- Repite el experimento anterior, pero ahora introduce 3 bolas: 2 rojas y 1 verde. ¿Crees que ahora es más fácil obtener rojo o por el contrario crees que es más fácil obtener verde? Completa la tabla anterior con 30 extracciones.

- Supón que tenemos una bolsa con distintas proporciones de bolas.
  - Bolsa A. Una bola verde y otra roja.
  - Bolsa B. Dos bolas rojas y una verde.
  - Bolsa C. Dos bolas verdes y una roja.
  - Bolsa D. Dos bolas verde y dos bolas rojas.
- A continuación contesta la siguiente tabla con verdadero o falso.

Pregunta	V/F
Es más fácil obtener R en la Bolsa A que en la Bolsa B	
Es más fácil obtener R en la Bolsa B que en la Bolsa D	
Es más fácil obtener R en la Bolsa A que en la Bolsa D	
Es más fácil obtener R en la Bolsa A que en la Bolsa C	
Es más fácil obtener R en la Bolsa B que en la Bolsa C	

- Supón que un alumno escogió una de estas bolsas para hacer extracciones de bolas y obtuvo el siguiente resultado. RRVRRRVR. ¿Con que bolsa crees que estaba jugando? ¿Existe una regla o patrón en el orden en que aparece un color determinado? ¿si un color aparece 2 veces seguidas, entonces es más probable que la próxima bola no sea de ese color?

Lenguajes del azar

Situación didáctica:

- Fenómenos atmosféricos.

Objetivos.

- Evitar sesgo del lenguaje probabilístico (imprecisión del propio lenguaje).
- Entender concepción frecuentista.
- Comprender la ley de los pequeños números.
- Distinción de suceso seguro y suceso imposible.
- Variación de la probabilidad entre 0 y 1.
- Asignación de probabilidades subjetivas y comparación.

Presentación al alumnado.

En parejas los alumnos deben asociar cada una de las palabras siguientes con el grado de descripción del fenómeno meteorológico. Es decir realizarán una clasificación de las palabras en función de la confianza que expresan que sucede un fenómeno y el grado de probabilidad que consideran y su ponderación sobre la escala que elijan.

- Completad la siguiente tabla.

Concepto	Grado de probabilidad	Baremo
Cierto		
Posible		
Bastante probables		
Hay alguna posibilidad		
Seguro		
Es imposible		
Casi imposible		
Se espera que		

Incierto
Hay igual de probabilidad
Puede ser
Sin duda
Quizás

- Establecer en una línea, una escala de probabilidades del 0 al 10 cada uno de estos conceptos y asignar a cada palabra un número. De tal manera que en ambos extremos aparezcan la probabilidad de un suceso imposible (0/10) en el medio del segmento, la probabilidad de un suceso que tiene igual de probabilidad (1/2) y el extremo un hecho seguro (10/10). Ahora bien si por ejemplo decimos "es seguro que mañana será soleado", ¿Entonces esto quiere decir que si observamos y anotamos durante 10 días seguidos habrá sol el 100% de los días, es decir en los 10 días saldrá el sol?

Comparación de probabilidades

Situación didáctica:

- Dados

Objetivos.

- Evitar sesgo del lenguaje probabilístico.
- Entender concepción frecuentista.
- Axiomas 1 y 2 de la probabilidad.
- Comprender la ley de los pequeños números.
- Comparación de probabilidades simples.
- Muestreo de un elemento de una población finita y conocida.
- Sucesos equiprobables y no equiprobables.
- Sucesos compuestos.
- Probabilidad condicional.

Presentación al alumnado

- En el famoso juego del parchís, para poder comenzar a mover ficha es preciso sacar un 5. Pero tu compañero prefiere que se exija obtener un 3 porque piensa que así tiene más ventaja. ¿Tú qué opinas? ¿Puedes dejarle que comience él el juego cuando saque un 3 o es necesario que los dos juguéis a obtener el mismo número?
- Otro compañero sugiere que hagáis un experimento para resolver la discusión. Cree que de este modo se puede saber quién tiene ventaja. Completa la siguiente tabla, trata de adivinar cuántas veces aproximadamente saldrá el 3 y cuántas el 5 si se realizan 24 tiradas.

Resultado	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Nº esperado de veces
1				
2				
3				
4				
5				
6				
Total		24	1	24

- Lanza el dado 24 veces y anota los resultados en la tabla. El número de veces que sale cada cara del dado corresponde a si frecuencia absoluta. Si dividimos dicho número por el total de lanzamientos (24 en este caso), obtenemos la frecuencia relativa de este suceso.
- Calcula la frecuencia relativa de obtener 3 y 5 ¿Cuál es mayor? ¿Entonces quién tiene ventaja?
- Seguidamente nuestro papel como docentes será mostrar los resultados ante todos los alumnos. Los alumnos deberán comparar sus resultados con los suyos propios y con la estimación inicial. Cada alumno deberá construir un diagrama de barras que represente sus resultados.
- Completar la siguiente tabla sobre el lanzamiento de un dado.

Cuestión	V/F	Probabilidades
La probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 6		
La probabilidad de obtener un 6 es mayor que la de obtener un 3		
La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 6		
La probabilidad de obtener un 6 es igual que la de obtener un 3		
La probabilidad de obtener un 1 es mayor que 0.5		
La probabilidad de obtener un 1 es menor que 0.5		

- Si repetimos este mismo proceso pero haciendo 2 tiradas de dados y sumando sus caras. Responde a las siguientes preguntas.

Cuestión	V/F	Probabilidades
La probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 11		
La probabilidad de obtener un 6 es mayor que la de obtener un 5		
La probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 6		
La probabilidad de obtener un 6 es igual que la de obtener un 10		
La probabilidad de obtener un 7 es mayor que la suma de la probabilidades desde 10 hasta 12		
La probabilidad de obtener al menos hasta un 4 (incluido) es mayor que la de obtener solamente un 9		
La probabilidad de obtener un 11 es menor que la de obtener un 5		

- Representa en un diagrama de barras las probabilidades, en el eje de abscisas coloca los valores posibles de la muestra y en las ordenadas sus probabilidades (frecuencia relativa). ¿qué forma describe? ¿Si probásemos con 3 dados qué ocurriría? Que le ocurre al diagrama. ¿Puedes intuir que ocurrirá en el gráfico cuando lancemos infinitos dados y sumemos sus caras?
- Con un dado con forma de 4 caras (tetraedro), de 6, de 8 caras, de 10, de 12 (dodecaedro), de 16 caras o de 20 caras (icosaedro) , si los combinásemos dos a dos para hacer la suma de sus caras. ¿Cuál sería el espacio muestral de posibles resultados? ¿sus respectivas sumas se podrían poner en un diagrama y seguirían la Campana de Gauss o no? Razona tu respuesta.

Muestreo de Clase.

- Se prepara unas fichas preformadas en cartulina en las cuales se recoge la siguiente información de los alumnos de la clase. Nº de letras de las que está compuesto su nombre y del apellido, día de nacimiento, mes de nacimiento, número de hermanos.

- Se les indicará cual creen ellos que es la media de cada una de los apartados anteriores. Y si en las muestras pequeñas y grandes ese dato aumentará o disminuirá.
- Estas fichas serán utilizadas como una baraja de cartas de la cual podamos extraer muestras aleatorias barajándolas. Se calculará la frecuencia relativa de las siguientes cuestiones variando el tamaño de las muestras.

Número de alumnos de la muestra	5	13	28	Total de alumnos 30
Nº de letras del nombre				
Nº de letras del apellido				
Día de nacimiento				
Mes de nacimiento				
Genero				
Nº de hermanos				

- ¿Qué ocurre cuando la muestra aleatoria se va aproximando al número total de la población de la cual fue extraída? ¿qué se puede deducir de las muestras pequeñas y de las grandes?
- Responde a las siguientes preguntas.

Cuestión
Si saco una tarjeta que probabilidad al azar que probabilidad hay de que sea chica
Es mucho más probable sacar una tarjeta y que sea un chico con 1 hermano que solamente un chico
Que probabilidad hay de que en la muestra de 5 alumnos, si saco escojo una de ellas haya nacido entre Agosto y Diciembre.
Que probabilidad hay de que en la muestra de 13 alumnos, si saco y escojo una de ellas tenga al menos 2 hermanos
Que probabilidad hay de que en la muestra de 28 alumnos, si saco y escojo una de ellas, el número de letras de las que está compuesto el nombre sea al menos 6.

