# UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

## Departamento de Geometría y Topología

***Método de Sturm para contar y localizar raíces de polinomios***

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la Especialidad de Matemáticas.

**Alumno:** Fernando Fueyo Tirado

**Tutor:** Dr. Fernando Sanz Sánchez

**Valladolid, Julio de 2019**

# ÍNDICE

## I) Introducción

El objetivo de este trabajo es un intento de reorientación en el diseño curricular de Educación Secundaria para afrontar el estudio y resolución de ecuaciones polinómicas de grado *n*. Se sabe que la única herramienta que se les explica a los alumnos para afrontar estas ecuaciones (cuando el grado es superior a dos) es la *Regla de Ruffini*; sin embargo, también es conocido (o debería serlo para los profesores de secundaria) que tener ese algoritmo como única estrategia para enfrentarse a dichas ecuaciones es muy pobre y nada realista. De hecho, los ejercicios y problemas que pueden encontrarse en cualquier libro de texto, están preparados para que *funcionen bien las cosas* y así, el alumno localice la raíz o raíces que el autor preparó previamente.

La realidad es más dura que la idea transmitida por esos ejercicios. Es muy probable que la mayor parte de los alumnos, al concluir la Educación Secundaria, tengan interiorizados los conceptos de forma errónea y crean, por ejemplo, que las ecuaciones de grado superior a dos *estén obligadas* a tener soluciones enteras y, si tras *probar* con los divisores del término independiente del polinomio, no localizan solución alguna, concluyan erróneamente que la ecuación en cuestión no tiene soluciones (porque no las han encontrado por el único método que conocen).

En este contexto, la idea de este trabajo es proponer un desarrollo curricular alternativo con el objetivo de mostrar a los alumnos una visión más realista de lo que consiste hallar raíces de polinomios. Proponemos que se profundice un poco más en algunas ideas, sin que esto suponga acudir a resultados demasiado complejos. Resulta repetitivo y tedioso contar una y otra vez la misma materia en cada uno de los cursos de Secundaria provocando cansancio en alumnos y profesores para que, encima, los chavales acaben con nociones equivocadas o, cuando menos, sesgadas de lo que es la realidad. Este trabajo ilustra la teoría y actividades que creemos que deberían trabajarse en las aulas de tercero y cuarto de la E.S.O. para lograr el objetivo anterior. En su elaboración no se ha acudido a ningún libro de texto, los ejercicios y ejemplos son de creación propia o inspirados en alguno de los documentos que se detallan en las Referencias. Se integran a modo de ejemplo aunque, evidentemente no sirven para completar todos los periodos lectivos que atañen a la materia.

Tal vez algún lector considere este trabajo optimista y ambicioso en lo que a la capacidad de comprensión de los alumnos se refiere, pero personalmente creo que es más la incapacidad de los profesores, que las potencialidades de los alumnos, la que hace que nos resignemos a diseños curriculares de poco nivel y anticuados. Si los profesores no nos proponemos metas de cierta altura, quién lo va a hacer por nosotros.

El cuerpo fundamental del trabajo consta de tres partes. La primera está orientada a 3º E.S.O., independientemente de que se trate de las Enseñanzas Académicas o Aplicadas. En ella proponemos nuevos contenidos que complementen la teoría que habitualmente se explican en las aulas. Concretamente, tras mostrar las enormes limitaciones que posee la *Regla de Ruffini*, así como su poca rentabilidad cuando los coeficientes de los polinomios tienen coeficientes de cierta magnitud, sugerimos dos resultados para estudiar, a priori, el número posible de raíces positivas y negativas de un polinomio (*Regla de Descartes*) y un pequeño resultado para acotar las soluciones de una ecuación cúbica. Creemos que también es apropiado mostrar cómo encontrar soluciones racionales usando la propia *Regla de Ruffini*, para ello sólo hay que enseñar en el aula quiénes son los candidatos racionales a raíces de polinomios. Por último, nos preocupa la representación gráfica de polinomios, para que los alumnos adquieran el punto de vista geométrico de lo que han hecho analíticamente. Para ello se hará uso del programa Geogebra, porque lo que nos importa es que visualicen qué aspecto tienen los polinomios y no que hagan insufribles tablas de valores.

La segunda parte concierne al curso de 4º E.S.O. En este caso, el diseño de actividades propuesto sí que se adapta mejor a las Enseñanzas Académicas, pero si se explicaran en los cursos de Enseñanzas Aplicadas, no estarían alejadas de los objetivos planteados por las leyes u órdenes educativas. En este bloque, además de repasar lo explicado en el curso anterior, se abordan las *Fórmulas de Cardano-Viéte* y la historia de la *Fórmula de Tartaglia-Cardano* mediante la que se puede obtener directamente la solución real que posee toda ecuación cúbica. Una vez practicada dicha fórmula, se pasa al estudio de la separación y localización de raíces mediante la construcción de la *Sucesión de Sturm* (o *Sturm-Liouville*, dependiendo de los autores), que da título al trabajo y se completa con el *Método de Newton-Raphson* para aproximar el valor de las raíces localizadas.

Finalmente, en la tercera parte recogemos los primeros pasos de la *Geometría Semialgebraica*. Apuntamos algunos resultados que permitirían profundizar en la materia desarrollada durante el trabajo, afinando un poco más en lo que a acotación y separación de raíces se refiere. Definimos *resultante* de dos polinomios y *discriminante* de un polinomio para reencontrarnos con expresiones calculadas previamente, aunque por otros caminos. Para acabar mostramos y comentamos dos resultados fundamentales de la *Geometría Semialgebraica*: el *Lema de Thom* y el *Principio de Tarski-Seidenberg*. Incluimos esta última parte, no con la intención de que sea desarrollada en las aulas de secundaria, sino para ilustrar qué caminos recorren actualmente los conceptos ligados a las raíces de polinomios y los insospechados campos de aplicación que tienen.

Esperamos que disfruten con la lectura de las siguientes páginas o, por lo menos, que descubran algún punto de vista nuevo sobre cuestiones de sobra conocidas por cualquier profesor de secundaria relativas a los polinomios.

