UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales y de la Matemática

Propuesta didáctica basada en el aprendizaje cooperativo y las Inteligencias Múltiples. Números enteros y divisibilidad en 2º E.S.O.

Trabajo Final del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.Especialidad de Matemáticas

Alumna: Sonia Carrillo Grande

Tutora: Cristina Pecharromán Gómez

Valladolid, Junio 2019

RESUMEN

En las aulas, como reflejo de la sociedad, conviven alumnos muy diferentes y, para mejorar la educación, es deber de los docentes tratar esa diversidad como una fuente de riqueza para el aprendizaje del alumnado.

Este trabajo fin de máster presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de los números enteros y divisibilidad en 2º E.S.O. a través del aprendizaje cooperativo, el desarrollo de las diversas inteligencias, denominadas Inteligencias Múltiples por Gardner, y la atención a la diversidad. El principal objetivo es que el alumnado tenga la oportunidad de aprender matemáticas desarrollando distintas capacidades e inteligencias. Para ello, además de plantear problemas que en sí mismos atienden al desarrollo de diversas inteligencias, se ha propuesto la resolución de muchos de ellos a través del aprendizaje cooperativo, que también contribuye a ello. Además, cabe destacar que, en general, se han planteado los apartados de los problemas con distinto nivel de dificultad. Esto, junto con la forma de trabajo cooperativo, completa la atención a la diversidad que se ha propuesto en este trabajo.

Palabras clave: Inteligencias Múltiples, aprendizaje cooperativo, atención a la diversidad, números enteros, divisibilidad.

ABSTRACT

In the classrooms, as a reflection of society, very different students coexist and, to improve education, it is the duty of teachers to treat that diversity as a source of student learning enrichment.

This masters final project presents a didactic proposal for the teaching of integers and divisibility in second year of high school through cooperative learning, the development of different intelligences, called Multiple Intelligences by Gardner, and attention to diversity. The main objective is that students have the opportunity to learn mathematics by developing different skills and intelligences. To do so, in addition to posing problems that in themselves serve the development of different intelligences, the resolution of many of them has been proposed through cooperative learning, which also contributes to this. In addition, it should be noted that, in general, the sections of the problems with different levels of difficulty have been raised. This, together with the form of cooperative work, completes the attention to the diversity that has been proposed in this work.

Keywords: Multiple Intelligences, cooperative learning, attention to diversity, integers, divisibility.

ÍNDICE

Índice de tablas

INTRODUCCIÓN

Una educación integral del alumnado requiere una enseñanza que contribuya al desarrollo de sus diversas capacidades. No todos los alumnos son iguales ni aprenden de la misma forma por lo que es necesario que los docentes utilicen diferentes herramientas para ajustarse a las demandas cognitivas del alumnado y actuar en consecuencia, atendiendo de esa forma a la diversidad.

En este trabajo, se pretende presentar una propuesta didáctica para la enseñanza de los números enteros y la divisibilidad en la asignatura de Matemáticas de 2º E.S.O. que incida en el desarrollo de las diversas inteligencias múltiples y, con ello, de las diversas competencias educativas. Este fin se consigue no sólo con el planteamiento de actividades que permitan el desarrollo de la diversidad de inteligencias múltiples, sino también a través del aprendizaje cooperativo y la atención a la diversidad. Por lo tanto, el principal objetivo de este trabajo es, de forma abreviada, potenciar el desarrollo de las inteligencias múltiples y atender a la diversidad del aula a través de problemas matemáticos y de su resolución mediante el trabajo cooperativo.

Los contenidos de números enteros y divisibilidad se suelen impartir al comienzo del curso por ser imprescindibles para el correcto aprendizaje de los demás. Por tanto, el aprendizaje cooperativo no se puede implantar directamente sino que es necesario de un tiempo para que el alumnado se acostumbre a una nueva forma de trabajo. Por tanto, se ha escogido una técnica que permita el trabajo en grupo y el trabajo individual y, además, en este trabajo individual se trabajará, casi siempre, en un nivel académico adecuado para el alumno, con el objetivo de atender a la diversidad.

La mayoría de las actividades planteadas, se han creado con el objetivo de desarrollar las Inteligencias Múltiples. Y no únicamente la lógico-matemática o la lingüística, sino también las demás inteligencias, las cuales considero igual de importantes. Cada alumno tiene unos intereses o preferencias por lo que hay que intentar, en la medida de lo posible, que todos los alumnos se sientan involucrados en el aprendizaje y motivados para él. Además, se ha procurado que todas las actividades sigan un denominador común, contextualizándolas en distintos establecimientos de un centro comercial.

En cuanto a su estructura, el trabajo está dividido en siete apartados.

En primer lugar, se presenta un marco teórico que atiende a la diversidad del alumnado, mediante el desarrollo de las distintas inteligencias y capacidades, y el aprendizaje cooperativo.

A continuación, se enumeran los objetivos y contenidos que se definen en la legislación, haciendo una reflexión sobre su relación con las Inteligencias Múltiples.

Después, se realiza un análisis didáctico, comenzando por un breve resumen sobre la historia de los números enteros y la divisibilidad y un análisis sobre esos contenidos. A continuación, se presentaun análisis comparativo de diferentes libros de texto y mostrando de qué manera contribuye cada uno a los fundamentos teóricos de este trabajo. Finalmente, el apartado culmina con un análisis cognitivo, donde se exponen los errores y dificultades que presenta el alumnado en el aprendizaje de los contenidos.

En el cuarto apartado se presentan las distintas metodologías utilizadas en el aula centrándonos, principalmente, en una técnica de aprendizaje cooperativo en la que se crean grupos base, para que el alumnado con diferente nivel académico coopere y colabore, y grupos de trabajo, para atender a la diversidad.

En el último apartado se presenta la propuesta didáctica creada a partir de los apartados anteriores. En ella se muestra la temporalización de los contenidos y actividades, divididas en varias sesiones, y las actividades de enseñanza-aprendizaje, clasificadas según su tipología y especificando sus objetivos, los conocimientos previos necesarios para su desarrollo, los contenidos matemáticos trabajados y las competencias clave e Inteligencias Múltiples desarrolladas.

Para finalizar, se realiza una reflexión general, se enumera la bibliografía utilizada y se incluyen varios anexos.

1. MARCO TEÓRICO

a. INTELIGENCIAS MÚLTIPLES

A lo largo de los años, la creencia habitual de la sociedad ha sido la existencia de una única inteligencia que se puede medir fácilmente con las puntuaciones obtenidas (como el Cociente Intelectual) en los denominados "test de inteligencia". Sin embargo, resulta inverosímil que las respuestas a unas cuantas preguntas puedan clasificar a un alumno en "inteligente" o "no inteligente". Además, el conocimiento de estos resultados (que en su mayoría se refieren a las inteligencias lógico-matemática y lingüística) pueden condicionar a profesores, padres y, de forma más notable, al propio alumno, modificando la percepción de sus límites y capacidades para aprender y, por consiguiente, obstaculizando el descubrimiento y el desarrollo de su verdadero potencial.
Por ello, parece evidente no restringirse al estudio de una única inteligencia que no abarca el estudio del desarrollo de todas las capacidades de un individuo. Lo más útil sería hablar de múltiples inteligencias. Esta teoría, denominada la teoría de las inteligencias múltiples, fue creada en 1983 por Howard Gardner (1943-) en su libro *Frames of Mind: TheTheory of MultipleIntelligences* (Estructuras de la mente: La teoría de la inteligencias múltiples) con el objetivo de buscar una definición más completa de inteligencia. Además, con esta ampliación y reformulación de la idea de "inteligencia" se pueden diseñar nuevas formas de evaluar y enseñar que atiendan a la diversidad del alumnado de una forma más individualizada.

A continuación, se exponen las principales teorías sobre el intelecto humano hasta la enunciación de la teoría de las inteligencias de Howard Gardner.

i. Desarrollo histórico

El primer estudio destacado sobre la inteligencia se produjo en el siglo XVIII. El anatomista y fisiólogo alemán Franz Joseph Gall (1758-1828) fue el fundador de la frenología, disciplina que estudiaba la relación entre la configuración craneal y la inteligencia, y que carece de validez en la actualidad. Sin embargo, a pesar de que sus estudios tuvieron grandes fallas, como la supuesta relación entre el tamaño del cerebro y la inteligencia, también realizó grandes aportaciones como la afirmación de que cada parte del cerebro realiza una función diferente.

En el siglo posterior, destaca el médico, anatomista y antropólogo francés Pierre Paul Broca (1824-1880), el cual demostró la relación entre una lesión cerebral producida en una determinada parte del cerebro y un deterioro cognitivo específico relacionado con funciones lingüísticas. Durante el siglo XIX se siguieron realizando investigaciones para relacionar cada parte del cerebro con su función.

Otro de los objetivos principales de la psicología de esta época fue el estudio de las leyes de las facultades humana como la percepción, la memoria o la atención. Se consideró la existencia de diferentes formas de percepción, atención o memoria específicas para cada contenido (matemáticas, música, etc.) e independientes de la modalidad sensorial (auditiva, visual, etc.).

El siguiente autor destacado fue el británico Francis Galton (1822-1911), pionero en varias ramas científicas, el cual estudió las diferencias individuales de manera científica, centrándose únicamente en el estudio de las capacidades sensoriales.

Poco a poco se comenzaron a considerar otras capacidades, como las relacionadas con el lenguaje y la abstracción. El principal investigador fue Alfred Binet (1857-1911), un pedagogo, grafólogo y psicólogo francés que, junto al médico psiquiatra y psicólogo francés Théodore Simon (1872-1961) diseñó en 1905 el primer test de predicción del rendimiento escolar para, como su propio nombre indica, distinguir a los niños que en un futuro tendrían éxito académico de los que no. En 1912, fue denominado *test de inteligencia* y su medida *Cociente Intelectual* (CI; del alemán *Intelligenzquotient* o IQ) por el psicólogo alemán William Stern (1871-1938).

Debido a su valor predictivo (en términos de rendimiento académico) y teniendo en cuenta el desarrollo actual de la práctica docente en la mayoría de los centros escolares, sí puede ser apropiado para conocer el futuro académico de un alumno. Sin embargo, de estos resultados no se obtiene un conocimiento significativo sobre el éxito de un individuo en su futuro ya que sólo se basa en medir las inteligencias lógico-matemática y lingüística.

Por otra parte, dos trabajos posteriores dividieron a los profesionales e investigadores del intelecto humano. Unos, siguiendo la teoría del psicólogo de la educación inglés Charles Spearman (1863-1945), sostenían que la inteligencia era un factor único y que podía medirse con una prueba de inteligencia. Otros, influenciados por el psicólogo estadounidense Louis Leon Thurstone (1887-1955), creían en la existencia de varias facultades mentales primarias independientes y medidas con distintas tareas. Además, este último nombró algunos de estos factores: comprensión verbal, fluidez verbal, fluidez numérica, visualización espacial, memoria asociativa, rapidez perceptual y razonamiento.

Desde la perspectiva del desarrollo, destaca el psicólogo suizo Jean Piaget (1896-1980) y su teoría genética del aprendizaje. Piaget se interesaba no tanto por los resultados que los niños obtenían en las pruebas de inteligencia sino por los errores y los razonamientos que llevaban a cabo en esas pruebas. También se preocupaba por valorar la capacidad de asimilación de la nueva información y de resolución de problemas.

Sin embargo, el cambio más trascendente en cuanto a la percepción que se tenía hasta entonces de inteligencia se produjo en 1983, gracias a la publicación del libro *Frames of Mind: TheTheory of*

Multiple Intelligences (Estructuras de la mente: La teoría de la inteligencias múltiples), de Howard Gardner, psicólogo, investigador y profesor de la Universidad de Harvard. Allí fue donde en 1967, junto a otros profesionales del campo, comenzó a investigar sobre el potencial humano en un proyecto denominado "Proyecto Zero". Desde ese momento Gardner no ha dejado de investigar sobre ello.

En el siguiente apartado se exponen los principales puntos de la teoría de la inteligencia desarrollada por Gardner.

ii. La teoría de las Inteligencias Múltiples de Gardner

Para Howard Gardner las pruebas de inteligencia eran ineficaces ya que la inteligencia no se puede medir con un único factor debido a la complejidad del cerebro humano. También dudaba de que la inteligencia se pudiera medir cuantitativamente. Por eso Gardner (2016) modificó completamente la visión tradicional del concepto de inteligencia comúnmente aceptado hasta entonces, definiéndola como: “La habilidad para resolver problemas o para elaborar productos que son de importancia en un contexto cultural o en una comunidad determinada” (p. 37). Además, elaboró una teoría donde incluyó ocho tipos de inteligencia: musical, cinético-corporal, lógico-matemática, lingüística, espacial, interpersonal, intrapersonal y naturalista (esta última añadida posteriormente en una ampliación de su libro); que describimos brevemente en la siguiente tabla. Además, en la tabla se incluye el perfil profesional en el que destaca cada inteligencia.

Tabla 1. Inteligencias Múltiples: descripción y perfil profesional.

INTELIGENCIA	DESCRIPCIÓN	PERFIL PROFESIONAL
Musical	Capacidad para percibir, distinguir, saber utilizar y responder a los distintos elementos musicales (ritmo, tono y timbre). También para crear y expresar las formas musicales.	Músico, intérprete, compositor, crítico musical, etc.
Cinético-corporal	Capacidad de utilizar el propio cuerpo para expresar sentimientos o las manos para crear y transformar objetos.	Actor, deportista, bailarín, artesano, mecánico, cirujano, etc.
Lógico-matemática	Capacidad para calcular numéricamente, resolver problemas (utilizando la abstracción si es necesario), razonar correctamente y de forma lógica y formular y verificar hipótesis.	Científico, matemático, estadístico programador informático, etc.
Lingüística	Capacidad para dominar el lenguaje, es decir, una correcta expresión y comprensión oral y escrita.	Escritor, orador, abogado, periodista, etc.
Espacial	Capacidad de percibir el mundo desde distintas perspectivas y crear imágenes mentales a partir de lo observado.	Artista, arquitecto, diseñador, taxista, etc.

Interpersonal	Capacidad para relacionarse con los demás y comprender sus sentimientos o estados de ánimo.	Profesores, psicólogos, terapeutas, miembros de ONGs, etc.
Intrapersonal	Capacidad para comprenderse a sí mismo (emociones, sentimientos, etc.), reflexionar sobre ellos valorando las conductas y actuar en consecuencia.	Psicólogos, filósofos, etc.
Naturalista	Capacidad para observar de manera científica la naturaleza, identificando patrones o relaciones, clasificando especies y utilizándola de forma productiva.	Científicos, biólogos, exploradores, etc.

Ahora se van a enunciar las características que Gardner tuvo en cuenta para considerar a estas ocho habilidades como inteligencias y no simplemente talentos, habilidades o aptitudes.

La primera de ellas es el *Aislamiento potencial por daño cerebral*. Esto significa que una habilidad es considerada inteligencia si se corresponde con una parte aislada del cerebro o, de forma equivalente, si la lesión de una parte del cerebro solo afecta al desarrollo de una de estas inteligencias.

La siguiente característica es la *Existencia de genios, prodigios y otros individuos excepcionales*, es decir, que aparezcan a lo largo de la historia individuos que destaquen en una inteligencia concreta y en las demás presenten un nivel bajo de desarrollo.

La última característica enumerada por Gardner es la *Historia de desarrollo distintiva y conjunto definible de habilidades*. Con esto se refiere a que cada inteligencia debe tener una trayectoria de desarrollo diferente a lo largo de la vida de un individuo.

Además, y resumiendo lo dicho anteriormente, Gardner aclaró que todo individuo posee todas estas inteligencias de forma innata (unas más desarrolladas que otras) y puede seguir desarrollándolas a lo largo de su vida. Además, las ocho inteligencias están claramente diferenciadas y son independientes pero están interrelacionadas entre sí.

Con esta teoría se pretende que cada individuo conozca qué inteligencia o inteligencias tiene más desarrolladas para potenciarlas y lograr un aprendizaje significativo, reforzar las menos desarrolladas, guiarle hacia su vocación profesional y lograr una formación integral del alumno.

Por otra parte, el motivo de denominarlas "inteligencias" y no "talentos" o "habilidades" reside en subrayar que son tan importantes como las que se identifican mediante los test de inteligencia (inteligencia lógico-matemática y lingüística). Lo de "múltiples" es para destacar el número desconocido de capacidades humanas que existen ya que Gardner no asegura que su lista de ocho inteligencias esté completa ni sea, por tanto, definitiva. Gardner (1987) afirma lo siguiente:

> Por eso es necesario decir, de una vez por todas, que no existe, y jamás puede existir, una sola lista irrefutable y aceptada en forma universal de las inteligencias humanas. Jamás existirá una lista maestra de 3, 7, o 100 inteligencias que puedan avalar todos los investigadores. (p.102)

Otras inteligencias propuestas por otros autores son la emocional, la existencial, la creativa, la colaborativa, la digital o, incluso, la propia atención.

iii. Relación entre las Inteligencias Múltiples y las competencias clave

En este apartado, se presenta la relación entre las Inteligencias Múltiples y las competencias clave. En el trabajo de Galán (2018) aparece una descripción detallada de cada competencia clave y las inteligencias con las que se relaciona, enumerando actividades que los alumnos pueden desarrollar para adquirirlas, por lo que no se van a presentar en este trabajo.

Aquí se muestra una tabla en la que siguiendo a Galán (2018), se relacionan las Inteligencias Múltiples con las competencias clave, las cuales a lo largo del trabajo aparecerán representadas por las siguientes letras: competencia en comunicación lingüística (CL), competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT), competencia digital (CD), aprender a aprender (AA), competencias sociales y cívicas (CSC), sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIEP) y conciencia y expresiones culturales (CEC).

Tabla 2. Relación entre las Inteligencias Múltiples y las competencias clave.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES	COMPETENCIAS CLAVE						
	CL	CMCT	CD	AA	CSC	SIEP	CEC
Musical			x			x	x
Cinético-corporal						x	
Lógico-matemática		x	x			x	x
Lingüística	x		x			x	x
Espacial			x			x	
Interpersonal			x	x	x	x	x
Intrapersonal				x	x	x	x
Naturalista		x	x			x	x

Se observa que, mientras las inteligencias lógico-matemática, lingüística, interpersonal, intrapersonal y naturalista están relacionadas con cuatro o más competencias, la inteligencia musical está relacionada con tres, la espacial solo con dos y la musical con una. Sin embargo, desde mi punto de vista se podrían crear actividades que relacionasen cada inteligencia con las distintas competencias clave, aunque cabe destacar que se requeriría mucho tiempo y un gran esfuerzo por parte del docente.Por ejemplo, en este trabajo se expone una actividad que relaciona la inteligencia cinético-corporal con la competencia matemática, denominada “Paseo por el centro comercial”, o la inteligencia espacial con la competencia aprender a aprender en la actividad “El ascensor”.

La importancia de la relación entre competencias clave e Inteligencias Múltiples reside en la forma de avaluar que existe actualmente en la educación española. Al final del curso, los docentes deben evaluar también por competencias al alumnado. Por tanto, de esta relación, se puede conocer de qué formas trabajarlas para, posteriormente, poder evaluarlas.

En el tercer apartado del “Marco teórico” denominado “Atención a la diversidad” se expone de qué forma contribuye al desarrollo de las Inteligencias Múltiples la atención de la diversidad del alumnado.

b. APRENDIZAJE COOPERATIVO

Los seres humanos nos relacionamos día a día con los demás desde que nacemos. Gracias a esta interacción social, que se produce en primera instancia con la familia y, posteriormente, con los amigos, el individuo se desarrolla como persona. Además, está comprobado científicamente que esta interacción es imprescindible para el desarrollo integral del individuo ya que si una persona permanece aislada de la sociedad presentará déficit en el desarrollo de las habilidades y conocimientos básicos que todo ser humano adquiere en sus primeros años de vida.

Entonces, si el entorno de un alumno de Secundaria está formado por la familia, los amigos y la escuela y en estos dos primeros entornos se produce la interacción social, ¿por qué no llevar también al aula un tipo de aprendizaje que utilice la cooperación e interacción entre los alumnos? Este es el denominado aprendizaje cooperativo que, como se comentará más adelante, también potencia valores como la solidaridad y el respeto a los demás. Desde mi punto de vista esta es una de las claves de la importancia y utilidad de este tipo de aprendizaje.

Pero antes de comenzar a explicar el tipo particular de aprendizaje denominado cooperativo, debemos exponer otros tipos de aprendizaje según la forma de organizar a los alumnos (denominados estructura de la actividad). Básicamente, existen tres aprendizajes en los que se puede estructurar una clase para realizar una determinada tarea teniendo en cuenta las relaciones establecidas entre los alumnos: individualista, competitiva y cooperativa.

La estructura individualista consiste en que cada alumno trabaje de forma individual sin tener en cuenta el trabajo de los demás compañeros por lo que el logro o no de los objetivos de la tarea por parte de un alumno es independiente del logro o no de los objetivos de los demás. Además, como consecuencia de esta independencia, los alumnos pueden ayudarse entre ellos siempre y cuando el profesor lo crea conveniente. Esta es la forma más habitual que se encuentra actualmente en las aulas españolas. La disposición de la clase en mesas separadas, cada alumno en su sitio realizando las tareas de forma individual y la resolución por parte del profesor de las dudas que les surjan.

La segunda forma de estructurar la clase es la competitiva, es decir, que los alumnos “compitan” por ser los mejores o los más rápidos realizando una tarea u obteniendo las notas más altas. En este caso el logro de los objetivos de un alumno está ligado a que los demás compañeros no logren esos objetivos. Esta rivalidad propicia la ausencia de cooperación y ayuda con los demás compañeros y puede generar cambios en la autoestima, en la mayoría de los casos negativos asociados a la creencia de falta de capacidad. En este caso también se trabaja, como en el tipo anterior, de forma individual.

La última forma es la estructura cooperativa, cuya principal diferencia con las anteriores es que siempre se lleva a cabo en grupos reducidos de alumnos y que, además del aprendizaje propio, cada alumno debe ayudar a los demás en su aprendizaje. Entonces un alumno logrará sus objetivos si, y sólo si, los demás alumnos de su grupo también los consiguen. En este caso el profesor resolverá las dudas que surjan si ningún miembro del grupo puede resolverlas.

A lo largo de este apartado se definirá el concepto de aprendizaje cooperativo, basado principalmente en esta última forma de estructurar la actividad, sus características y sus ventajas. Además, en el desarrollo de las actividades propuestas se va a utilizar, principalmente, esta última estructura pero con ello no se quiere dar a entender que sea la mejor. En mi opinión si que existen numerosas ventajas al utilizar este tipo de aprendizaje pero también se deben utilizar las demás, dependiendo del objetivo de la tarea o de las competencias que el profesor quiera que los alumnos desarrollen. Por ello, no existe la manera óptima de aprender sino que existe una manera óptima en cada contexto o circunstancia. Esta idea se puede ver reflejada en uno de los *Principios pedagógicos* (el primero, el cual hace referencia a la metodología) que se expone en el artículo 8 de la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, que dice lo siguiente:

> *La metodología didáctica será fundamentalmente activa y participativa, favoreciendo el trabajo individual y cooperativo del alumnado, así como el logro de los objetivos y competencias correspondientes.*

Este principio pedagógico dice (en relación al tema que nos ocupa en este apartado) que los profesores deben promover el trabajo individual en el aula y combinarlo con el aprendizaje cooperativo cuando sea conveniente. Por tanto, se deben considerar ambos aprendizajes para que el alumno adquiera todas las habilidades y competencias necesarias para su desarrollo. Esto también nos da una idea de la importancia del aprendizaje cooperativo. El principio no dice nada de forma explícita de la estructura competitiva pero forma parte del trabajo individual, por lo que también es necesaria en determinadas actividades.

Por otra parte, en cuanto a la estructura de este apartado del aprendizaje cooperativo, se encuentra dividido en varios apartados en los que se expone la historia de este aprendizaje y sus antecedentes, las teorías en las que fundamenta, su definición, características y las diferencias con otros aprendizajes como el grupal o el colaborativo.

En el siguiente subapartado se comentarán brevemente los antecedentes del aprendizaje cooperativo, su origen y su historia hasta nuestros días.

i. Desarrollo histórico

A lo largo de la historia, el ser humano ha necesitado la ayuda de los demás para sobrevivir y aprender, a través del intercambio de conocimientos y experiencias. Por lo tanto, se podría decir que siempre ha existido una especie de aprendizaje en el que se utiliza la cooperación. Sin embargo, y siendo rigurosos, el estudio del aprendizaje cooperativo como tal y su difusión no comenzó hasta el siglo XX, más exactamente en la década de los setenta, en Estados Unidos. A continuación se explica más detalladamente.

En el siglo V a. C., el filósofo griego Sócrates (470-399 a. C.) ya enseñaba a los demás en grupos pequeños y dejaba que cada uno aportase sus ideas mediante el diálogo. Posteriormente, el filósofo romano Séneca (4 a. C.-65 d. C.) defendía la idea de que como mejor se aprende es enseñando haciendo célebre su frase en latín "qui docet discet" ("quien enseña, aprende"). Destaca también el pedagogo hispanorromano Quintiliano (35 d. C.-100 d. C.), el cual decía que cada aprendiz debe, a su vez, enseñar a sus compañeros.

Varios siglos después (siglos XVI, XVII y XVIII), comenzaron a aparecer los primeros pedagogos que hablaban sobre las ventajas de enseñar para aprender como, por ejemplo, Comenio (1592-1670).

A finales del siglo XVIII y principios del XIX, los pedagogos británicos Andrew Bell (1753-1832) y Joseph Lancaster (1778-1838) divulgaron y llevaron a la práctica la idea de los grupos cooperativos en Inglaterra. En primer lugar, Bell publicó en 1797, tras su viaje a la India, la obra *Experimento sobre la educación realizada en el asilo de Madrás* donde exponía el sistema de enseñanza llevado a cabo en ese país. Este consistía en que los alumnos más aventajados ayudaban a los demás a alcanzar un mayor nivel de conocimientos. Tras esto, Lancaster generalizó esa idea, exponiéndola en sus obras *Mejora del sistema educativo* en 1805 y *El sistema educativo británico* en 1810, y se popularizó aplicándose en varias escuelas primarias.

Estas ideas se trasladaron a Estados Unidos gracias a Francis Parker (1837-1902) y John Dewey (1859-1952), que implantaron ese método en sus proyectos pedagógicos. Este último revolucionó la educación con la idea de una "escuela activa", basada en la cooperación frente al individualismo y la competitividad y apoyando la máxima de "learning by doing" ("aprender haciendo").

A lo largo del siglo XX y hasta la década de los setenta, siguiendo la creencia de terminar con el individualismo y la competitividad en la escuela, se empieza a difundir la idea de introducir la cooperación en el aula. Al principio solo por Estados Unidos, en gran parte gracias al pedagogo William Heart Kilpatrick y otros como Julius Maller, Morton Deutsch y Stuart Cook, y posteriormente por el resto del mundo, donde destacan el alemán Peter Petersen y los franceses M. Profit, Roger Cousinet y Celestin Freinet (fundador de la Escuela Moderna). Este último crea un claro antecedente del aprendizaje cooperativo, el método de trabajo libre por grupos, que promueve la colaboración entre alumnos frente a la rivalidad.

En cuanto al aporte al estudio de los grupos, destacan las investigaciones de Carl Rogers (1902-1987) y Kurt Lewin (1890-1947), el cual no entendía el trabajo en grupo sin la cooperación y la ayuda.

Sin embargo, aunque algunos autores siguen promoviendo estas ideas, a finales de los años treinta se produce un periodo de predominancia de las técnicas competitivas e individualistas en el aula. La razón fue la influencia de los modelos competitivos adoptados en el mundo de los negocios debido a la crisis económica del momento (la Gran Depresión de 1929).

Por otra parte, aunque ya aparecían ideas sobre el trabajo en equipo y la cooperación, no existía el aprendizaje cooperativo tal y como está definido en la actualidad, ya que este tiene unas características concretas que se detallarán en los próximos subapartados. Este tipo de aprendizaje apareció por primera vez en la década de los setenta. Concretamente, las primeras investigaciones en este campo se produjeron en California (Estados Unidos), siendo el punto de partida la idea de interacción social y cooperación de Dewey y Lewin.

En primer lugar, cabe destacar el gran trabajo llevado a cabo por los hermanos David. W. Johnson (1940-) y Roger T. Johnson (1927-2015), los cuales han efectuado numerosas investigaciones sobre el aprendizaje cooperativo en el “Cooperative Learning Center” de la Universidad de Minnesota. La característica más importante que distingue al aprendizaje cooperativo de otros trabajos en equipo es la interdependencia positiva, que explicaremos con detalle en siguientes subapartados, la cual surge a partir de la extensión de la teoría de la interdependencia social de M. Deutsch. Además, los hermanos Johnson han iniciado a miles de profesores en este tipo de aprendizaje, creando una red internacional de escuelas interesadas en esta práctica.

Otros investigadores estadounidenses se han dedicado a crear métodos para implementar el aprendizaje cooperativo en el aula. Destacan David de Vries y Keith Edwards, con su técnica Teams-Games-Tournaments (TGT); y Robert Slavin, que amplió el método anterior creando uno nuevo denominado Student Teams-Achievement Divisions (STAD) y una variante en la enseñanza asistida por ordenador denominada Team-Assisted Instruction (TAI). Este último destaca por la gran cantidad de libros que ha publicado sobre el aprendizaje cooperativo. También destacan Spencer Kagan con su método “Co-op Co-op” y Elliot Aronson con la técnica “Jigsaw”. Sin embargo, fuera de Estados

Unidos las investigaciones y trabajos sobre estos temas son notablemente más escasos. En los siguientes subapartados se enunciarán las principales técnicas, cuya descripción se incluirá en el Anexo II.

Finalmente, desde los años setenta hasta la actualidad se han escrito numerosos libros sobre este tema por todo el mundo por lo que la bibliografía existente es inmensa. También se han realizado numerosos estudios sobre la eficacia del aprendizaje cooperativo en el aula. La mayoría concluyen que los alumnos que llevan a cabo este tipo de aprendizaje obtienen mejores resultados académicos que con los otros dos aprendizajes: competitivo e individual. Sin embargo, lo óptimo sería utilizar uno u otro dependiendo del objetivo de la tarea.

Por otra parte, en el siguiente apartado, se enunciarán brevemente los estudios o teorías en los que se fundamenta el aprendizaje cooperativo.

ii. Teorías en las que se fundamenta el aprendizaje cooperativo

Aunque las ideas de cooperación en el aula son antiguas, el concepto de aprendizaje cooperativo es relativamente reciente. Por ello, principalmente se fundamenta en teorías psicológicas y pedagógicas e investigaciones del siglo XX. Algunas de estas teorías son las siguientes:

Teoría conductista del aprendizaje

Esta teoría estudia la conducta observable del ser humano que, por muy compleja que sea, siempre se puede reducir a una serie de asociaciones entre elementos simples, que se van obteniendo a lo largo de su vida. Los tipos de aprendizaje que forman parte de esta teoría son: el condicionamiento clásico de Pavlov, el más básico de todos que aparece al poco de nacer; el condicionamiento operante de Skinner, que, además, añade conductas voluntarias y la capacidad de diferenciar refuerzos o recompensas; y el aprendizaje observacional o vicario de Bandura, que consiste en aprender a través de la observación de las conductas de los demás.

El aprendizaje cooperativo está parcialmente basado en esta teoría ya que se premia el esfuerzo grupal. Si un alumno trabaja, aprende y ayuda a sus compañeros a que también lo hagan, el grupo y, en particular, su conducta será recompensada con éxito escolar (refuerzo positivo). En caso contrario el refuerzo será negativo. Además, el alumno también puede fortalecer o debilitar una conducta propia o conocer si debe o no reproducir una conducta de sus compañeros a través de refuerzos verbales positivos o negativos efectuados por el profesor durante el desarrollo de la clase. Por eso es importante este tipo de aprendizaje ya que promueve el desarrollo de valores como la solidaridad, el compañerismo y el respeto de las diferencias.