Asignación de probabilidades

Situación didáctica:

- Turista perdido

Objetivos.

- Evitar sesgo del lenguaje probabilístico
- Entender concepción frecuentista
- Axiomas 1 y 2 de la probabilidad
- Comprender la ley de los pequeños números
- Comparación de probabilidades simples
- Muestreo de un elemento de una población finita y conocida
- Sucesos equiprobables y no equiprobables.
- Sucesos compuestos.
- Probabilidad condicional

Presentación al alumnado

Se les entrega el siguiente mapa del metro. Dicho metro consta de dos ramales con un canal en común. La mitad de los trenes que parten de A y pasan por B, van a parar a C y la otra mitad a D. Alternándose de la siguiente forma: CDCDCDCDCD….Sabemos que cada tren lleva escrito en la puerta de sus vagones el destino al que se dirige, de tal manera que evite confusiones entre los pasajeros. Un día, un turista nuevo en la ciudad, quiere ir a la parada D tomando el metro en A sin mirar las indicaciones. ¿Cuál de los dos sucesos siguientes crees que es más probable?

a. El turista llegará a C
b. El turista llegará a D.

- Suponiendo que durante son vacaciones y llegan 100 turistas a la ciudad y quieren tomar el tren pero sin mirar el destino. ¿Cuántas personas llegarán a C, F, D, G e I aproximadamente? Si denotamos con la letra C al suceso “turista llega a la parada C”, entonces calcula analíticamente las probabilidades para cada uno de los destinos., definiendo el espacio muestral, E, como “posibles puntos de destino del viajero2 para cada una de las paradas”.

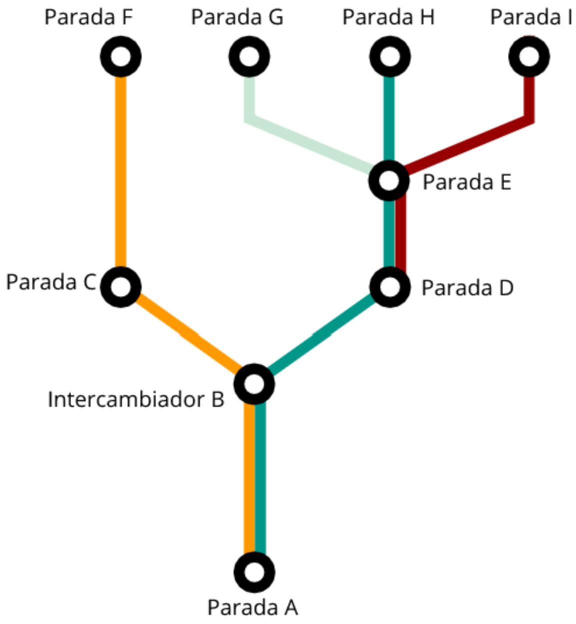


Ilustración 12.Diagrama en árbol de los recorridos de un metro

Experimento con dados:

- Define el espacio muestral E= {1,2,3,4,5,6} de un dado de 6 caras. Si se realizan 3, 10, 15 o 600 lanzamientos ¿cuántas veces se espera obtener un 3?
- Define los siguiente subconjuntos del espacio muestral. Y asigna sus probabilidades a los sucesos (A)Obtener par, (B) impar, (C) número primo, (D) número compuesto (F) Múltiplo de 3
  ¿Crees que existe alguna relación para que el número de elementos coincida entre los sucesos F y E, y los sucesos A y E?

Ley de azar.

Con el objetivo de que alumno se dé cuenta mediante experiencias de sucesos probabilísticos donde se aprecie e intuya la regla de Laplace, así como las condiciones de simetría que deben darse entre los suceso elementales para su correcta aplicación. Con este fin último y el de apreciar la estabilidad de las frecuencias relativas y se den cuenta del concepto de regresión a la media, se insta a los alumnos que por parejas realicen y creen algunos experimentos aleatorios anotando los resultados de sus experimentos en la siguiente hoja común junto con sus compañeros para luego poder realizar un diagrama cartesianos, en el cual se aprecie el número de experimentos acumulados en el eje de abscisas y la frecuencia relativa en el de ordenadas.

Ejemplo de suceso observado: Canastas desde zona de tiros libres					
Pareja	Número de experimentos	Frecuencia absoluta	N.º de experimentos acumulados (N)	Frecuencia acumulada (A)	Frecuencia relativa (A/N)
Nº1					
Nº2					
Nº3					
…					

A pesar de que la ley de estabilidad de las frecuencias relativas es válida cuando n crece indefinidamente, es bastante probable que los alumnos aprecien una cierta regularidad o patrón o tendencia hacia algún valor asignado a priori (intuitivamente), aunque dicho número de experiencias de clase sea limitado. Es decir, pueden experimentar el sesgo regido por la ley de los pequeños números.

Las cuestiones planteadas en estas experiencias de enumeración de los sucesos elementales asociados a un experimento y a la asignación de probabilidades a distintos sucesos sencillos o compuestos pueden dar una variabilidad enorme en cuanto a situaciones distintas se refiere.

El Ábaco probabilístico. (Cabrerizo & Mora Pardo, s.f.)**[10]**

El fin último de la siguiente actividad es el acercamiento al estudio de procesos estocásticos. De forma individual, con una moneda y unas fichas de parchís podrás resolver el caso que se plantea del Gato ratón y el queso.

- Este juego consiste en introduciendo ratones en el circuito (Fichas) por la entrada E, que tiene dos salidas equiprobables: G, el gato que se come a los ratones y Q, el queso que es lo que están buscando los ratones. La dinámica consiste en tirar una moneda, si sale cara tomar el camino de la derecha con el ratón y si sale cruz tomar el de la izquierda. Si introduces 8 ratones.
    1. ¿Cuántos se comerá el gato?
    2. ¿Cuántos se irán al queso?
    3. Si repetimos con más ratones, por ejemplo 12 ¿el gato comerá más o no? Justifica tu respuesta.

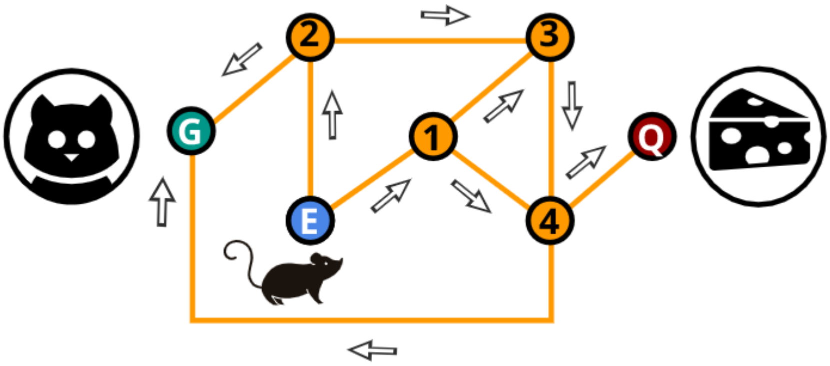


Ilustración 13. Esquema del juego del juego del Abaco probabilístico

Probabilidades geométricas

Situación didáctica:

- Dianas

Objetivos.

- Entender concepción frecuentista.
- Axiomas 1,2 y 3 de la probabilidad.
- Comprender la ley de los pequeños números.
- Comparación de probabilidades simples.
- Muestreo de un elemento de una población finita y conocida.
- Sucesos equiprobables y no equiprobables.
- Sucesos compuestos.
- Probabilidad condicional

Presentación al alumnado

Con este apartado se pretende que el alumnado alcance y asigne de manera visual la probabilidad de un suceso asociados a experimentos aleatorios en un contexto geométrico (ruletas, dianas, superficies) que según el tamaño y la forma tengan.

- Asigna a cada región de cada región de la diana una fracción que represente a su parte respecto del tablero completo.
- Si se lanza al azar un dardo sobre el tablero cuadrado y suponiendo que el jugador tiene una gran destreza y da en el mimo sector. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en las regiones A, B y C? ¿Cuál es la suma de todas las probabilidades?

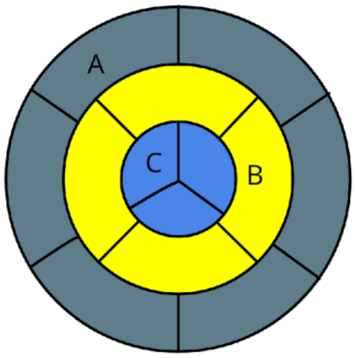


Ilustración 14.Diana dividida en distintos sectores

- Ahora vanos a entender los diagramas de Venn mediante el uso de las dianas. Tenemos estas 3 dianas. Vamos a lanzar un dardo sobre ella. Diremos que se produce el suceso A, B, C, si el dardo cae en las zonas coloreadas respectivas.