## II) Antecedentes

Recordando una frase que escuché en algún momento a algún compañero de la Universidad de Oviedo, «si piensas en algo y crees que eres el primero, desengáñate y busca en Internet, seguro que otra persona lo hizo antes». Así, desde el momento en que me decidí por este Trabajo de Fin de Máster, traté de averiguar si se había publicado algún trabajo cuyo objetivo fuera el de buscar formas alternativas a los ordinarias, en la enseñanza de la resolución de ecuaciones polinómicas y búsqueda de raíces de polinomios. Como pronosticaba aquel compañero, siempre hay alguien que ha hecho algo antes. Si en principio, la búsqueda no fue muy acertada, al cursar la asignatura de *Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas*, impartida por los profesores Dña. Cristina Pecharromán y D. Tomás Ortega, descubrí páginas y lugares de búsqueda mucho más fecundos que los que tenía en mente. En particular, al usar el *Google Académico* localicé artículos más recientes que los que había hallado y más cercanos al espíritu del presente trabajo.

El primer artículo que leí, fue el titulado «El estudio de las funciones y ecuaciones polinómicas en 1º B.U.P: *Un enfoque diferente al usual*» de Cástor Molina Iglesias, profesor de Enseñanza Secundaria en el I. B. "Poeta Viana" de Santa Cruz de Tenerife, calculo que de los primeros años ochenta **[11]**; desgraciadamente, el *enfoque diferente al usual*, es probable que fuera *diferente* en su momento, pero es anticuado y no se aproxima a la filosofía de este trabajo, aunque sí que toca aspectos que contemplamos aquí como las ecuaciones cúbicas y algún método iterativo para la aproximación de las soluciones.

Seguidamente, encontré otro pequeño artículo *El Teorema de Sturm* del Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Pamplona, C. Gabriel Yáñez **[7]**, también de finales del siglo pasado, pero no aportaba nada nuevo respecto a la construcción de la *sucesión de Sturm* que no estuviera ya incluido en el que será nuestro libro de referencia *Benedetti, R. & Risler, J.J.* **[2]**.

A partir de aquí, y aprovechando las actividades que Dña. Cristina Pecharromán nos sugirió realizar en la asignatura de *Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas*, encontré artículos que sí que fueron de ayuda para la elaboración de este trabajo. En primer lugar, quiero destacar el artículo *El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la "regla de Ruffini"* de Fonseca Bon, C., Bosch, M. & Gascón, J. del año 2005 (nos acercamos a nuestros días) **[6]**, cuyo espíritu sí que es similar al que motiva la propuesta efectuada por el doctor D. Fernando Sanz Sánchez, tutor e ideólogo de este trabajo. De hecho, la lectura del artículo inspiró el desarrollo de la primera parte de este trabajo orientada a los alumnos de 3º E.S.O.

Buscando información para construir el marco teórico en el que encuadrar la didáctica que se expondrá, aproveché la que aparecía en el artículo *Taxonomía de Bloom para la era digital* de A. Chuches (2013) **[3]** y que complementó los conocimientos adquiridos en la asignatura *Didáctica de la Matemática* impartida por el profesor D. José María Marbán durante el Máster.

Localicé un Trabajo de Fin de Máster de la Universidad de Valladolid del curso 2012/2013 tutorizado por el profesor D. Jorge Mozo Fernández y autoría de Dña. Elisa Niévares García cuyo título, *Polinomios y resolución de ecuaciones en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato* **[12]**, prometía convertirse en buena ayuda para la ejecución del presente trabajo. No fue así. El trabajo aborda el temario del Álgebra Lineal de manera más general, sin ceñirse exclusivamente a lo que a raíces de polinomios se refiere. Aún hablando de cuestiones que se tocarán en este trabajo como son las *Fórmulas de Cardano-Viéte* y la *Fórmula de Tartaglia-Cardano*, tras la lectura del mismo, preferí remitirme a otros libros que están recogidos en las referencias por la familiaridad que tengo con ellos.

Finalmente, y para la última parte correspondiente a la Geometría Semialgebraica, fue de capital ayuda la tesis de María Laura Baragallo dirigida por la Dra. Gabriela Jerónimo de la Universidad de Buenos Aires titulada *Roadmaps en conjuntos semi-algebraicos* del año 2010 **[1]**. Aparte del libro *Benedetti, R. & Risler, J.J.* **[2]**, en el que me basé para construir los epígrafes 3.1, 3.2 y 3.3, esta tesis me mostró cuál es la argumentación lineal de la *Geometría Semialgebraica*, las aplicaciones que tiene y me orientó en la exposición del *Teorema de Tarski-Seidenberg*.

## III) Marco Teórico

La elaboración de las actividades que acompañan a la teoría que se desarrolla en este trabajo, están diseñadas en función de la taxonomía creada por Benjamín Bloom. En el año 1956, este psicólogo educativo que trabajó en la Universidad de Chicago, desarrolló su taxonomía de objetivos educativos, convirtiéndose en una herramienta clave para estructurar y comprender el proceso de aprendizaje. Posteriormente, en los años noventa del siglo pasado, un discípulo suyo, el profesor de la Universidad de Carolina del Sur Lorin Anderson, junto con el director de la Oficina de Investigación Educativa de la Universidad de Míchigan, David R. Krathwohl, revisaron la Taxonomía de Bloom para construir nuevas categorías que constituyen la que hoy conocemos como *Taxonomía Revisada de Bloom*. Me interesa personalmente esta taxonomía por dos razones: primera, la prefiero a la taxonomía original de Bloom porque utiliza verbos para caracterizar cada una de las capacidades cognitivas a la que se apela para la ejecución de cada una de las actividades que se planteen. He escogido una serie de verbos para caracterizar cada uno de los estadios cognitivos requeridos, justificando adecuadamente su elección. Segunda, fue una teoría desarrollada en la asignatura de *Didáctica de la Matemática* impartida en el presente Máster por el profesor D. José María Marbán, que me llamó positivamente la atención; los fundamentos teóricos en los que me inspiro y remito son el material aportado en esa asignatura y el artículo referido en **[3]**.