Teoría cognitiva del aprendizaje

Este tipo de teorías se basan en el interés por procesamiento de la información entre estímulo y respuesta. Algunas teorías son: la teoría genética del aprendizaje de Piaget, que consiste en relacionar e integrar los nuevos conocimientos en los esquemas de pensamiento existentes y modificarlos para adaptarse al medio; el aprendizaje por descubrimiento de Bruner, basado en el aprendizaje en situaciones que desafíen la inteligencia en la que se perciban relaciones y similitudes entre los contenidos a aprender; y el aprendizaje significativo de Ausubel, que se basa en el aprendizaje de contenidos con estructura lógica y adecuados al nivel de desarrollo y conocimientos previos de la persona que aprende.

En cuanto a la relación con el aprendizaje cooperativo, es evidente que “la producción colectiva es superior a la suma de las capacidades individuales (sinergia)” (Iglesias, González y Fernández-Río, 2017, p.41). Con esto se quiere decir que al trabajar con el método del aprendizaje cooperativo, los alumnos que forman un grupo deben interactuar intercambiando opiniones sobre la tarea que se está realizando, lo que provoca conflictos en sus esquemas de pensamiento y la posterior reestructuración de los mismos (y, por tanto, del aprendizaje). De esta forma y si los contenidos de la tarea están organizados de una manera lógica (adecuados al nivel y conocimiento previo del alumnado), el alumno podrá asociar conceptos e integrar la nueva información efectuando un aprendizaje significativo.

Teoría contextual del aprendizaje

Se basa en la idea de estudiar al sujeto en sí mismo y en relación a su contexto, y combina ideas de los dos grupos de teorías anteriores. Destaca la teoría sociocultural de Vygotski, que afirma que el aprendizaje solo puede darse si existe una interacción con las personas del entorno y una cooperación con personas que tengan distintos niveles de conocimiento (grupo heterogéneo), pero una diferencia moderada.

En este caso, es obvia la conexión que existe entre esta teoría y el aprendizaje cooperativo. Este tipo de aprendizaje se realiza en grupos reducidos y heterogéneos en los que sus integrantes (los alumnos) cooperan entre ellos ayudando a la interiorización de los conocimientos. El profesorado también puede contribuir a esto.

Psicología humanista de Rogers

Según esta teoría, el proceso educativo debe centrarse principalmente en el alumno ya que la calidad del aprendizaje también depende de aspectos afectivos como la autoestima, el autoconcepto o la motivación y la percepción que una persona tiene del mundo es subjetiva y única (cada persona es diferente).

Con el aprendizaje cooperativo se contribuye a un clima agradable en el aula en el que la diversidad se conciba como un elemento enriquecedor y no como una amenaza, todos los alumnos puedan conocer sus puntos fuertes y débiles y también puedan expresar sus ideas y desarrollar sus habilidades.

Teoría de la interdependencia social de Johnson y Johnson

Los hermanos Johnson de los que se habló anteriormente, postularon que el tipo de interdependencia social existente en un grupo determina los resultados del aprendizaje. Hay tres tipos de interdependencia social: positiva (basada en una estructura de la actividad cooperativa), negativa (basada en una estructura competitiva) y ausente (basada en una estructura individualista).

En el aprendizaje cooperativo, como se detallará más adelante, está garantizada la interdependencia positiva ya que los alumnos deben cooperar entre ellos y están ligados de forma que un alumno tiene éxito si los demás también.

Teoría de la profecía autocumplida (efecto Pigmalión) de Rosenthal

Esta teoría afirma que las expectativas que el profesorado sobre el rendimiento de un alumno afecta de manera significativa a su rendimiento efectivo y, por tanto, a su aprendizaje.

En este caso, al igual que en la Psicología humanista de Rogers, la conexión con el aprendizaje cooperativo reside en el clima seguro que se crea en el aula, fomentando la aceptación de las diferencias y la diversidad, y minimizando las amenazas derivadas del autoconcepto y la falta de autoestima.

Inteligencias Múltiples de Gardner

Esta teoría fue propuesta por Howard Gardner y su descripción aparece en el apartado anterior. En cuanto a su relación con el aprendizaje cooperativo, esta reside en la seguridad que posee un alumno al encontrarse integrado en un grupo en el que puede poner en práctica sus habilidades personales (y desarrollar las Inteligencias Múltiples). También en la variedad de experiencias que se pueden realizar en este aprendizaje que implican la utilización de distintas inteligencias.

En conclusión, a partir de estas teorías se creó el concepto de aprendizaje cooperativo que, como se ha podido observar, abarca una gran cantidad de teorías. Como consecuencia, el aprendizaje cooperativo es un método bastante completo e interesante desde el punto de vista pedagógico. En el siguiente subapartado se exponen varias definiciones dadas por diferentes autores y las características principales de este tipo de aprendizaje.

iii. Definición de aprendizaje cooperativo y elementos básicos

Para comenzar este subapartado se van a exponer algunas de las definiciones de aprendizaje cooperativo que han dado distintos autores.

> "El aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás" (Johnson, Johnson y Holubec, 1999, p.5).

> Es una forma de estructurar la actividad dentro de una clase, que condiciona y determina los distintos recursos didácticos que podemos utilizar en ella. Se trata de una estructura *fundamental* que, una vez establecida, se utiliza habitualmente, no sólo ocasionalmente, y condiciona todo el proceso de enseñanza y aprendizaje que se lleva a cabo en ella. (Pujolàs, 2008, p.120)

> "Consiste en la utilización educativa de grupos pequeños para que los estudiantes trabajen juntos con el objetivo de mejorar su propio aprendizaje y el de los demás" (Johnson y Johnson, 2017, p.10).

> "Modelo pedagógico en el que los estudiantes aprenden con, de y por otros estudiantes, a través de un planteamiento de enseñanza-aprendizaje que facilita y potencia esta interacción e interdependencia positivas y en que el docente y estudiantes actúan como aprendices" (Iglesias, González y Fernández-Río, 2017, p.31).

A continuación, se expone una definición de grupo de aprendizaje que, en mi opinión, se podría decir que es la más completa.

> Los grupos de aprendizaje cooperativo son grupos heterogéneos en los que hay un liderazgo compartido y mucha interdependencia positiva que no elimina una alta responsabilidad individual. Su objetivo es que cada uno rinda lo máximo posible, según sus capacidades y situación, y que aprendan las habilidades sociales que faciliten la cooperación y la ayuda mutua dentro y fuera de la escuela. (Ovejero, 2018, p.63)

Por otra parte, para que quede completamente determinado y claro si el método que el docente está utilizando en el aula es cooperativo o no, además de las definiciones anteriores, se van a enumerar algunas de sus características principales. En concreto, los elementos básicos que debe tener un aprendizaje para poder denominarse cooperativo:

- **Interdependencia positiva**

  Los alumnos deben tener claro que están unidos a los demás compañeros del grupo en tanto que solo puede tener éxito si los demás compañeros también lo tienen, por lo que los esfuerzos individuales contribuyen al beneficio del grupo. Para ello, la tarea a realizar y los objetivos del grupo deben ser claros. Según Johnson, Johnson y Holubec (1999), "Sin interdependencia positiva, no hay cooperación" (p.9). Esta frase pone en evidencia la importancia de este elemento en el aprendizaje cooperativo.

- **Responsabilidad individual y grupal**

  Cada integrante del grupo debe ser responsable de su trabajo individual ya que su éxito está ligado al éxito de su grupo en la resolución de la tarea correspondiente. Por la misma razón, debe ser responsable de su grupo y ayudar a los demás integrantes si es necesario.

- **Interacción cara a cara estimuladora**

  Los grupos de aprendizaje cooperativo se utilizan para que los alumnos cooperen y se ayuden entre ellos en el terreno académico pero también en el terreno personal. Es decir, que al promover el éxito de los demás mediante la ayuda que se produce con la interacción social, los alumnos establecen compromisos entre ellos.

- **Aprendizaje de técnicas interpersonales y de equipo**

  Con el objetivo de que los grupos de aprendizaje funcionen como tal (organizados, cohesionados, sin conflictos, etc.), el alumnado debe conocer prácticas interpersonales y grupales como la toma de decisiones, la correcta comunicación con sus compañeros, la resolución de conflictos, etc.

- **Evaluación grupal**

  Los integrantes del grupo deben ser conscientes del trabajo realizado, analizando su trabajo individual y grupal, sus conductas, si de esa manera están siguiendo el camino correcto para lograr los objetivos propuestos y, con esta información, mantener o modificar las conductas inadecuadas. De esta manera, se contribuirá al aumento de la eficacia del grupo.

En el libro "*9 ideas clave. El aprendizaje cooperativo*" de Pere Pujolàs (2008) se exponen algunas ideas que fundamentan el aprendizaje cooperativo:

> "Las escuelas y las aulas inclusivas son imprescindibles para configurar una sociedad sin inclusiones"
>
> "Hay que saber gestionar la heterogeneidad de un grupo clase, en lugar de ignorarla o reducirla"
>
> "Introducir el aprendizaje cooperativo equivale a cambiar la estructura de aprendizaje de un aula"
>
> "La cohesión del grupo es una condición necesaria, pero no suficiente, para trabajar en equipos cooperativos dentro de la clase"
>
> "Las estructuras cooperativas aseguran la interacción entre los estudiantes de un equipo".
>
> "El aprendizaje cooperativo es también un contenido que hay que enseñar".
>
> "El aprendizaje cooperativo facilita y potencia el desarrollo de algunas competencias básicas".

> “El grado de cooperatividad de un equipo depende del tiempo que trabajan juntos y de la calidad del trabajo en equipo”.
>
> “El aprendizaje cooperativo es una forma de educar para el diálogo, la convivencia y la solidaridad”.

Reflexión

En resumen, el aprendizaje cooperativo es la estructuración de la clase en grupos heterogéneos donde los alumnos pueden realizar las tareas de forma individual o en grupo pero siendo responsables de su trabajo y del de sus compañeros ya que tienen el deber de ayudar a los integrantes de su grupo o pedirles ayuda si es necesario. De esta forma, además de aprender los contenidos, aprenden a trabajar en equipo, a relacionarse con los demás, a escuchar y valores como el respeto o la solidaridad y se desarrolla, por tanto, la inteligencia interpersonal.Esta forma de trabajo en el aula también permite el desarrollo de otras inteligencias como la intrapersonal porque, gracias a la ayuda de sus compañeros, el alumno poco a poco aprenderá a tener más autonomía en su trabajo, conocerse mejor y conocer distintas formas de aprender como consecuencia de pertenecer a un grupo heterogéneo y, en definitiva, aprender a aprender.

Además, parece evidente que para llevar este método correctamente a la práctica, el docente debe conocerlo muy bien y planificarlo con antelación para, por ejemplo, conocer qué alumnos pueden trabajar juntos y cuáles no (con el objetivo de evitar conflictos).

iv. Comparativa de formas de trabajo en el aula

Existen otros dos aprendizajes, el grupal tradicional y el colaborativo, que a menudo se confunden con el aprendizaje cooperativo (aunque cabe destacar que algunos autores afirman que el aprendizaje cooperativo y el colaborativo son el mismo). En la siguiente tabla se exponen las principales diferencias y similitudes.

Tabla 3. Tabla comparativa del aprendizaje cooperativo, el grupal tradicional y el colaborativo.

	COOPERATIVO	**GRUPAL TRADICIONAL**	**COLABORATIVO**
Objetivo	Completar la tarea y que cada alumno alcance el máximo aprendizaje	Completar la tarea	Completar la tarea
Papel del profesor	Intervención directa y supervisión	Evaluar	Intervención directa y supervisión
Formación de grupos	Heterogéneos	Homogéneos	Homogéneos
Estructura interna del grupo	Sí	No	No

Responsabilidad	Individual y grupal	Grupal	Grupal
Liderazgo	Compartido	Una sola persona	Compartido
Interdependencia positiva	Sí	No	No
Interacción	Alta	Baja	Alta
Habilidades sociales	Se enseñan	No se requieren	Se dan por aprendidas
Evaluación	Proceso y producto	Producto	Proceso y producto
Alumnos a los que suele ir dirigido (principalmente)	Primaria y Secundaria	Cualquiera	Universidad

<u>Reflexión</u>

Desde mi punto de vista, el aprendizaje en grupos tradicionales no es de mucha utilidad ya que un trabajo en grupo en el que las personas no interactúen entre ellas ni se tengan en cuenta distintos puntos de vista antes de la obtención del producto final,no contribuye de forma efectiva a la educación integral del alumno. En eltrabajo en grupo tradicional, cada alumno aporta una parte del trabajo que, finalmente, se anexa a las demás partes de los otros componentes del grupo, sin que ningún alumno se preocupe por conocer como es la estructura del texto de los demás. Como consecuencia, en el producto final son fácilmente reconocibles las distintas partes del texto.

Por otra parte, entre el aprendizaje cooperativo y el colaborativo, no me atrevería a decir que uno u otro fuera mejor, ya que uno no excluye al otro sino que se complementan.

En mi opinión, ambos tienen bastantes similitudes. Sin embargo, para su uso en el aula de Secundaria, me parece que el aprendizaje cooperativo presenta másventajas. Sobre todo, destaco la interdependencia positiva. Esta característica hace que los alumnos estén totalmente implicados en su aprendizaje y en el aprendizaje de los demás. Por tanto, además de tener como objetivo la realización de la tarea, tienen que procurar que todos los integrantes del grupo adquieran el mayor aprendizaje posible, siempre dentro de las capacidades de cada uno.

Sin embargo, también se pueden nombrar algunos inconvenientes que se pueden presentar en estos aprendizajes como la gestión de espacios en el aula y el tiempo disponible o la falta de cooperación de los alumnos.

En conclusión, estos tipos de aprendizaje solo funcionan de forma correcta cuando el entorno es adecuado. Además, no es conveniente utilizar un método u otro exclusivamente, sino que lo mejor es el uso de distintas técnicas para que el alumnado tenga un aprendizaje más completo. De este modo, se logra una mayor formación del alumnado y una mayor posibilidad de atender a la diversidad que el profesor encuentra en el aula.

v. Técnicas del aprendizaje cooperativo

Las técnicas para implementar el aprendizaje cooperativo en el aula son muy variadas y se dividen, principalmente, en dos grupos: simples y complejas.

Las estructuras de aprendizaje simples (como su propio nombre indica) se pueden aplicar en el aula de forma fácil y son de corta duración. Se suelen utilizar al principio de curso con el objetivo de introducir el aprendizaje cooperativo en el aula de forma gradual. Algunas de las técnicas simples más conocidas son folio giratorio, lectura compartida, parada tres minutos, construir un problema, técnica del 1-2-4, lápices al centro, números iguales juntos, juego de palabras y mapa conceptual a cuatro bandas.

Por otra parte, las estructuras de aprendizaje complejas necesitan de más tiempo para su preparación e implementación en el aula. Se deben introducir en el aula paulatinamente cuando se haya conseguido un clima positivo en el aula y los grupos formados estén cohesionados. Algunas son técnica Jigsaw (o técnica del puzle o rompecabezas), Co-op Co-op, Trabajo en Equipo-Logro Individual (TELI), Torneos de Juegos por Equipos (TJE) (Teams-Games Tournaments, TGT), Técnica Investigación Grupal y Tutoría entre Iguales (Peer Tutoring). Otra técnica que será principal en el desarrollo del trabajo es la denominada “Grupos base y grupos de trabajo”.

En el apartado de “Metodología en el aula” se explicarán las técnicas que se van a utilizar en las actividades propuestas y en el Anexo II se incluirá una breve descripción de las principales técnicas para trabajar el aprendizaje cooperativo.

Además, debido a la importancia del aprendizaje de las matemáticas y teniendo en cuenta que es una de las asignaturas en la que el alumnado presenta más dificultades, cada profesor debe implantar una técnica específica que esté ajustada a su contexto educativo particular. Por ello, tal y como están definidas, puede ser que no sean útiles en un caso particular y deban realizarse pequeñas variaciones, siempre y cuando no se modifiquen los elementos básicos que caracterizan al aprendizaje cooperativo.

En el caso de este trabajo, no se ha diseñado para un alumnado concreto por lo que se van a utilizar distintas técnicas que se ajusten a los contenidos matemáticos, el desarrollo de las Inteligencias Múltiples y la atención a la diversidad. En el apartado de “Metodología en el aula” se explicará cuáles de estas técnicas se han utilizado en el desarrollo de las actividades de la propuesta didáctica, describiéndolas detalladamente.

En cuanto al tamaño de los grupos cooperativos y su duración, lo mejor es que sean reducidos, formados por 3, 4 o 5 alumnos, y que se mantengan con los mismos compañeros un tiempo considerable hasta que el grupo esté cohesionado.

Por último, en el siguiente apartado del “Marco teórico”, denominado “Atención a la diversidad”, se expone la relación que existe entre el aprendizaje cooperativo y la atención a la diversidad, es decir, de qué manera contribuye este método al aprendizaje de los diferentes alumnos, cada uno con un ritmo de aprendizaje diferente. También se expone en qué medida contribuyen las Inteligencias Múltiples a la atención a la diversidad.

c. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

La mayoría del profesorado de Secundaria desearía tener un alumnado lo más homogéneo posible, olvidando así las preocupaciones de tener que adaptar las clases a distintos ritmos de aprendizaje o características del alumnado. Sin embargo, hay que dar la vuelta a este pensamiento y convencernos de que el mayor aprendizaje se realiza en un clima de diversidad, de diferencias en todos los ámbitos posibles del ser humano (académicos: ritmos de aprendizaje,...; personales: formas de vida, creencias,…; sociales: formas de interactuar con los demás…;etc.), ya que si todos los alumnos son iguales, ¿qué pueden aprender entre ellos? De igual forma todo esto se podría aplicar a la vida fuera del aula. Si el centro escolar divide a los alumnos en grupos homogéneos, estos llevarán ese pensamiento a su vida diaria fuera del aula promoviendo, de este modo, valores discriminatorios y de rechazo a las diferencias.

Por otra parte, el segundo principio pedagógico que aparece en el artículo 8 de la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León, denominado *Principios pedagógicos*, dice lo siguiente:

> *Los centros docentes elaborarán sus propuestas didácticas desde la consideración de la atención a la diversidad y del acceso de todo el alumnado a la educación común. Asimismo, arbitrarán métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el trabajo en equipo.*

Entonces, teniendo claro que es imposible y contraproducente conseguir un alumnado homogéneo, es deber de los centros escolares y, por tanto, del profesorado, atender a la diversidad y promover a la vez el trabajo en grupo y el autoaprendizaje. Por ello, uno de los objetivos es crear unas actividades y un clima de aula adecuado para atender a la diversidad del alumnado.

Pero para poder llevarlo a cabo, primero se tiene que conocer y dominar el concepto de atención a la diversidad.

i. Definición

A continuación, se exponen diferentes definiciones de distintos autores.

> La integración y la atención a la diversidad en el ámbito educativo consiste en la adaptación de la organización del aula y del centro a las condiciones que presenta el alumno. Pero la escuela no debe entender esta medida como algo excepcional, sino como algo necesario para el desarrollo educativo normal del alumno. (Silva, 2003, p.1)
>
> Debido a la experiencia sabemos que en el aula hay una gran diversidad de comportamientos, intereses, actitudes y aptitudes de los alumnos. A esto precisamente es a lo que nos referimos cuando hablamos de diversidad de alumnos, es decir, a sus múltiples y variados comportamientos, capacidades de aprendizaje, capacidades para prestar atención, gustos, habilidades, destrezas, tipos de inteligencias, inteligencia emocional, actitudes y aptitudes. (Calvo, 2018, p.12-13)

Por otra parte, García (2018) afirma:

> El concepto de Educación en la Atención a la Diversidad debe contemplar aspectos psicopedagógicos y socioepistemologicos, así como los distintos tipos de inteligencias múltiples, la inteligencia emocional y todas las diferencias entre cada uno de los alumnos que integran la unidad docente. (p.41)

Además, es necesario que el centro escolar cuente con especialistas para que la atención a la diversidad del alumnado se realice de forma correcta. Como Silva (2003) afirma:

> ...es conveniente que el centro educativo cuente con maestros especialistas en pedagogía terapéutica, educación especial o de audición y lenguaje. Es importante, además, formar un equipo de orientación educativa y psicopedagógica para realizar las evaluaciones psicopedagógicas del niño y llevar a cabo una atención temprana. (p.6)

En el caso de este trabajo, se va a atender a la diversidad del alumnado en cuanto a su ritmo de trabajo y rendimiento académico.

Por último, y haciendo referencia de nuevo a la ORDEN EDU/362/2015, en particular a su artículo 23, se puede observar la importancia de la atención a la diversidad y cuál es su objetivo en el ámbito educativo:

> *La atención a la diversidad tiene por finalidad garantizar la mejor respuesta educativa a las necesidades y diferencias, ofreciendo oportunidades reales de aprendizaje a todo el alumnado en contextos educativos ordinarios, dentro de un entorno inclusivo, a través de actuaciones y medidas educativas.*

Por otra parte, se van a exponer brevemente las relaciones que tiene cada uno de los apartados anteriores del marco teórico con la atención a la diversidad, es decir, como se contribuye a esto con el desarrollo de las Inteligencias Múltiples y el aprendizaje cooperativo.

ii. Contribución de las Inteligencias Múltiples a la atención a la diversidad

Cada individuo, como se ha dicho, tiene diversas inteligencias unas más potenciadas que otras. En todo caso, una educación integral implica atender al desarrollo de las diversas inteligencias dando así la posibilidad del máximo desarrollo de los individuos, no sólo en el ámbito más académico, sino también en el desarrollo de otras capacidades sociales, corporales y de relación con el entorno, entre otras. De esta forma se da respuesta a la particularidad de los alumnos en cuanto a potencialidades, intereses, capacidades, etc.

iii. Contribución del aprendizaje cooperativo a la atención a la diversidad

El aprendizaje cooperativo permite que los alumnos se hagan protagonistas de su enseñanza e incluso de la de sus compañeros, completando con las intervenciones del profesor. Esto permite que un alumno escuche la transmisión de un contenido de muy diversas formas atendiendo, por tanto, a la diversidad de la capacidad perceptiva de los individuos. Además,en el aprendizaje cooperativo se hacen grupos en el que todos los integrantes deben aprender lo máximo posible y sus compañeros de grupo también son responsables de eso. De esta forma, los alumnos también atienden a la diversidad de su grupo (recordamos que los grupos cooperativos son heterogéneos), ayudándoles en su aprendizaje y adquiriendo valores como la solidaridad o el respeto por las diferencias.

2. MARCO LEGISLATIVO: OBJETIVOS Y CONTENIDOS

En este apartado, se va a comentar la legislación en la que se enmarca este trabajo.
El marco legislativo básico es la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE). Esta incluye el articulado vigente de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) y las respectivas modificaciones.

Por otra parte, a lo largo de este trabajo se van a mencionar los distintos elementos del currículo tratando, en particular, el tema de los números enteros y divisibilidad de la asignatura de Matemáticas de 2º ESO. Por ello, es necesario atender al currículo básico vigente de la Educación Secundaria Obligatoria establecido a nivel estatal, en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, y a nivel autonómico, en la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo.

A continuación, se definen los objetivos que deben lograr alcanzar los alumnos durante su permanencia en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria y, en particular, en la asignatura de Matemáticas y en el curso y tema concretos tratados en este trabajo. También se enumeran los contenidos, referentes al tema que nos compete, recogidos en la legislación citada anteriormente como los mínimos para ser impartidos en el segundo curso de Secundaria en Matemáticas en los centros escolares. Además, se hará una reflexión sobre cómo estos objetivos y contenidos contribuyen al desarrollo de las Inteligencias Múltiples (IM) y/o se atiende a la diversidad del alumnado a través de ellos.

i. Objetivos generales de etapa

La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), y en particular el artículo 23 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) (ya que este artículo no ha sido modificado), junto al artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, establece los objetivos que debe alcanzar el alumnado en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). A continuación, se citará lo que expresa el artículo mostrando su relación con las Inteligencias Múltiples (según Gardner(1983), son ocho: lingüística, lógico-matemática, espacial, musical, cinético-corporal, intrapersonal, interpersonal y naturalista).

El artículo comienza de la siguiente forma:

La educación secundaria obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, *ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.*

Esta capacidad está relacionada con la inteligencia intrapersonal, en tanto que cada individuo debe conocerse a sí mismo y sus propios derechos y deberes para vivir dignamente en sociedad, y con la inteligencia interpersonal, ya que todos los alumnos deben promover valores sociales como el respeto y la solidaridad con sus compañeros y, en general, con su entorno.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

En este objetivo entra en juego el desarrollo de las mismas inteligencias que en el anterior junto a la inteligencia lingüística.
Por una parte la inteligencia intrapersonal, ya que el alumno debe desarrollar hábitos de estudio y trabajo. Esto se consigue conociéndose a sí mismo, valorando las diferentes estrategias de aprendizaje y aprendiendo a elegir la que mejor se adapte al contexto. El alumno debe aprender a aprender.
Por otra parte se tiene la inteligencia interpersonal junto a la lingüística, ya que el alumno debe aprender a trabajar con los demás compañeros, a escuchar a los demás y a expresar su opinión de forma adecuada.

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.

Para lograr el desarrollo de este objetivo, es necesario que el alumno se relacione con los demás y comprenda, acepte y respete las diferencias que existan entre ellos. Esto implica el desarrollo de la inteligencia interpersonal.

d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

Este objetivo supone que el alumno se conozca a sí mismo para poder ir creando su forma de ser, su personalidad, lo que requiere un desarrollo de la inteligencia intrapersonal. De la misma forma, se requiere de la inteligencia interpersonal para conocer a los demás y desarrollar la capacidad afectiva. Por último, es necesario el desarrollo de la inteligencia lingüística para relacionarse con los demás y aprender a resolver conflictos a través del diálogo.

e) *Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.*

El desarrollo de las inteligencias intrapersonal y lingüística favorecerá el logro de este objetivo ya que, por una parte, es necesario que el alumno aprenda a consolidar una actitud crítica ante diversas informaciones y, por otra, que domine el lenguaje para poder actuar de emisor y receptor en la comunicación.

f) *Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.*

Para alcanzar este objetivo se necesita desarrollar, principalmente, la inteligencia lógico-matemática. El alumno debe conocer y manejar distintos métodos y saber elegir el más adecuado al enfrentarse a un determinado problema.

g) *Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.*

El desarrollo de la inteligencia intrapersonal contribuirá al logro de este objetivo. Como ya se ha comentado anteriormente, el alumno debe conocerse a sí mismo, aprender a aprender, desarrollar el sentido crítico y tomar decisiones adecuadas al contexto.

h) *Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.*
i) *Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.*

Para estos dos objetivos, es necesario el desarrollo de la inteligencia lingüística. El alumno debe aprender a expresarse correctamente de forma oral y escrita en la lengua castellana y en una o más lenguas extranjeras.

j) *Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.*

El alumno, para conocer, valorar y respetar la cultura de los demás, debe relacionarse con ellos, lo que promoverá un desarrollo de la inteligencia interpersonal. Además, también es necesario que conozca y respete el patrimonio artístico y cultural, lo que promoverá un desarrollo de las inteligencias espacial, naturalista y musical.

k) *Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.*

Como ya se ha comentado anteriormente, conocerse a sí mismo y conocer a los demás está conectado con las inteligencias intrapersonal e interpersonal, respectivamente. Además, si el alumno aprende a conocer su propio cuerpo y practica hábitos saludables como el deporte, se desarrollará la inteligencia cinético-corporal. Por último, el cuidado del medio ambiente y de los seres vivos está claramente relacionado con la inteligencia naturalista.

l) *Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.*

El logro de este objetivo está unido al desarrollo de las inteligencias espacial, musical y lingüística, para poder apreciar las distintas formas de manifestar el arte, y las inteligencias musical y cinético-corporal, utilizados como medios de expresión.

A continuación, se expone en una tabla la relación comentada entre los objetivos generales de etapa y las Inteligencias Múltiples (denominadas por su inicial de la siguientes forma: lingüística (L), lógico-matemática (L-m), espacial (E), musical (M), cinético-corporal (C-c), intrapersonal (Intra), interpersonal (Inter) y naturalista (N)).

Tabla 4. Relación entre objetivos generales de etapa e Inteligencias Múltiples.

	L	L-m	E	M	C-c	Intra	Inter	N
Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.						×	×	
Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.	×					×	×	
Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.							×	
Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.	×					×	×	
Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.	×					×		
Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.		×						
Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.						×		
Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.	×							
Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.	×							
Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.			×	×			×	×
Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.					×	×	×	×
Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.	×		×	×	×			

A partir de la tabla, se puede concluir que las Inteligencias Múltiples que más predominan directamente en estos objetivos son la lingüística, la intrapersonal y la interpersonal, apareciendo cada una de ellas en la mitad de los objetivos citados. En cambio, la Inteligencia menos predominante es la lógico-matemática, que solo aparece en uno de ellos. Sin embargo, aunque de forma explícita en estos objetivos sea así, las matemáticas y el lenguaje matemático están presentes en la vida cotidiana luego también están presentes de forma implícita en la consecución de cada uno de los objetivos anteriores.

ii. Objetivos didácticos de la asignatura de Matemáticas de 2º ESO

La Comunidad de Castilla y León establece en la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, que la enseñanza de las Matemáticas en la etapa de secundaria tendrá como objetivo el desarrollo de ciertas capacidades que enumeraremos más adelante. En realidad, el BOCyL no los enumera como objetivos sino como criterios de evaluación del Bloque Contenidos comunes pero si atendemos a los significados de "criterio de evaluación" y "objetivo" se puede observar que ambas definiciones están íntimamente relacionadas. Entre otras cosas, los criterios de evaluación miden el grado del logro de los objetivos. Entonces se tomarán como objetivos didácticos del segundo curso de la E.S.O. de Matemáticas los siguientes, extraídos de la Orden citada anteriormente:

1. *Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.*
2. *Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.*
3. *Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.*
4. *Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.*
5. *Elaborar y presentar informes, de manera clara y ordenada, sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.*
6. *Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.*
7. *Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.*
8. *Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.*

9. *Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.*
10. *Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ellos para situaciones similares futuras.*
11. *Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.*
12. *Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.*

En este caso, no se han comentado las Inteligencias Múltiples de cada objetivo porque en algunos casos depende, por ejemplo, del problema propuesto para su resolución. Obviamente, al ser objetivos didácticos de la asignatura de Matemáticas, principalmente se desarrolla la Inteligencia lógico-matemática. Sin embargo, también aparecen las demás Inteligencias. Se puede citar el desarrollo de la inteligencia lingüística al expresar oralmente o por escrito la resolución de un problema o la intrapersonal al enfrentarse a los bloqueos o inseguridades al resolver problemas. También, dependiendo del problema planteado se pueden desarrollar las inteligencias espacial, musical, cinético-corporal y naturalista, o la interpersonal si estos problemas se resuelven en grupos.

Por otra parte y más concretamente, el BOCyL citado anteriormente establece que la enseñanza de los contenidos referentes a números enteros y divisibilidad en la asignatura de Matemáticas de 2º E.S.O. tendrá como objetivo el desarrollo de las siguientes capacidades (extraídas del Bloque Números y Álgebra del curso y asignatura respectivos):

1. *Utilizar y aplicar de manera práctica números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.*
2. *Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números. Aplicación de estos conceptos en situaciones de la vida real.*

3. *Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental. Reconocer los paréntesis como elementos que permiten modificar el orden de ejecución de las operaciones.*
4. *Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.*

En el caso del presente trabajo, solo se trabaja el desarrollo de una parte de estos objetivos ya que los contenidos de fracciones, decimales y porcentajes no forman parte del mismo.