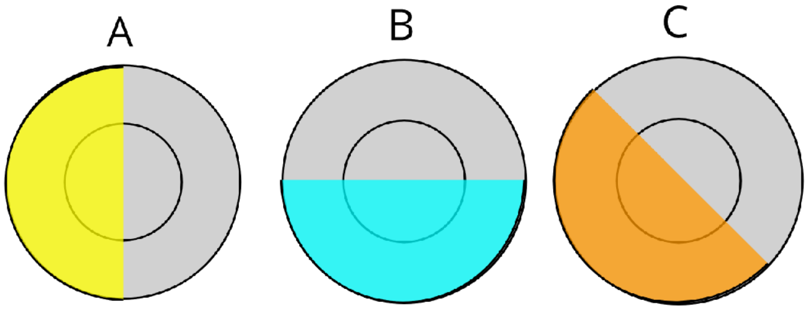


Ilustración 15. Dianas coloreadas para visualizar las operaciones de conjunto de los diagramas de Venn

- Dibuja las dianas similares a las anteriores y colorea en los sucesos siguientes.

A ∩ B	**A U B**	**⌐ A ∩ B**
A ∩ C	**A U C**	**A ∩ ⌐ C**
B ∩ C	**⌐A U B**	**⌐ B ∩ C**
A ∩ B ∩ C	**⌐A U C**	**⌐A ∩ ⌐B ∩⌐ C**

Juegos equitativos. Variable aleatoria y esperanza.

Situación didáctica:

- Juegos con monedas

Objetivos.

- Entender lo que significa espacio muestral, intuición a priori y probabilidad frecuencial.
- Variable aleatoria y distribución de probabilidad.
- Esperanza matemática. Criterio de Bayes.
- Suceso compuesto. Probabilidad condicional.
- Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles.
- Axiomas 1, 2 y 3 de la probabilidad.
- Comprender la ley de los pequeños números.
- Comparación de probabilidades simples.
- Muestreo de con reemplazamiento.
- Sucesos equiprobables y no equiprobables.

Presentación al alumnado

En parejas dos alumnos deben jugar al siguiente juego. Lanzan dos monedas al aire consecutivamente. En caso de que salgan dos caras, gana el jugador 1. En caso distinto gana el jugador 2.

- Se repite el lanzamiento 20 veces y gana el que consiga mayor puntuación. ¿Crees que es un juego justo? ¿Qué jugador prefieres ser? Completa la tabla.

Lanzamientos	1º	2º	3º	…º	20º
1ºMoneda					
2ºMoneda					
Ganador					

- De los dos jugadores quién ha obtenido más puntos. Podemos presentar la información de la siguiente tabla. Rellenad el cuadro siguiente.

		2º Moneda		
1º Moneda		Cara (C)	Cruz (X)	Total
	Cara (C)			
	Cruz (X)			
	Total			20

- Calculad la frecuencia relativa de veces que aparecen 2, 1 o 0 caras. En caso de que repitiéramos el experimento 4000 veces ¿Con qué frecuencia, aproximadamente saldrían los procesos anteriores?
- ¿Se puede asignar un valor a la probabilidad de obtener 2 caras al lanzar 2 monedas? Compara dicha probabilidad con la frecuencia relativa de caras que habéis obtenido mediante todas las experiencias en el aula.
- Si ahora cambian las reglas de juego y al lanzar dos monedas la primera sale cara gana el jugador 1 y si sale cruz gana el jugador. ¿Crees es un juego justo? Escribid los elementos de los que está compuesto el espacio muestras para que gane el jugador 1 (A) y el jugador 2 (B).
- Desarrollad otros juegos justos que puedan jugarse con 2 monedas. Razonad por qué pensáis que son equitativos.

Juego de dados.

En parejas dos alumnos juegan al siguiente juego con dados. Las reglas son las siguientes: Se lanzan dos dados de 6 caras sucesivamente y se calcula la diferencia de puntos entre el mayor y el menor. Si la diferencia es 0, 1 o 2 entonces gana una ficha el jugador 1. En caso que la diferencia sea de 3, 4 o 5 gana el jugador 2 una ficha. Ambos jugadores comienzan con un total de 20 fichas y el juego se acaba cuando no quedan más.

- Si tuvieras que jugar, ¿qué jugador serías? ¿Te parece un juego justo?
- Practicad en parejas este juego a 50 intentos y anotad los resultados en la siguiente tabla.

Diferencia de puntos		Recuento	Número de veces	Frecuencia relativa
Gana Jugador 1	0			
	1			
	2			
Gana jugador 2	3			
	4			
	5			
Total de lanzamientos			50	

- A la vista de los resultados, ¿sigues pensando como tu primera intuición de que el juego era justo o no?
- Contesta a las siguientes preguntas:
  1. Enumera a todos los posibles resultados que puedes obtener al lanzar sucesivamente dos dados.
  2. Describe los elementos que componen los sucesos:
  3. A = "la diferencia de puntos es 5"; A = {(1.6); (6,1)}
  4. B = "la diferencia de puntos es 4"
  5. C ="la diferencia de puntos es 3"
  6. D ="la diferencia de puntos es 2"
  7. E ="la diferencia de puntos es 1"
  8. F ="la diferencia de puntos es 0"
  9. Enumera los elementos que componen los siguientes sucesos. (B U C); (B U F); (E U D)
  10. Expresa el suceso gana el jugador 1 como la unión de alguno de los sucesos A,B,C,D,E,F
  11. Expresa el suceso gana el jugador 2 como la unión de alguno de los sucesos A,B,C,D,E,F
  12. Asigna probabilidades a los sucesos anteriores.
  13. Calcula la probabilidad de que el jugador 1 gane el juego
  14. Calcula la probabilidad de que el jugador 2 gane el juego.

Intersección de probabilidades. Probabilidad condicional y dependencia.

Situación didáctica:

- Diagramas en árbol

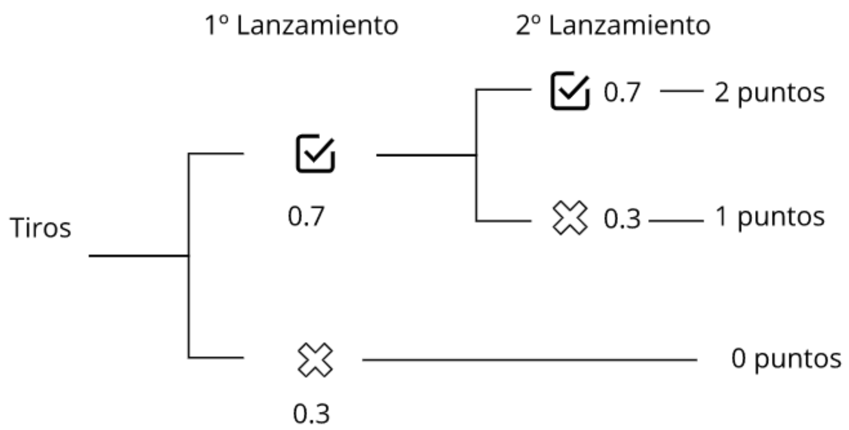
Objetivos.

- Suceso no equiprobables, suceso contrario.
- Suceso compuesto. Probabilidad condicional.
- Dependencia e independencia de sucesos.
- Intersección de sucesos.
- Distribución normal.
- Axiomas 1, 2 y 3 de la probabilidad.
- Comprender la ley de los pequeños números.

Presentación al alumnado

Un jugador de baloncesto que suele encestar 70 de 100 canastas que tira desde el punto de la zona de lanzamiento de tiros libres, tiene que lanzar una falta personal. Es decir que si el jugador acierta en el primer tiro puede repetir el lanzamiento. Por tanto, es posible que consiga dos, uno o ningún punto en el juego, fallando el primer lanzamiento (0 puntos), encestando el primero y fallando el segundo (1 punto) y acertando los dos intentos (2 puntos)

- ¿Qué es más probable que suceda?
- Para ayudar al alumno a contestar la pregunta vamos a simular el lanzamiento. Para ello utilizamos 10 papeles iguales numerados del 1 al 10 y una caja en la que hay que meterlos. Para simular el lanzamiento, extraemos una papeleta. Si obtenemos uno de los números del 1 al 7 suponemos que el jugador ha acertado y encestado. Repetimos la operación para el “segundo lanzamiento” con el reemplazamiento de las papeletas en la bolsa. Si sacamos 8,9 o 10 suponemos que ha fallado el tiro según el diagrama.