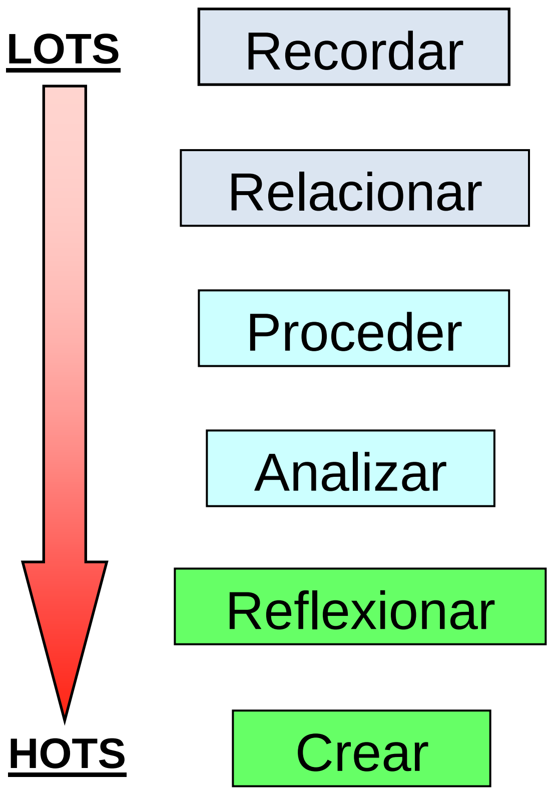
No es mi intención exponer una descripción muy detallada de esta teoría, sólo quiero ilustrar las seis categorías que recorren las actividades de *baja demanda cognitiva* conocidas como LOTS (del inglés Low Order Thinking Skills) hasta las que requieren *alta demanda cognitiva* o HOTS (High Order Thinking Skills). Aunque la Taxonomía Revisada de Bloom recoge múltiples acciones en cada una de las categorías, identificadas por distintos verbos, permítaseme escoger exclusivamente un verbo para nombrar cada estrato cognitivo. Existen seis etapas en la taxonomía referida y respetaré ese número inicialmente, pero las agruparé de dos en dos para obtener tres niveles de exigencia cognitiva. A cada nivel asociaré un color. A lo largo de este trabajo utilizaré los colores que defino a continuación para identificar y clasificar cada una de las actividades que se sugerirán y, si alguien utilizara este material, tendrá una guía de las capacidades requeridas para llevar a cabo cada ejercicio o problema, dependiendo del color que acompañe el enunciado y resolución de cada tarea.

Para el primer nivel escojo la palabra *recordar* en lugar de *memorizar*; bajo mi punto de vista la acción de *recordar* posee un carácter mucho más amplio que la de *memorizar*, pues evoca a distintas estrategias que pueden ser utilizadas por los alumnos para adquirir e interiorizar conceptos nuevos o recientes. Respecto al segundo estadio dudé entre las palabras *comprender* y *relacionar*, finalmente me decidí por *relacionar* porque creo que para poder *relacionar* es condición necesaria *haber comprendido*.

La mayoría de los artículos y textos que leí acerca de la Taxonomía Revisada de Bloom, usaban para la tercera tarea cognitiva el verbo *aplicar* pero, bajo mi punto de vista, es demasiado ambiguo y, consecuentemente, indefinido; por esto escogí la palabra *proceder*, que nos remite a cuestiones dinámicas en el tiempo tal como la ejecución de algoritmos, mecánicas y procedimientos. Seguidamente uso el vocablo recogido en los textos de Anderson & Krathwohl: *analizar* que creo que es la más apropiada para describir lo que un aprendiz debe hacer para poder enfrentarse al planteamiento, resolución y comprobación de problemas que pueden presentarse en situaciones reales (fuera del aula).

Finalizando ya con las capacidades de alta demanda cognitiva, todos los textos utilizan el vocablo *evaluar* para el penúltimo nivel, pero no me parece nada afortunado en el contexto educativo en que se engloba esta teoría; a la mayoría de las personas les evocará la labor de evaluación propiamente dicha de la labor docente. Por esto me inclino por *reflexionar* que me parece más ilustrativa y clara para describir lo que se espera que debe hacer un alumno para reposar los conocimientos adquiridos y mostrar una actitud crítica para poder evaluar los resultados obtenidos de forma autónoma. Por último: *crear* y ésta es la palabra apropiada. El objetivo final de las Matemáticas es crear, crear modelos, crear hipótesis, conjeturas y demostraciones, crear ideas que construyan las teorías que conforman la propia ciencia. Personalmente, sólo puedo intuir una muy delgada línea que separa el arte, de lo que es una genialidad que se traduce en la demostración formal de un resultado matemático.

De esta forma, los seis estadios los identificaré con las siguientes palabras y los tres niveles con los siguientes colores:



## IV) Marco Legal de la Educación Secundaria Obligatoria

Para lograr las metas que nos imponemos desde el inicio del planteamiento, no vamos a extralimitarnos del marco definido por la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad de la Enseñanza y, en concreto, de lo establecido en las órdenes EDU/362/2015 y EDU/363/2015 de los Boletines Oficiales de Castilla y León; no obstante, todos los conocimientos a los que nos remitiremos podrían englobarse en la enseñanza de las Matemáticas de cualquier otra Comunidad Autónoma del territorio nacional e incluso para otras leyes educativas recientes.

Este trabajo se remitirá al marco legal vigente en la Comunidad Autónoma de Castilla y León. Se especificarán los contenidos y los estándares de aprendizaje evaluables para cada uno de los cursos de secundaria y de bachiller en lo que a la materia de polinomios se refiere.

Los contenidos relacionados con polinomios para 1º E.S.O. se recogen en el Anexo I. B de la orden EDU/362/2015 publicada en el BOCyL nº 86 con fecha 8 de Mayo de 2015 y se especifican a continuación (pp. 32194-32195):

| 1º E.S.O. |
|---|

Contenidos

"Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios sumas, restas y multiplicaciones por números enteros".

Estándares de Aprendizaje Evaluables

7.1. *Comprueba, dada una ecuación, si un número (o números) es (son) solución de la misma.*

7.2. *Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer grado, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.*

Esto es, a partir de este curso puede darse por supuesto que los alumnos conocen y reconocen qué es una expresión polinómica y saben realizar las operaciones elementales con este tipo de objetos.