En cuanto a las Inteligencias Múltiples desarrolladas, aparece la lógico-matemática. De forma explícita no aparece ninguna más pero, como ya se ha comentado en los objetivos didácticos del segundo curso de E.S.O., se podrían desarrollar dependiendo de la temática del problema propuesto de la vida real y la forma de resolver el problema en clase, por ejemplo a través del aprendizaje cooperativo, siendo ambos objetivos de este trabajo.

iii. Contenidos referentes a números enteros y divisibilidad de la asignatura de Matemáticas de 2º E.S.O.

Los siguientes contenidos se han extraído de la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo. Concretamente, constituyen los contenidos referentes a números enteros y divisibilidad que aparecen en el Bloque de Números y Álgebra de la asignatura de Matemáticas de 2º E.S.O..

1. *Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.*
2. *Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos.*
3. *Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios números naturales.*
4. *Números negativos. Significado y utilización en contextos reales.*
5. *Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones. Operaciones con calculadora.*
6. *Valor absoluto y opuesto de un número entero.*

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO

a. HISTORIA DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y LA DIVISIBILIDAD

En este apartado se va a describir brevemente la historia de los números enteros y la divisibilidad dedicando un subapartado a cada uno de estos conceptos.

i. Números enteros

El origen de la matemática que conocemos hoy en día se remonta a los primeros días de la raza humana, cuando aparecieron las nociones primitivas relacionadas con los conceptos de número, magnitud y forma. Estos conceptos surgieron como parte de la vida diaria del hombre. En particular, el concepto de número surgió a partir de diferencias (en principio el hombre distinguía entre "uno" o "muchos") y más tarde, de manera gradual, por semejanzas (el contraste entre "uno" y "muchos" significaba que todos los elementos que se identificaban con "uno" tenían algo en común: la unidad). Por tanto, el origen del concepto de número natural se encuentra en la antigüedad prehistórica y su objetivo era resolver los problemas que le surgían al hombre en su día a día (por ejemplo, contar el ganado o los bienes que se intercambiaban con los demás). También con este objetivo pero más tarde, en la época de los babilonios, egipcios y griegos, aparecieron las primeras fracciones (por ejemplo, para medir construcciones o repartir los alimentos).

Estos conjuntos de números (naturales y fraccionarios) fueron aceptados de forma unánime ya que se podían observar fácilmente en la naturaleza. Sin embargo, la aceptación de los números negativos (enteros negativos, fracciones negativas, etc.), irracionales y complejos llevó mucho más tiempo por haber surgido de forma "artificial" para resolver ciertas ecuaciones algebraicas. En el caso de los números negativos, tuvieron que transcurrir más de 1000 años desde su aparición hasta su aceptación como números. A continuación se describe este periodo.

La primera civilización en la que aparecen los números negativos es la hindú (en el s. VII), aunque no con ese nombre (el nombre de negativo apareció posteriormente en Occidente). Para ellos estos números significaban la ausencia. Asimismo, los matemáticos chinos también tenían la idea de número negativo ya que en sus cálculos utilizaban varillas negras para los números negativos y rojas para los positivos. Sin embargo, el primer documento donde constan las reglas aritméticas para realizar operaciones básicas con este grupo de números (concordante con las de los enteros) es una obra del matemático hindú Brahmagupta (590-670) del año 628. En ella, el autor denomina “los bienes” a los números positivos, “las deudas” a los negativos y “la nada” al cero. Por otra parte, la primera vez que apareció un símbolo para el cero fue en una inscripción del año 876 en la India. De todas formas, no está claro el origen de este número ya que es posible que se propagase a la India desde el mundo griego una vez consolidado el sistema decimal posicional. De este modo, el sistema moderno de numeración para los enteros quedó completamente determinado.

Con el inicio de la era musulmana y la expansión del estado islámico, en el año 622, comenzó un periodo en el que los números negativos volvieron a ser ignorados. La causa es que, al igual que la civilización griega, hacían una identificación entre número y magnitud (si no se podía representar gráficamente con un segmento carecía de sentido). Por ello, aunque parece que sí conocían las obras de autores anteriores que utilizaban enteros negativos, simplemente los ignoraron, dejando las operaciones como restas indicadas. Por tanto, la Edad Media supuso un retroceso en la matemática en cuanto a la aritmética de números negativos.

La reaparición de los negativos tuvo lugar en el periodo conocido como el Renacimiento con motivo del gran desarrollo que tuvo el álgebra. Sin embargo, aunque ya no eran ignorados por su eficacia para calcular, solo se aceptaron como "artificios de cálculo" y se denominaron números falsos, ficticios o absurdos. Por lo tanto, el rechazo hacia ellos era notorio y, además, la actitud de los matemáticos fue diversa (aceptación o rechazo de coeficientes negativos en una ecuación, de raíces negativas, etc.).
En esta época, la obra "Triparty" (1484) del matemático francés Nicolás Chuquet (1445-1500) fue la primera obra en la que apareció un número negativo aislado en una ecuación algebraica. Además, está escrita en un estilo esencialmente retórico y las operaciones fundamentales, suma, resta, multiplicación y división, están representadas por las palabras *plus* o $\acute{p}$, *moins* o $\acute{m}$, *multiplier par* y *partyr par*, respectivamente.
Por otra parte, los símbolos "+" y "-" se popularizaron tras la publicación de la obra "Aritmética Integra" del algebrista alemán Michael Stifel (1487-1567) en 1544.

Posteriormente, en el siglo XVII, los negativos se admiten como raíces por exigencias algebraicas, por lo que siguen siendo considerados "artificios de cálculo". Aun así, no son considerados como números porque para ello era necesario encontrarles un significado en su uso. Es en el siglo XVIII cuando se encuentran interpretaciones concretas de los números negativos aunque no permiten explicar todas sus reglas de cálculo. Estas interpretaciones surgen gracias al desarrollo de la Geometría Analítica (aparecen los negativos como abscisas de puntos en la recta de coordenadas) y la Mecánica (interpretados como cantidad relativa y movimiento). Además, en este siglo los negativos son entendidos como "cantidad negativa opuesta a la positiva".

En el siglo XIX, conocido como el siglo de oro de las matemáticas, los enteros negativos son admitidos como números entendiéndolos como una extensión de los naturales (y opuestos a ellos) donde se siguen cumpliendo las leyes de la aritmética. El matemático alemán Hermann Hankel (1839-1873) contribuyó, con su obra "Teoría del sistema de los números complejos" publicada en 1867, a la legitimación de este conjunto de números.

Además, surgen múltiples teorías y definiciones para el número entero. Sin embargo, los matemáticos de esta época ya no se preocupan por su significado concreto sino por buscar bases matemáticas para construir el sistema de los números enteros, $\mathbb{Z}$. Estas teorías se clasifican en dos grandes grupos: las que consideran a los números enteros como extensión del número cardinal (teoría de los pares, de las congruencias o de los operadores) y las que los consideran extensión del número ordinal.

Posteriormente, tras la construcción de todas estas teorías, el problema de los números negativos finalizó y los números enteros negativos se situaron al mismo nivel que los positivos. Sin embargo, dejaron de formar una categoría numérica y pasaron a ser un calificativo de los números enteros (al igual que los positivos).

Por otra parte, quedaron establecidos y fundamentados todos los sistemas numéricos: naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Posteriormente, el objeto de estudio fue su estructura y, en general, la estructura de todas las teorías matemáticas de los siglos XIX y XX, por parte de un grupo de matemáticos, en su mayoría franceses, constituido en 1939 con el nombre de Bourbaki. Se empieza a hablar del semianillo de los naturales$\mathbb{N}$, el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$, el cuerpo de los racionales $\mathbb{Q}$, el cuerpo completo de los reales $\mathbb{R}$y del álgebra de los complejos $\mathbb{C}$. Además, se unifican las diversas teorías de cada sistema de números gracias al concepto de isomorfismo y se establece la ordenación de estos sistemas de la siguiente forma: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. De ese modo, los números enteros $\mathbb{Z}$se consideran una extensión de los naturales $\mathbb{N}(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$ pero bajo un isomorfismo.

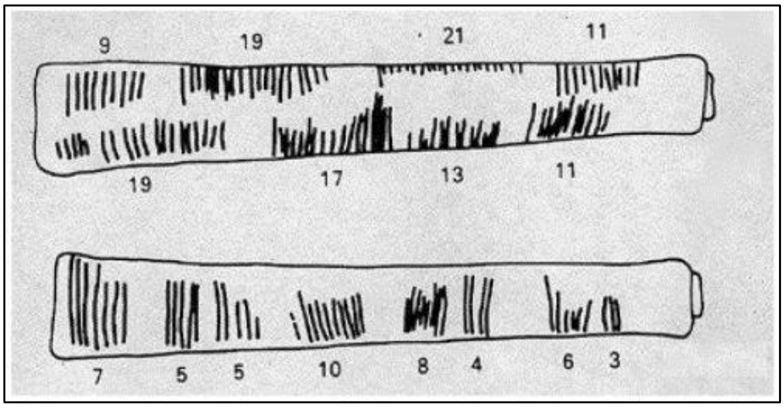
A partir de ese momento, la jerarquía de los sistemas numéricos quedó tal y como la conocemos hoy.

ii. Divisibilidad

Para relatar la historia de la divisibilidad también tenemos que remontarnos a las civilizaciones antiguas. Para repartir cantidades de cosas entre personas y dar a cada una de ellas la misma cantidad, el hombre ha necesitado la divisibilidad. A través de la práctica el hombre descubría que a veces el reparto tenía solución y otras veces no (en este sentido, se habla de que existe solución cuando el resultado es un número natural). Entonces, comenzó el estudio de estas relaciones y con ello surgió el estudio de la divisibilidad.

Los primeros indicios de divisibilidad se dieron en la prehistoria, más concretamente en un hueso de babuino (denominado hueso de Ishango) de hace unos 20000 años descubierto en 1960 por el belga Jean de Heinzelin de Braucourt en el territorio conocido como el Congo Belga.Este tiene una serie de incisiones divididas en tres columnas que abarcan toda su longitud (10.2 centímetros). En un principio, se pensaba que únicamente se empleaba para el conteo pero algunos científicos van más allá, sosteniendo que pudo haber sido tallado con el objetivo de establecer un sistema de numeración. A continuación se va a exponer el posible significado de las muescas que aparecen en el hueso. En la siguiente imagen aparecen las tres columnas de muescas en las que se divide el hueso de Ishango (en la imagen el hueso aparece tumbado luego las columnas se corresponden con filas) y al lado de cada columna el número de muescas.

Ilustración 1. Representación de las muescas del hueso de Ishango. Extraída de Maza (2008).



En las dos primeras filas aparecen números impares. Además, la segunda fila contiene los números primos comprendidos entre 10 y 20, y la primera contiene las siguientes sumas y restas: 10+1, 20+1, 20-1, 10-1.

En la última fila, aparecen cálculos de multiplicación y división por dos. La fila comienza (de derecha a izquierda) con 3 y 6 muescas y continúa con 4 y 8 muescas. En ambos casos se duplica el primer número. Después aparecen 10 y 5 muescas por lo que se podría interpretar como una división entre dos.

Por otra parte, el número de muescas en las dos primeras filas es 60 mientras que en la tercera es 48, ambos múltiplos de 12, lo que vuelve a sugerir una relación con la multiplicación y la división.

Otros investigadores, como Alexander Marshack, han concluido que este hueso es una tabla de números primos (la más antigua que se conoce) y podría representar un calendario lunar de seis meses.

Posteriormente, en el antiguo Egipto y en Mesopotamia se comenzaron a utilizar conceptos de divisibilidad para resolver problemas prácticos de medida ("cuantos caben en"). Por ejemplo, el pago de impuestos de los egipcios en función del área de los terrenos que poseían, operaciones que aparecen en los papiros de Rhind o en el de Moscú. Además, ambos tenían un sistema decimal y otro sexagesimal ya que este último facilitaba la división exacta (60 es divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30, además de, como es obvio, por 1 y por sí mismo).

En cuanto al aporte de los griegos, en el año 300 a.C. el matemático griego Euclides publica su obra "Elementos", compuesta por trece volúmenes y considerada una de las obras más importantes de la historia de las matemáticas. En particular, en los volúmenes VII, VIII y IX se expone lo relativo a la aritmética y teoría de números de manera axiomática.

En el libro VII, se expone un procedimiento denominado "antenaresis" (actualmente, Algoritmo de Euclides) para calcular el máximo común divisor de dos o más números realizando divisiones sucesivas. También aparecen propiedades, como la de primo relativo, y proposiciones, como la siguiente:

“Si p es un número primo y divide al producto de dos enteros positivos, entonces el número primo divide al menos a uno de los números.”,

base de la demostración del teorema fundamental de la aritmética.

En los libros VII y IX, se establecen los conceptos de número, parte (divisor), partes (no divisor), múltiplo, número primo y números primos entre sí, número compuesto y números compuestos entre sí, etc. También se exponen otras propiedades de los números e importantes teoremas sobre la teoría de números, como la infinitud del conjunto de los números primos (enunciado posteriormente por Dirichlet (1805-1859)).

Por otro lado, el matemático Eratóstenes (276 a.C. – 194 a.C.) creó una criba (conocida como criba de Eratóstenes) que permite encontrar los números primos desde el uno hasta un número dado.

En cuanto a los aportes a este campo de los indios, se sabe que conocían las reglas de divisibilidad por 2, 3, 5 y 9 basados en las sumas de las cifras de un número y la conocida como prueba del nueve para comprobar si una operación es correcta. Fue el matemático indio Bhaskara (1114-1185) quien recogió estas ideas en su libro "*Lilavati*" pero sin denominar de esta forma a la regla del nueve (su denominación era "sacar nueves").

El siguiente matemático que aparece en la historia de la divisibilidad es Leonardo de Pisa (1180-1250), más conocido como Fibonacci. En su obra Liber Abaci (1202), formada por quince capítulos, aparecen las operaciones fundamentales, la descomposición de un número en factores primos y la divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 y 11. Estos criterios no aparecen explícitos en su obra pero se encuentran cuando describe algunos algoritmos. Se basan en la prueba del nueve, en el cálculo de los residuos de ciertas divisiones.

Posteriormente, en el siglo XVI, Stevin (1548-1620) extendió, en su obra "*Œuvres mathématiques*..." publicada en 1634, el algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios.

En el siglo siguiente (siglo XVII), destaca Blaise Pascal (1623-1662), el cual, en su obra "*De numeris multiplicibus*" (1655), muestra un criterio de divisibilidad válido para cualquier base (no únicamente para la base decimal).

Posteriormente, gracias a Gauss (1777-1855) y su obra "*Disquistiones Arithmeticae*", la Teoría de Números pasa a considerarse una rama de las matemáticas. En esta obra aparece el concepto de número congruente y las propiedades de la teoría de congruencias, importantes en la teoría de la divisibilidad.

Finalmente, la Teoría de Números y, en particular, la Teoría de la Divisibilidad se generalizan mediante la construcción de la estructura de ideal por parte de los matemáticos Kummer (1810-1893), Dedekind (1831-1916) y Kronecker (1823-1891).

Desde entonces, los matemáticos han estado interesados en descubrir números primos cada vez más grandes ya que estos son de gran utilidad, sobre todo, en el campo de la criptografía.

Por otra parte, me gustaría terminar este subapartado de la divisibilidad dando a conocer una de las conjeturas, aún sin probar, sobre números primos enunciada por Goldbach (1690-1764) en 1742: *"Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos."*

Para concluir este apartado se va a realizar un eje cronológico recogiendo los hitos más importantes de la historia de los números enteros y la divisibilidad.

Tabla 5. Eje cronológico de la historia de los números enteros y la divisibilidad. Elaboración propia.

Hª NÚMEROS ENTEROS	Hª HUMANIDAD	Hª DIVISIBILIDAD
	PREHISTORIA (5 millones de años- siglo IV a.C.)	Hace 20000 años: Hueso de Ishango (descubierto en 1960): no está claro para que se utilizaba: conteo, sistema de numeración, tabla de primos (Marshack)

	EDAD ANTIGUA **(siglo IV a.C. - siglo V d.C.)**	Antiguo Egipto (s. IV-I a.C.) y Mesopotamia: conceptos de divisibilidad para resolver problemas prácticos de medida ("cuantos caben en") Papiro de Rhind, papiro de Moscú
		300 a.C.: "Elementos" del griego Euclides: en los volúmenes VII, VIII y IX, aritmética y teoría de números de manera axiomática (conceptos como el de número, divisor, múltiplo, primo, compuesto, etc.; teoremas y proposiciones; "antenaresis", el actual Algoritmo de Euclides)
		s. III-II a.C.: Criba de Eratóstenes
Civilización hindú: aparición de los números negativos (s. VII) 620: Brahmagupta (reglas aritméticas para realizar operaciones con "los bienes", "las deudas" y "la nada") 876: Primer símbolo para el cero Civilización china: idea de número negativo	**EDAD MEDIA** **(siglo V d.C. – siglo XV d.C.)**	**Civilización hindú:** s. XII:"Lilavati" de Bhaskara Reglas de divisibilidad por 2, 3, 5 y 9 basados en las sumas de las cifras de un número y la regla de "sacar nueves" para comprobar si una operación es correcta (actual prueba del nueve).
Era musulmana: los números negativos vuelven a ser ignorados		s. XIII: 1202: "Liber Abaci" de Fibonacci: operaciones fundamentales, descomposición de un número en factores primos y la divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 y 11.
s. XV-XVI (Renacimiento): Rechazo pero se utilizaban en el cálculo. Se denominaban "artificios de cálculo", números falsos, ficticios o absurdos 1484: "Triparty" de Chuquet: primer número negativo aislado en una ecuación algebraica 1544: "Aritmética Integra" de Stifel: símbolos "+" y "-"	**EDAD MODERNA** **(siglo XV d.C. – siglo XVIII d.C.)**	s. XVII: 1634:"*Œuvres mathématiques...*" de Stevin: algoritmo de Euclides extendido al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios. 1655:"*De numeris multiplicibus*" de Pascal: criterio de

s. XVII: los negativos son “artificios de cálculo” pero no son números		divisibilidad válido para cualquier base
s. XVIII: se definen como “cantidad negativa opuesta a la positiva”, se encuentran interpretaciones concretas		
s. XIX: los números negativos son admitidos como números entendiéndolos como una extensión de los naturales Se establece el sistema de los números enteros, $\mathbb{Z}$	**EDAD CONTEMPORÁNEA (siglo XVIII d.C. - actualidad)**	s. XIX: en 1801 "*Disquistiones Arithmeticae*" de Gauss: la Teoría de Números pasa a considerarse una rama de las matemáticas. Aparece el concepto de número congruente y las propiedades de la teoría de congruencias
s. XX: anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ Los números enteros $\mathbb{Z}$ se consideran una extensión de los naturales ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$) bajo un isomorfismo		s. XIX-XX: Kummer, Dedekind y Kronecker generalizan la Teoría de la Divisibilidad mediante la construcción de la estructura de ideal

b. ANÁLISIS DEL CONTENIDO

En este apartado se van a describir brevemente el conjunto de los números enteros y sus propiedades más importantes, y los principales resultados y definiciones relacionados con la divisibilidad. Al final del apartado aparece un mapa conceptual con los conceptos más importantes.

Se han puesto los contenidos que fundamentan aquellos que se imparten en el segundo curso de Secundaria y deben ser bien conocidos por el profesor.

i. Números enteros

Las demostraciones de este subapartado de los números enteros no se realizarán debido a su clara sencillez.

Se considera el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y se define la relación $\sim$ dada por

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c,$$

que es una relación de equivalencia (cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).

Definición. Se denota por $\mathbb{Z}$ al conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$, denominado conjunto de los números enteros. Sus elementos se denominan *números enteros*.

Definición (Operaciones con números enteros). En $\mathbb{Z}$ se definen dos operaciones, *suma* "$+$" y *producto* "·", de la siguiente forma: sean $n, m \in \mathbb{Z}$ y sean $(a, b), (c, d)$ representantes de n y m, respectivamente.

- Se define el número entero $n + m$ como la clase de equivalencia de $(a + c, b + d)$.
- Se define el número entero $n \cdot m$ como la clase de equivalencia de $(ac + bd, ad + bc)$.

Proposición. $(\mathbb{Z}, +)$ tiene estructura de grupo conmutativo. Además, se tiene que:

- Si 0 denota la clase de (a, a), entonces 0 es el elemento neutro de la suma.
- Si $n \in \mathbb{Z}$ viene representado por $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces la clase de (b, a) es el elemento simétrico u opuesto de n, es decir, $-n$.

Proposición. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ tiene estructura de semigrupo conmutativo con elemento unidad. Además, se tiene que:

- Si 1 denota la clase de $(a + 1, a)$ se tiene que $n \cdot 1 = n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, es decir, 1 es el elemento unidad.

Proposición. El producto en $\mathbb{Z}$ tiene la propiedad distributiva respecto de la suma.

Observación. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo unitario.

Definición (Orden en $\mathbb{Z}$). En $\mathbb{Z}$ se define una *relación de orden* "$\leq$" de la siguiente forma: si $n, m \in \mathbb{Z}$ se dice que $n \leq m$ si, y sólo si, $a + d \leq b + c$, donde $(a, b), (c, d)$ son representantes de n y m, respectivamente.

Proposición. $(\mathbb{Z}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. La relación de orden es compatible con:

- La suma: $\forall n, m, p \in \mathbb{Z}$ y $n \leq m$, entonces $n + p \leq m + p$.
- El producto: $\forall n, m, p \in \mathbb{Z}$ con $n \leq m$ y $p \geq 0$, entonces $n \cdot p \leq m \cdot p$.

Definición. Dado $n \in \mathbb{Z}$, el *valor absoluto* de n es $|n| = máx\{n, -n\}$.

Propiedades. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$.

(1). $-|n| \leq n \leq |n|$.

(2). $|n| = 0 \Leftrightarrow n = 0$.

(3). $|n + m| \leq |n| + |m|$. (Desigualdad triangular)

ii. Divisibilidad

Definición. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, se dice que *$a$divide* a b si existe otro número $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c$.

Esta relación de orden parcial, se denota $a|b$ y se puede leer como a divide a b, a es *divisor* de b o b es *múltiplo* de a.

Es obvio que todo número $a \in \mathbb{Z}$ distinto de 1 tiene al menos cuatro divisores en $\mathbb{Z}$: $1, -1, a, -a$ (divisores triviales de a). A continuación se exponen otras propiedades básicas de divisibilidad, algunas de las cuales se utilizarán para demostrar teoremas que aparecen más adelante. Sin embargo, no se realizarán sus demostraciones por su sencillez.

Propiedades (de la divisibilidad). Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se tiene:

(1). Si $a|b$ y $b \neq 0$, entonces $|a| \leq |b|$.

(2). $c|a$ y $c|b$, entonces $c|(ax + by)$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$.

(3). $a|b$ si y sólo si $a|(ac + b)$.

(4). Si $c \neq 0$, entonces $a|b$ si y sólo si $ac|bc$.

Teorema (división euclídea). Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ únicos tales que $m = q \cdot n + r$ y $0 \leq r < |n|$.

Estos números se conocen como dividendo (m), divisor (n), cociente (q) y resto (r). Además, si $r = 0$ la división es exacta.

Demostración.

- Existencia

  Supongamos que $n > 0$ (el caso para $n < 0$ es similar, cambiando n por $-n$ en la demostración que se va a llevar a cabo).

  Consideramos el conjunto $S = \{m - xn,\ con\ x \in \mathbb{Z},\ m - xn \geq 0\}$. Como para $x = -|m|$ se tiene $m - xn = m + |m|n \geq m + |m| \geq 0$, el conjunto S es no vacío. Además, como $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$, por el principio del buen orden se deduce que S tiene un elemento mínimo $r = m - qn$. Por definición, se tiene que $r \geq 0$ luego falta probar que $r < n$. Vamos a razonar por reducción al absurdo. Suponemos que $r \geq n$. Entonces tendríamos $0 \leq r - n = m - qn - n = m - (q+1)n$, lo que implica que $r - n \in S$. Con esto se llega a un absurdo porque $r - n < r$ y r era el elemento mínimo de S.

- Unicidad

  Supongamos que existen dos divisiones distintas de la forma del enunciado, es decir, que $m = q \cdot n + r = q' \cdot n + r'$, con $0 \leq r, r' < n$. Entonces se tendría que $(q - q')n = r' - r$, es decir, que $n|(r' - r)$ y, por tanto, $r' - r < n$ y $r - r' < n$. Esto implica que

$|r' - r| < n = |n|$. Entonces de $n|(r' - r)$ y de la desigualdad anterior obtenemos que $r' - r = 0$, es decir, $r' = r$ y, por tanto, también $q' = q$.

Criterios de divisibilidad.

- **Por 2.** Un número es divisible por 2 si su última cifra es 0, 2, 4, 6 u 8 y se denominan números pares. Si no lo son, se denominan impares.
- **Por 5.** Un número es divisible por 5 si su última cifra es 0 o 5.
- **Por 10.** Un número es divisible por 10 si es a la vez divisible por 2 y por 5, es decir, si su última cifra es 0.
- **Por 3 y por 9.** Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3 y es divisible por 9 si la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9.
- **Por 4 y por 8.** Un número es divisible por 4 si sus dos últimas cifras son divisibles por 4 o son dos ceros y es divisible por 8 si las tres últimas cifras son divisibles por 8 o son tres ceros.
- **Por 11.** Un número natural es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras colocadas en los lugares pares menos la suma de las cifras colocadas en las cifras impares es 11 o múltiplo de 11.

Las demostraciones de los criterios de divisibilidad se pueden realizar fácilmente escribiendo un número general en potencias de diez y utilizando la teoría de congruencias, la cual no se explicará en este trabajo.

Definición. Un número *primo* es cualquier número natural mayor que la unidad solo divisible por él mismo y por la unidad. En caso contrario el número es *compuesto*.
Por convenio, al 1 no se le considera ni primo ni compuesto.

Definición (criba de Eratóstenes). La criba de Eratóstenes es un algoritmo que se utiliza para encontrar los números primos menores que un número dado $n \in \mathbb{N}$. Se procede de la siguiente forma:

1º. Se forma una tabla con los números naturales comprendidos entre 2 y n.
2º. Se tachan los múltiplos de 2.
3º. Se toma el siguiente número no tachado (el 3) y se tachan todos sus múltiplos.
4º. Se procede de esa forma con los sucesivos números no tachados (los números primos) hasta que el cuadrado del siguiente número no tachado sea mayor que n^2.
5º. Los números que han quedado sin tachar en la tabla son los números primos hasta n.

En la siguiente imagen se pueden ver los números primos menores que 100 obtenidos mediante este algoritmo.

Ilustración 2. Números primos menores que 100 (criba de Eratóstenes).

	2	3	4	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Teorema fundamental de la aritmética. Todo número entero $n \geq 2$ se puede escribir como producto finito de números primos de forma única (salvo el orden).

Demostración.

- Existencia

  Lo demostraremos por inducción sobre los números naturales mayores que dos.

  Para $n = 2$, se tiene que 2 es primo luego el teorema se verifica.Suponemos que el teorema se cumple para todos los números $2, 3, \dots, n$ y veamos que se cumple para $n + 1$. Tenemos dos opciones:

  - Si $n + 1$ es primo, el resultado es trivial.
  - Si $n + 1$ no es primo, entonces tendría un divisor positivo a distinto de 1 y $n + 1$. Por tanto, existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $n + 1 = ab$. Además, b es positivo, por serlo a y $n + 1$, y distinto de 1 y $n + 1$, por serlo a. Entonces, se deduce que a y b pertenecen al conjunto $\{2, 3, \dots, n\}$, donde sabemos que sí es cierto el teorema. Por tanto, a y b se pueden escribir como producto finito de números primos y, como consecuencia, $n + 1 = ab$ es producto finito de números primos, como se quería demostrar.

- Unicidad

  Supongamos que existen dos descomposiciones de n en números primos, es decir, $n = p_1 p_2 \dots p_r = p'_1 p'_2 \dots p'_s$. Entonces como $p'_s | p_1 p_2 \dots p_r$, debe dividir a algún p_t para un cierto t. Reordenando los primos $p_1, p_2, \dots, p_r$, podemos suponer que $p'_s | p_r$. Pero como p_r es primo, se tiene que $p'_s = p_r$. Entonces si cancelamos ese término en la igualdad $p_1 p_2 \dots p_r = p'_1 p'_2 \dots p'_s$ se obtiene $p_1 p_2 \dots p_{r-1} = p'_1 p'_2 \dots p'_{s-1}$. Repitiendo el proceso llegaríamos a que cada p'_j es un p_i, cancelándolos en la igualdad anterior. Entonces como no puede ocurrir que $r < s$ ni que $s < r$, porque en ambas condiciones llegaríamos a una igualdad en la que un producto de primos es 1, entonces $r = s$. Entonces las dos descomposiciones tienen el mismo número de factores que coinciden salvo el orden, como queríamos demostrar.

Definición. El mínimo común múltiplo de varios números es el menor número distinto de cero que sea múltiplo común de dichos números. Se suele denotar de forma abreviada por mcm.

Definición. El máximo común divisor de varios números es el mayor de los divisores comunes de todos esos números. Se suele denotar de forma abreviada por mcd.

Definición (el algoritmo de Euclides). El algoritmo de Euclides es un método utilizado para calcular el máximo común divisor de dos números a través de divisiones sucesivas. Se enuncia de la siguiente manera:

Sean a, b dos números positivos con $a > b$. Se calcula la división de a entre b y obtenemos

$$a = b \cdot c_1 + r_1,$$

dondec_1 es el cociente y r_1 el resto. Ahora se tienen dos opciones: si $r_1 = 0$ entonces $mcd(a, b) = b$. Si, por el contrario, $r_1 \neq 0$, se realiza la división de b entre r_1. De esta forma se obtendría

$$b = r_1 \cdot c_2 + r_2,$$

dondec_2 es el cociente y r_2 es el resto. De la misma forma que antes, si $r_2 = 0$ entonces $mcd(a, b) = r_1$ y si no, se realiza la división de r_1 entre r_2. Así sucesivamente hasta que el resto sea cero. Entonces el máximo común divisor de a y b es el último resto distinto de cero que se obtenga con el procedimiento anterior.

Para demostrar este resultado, es necesario demostrar el siguiente teorema.

Teorema. El máximo común divisor de dos números enteros positivos a y b, con $a > b$ coincide con el máximo común divisor de b y r, siendo $r$el resto que se obtiene al dividir a entre b.

Demostración.

Sean $d = mcd(a, b)$ y $t = mcd(b, r)$. Veamos que $d = t$.

Por definición, se tiene que d es divisor de a y de b, o equivalentemente, que $a = a_1 d$ y $b = b_1 d$ para ciertos a_1 y b_1. Además, al dividir a entre b se obtiene $a = bq + r$, donde q es el cociente, r es el resto y $0 \leq r < b$. De esta igualdad se deduce que d es un divisor de r y como también divide a b, entonces divide al máximo común divisor de estos dos, es decir, $d|t$.

Por otro lado, t divide tanto a b como a r, es decir, $b = pt$ y $r = st$ para ciertos p y s. Sustituyendo en la ecuación $a = bq + r$ se obtiene $a = ptq + st = (pq + s)t$. Por tanto, t es un divisor de a y, como también lo era de b, debe ser un divisor de su máximo común divisor, es decir, $t|d$.

Se concluye que como $d|t$ y $t|d$ solo puede ser $t = d$, quedando así demostrado el teorema y, por tanto, el funcionamiento del algoritmo de Euclides.