- Repite el juego 20 veces y anota encada caso el número de puntos obtenidos. Escribe la probabilidad de 0,1 o 2 puntos expresada por la frecuencia relativa.
- Compara tus resultados con los de tus compañeros y responde a las cuestiones
    1. ¿Es más probable obtener 0 puntos que conseguir 1 solo punto?
    2. ¿Es más probable obtener 1 punto que conseguir 2 puntos?
    3. ¿cuál es la probabilidad de fallar en el primer lanzamiento?
    4. ¿Y la de acertar el primer lanzamiento?
    5. Calcula la probabilidad de obtener 2 puntos. Calcula la probabilidad de obtener 2 puntos si ya has obtenido 1 punto.
    6. Calcula la probabilidad de obtener 1 o 2 puntos.
    7. Calcula la probabilidad de obtener 0 o 1 punto.

Máquina de Galton

Este dispositivo fue descrito por Francis Galton para demostrar el Teorema central del límite con el propósito de demostrar que la distribución binomial es una aproximación de la distribución normal. En el siguiente enlace se puede observar cómo actúan las bolas.

https://www.youtube.com/watch?v=1DTRzPRfu6s

- La máquina a realizar por los alumnos consiste en una caja rectangular poco profunda, mayor que el diámetro de las bolas. Con el fondo de la caja hecho con un tablero de madera con 3 cuerpos. El primero el embudo donde se dejan caer ñas bolas a emplear (Canicas o balines), el intermedio contiene puntas clavadas formando una retícula de forman que alternan la colocación de las bolas, teniendo siempre una probabilidad de

0.5 en ir hacia la izquierda o hacia la derecha. Según van bajando más caminos aleatorios van tomando. La parte inferior está formada por listones paralelos verticales que permiten recoger las bolas, mientras estas caen acumulándose unas sobre otras. La tapa de la caja consiste en un metacrilato o superficie transparente que permita la visión de su interior. Cuando dejamos caer una cierta cantidad numerosa de bolas por el embudo con el tablero inclinado, la figura formada por las bolas caídas en los distintos compartimentos verticales inferiores se aproximará a la "campana de Gauss" conocida como la normal.

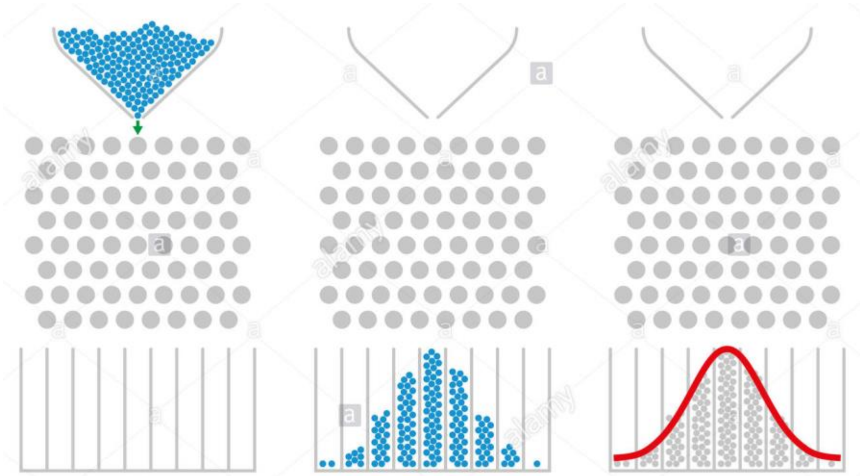
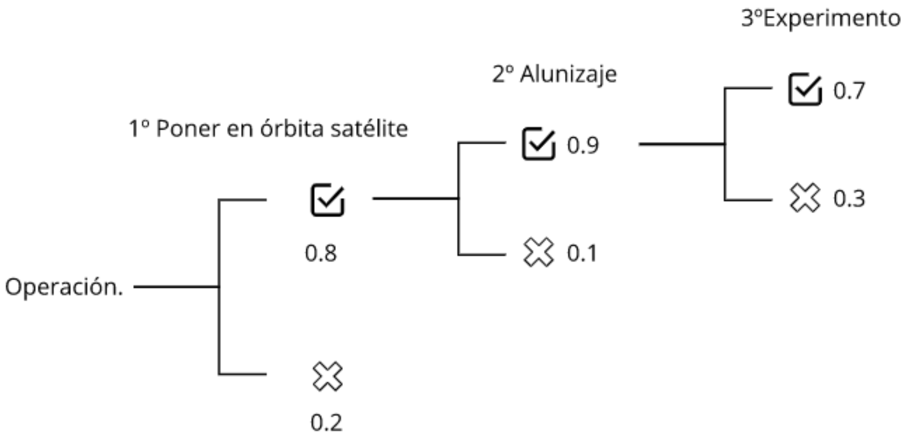


Ilustración 16.Representación de la máquina de Galton

Misión espacial

Un grupo de científicos realiza una operación espacial en la Luna muy arriesgada con la ayuda de un satélite espacial. En experiencias anteriores el equipo ha evaluado que la probabilidad de poner en órbita lunar un satélite es del P(O) = 0.8, la probabilidad de realizar un alunizaje correcto es del P(A) = 0.9 y la probabilidad de que funcione correctamente el sistema de experimentación es de P(E) = 0.7.

- Calcula la probabilidad de que el dispositivo sea fiable, es decir funcione correctamente. Así, diremos que la fiabilidad del sistema de alunizaje es del 90%. Interesa calcular la fiabilidad global de la experiencia, es decir que todos los procesos funcionen correctamente. Representa los pasos a seguir en la misión mediante un diagrama.



- Calcula las siguientes probabilidades

1. El satélite no logra ponerse en órbita
2. El satélite se pone en órbita pero no aluniza
3. El satélite logra una puesta en órbita y aluniza
4. Toda la operación es un éxito.
5. Probabilidad de que la misión entera falle

Ensayos de Bernoullli

Situación didáctica:

- Diagramas en árbol.

Objetivos.

- Experimentos compuestos, ensayos de Bernoulli.
- Unión de sucesos compatibles e incompatibles.
- Uso de notación de conjuntos.
- Árboles de probabilidad y regla del producto.
- Distribución binomial.
- Probabilidad condicionada.
- Variaciones con repetición.

Presentación al alumnado

Esta actividad puede ser conjunta con el departamento de Tecnología.

Circuitos eléctricos en serie

El siguiente circuito está formado por dos bombillas iguales A y B montadas en serie. Para que haya paso de corriente en el circuito deben funcionar correctamente ambas bombillas, por lo que si una falla no funciona el circuito es defectuoso.

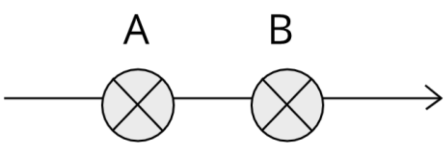


Ilustración 17. Circuito de dos lámparas en serie

- Si una lámpara no tiene ningún defecto y por tanto permite el paso de la corriente, diremos que esa lámpara es buena sino la calificaremos como defectuosa. Para denotar los sucesos llamaremos A = la lámpara A es buena; B = la lámpara B es buena; $\bar{A}$= lámpara a defectuosa y ⌐B = lámpara B defectuosa. Suponiendo que el 10% de las bombillas a utilizar son defectuosas. Calcula la probabilidad de los anteriores sucesos.

- Indica que quieren decir los siguientes sucesos y luego calcula su probabilidad.

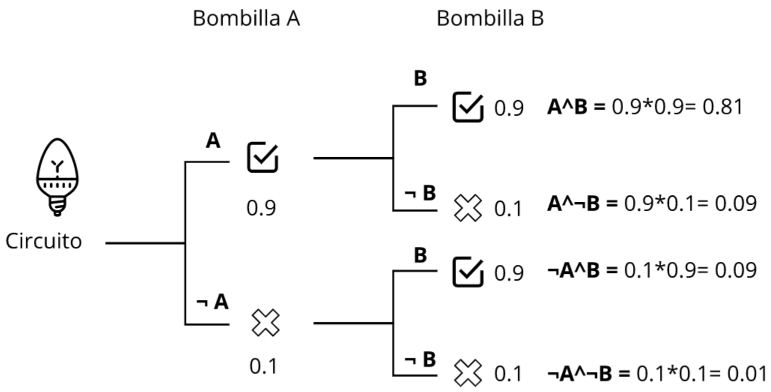
Suceso	Interpretación	Probabilidad
A U B	*Al menos una de las lámparas A o B son buenas*	
A ∩B	*Las lámparas A y B son buenas*	
A U ⌐A		

B U ⌐B	
A ∩ ⌐B	
⌐B∩A	
⌐B∩⌐A	

- Completa la siguiente tabla con los valores calculados. Observa el diagrama en el que se representan los distintos grupos de sucesos.