Acudiendo al mismo Anexo I.B, pero ahora en la página 32201, pueden ser leídos los contenidos y estándares de aprendizaje correspondientes a polinomios y ecuaciones del segundo curso de la E.S.O.:

2º E.S.O.

Contenidos

“El lenguaje algebraico. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa. El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica. Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades notables. Operaciones con polinomios en casos sencillos. Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Transformaciones elementales. Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas, análisis e interpretación crítica de las soluciones”.

Estándares de Aprendizaje Evaluables

6.1. *Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.*

6.2. *Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.*

6.3. *Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.*

7.1. *Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.*

7.2. *Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.*

Según lo cual, se puede suponer que un estudiante de 2º E.S.O. ya reconoce lo que es la solución de una ecuación de primer y segundo grado y, en consecuencia, qué es una *raíz* de un polinomio.

No obstante, por si pudiera haber alguna duda, a partir de 3º E.S.O. y tanto en la especialidad de Enseñanzas Académicas como en la de Enseñanzas Aplicadas, tiene cabida la materia que se va a desarrollar en este trabajo, tal y como puede leerse en el Anexo (pp. 32208-32209 para las Enseñanzas Académicas y pp. 32215-32216 para las Aplicadas) que detalla los contenidos y los estándares de aprendizaje siguientes:

| 3º E.S.O. Enseñanzas Académicas |
| --- |

Contenidos

“Expresión usando lenguaje algebraico. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico). Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. Operaciones elementales con polinomios. Factorización de polinomios de coeficientes enteros mediante la extracción de factor común, el reconocimiento de igualdades notables y la detección de ceros enteros, y aplicación a la resolución de ecuaciones sencillas de grado superior a dos. Uso de la hoja de cálculo para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones de grado superior a dos. Uso de programas de representación gráfica para resolver ecuaciones y sistemas lineales. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Aplicación a la vida cotidiana y de otros campos del conocimiento”.

Estándares de Aprendizaje Evaluables

3.1. *Realiza operaciones con polinomios y los utiliza en ejemplos de la vida cotidiana.*

3.2. *Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia, y las aplica en un contexto adecuado.*

3.3. *Factoriza polinomios de grado 4 con raíces enteras mediante el uso combinado de la regla de Ruffini, identidades notables y extracción del factor común.*

4.1. *Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.*

| 3º E.S.O. Enseñanzas Aplicadas |
| --- |

Contenidos

“Transformación de expresiones algebraicas con una indeterminada. Polinomios con una indeterminada: suma, resta y multiplicación. Igualdades notables. Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico). Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas”.

Estándares de Aprendizaje Evaluables

3.1. *Suma, resta y multiplica polinomios, expresando el resultado en forma de polinomio ordenado y aplicándolos a ejemplos de la vida cotidiana.*

3.2. *Conoce y utiliza las identidades notables correspondientes al cuadrado de un binomio y una suma por diferencia y las aplica en un contexto adecuado.*

4.1. *Resuelve ecuaciones de segundo grado completas e incompletas mediante procedimientos algebraicos y gráficos.*

4.2. *Resuelve sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos o gráficos.*

4.3. *Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.*

Además, se sabe que en el Bloque de Análisis los alumnos han aprendido a representar funciones lineales, funciones afines y funciones cuadráticas; es decir, deben reconocer que un polinomio de grado cero se corresponde gráficamente con una recta horizontal, un polinomio de grado uno con una recta cualquiera y un polinomio de grado dos con una parábola.

| 4º E.S.O. Enseñanzas Académicas |
| --- |

Contenidos

"Introducción al estudio de polinomios. Raíces y factorización. Posibles raíces enteras de un polinomio de coeficientes enteros. Resolución de ecuaciones de grado superior a dos. Fracciones algebraicas. Simplificación y operaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. Inecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Interpretación gráfica. Resolución de problemas".

Estándares de Aprendizaje Evaluables

3.1. *Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.*

3.2. *Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado.*

3.3. *Realiza operaciones con polinomios, igualdades notables y fracciones algebraicas sencillas.*

3.4. *Hace uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos.*

4.1. *Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.*

| 4º E.S.O. Enseñanzas Aplicadas |
|---|

Contenidos

"Polinomios: raíces y factorización. Utilización de identidades notables. Resolución de ecuaciones y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas cotidianos mediante ecuaciones y sistemas".

Estándares de Aprendizaje Evaluables

2.1. *Se expresa de manera eficaz haciendo uso del lenguaje algebraico.*

2.2. *Realiza operaciones de suma, resta, producto y división de polinomios y utiliza identidades notables.*

2.3. *Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza, mediante la aplicación de la regla de Ruffini.*

3.1. *Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.*

La parte anterior correspondiente a 4º E.S.O. puede leerse, respectivamente, en las páginas 32222 y 32229 de la orden indicada en el comienzo de este epígrafe. Parece que quedan legalmente justificados los contenidos que se especifican a continuación, pudiendo ser incluidos tanto en el cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria como en el curso de tercero.

## 1) Tercero de Educación Secundaria Obligatoria

Se nos antoja imprescindible que los alumnos conozcan los siguientes resultados elementales junto con alguna demostración que también incluimos. Creemos que esta materia debe explicarse en el curso de tercero de la E.S.O., pero si los estudiantes llegaran al curso de cuarto sin conocer alguno de estos resultados, hay periodos lectivos suficientes para completarla en cuarto curso. Damos por supuesto que los alumnos no tienen problema con el manejo del lenguaje algebraico; ya conocen que es un *polinomio* así como sus conceptos asociados: *grado*, *indeterminada* o *variable*, *coeficientes*, *término independiente* y *coeficiente principal* o *director*. Además saben realizar las operaciones elementales con polinomios, reconocen qué es una ecuación de primer grado y las manipulaciones elementales que con ellas se pueden hacer. Asimismo, no deben tener problema con el manejo de fracciones. Todos estos contenidos están recogidos en los objetivos y estándares de aprendizaje del primer y segundo curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

A pesar de lo redactado en el párrafo anterior, somos conscientes de que la diversidad de conocimientos con los que llegan las alumnas y alumnos al curso de tercero es muy alta. Es probable que las suposiciones anteriores no se den en todos los casos. Aprovecharemos esta materia para repasar los conceptos previos y sedimentarlos con mayor fundamento, apelando al diseño curricular en espiral y enriqueciendo lo conocido con puntos de vista alternativos que les permitirá visualizar el Álgebra de una manera que les parezca más atractiva.