Proposición (Relación entre el mcd y mcm). Si a y b son enteros positivos, entonces el producto de a y b es igual al producto de su mínimo común múltiplo (mcm) y máximo común divisor (mcm). Es decir,

$$a \cdot b = mcd(a, b) \cdot mcm(a, b).$$

Demostración:

Sea $m = mcd(a, b)$. Entonces se tiene que $m|ab$ y, por tanto, existe un d tal que $md = ab$.

1. Primero veamos que ese d es un divisor de a y de b.

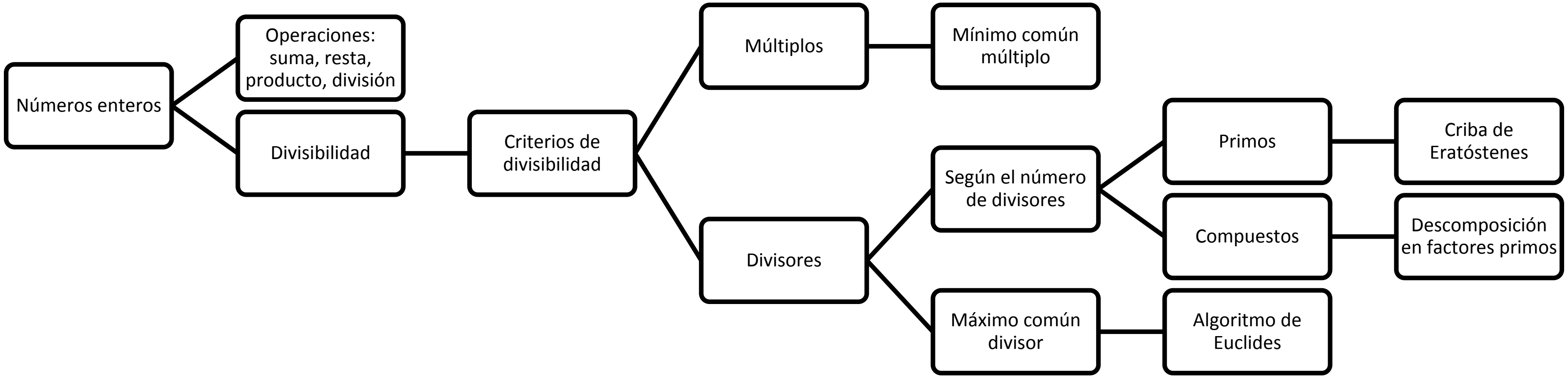
   Como m es múltiplo de a y b, entonces$m = ar = bs$. De este resultado y la igualdad anterior, se deduce que $md = ard = bsd = ab$. De estas igualdades resulta que $rd = b$ y $sd = a$ y, por tanto, $d|b$ y $d|a$. Es decir,d es un divisor de a y de b.
2. Ahora veamos que es el máximo divisor de a y de b, es decir, vamos a ver que si existe otro divisor de a y de b, este dividirá a d.

   Sea d' un divisor de a y de b, es decir, $d'|a$ y $d'|b$. Esto significa que existen a' y b' tal que $a = d'a'$ y $b = d'b'$. Sea m' un múltiplo común de a y b dado por $m' = ab' = d'a'b' = a'b$. Se tiene que m' es un múltiplo de m, es decir, $m' = mt$ para un cierto t. Entonces se concluye que $mtd' = m'd' = d'a'b'd' = ab = md$, lo que implica que $td' = d$, o de forma equivalente,$d'|d$.

En conclusión, se tiene que d es divisor de a y b y que, a su vez, es dividido por cualquier divisor de a y b. Por tanto $d$es el mínimo común divisor de a y b y se tiene la igualdad

$$a \cdot b = mcd(a, b) \cdot mcm(a, b)$$

Ilustración 3. Mapa conceptual de los números enteros y la divisibilidad. Elaboración propia.



c. ANÁLISIS COMPARATIVO DE LIBROS DE TEXTO

Actualmente, la mayoría de los profesores de Secundaria utilizan los libros de texto como recurso principal para desarrollar las sesiones de Matemáticas en el aula. Por ello, en este apartado se va a realizar un análisis de diferentes libros de texto de Matemáticas de 2º E.S.O. y su posterior comparación entre ellos. El análisis se centrará en los temas referidos a los contenidos de "Números enteros" y "Divisibilidad". Además, el apartado finalizará con una breve conclusión sobre los resultados obtenidos de la comparación previa.

Los libros de texto utilizados para el análisis son los correspondientes a la asignatura de Matemáticas de 2º E.S.O. de las editoriales Anaya, Bruño y Santillana. En el Anexo I se presenta la estructura de las unidades de números enteros y divisibilidad que presenta cada libro. En este apartado, solo se va a realizar el estudio y las comparaciones correspondientes.

En primer lugar, se va a realizar una breve comparación entre la organización de los contenidos del Bloque de Números y Álgebra en 2º E.S.O en cada uno de los libros de texto. La siguiente tabla (*Tabla 6*) recoge toda esta información.

Tabla 6. Organización de los contenidos de la asignatura de Matemáticas de 2º E.S.O. en los libros de texto de las editoriales Anaya, Bruño y Santillana.

ANAYA	BRUÑO	SANTILLANA
1. Los números naturales	1. Divisibilidad y números enteros	1. Números enteros
2. Los números enteros	2. Fracciones y números decimales	2. Fracciones
3. Los números decimales y las fracciones	3. Potencias y raíces	3. Potencias y raíz cuadrada
4. Operaciones con fracciones	4. Proporcionalidad	4. Números decimales
5. Proporcionalidad y porcentajes	5. Resolución de problemas aritméticos	5. Expresiones algebraicas
6. Álgebra	6. Polinomios	6. Ecuaciones de primer y segundo grado
7. Ecuaciones	7. Ecuaciones de 1er y 2º grado	7. Sistemas de ecuaciones
8. Sistemas de ecuaciones	8. Sistemas de ecuaciones lineales	8. Proporcionalidad numérica

A grandes rasgos, se puede observar que las tres editoriales dedican el mismo número de temas al bloque de "Números y Álgebra" (ocho temas). Además, como aparece en la siguiente tabla (*Tabla 7*), también dedican casi el mismo número de páginas a este bloque.

Tabla 7. Número de unidades y número de páginas de los libros de texto de la asignatura de Matemáticas de 2º E.S.O. de las editoriales Anaya, Bruño y Santillana.

ANAYA	BRUÑO	SANTILLANA
8 temas 168 páginas	8 temas 160 páginas	8 temas 162 páginas

En particular, a las unidades en las que se incluyen los contenidos de divisibilidad y números enteros, dedican 38, 20 y 22 páginas respectivamente (en el orden Anaya, Bruño y Santillana). Cabe destacar que la superioridad en el número de páginas de Anaya es debida a que son dos unidades (en las otras dos solo una) y se incluyen los números naturales y las potencias y raíces de números enteros, contenidos que no se tratan en este trabajo.
A pesar de estas diferencias de organización, y como es natural, los contenidos mínimos que marca la legislación en cuestiones de currículo aparecen recogidos en todos los libros de texto estudiados. Como veremos más adelante, en cuestiones de contenidos matemáticos no considerados como mínimos, sí que se hacen notables algunas diferencias.

A partir de la estructura de las unidades referentes a números enteros y divisibilidad de cada editorial seleccionada que aparece en el Anexo I, se ha elaborado una tabla (enumerar) comparativa que resume toda la información recogida y presenta las características principales que aparecen en cada libro.

Reflexión comparativa

Para realizar la comparación, se van a estudiar, principalmente, dos aspectos: la estructura de la unidad y el lenguaje utilizado. Además, a lo largo del texto se comentará la contribución que hacen a las competencias clave (excepto la competencia matemática que setrabaja continuamente) y se dedicará un apartado a la contribución de las tres editoriales a las Inteligencias Múltiples, otro al aprendizaje cooperativo y un último a la atención a la diversidad (estos dos últimos breves al no haber observado en los libros grandes aportaciones).

El primero es la estructura de la unidad. La introducción de la unidad es similar en las tres editoriales pero se van a destacar algunas diferencias. La primera es la referencia a la Historia de las matemáticas. Como se puede observar en la tabla y en los resúmenes anteriores, los tres libros dedican un espacio a la descripción de la evolución de los contenidos de la unidad a lo largo de la historia. Sin embargo, las editoriales Bruño y Santillana añaden un eje cronológico lo que facilita la comprensión de elementos temporales de una manera sencilla. Con este tipo de introducciones se potencia la competencia de conciencia y expresiones culturales, relacionando los conceptos matemáticos con la historia o el arte.

Tabla 8. Resumen de las principales características de los libros de texto de la asignatura de Matemáticas de 2º E.S.O. de las editoriales de Anaya, Bruño y Santillana.

		ANAYA	BRUÑO	SANTILLANA
Introducción a la unidad	**Historia**	Introducción histórica	Eje cronológico histórico	Eje cronológico histórico
	Conocimientos previos	Actividades	-	Repaso
	Contenidos de la unidad	-	Sí	Sí, y procedimientos
	Ejercicios	Sobre conocimientos previos	-	Sencillo y sobre la vida cotidiana
Contenidos	**Estructura**	Teoría Ejercicios resueltos y propuestos Informaciones complementarias	Teoría Ejercicios resueltos y propuestos Ejercicios cálculo mental Informaciones complementarias	Teoría y procedimientos paso a paso Ejercicios resueltos y propuestos Informaciones complementarias y retos
	Apartados	*Unidad 1. Los números naturales* Números naturales y operaciones, divisibilidad, primos y compuestos, MCD y mcm. *Unidad 2. Los números enteros* Nº positivos y negativos, enteros, operaciones, potencias y raíces.	*Unidad 1. Divisibilidad y números enteros* Divisibilidad, MCD y mcm, números enteros y operaciones.	*Unidad 1. Números enteros* Números enteros y operaciones, múltiplos y divisores de números enteros, factorización de un número entero, MCD y mcm.
Actividades finales	**Lecturas**	×		
	Contextos reales	×	×	×
	Aprende a resolver problemas	×		×
	Iniciativa y creatividad	×		
	Trabajo cooperativo			×
	PISA			×
	TICs		×	
	Autoevaluación	×	×	×
	Esquema		×	

La segunda diferencia es la activación de los conocimientos previos. Las editoriales Anaya y Santillana sí lo hacen. La primera a través de una serie de ejercicios y la segunda con un breve repaso y un ejercicio sencillo relacionado con la vida cotidiana. En cambio, en la editorial Bruño no se incluyen ejercicios ni activación de conocimientos previos. Esto último puede ser debido a que el primer tema comienza con los números naturales, los cuales son un antecedente al estudio de los números enteros.

La última diferencia es la enumeración de los contenidos que se estudiarán a lo largo de la unidad, la cual se lleva a cabo en las editoriales Bruño y Santillana (esta, además, incluye procedimientos).

La segunda parte que aparece en la estructura de la unidad son los contenidos. En cuanto a su organización, no se aprecian casi diferencias (todos exponen teoría, resuelven y proponen ejercicios, y añaden informaciones complementarias en los márgenes). Destaco la cuantía de ejercicios de cálculo mental que propone la editorial Bruño. Con respecto a los apartados y unidades dedicadas al tema del que se ocupa este trabajo, y como ya se ha comentado, Bruño dedica dos unidades (una para los números naturales, que incluyen la divisibilidad, y otra para los números enteros) y Anaya y Santillana solo una (no hacen referencia a los naturales). La mayoría de los contenidos son análogos así que solo se van a destacar las diferencias más notables. Por una parte, destaco que la editorial Bruño añade el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor y la relación entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, lo que me parece muy útil por la eficacia de este procedimiento cuando se trabaja con números altos. También incluye varias tablas que resumen la información de forma muy visual. Además, me sorprende que no exponga el criterio de divisibilidad del 9, el cual aparece como estándar de aprendizaje evaluable en el BOCyL.

Como información complementaria que aparece en los márgenes, destaco el algoritmo para calcular números primos denominado criba de Eratóstenes, el cual aparece en las editoriales de Anaya y Bruño, y retos para desarrollar el pensamiento, en la editorial Santillana.

En la siguiente tabla se recogen las diferencias comentadas más importantes en cuanto a los contenidos.

Tabla 9. Diferencias más importantes entre los contenidos de las editoriales Anaya, Bruño y Santillana.

	ANAYA	BRUÑO	SANTILLANA
Algoritmo de Euclides		×	
Relación MCD-mcm		×	
Criterios de divisibilidad	2, 3, 5, 9, 10, 11	2, 3, 5, 11	2, 3, 5, 9, 10, 11
Criba de Eratóstenes	×	×	
Retos para desarrollar el pensamiento			×

Para terminar la comparación en torno al aspecto estructural de la unidad, se va a comentar el último bloque al que hemos denominado en la tabla (*Tabla 8*) "Actividades finales". En él se incluyen distintos tipos de actividades que se van a desglosar a continuación.

En primer lugar, todas las editoriales dedican varias páginas a ejercicios y problemas resueltos y propuestos (Anaya y Santillana de forma alternada, Bruño en páginas diferentes) sobre los contenidos de la unidad y de distintos tipos como los de aplicación directa o los de profundización, en los que es necesaria un tiempo para la reflexión. Entonces solo puedo destacar una disimilitud y es la diferenciación de los ejercicios según su grado de dificultad. Las editoriales Anaya y Santillana indican la dificultad en cada ejercicio mientras que Bruño los agrupa según su complejidad.

Por otro lado, el libro de Anaya es el único que dedica una parte de una de las páginas finales a una breve lectura relacionada con los contenidos estudiados en la unidad, por lo que se contribuye en mayor medida al desarrollo de la competencia en comunicación lingüística. Otras formas de desarrollar esta competencia que también aparecen en las otras editoriales son, como es evidente, la comprensión de los enunciados de los ejercicios y la exposición de la teoría.

Por otra parte, en los libros de las tres editoriales aparecen problemas relacionados con la vida cotidiana. Además, en las editoriales de Anaya y Santillana se dedica un apartado a aprender a resolver problemas con trucos y procedimientos paso a paso. Además, estas editoriales potencian el desarrollo de la competencia del sentido de iniciativa y espíritu emprendedor y la de aprender a aprender con ejercicios en los que se desarrolla la creatividad (en el caso de Anaya) o con una actividad de trabajo cooperativo (en el caso de Santillana), que también desarrolla la competencia social y cívica. Otras actividades que solo aparecen en el libro de Santillana son los ejercicios extraídos de las pruebas internacionales PISA. Su objetivo es evaluar el grado de desarrollo de las distintas competencias. Por su parte, la editorial Bruño dedica varias páginas al uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs), lo que promueve el desarrollo de la competencia digital.

Para finalizar la unidad, las tres editoriales realizan una autoevaluación para que el alumno tenga conocimiento de lo que ha aprendido. Destaco que la editorial Bruño termina con un esquema que resume la unidad, lo que es muy útil para que los alumnos vean rápidamente la relación entre todos los conceptos estudiados.

El segundo aspecto que se va a comentar es el lenguaje utilizado. En este caso, no observo diferencias. Las tres editoriales utilizan un lenguaje claro y sencillo, de forma acertada para el grupo de edad al que va dirigido. Las explicaciones teóricas y los problemas son fácilmente comprensibles por el alumnado, lo que promueve el desarrollo, como ya se comentó, de la competencia en comunicación lingüística. Por otra parte, las tres editoriales utilizan la representación verbal, gráfica, numérica y algebraica para expresar el contenido matemático, siendo bastante similar en las tres. Se puede destacar que la editorial Santillana utiliza más representación verbal y menos gráfica que las otras dos. Sin embargo, no aprecio diferencias notables en las representaciones numérica y algebraica.

En resumen, todas las editoriales exponen la teoría de forma clara y similar, y muestran una gran cantidad y variedad de ejercicios relacionados, algunos, con la vida cotidiana. En cambio, mientras que Anaya se decanta por las lecturas, el aprender a resolver problemas y la iniciativa y creatividad, Bruño opta por el uso de las TICs y la practicidad visual con tablas y esquemas, y Santillana, por el aprender a resolver problemas, el trabajo cooperativo y la introducción de actividades extraídas de las pruebas PISA.

Contribución a las Inteligencias Múltiples

Obviamente, los tres libros de texto y, en general, cualquier libro de Matemáticas, contribuye principalmente al desarrollo de la inteligencia lógico-matemática. Además, como el lenguaje utilizado es comprensible y claro y atiende a representaciones variadas, se contribuye a desarrollar la inteligencia lingüística. También se contribuye a esta IM al proponer problemas en los que las respuestas no son únicamente numéricas y requieren de una correcta expresión escrita, lo cual es llevado a cabo por las tres editoriales. Por otra parte, Anaya propone una lectura al final del tema por lo que se podría decir que fomenta en mayor medida el desarrollo de esta inteligencia.

En cuanto a las inteligencias espacial, naturalista e intrapersonal, los tres libros de texto las desarrollan de la misma forma, en los problemas propuestos en el caso de las dos primeras y en la autoevaluación en el caso de la tercera.

Por otro lado, la inteligencia interpersonal solo se promueve en la editorial Santillana, con la propuesta de un trabajo cooperativo.

Por último, destaca que ninguna de las tres editoriales propone actividades para que los alumnos desarrollen la inteligencia musical o la cinético-corporal.

Por otra parte, los alumnos también desarrollan la inteligencia intrapersonal al reflexionar sobre la resolución de los distintos problemas y mediante el trabajo personal en el aula.

En la siguiente tabla, se presentan las relaciones comentadas entre las Inteligencias Múltiples y los aspectos de cada editorial que contribuyen a cada una.

Tabla 10. Contribuciones de cada editorial (Anaya, Bruño y Santillana) a las Inteligencias Múltiples.

INTELIGENCIA	**ANAYA**	**BRUÑO**	**SANTILLANA**
Lingüística	Contenidos Problemas Lectura	Contenidos Problemas	Contenidos Problemas
Lógico-matemática	Siempre	Siempre	Siempre
Espacial	Problemas	Problemas	Problemas
Musical	-	-	-
Cinético-corporal	-	-	-
Intrapersonal	Autoevaluación	Autoevaluación	Autoevaluación
Interpersonal	-	-	Trabajo cooperativo
Naturalista	Problemas	Problemas	Problemas

Contribución al aprendizaje cooperativo

En este apartado, solo se puede comentar si existe alguna actividad sobre el aprendizaje cooperativo ya que este tipo de aprendizaje se basa en la formación de grupos y en cómo estructurar las actividades, y eso es tarea del docente. En referencia a estos contenidos, solo aparece el aprendizaje cooperativo en una de las editoriales, la editorial Santillana. Es un proyecto propuesto al final del tema que consiste en la organización de un campeonato y en la participación en todas sus etapas: planificación de las actividades, presupuesto, costes, etc. Sin embargo, la editorial Anaya tiene un icono específico para las actividades planteadas para trabajar en aprendizaje cooperativo por lo que en otros temas sí que aparecen.

Contribución a la atención a la diversidad

En los libros de texto no aparecen muchas aportaciones para que los profesores puedan atender a la diversidad porque cada contexto educativo es diferente. Sin embargo, se van a destacar dos contribuciones importantes.

La primera es la diferenciación de los ejercicios según su grado de dificultad: en cada ejercicio, en las editoriales Anaya y Santillana, y en grupos de dificultad, en la editorial Bruño.

La segunda es la variedad de métodos que se exponen en el libro de texto de la editorial Bruño para hallar el máximo común divisor de dos números naturales: a través de la descomposición como producto de primos, con el Algoritmo de Euclides y mediante la intersección de conjuntos. En cambio, las otras dos editoriales solo exponen la primera. Sin embargo, para el cálculo del mínimo común múltiplo, es la editorial Anaya la que utiliza otro método además del de la factorización. Lo hace a través de un ejemplo donde se aprecia que el mínimo común múltiplo es el primer número de una recta numérica donde coinciden los pasos de dos personas. La editorial Santillana enseña un único método en ambos casos, el de la factorización.

En conclusión, los diferentes libros de texto analizados tienen puntos fuertes pero también puntos débiles por lo que los docentes no deberían guiarse únicamente por un libro de texto. Una buena opción sería tomar un libro como referencia y completar el desarrollo de las competencias o Inteligencias Múltiples potenciadas en menor medida con otros recursos o con información extraída de otros libros. De todos modos, el departamento didáctico de Matemáticas, para elegir uno u otro libro para la enseñanza de la asignatura, tendrá que estudiar en profundidad la mayor cantidad de libros posibles analizando sus posibles ventajas y desventajas.

d. ANÁLISIS COGNITIVO

Tras el estudio y el análisis del contenido de la divisibilidad y los números enteros, se va a realizar un análisis cognitivo. Con esto, los profesores planifican las expectativas de aprendizaje o los objetivos de aprendizaje que un alumno debería adquirir sobre un tema y un nivel concreto para poder planificar las sesiones siguiendo unos determinados objetivos. En este apartado también se dedicará un subapartado a la enumeración de errores y dificultades más usuales en el aprendizaje de estos contenidos y su relación con la consecución de los diferentes objetivos.

i. Objetivos asociados al aprendizaje

En el apartado anterior se enumeraron los puntos más importantes en el aprendizaje de los números enteros y divisibilidad. En este apartado se van a enumerar los estándares de aprendizaje evaluables, que se tomarán como referencia para evaluar el aprendizaje y, por tanto, como los objetivos que el alumno debe lograr. También se relacionarán con las competencias clave. Los estándares de aprendizaje que se establecen en la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, de la Comunidad de Castilla y León son los siguientes:

1.1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.

1.2. Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.

1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.

2.1. Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales.

2.2. Aplica los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11 para descomponer en factores primos números naturales y los emplea en ejercicios, actividades y problemas contextualizados.

2.3. Identifica y calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales mediante el algoritmo adecuado y lo aplica problemas contextualizados

2.5. Calcula e interpreta adecuadamente el opuesto y el valor absoluto de un número entero comprendiendo su significado y contextualizándolo en problemas de la vida real.

4.2. Realiza cálculos con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa.

Además, se incluye, en la siguiente tabla, la relación entre los estándares de aprendizaje evaluables y las competencias clave, mostrando el recuento total de competencias involucradas en los objetivos.

Tabla 11. Relación entre los estándares de aprendizaje evaluables y las competencias clave.

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	COMPETENCIAS CLAVE						
	CCL	CMCT	CD	AA	CSC	SIEP	CEC
E1.1	x	x		x	x	x	x
E1.2		x	x	x			
E1.3	x	x	x			x	
E2.1	x	x		x	x	x	
E2.2	x	x		x		x	
E2.3	x	x		x	x	x	
E2.5	x	x		x			
E4.2	x	x		x		x	
Total	7	8	2	7	3	6	1

Obviamente, la competencia lógico-matemática es la única que se desarrolla con el logro de todos los objetivos didácticos, seguida de cerca por la competencia en comunicación lingüística, aprender a aprender y el sentido de iniciativa y espíritu emprendedor, necesarias para comprender un problema, utilizar una estrategia para su correcta resolución y razonar y expresar el resultado con argumentos lógicos.

Por otra parte, las competencias sociales y cívicas, digital y conciencia y expresiones culturales no aparecen reflejadas en la mayoría de los objetivos. La primera de ellas, se tratará de desarrollar en esta propuesta didáctica a través del trabajo cooperativo. Las otras dos se trabajarán a través de algunas de las actividades propuestas y mediante la presentación del cuaderno de clase.

ii. Errores y dificultades en el aprendizaje

En este apartado, se presenta una tabla con los errores y las dificultades más comunes que presentan los alumnos en el aprendizaje de los números enteros y la divisibilidadextraídos de los libros de la editorial Síntesis (González, et al., 1990; Sierra et al., 1989). Conocer estas dificultades, permite a los profesores anticiparse a la situación y resolverla de forma eficaz. En la tabla también aparecen los estándares del subapartado anterior relacionados con las dificultades y errores más comunes.

Tabla 12. Dificultades en el aprendizaje y los estándares de aprendizaje evaluables con los que se relaciona.

		DIFICULTADES Y ERRORES	ESTÁNDARES
NÚMEROS ENTEROS	D1	No saber relacionar los números enteros (en particular, los enteros negativos) con la realidad	E1.1; E1.3
	D2	Confundir el orden de los números enteros al ignorar el signo	E1.1
	D3	Cometer errores en las operaciones: jerarquía de operaciones, regla de los signos,...	E1.2; E4.2
	D4	No entender el concepto de valor absoluto	E2.5
	D5	Calcular de forma incorrecta una incógnita a partir de su valor absoluto quedándose únicamente con el valor positivo	E2.5
DIVISIBILIDAD	D6	Confundir los conceptos de múltiplo y divisor	E2.1
	D7	Confundir la infinitud de los múltiplos con la finitud de los divisores	E2.1
	D8	Confundir los conceptos de ser "divisor" y "divisible por"	E2.1
	D9	Confundir los criterios de divisibilidad conocidos: 2,3,5,9,10,11	E2.2
	D10	No reconocer si un número es compuesto cuando no tiene divisores cuyos criterios de divisibilidad no se conocen	E2.2
	D11	No saber obtener todos los divisores de un número a partir de su factorización en números primos	E2.2
	D12	Confundir los conceptos de mcm y mcd	E2.3
	D13	No realizar de forma correcta el cálculo del mcm y mcd	E2.3
	D14	No distinguir si un problema se resuelve utilizando el mcm o el mcd	E2.3

En la siguiente tabla se muestra la relación entre las dificultades y errores anteriores y los estándares de aprendizaje evaluables.

Tabla 13. Relación entre las dificultades en el aprendizaje y los estándares de aprendizaje evaluables.

DIFICULTADES Y ERRORES	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES							
	E1.1	E1.2	E1.3	E2.1	E2.2	E2.3	E2.5	E4.2
D1	x		x					
D2	x							
D3		x						x
D4							x	
D5							x	
D6				x				
D7				x				
D8				x				
D9					x			
D10					x			
D11					x			
D12						x		
D13						x		
D14						x		
Total	2	1	1	3	3	3	2	1

Como se puede observar, los contenidos en los que más errores cometen los alumnos están relacionados con la divisibilidad (obviando los errores en operaciones con números enteros). Concretamente son: la distinción entre múltiplo y divisor y, por tanto, entre mínimo común múltiplo y máximo común divisor, y la correcta descomposición de un número en factores primos.

Por otra parte, en el momento de crear las actividades de esta propuesta didáctica, se han tenido en cuenta los errores y dificultades más comunes que presentan los alumnos siguiendo lo obtenido en este apartado. Por tanto, se han relacionado las actividades con los estándares de aprendizaje evaluables y, además, se han creado teniendo en cuenta los que más dificultades conllevan, con el objetivo de que el profesor se anticipe a situaciones problemáticas en el aula a tiempo.

4. METODOLOGÍA DE AULA

Para el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje de los contenidos de números enteros y divisibilidad en el aula, se van plantear problemas que permitan el desarrollo de diversas inteligencias y, con ello, de las competencias clave. Además, se va a plantear la resolución de estos problemas a través del aprendizaje cooperativo que también contribuye al desarrollo integral del alumno y a la atención a la diversidad. Sin embargo, debe implantarse de forma gradual. El profesor no puede entrar el primer lectivo del curso, dividir al alumnado en grupos sin conocer las relaciones sociales que existen entre ellos (si dos alumnos se llevan bien o existen conflictos entre ellos, etc.) y obligarles a trabajar de forma cooperativa. Por tanto, en la propuesta de problemas que se presenta en este trabajo unos se podrán resolver de forma individual y otros a través del aprendizaje cooperativo. Es decir, se combinarán diversas metodologías de aula.

Al comienzo de la sesión, se realizará una activación de los conocimientos previos mediante la formulación de preguntas al alumnado, fomentando así una participación activa en el aula, y a través de la resolución de las tareas propuestas en la sesión anterior, por parte de los alumnos, para fomentar una correcta expresión oral y corporal, o por el profesor en la pizarra. De esta manera se trabajan las inteligencias lingüística e interpersonal, además de la lógico-matemática.

Por otra parte, algunos de los nuevos conceptos o contenidos serán expuestos por el profesor verbalmente y haciendo uso de la pizarra, acompañándose de ejemplos y vídeos o imágenes en la pizarra digital (si existe). Esto permitirá al alumno integrar los nuevos contenidos en los ya existentes para conseguir un aprendizaje significativo. También se alternará con la realización de ejercicios de distinta dificultad para que los alumnos no se acostumbren a los ejercicios "tipo" o mecánicos y desarrollen el pensamiento reflexivo, el sentido de iniciativa y la capacidad para afrontar nuevos problemas, contribuyendo así al desarrollo de las inteligencias intrapersonal y lógico-matemática.

Otros conceptos se introducirán en el aula mediante el aprendizaje por descubrimiento, en el cual el alumno adquiere una gran parte de los conocimientos por sí mismo. En este caso, se contribuye al desarrollo de los mismos tipos de inteligencia que en el caso anterior.

Además, el profesor intentará, en la medida que sea posible, relacionar los contenidos con el mundo real para promover la motivación del alumnado, su memoria asociativa y lograr un aprendizaje significativo, y el uso de juegos.

Las tareas propuestas para su realización en casa (tareas para casa, TPC), se realizarán de forma individual y serán propuestas teniendo en cuenta el nivel y las características de los alumnos, el ritmo de aprendizaje y el tiempo de resolución de tareas, con el fin de atender a la diversidad del alumnado. Sin embargo, las actividades y tareas propuestas para su realización en el aula se harán en grupos siguiendo algunas de las técnicas del aprendizaje cooperativo y solo estarán asociadas al ritmo de aprendizaje y el nivel académico específico del alumno cuando el trabajo sea individual. En los siguientes apartados se explicará más detalladamente.

A continuación, se explican las diferentes técnicas de aprendizaje cooperativo que se pretenden utilizar en la resolución de algún problema.

La técnica principal se denomina "Grupos base y grupos de trabajo" y se expone en el capítulo 18 del libro *Aprendizaje cooperativo: una metodología con futuro. Principios y aplicaciones*, el cual aparece referenciado en la bibliografía. Sus autores, Gavilán y Alario (2010), concretan que esta técnica, además de basarse en los cinco elementos básicos del aprendizaje cooperativo que se describieron en el "Marco teórico", acentúa la responsabilidad individual dentro del grupo (cada alumno debe saber poner en práctica lo aprendido con el grupo), las aportaciones de cada componente del grupo (dar importancia a la necesidad de la participación activa de todos los integrantes del grupo para la obtención de recompensas) y la igualdad de oportunidades (todos los alumnos deben poder colaborar en función de sus posibilidades).

Por otra parte, esta técnica requiere la formación de dos tipos de grupos: los grupos base (GB) y los grupos de trabajo (GT), y cada alumno debe pertenecer a uno de cada tipo.

Los grupos base son heterogéneos en cuanto a capacidades, rendimiento académico, formas de aprender y su nivel de aceptación o rechazo dentro del grupo. Sin embargo, tiene que ser una heterogeneidad moderada. No pueden coexistir alumnos con diferencias extremas en un mismo grupo. Además, son los grupos donde los alumnos más pueden aprender de los demás y si tienen dudas pueden ayudarse y recibir apoyo de los demás integrantes ya que todos realizan la misma tarea (y la misma que los demás grupos base). También, el tener puntos de vista diferentes contribuye al aprendizaje. Por ello, se considera que el grupo base es el auténtico grupo cooperativo. Además, la tarea no se da por finalizada hasta que cualquiera de sus integrantes sea capaz de resolverla por sí mismo y, como la calificación es la misma para todos los componentes del grupo, se acentúa el interés por que todos aprendan lo máximo posible.

El otro tipo de grupo, el grupo de trabajo, se forma con el objetivo de que sus integrantes pongan en práctica el aprendizaje adquirido con el grupo base. A diferencia de los anteriores, estos grupos son homogéneos en cuanto al nivel académico por lo que cada grupo tendrá una tarea adecuada a su nivel de conocimientos. De este modo se promueve la igualdad de oportunidades y, como la calificación es individual, también la responsabilidad individual (cada alumno debe aprender lo máximo posible en el grupo base para cuando trabaje de forma individual en los grupos de trabajo) y grupal (cada alumno deben procurar que los demás compañeros aprendan lo máximo posible en el grupo base para que puedan realizar correctamente la tarea individual en el grupo de trabajo).