Sucesos	**A**	**⌐A**
B	A∩B	⌐A∩B
⌐B	A∩⌐B	⌐A∩⌐B

- Indica con colores cuál de los siguientes resultados coincide con la expresión AUB.
- Mediante el siguiente diagrama en árbol representa las diferentes situaciones posibles que se pueden producir en el circuito.



- Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos.
  1. Suceso C= El circuito permite dejar pasar la corriente
  2. Suceso D = únicamente A es buena
  3. Suceso E= Tanto A como B son las dos bombillas buenas
  4. Suceso F= Al menos una de las lámparas es buena.
- Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos A y B y compárela con cada una de las sumas siguientes.

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap \neg B) + P(\neg A \cap B) + P(A \cap B)$$

Circuitos eléctricos en paralelo.

Si cambiamos de circuito, montando ahora las bombillas en paralelo, para que el circuito funcione correctamente solamente es necesario que funciones una de las dos lámparas, o A o B.

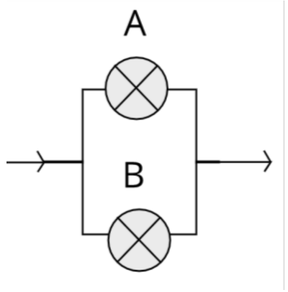


Ilustración 18.Circuito eléctrico de 2 lámparas en paralelo

- El siguiente diagrama muestra las distintas posibilidades que existen. Identifica en este diagrama el suceso C= El circuito funciona.

Sucesos	A	⌐A
B	A∩B	⌐A∩B
⌐B	A∩⌐B	⌐A∩⌐B

- Representa mediante el diagrama en árbol las distintas situaciones que pueden darse respecto a A y B.
- ¿Crees que le circuito es más fiable o menos que el anterior?

A la hora del cálculo de probabilidades de experimentos compuestos, es bueno mostrar la unión de sucesos compatibles y hacer uso dela notación de conjuntos para la representación de suceso. En este sentido se propone como complemento al apartado anterior, dentro del contexto de fiabilidad de un circuito electrónico pueden plantearse otras disposiciones como estas, conociendo la probabilidad p de que falle una lámpara:

- Calcular la probabilidad de fallo de los siguientes circuitos. ¿Cuál de ellos es más fiable?

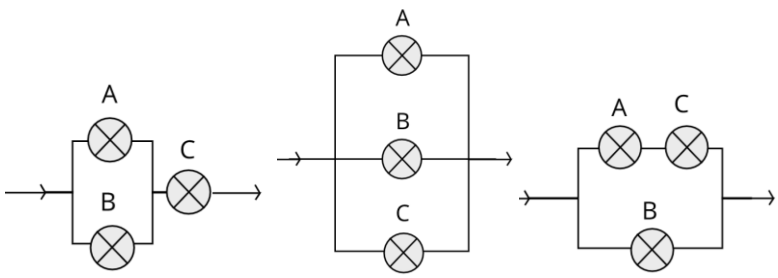


Ilustración 19. Distintos circuitos eléctricos con lámparas en serie y paralelo.

Extracción de bolas de una urna.

El uso de la notación de conjunto para representación es básico que lo adquieran los alumnos para conseguir el rigor matemático necesario para poder superar los sesgos y comprender la probabilidad. Los ejemplos utilizados muestran el modelo de pruebas de Bernoulli o ensayos repetidos en las mismas condiciones, planteando en algún caso la representación gráfica de una distribución binomial.

En parejas se colocan en una caja bolas blancas y negras. Se extrae una bola de la caja y se anota el color y se devuelve a la caja. Se repite la operación una segunda vez. Determina cual es la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales asociados a este experimento. El espacio muestral puede venir definido mediante la siguiente tabla de doble entrada:

		2ºExtracción	
		Negra (N)	Blanca (B)
1ªExtracción	Negra (N)	NN	NB
	Blanca (B)	BN	BB

- Representa gráficamente la distribución de la probabilidad de la variable "números de bolas blancas" mediante el diagrama en árbol. Repetir el estudio con 3 o 4 extracciones más.
- En caso se utilizarse 3 bolas de colores distintos, existen 3 posibles resultados. Es por tanto que al realizar r extracciones se puede introducir el problema del cálculo de las variaciones con repetición de 3 elementos tomados de r en r, e inducir la fórmula 3^r

Intuición fallida.

Situación didáctica:

- Lanzamiento de moneda.

Objetivos.

- Experimentos compuestos, ensayos de Bernoulli.
- Unión de sucesos compatibles e incompatibles.
- Uso de notación de conjuntos.
- Árboles de probabilidad y regla del producto.
- Distribución binomial.
- Probabilidad condicionada.
- Variaciones con repetición.
- Evitar sesgo de la falacia del jugador.

Presentación al alumnado

La pobre intuición que tenemos como seres humanos debemos desechara cuando tomamos situaciones de incertidumbre. Para ello realizaremos el siguiente experimento para comprobar la percepción del nivel de aleatoriedad de los alumnos. (Batanero) [0]

En parejas se pidió a lanzar a dos jugadores una moneda convencional (no sesgada) 150 lanzamientos y que anotaran los resultados. Estos fueron los resultados obtenidos.

	Muestra
Jugador 1	c+c++ cc++cc+c+c++c++c+ccc+++ ccc++c++c+c+ c++cc+ccc +c+c+cc+++c c++c+c++cc+c++cc+c++cc+cc+c+++c ++cc++c+ +c+c+cc+c++cc+c+c++cc c+cc++c +c++cc +++c +++c+c++cc
Jugador 2	+cc+++c++++c+cc+++cc+cc+++cc+ccc+++c++++++c+c+c+c++++c ccccc+ccc+c+cc+ccccc+ccc++ccc+c+cccc ccc cc++c+ccc cccc +++ ++cccc++c+ c+cc+ cc+cc+ +++ ++c+cc++ccc++ccc

- La pregunta que el alumno debe responder es si hicieron trampas alguno de los dos jugadores y porqué.

- La respuesta no es fácil a simple vista, aun cuando el experimento es sencillo y equiprobables. Pero no tenemos certeza absoluta que podamos saber si ambos son procesos totalmente aleatorios. Una solución es contar el número de caras y cruces de cada una de las muestras y hacer una comparación con el número esperado es decir 75 si suponemos que la moneda no está trucada:

	Número de caras	Número de cruces
Jugador nº1	72	78
Jugador nº2	67	83
Esperada	75	75

- Observando la siguiente tabla podemos observar que ambas tienen una frecuencia de caras y cruces relativamente igual a la teórica por el cálculo. No hay que dejarse engañar por la ley de los pequeños números, pues si cualquiera de las dos muestras nos hubiese dado exactamente la probabilidad de la frecuencia esperada, entonces sería sospechoso, pues se debe acercar al valor pero no demasiado.
- Ahora para resolver el problema debemos determinar cuánta diferencia respecto de la frecuencia esperada, estamos dispuestos a asumir para determinar que alguno de los dos jugadores ha hecho trampas. Ahora bien, si analizamos los resultados de las frecuencias de dos en dos, se observa más nítidamente la diferencia del jugador 1 respecto de la distribución teórica pues por ejemplo nunca obtiene 3 caras seguidas, cuando mediante el cálculo teórico se esperaría 6 tandas de este tipo.

Parejas	CC	C+	+C	++
Jugador nº1	12	30	18	15
Jugador nº2	25	21	12	17
Esperada	19	19	19	19

- Podemos deducir que el jugador 1 se parta más del jugador 2 de lo esperado al representar gráficamente el número de caras obtenido de 3 en 3 lanzamientos se aprecia este hecho.