A partir de aquí, nos centramos en la parte del Álgebra que concierne exclusivamente, a la factorización de polinomios, localización de raíces y resolución de ecuaciones.

### 1.1 Resultados Previos

Aunque los resultados básicos que van a ser introducidos a continuación tienen validez en estructuras de carácter más general, como *Dominios Euclídeos* o *Anillos de Polinomios* más generales, serán enunciados en el contexto en el que se trabaja en la Educación Secundaria Obligatoria y Bachiller: $\mathbb{R}[x]$.

*Algoritmo de Euclides*.- «Sean $p(x)$ y $q(x) \in \mathbb{R}[x]\setminus\{0\}$ cualesquiera, existen únicos polinomios $c(x) \in \mathbb{R}[x]$ (*cociente*) y $r(x) \in \mathbb{R}[x]$ (*resto*) con $gr\,[r(x)] < gr\,[c(x)]$ ó $r(x) \equiv 0$, tales que $p(x) = q(x).c(x)+r(x)$».

Este resultado no se va a demostrar (creemos que su dificultad excede el nivel exigido en este curso). Se ilustrarán un par de ejemplos y, posteriormente, expondremos algunas aplicaciones. Me parece también importante que los chavales entiendan que el algoritmo que se utiliza para realizar las divisiones de polinomios, no es distinto que el usado para dividir números enteros (la división entera), lo que ocurre es que con polinomios escribimos explícitamente todas las operaciones, mientras que con los números, algunas se hacen mentalmente.

| |
|---|
| 1) Efectuar la división de polinomios $p(x) \div q(x)$ para $p(x) = 2x^4 + 5x^3 - 4x + 9$ y $q(x) = x^2 + 2x - 4$. |

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +5x^3 & & -4x & +9 & \underline{x^2+2x-4} \\
\underline{-2x^4} & \underline{-4x^3} & \underline{+8x^2} & & & 2x^2+x+6 \\
& x^3 & +8x^2 & -4x & +9 & \\
& \underline{-x^3} & \underline{-2x^2} & \underline{+4x} & & \\
& & 6x^2 & & +9 & \\
& & \underline{-6x^2} & \underline{-12x} & \underline{+24} & \\
& & & -12x & +33 &
\end{array}
$$

| |
|---|
| 2) Efectuar la división de polinomios $p(x) \div q(x)$ para $p(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 8x - 15$ y $q(x) = x - 4$. |

Solución:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\mathbf{3}x^4 & +\mathbf{1}x^3 & -5x^2 & +8x & -15 & \underline{x-4} \\
\underline{-3x^4} & \underline{+\mathbf{12}x^3} & & & & 3x^3+13x^2+47x+196 \\
& \mathbf{13}x^3 & -\mathbf{5}x^2 & +8x & -15 & \\
& \underline{-13x^3} & \underline{+\mathbf{52}x^2} & & & \\
& & \mathbf{47}x^2 & +\mathbf{8}x & -15 & \\
& & \underline{-47x^2} & \underline{+\mathbf{188}x} & & \\
& & & \mathbf{196}x & -\mathbf{15} & \\
& & & \underline{-196x} & \underline{+\mathbf{784}} & \\
& & & & \mathbf{769} &
\end{array}
$$

Es el momento de explicar el *Algoritmo de Ruffini* con una exposición similar a la que se describe a continuación.

Paolo Ruffini observó que en las divisiones por polinomios del tipo $c(x) = x + a$ (como la del segundo ejemplo anterior), los cálculos realmente significativos son los que están destacados en negrita, de manera que construyó un algoritmo más cómodo y sencillo para obtener el cociente y el resto. Obsérvese:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 1 & -5 & 8 & -15 \\
4 & \downarrow & 12 & 52 & 188 & 784 \\
\hline
 & 3 & 13 & 47 & 196 & |\,\underline{\underline{769}}
\end{array}
$$

El coeficiente director del dividendo se *baja* directamente y se multiplica por el 4 colocando el resultado en la columna siguiente, se efectúa la suma y su resultado se escribe en la tercera fila. Se multiplica este resultado otra vez por 4, se coloca en la siguiente columna y así sucesivamente. Tras ese proceso, pueden leerse los coeficientes del cociente en la tercera fila comenzando con grado una unidad inferior al del dividendo: $3x^3 + 13x^2 + 47x + 196$ y el resto de la división en la última posición: 769.

Deben ser conocedores de la siguiente definición:

<u>*Definición*</u>.- Dados un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y un número real $a \in \mathbb{R}$ cualesquiera, se llama *valor numérico* del polinomio $p(x)$ para el número real $a$, al valor que toma el polinomio $p(x)$ cuando se sustituye la indeterminada $x$ por $a$. Se denota $p(a)$.

<u>Por ejemplo</u>.- Si $p(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 + 8x - 15$ (el del último ejemplo) y $a = 4$, tenemos:

$p(4) = 3.4^4 + 4^3 - 5.4^2 + 8.4 - 15 = 768 + 64 - 80 + 32 - 15 = 769$

Es muy probable que los alumnos más avispados hayan reparado ya en la coincidencia del resto de la división con el valor numérico correspondiente, que anticipa el siguiente resultado cuya demostración se aconseja incluir.

<u>*Teorema del Resto*</u>.- «Dado un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, el resto de la división entre un divisor del tipo $d(x) = x - a$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$, coincide con el valor numérico del polinomio para $a$, esto es, $p(a)$».