En la siguiente tabla aparecen resumidas las principales características de estos grupos.

Tabla 14. Principales características del los grupos base y los grupos de trabajo.

<table>
<tr><th>Grupos base</th><th>Grupos de trabajo</th></tr>
<tr><td>- Heterogéneos en nivel.
- Todos hacen el mismo trabajo.
- Los estudiantes de un grupo base obtienen la misma nota.</td><td>- Homogéneos en nivel.
- Trabajan individualmente.
- Cada estudiante obtiene su nota.</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>A_1</td><td>B_1</td><td>C_1</td><td>D_1</td></tr><tr><td>A_2</td><td>B_2</td><td>C_2</td><td>D_2</td></tr><tr><td>A_3</td><td>B_3</td><td>C_3</td><td>D_3</td></tr><tr><td>A_4</td><td>B_4</td><td>C_4</td><td>D_4</td></tr></table></td><td><table><tr><td>A_1 B_1 C_1 D_1</td></tr><tr><td>A_2 B_2 C_2 D_2</td></tr><tr><td>A_3 B_3 C_3 D_3</td></tr><tr><td>A_4 B_4 C_4 D_4</td></tr></table></td></tr>
</table>

En la tabla aparece una imagen con los grupos base (a la izquierda) y los de trabajo (a la derecha) en una supuesta clase formada por 16 alumnos (A_i, B_i, C_i, D_i, con $i = 1, \dots, 4$).Los cuatro grupos base (con cuatro alumnos cada uno) están formados por los alumnos denominados con la misma letra. Es decir, el primer grupo base está formado por los alumnos correspondientes a la letra $A(A_1$, A_2,A_3 y $A_4)$, el segundo por los alumnos denominados con la $B(B_1$, B_2, B_3 y $B_4)$, el tercero con la $C(C_1$, C_2, C_3 y $C_4)$ y el cuarto con la $D(D_1$, D_2, D_3 y $D_4)$. Sin embargo, cuando el trabajo se realiza en los grupos de trabajo, los alumnos de cada grupo base se separan y se agrupan en los denominados grupos de trabajo, los cuales se forman según el índice de las letras (que indicarán el nivel académico de cada grupo). Es decir, el primer grupo formado por A_1, B_1,C_1 y D_1, el segundo por A_2, B_2, C_2 y D_2, el tercero por A_3, B_3, C_3 y D_3 y el último por A_4, B_4, C_4 y D_4.

Más adelante, se dedicará un subapartado a la formación de los grupos y su distribución en el aula. Antes de eso, se explican otras técnicas utilizadas para implantar el aprendizaje cooperativo en el aula, clasificadas como técnicas simples.

La primera es la denominada “Folio giratorio” y se utilizará al introducir conceptos nuevos para que los alumnos partan de los conocimientos previos adquiridos en cursos anteriores.

En grupos de cuatro personas (se utilizarán los grupos base formados para la técnica anterior), los alumnos deberán escribir en un folio lo que el profesor considere sobre los contenidos a estudiar. Primero escribirá un integrante del grupo todo lo que sabe sobre ese contenido en el folio (el miembro del equipo que empieza deberá ir rotando) y se lo pasará al compañero que tenga al lado. Así, sucesivamente hasta que haya pasado por todos los alumnos del grupo unas cuantas veces siguiendo un orden establecido. Además, cada alumno debe escribir en un color diferente y escribir su nombre al lado para que el profesor pueda conocer las aportaciones individuales. Mientras que un integrante escribe, los demás pueden debatir o matizar las aportaciones. Una vez que todos han participado, el grupo redactará una respuesta que será responsabilidad de todos y, posteriormente, las respuestas se pondrán en común con toda la clase.

Otra de las técnicas simples utilizada se denomina “1-2-4”, que se utilizará para la realización de algunas de las actividades propuestas. Además, esta forma de trabajar ayuda a la mejor comprensión de las mismas.

En esta técnica los alumnos trabajarán de forma individual, por parejas y en los grupos base. Se parte de una cuestión común para todo el grupo, la cual realicen primero de forma individual, después por parejas y por último en los grupos base, donde deberán llegar a una respuesta común y aceptada por todo el grupo. De este modo, los alumnos interactúan e intercambian respuestas, observando que todas las aportaciones suman y que trabajando en grupo se obtienen mejores respuestas que de forma individual.

En el caso de las actividades propuestas, se ha utilizado, además, una variante de esta técnica. La mitad del grupo trabajará sobre una cuestión y la otra mitad sobre otra. De ese modo, al consenso de la respuesta se debe llegar por parejas y, posteriormente, se explicará el resultado a los demás componentes del grupo. Después, realizarán más actividades sobre esos conceptos para que todos aprendan a realizarlas por sí mismos.

La tercera técnica es “Números iguales juntos”, que, en ocasiones, se utilizará como complemento de las técnicas anteriores para la resolución de las tareas.

Consiste en que cada grupo base resuelva una tarea en común de modo que todos los integrantes del grupo sepan resolverla. Posteriormente, se numeran del uno al cuatro. El profesor elegirá un número al azar y los integrantes de cada grupo que tengan ese número saldrán a la pizarra a resolver el ejercicio en conjunto. Por tanto, de esta forma se potencia la exigencia mutua entre los miembros del equipo ya que la resolución favorable o no del integrante que ha salido a la pizarra formará parte de la evaluación del grupo.

Por último, algunos contenidos se trabajarán mediante la realización de juegos en el aula para aumentar la motivación del alumnado y que aprendan a la vez que se divierten.

Formación de los grupos y su distribución en el aula

Para conformar los grupos, es importante y necesario que el docente obtenga información sobre las relaciones sociales entre los alumnos. Esto se hará a través de un sociograma del grupo de clase que deberá realizar cada alumno el primer día lectivo, las calificaciones obtenidas el curso anterior en la asignatura de Matemáticas u otra información relevante como aportaciones de otros profesores.

Una vez conocidos estos datos, el profesor clasificará a los alumnos en tres grupos según su nivel académico: alto (25% del alumnado), medio (50% del alumnado) y bajo (25% del alumnado). Luego formará los grupos base escogiendo cuatro alumnos según su nivel (un alumno con nivel alto, dos con nivel medio y otro con nivel bajo) y las relaciones sociales existentes u otra información relevante. Para la formación de los grupos de trabajo dividirá los grupos de alumnos clasificados según su nivel en grupos de cuatro personas. Cabe destacar que esto es lo preferible pero puede darse el caso de que exista algún grupo formado por tres alumnos.

Además, estos grupos no variarán a lo largo del estudio de los contenidos de números enteros y divisibilidad a excepción de que surja algún conflicto.

Tabla 15. Alumnos clasificados según su nivel académico.

Nivel académico alto	Nivel académico medio	Nivel académico bajo
A_1, B_1, C_1, D_1	A_2, B_2, C_2, D_2 A_3, B_3, C_3, D_3	A_4, B_4, C_4, D_4

Esta tabla, donde se muestran dieciséis alumnos representados por letras que pertenecen a cada nivel académico con la misma notación que en la tabla anterio, se ha creado siguiendo la misma notación que en la tabla anterior. Entonces, se tiene que el subíndice de las letras indica el nivel al que pertenecen los alumnos: subíndice 1 para el nivel alto, subíndices 2 y 3 para el nivel medio y subíndice 4 para el nivel bajo.

Por otra parte, las parejas se formarán dividiendo los grupos base en dos grupos. En el caso que existiera un grupo de tres alumnos, el alumno que no quede emparejado se juntaría con una pareja de otro grupo base que tenga los mismos contenidos que él. Con respecto al nivel académico de las parejas, se juntará al alumno con nivel alto con uno de nivel medio (el que tenga menor nivel dentro de ese) y el otro de nivel medio con el de nivel bajo.

En la siguiente imagen se muestra una posible formación de los grupos base, los grupos de trabajo y de las parejas, con los alumnos representados en las tablas anteriores.

Tabla 16. Formación de las parejas, grupos base y grupos de trabajo.

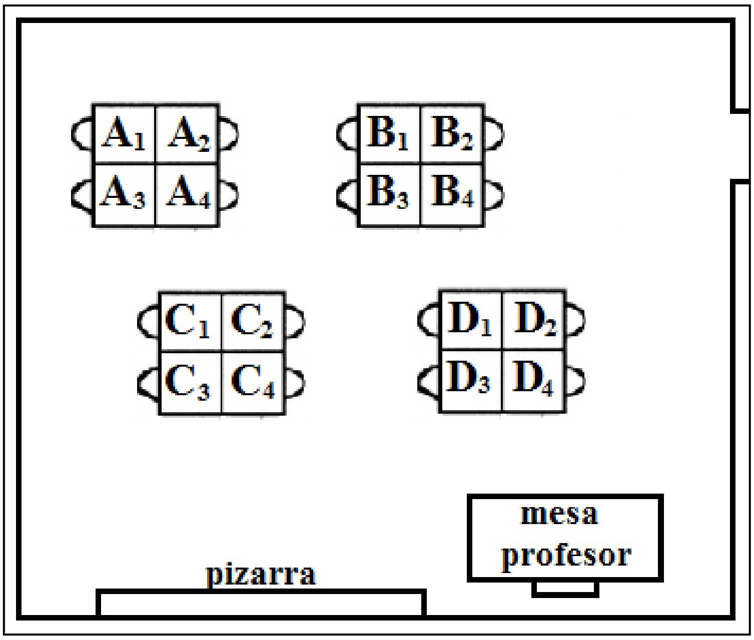
Parejas	Grupos base	Grupos de trabajo
A_1, A_3A_2, A_4	A_1, A_2, A_3, A_4	A_1, B_1, C_1, D_1
B_1, B_3B_2, B_4	B_1, B_2, B_3, B_4	A_1, B_1, C_1, D_1
C_1, C_3C_2, C_4	C_1, C_2, C_3, C_4	A_1, B_1, C_1, D_1
D_1, D_3D_2, D_4	D_1, D_2, D_3, D_4	A_1, B_1, C_1, D_1

Además, cada integrante del grupo base debe tener un rol. En este caso, los grupos están formados por cuatro personas por lo que se han considerado los siguientes roles:

- Portavoz:expone las conclusiones a las que su grupo llega en una determinada actividad al resto de la clase y fomenta la participación activa de todo el grupo.
- Secretario: escribe las hojas de actividades que, posteriormente, se entregarán al profesor y guarda registro de todos los acuerdos a los que llegue el grupo.
- Moderador: controla el tono de voz, el turno de palabra y evita la dispersión del grupo.
- Coordinador:controla el tiempo y el material, y reparte la tarea entre los integrantes del grupo, si es necesario.

En cuanto a la distribución de los grupos en el aula, lo mejor es una distribución en la que todos los integrantes del grupo estén próximos y puedan interactuar cara a cara sin hablar alto, independientes de los demás grupos y en la que puedan visualizar la pizarra fácilmente. También es importante que el profesor pueda acceder a ellos sin dificultad. Una posible distribución de los grupos base (con la notación anterior) es la siguiente.Además, esta distribución cooincide cuando el trabajo es en parejas.

Ilustración 4. Distribución de los grupos base en el aula. Elaboración propia.



Con todo lo descrito en este apartado, se puede observar que es una metodología basada en la atención a la diversidad del alumnado ya que los alumnos se ayudan entre ellos y aprenden de los demás, cuando trabajan en el grupo base o por parejas, y tienen tareas acordes con su nivel, cuando trabajan individualmente en el grupo de trabajo. Además, como se verá más adelante, se han creado actividades para que los alumnos desarrollen las distintas Inteligencias Múltiples enunciadas por Gardner. La mayoría de estas tareas se realizarán en los grupos base para que todos tengan la opción de desarrollar todas las inteligencias y aprendan a ver la utilidad de las matemáticas en todos los ámbitos.

Por otra parte, se va a comentar brevemente, porque no es objetivo de este trabajo, cómo se evalúa cuando el aprendizaje es cooperativo. Como ya se ha comentado, una característica fundamental del aprendizaje cooperativo es la interdependencia positiva. Para conseguir que todos los alumnos estén predispuestos a aprender y a que aprendan los demás, se tiene que destinar una parte de la evaluación al trabajo de los demás compañeros del grupo base. Sin embargo, si es la primera vez que el alumnado trabaja de forma cooperativa, lo preferible es utilizar una evaluación que de más peso al trabajo individual hasta que se pueda afirmar que los grupos están cohesionados en su totalidad. En caso contrario, este cambio de metodología puede suponer un rechazo hacia el trabajo en equipo. Después, se puede ir aumentando poco a poco el porcentaje de calificación dedicado al trabajo en grupo pero destinando un peso importante al trabajo individual (podría ser, por ejemplo, 40% trabajo individual y examen escrito, 30% calificación del grupo base, 20% media de las calificaciones aportadas por cada componente del grupo base, 10% comportamiento y actitud en clase).

5. DESARROLLO DE LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES DESDE LA ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y EL APRENDIZAJE COOPERATIVO

En este apartado se va a exponer la propuesta para el desarrollo de las sesiones en las que se tratan los contenidos de números enteros y divisibilidad. Se divide en tres apartados: uno para la temporalización de los contenidos, otro donde aparece la descripción de las actividades de enseñanza-aprendizajey el último con el planteamiento de la evaluación del alumnado en el aprendizaje de los contenidos de enseñanza-aprendizaje.

a. DISTRIBUCIÓN TEMPORAL Y SECUENCIACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Los contenidos de números enteros y divisibilidad son los primeros que se imparten en el curso de 2º E.S.O. (al comienzo del primer trimestre) porque son imprescindibles para el correcto desarrollo del resto del curso. Además, el desarrollo de estos contenidos está planteado en un total de 10 sesiones (11 si contamos el examen de la unidad) de una duración de 50 minutos cada una, aproximadamente. Sin embargo, el número de sesiones puede variar para ajustarse al ritmo de aprendizaje del alumnado.

Por otra parte, el primer día de clase se suele dedicar a la explicación del planteamiento general de la asignatura durante el curso: objetivos, contenidos, criterios de evaluación, etc. Como estas explicaciones no suelen ocupar una sesión de 50 minutos, el resto de la sesión (y si es necesario, también otra sesión) se utilizará para presentar a los alumnos en qué consiste el aprendizaje cooperativo y cómo van a trabajar en el aula. Además, deberán realizar un sociograma del grupo de clase y un cuestionario sobre los roles en el aula para que el profesor pueda conformar los grupos en la siguiente sesión.

En la siguiente tabla se describen brevemente las sesiones dedicadas a los números enteros y la divisibilidad, indicando debajo de cada sesión los estándares de aprendizaje evaluablesdescritos en el apartado de “Análisis cognitivo” que se trabajan. Las actividades y, por tanto, las sesiones, se han establecido teniendo en cuenta los errores y las dificultades más comunes que cometen los alumnos con el objetivo de prevenirlos. Además, las actividades aparecen en distintos colores según su tipología: de activación de conocimientos previos (rosa), de aprendizaje por descubrimiento (verde), “tipo” o mecánicas (negro, al igual que la teoría y la corrección de las actividades), para el desarrollo de las Inteligencias Múltiples (azul) y juegos matemáticos (rojo); y serán explicadas en el siguiente apartado.

Tabla 17. Temporalización y contenidos de las sesiones de clase.

SEMANA 1			
SESIÓN 1 **Introducción al tema** **E1.1**	**SESIÓN 2** **El centro comercial** **E1.1, E1.2, E1.3, E2.5, E4.2**	**SESIÓN 3** **La tienda de juegos** **E1.2, E4.2**	**SESIÓN 4** **El restaurante** **E1.3, E2.1**
Composición grupos y distribución en el aula **Actividad ¿Qué sabes sobre los números naturales y los enteros? –** El folio giratorio (GB) **Teoría** – Números enteros, orden en la recta numérica, utilidad en contextos reales **Actividades** (individual)	**Corrección** actividades **Teoría** – Valor opuesto y absoluto de un número entero. Operaciones con números enteros, regla de los signos. Uso de la calculadora **Actividad – El ascensor** (evaluable-GB) **Actividades**(individual)	**Corrección** actividades **Actividad – Bingo matemático** (evaluable-individual) **Actividad – El mensaje secreto**(GB)	**Teoría Múltiplos y divisores –** Técnica del 1-2-4 (evaluable-GB) **Actividad – El restaurante** (evaluable-GT) **Actividades** (individual)
SEMANA 2			
SESIÓN 5 **El supermercado** **E1.3, E2.1, E2.2**	**SESIÓN 6** **El cine** **E2.1, E2.2**	**SESIÓN 7** **Tienda de viajes** **E1.3, E2.3**	**SESIÓN 8** **Compras para la casa** **E1.3, E2.3**
Corrección actividades **Teoría Criterios de divisibilidad** – Técnica 1-2-4 (evaluable-GB) **Actividad - El supermercado** (evaluable-GT) **Actividades** (individual)	**Aprendizaje por descubrimiento –** Números primos **Teoría** – Números primos y compuestos. Descomposición en factores primos **Actividad - La criba de Eratóstenes** **Actividades** (individual)	**Corrección** actividades **Teoría** – Mínimo común múltiplo **Actividad - Paseo por el centro comercial** (evaluable-GB) **Actividad–Viaje en el tiempo** (evaluable-GT)	**Teoría** – Máximo común divisor **Actividad – Compra de baldosas para la casa**(evaluable-GB) **Actividad - Incendiosforestales** (evaluable-GT) **Actividades** (individual) – MCD y mcm

SEMANA 3			
SESIÓN 9 **La tienda de música** **E2.3**	**SESIÓN 10** **Repaso general y resolución de dudas**	**SESIÓN 11** **Examen escrito**	
Corrección actividades **Teoría** – Algoritmo de Euclides. Relación MCD y mcm **Actividad – Los ritmos euclídeos** (evaluable-GB) **Debate** - Ventajas e inconvenientes del cálculo del MCD por distintos métodos **Actividades**(individual)	**Corrección** actividades **Autoevaluación** (individual) **Crucigrama** de definiciones (individual) **Mapa conceptual** o esquema a cuatro bandas (GB)	**Examen escrito** de la unidad	

b. ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

En este apartado se describirán las actividades planteadas en esta propuesta didáctica, relacionándolas con las inteligencias múltiples, las competencias clave y los objetivos y conocimientos previos de cada actividad. Al final del apartado se muestra una tabla que resume algunas de estas relaciones.

▪ ACTIVIDADES DE ACTIVACIÓN DE CONOCIMIENTOS PREVIOS

De este tipo solo existe una única actividad que se realizaría en la primera sesión.

1. ¿Qué sabes sobre los números naturales y los enteros?

(Elaboración propia)

ENUNCIADO: La actividad consiste en que escribáis todo lo que recordéis sobre los números naturales y los números enteros. Para ello, debéis coger una hoja para todos y escribir vuestros nombres (cada uno con un bolígrafo de un color diferente). Después, debéis pasaros la hoja por turnos y escribir todo lo que sepáis sobre el conjunto de los números naturales y el de los números enteros. Si queréis podéis guiaros por la siguiente lista:

- Definición del conjunto, letra con la que se representa.

- Representación en una recta, operaciones y su jerarquía.
- ¿Para qué se utilizan o dónde aparecen en un centro comercial?

Una vez que la hoja haya pasado por todos los componentes del grupo como mínimo tres veces y en la última ronda ninguno de vosotros hayáis escrito nada más, comentaréis las respuestas entre todos y extraeréis las ideas principales. Por último, el portavoz del grupo expondrá estas ideas al resto de la clase. Tras esto, deberéis entregar la hoja con la actividad al profesor.

OBJETIVOS: Activar los conocimientos previos: recordar los números naturales y sus características, conocer que saben sobre los números enteros.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Números naturales y enteros.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Números naturales y enteros: representación, operaciones y conexión con la vida cotidiana.

COMPETENCIAS: Comunicación lingüística, competencia matemática y competencias sociales y cívicas.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Inteligencia lógico-matemática, lingüística, interpersonal e intrapersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo "Folio giratorio". Los alumnos se dividen en los grupos base.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Los alumnos del grupo base deberán escribir por turnos y en una única hoja lo que recuerdan sobre los números naturales y enteros. Para ello se les entregará una hoja con el enunciado de la actividad y una serie de pistas que les sirvan como guía. Después, los alumnos de cada grupo base comentarán las respuestas entre ellos y extraerán las ideas principales. Por último, el portavoz de cada grupo base expondrá las ideas principales a sus compañeros y cada grupo las va completando en orden. La hoja con las respuestas deben entregarla al profesor al finalizar la actividad.

- **ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO**

En total se presentan cuatro actividades para que el alumnado descubra contenidos por sí mismo y promover, de ese modo, el aprender a aprender.

1. **Múltiplos y divisores**

(Elaboración propia; teoría extraída de Ramos (2013))

ENUNCIADO: Está incluido en el Anexo III.

OBJETIVOS: Conocer los conceptos de múltiplo y divisor.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Números naturales y números enteros.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Definiciones de múltiplo y divisor de un número entero y sus características, y la diferencia entre "divisor" y "ser divisible por".

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, aprender a aprender y competencias sociales y cívicas.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística, intrapersonal e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo "Folio giratorio". La corrección se realiza a través de otra técnica cooperativa, "Números iguales juntos". Los alumnos se dividen en los grupos base.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Dos alumnos se preparan de forma individual una hoja con información sobre múltiplos: definición y ejemplos para realizar de forma individual para convertirse en expertos de los múltiplos. Después se junta la pareja y contrastan resultados. De la misma forma, los otros dos componentes del grupo se preparan una hoja de divisores de forma individual y luego se juntan para comprobar los resultados. Por último, se juntan los cuatro componentes del grupo y cada pareja de expertos en un tema explican a los otros dos lo que han aprendido, se les proporciona otra hoja con la relación entre múltiplos y divisores y realizan ejercicios tipo para comprobar que todos los integrantes saben realizarlos por sí solos y no confunden los conceptos. Por último, se corregirá en la pizarra con el método de "Números iguales juntos".

2. <u>Criterios de divisibilidad</u>

(Elaboración propia; teoría extraída de Ramos (2013))

ENUNCIADO: Está incluido en el Anexo III.

OBJETIVOS: Conocer y trabajar los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Múltiplos y divisores.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9, 10 y 11.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, aprender a aprender y competencias sociales y cívicas.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística, intrapersonal e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo "Folio giratorio". La corrección se realiza a través de otra técnica cooperativa, "Números iguales juntos". Los alumnos se dividen en los grupos base.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: La mecánica de la actividad es la misma que la de la actividad anterior pero en este caso, los temas de los expertos son los criterios de divisibilidad por 2, 3 y 9, por una parte, y los de 5, 10 y 11, por otra parte.

3. Descubriendo los números primos

(Elaboración propia)

ENUNCIADO: Imaginad que esta tarde habéis quedado todos los compañeros de clase para ir al cine que han abierto nuevo en el centro comercial. Pero no es un cine normal. En ese cine deben ser los espectadores los que organicen la sala y los asientos que hay en ella. Además, imponen más condiciones: tenéis una sala para vosotros solos así que os proporcionarán únicamente tantos asientos como alumnos seáis y debéis colocar los asientos en filas que tengan el mismo número de asientos. Si no cumplís estas condiciones, no os dejarán entrar. Así que… ¡a pensar!

¿Cuántos asientos debe tener cada fila y cuántas filas hay?

OBJETIVOS: Reforzar el conocimiento del concepto de múltiplo y divisor. Comprender el significado de los números primos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Múltiplos y divisores de un número entero.

CONTENIDO MATEMÁTICO: El concepto de número primo en un contexto real.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, aprender a aprender y competencias sociales y cívicas.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística, intrapersonal e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Aprendizaje por descubrimiento.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: El profesor explica la actividad a los alumnos que consiste en, dado un número de asientos, buscar en filas de cuántos asientos se puede organizar un cine si las filas tienen que tener el mismo número de asientos. Tras la explicación y la certeza de que todos lo han entendido, todos los alumnos se ponen de pie y, teniendo en cuenta que cada uno de ellos se corresponde con un asiento del cine, deben mirar a ver si pueden colocarse en filas con el mismo número de asientos en cada una (es decir, están buscando los divisores de un número), de la siguiente forma: primero se colocan en filas de dos personas y miran a ver si sobra alguien, después de tres en tres, etc. Deben comprobarlo con diferentes números de personas y llegar a la conclusión de que para algunos números, solo existen dos soluciones: sentarse todas las personas en una única fila o sentarse cada persona en una fila. Por tanto, hay números que solo son divisibles entre 1 y sí mismo y son los llamados números primos.

4. **Criba de Eratóstenes**

(Extraída de Iglesias (2017), p.175)

ENUNCIADO: Con esta actividad vas a aprender a encontrar números primos fácilmente pero primero dime, ¿cuántos números primos conoces menores que 100? Escríbelos en la primera columna de la tabla que aparece abajo.

Después júntate con tus compañeros del grupo base, poned en común los números primos que habéis encontrado y escribid, en la segunda columna, la lista resultante.

A continuación, por turnos, cada grupo base contará a toda la clase los números primos que han encontrado y escribirás la lista final en la tercera columna.

TÚ	EL GRUPO BASE	EL GRUPO DE CLASE

Ahora mira las tres listas y comenta con tus compañeros del grupo base. ¿La lista de números primos ha aumentado con respecto a la inicial (la tuya)? ¿Creéis que es beneficioso trabajar en grupo?

Por último, el profesor os explicará un método sencillo para encontrar los números primos menores que un número dado, la criba de Eratóstenes, y tendréis que encontrar, de esta forma y en los grupos base, los números primos menores que 100.

OBJETIVOS: Observar que las aportaciones colectivas son de mayor calidad que las individuales y la importancia del trabajo cooperativo y aprender a utilizar el método de la criba de Eratóstenes para encontrar los números primos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Divisores de un número entero.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Los números primos hasta un número dado.

COMPETENCIAS: Competencia matemática, aprender a aprender y competencias sociales y cívicas.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo “Grupos base y grupos de trabajo”. En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos base y trabajarán: primero de forma individual, después en los grupos base poniendo en común los resultados y, por último, la corrección en el grupo de clase.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Primero se les proporciona una hoja con tres columnas y se les dice que escriban de forma individual todos los números primos menores que 100 en la primera columna. Después, deberán poner en común los números primos encontrados en el grupo base y hacer una lista con todos ellos (que deberán escribir en la segunda columna) y, posteriormente, en común con toda la clase (en la tercera columna). Por último se les enseña el algoritmo de la criba de Eratóstenes y deben encontrar los números primos menores que 100 por este método.

- **ACTIVIDADES “TIPO” O MECÁNICAS**

Las actividades denominadas “tipo” o mecánicas aparecen en cualquier libro de texto y sirven para adquirir práctica en los cálculos por lo que no se van a exponer en este trabajo.

- **ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DE LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES**

Este apartado se denomina de esta forma porque las actividades han sido creadas específicamente para ese fin. Se exponen un total de ocho actividades cuyas soluciones se encuentran en el Anexo VI.

1. **El ascensor**

(Elaboración propia)
ENUNCIADO: Lee la siguiente historia.
Un sábado por la mañana, la familia Romero, formada por los padres y dos hijos, decide ir a pasar el día al nuevo centro comercial que han abierto en la ciudad, el cual tiene las mismas plantas hacia arriba que hacia abajo.

Al llegar, la familia aparca el coche en la planta cero y baja cuatro pisos hasta llegar a la planta de niños. Allí compran camisetas, pantalones y un par de zapatillas. Después, suben seis pisos para comprar un traje y una corbata para el padre en la planta de hombres.
Cuando acaban esas compras son las dos de la tarde así que suben cuatro pisos, hasta la planta más alta, para comer en un restaurante italiano que les habían recomendado. Durante la comida hablan sobre lo que van a hacer por la tarde. Los niños insisten en ir a la bolera así que según terminan de comer, el padre baja con ellos a la planta más baja,pasando antes por el parking para dejar las compras, mientras que la madre baja solo tres pisos para comprar ropa en la planta de mujeres. Después, decide bajar a la bolera para encontrarse con su familia pero para una planta antes de llegar porque recuerda que tiene que comprar algunos libros. Entonces, llama por teléfono a su marido y queda con ellos media hora más tarde en la primera planta para hacer la compra en el supermercado. Tras las compras del supermercado, llevan las bolsas al coche y suben a la planta que se encuentra bajo el restaurante para ver una película en el cine. Al terminar, bajan al coche y se van a casa.

Responde a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas plantas tiene el centro comercial?

2. ¿En qué planta están la bolera y el restaurante?
3. ¿Cuántos pisos subieron el padre y los hijos para llegar al supermercado? ¿Y la madre?
4. ¿Cuál es el trayecto más corto que recorren? ¿cuántos pisos? ¿Y el más largo?

Inventad una historia en un centro comercial en la que vosotros seáis los protagonistas, en la que el recorrido sea el siguiente: tienda de juegos (piso -3) – supermercado (piso 1) – restaurante (piso 6) – cine (piso 5) – tienda de viajes (piso -1) – compras para la casa (piso -2) – tienda de música (piso -5), y en la que utilicéis frases del tipo “después, subimos/bajamos x pisos”.

OBJETIVOS: Conocer el concepto de número entero. Revisar la recta numérica de números enteros. Relacionar las matemáticas con la vida real.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Números naturales.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Los números enteros, la recta numérica.

COMPETENCIAS: Comunicación lingüística, competencia matemática, aprender a aprender y competencias sociales y cívicas.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Inteligencia lingïística, lógico-matemática, espacial, intrapersonal e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo “Grupos base y grupos de trabajo”. En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos base.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Los alumnos deben leer y comprender un texto para, posteriormente, contestar a una serie de preguntas ordenadas según su dificultad. Tras esto, deberán inventar una historia de la misma forma que el texto proporcionado pero siguiendo un determinado recorrido en el ascensor (cada lugar de este recorrido se corresponde con la temática de las actividades de cada sesión).

2. <u>El restaurante</u>

(Elaboración propia)

ENUNCIADO: (Aclaración: este enunciado está pensado para un grupo de 24 alumnos. El profesor deberá adaptar los datos del enunciado al número de alumnos que haya en el aula).

Tus compañeros de clase y tú habéis reservado para ir a comer a un restaurante que está en la séptima planta del centro comercial. Al jefe del restaurante no se le dan muy bien las matemáticas así que como conoce que tú eres experto en divisores te ha pedido ayuda para colocar las mesas y las sillas en el restaurante.

a. ¿Podrías decirle cuántas sillas puede colocar alrededor de cada mesa si queréis sentaros en grupos formados por las mismas personas? Y para cada caso, ¿cuántas mesas necesita?
b. Se le olvidó decirte que, como es obvio, no dispone de tantas mesas como el número de alumnos que sois, que solo dispone de 8 mesas y en cada mesa entran 4 personas (recuerda que: si juntas dos mesas, solo se podrán sentar 6 personas, si juntas tres mesas se podrán sentar 8 personas,…). Entonces, ¿de cuántas formas puede hacerlo? Di en cada caso cuántos alumnos se sentarán en cada mesa y cuántas mesas necesita. ¿De qué forma utiliza el menor número de mesas?

OBJETIVOS: Trabajar los conceptos de múltiplo y divisor para resolver problemas reales en un restaurante. Atender a la diversidad del alumnado a través de la creación de tareas de distinto nivel.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Números naturales y números enteros.