Trios	CCC	CC+	C+C	C+C	+CC	+C+	++C	+++
Jugador nº1	0	2	13	9	6	7	10	1
Jugador nº2	8	11	6	3	6	4	5	6
Esperada	6	6	6	6	6	6	6	6

- Lo que se trata con este experimento es que permita al alumno reflexionar sobre la idea de aleatoriedad, que es la base de la estadística y la probabilidad, y de cómo no podemos aventurarnos a emitir juicio sin analizar el problema. Pues así el alumno se da cuenta que un suceso aleatorio indica que no sigue ningún modelo o patrón pero sí que al analizar una secuencia de resultado aleatorios, observamos que aparecen en multitud de modelos, con el de la convergencia de las frecuencias relativas, el producto de experimentos o la distribución binomial.
- Traza las gráficas correspondientes a las 3 anteriores tablas en las que se pueda apreciar de forma simultánea las frecuencias relativas de caras y cruces de

Probabilidad total y de Bayes.

Situación didáctica:

- Diagramas en árbol.

Objetivos.

- Unión de sucesos compatibles e incompatibles.
- Uso de notación de conjuntos.
- Árboles de probabilidad y regla del producto.
- Probabilidad condicionada.
- Teorema de la probabilidad total y uso del teorema de Bayes.
- Evitar sesgo de la falacia del jugador.
- Simulación.

Presentación al alumnado

Según las estadísticas de natalidad, sabemos que aproximadamente la mitad de los recién nacidos son niños y la otra mitad niñas. En un hospital particular el 51% son varones y el 49% son hembras. Actualmente mediante una ecografía a partir del quinto mes de embarazo se puede observar el sexo de un bebé. Cuando se hace una ecografía el 0.8 de los niños son clasificados como niños y el 0.9 como niñas. Los errores a la hora observar el sexo del nonato se deben a las dificultades de observación del feto según su posición.

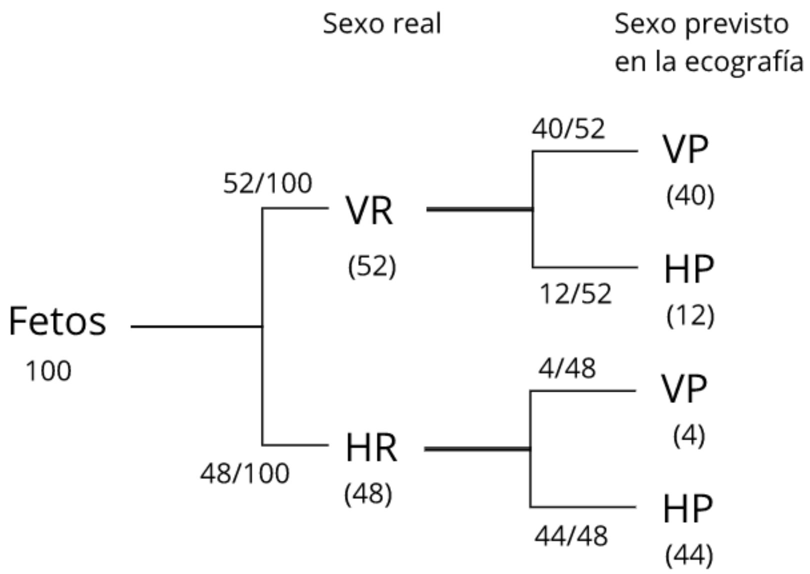
- Realiza el diagrama en árbol en el cual se pueda reflejar las estadísticas de la natalidad y las distintas posibilidades que resultan cuando una madre se hace una ecografía según el enunciado
- Vamos a realizar una simulación de la exploración de 100 ecografías a madre. Toma 100 números aleatorios comprendidos entre 0 y 99. Seguidamente separa los números en 2 grupos.
    - Los números comprendidos entre 0 y 50 representarán a las madres con bebés masculinos.
    - Los números comprendidos entre 51 y 49 representarán a las madres con bebés femeninos
- Los números que representan a su vez a los varones los separamos en dos grupos:
    - Si la primera cifra está comprendida entre 0 y 8 entonces ha sido positivamente como varón.
    - Si la cifra empieza en 9 representa a los niños que han sido clasificados erróneamente como niñas.
- Los números que representan a las niñas las separamos en dos grupos:
    - Si la primera cifra está comprendida entre 0 y 6 entonces ha sido positivamente como hembra.
    - Si la cifra empieza pro 7.8.o 9 representa a las niñas que han sido clasificados erróneamente como niños.
- El resultado de nuestra simulación es el siguiente:

	Sexo previsto en la ecografía		
	Varón previsto (VP)	Hembra prevista (HP)	Total
Varón real (VR)	45	7	52
Hembra real (HR)	15	33	48
Total	60	40	100

- A partir de la tabla, completa el cálculo de las frecuencias:

	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Niños reales	52	52/100
Hembra real	48	48/100
Total fetos clasificados como varones	60	60/100
Total fetos clasificados como hembras		
VR clasificados como varones	45	45/52
VR clasificados como hembras		
HR clasificadas como hembras		
HR clasificadas como varones		
Fetos clasificados correctamente	45+33= 78	78/100
Fetos clasificados incorrectamente		

- Completa el siguiente diagrama en árbol escribiendo las frecuencias relativas correspondientes de los sucesos de intersección.
    1. VR ∩ VP
    2. VR ∩ HP
    3. HR ∩ VP
    4. HR ∩ HP



Para que los alumnos aprecien la variabilidad inherente a cualquier proceso de muestreo, se sugiere realizar simulaciones de 100, 500, 1000 experimentos mediante el uso de programas como Statgraphics o Geogebra, que proporcionen las frecuencias absolutas de la intersección de dos sucesos. Para cada una de estas tablas se sugiere que el alumno escriba dos diagramas en árbol y estime las probabilidades marginales y condicionadas a partir de las frecuencias relativas correspondientes.

Se plantearán preguntas a los alumnos acerca de las frecuencias y probabilidades de los distintos suceso. Mediante observación de fracciones representadas en los diagramas se procurará que el alumno encuentre la relación multiplicativa entre frecuencias que conduce a la definición de probabilidad condicional. Así mediante el diagrama en árbol podemos asignar la probabilidad de un feto que sea realmente varón y además que hayan acertado en su género como:

$$P(VR \cap VP) = 0.51 * 0.90$$

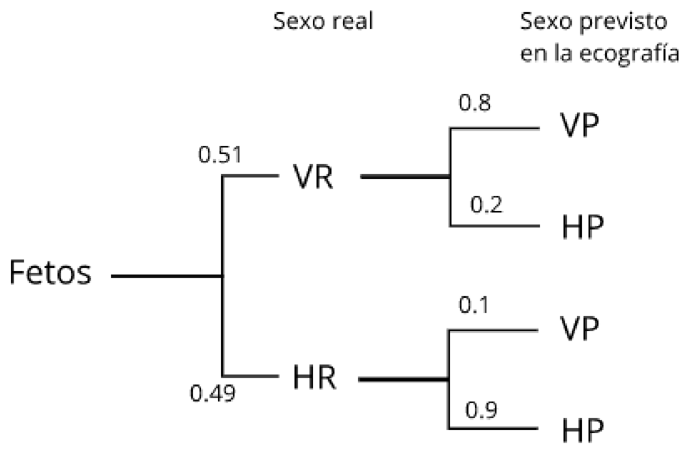
Ya que como el 51% de los niños son varones y el 90% de ellos son diagnosticados como tales. Por tanto de aquí se puede deducir que la probabilidad de que un bebé niño sea diagnosticado como tal es en realidad la probabilidad condicional.

$$P(VP/VR) = 0.90$$

Y por ello se deduce que:

$$P(VR \cap VP) = P(VR) * P(VP/VR)$$

Y el resto de probabilidades del árbol.



Probabilidad del suceso intersección
$P(VR \cap VP) = 0.51 * 0.80 = 0.408$
$P(VR \cap HP) = 0.51 * 0.20 = 0.102$
$P(HR \cap VP) = 0.49 * 0.10 = 0.049$
$P(HR \cap HP) = 0.51 * 0.90$

- Calcula la probabilidad de que un feto sea clasificado como varón usando implícitamente el teorema de la probabilidad total.
$$P(VP) = P(VR \cap VP) + P(HR \cap VP) = 0.408 + 0.049 = 0.457$$
$$P(VP) = P(VR) * P(VP/VR) + P(HP) * P(VP/HP)$$
- Sigue el mismo razonamiento para el cálculo de la probabilidad de los sucesos “un feto es clasificados correctamente o incorrectamente. Por ultimo calcula las probabilidades condicionales de los siguientes sucesos aplicando el teorema de Bayes. Y describe las conclusiones que sacas a partir de las probabilidades halladas:

$$P\ (VR/VP) = \frac{P(VP \cap VR)}{P(VP)} = \frac{0.408}{0.457} = 0.8927$$

$$P\ (HR/HP) = \frac{P(HP \cap HR)}{P(HP)} = \frac{0.441}{0.543} = 0.8121$$

$$P\ (HR/VP) = \frac{P(HR \cap VP)}{P(VP)} = \frac{0.049}{0.457} = 0.1072$$

$$P\ (VR/HP) = \frac{P(VR \cap HP)}{P(HP)} = \frac{0.102}{0.545} = 0.1878$$

5.6. Software probabilístico

A la hora de impartir los contenidos en el aula, nos ayudaremos de software estadístico y probabilísticos específicos, que sean sencillos y de fácil manejo para el alumnado. Así pues como método de apoyo utilizaremos:

Statgraphics

Statgraphics es un paquete de estadísticas que realiza y explica funciones estadísticas básicas y avanzadas.