<u>Demostración</u>.- Por el *Algoritmo de Euclides*, tenemos que $\exists! c(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que

$p(x) = (x-a)c(x) + r(x)$ siendo el grado de $r(x)$ inferior al grado de $x - a$. Por tanto, el grado de $r(x)$ debe ser cero, es decir, se trata de una constante: $r(x) \equiv k$.
Así, $p(x) = (x-a)c(x) + k$. En particular, evaluando en $x = a$:
$p(a) = (a-a)c(a) + k \Leftrightarrow p(a) = 0c(a) + k \Leftrightarrow p(a) = k.$

□

Dos utilidades de los teoremas vistos y que no suelen exponerse en las aulas porque no se recogen en los libros de texto son las que se explican a continuación.

<u>1.- Cálculo del *máximo común divisor* (*m.c.d.*) de un par de números naturales mediante el *Algoritmo de Euclides*.</u>

Se debe ilustrar a los alumnos cómo, mediante divisiones sucesivas, puede conseguirse el *máximo común divisor* de un par de números naturales de una forma mucho más rápida que la que se obtiene con la descomposición en factores primos, sobre todo cuando alguno o ambos naturales son relativamente grandes. Se divide el número natural mayor ($D$) entre el menor ($d$) y si el resto no es cero, se divide el cociente ($c_1$) entre el resto ($r_1$) de esa división; se obtienen así un nuevo cociente ($c_2$) y otro resto ($r_2$) que puede ser nulo o no; continuamos con este algoritmo. Como el grado del resto es inferior al del divisor, queda garantizado que este proceso es finito, a saber:

| | |
|---|---|
| $D = d\, c_1 + r_1$ | Si $r_1$ no es cero, continuamos |
| $c_1 = r_1 c_2 + r_2$ | Si $r_2$ no es cero, continuamos |

$c_2 = r_2c_3 + r_3$ … …

$c_{n-2} = r_{n-2}c_{n-1} + r_{n-1}$ Si no es cero, se llega al último paso

$c_{n-1} = r_{n-1}c_n + r_n = r_{n-1}c_n$ puesto que $r_n$ es cero.

El *m.c.d.*$(D,d)$ será el último resto de la sucesión anterior distinto de cero ($r_{n-1}$). Además, explicar esta aplicación, servirá para que los alumnos se familiaricen con un proceso que se explicará en el curso siguiente para polinomios. Véanse los siguientes ejemplos:

| 3) Calcular el máximo común divisor de 315 y 2400. |
|---|

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 2400 & \underline{315} \\ \underline{\underline{195}} & \quad 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & \underline{45} \\ \underline{\underline{30}} & \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 315 & \underline{195} \\ \underline{\underline{120}} & \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & \underline{30} \\ \underline{\underline{15}} & \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 195 & \underline{120} \\ \underline{\underline{75}} & \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & \underline{15} \\ \underline{\underline{0}} & \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & \underline{75} \\ \underline{\underline{45}} & \quad 1 \end{array}$$

De aquí se deduce que *m.c.d.*(315,2400) = 15, último resto distinto de cero. Puede hacerse la descomposición de los números para que comprueben el resultado por el camino con el que están más familiarizados.

$$\left.\begin{array}{r} 2400 = 2^5.3.5^2 \\ 315 = 3^2.5.7 \end{array}\right\} \Rightarrow m.c.d.(315{,}2400) = 3.5 = 15$$

Lo habitual es que no aparezcan tantas divisiones como puede verse en el ejemplo siguiente:

| 4) Calcular el máximo común divisor de 6000 y 72. |
|---|

Solución:

$$\begin{array}{r|l} 6000 & \underline{72} \\ 240 & \ 83 \\ \underline{\underline{24}} & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 6000 = 2^4.3.5^3 \\ 72 = 2^3.3^2 \end{array}\right\} \Rightarrow m.c.d.(6000{,}72) = 2^3.3 = 24$$

$$\begin{array}{r|l} 72 & \underline{24} \\ \underline{\underline{0}} & \quad 3 \end{array}$$

2.- Paso de expresiones numéricas en otra base a base decimal.

El *Algoritmo de Ruffini* permite obtener de forma rápida números expresados en otra base distinta de la base decimal como muestran los ejemplos siguientes:

5) Pasar $4052_{6)}$ a base 10.

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 0 & 5 & 2 \\ 6 & \downarrow & 24 & 144 & 894 \\ \hline & 4 & 24 & 149 & |\underline{\underline{896}} \end{array}$$

$$4052_{6)} = 896_{10)}$$

Evidentemente, el cálculo anterior es equivalente a:

$4.6^3 + 0.6^2 + 5.6^1 + 2.6^0 = 896$

6) Pasar $101100010101_{2)}$ a base 10.

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrrrrr} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & \downarrow & 2 & 4 & 10 & 22 & 44 & 88 & 176 & 354 & 708 & 1418 & 2836 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & 11 & 22 & 44 & 88 & 177 & 354 & 709 & 1418 & |\underline{\underline{2837}} \end{array}$$

$$101100010101_{2)} = 2837_{10)}$$

Continuamos con la teoría que, por ahora, se incluye en la mayoría de los libros de texto.

Definición.- Una *raíz* de un polinomio $p(x)$ es un número real $a \in \mathbb{R}$ para el que el valor numérico es nulo. Esto es,

$$a \in \mathbb{R} \text{ raíz de } p(x) \Leftrightarrow p(a) = 0$$

Por ejemplo.- $a = -2$ es una raíz para el polinomio $p(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$ porque:

$p(-2) = 3.(-2)^3 + (-2)^2 - 8.(-2) + 4 = -24 + 4 + 16 + 4 = 0$

Polinomios de grado uno

Un polinomio de grado uno, $p(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), posee una única raíz que se calcula sin ningún problema: $ax = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a}$

Los polinomios de grado uno, en principio no encierran ningún misterio.