CONTENIDO MATEMÁTICO: El uso de múltiplos y divisores de un número entero para resolver problemas de la vida real.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, aprender a aprender y sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística y espacial.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo "Grupos base y grupos de trabajo". En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos de trabajo.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Los alumnos, de forma individual, deben resolver problemas sobre múltiplos y divisores que aparecen en una hoja de ejercicios sobre la disposición de un grupo de personas y de las mesas en un restaurante. En la actividad se exponen los dosapartados en orden creciente de dificultad (los alumnos con nivel académico bajosolo deberán realizar el primer apartadoy los de nivel académico alto los dos).Además, si el profesor está seguro de que los alumnos pertenecientes a niveles inferiores han adquirido un aprendizaje suficiente, estos podrán realizar los apartados posteriores. Sin embargo, para alcanzar el aprendizaje de los contenidos mínimos solo es necesario el primer apartado.

3. **<u>El supermercado</u>**

(Elaboración propia)

ENUNCIADO: Hoy vas a pasar el día en el supermercado del centro comercial ayudando a los trabajadores, que tienen que realizar un pedido de varios productos que se han agotado y recibir otro pedido.

Tu primera misión es organizar a los trabajadores que tienen que colocar los 110 productos recibidos en el pedido. ¿Cuántos trabajadores puedes poner a colocar esos productos si todos tienen que colocar el mismo número de productos? Responde a la pregunta sabiendo que el máximo de trabajadores disponibles es 33.

Además,este no es un supermercado cualquieraya que exigen a los trabajadores colocar los productos por códigos de barras y, en concreto, por los divisores de los códigos de barras. Sin embargo, ha debido de haber un error en la fábrica porque, como puedes observar en la siguiente imagen, a uno de los productos que han recibido le falta un número del código de barras.

Ilustración 5. Código de barras. Adaptado de Wikipedia.

1 23456? 654321

La única pista que te proporcionan los trabajadores es que recuerdan que antes de que se agotase el producto, estaba colocado en la zona con los códigos de barras múltiplos de 3 y de 11.

Tu primera misión es la siguiente: coloca todas las cifras del código de barras del producto de manera que se forme un único número y calcula,utilizando los criterios de divisibilidad estudiados, el dígito que falta.

Por otra parte, como ya leíste en la misión anterior, hay un total de 33 trabajadores. Además, es el momento de realizar el pedido, formado por un número de productos entre 27680-27690. ¿Qué cifra de unidades tienes que poner para que el número de productos que tiene que colocar cada trabajador sea exacto?

OBJETIVOS: Trabajar los conceptos de múltiplo y divisor de un número entero, y los criterios de divisibilidad estudiados. Atender a la diversidad del alumnado a través de la creación de tareas de distinto nivel.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Múltiplos y divisores de un número entero.

CONTENIDO MATEMÁTICO: El uso de los criterios de divisibilidad de un número entero para resolver problemas en contexto reales.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, matemática, aprender a aprender y sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística e intrapersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo “Grupos base y grupos de trabajo”. En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos de trabajo.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Los alumnos, de forma individual, deben resolver problemas sobre divisores utilizando los criterios de divisibilidad que aparecen en una hoja de ejercicios sobre el número de productos que hay que colocar en un supermercado y el número de trabajadores que se necesitan para colocar un determinado número de productos. También aparece otro apartado en el que tienen que descubrir qué cifra le falta a un código de barras a través de los criterios de divisibilidad.

En esta actividad, aparecen tres tareas situadas en orden creciente de dificultad. Como contenido mínimo, es necesario que todos los alumnos sepan realizar la primera tarea, la cual se ha creado para un nivel académico bajo. La segunda tarea está creada para alumnos con nivel académico medio y la tercera para aquellos que tengan un nivel alto.Sin embargo, todos los alumnos podrán acceder a todos los enunciados y a su correcta resolución si así lo desean.

4. **Paseo por el centro comercial**

(Elaboración propia)

ENUNCIADO: Con esta actividad vais a conocer una de las múltiples utilidades del cálculo del mínimo común múltiplo. Al finalizar la tarea, deberéis entregar esta hoja al profesor.

La primera parte se realizará en el patio.
En el suelo del patio, hay pintado unsegmento con los números del 0 al 15. El coordinador de vuestro grupo debe otorgar a cada componente del grupo base un número de los siguientes: 2, 3, 4, 6, y entregaros una tiza de cada color. Estos números significan cada cuántos días visitáis el centro comercial. Después, debéis colocaros todos en el número 0 que significa el día en el que habéis coincidido en el centro comercial (hoy).Por turnos, deberéis ir haciendo marcas indicando dentro de cuantos días volveréis a visitar el centro comercial (el que tenga el número 2 deberá marcar los múltiplos de 2, el que tenga el número 3 los múltiplos de 3, el que tenga el número 4 los múltiplos de 4 y el que tenga el número 6 los múltiplos de 6).
Posteriormente, debéis mirar cuál es el primer número del segmento marcado por los cuatro componentes del grupo. Ese será el mínimo común múltiplo. ¿Cuál es el siguiente número en el que aparecerían las cuatro marcas?

La otra parte de la actividad se realizará en el aula y deberéis realizar la misma actividad que en el patio pero hallando el mínimo común múltiplo con la descomposición en factores primos y con distintas elecciones de números.

OBJETIVOS: Calcular el mínimo común múltiplo y saber utilizarlo en contextos reales.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: El concepto de mínimo común múltiplo y la descomposición de un número en factores primos.

CONTENIDO MATEMÁTICO: El cálculo del mínimo común múltiplo y su uso en contextos reales.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, aprender a aprender y competencias sociales y cívicas.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística, cinético-corporal e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo "Grupos base y grupos de trabajo". En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos base.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Los alumnos deben resolver una actividad cuya resolución mostrará el tiempo que pasará hasta que se vuelvan a encontrar en el centro comercial, dependiendo del periodo de tiempo entre visita y visita de cada alumno. Se realizará de dos formas. La primera será una salida rápida al patio, donde previamente se habrá pintado una recta con los números del 0 al 15 para cada grupo base. Entonces deberán calcular el día en el que los alumnos del grupo se volverán a encontrar en el centro comercial si hoy han coincidido y un alumno visita el centro comercial cada 2 días, otro cada 3, el tercero cada 4 y el último cada 6. Para ello, cada uno con una tiza de diferente color, deberá ir marcando los números en la recta por los que pasa (es decir, los días que visitará el centro comercial). Así comprobarán que el primer día que coinciden es el duodécimo. La segunda forma será de forma escrita en el aula, con distintos números. Estos resultados se deberán ir escribiendo en una hoja que se entregará al profesor al finalizar la tarea.

5. **<u>Viaje en el tiempo</u>**

(Elaboración propia)

ENUNCIADO: Para la primera pregunta es necesario que dispongáis de un dispositivo electrónico con acceso a Internet. Además, debes escribir todas las respuestas en una o varias hojas que entregarás al profesor al finalizar la tarea.

Como seguramente ya sabrás, el 26 de mayo de 2019 coincidieron las elecciones municipales y europeas en España. Busca información sobre cada cuántos años se celebran y contesta a las siguientes preguntas: ¿Cada cuántos años coinciden las elecciones municipales y europeas en España? Sabiendo que este año se han coincidido, ¿en qué año volverán a coincidir?

Por otra parte, recuerda o busca información sobre el significado de un año bisiesto, qué características de divisibilidad tiene y por qué existen.

Ahora guarda el dispositivo electrónico y contesta a lo siguiente:

- ¿Cuál es el año más próximo a 2019 y anterior a él que fue bisiesto? ¿Por qué? Escribe los cálculos que realices.
- Sabiendo que el año obtenido es bisiesto, ¿qué año volverá a serlo?

Los alumnos que se encuentren en un grupo de trabajo con nivel académico medio también deberán contestar a las siguientes preguntas:

- ¿Qué año será bisiesto y habrá elecciones municipales? ¿Y europeas?
- ¿Qué año se repetirá el calendario del 2016, el cual fue un año bisiesto? (es decir, que empiecen los dos el mismo día: lunes, martes, etc.)

Por último, los alumnos con nivel académico alto (de forma opcional) realizarán la siguiente actividad de investigación:buscar información sobre el ciclo de Saros y cómo se calcula.

OBJETIVOS: Conocer contextos reales en los que se debe calcular el mínimo común múltiplo para su resolución y recordar el concepto de divisor. Atender a la diversidad del alumnado a través de la creación de tareas de distinto nivel.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: El concepto de mínimo común múltiplo.

CONTENIDO MATEMÁTICO: El uso del mínimo común múltiplo en contextos reales.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, digital, aprender a aprender y sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística y naturalista.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo "Grupos base y grupos de trabajo". En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos de trabajo.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Esta actividad está compuesta por diferentes tareas de distinto grado de complejidad y ordenadas me forma creciente y solo es obligatorio la resolución de las dos primeras. Las demás están dirigidas a los alumnos que tienen mayor nivel académico y ritmo de aprendizaje.

Las dos primeras tareas tratan sobre las elecciones municipales y europeas y los años bisiestos. Las otras tareas además añaden el concepto de la repetición de los calendarios anuales. La última tarea es de investigación y consiste en buscar información sobre el ciclo de Saros y cómo se calcula. Además, estas tareas tienen distinto nivel de dificultad, como se indica en su enunciado.

Las resoluciones de las tareas serán recogidas por el profesor al finalizar la actividad.

6. <u>Compra de baldosas para la casa</u>

(Elaboración propia)

ENUNCIADO: Al finalizar la tarea debéis entregar al profesor una hoja con todos los resultados obtenidos y los planteamientos que habéis seguido hasta llegar a ellos.

El objetivo de hoy es restaurar una casa de campo situada en un lugar donde se producen incendios forestales. Para ello, primero realizaréis esta actividad, denominada “Compra de baldosas para la casa”, en los grupos base y, posteriormente, la actividad denominada “Incendios forestales”, en los grupos de trabajo. Para ello, acudiréis al centro comercial a comprar baldosas y árboles pero antes debéis conocer lo que necesitáis comprar.

Esta actividad está dividida en tres partes.

En primer lugar, debéis calcular, de forma individual, las dimensiones de una de las estancias de la casa. Para ello, el coordinador os asignará una de las siguientes estancias (longitudes expresadas en metros):

- Baño: su ancho es el segundo número primo y su largo es 6.
- Cocina: su ancho es el tercer número primo y su largo es 10.
- Salón: su ancho es 8y su largo el quinto número primo.
- Dormitorio: su ancho es 4 y su largo es el cuarto número primo.

En segundo lugar, y una vez que todos hayáis calculado las dimensiones de la estancia que os ha tocado, debéis contar al grupo los resultados obtenidos y el secretario deberá escribirlos en una hoja. Además, debéis dibujar entre todos el plano de la casa en la escala que queráis (indicando cuál) y con el diseño que elijáis.

En tercer lugar, debéis elegir un suelo de baldosas cuadradas para cada estancia con la condición de que las baldosas tengan la dimensión más grande posible. Además, debéis decir cuántas baldosas tenéis que comprar de cada tipo.

OBJETIVOS: Utilizar el máximo común divisor para resolver un problema de la vida real, comprendiendo de ese modo la utilidad de ese concepto, y repasar el concepto de número primo y la criba de Eratóstenes.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Los números primos y el algoritmo de la criba de Eratóstenes para encontrarlos, el concepto de máximo común divisor y el uso de las escalas.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Números primos, criba de Eratóstenes, escalas, números enteros y operaciones con ellos, máximo común divisor.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, aprender a aprender, competencias sociales y cívicas, y sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Inteligencia lingüística, lógico-matemática, espacial, interpersonal e intrapersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo “Grupos base y grupos de trabajo”. En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos base y trabajarán, primero de forma individual, repartiéndose el trabajo, y después de forma común.

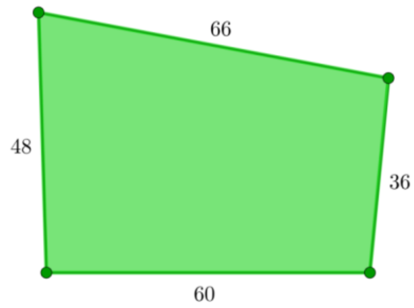
DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: La actividad está dividida en tres partes.En la primera parte, cada integrante del grupo deberá calcular las dimensiones de una de las estancias de la casa. A continuación, todos los integrantes pondrán en común los resultados obtenidos y dibujarán el plano de la casa a escala.Por último, tendrán calcular las dimensiones de las baldosas cuadradas de cada estancia, lo más grandes posible, y el número de baldosas que necesitan de cada tipo.

Además, deberán entregar una hoja con la resolución del problema al profesor.

7. **Incendios forestales**

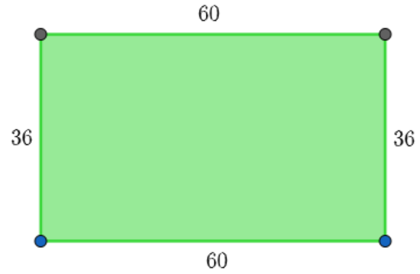
(Adaptada de VV.AA. (2001))

ENUNCIADO: En los últimos años se han producido graves incendios forestales en Galicia. Con el objetivo de prevenirlos, un municipio gallego ha decidido plantar árboles que resistan mejor al fuego alrededor de las parcelas. Una de las parcelas tiene una forma trapezoidal de lados de longitud 48, 66, 36 y 60 metros, tal y como se puede observar en la siguiente imagen.



Tu misión es ayudar a este municipio gallego calculando el número de árboles necesarios para rodear la parcela descrita, sabiendo que tienes que colocar un árbol en cada vértice y que la distancia entre dos árboles consecutivos tiene que ser la misma y la máxima posible.

Para los alumnos con nivel académico bajo la parcela será rectangular:



Al finalizar la tarea, los resultados obtenidos deben entregarse al profesor.

OBJETIVOS: Utilizar el máximo común divisor para resolver un problema de la vida real. Atender a la diversidad del alumnado a través de la creación de tareas de distinto nivel. Concienciar a los alumnos sobre el problema de los incendios en España, poniendo como ejemplo los ocurridos en Galicia en los últimos años.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: El concepto de máximo común divisor.

CONTENIDO MATEMÁTICO: El uso del máximo común divisor para resolver un problema de la vida real.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, competencias sociales y cívicas y el sentido de la iniciativa y el espíritu emprendedor.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Inteligencia lingüística, lógico-matemática, espacial y naturalista.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo "Grupos base y grupos de trabajo". En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos de trabajo.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Los alumnos deberán calcular el número de árboles necesarios para rodear una parcela dadas unas condiciones y entregar su resolución al profesor.

Además, esta tarea, y en concreto la forma de la parcela, será diferente para cada grupo de trabajo ya que estos tienen diferentes niveles académicos. En este caso, se muestran dos actividades diferentes, la primera dirigida a los alumnos con nivel académico medio y alto, y la segunda para los alumnos con nivel académico bajo. Sin embargo, los alumnos con menor ritmo de aprendizaje, tendrán la posibilidad de conocer la otra actividad y cómo es su resolución.

8. Los ritmos euclídeos

(Elaboración propia; la información de los ritmos euclídeos fue extraída de Gómez (2018))

ENUNCIADO: Esta actividad la vais a realizar en los grupos base y al finalizarla, debéis entregar al profesor una hoja con los resultados obtenidos.

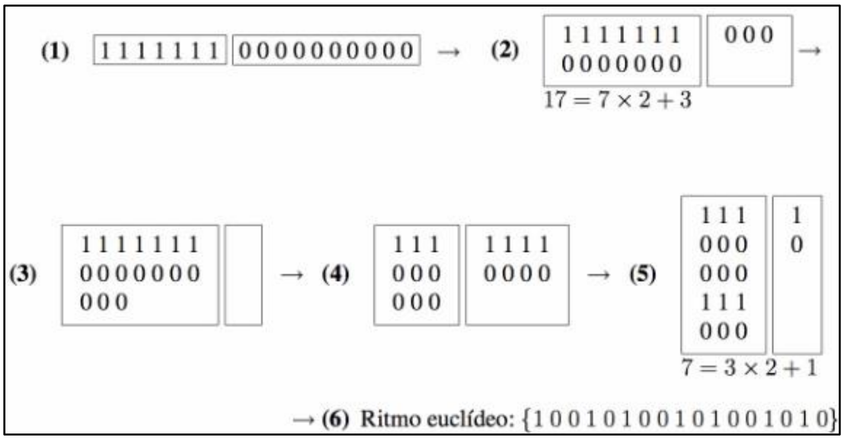
La tienda de música que se encuentra en el centro comercial solo tiene CDs con música extranjera que tiene ritmos euclídeos, es decir, ritmos cuyas notas están distribuidas lo más uniformemente posible. Por ejemplo, si denotamos por 0 un silencio y por 1 una nota, ambos con la misma duración, y tenemos un ritmo formado por 5 notas y 3 silencios (y, por tanto, por 8 pulsos), entonces se pueden obtener varios ritmos: [11100000], [10110011], [10010010],… Los ritmos euclídeos son aquellos que tienen las notas distribuidas lo más uniformemente posible, es decir, en los que se repite un único patrón o que se repite un patrón un número máximo de veces y se añade un único patrón más pequeño (el último de los ejemplos anteriores). Estos ritmos son muy comunes en la música tradicional de varios países del mundo, como veréis más adelante.

Ahora que ya sabes cómo funcionan estos ritmos, debes saber que esta tienda tiene la música clasificada según el máximo común divisor de su número de notas y su número de pulsos. Pero al dueño de la tienda se le han mezclado cuatro CDs y ahora no sabe dónde debe colocarlos. Los ha escuchado y lo único que conoce es el número de pulsos y de notas que tiene cada uno. Vuestra misión, como expertos en el algoritmo de Euclides, es calcular el máximo común divisor de cada CD, con este algoritmo, para que el dueño pueda colocarlos en sus respectivas estanterías. Cada componente del grupo debe calcular un MCD y el secretario del grupo apuntará en una hoja todos los resultados y quien lo ha calculado. En la siguiente tabla aparecen el número de pulsos y de notas que tienen los ritmos de cada CD. Debéis completar la última columna.

	Número de pulsos	Número de notas	MCD
CD 1	8	3	
CD 2	8	5	
CD3	12	5	
CD4	16	5	

Ahora, queréis saber cómo suenan los ritmos de cada CD. Para ello, se puede utilizar el algoritmo que se explica a continuación y, a la vez, se puede observar la relación que tiene con el algoritmo de Euclides. El ejemplo que se muestra en la imagen, responde a la pregunta de cómo distribuir 7 notas de forma uniforme en un ritmo con 17 pulsos (es evidente que entonces habrá 10 silencios).

Ilustración 6. El algoritmo de Euclides para generar ritmos euclídeos. Extraída de Gómez (2018).



En (1), se colocan los 17 pulsos, es decir, las 7 notas representadas por unos seguidas de los 10 silencios representados por ceros.En (2), se forman grupos de 7 (lo que equivale a realizar la división

17 entre 7) obteniendo 7 grupos formados por [1 0] (es decir, 7 columnas formadas por 2 elementos) y sobran 3 ceros (es decir, 3 columnas). La división sería entonces

$$17 = 7 \cdot 2 + 3,$$

siendo 17 el número de pulsos, 7 el número de notas, 2 el número de elementos que tiene cada uno de los 7 grupos y 3 el número de columnas que sobran.Como sobran 3 columnas, en el paso (3) se formarán grupos de 3. Como se observa, se colocan los 3 ceros debajo y en el paso (4), se forman los grupos de 3 columnas separando las columnas que sobran (4 columnas formadas por el [1 0]). Pero como 4 es mayor que 3, todavía se pueden situar más elementos debajo y es lo que se hace en el paso (5). Cuando en la parte derecha queda una columna o cero, ya se ha terminado. En este caso, la segunda división del algoritmo de Euclides es

$$7 = 3 \cdot 2 + 1,$$

donde 7 es el número que se quería descomponer, 3 es el número de columnas de la parte izquierda, 2 es el número de filas que se han añadido en el último paso en la parte izquierda y 1 es el número de columnas que han sobrado en la parte derecha.De esta forma, y leyendo por columnas de izquierda a derecha, se obtiene el ritmo euclídeo del paso (6): [10010100101001010].

Ahora, en los grupos base, debéis calcular los cuatro ritmos euclídeos siguientes e intentar tocarlos dando golpes suaves en la mesa o palmadas suaves, sin molestar a los compañeros. El moderador será el encargado de controlar el ruido. Debéis rellenar la siguiente tabla con los ritmos obtenidos.

Pulsos	Notas	Ritmo euclídeo	¿Dónde se encuentra ese ritmo?
8	3		Clave son (de Cuba)
8	5		Cinquillo cubano, malfuf de Egipto, o el ritmo coreano para tambor mongP’yon. Si se empieza a tocar desde la 2ª nota:ritmo de Oriente Próximo y el timini de Senegal. Si se empieza en la 3ª nota: ritmo del tango.
12	5		Ritmo muy común en África central que tocan los pigmeos aka. Si se toca desde la 2ª nota: clave columbia de la música cubana y ritmo de la danza chakacha de Kenya.
16	5		Si se toca a partir de la 3ª nota: ritmo de la bosa-nova de Brasil.

Por último, la corrección se realizará por la técnica de “Números iguales juntos”. Un alumno del grupo deberá tocar un ritmo euclídeo de los obtenidos y los demás grupos deberéis adivinar cuál de los cuatro ritmos es.

Si os interesa podéis encontrar más información en la siguiente página web:
http://www.divulgamat.net/index.php?option=com_content&view=article&id=17815&directory=67

OBJETIVOS: Con esta actividad se trabaja el Algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números enteros cualesquiera. Además, los alumnos conocerán los ritmos que se utilizan en diferentes países y la relación que estos tienen con el máximo común divisor.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: El algoritmo de Euclides.

CONTENIDO MATEMÁTICO: El cálculo del máximo común divisor mediante el algoritmo de Euclides y la utilidad de este algoritmo para la generación de ritmos euclídeos.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, aprender a aprender, competencias sociales y cívicas y conciencia y expresiones culturales.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística, musical, cinético-corporal e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo "Grupos base y grupos de trabajo". En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos base.Después, para su resolución, se utilizará la técnica de aprendizaje cooperativo "Números iguales juntos".

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Primero se explica a los alumnos que es un ritmo euclídeo y dónde aparecen. Después se explica cómo se generan los ritmos euclídeos mostrando ejemplos y su relación con el algoritmo de Euclides. Por último, deberán realizar entre todos los integrantes del grupo un ejercicio del estilo a los ejemplos expuestos. Para su resolución, se utilizará la técnica de "Números iguales juntos" y el alumno elegido de cada grupo base deberá tocar el ritmo resultante.

Esta actividad deberá ser entregada al profesor al finalizarla.

- <u>ACTIVIDADES DE REPASO Y EVALUACIÓN</u>

En este apartado, se exponen tres actividades que se desarrollarían en la última sesión para repasar los contenidos estudiados, organizar las ideas y realizar un esquema y evaluar el propio trabajo y la actividad del grupo base.

1. <u>Crucigrama de definiciones</u>

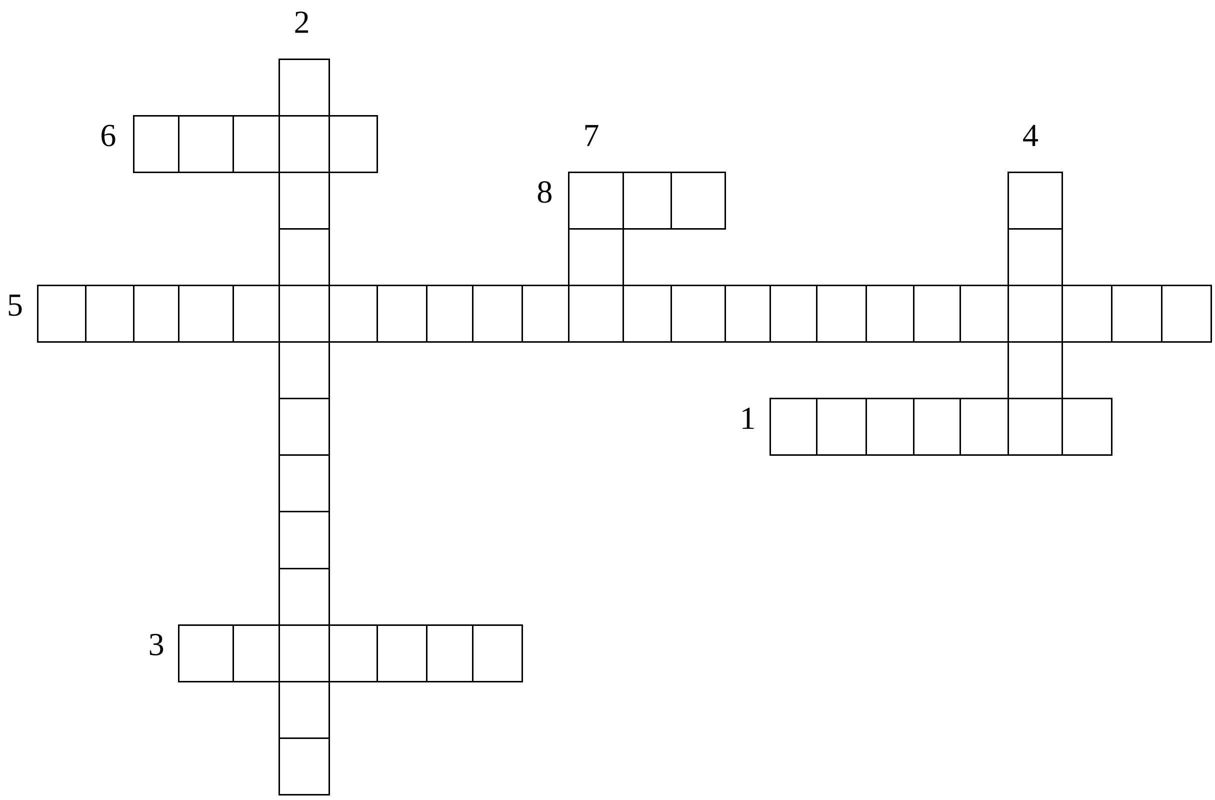
(Elaboración propia)

Su solución se encuentra en el Anexo VI.

ENUNCIADO:Rellena el crucigrama con las definiciones siguientes (si la respuesta a alguna de las preguntas está formada por dos palabras, no dejes espacio entre ellas al escribirla en el crucigrama):

1. El número que se obtiene al prescindir de su signo se denomina…

2. Respecto a un número entero, ¿cómo se denomina al otro entero que tiene su mismo valor absoluto pero signo contrario?
3. Cómo se denomina al número entero positivo cuyos únicos divisores son él mismo y la unidad.
4. Reglas que nos permiten averiguar, sin dividir, si un número es divisible por otro.
5. Nombre que se le da al número que no es divisible de forma exacta por 2.
6. Siglas que se utilizan para denominar al mayor número entero positivo que divide a dos o más números.
7. Siglas que se utilizan para denominar al menor número entero positivo que es múltiplo de dos o más números.



OBJETIVOS: Repasar las definiciones de los contenidos de números enteros y divisibilidad y conocer el grado de aprendizaje adquirido.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Números enteros y divisibilidad.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Conceptos sobre números enteros y divisibilidad.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística y competencia matemática.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística e intrapersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Individual.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: El profesor entrega un crucigrama sobre las definiciones de números enteros y divisibilidad a los alumnos que deberán resolver de forma individual.

2. **Organiza tus ideas**

(Elaboración propia)

ENUNCIADO: Elaborad un esquema con los contenidos o conceptos más importantes de la unidad de números enteros y divisibilidad.

OBJETIVOS: Organizar los contenidos estudiados sobre números enteros y divisibilidad y relacionarlos para una mejor comprensión.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Números enteros y divisibilidad.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Números enteros y divisibilidad.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, aprender a aprender y competencias sociales y cívicas.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística, intrapersonal e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo “Mapa conceptual a cuatro bandas”. En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos base.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Los alumnos en los grupos base, primero de forma individual y luego conjunta, deben realizar un esquema sobre los contenidos estudiados.

3. **Evaluación del trabajo realizado**

(Cuestionario adaptado de Iglesias (2017))

ENUNCIADO: Se incluye en el Anexo IV.

OBJETIVOS: Valorar el trabajo propio y de los demás compañeros en el grupo base, y de la metodología en general.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: -

CONTENIDO MATEMÁTICO: -

COMPETENCIAS: Competencias sociales y cívicas.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Intrapersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Individual.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: El profesor entrega un cuestionario a los alumnos para que evalúen el trabajo desarrollado de forma individual y en grupo en los grupos base, evalúen el trabajo de sus compañeros en el grupo base y evalúen la metodología utilizada.

- **JUEGOS MATEMÁTICOS**

En este apartado se muestran juegos matemáticos para practicar algunos de los contenidos impartidos de forma que los alumnos estén más motivados hacia el aprendizaje y aprendan de una forma más amena. Pero solo se muestran los de elaboración propia. El dominó y otros ejemplos extraídos de diversas webs, se incluyen en el Anexo V.

1. **El bingo matemático**

(Elaboración propia)

ENUNCIADO: El segundo juego del día es el bingo matemático, en el que jugaréis todos los alumnos de la clase juntos pero cada uno tendrá su cartón.
Para comenzar, el profesor os proporcionará un cartón de bingo de tamaño 3x4 y con ocho casillas sin rellenar. Cada uno debe rellenar su cartón con números del -15 al 15 (ambos incluidos) sin repetirlos. Cuando todos hayáis terminado, el profesor revisará los cartones para verificar que todas las casillas están rellenas. Si algún alumno canta "Línea" o "Bingo" y el profesor comprueba que su cartón tiene signos de haber sido modificado, el alumno quedará eliminado del juego.
Además, el profesor será el que extraiga tarjetas, en vez de bolas, las cuales contienen operaciones o mini-problemas. Entonces lo leerá en alto o lo escribirá, si es necesario, y tendrás unos segundos para pensar la respuesta. Puedes utilizar una hoja y un bolígrafo para realizar alguna operación si lo necesitas. Una vez has obtenido un resultado, deberás mirar tu cartón y si lo tienes, tacharlo.
Si tienes todos los números de una fila tachados deberás decir en alto "Línea" mientras que si tachas todos los números de tu tablero, dirás "Bingo". El profesor será el encargado de verificar que los resultados son correctos.
OBJETIVOS: Trabajar las operaciones con números enteros.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Números enteros y operaciones básicas con ellos.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Números enteros y operaciones básicas con ellos.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística y competencia matemática.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Inteligencia lingüística, lógico-matemática, intrapersonal e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Todo el grupo de clase.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Esta actividad consiste en que los alumnos jueguen al bingo pero para poder tachar los números de su cartón deberán resolver operaciones con números enteros.

En primer lugar, el profesor reparte a los alumnos cartones de bingo de tamaño 3x4 con números enteros que van del -15 al 15. A continuación se explica el funcionamiento del juego y se les pide que utilicen una hoja en blanco y un bolígrafo para resolver las operaciones, si lo necesitan. El funcionamiento es el siguiente. El profesor se sitúa al lado de la pizarra con varias tarjetas que contienen operaciones con números enteros (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones). Irá escribiendo, de una en una, el contenido de cada tarjeta en la pizarra (o proyectándolas en la pizarra digital). Estas operaciones simulan las bolas que se extraen en el bingo. Entonces los alumnos deberán resolver esas operaciones y si el resultado se corresponde con uno de los números que aparecen en su cartón del bingo, tacharlo. El primer alumno que haya tachado los cuatro números de una fila cantará "línea" mientras que el primero que tache todos los números de su cartón cantará "bingo".

En las tarjetas también se pueden escribir mini-problemas del tipo: "La reparación del coche de Julio ha costado 50 euros pero él solo llevaba 42 euros en el bolsillo, ¿cuánto dinero le falta?”.

2. <u>El mensaje secreto</u>

(Elaboración propia)
Su solución se encuentra en el Anexo VI.