Ejemplos:

1. Generamos 100 valores del lanzamiento de un dado:

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ rinteger(100; 1; 6)$$

2. Observamos la evolución de 500 valores rojo-negro (1-2) de la ruleta:

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ rinteger(500; 1; 2)$$

3. Ley de los grandes números: convergencia de la media muestral a la media poblacional.
Vamos a ver que, en una moneda equilibrada (igual probabilidad de cara que de cruz), el promedio de caras se aproxima a 0.5 cuando el número de lanzamientos crece.

- Generar 1000 valores 1-2:

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ rinteger(1000; 1; 2)$$

- En la siguiente columna, hacer que valga 1 si el lanzamiento era cara (1), 0 si cruz (2).

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ col\_1\ =\ 1$$

- En la siguiente columna generar una variable contador

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ count(1; 1000; 1)$$

- Crear una columna donde cada celda i guarde el valor resultado de sumar las celdas 1 hasta i de la variable 0-1 creada:

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ runtot(col\_1)$$

- Dividir la última columna por la columna contador. Esta variable (col_5) es el promedio de caras en los lanzamientos.

- Plot de la última columna y ver la convergencia a la media:

$$Plot\ /Scatterplots\ /\ X - Y\ Plot:$$

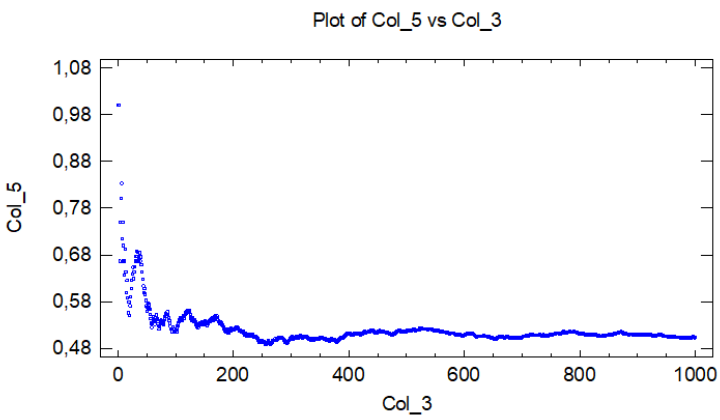


Ilustración 20.En el gráfico se ve que el promedio se aproxima a 0.5.

En el gráfico se ve que el promedio se aproxima a 0.5.

4. Ley de los grandes números: convergencia de la media muestral a la media poblacional.
Vamos a ver que, lanzando un dado equilibrada (cada cara tiene la misma probabilidad de salir, 1/6), el promedio del número de 6 se aproxima a 1/6 cuando el número de lanzamientos crece.

- Generar 1000 valores 1,…, 6:

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ rinteger(1000;1;6)$$

- En la siguiente columna, hacer que valga 1 si el lanzamiento era un 6, 0 si no.

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ col\_1\ =\ 6$$

- En la siguiente columna generar una variable contador

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ count(1;1000;1)$$

- Crear una columna donde cada celda i guarde el valor resultado de sumar las celdas 1 hasta i de la variable 0-1 creada:

$$Seleccionar\ la\ columna\ /\ Generate\ Data\ /\ runtot(col\_2)$$

- Dividir la última columna por la columna contador. Esta variable (col_5) es el promedio de 6 en los lanzamientos.

- Plot de la última columna y ver la convergencia a la media:

$$Plot\ /Scatterplots\ /\ X-Y\ Plot:$$

En el gráfico se ve que el promedio se aproxima a 1/6.

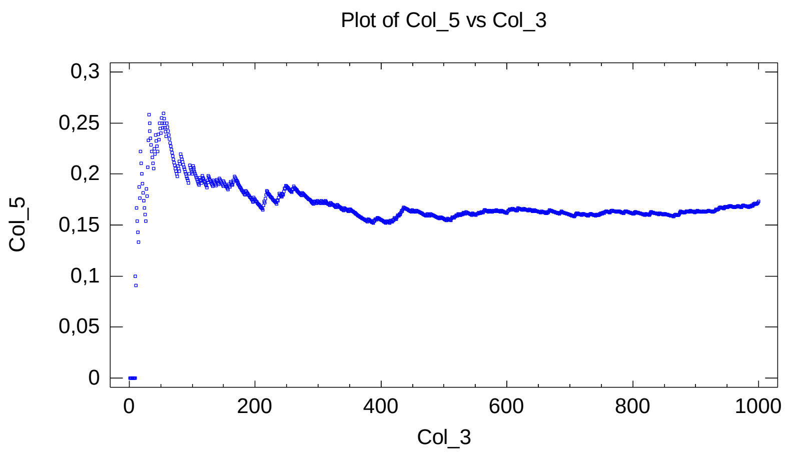


Ilustración 21En el gráfico se ve que el promedio se aproxima a 1/6.

6. CONCLUSIONES

Mi impresión personal de lo que he aprendido en este periodo de realización del trabajo fin de máster, no se puede describir con palabras. El hecho de poder aprender sobre los distintos sesgos cognitivos que tenemos y empleamos día a día, la forma en que nos falla nuestra intuición a la hora de emplearla para realizar cálculos aleatorios, y poder darme cuenta de mis propios fallos a la hora de emitir un juicio que a priori pensaba que era correcto, me han hecho darme cuenta que nuestros razonamientos a veces nos fallan y es preferible aplicar el cálculo a la hora de resolver problemas para poder analizarlos de manera consciente.

Además de aprender los errores más comunes a la hora de enfrentarnos a un problema, desde el propio lenguaje que utilizamos al hablar para comunicar el grado de posibilidad de un suceso hasta cuando tomamos como referencia solo aquello que recordamos más fácilmente o por nuestra propia experiencia personal. O por ejemplo en los casos en los cuales, debido al tamaño de las muestras muy pequeñas podemos cometer errores de probabilidad muy grandes si no tenemos en cuenta dicho sesgo. Además de ayudarme a desechar por completo la idea de que los procesos estocásticos independientes no tienen memoria y no importa lo que ha salido ya y lo que saldrá. Esta falacia es una de las más comunes pues como seres humanos al tener la capacidad de razonamiento y de asociatividad podemos inducir que encontramos patrones o relaciones entre hechos inconexos lo cual para determinadas tareas es bueno, pero en probabilidad nos juega malas pasadas.

El darme cuenta de la falacia de la tasa base, utilizada hasta la extenuación, al tomarla como referencia al aventurar una probabilidad, o saber diferenciar que la unión de conjuntos tiene siempre una probabilidad mayor o igual que si se producen a la vez (intersección), hacen que ahora tenga una visión más global sobre el azar.

Distinguir procesos equiprobables de los que no, y la dependencia de sucesos, constituyen los retos más grandes a los que me he enfrentado pues no es fácil de asimilar a priori la probabilidad condicional de un fenómeno respecto a otro, hasta que no se ve gráficamente en un diagrama en árbol. El hecho de poder entender el problema de Monty Hall supuso un reto y poder comprobar la probabilidad frecuentista de un proceso aleatorio es increíble pues rompe muchas preconcepciones que tenía.