Polinomios de grado dos

Se aconseja deducir la expresión para las soluciones de una ecuación de segundo grado. Dado un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), búsquense sus soluciones completando cuadrados (recuérdese que desde 2º E.S.O. los alumnos deben saber las conocidas como *igualdades notables* que expresan el cálculo del cuadrado de una suma y de una diferencia) como se ilustra a continuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

□

De esta forma queda zanjado también el problema de la búsqueda de las raíces para polinomios cuadráticos junto con las soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (*1)}$$

Recíprocamente, será necesario transmitir cómo, a partir de las raíces, se puede construir el polinomio mónico que tiene tales valores por raíces y, en consecuencia, la ecuación correspondiente. De esta forma se anticipa lo que serán, en general, las *Fórmulas de Cardano-Viéte* y, por otra parte, se pretende provocar en el alumno el conocimiento de los procesos inversos que, en multitud de ocasiones, se desdeñan en la enseñanza de las Matemáticas y son de fundamental importancia para la comprensión de los procesos directos. Veamos:

Supongamos que las raíces de un polinomio son $r_1$ y $r_2$, necesariamente:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r_1 + r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a} \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ p(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right\} \Rightarrow p(x) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$$

□

En este momento y, realizando algunos ejercicios como los que se proponen a continuación, debe quedar claro que resolver ecuaciones y factorizar polinomios constituyen el mismo problema. También deben conocer que existe la posibilidad de que las soluciones puedan pertenecer a los *números complejos*, conjunto del cual no tienen conocimiento, aunque sólo indicándoles que es una nueva estructura donde tienen cabida las raíces con índice par de números negativos, es suficiente. Tal vez sea necesario recordar la resolución de *ecuaciones de segundo grado incompletas* y aprovechar la ocasión para repasar la *extracción de factor común* en expresiones algebraicas.

Ejercicios Propuestos y Resueltos

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+4x-5=0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4.1.(-5)}}{2.1}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-4+6}{2}\Rightarrow \underline{x=1}\\ x=\dfrac{-4-6}{2}\Rightarrow \underline{x=-5}\end{cases}$$

b) $2x^2-5x+2=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4.2.2}}{2.2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5+3}{4}\Rightarrow \underline{x=2}\\ x=\dfrac{5-3}{4}\Rightarrow x=\dfrac{2}{4}\Leftrightarrow \underline{x=\dfrac{1}{2}}\end{cases}$$

c) $x^2+6x+2=0$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4.1.2}}{2.1}=\frac{-6\pm\sqrt{36-8}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{28}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-6+2\sqrt{7}}{2}\Rightarrow \underline{x=-3+\sqrt{7}}\\ x=\dfrac{-6-2\sqrt{7}}{2}\Rightarrow \underline{x=-3-\sqrt{7}}\end{cases}$$

d) $9x^2+6x+1=0$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4.9.1}}{2.9}=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{16}=\frac{-6\pm 0}{18}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-6}{18}\Rightarrow \underline{x=-\dfrac{1}{3}}\\ x=\dfrac{-6}{18}\Rightarrow \underline{x=-\dfrac{1}{3}}\end{cases}$$

e) $3x^2+2x+2=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.3.2}}{2.2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-24}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{-20}}{4}$$

Con el ejercicio anterior se pretende ilustrar los distintos conjuntos en los que se pueden encontrar las soluciones de una ecuación polinómica cualquiera. Es fundamental que los alumnos entiendan que el hecho de que las soluciones sean enteras es un caso muy particular y especial. Asimismo, se pretende que valoren la posibilidad de que puedan repetirse las soluciones y de que, como se indicaba previamente, las raíces no sean reales, como ocurre en el último apartado:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{-20}}{4}\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm 2\sqrt{-5}}{4}\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-5}}{2}\notin\mathbb{R}$$

Este ejemplo sirve además para introducir el concepto de *polinomio irreducible*, en el sentido de que no tiene raíces en el conjunto de los números reales y debemos buscarlas en otra estructura, un tanto misteriosa para ellos, como son los números complejos.

Valorando los resultados anteriores lo natural es que se pregunten cuál es el número de soluciones que puede tener una ecuación polinómica. Se enunciará el *Teorema Fundamental del Álgebra* aunque, evidentemente, no se abordará ninguna demostración del mismo. He escogido el enunciado que creo conecta con los alumnos de manera más simple y directa.

*Teorema Fundamental del Álgebra*.- «Dado un polinomio cualquiera $p(x)$ de grado $n$ posee exactamente $n$ raíces (pudiendo o no repetirse) en el conjunto de los números complejos».

Consecuentemente, el número de raíces reales es inferior o igual a $n$. Además los alumnos deben saber que el número de raíces complejas de los polinomios con coeficientes reales (que es el caso que ocupa en estos niveles) es un número par, porque si una raíz lo es de un polinomio, su conjugado también es raíz. Siempre se entiende mejor ilustrando ejemplos para algunos grados.

Ejemplo 1.- "$n = 2$": un polinomio de grado dos no puede tener una raíz real y otra compleja. Es imposible.

Ejemplo 2.- "$n = 3$": las posibilidades para un polinomio de grado tres en cuanto al número de raíces reales y complejas son dos: o tiene las tres raíces reales o tiene una real y dos complejas (y conjugadas). NO puede tener, por ejemplo, dos reales y una compleja.

A partir de ahora, se instará a los alumnos a que intenten efectuar las operaciones que se derivan de la expresión (*1) de manera directa, sin explicar todos y cada uno de los cálculos que realicen. Una vez dominado el uso de la expresión (*1), sería conveniente que los estudiantes aprendieran a escribir la ecuación de segundo grado en la forma apropiada (no se procede como en las ecuaciones de primer grado en las que se agrupan todos las incógnitas en uno de los miembros y las expresiones numéricas en el otro miembro). Sí que los pasos iniciales coinciden: quitar paréntesis, eliminar denominadores, etc., pero seguidamente deberán saber que, como se trata de una ecuación de segundo grado, todos los términos tienen que agruparse en un mismo miembro. Se aconsejará que el coeficiente que acompaña a la máxima potencia sea positivo para evitar confusiones muy comunes que aparecen cuando los denominadores son negativos. Por todo ello, se propone el siguiente ejercicio:

2) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(x+1)(2x+7)+4=-9+x(x+4)$

$$(x+1)(2x+7)+4=-9+x(x+4) \Leftrightarrow 2x^2-7x+2x+7+4=-9+x^2+4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-9x+20=0 \Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x=5} \\ \underline{x=4} \end{cases}$$

b) $\frac{4x-1}{3}-\frac{3x-1}{6}=x+\frac{x^2-1}{3}$

$\frac{4x-1}{3}-\frac{3x-1}{6}=x+\frac{x^2-1}{3}\Leftrightarrow\frac{8x-2-3x+1}{6}=\frac{6x+2x^2-2}{6}\Leftrightarrow 5x-1=6x+2x^2-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2-x+1=0\Leftrightarrow\{\text{Multiplicamos ambos miembros por -1}\}\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-1+3}{4}\Leftrightarrow \underline{x=\frac{1}{2}}\\ x=\frac{-1-3}{4}\Leftrightarrow\underline{x=-1}\end{cases}$$

Otros ejercicios que deben conocer son los siguientes:

3) Escribir una ecuación cuyas soluciones sean -4 y 3. ¿Podrías escribir alguna otra ecuación diferente de la que has dado? ¿Cuántas ecuaciones de segundo grado distintas existen que tengan esas dos soluciones?¿Cómo se llaman a todas esas ecuaciones que tienen las mismas soluciones?