ENUNCIADO: Esta actividad se corresponde con el tercer juego del día, la cual realizaréis en los grupos base, y consiste en descifrar un mensaje secreto. Además, antes de empezar a realizar las operaciones, debéis leer esta hoja entera.

Las palabras que tenéis que descifrar son las siguientes (cada operación se corresponde con una letra de la palabra y están separadas por tres líneas verticales):

Palabra 1

$(-8 \cdot 8) + 47$ ||| $[81:(-9)]:(-3) + 7$

Palabra 2

$[21 \cdot (-3) + (60:2)]:11$ ||| $(-1) \cdot [(-52):(-2)]$ ||| $-9:(6 + 2 - 1 - 4) - 6$ ||| $(9 \cdot 8) - (9 \cdot 7)$ ||| $-(-34):(-2)$ ||| $-21 - (-18)$ ||| $[10 + 2 \cdot (-4)]:2$ ||| $(-12):6 + 5$ ||| $[(10 - 50):10] + 14$

Palabra 3

$-6:(3 - 2 - 2) - 9:3$ ||| $-51 + 67 - 6 \cdot (-1)$ ||| $(-7 \cdot 3) - (-20 - 1)$ ||| $20:2 + 30 - 2 \cdot 15$ ||| $4 \cdot 12 \cdot (-2) + 100$ ||| $12:(-3) \cdot 6 + 34$

Palabra 4

$2 \cdot 3 \cdot 31 - 184$ ||| $[-9 \cdot (-2)] + 4$ ||| $(1 + 2 + 3 + 4) \cdot (-1) - 7$ ||| $48:12 + 1$ ||| $11 \cdot 2$

Palabra 5

$(-5)\cdot(-4)-37$ ||| $(-12):6-1$ |||$(-10)\cdot[2:(-2)]$ ||| $7\cdot(-4)+2$ ||| $4+5-6\cdot 3$ ||| $(12-5-7):(5\cdot 7-4\cdot 2)$ ||| $-20+15\cdot 2$

Palabra 6

$(63-7):8$ ||| $(5\cdot 5+1):(9-6-1)$ ||| $5\cdot(-3)+20-(-3-2)$

Palabra 7

$[(4\cdot(-4)):(-8)]$ ||| $6:2-(-5)\cdot 5-6$ ||| $(51-33):9+2$ ||| $[9-8:(-4)-6]\cdot 2$

Como podéis observar, no aparecen letras sino operaciones y cada una de ellas se corresponde con una letra. Entonces, una vez realizadas las operaciones, tenéis que descifrar cada palabra a través del código siguiente que relaciona cada letra con un resultado.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
22	1	4	-8	10	-7	8	2	-3	-1	19	3	-26	12

Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
-4	9	-9	7	0	-17	5	13	18	-6	6	14	23

Por último, debéis unir las palabras para formar una frase con sentido.

Para entender mejor el procedimiento, a continuación se expone un ejemplo una palabra descifrada con el código A=-21, H=0, L=3, O=47.

OPERACIONES	4-4	87-30	12/4	-3*7
RESULTADOS	0	47	3	-21
PALABRA	H	O	L	A

OBJETIVOS: Trabajar las operaciones con números enteros.

CONOCIMIENTOS PREVIOS: Números enteros y operaciones básicas con ellos.

CONTENIDO MATEMÁTICO: Números enteros y operaciones básicas con ellos.

COMPETENCIAS: Competencia en comunicación lingüística y competencia matemática.

INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: Lógico-matemática, lingüística e interpersonal.

METODOLOGÍA DE TRABAJO: Técnica de aprendizaje cooperativo “Grupos base y grupos de trabajo”. En esta actividad, los alumnos se dividen en los grupos base.

DESCRIPCIÓN ACTIVIDAD: Los alumnos tienen que realizar operaciones elementales con los números enteros y cada resultado se corresponderá con una letra. Las operaciones están divididas en varias tarjetas, cada una de las cuales formará una palabra. Con todas las palabras obtenidas tendrán que formar una frase coherente.

El encargado de dividir las tarjetas entre los integrantes del grupo será el moderador.

Para finalizar el apartado, en la siguiente página aparece una tabla que relaciona cada actividades de las anteriormente descritas con las Inteligencias Múltiples.

Tabla 18. Inteligencias Múltiples trabajadas en cada actividad propuesta.

ACTIVIDADES	INTELIGENCIAS MÚLTIPLES							
	M	C-C	L-M	L	E	Inter	Intra	N
¿Qué sabes sobre los números naturales y los enteros?			x	x		x	x	
Múltiplos y divisores			x	x		x	x	
Criterios de divisibilidad			x	x		x	x	
Descubriendo los números primos			x	x		x	x	
Criba de Eratóstenes			x			x		
El ascensor			x	x	x	x	x	
El restaurante			x	x	x			
El supermercado			x	x			x	
Paseo por el centro comercial		x	x	x		x		
Viaje en el tiempo			x	x				x
Compra de baldosas para la casa			x	x	x	x	x	
Incendios forestales			x	x	x			x
Los ritmos euclídeos	x	x	x	x		x		
Crucigrama de definiciones			x	x			x	
Organiza tus ideas			x	x				
Evaluación del trabajo realizado							x	
El bingo matemático			x	x		x	x	
El mensaje secreto			x	x		x		

REFLEXIÓN FINAL

El objetivo de atender a la diversidad y desarrollar las distintas capacidades del alumnado y, por tanto, de desarrollar las Inteligencias Múltiples debe ser primordial en la educación.El profesorado en general y, en particular, el profesorado de Matemáticas debe tener herramientas necesarias para esto y, en mi opinión, actualmente las tiene. Sin embargo, muchos profesores siguen utilizando la misma metodología en el aula que hace décadas: explicar de los contenidos en la pizarra, mandar ejercicios a los alumnos para que trabajen individualmente y corregirlos. En mi opinión, esta metodología no es mala si se combina con otras pero si es la única sí. Los alumnos terminarán por aburrirse y desengancharse de las clases. Desde mi punto de vista, la educación y las metodologías deben evolucionar y actualizarse al mismo tiempo que lo hace la sociedad.

En este trabajo se ha presentado una propuesta didáctica basada en eso, en el desarrollo de las Inteligencias Múltiples y en la atención a la diversidad a través de una metodología activa: el aprendizaje cooperativo, en el que el alumno está totalmente involucrado en su aprendizaje y en el de los demás. Se han creado actividades que desarrollen las distintas inteligencias, también relacionándolas con las competencias clave, y otras orientadas a los distintos niveles académicos del alumnado. Esto ha requerido un gran esfuerzo y mucho tiempo. En mi opinión, esa es la principal razón por la que gran parte de los docentes no intentan atender a la diversidad.

Otro inconveniente es el número de los alumnos que hay en el aula, demasiado alto para que el profesor pueda atender a todos de forma individual. Esa es una de las razones por las que elegí el aprendizaje cooperativo, porque es una buena forma de que el trabajo en grupo ayude a atender a la diversidad.

Sin embargo, a pesar de sus inconvenientes, me parece que la realización de una propuesta didáctica como esta o al menos el intento, en la que se pretende atender a la diversidad del aula y en la que los alumnos desarrollen distintas inteligencias, tiene la mayor de las recompensas para un docente: el aprendizaje y desarrollo integral del alumno.

Por otra parte, la elección de un aprendizaje en grupo también me parece importante para que los alumnos puedan interactuar entre ellos, ayudarse y desarrollar valores como la solidaridad y el compañerismo. Además, el trabajo en grupo es muyimportante en el mundo laboral hoy en día. Pero, por supuesto, sin olvidar que el alumno también debe trabajar de forma individual para desarrollar la capacidad de enfrentarse solo a aun problema y, en definitiva, para aprender a aprender.

Por otro lado, me gustaría indicar el grado de aprendizaje que ha supuesto la realización de este trabajo. No solamente he conocido la metodología del aprendizaje cooperativo de forma teórica, sino también con un planteamiento práctico que atienda a la diversidad del alumnado y desarrolle las distintas capacidades e inteligencias, sin la que es imposible la formación integral del alumno. Sin embargo, no se pudo llevar a la práctica ninguna de la sesiones por dos razones: los contenidos de números enteros y divisibilidad se imparten al comienzo del curso y el trabajo no estaba enteramente desarrollado.

Para finalizar, en este Máster considero que he adquirido unos conocimientos imprescindibles para el buen desarrollo de la práctica docente. Sobre todo, me gustaría destacar el gran aprendizaje que me llevo de las prácticas, donde pude aplicar los conocimientos previamente adquiridos en el Máster.

BIBLIOGRAFÍA

▪ NORMATIVA

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa

Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*. Valladolid, 8 de mayo de 2015, núm. 86, 32051-32480. Recuperado de: https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/orden-edu-362-2015-4-mayo-establece-curriculo-regula-implan.ficheros/549394-BOCYL-D-08052015-4.pdf

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 3 de enero de 2015, núm. 3, 169-546. Recuperado de: https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

▪ BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Arias, J. M., Maza, I. (2016). Matemáticas 2 ESO Código Bruño. Grupo Editorial Bruño.

Armstrong, T. (2017). *Inteligencias múltiples en el aula: Guía práctica para educadores* (Remedios Diéguez, trad.). Barcelona, España: Editorial Paidós. (Obra original publicada en 2006).

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Editorial Alianza.

Calvo, R. M. (2018). Análisis del aprendizaje mediante trabajo en grupos colaborativos en el marco de la MEMAD. Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Colera, J., Gaztelu, I., Colera, A. (2016). Matemáticas 2. (Aprender es crecer en conexión) . Grupo Anaya.

Ferrándiz, C. (2005a). Evaluación y desarrollo de la competencia cognitiva: un estudio desde el modelo de las inteligencias. Madrid, España: Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE).

Galán, E. (2018). *Aplicación de la teoría de las inteligencias múltiples en la docencia matemática* (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Valladolid, España.

Galindo, F.; Sanz, J. y Tristán, L.A. (2003). *Guía práctica de cálculo infinitesimal en una variable real*. Valladolid, España: Editorial Paraninfo.

García, M. A. (2008). *Educación matemática atendiendo a la diversidad. Análisis de una metodología específica*. Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Gardner, H. (1987). *Estructuras de la mente: la teoría de las inteligencias múltiples* (Sergio Fernández, trad.). México DF, México: Fondo de Cultura Económica. (Obra original publicada en 1983).

Gardner, H. (2005). Inteligencias múltiples veinte años después. *Revista dePsicología y Educación*, 1(1), 27-34.

Gardner, H. (2016). *Inteligencias múltiples.La teoría en la práctica* (M.ª Teresa Melero, trad.). Barcelona, España: Editorial Paidós. (Obra original publicada en 1995).

Gavilán, P. y Alario, R. (2010). *Aprendizaje cooperativo: una metodología con futuro. Principios y aplicaciones*. Madrid, España: Editorial CCS.

Gómez, F. (2018). *Ritmos euclídeos y ritmos equilibrados*. DivulgaMat, Real Sociedad Matemática Española. Recuperado de: http://www.divulgamat.net/index.php?option=com_content&view=article&id=17815&directory=67

González, J. L.; Iriarte, M. D.; Jimeno, M; Ortiz, A.; Ortiz, A.; Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1990). *Matemáticas: cultura y aprendizaje.Números enteros*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Huerta, Y. G. (2015). *Aprendizaje cooperativo Secundaria.* Editorial Grupo Anaya.

Iglesias, J. C.; González, L. F.; Fernández-Río, J. (2017). *Aprendizaje cooperativo: teoría y práctica en las diferentes áreas y materias del currículum*. Madrid, España: Editorial Pirámide.

Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (2017). *Cooperative learning*. Ponencia Plenaria. I Congreso Internacional de Innovación y Educación (22-23 de septiembre, 2017). Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza. Tomado de la red en junio de 2019. Recuperado de: https://2017.congresoinnovacion.educa.aragon.es/documents/48/David_Johnson.pdf

Johnson, D. W.; Johnson, R. T. y Holubec, E. J. (1999).*El aprendizaje cooperativo en el aula* (Gloria Vitale, trad.). Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós. (Obra original publicada en 1994).

Maza, C. (9 de octubre de 2008). Matemáticas antiguas [Entrada en blog]. Recuperado de: http://matematicasantiguas.blogspot.com/2008/10/huesos-de-ishango.html

Ortega, T.; Berciano, A. y Pecharromán, C. (2018). *Complementos de formación matemática*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Osorio, K. E. y Castañeda, E. S. (2014). *Criterios de divisibilidad en diferentes bases*. Universidad Pedagógica Nacional (Licenciatura en Matemáticas). Bogotá, Colombia. Tomado de la red en junio de 2019. Recuperado de: http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/2175/TE-16947.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ovejero, A. (2018). *Aprendizaje cooperativo crítico: mucho más que una eficaz técnica pedagógica*. Madrid, España: Editorial Pirámide.

Pujolàs, P. (2008). *9 ideas clave. El aprendizaje cooperativo*. Barcelona, España: Editorial GRAÓ.

Pujolàs, P.; Lago, J. R. (2017). *Aprender en equipos de aprendizaje cooperativo. El programa CA/AC («Cooperar para aprender/Aprender a cooperar»)*. Barcelona, España; Editorial Octaedro.

Ramos, F. (2013). *Matemáticas 2º ESO. Capítulo 4: Divisibilidad.*Madrid, España: Apuntes marea verde. Recuperado de: http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2_04_Divisibilidad.pdf

Sierra, M.; González, M.; Sánchez, A. y González, M. T. (1989). *Matemáticas: cultura y aprendizaje. Divisibilidad*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Silva, S. (2003). *Atención a la diversidad. Necesidades educativas: guía de actuación para docentes*. Vigo, España: Editorial IdeasPropias.

VV. AA. (2001). Gran Enciclopedia Sapiens Temática. Matemáticas (volumen 10). España: PASA.

VV. AA. (2016). Matemáticas 2º ESO Serie Resuelve, método Saber Hacer. Editorial Santillana.

- **APUNTES ACADÉMICOS UNIVERSITARIOS**

Carbonero, M. A.; Martín, L. J. y Salgado, C. (2018). Apuntes de la asignatura Aprendizaje y desarrollo de la personalidad. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid.

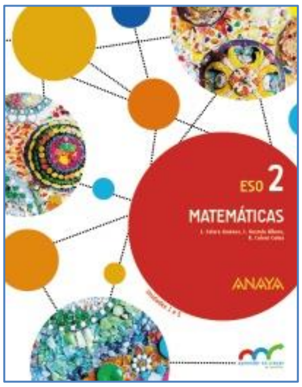
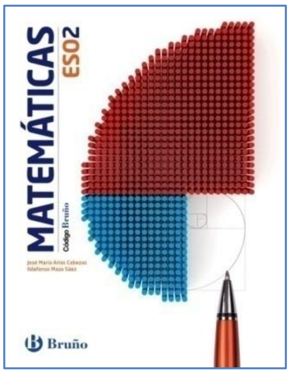
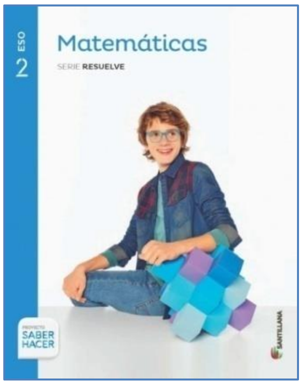
González, T., Población, J. A. y Reyes, M. E. (2019). Apuntes de la asignatura Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid.

Sanz, F. (2019). Apuntes de la asignatura Complementos de Matemáticas. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid.

ANEXOS

ANEXO I: Libros de texto

En la siguiente tabla se presentan los libros de texto seleccionados para realizar el análisis del apartado “Análisis comparativo de libros de texto”.

<u>LIBRO DE TEXTO ANAYA</u> Colera, J., Gaztelu, I., Colera, A. (2016). Matemáticas 2. (Aprender es crecer en conexión) . Grupo Anaya. ISBN: 978-84-698-1426-0	
<u>LIBRO DE TEXTO BRUÑO</u> Arias, J. M., Maza, I. (2016). Matemáticas 2 ESO Código Bruño. Grupo Editorial Bruño. ISBN: 978-84-696-1334-4	
<u>LIBRO DE TEXTO SANTILLANA</u> VV. AA. (2016). Matemáticas 2º ESO Serie Resuelve, método Saber Hacer. Editorial Santillana. ISBN: 978-84-680-2894-1	

A continuación, se va a realizar un resumen sobre la estructura de las unidades en cada uno de los libros de texto para su posterior comparación. El apartado de los contenidos se limitará a aquellas unidades relacionadas con los temas que trata este trabajo.

- **LIBRO DE TEXTO GRUPO ANAYA**

En el caso de este libro de texto, los contenidos de números enteros y divisibilidad aparecen en los dos primeros temas. El primero de ellos, denominado "Los números naturales", incluye los contenidos de divisibilidad mientras que los de números enteros se incluyen en el segundo tema denominado de esa misma forma, "Los números enteros".

<u>Estructura de la unidad</u>

La organización de los apartados es la misma en todas las unidades por lo que se va a exponer la estructura general de la unidad excepto en el apartado de "Contenidos", en el que se distinguirán los dos temas ("Los números naturales" y "Los números enteros").

❖ **Introducción** (2 páginas)

En la primera página, aparece una breve introducción histórica de los contenidos que se van a estudiar a lo largo de la unidad. En la otra página se proponen una serie de actividades para que los alumnos activen los conocimientos previos sobre el tema.

❖ **Contenidos** (12 páginas en la primera unidad y 10 páginas en la segunda)

Cada uno de los apartados en los que se dividen los contenidos de cada unidad y que exponemos a continuación tiene la siguiente estructura:

- Desarrollo de los contenidos matemáticos
- Ejemplos y ejercicios resueltos para una mayor comprensión por parte de los alumnos
- Actividades para aplicar directamente los contenidos explicados en la teoría
- Informaciones complementarias o curiosidades en los márgenes, junto a la teoría.

En algunas actividades aparece un icono que sugiere la metodología aplicable para su desarrollo o su tipología: aprendizaje cooperativo, emprendimiento, pensamiento crítico, evaluación, las TIC, interdisciplinariedad e inclusión.

Los contenidos matemáticos de la unidad "Los números naturales" son los siguientes:

1. El conjunto de los números naturales (3 páginas).
   Se definen los números naturales y se representan en la recta numérica. Después, se introduce el Sistema de Numeración Decimal, el binario y el sexagesimal.
2. Operaciones con números naturales (2 páginas).

Se explican los pasos para realizar operaciones combinadas con los números naturales y la prioridad de estas operaciones en la calculadora básica y en la científica.

3. La relación de divisibilidad (3 páginas).

   Se definen los conceptos de múltiplo y divisor de un número, y se expone el procedimiento para calcularlos. A continuación, se expone una propiedad de los múltiplos de un número. Por último, se definen y se desarrollan los criterios de divisibilidad más simples (2, 3, 5, 9, 10, 11).

4. Números primos y compuestos (2 páginas).

   Se definen los conceptos de número primo y compuesto. Después, se desarrolla el procedimiento de factorización de un número natural y el del cálculo de múltiplos y divisores de un número descompuesto en factores primos.

5. Mínimo común múltiplo de dos o más números (1 página).

   Se define el mínimo común múltiplo de varios números naturales y se expone el procedimiento para calcularlo.

6. Máximo común divisor de dos o más números (1 página).

   De forma análoga al apartado anterior, se define el máximo común divisor de varios números naturales y se expone el procedimiento para calcularlo.

Los contenidos matemáticos de la unidad "Los números enteros" son los siguientes:

1. Números positivos y negativos (1 página).

   Se definen los números positivos y negativos y se muestra su utilidad en la vida real.

2. El conjunto Z de los números enteros (1 página).

   Se define el conjunto de los números enteros, el valor absoluto y opuesto de un número entero y el orden en la recta numérica.

3. Operaciones con números enteros (4 páginas).

   Se definen las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y combinadas de números enteros.

4. Potencias de números enteros (3 páginas).

   Se define la potencia de un número entero y sus propiedades (potencia de un producto y de un cociente, producto y cociente de potencias de la misma base, y potencia de otra potencia).

5. Raíces de números enteros (1 página).

   Se define la raíz cuadrada y las de índice superior a dos.

- **Ejercicios y problemas** (4 páginas)

Al final de la unidad se propone una serie de ejercicios y problemas para aplicar los contenidos explicados a lo largo de la exposición teórica. Están clasificados, con su grado de dificultad especificado y entre ellos aparecen algunos resueltos que sirven como modelos para resolver los demás. Además, aparece un apartado, "Aprende a resolver problemas", en el que se muestran estrategias, sugerencias, pistas y formas de pensar útiles para que los alumnos sepan cómo enfrentarse a un problema.

❖ **Taller de matemáticas** (2 páginas)

Es una doble página en la que los alumnos pueden encontrar lecturas, actividades o consejos para reflexionar sobre los contenidos estudiados a lo largo de la unidad. Se divide en varios subapartados entre los que se encuentra "Emprende y aprende", para promover la iniciativa y creatividad del alumno; "Entrénate resolviendo problemas", para aprender a enfrentarse a situaciones problemáticas; y una autoevaluación, para que el alumno compruebe si con el trabajo y esfuerzo dedicado en la unidad se ha logrado un aprendizaje adecuado.

- **LIBRO DE TEXTO GRUPO EDITORIAL BRUÑO**

Este libro de texto dedica una única unidad al estudio de números enteros y divisibilidad denominado "Divisibilidad y números enteros".

<u>Estructura de la unidad</u>

❖ **Introducción** (2 páginas)

Esta editorial utiliza una doble página para enumerar los contenidos que se van a desarrollar en la unidad. Además, hace referencia a la Historia en un pequeño eje cronológico.

❖ **Contenidos** (12 páginas en la primera unidad y 10 páginas en la segunda)

Cada uno de los apartados en los que se dividen los contenidos de cada unidad y que exponemos a continuación tiene la siguiente estructura:

- Piensa y calcula: son ejercicios rápidos de cálculo mental relacionados con los contenidos
- Desarrollo de los contenidos matemáticos
- Ejemplos y ejercicios resueltos de cada concepto o procedimiento
- Ejercicios propuestos de aplicación directa de la teoría
- Informaciones complementarias o curiosidades en los márgenes, junto a la teoría. Además, incluye un apartado denominado "Carné calculista" que propone a los alumnos una cuenta para cada día

Los contenidos matemáticos de la unidad "Divisibilidad y números enteros" son los siguientes:

1. Divisibilidad (2 páginas).

Se expone la relación de divisibilidad (definiciones de divisor y múltiplo) y los criterios de divisibilidad más básicos (2, 3, 5 y 11). A continuación, se definen los números primos y compuestos, y la descomposición de un número en factores primos y su procedimiento.

2. M.C.D. y m.c.m. (2 páginas).

   Se definen los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo, y la forma usual de calcularlos. Después, se expone el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de dos números. Por último, se refleja la relación existente entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

3. Los números enteros (2 páginas).

   Se define el conjunto de los números enteros, el orden y la representación gráfica en la recta numérica. A continuación, se expone en una tabla el resumen de todos los operadores relacionales ($, \neq, <, \leq, >, \geq$) y se define el valor absoluto de un número.

4. Operaciones con números enteros (2 páginas).

   Se definen las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números enteros. A continuación, se expone la jerarquía de estas operaciones, el uso del paréntesis y la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Por último, se define la divisibilidad de los números enteros.

❖ **Ejercicios y problemas resueltos** (2 páginas) **y propuestos** (3 páginas)

Se utiliza una doble página con ejercicios y problemas tipo resueltos y, posteriormente, tres páginascon ejercicios y problemas sobre los contenidos matemáticos estudiados a lo largo de la unidad. Estos últimos se clasifican en distintas secciones según el concepto tratado y el nivel de dificultad, pero no se especifica este nivel en cada ejercicio.

❖ **Matematización en contexto reales y Comprueba lo que sabes** (1 página)

En el primero aparecen ejercicios con una aplicación real en la vida cotidiana y en el segundo un modelo de examen para que el alumno evalúe los conocimientos adquiridos.

❖ **Ejercicios y problemas resueltos y propuestos con el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC)** (2 páginas y media)

En las dos primeras páginas aparecen ejercicios resueltos paso a paso y ejercicios propuestos para realizar con distintos programas informáticos. También aparecen breves aspectos del funcionamiento de dichos programas. En la siguiente media página aparece un examen para realizar con algún programa informático (Wiris, GeoGebra y hoja de cálculo).

- ❖ **Organiza tus ideas** (media página)

Para finalizar la unidad y facilitar la organización de las ideas del alumnado, se expone un esquema de los contenidos de la unidad relacionados.

- **LIBRO DE TEXTO EDITORIAL SANTILLANA**

En este libro aparece un único tema sobre números enteros y divisibilidad y se titula "Números enteros".

<u>Estructura de la unidad</u>

- ❖ **Introducción** (2 páginas)

La unidad comienza con una breve introducción en la que se repasan los contenidos que ya se han estudiado en cursos anteriores (Claves para empezar); se especifican los contenidos (Saber) y los procedimientos (Saber hacer) de la unidad; se introduce un poco de historia relacionada con la unidad, utilidades y curiosidades sobre algún invento; y se propone un ejercicio sencillo relacionado con el invento descrito para que los alumnos relacionen la unidad con la vida cotidiana.

- ❖ **Contenidos** (12 páginas)

Cada uno de los apartados en los que se dividen los contenidos de la unidad y que exponemos a continuación tiene la siguiente estructura:

- Desarrollo de los conceptos matemáticos explicados con ejemplos resueltos para una mayor comprensión por parte de los alumnos
- Procedimientos, en caso necesario, explicados paso a paso para resolver las actividades
- Actividades para practicar los contenidos explicados en el apartado
- Informaciones complementarias y retos para poner a prueba los conocimientos adquiridos en los márgenes, junto a los textos.

Los contenidos matemáticos son los siguientes:

1. Números enteros (2 páginas)

   Se definen los números enteros y se representan en la recta numérica. A continuación se definen los conceptos de valor absoluto y opuesto de un número entero. Por último se estudia como comparar dos o más números enteros.
2. Operaciones con números enteros (4 páginas)

   Se definen la suma, resta, multiplicación y división de números enteros, prestando atención a las operaciones con paréntesis.
3. Múltiplos y divisores de números enteros (2 páginas)

   Se definen los conceptos de múltiplo, divisor y ser divisible; y el número primo y compuesto.

4. Factorización de un número entero (2 páginas)

   Se definen y exponen los criterios de divisibilidad más sencillos (2, 3, 5, 9, 10, 11) y la factorización de un número entero.

5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo (2 páginas)

   Se define el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios números enteros y se exponen los procedimientos para calcularlos.

❖ **Actividades finales** (6 páginas)

Además de las actividades propuestas en cada apartado de contenidos, al final de la unidad se proponen más actividades con una gran cantidad de problemas adaptados a contextos reales para afianzar los conocimientos adquiridos en la unidad y seguir profundizando. En todas estas actividades está marcada la dificultad que tiene. Además, entre ellas aparecen actividades del mismo tipo resueltas para que sirvan de guía. Para finalizar, se incluye una autoevaluación para que el alumno compruebe si ha alcanzado los objetivos mínimos de la unidad.

❖ **Competencia matemática** (2 páginas)

Estas últimas páginas de la unidad están divididas en cuatro apartados.

En el primero, titulado "En la vida cotidiana", se propone una actividad relacionada con el invento inicial que aparece en la introducción para trabajar algunos contenidos de la unidad relacionados con la vida real.

El segundo, "Formas de pensar", se pone a prueba el razonamiento matemático del alumno.

El tercer apartado, "Proyecto final", consiste en realizar un pequeño trabajo para mejorar el trabajo cooperativo.

Por último, en el cuarto apartado, "Pruebas PISA", se proponen actividades extraídas de las pruebas internacionales PISA con el objetivo de comprobar el desarrollo de competencias.

Además, todos los contenidos y actividades en los que se trabaja de forma particular las competencias clave están marcados con iconos haciendo referencia a cada competencia.

ANEXO II: Técnicas de aprendizaje cooperativo

- ## TÉCNICAS SIMPLES

FOLIO GIRATORIO

El profesor plantea una cuestión a los alumnos y cada uno de ellos, en su grupo, realiza una aportación por turnos de forma escrita sobre lo qué sabe de esa cuestión. Mientras otro escribe, se pueden comentar las respuestas. Además, lo mejor sería que cada uno escribiese en un color para observar las aportaciones individúales.

LECTURA COMPARTIDA

Cada alumno lee una parte de un texto y, al finalizar, resume su contenido.

PARADA DE TRES MINUTOS

Los alumnos, en grupos, reflexionan durante tres minutos sobre un contenido que acaba de explicar el profesor y, posteriormente, cada grupo realiza una pregunta al profesor.

CONSTRUIR UN PROBLEMA

El profesor da unas operaciones matemáticas a cada grupo y estos, primero de forma individual y luego llegando a un consenso con todo el grupo, deben construir un problema con esas operaciones. Después, se expone el problema a toda la clase explicando cómo ha sido el procedimiento hasta llegar a ese enunciado.

TÉCNICA DEL 1-2-4

Cada alumno, individualmente, realiza un ejercicio o piensa la respuesta a una pregunta planteada por el profesor. Luego, se ponen de dos en dos y contrastan las respuestas hasta llegar a un consenso. Después, hacen lo mismo pero con todo el grupo y, por último, se llega a una respuesta o solución final con toda la clase.

LÁPICES AL CENTRO

Se plantea varios problemas o ejercicios a los alumnos y cada integrante del grupo se hace cargo de una parte. Primero, cada alumno lee su ejercicio a los compañeros y entre todos piensan cómo se llegaría a la solución. Sin embargo, en ese periodo de tiempo, el material para escribir se coloca en el centro de la mesa para indicar que no se puede escribir, solo se puede hablar y escuchar a los compañeros. Cuando todos saben cómo realizar su ejercicio, cogen el material de escribir para indicar que en ese momento solo se puede escribir, no se puede hablar. Si tienen alguna duda pueden planteársela a sus compañeros pero de la misma forma que antes.

NÚMEROS IGUALES JUNTOS

Se suele utilizar en la corrección de un problema o ejercicio. Los alumnos de cada grupo realizan una tarea hasta que tengan la seguridad de que todos los integrantes del grupo saben realizarla y, posteriormente, se numeran. Entonces, el profesor dice un número al azar y los alumnos que tengan ese número (habrá un alumno de cada grupo) tienen que corregir la tarea.

JUEGO DE LAS PALABRAS

El profesor escribe unas palabras clave en la pizarra y los alumnos, en grupos, deben escribir una frase con esas palabras. Después, se pone en común con toda la clase y se elige la mejor opción.

MAPA CONCEPTUAL A CUATRO BANDAS

Cada alumno del grupo, se prepara una parte del tema que ha estudiado y realiza un mapa conceptual que lo resuma. Después, los alumnos de cada grupo ponen en común lo trabajado y realizan un mapa conceptual que relacione todos los contenidos del tema con coherencia, lo que les servirá como material para el estudio.

- **TÉCNICAS COMPLEJAS**

TÉCNICA JIGSAW (O TÉCNICA DEL PUZLE O ROMPECABEZAS)

Primero se asigna una parte de la tarea a cada integrante del grupo de tal manera que la tarea grupal dependa de las aportaciones de cada uno. Entonces, cada integrante se hace experto de su tarea y se reúne en los equipos de expertos, que está formado por todos los alumnos de los grupos iniciales que tienen la misma parte de la tarea. Después de llegar a una solución común, cada experto vuelve a su grupo, explica a sus compañeros su tarea y responde a las preguntas que surjan. Finalmente, todo el grupo tiene que dominar el tema. La nota individual dependerá de la nota de los compañeros del grupo base.