En cuanto a la propuesta de mejora propongo el uso de material experimental en clase, pues el propio proceso empírico del estudio de un proceso aleatorio hace fijar mejor el contenido aprendido en la memoria. Es bien sabido que “lo que me cuentan, lo olvido; lo que veo, lo entiendo y lo que hago lo aprendo” (Confucio). Al fin y al cabo el objetivo último de este trabajo es que yo, como docente, pueda ser consciente de los propios sesgos que aplicamos en procesos aleatorios de manera que pueda enseñárselos a los futuros alumnos para que no caigan en ellos y sean conscientes de las propias trampas de nuestro razonamiento. Volver a los métodos de experimentación, puede parecer arcaico, pero considero que es sin duda la mejor forma de ver cómo actúan los fenómenos probabilísticos. Este es el mayor reto y la mayor responsabilidad que tenemos como profesores, hacer de la labor docente una auténtica tarea de aprendizaje significativo para poder moldear a los ciudadanos del futuro para que no les engañen y puedan tener criterio propio y dotarles de herramientas de prevención de los posibles sesgos.

Me falta mucho por aprender sin duda, por eso he de expresar mi profunda gratitud a mi tutor David Conde del Rio, pues ha estado en todo momento ayudándome y dejándose la piel. Y me recomendó leer a (Kahneman & Tversky , 2011) [4] del cual aprendí a no pensar tan rápidamente dejándome llevar por mi intuición inicial sino a meditar y pensar despacio sopesando las opciones y aplicando el cálculo.

7. ANEXO

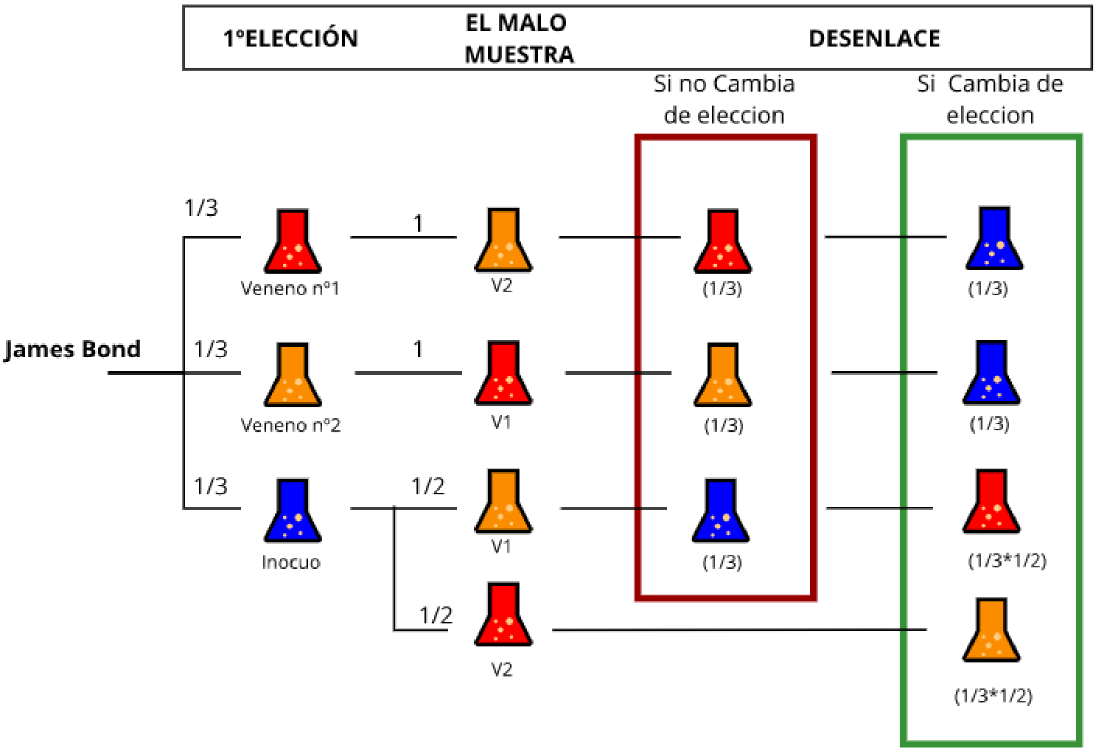
Versión del problema de Monty Hall en el aula.

Durante mi periodo de prácticas, en el IES Parquesol (Valladolid) para enseñar la probabilidad condicional a los alumnos de 4º de ESO desarrollé el problema de Monty hall mediante objetos tangibles que pudieran manipular y de variando el problema por si algún alumno lo conocía, así pues el enunciado a desarrollar fue el siguiente.

James Bond ha sido atrapado por un enemigo mortal. Este rival, al conocer la fama del superagente no quiere encargarse de él muy rápido así que prefiere jugar con él y darle una oportunidad de vivir. Para ello James debe escoger entre 3 frasquitos de colores, Rojo (R), Amarillo (Y) y Azul (B). Dos de ellos contienen veneno y otro es inocuo. Los 3 frasquitos contienen un líquido transparente por lo que es imposible reconocer cual es Veneno (V) y cuál contiene el líquido inocuo (I). James escoge uno de ellos al azar, en ese momento el malo que sabe dónde está el líquido inocuo, le muestra uno de los frascos que contiene veneno y que él no ha escogido. Y le ofrece cambiar de frasquito. Entonces el espía se queda pensativo ¿Es mejor cambiar de opción o quedarse con el que escogió la primera vez?

Ilustración 22.Frascos para escenificar el problema de Monty hall

Durante el desarrollo del problema, el docente representaba el papel del “malo” y los alumnos el papel de “James Bond”. En la pizarra se desarrollaron el diagrama en árbol para que los alumnos pudiesen comprender mejor el problema.



En Resumen:

	Veneno 1 (V1)	Veneno 2 (V2)	Inocuo (I)
Si no cambia de frasco	1/3	1/3	1/3
Si cambia de frasco	1/3*1/2 =1/6	1/3*1/2 =1/6	1/3+1/3 =2/3=4/6

Mediante el Cálculo probabilístico:

$$P(I) = \text{ Frasco elegido en la } 1^{\underline{o}}\text{Elección es Inocuo} = 1/3$$
$$P(V) = \text{ Frasco elegido en la } 1^{\underline{a}} \text{ Elección es veneno} = P(V1) + P(V2) = 2/3$$
$$P(acertar) = P(A \cap I) + P(A \cap V)$$
$$\boldsymbol{P(acertar) = P(I) * (Acertar/I) + P(V) * P(Acertar/V)}$$

- **Si James Bond No cambia.**
- P(Acertar/I) = 1
- P(Acertar/V) =0

$$P(acertar = \frac{1}{3} * 1 + \frac{2}{3} * 0 = 1/3$$

Si james bond cambia de elección:

- P(Acertar/Inocuo) = 0
- P(Acertar/Veneno) =1

$$P(Acertar) = \frac{1}{3} * 0 + \frac{2}{3} * 1 = 2/3$$

8. REFERENCIAS

BIBLIOGRAFÍA

[1] Batanero, C. (s.f.). *Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafio educativo.* Universidad de Granada, España.

[2] Cañizares Castellano, J. G. (1987). *Matemáticas Cultura y aprendizaje: Azar y Probabilidad nº27.* Síntesis.

[3] Díaz, C. (s.f.). *Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilísitico y sus implicaciones en la enseñanza de la estadística.* Universidad de Granada, España.

[4] Kahneman, D., & Tversky , A. (2011). *Pensar rápido, pensar despacio.* Debate.

[5] Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and instruction 6.1*, 59-98.

[6] Lecoutre, M. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational studies in Mathematics,23*, 557-568.

[7] Mori, K. M. (Agosto - Septiembre 1985). La ciencia de tomar decisiones, Kahneman y Tversky. *Revista Discover*.

[8] Paulos, J. A. (1988). *El hombre anumérico.* Barcelona, España: Tusquets Editores.

[9] R.Martinez. (s.f.). *Anexo Tema 8. Concepciones de la probabilidad.* Universitat de Valéncia, Empresariales.

WEBGRAFÍA

[10] Cabrerizo, J. A., & Mora Pardo, M. (s.f.). *CICA centro infomático cien*. Obtenido de Actividades para clase: https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-04/abacos.html

NOTICIAS

[11] Llaneras, K. (26 de Marzo de 2017). *elpais.com*. Recuperado el 29 de 5 de 2019, de https://elpais.com/elpais/2017/03/24/ciencia/1490372191_063911.html

[12] Serrano.I & Prada JM (10 Junio de 2019) *el mundo.es.*Recuperado el 10 de 6 de 2019 https://www.elmundo.es/vida-sana/mente/2019/06/01/5cf0ee70fc6c8331168b46da.html

[13] S.Zavia, M. (18 de Abril de 2016). *GIZMODO*. Recuperado el 5 de 6 de 2019, de https://es.gizmodo.com/10-sesgos-cognitivos-que-manipulan-tu-opinion-sin-que-t-1771587034

ILUSTRACIONES