CO-OP CO-OP

En este método, cada grupo elige un tema para trabajar sobre él. Después, dentro de cada grupo se divide el trabajo y cada alumno trabaja una parte. Por último, cada alumno debe aportar su parte al grupo, de manera similar a cómo se hace en la técnica anterior.

TRABAJO EN EQUIPO – LOGRO INDIVIDUAL (TELI)

Cada alumno tiene un Plan Personalizado de Trabajo donde se recogen los objetivos individuales y las actividades acordes a su nivel. Para trabajar, los alumnos se juntan en grupos heterogéneos y realizan una hoja de actividades debatiendo entre ellos y, al finalizar cada una, comparando las respuestas con una hoja de soluciones. En esta técnica, como en todas las técnicas cooperativas, todos los alumnos deben alcanzar sus objetivos y ayudar a sus compañeros a alcanzar los suyos, ya que, al final, se realizan pruebas individuales y se otorgan recompensas a los grupos en los que se encuentren los alumnos que hayan alcanzado sus objetivos individuales.

TORNEOS DE JUEGOS POR EQUIPOS (TJE) (TEAMS GAMES-TOURNAMENTS (TGT))

Los alumnos, en grupos heterogéneos, se preparan el material académico correspondiente hasta que todos sus integrantes dominen los temas. Después, se realiza un torneo entre equipos en los que cada alumno del grupo se enfrenta a un alumno de otro grupo que tenga un nivel académico similar, con el objetivo de obtener puntos para su equipo.

TÉCNICAS INVESTIGACIÓN GRUPAL

Se trata de que los alumnos, divididos en grupos en función de sus intereses y aptitudes, investiguen en profundidad sobre un tema de interés. Al final, con toda la información recogida, deben elaborar un informe y hacer una presentación al resto de la clase.

TUTORÍA ENTRE IGUALES (PEER TUTORING)

Consiste en dividir la clase en parejas en las que un alumno es tutor y otro tutorado, es decir, un alumno enseña y el otro aprende. Además, estos roles pueden cambiar según la materia de estudio o la situación de aprendizaje. El objetivo es que el alumno que más domina el tema afiance su aprendizaje y el que menos, que aprenda de un "igual" y de una forma más individualizada.

GRUPOS BASE Y GRUPOS DE TRABAJO

Los alumnos, divididos en los denominados grupos base (GB, que son heterogéneos), realizan ejercicios y aprende con ayuda de sus compañeros. Una vez, que han aprendido un concepto o han comprendido cómo se realiza un problema o ejercicio con sus compañeros, se junta con otros compañeros en los denominados grupos de trabajo (GT). Estos grupos son homogéneos, es decir, está formado por alumnos que tienen un nivel académico similar, por lo que las tareas que realicen en este grupo estarán adaptadas al nivel. Además, se realizan de forma individual para comprobar que se ha aprendido de forma significativa en el grupo base.

ANEXO III: Enunciados de las actividades de aprendizaje por descubrimiento

1. Múltiplos y divisores

HOJA 1 – Conviértete en expert@ en múltiplos

Definición: Los múltiplos de un número entero n son los números que se obtienen al multiplicar ese número n por todos los números enteros positivos.

Por ejemplo, cuando escribes las tablas de multiplicar estás escribiendo múltiplos.

Nota: El conjunto de los múltiplos de un número es infinito.

Ejemplo. Los cinco primeros múltiplos de 3 son: $3, 6, 9, 12, 15$, los cuales se han obtenido multiplicando 3 por los primeros cinco enteros positivos ($3 \cdot 1 = 3$, $3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 3 = 9$, $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 5 = 15$). Pero podríamos seguir multiplicando por los sucesivos enteros positivos y obtener más múltiplos: 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42,…

Ahora ponte a prueba para comprobar si has entendido el concepto de múltiplo:

- Calcula los cinco primeros múltiplos de 7 y 12.
- Halla los múltiplos de 13 comprendidos entre 19 y 60.

HOJA 2 – Conviértete en expert@ en divisores

Definición: Un número entero a es **divisor** de otro número entero b si al dividir b entre a el resto es cero.

Nota: Todo número tiene como divisor a 1 y a sí mismo. Además, el conjunto de los divisores de un número es finito.

Ejemplo. 3 es divisor de 12 porque al dividir 12 entre 3, el resto es cero. Sin embargo, 3 no es divisor de 10 porque al dividir 10 entre 3, el resto no es cero.

ATENCIÓN. Sia es divisor de b, entonces también se dice que b es **divisible** por a.

En el ejemplo anterior, tenemos que 3 es divisor de 12 y, a su vez, 12 es divisible por 3.

¿Cómo se calculan todos los divisores de un número?

- Se divide el número entre los sucesivo números naturales hasta llegar a una división en la que el cociente sea menor que el divisor.
- De cada división exacta, se obtienen dos divisores de ese número: el divisor y el cociente.

Ejemplo. Todos los divisores de 45 son 1, 3, 5, 9, 15 y 45 ya que, de las divisiones que tienen resto cero, se obtiene:

$45:1 = 45$, por lo que 1 y 45 son divisores.

$45:3 = 15$, por lo que 3 y 15 son divisores.

$45:5 = 9$, por lo que 5 y 9 son divisores.

Ahora ponte a prueba para comprobar si has entendido el concepto de divisor:

- ¿Es 7 divisor de 84? ¿Y de 97?
- Calcula todos los divisores de 48.

HOJA 3 – Relación entre múltiplos y divisores

Si la división de a entre b es exacta, entonces las siguientes frases son equivalentes:

- a es múltiplo de b.
- a es divisible entre b.
- b es divisor de a.

Ejemplo. 12 es múltiplo de 3 (porque 12=3*4), 12 es divisible entre 3 y 3 es divisor de 12 (porque la división 12 entre 3 tiene resto cero).

Realizad los siguientes ejercicios:

a) Calcula los cinco primeros múltiplos de 4, 16 y 21.
b) Calcula un múltiplo de 37 comprendido entre 130 y 150.
c) Calcula todos los divisores de 29, 147 y 256.
d) Enuncia la relación que hay entre las siguientes parejas de números, como aparece al comienzo de la hoja 3:
   - 72 y 36.
   - 3 y 21.
   - 42 y 84.

2. Criterios de divisibilidad

HOJA 1 – Criterios de divisibilidad por 2, por 3 y por 9

Criterio de divisibilidad por 2

Un número es divisible por 2 si su última cifra es 0, 2, 4, 6 u 8 y se denominan números pares. Si no lo son, se denominan impares.

Ejemplo. 14 es divisible entre 2 porque acaba en 4 mientras que 15 no lo es porque acaba en 5.

Criterio de divisibilidad por 3 y por 9

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3 y es divisible por 9 si la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9.

Ejemplo.132 sí es divisible por 3 porque la suma de sus cifras es 6, que es múltiplo de 3. Sin embargo, la suma de las cifras de 115 es 7 por lo que no es divisible entre 3. Por otro lado, 963 sí es divisible entre 9 porque la suma de sus cifras es 18, que es múltiplo de 9, y, por el contrario, 870 no lo es (la suma de sus cifras es 15, que no es múltiplo de 9).

Ahora ponte a prueba para comprobar si has entendido estos criterios de divisibilidad:

- Comprueba si los siguientes números son divisibles por 2, por 3 o por 9: 111, 123, 333, 450.

Después de que la otra pareja de expertos te haya explicado los otros criterios y hayas realizado los ejercicios, realiza junto a ellos los siguientes ejercicios:

- Escribe, aplicando los criterios de divisibilidad, un número divisible por 2, otro por 3, otro por 9, otro por 5, otro por 10 y otro por 11.
- Escribe un número que sea a la vez divisible por 2, por 3 y por 5. ¿Por qué otro número es divisible?
- Calcula el valor de a y b para que el número 5a7b sea múltiplo de 2 y 11.

HOJA 2 – Criterios de divisibilidad por 5, por 10 y por 11

Criterio de divisibilidad por 5

Un número es divisible por 5 si su última cifra es 0 o 5.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número es divisible por 10 si es a la vez divisible por 2 y por 5, es decir, si su última cifra es 0.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número natural es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras colocadas en los lugares pares menos la suma de las cifras colocadas en las cifras impares es 11 o múltiplo de 11.

Ahora ponte a prueba para comprobar si has entendido estos criterios de divisibilidad:

- Comprueba si los siguientes números son divisibles por 5, por 10 o por 11: 110, 155, 330, 1221.

Después de que la otra pareja de expertos te haya explicado los otros criterios y hayas realizado los ejercicios, realiza junto a ellos los siguientes ejercicios:

- Escribe, aplicando los criterios de divisibilidad, un número divisible por 2, otro por 3, otro por 9, otro por 5, otro por 10 y otro por 11.
- Escribe un número que sea a la vez divisible por 2, por 3 y por 5. ¿Por qué otro número es divisible?
- Calcula el valor de a y b para que el número 5a7b sea múltiplo de 2 y 11.

ANEXO IV: Cuestionario

Rellena este cuestionario en el que evaluarás tu trabajo individual y en tu grupo base, el trabajo de tus compañeros del grupo base y la metodología del aprendizaje cooperativo utilizada en esta unidad.

Las respuestas van del 1 al 5 siendo 1 (nunca), 2 (pocas veces), 3 (a menudo), 4 (casi siempre), 5 (siempre).

TRABAJO EN LOS GRUPOS BASE	1	2	3	4	5
Tu nombre:					
Ha escuchado cuando alguien hablaba					
Ha cumplido con las funciones asignadas					
Se ha esforzado al máximo en las tareas					
Ha ayudado cuando alguien lo necesitaba					
Nombre:					
Ha escuchado cuando alguien hablaba					
Ha cumplido con las funciones asignadas					
Se ha esforzado al máximo en las tareas					
Ha ayudado cuando alguien lo necesitaba					
Nombre:					
Ha escuchado cuando alguien hablaba					
Ha cumplido con las funciones asignadas					
Se ha esforzado al máximo en las tareas					
Ha ayudado cuando alguien lo necesitaba					
Nombre:					
Ha escuchado cuando alguien hablaba					
Ha cumplido con las funciones asignadas					
Se ha esforzado al máximo en las tareas					
Ha ayudado cuando alguien lo necesitaba					

METODOLOGÍA

Responde a las preguntas en la otra cara de la hoja.

1. ¿Qué es lo que más te ha gustado de las técnicas utilizadas del aprendizaje cooperativo? ¿Y lo que menos?
2. ¿Tuviste que pedir ayuda para resolver algún ejercicio? ¿Te la solucionaron tus compañeros del grupo base? ¿Te pidieron ayuda?
3. ¿Te parecieron difíciles los ejercicios?
4. ¿Te parece bien que repercuta en tu calificación individual la valoración del trabajo en tu grupo base?

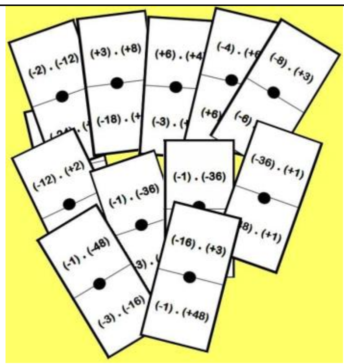
ANEXOV: Juegos matemáticos

<table>
<tr>
<td>

<u>DOMINÓ CON NÚMEROS ENTEROS</u>

Esta actividad se ha extraído de la página web: https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/04/25/domino-del-producto-con-enteros-la-regla-de-los-signos/

</td>
<td>



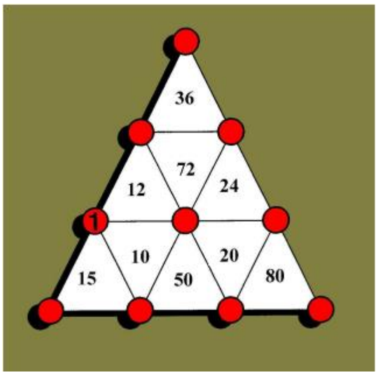
</td>
</tr>
<tr>
<td>

<u>TRIÁNGULOS DE MÚLTIPLOS Y DIVISORES</u>

Esta actividad se ha extraído de la página web:

https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2011/11/20/multiplos-divisores-triangulos-numericos/

</td>
<td>



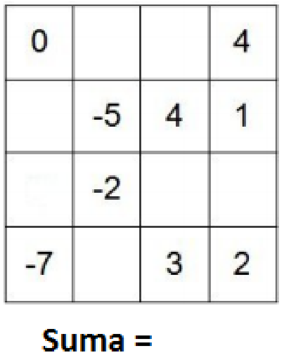
</td>
</tr>
<tr>
<td>

<u>CUADRADOS MÁGICOS</u>

Esta actividad se ha extraído de la página web:

http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei/downloads/05cuadradosmagicos.pdf

</td>
<td>



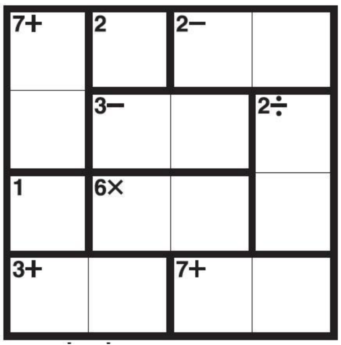
</td>
</tr>
<tr>
<td>

<u>KENKEN</u>

Esta actividad se ha extraído de la página web

https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2012/01/17/el-juego-del-kenken-nivel-ii/

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

ANEXO VI: Soluciones de las actividades

1. El ascensor

Las plantas de las que se habla en el problema son las siguientes:

6 - Restaurante

5 – Cine

3 - Mujeres

2 - Hombres

1 - Supermercado

0 – Parking

-4 - Niños

-5 - Libros

-6 – Bolera

De las plantas 4, -1, -2 y -3 no se comenta nada en esta parte del problema.

Por tanto, las respuestas a las preguntas son:

1. El centro comercial tiene 13 plantas.
2. La bolera en el piso -6, el restaurante en la 6.
3. El padre y el hijo subieron 7 pisos para llegar al supermercado. Sin embargo, la madre subió 6 pisos.
4. El trayecto más corto lo recorren cuando bajan de la planta 1 a la planta 0, cuando llevan las compras del supermercado al coche, y es de un piso.
   El trayecto más largo lo realizan el padre y los niños cuando bajan del restaurante (planta 6) a la bolera (planta -6). En total 12 pisos.

2. El restaurante

a. Si en total son 24 alumnos y se quieren sentar en grupos formados por las mismas personas, el número de personas en cada grupo son los divisores de 24. Entonces, las posibles soluciones se muestran en la siguiente tabla.

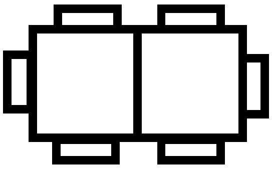
Nº de sillas en cada mesa	1	2	3	4	6	8	12	24
Mesas necesarias	24	12	8	6	4	3	2	1

b. Primero se va a comentar la condición de que el establecimiento dispone de mesas de cuatro personas. Debido a esto, algunas de las mesas que aparecen en la tabla del apartado anterior, están formadas por varias mesas juntas ya que, por ejemplo, no se pueden poner 6 sillas en una mesa. Es decir, en el apartado anterior no se ha especificado el tamaño de las mesas por lo que, en ese caso, necesitaríamos 4 mesas si en cada mesa se pudiesen sentar 6 personas. Entonces hay que volver a replantear el problema. A continuación se muestra en una tabla el número de mesas de cuatro personas que se necesitan en cada caso anterior.

Nº de sillas en cada mesa	1	2	3	4	6	8	12	24
Nº de mesas de 4 personas necesarias	24	12	8	6	8	9	10	12

En los cuatro primeros casos, las mesas necesarias de cuatro personas no varían respecto a lo dicho en el apartado anterior porque en una mesa entran hasta cuatro personas. Sin embargo, en los demás casos sí.

En el caso de juntar a los alumnos en grupos de 6, necesitaríamos 8 mesas de 4 personas ya que cuando juntamos dos de estas mesas se pueden sentar exactamente 6 personas, como se puede ver en la siguiente imagen:



Del mismo modo se puede hallar el número de mesas para los casos restantes.

Entonces, si ahora imponemos la condición de que el restaurante solo dispone de 8 mesas de este tipo, solo nos podemos quedar con el caso de juntar a los alumnos en grupos de 3, 4 o 6 personas. Y la forma en la que se utiliza el menor número de mesas son los grupos de 4 personas, ya que aprovechan las cuatro sillas de cada mesa.

4. <u>El supermercado</u>

<u>Primera pregunta</u>- Nivel bajo

Como todos los trabajadores tienen que colocar el mismo número de productos, se tienen que calcular los divisores de 110.

- 110 acaba en cero luego es divisible por 2 y por 5 y, por tanto, por 10.
- Si sumamos las cifras de 110 obtenemos $1 + 1 + 0 = 2$ que no es 3 ni múltiplo de 3, luego 3 no es divisor de 110. Tampoco es múltiplo de 9.
- 110 sí es divisible por 11 porque $1 - (1 + 0) = 0$.

Entonces, tenemos que 110 es divisible por 2, 5 y 11, y todos los divisores de 110 son 1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110. Además, como nos dicen que el número máximo de trabajadores es 33, las posibles soluciones son 1, 2, 5, 10, 11 y 22.

<u>Segunda pregunta</u>- Nivel medio

El número que aparece en el código de barras es $123456X654321$, donde falta la cifra central a la que hemos denominado X. Como sabemos que es divisible por 3 y 11, utilizaremos los criterios de divisibilidad de estos números.

La suma de las cifras del número es

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \mathrm{X} + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 42 + \mathrm{X}$,

y para que sea divisible por 3 solo puede ser $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{X} = 3$, $\mathrm{X} = 6$ o $\mathrm{X} = 9$.

Además, la suma de las cifras pares menos la de las impares es

$(2 + 4 + 6 + 6 + 4 + 2) - (1 + 3 + 5 + \mathrm{X} + 5 + 3 + 1) = 24 - (18 + \mathrm{X}) = 6 - \mathrm{X}$.

Para que $6 - \mathrm{X}$sea cero o múltiplo de 11, solo puede ser $\mathrm{X} = 6$.

Entonces el número que se ha borrado del código de barras es 6 y el número es 1234566654321.

<u>Tercera pregunta</u>- Nivel alto

Se van a pedir entre 27680 y 27690 productos, los cuales serán colocados por los 33 trabajadores y todos tienen que colocar el mismo número de productos, entonces se concluye que el número de productos pedidos debe ser divisible entre 33. Para ser divisible entre 33, tiene que ser divisible entre 3 y 11 por lo que se va a calcular el número de productos de la misma forma que en el apartado anterior. En este caso, se tiene que comprobar para qué X el número 2768X es divisible entre 3 y 11, y si 27690 es divisible por 3 y 11.

Empecemos por el final. El número 27690 es divisible por 3, porque $2 + 7 + 6 + 9 + 0 = 24$, pero no es divisible entre 11, porque $(9 + 7) - (0 + 6 + 2) = 8$ que no es divisible por 11.

Entonces veamos para qué X es divisible por 3 y 11 el número 2768X.

Para ser divisible por 3 debe cumplir que $2 + 7 + 6 + 8 + X = 23 + X$ y esto es múltiplo de 3 si $\mathrm{X} = 1$, $\mathrm{X} = 4$ o$\mathrm{X} = 7$.

Por otra parte, para ser divisible por 11, $(8 + 7) - (X + 6 + 2) = 7 - X$ debe ser cero o múltiplo de 11 y esto solo ocurre cuando $\mathrm{X} = 7$.

Entonces, el número de productos que se deben pedir para que los 33 trabajadores coloquen el mismo número de productos es 27687.

3. **Paseo por el centro comercial**

Primera parte

Los números son 2, 3, 4 y 6 por lo que el primer número donde coincidirán las cuatro marcas es en el mínimo común múltiplo de estos cuatro número, es decir, en el número 12.

Segunda parte

Depende de las elecciones de los números.

4. **Viaje en el tiempo**

Primera pregunta

Las elecciones municipales se realizan cada cuatro años y las europeas cada cinco luego coinciden cada 20 años ya que este es el mínimo común múltiplo de 4 y 5. Entonces volverán a coincidir en 2039.

Segunda pregunta

Según el calendario gregoriano, un año es bisiesto si es divisible entre 4, salvo que acabe en 00, en cuyo caso también tiene que ser divisible entre 400. Se añaden porque la duración de un año trópico es aproximadamente 365,25 días y nuestro calendario es de 365, por lo que cada cuatro años se acumularía un día más.

Las respuestas a las preguntas son:

- 2018 no es porque al dividirlo entre 2 se obtiene 1009 que no es divisible entre 2 o, lo que es equivalente, que el número formado por sus dos últimas cifras no es divisible entre 4.

  2017 es impar luego no puede ser.

  2016 sí es divisible entre 4 por lo que es la solución a la pregunta del apartado.
- $2016 + 4 = 2020$.

Tercera pregunta – Nivel medio

- Los años bisiestos son cada cuatro años y las elecciones municipales también pero como el 2016 fue bisiesto y en el 2019 han sido las elecciones, no coincidirán nunca.

  Por otra parte, las elecciones europeas son cada cinco años luego se producirán en un año bisiesto cada 20 años, ya que el mínimo común múltiplo de 4 y 5 es 20.
- Un año no bisiesto se compone de 365 días, es decir, de 52 semanas de 7 días más un día extra por lo que empieza y termina el mismo día de la semana (si empieza un lunes acabará un lunes, etc.). Entonces el calendario del año siguiente, suponiendo que no es bisiesto, empezaría y acabaría el día de la semana posterior y, si no hubiese años bisiestos, el calendario coincidiría exactamente cada 7 años. Sin embargo, cada cuatro años (exceptuando los acabado en 00 y no divisibles por 400) el año es bisiesto por lo que si añadimos esta

condición, el calendario se repetirá exactamente cada 28 años, el mínimo común múltiplo de 4 y 7.

(Cabe destacar que si en ese periodo de 28 años hay un año no bisiesto acabado en 00 no se cumplirá este resultado).

5. Compra de baldosas para la casa

Primera parte

El baño tiene dimensiones 3x6, la cocina 5x10, el salón 8x11 y el dormitorio 4x7, en centímetros cuadrados.

Segunda parte

-

Tercera parte

Para calcular el lado de las baldosas de las estancias de la casa, hay que calcular el máximo común divisor de las dimensiones de cada una de ellas. Entonces tenemos que las baldosas del baño deben tener 3 metros de lado ($\mathrm{MCD}(3,6) = 3$), las de la cocina 5 ($\mathrm{MCD}(5,10) = 5$), las del salón 1 ($\mathrm{MCD}(8,11) = 1$) y las del dormitorio 1 ($\mathrm{MCD}(4,7) = 1$). Entonces, habría que comprar 2 baldosas de 3x3, 2 baldosas de 5x5, $88 + 28 = 116$ baldosas de 1x1.

6. Incendios forestales

Nivel medio

La distancia entre los árboles consecutivos tiene que ser la misma y la máxima posible, luego tiene que dividir a las longitudes de cada lado. Entonces estamos buscando el máximo común divisor de todas las longitudes de los lados que, en este caso, es $\mathrm{mcd}(48,66,36,60) = 6$.

Luego sabemos que la distancia entre dos árboles consecutivos es de 6 metros.

Lado 48m: $48/6 = 8$, luego hay 8 espacios entre árboles en ese lado. → 9 árboles.

Lado 66m: $66/6 = 11$, luego hay 11 espacios entre árboles en ese lado. → 12 árboles.

Lado 36m: $36/6 = 6$, luego hay 6 espacios entre árboles en ese lado. → 7 árboles.

Lado 60m: $60/6 = 10$, luego hay 10 espacios entre árboles en ese lado. → 11 árboles.

A la suma de todos los árboles obtenidos en cada lado tenemos que restar los árboles que tenemos en los vértices ya que los hemos contado dos veces.Entonces, obtenemos: $9 + 12 + 7 + 11 - 4 = 35$ árboles debe comprar el municipio gallego para rodear esta parcela de árboles.

Nivel bajo

La distancia entre los árboles consecutivos tiene que ser la misma y la máxima posible, luego tiene que dividir a las longitudes de cada lado. Entonces estamos buscando el máximo común divisor de todas las longitudes de los lados que, en este caso, es $\mathrm{mcd}(36,60) = 12$.

Luego sabemos que la distancia entre dos árboles consecutivos es de 12metros.

Lado 36m: $36/12 = 3$, luego hay 3 espacios entre árboles en ese lado. → 4 árboles.

Lado 60m: $60/12 = 5$, luego hay 5 espacios entre árboles en ese lado. → 6 árboles.

A la suma de todos los árboles obtenidos en cada lado tenemos que restar los árboles que tenemos en los vértices ya que los hemos contado dos veces.Entonces, obtenemos: $4 + 4 + 6 + 6 - 4 = 16$árboles debe comprar el municipio gallego para rodear esta parcela de árboles.

7. **<u>Los ritmos euclídeos</u>**

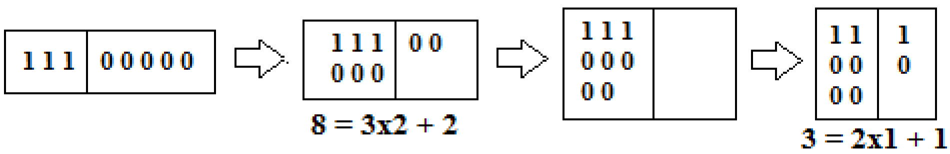
Las divisiones sucesivas del algoritmo de Euclides para cada ejemplo son:

- $8 = 3 \cdot 2 + 2;\ 3 = 2 \cdot 1 + 1. \rightarrow \mathrm{mcd}(8,3) = 1.$
- $8 = 5 \cdot 1 + 3;\ 5 = 3 \cdot 1 + 2;\ 3 = 2 \cdot 1 + 1. \rightarrow \mathrm{mcd}(8,5) = 1.$
- $12 = 5 \cdot 2 + 2;\ 5 = 2 \cdot 2 + 1. \rightarrow \mathrm{mcd}(12,5) = 1.$
- $16 = 5 \cdot 3 + 1 \rightarrow \mathrm{mcd}(16,5) = 1.$

	Número de pulsos	Número de notas	MCD
CD 1	8	3	1
CD 2	8	5	1
CD3	12	5	1
CD4	16	5	1

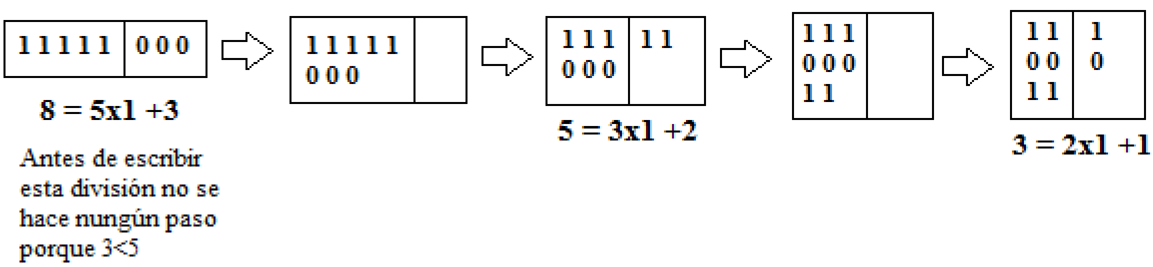
Vamos a calcular los ritmos euclídeos de la misma forma que en el ejemplo.

<u>Primer caso</u>: ritmo euclídeo con 8 pulsos y 3 notas (por lo tanto, 5 silencios).



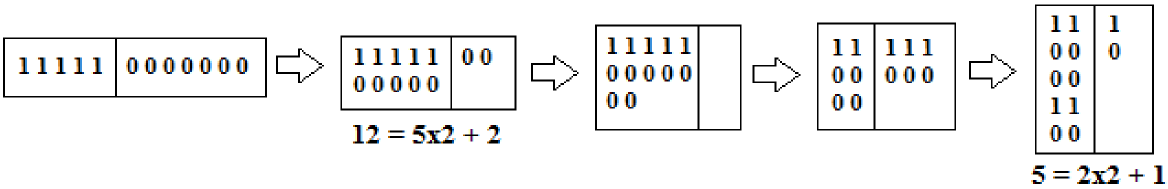
Ritmo euclídeo = [10010010]

<u>Segundo caso</u>: ritmo euclídeo con 8 pulsos y 5 notas (por lo tanto, 3 silencios).



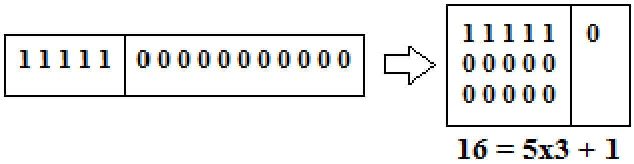
Ritmo euclídeo = [10110110]

<u>Tercer caso</u>: ritmo euclídeo con 12 pulsos y 5 notas (por lo tanto, 7 silencios).



Ritmo euclídeo = [100101001010]

Cuarto caso: ritmo euclídeo con 16 pulsos y 5 notas (por lo tanto, 11 silencios).



Ritmo euclídeo= [1001001001001000]

Pulsos	Notas	Ritmo euclídeo	¿Dónde se encuentra ese ritmo?
8	3	[10010010]	Clave son (de Cuba)
8	5	[10110110]	Cinquillo cubano, malfuf de Egipto, o el ritmo coreano para tambor mongP'yon. Si se empieza a tocar desde la 2ª nota aparece un ritmo típico de Oriente Próximo y el timini de Senegal. Si se empieza en la tercera nota se tiene el ritmo del tango.
12	5	[100101001010]	Ritmo muy común en África central que tocan los pigmeos aka. Cuando se toca desde la segunda nota es la clave columbia de la música cubana y el ritmo de la danza chakacha de Kenya.
16	5	[1001001001001000]	Si se toca a partir de la tercera nota, es el ritmo de la bosa-nova de Brasil.

8. Crucigrama de definiciones

1. El conjunto de los números que se representa con la letra ℤ se denomina conjunto de los números…ENTEROS
2. El número que se obtiene al prescindir de su signo se denomina…VALOR ABSOLUTO
3. Respecto a un número entero, ¿cómo se denomina al otro entero que tiene su mismo valor absoluto pero signo contrario? OPUESTO
4. Número entero positivo cuyos únicos divisores son él mismo y la unidad. PRIMO
5. Reglas que nos permiten averiguar, sin dividir, si un número es divisible por otro. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD
6. Nombre que se le da al número que no es divisible de forma exacta por 2. IMPAR
7. Siglas que se utilizan para denominar al mayor número entero positivo que divide a dos o más números. MCD
8. Siglas que se utilizan para denominar al menor número entero positivo que es múltiplo de dos o más números. MCM

						2																		
						V																		
		6	I	M	P	A	R					7									4			
						L					8	M	C	M							P			
						O						C									R			
5	C	R	I	T	E	R	I	O	S	D	E	D	I	V	I	S	I	B	I	L	I	D	A	D
						A															M			
						B									1	E	N	T	E	R	O	S		
						S																		
						O																		
						L																		
			3	O	P	U	E	S	T	O														
						T																		
						O																		

9. <u>El mensaje secreto</u>

Palabra 1

−17 ||| 10→ SE

Palabra 2

−3 ||| −26 ||| −9||| 9 ||| −17||| −3 ||| 1 ||| 3 ||| 10→ IMPOSIBLE

Palabra 3

−9 ||| 22 ||| 0 ||| 10 ||| 4||| 10→ PARECE

Palabra 4

2||| 22 ||| −17 ||| 5 ||| 22→ HASTA

Palabra 5

−17 ||| −3 ||| 10 ||| −26 ||| −9 ||| 0 ||| 10→ SIEMPRE

Palabra 6

7 ||| 13 ||| 10 → QUE

Palabra 7

2 ||| 22 ||| 4 ||| 10→ HACE

La frase resultante es “SIEMPRE PARECE IMPOSIBLE HASTA QUE SE HACE” de Nelson Mandela.