Solución:

Primera forma: $(x+4)(x-3)=x^2-3x+4x-12=x^2+x-12;\ \therefore\ x^2+x-12=0$

Segunda forma: $x^2-(-4+3)x+(-4).3=0\Leftrightarrow x^2+x-12=0$

$-x^2-x+12=0;\quad 5x^2+5x-60=0;\quad \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-6=0$

Existen infinitas ecuaciones que tienen por soluciones $-4$ y 3. Se llaman *ecuaciones equivalentes.*

4) Determinar $k$ para que la ecuación $x^2+kx-12$ tenga a 6 como solución y comprobar.

Solución:

Queremos que 6 sea solución, por tanto debe verificar la igualdad :

$6^2+k.6-12=0\Leftrightarrow 36+6k-12=0\Leftrightarrow 6k=-24\Leftrightarrow k=\frac{-24}{4}\Leftrightarrow k=-4$

$$\text{Comprobación}: x^2-4.x-12=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{\underline{x=\frac{4+8}{2}=6}}\\ x=\frac{4-8}{2}=-2\end{cases}$$

5) Factorizar los siguientes polinomios:

Solución:

a) $p(x)=x^2+3x-10$

$$x^2+3x-10=0\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-3+7}{2}\Leftrightarrow\underline{x=2}\\ x=\frac{-3-7}{2}\Leftrightarrow\underline{x=-5}\end{cases}$$

$\therefore\ p(x)=x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$

b) $q(x)=15x^2+27x-6$

$$15x^2+27x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-27\pm\sqrt{729+360}}{30}=\frac{-27\pm\sqrt{1089}}{30}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-27+33}{30} \Leftrightarrow \underline{x=\dfrac{1}{5}} \\ x=\dfrac{-27-33}{30} \Leftrightarrow \underline{x=-2} \end{cases} \qquad \therefore\ q(x)=15x^2+27x-6=15\left(x-\frac{1}{5}\right)(x+2)$$

c) $r(x)=x^2-4$

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x=2}\\ \underline{x=-2}\end{cases} \qquad \therefore\ r(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)$$

En el último apartado sería deseable que los alumnos hicieran uso de las igualdades notables y, detectando que se trata de una diferencia de cuadrados, factorizaran el polinomio directamente.

Por último, se plantean y resuelven algunos problemas de tipo aritmético y geométrico para que los alumnos valoren la utilidad de conocer la resolución de la ecuación de segundo grado.

| | |
|---|---|
| 6) | Dos caños A y B llenan juntos una piscina en dos horas, A lo hace por sí solo en tres horas menos que B ¿Cuántas horas tarda cada uno separadamente? |

Solución:

$x \equiv tiempo\ que\ necesita\ el\ caño\ A\ para\ llenar\ la\ piscina\ (horas).$

$x+3 \equiv tiempo\ que\ necesita\ el\ caño\ B\ para\ llenar\ la\ piscina\ (horas).$

$k \equiv capacidad\ de\ la\ piscina$

$$\text{Así, }\begin{cases}\dfrac{k}{x}\equiv litros\ que\ aporta\ el\ caño\ A\ en\ una\ hora.\\ \dfrac{k}{x+3}\equiv litros\ que\ aporta\ el\ caño\ B\ en\ una\ hora.\end{cases}$$

Sólo queda utilizar el dato proprcionado por el enunciado :

$$\left(\frac{k}{x}+\frac{k}{x+3}\right).2=k \Leftrightarrow \frac{2k}{x}+\frac{2k}{x+3}=k \Leftrightarrow \{\text{dividimos por } k\neq 0\} \Leftrightarrow \frac{2}{x}+\frac{2}{x+3}=1 \Leftrightarrow$$

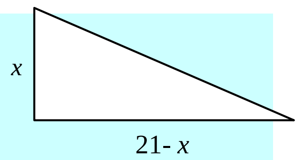
$$\Leftrightarrow \frac{2(x+3)+2x}{x(x+3)}=1 \Leftrightarrow 2x+6+2x=x(x+3) \Leftrightarrow 4x+6=x^2+3x \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{6}{2}\Leftrightarrow \underline{x=3} & \text{Ésta es la solución apropiada}\\ x=\dfrac{-4}{2}\Leftrightarrow x=-2 & \text{(Por el contexto carece de sentido)}\end{cases}$$

$\therefore$ El caño A tardará 3 horas por sí solo en llenar la piscina y el caño B lo hará en 6 horas.

7) Determinar las medidas de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que su perímetro es 36 cm y la suma de sus catetos 21 cm.

<u>Solución</u>:




$x \equiv longitud\, de\, un\, cateto (cm)$

$21 - x \equiv longitud\, del\, otro\, cateto (cm)$

$La\ \ hipotenusa\, medirá : 36 - 21 = 15\, cm.\, Por\ Pitágoras:$

$$15^2 = x^2 + (21 - x)^2 \Leftrightarrow 225 = x^2 + 441 - 42x + x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 42x + 216 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 21x + 108 = 0 \Rightarrow x = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 432}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{21 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21+3}{2} \Leftrightarrow \underline{x = 12} \Rightarrow El\ otro\, cateto\, mide\, 21 - 12 = 9\, cm \\ x = \frac{21-3}{2} \Leftrightarrow \underline{x = 9} \Rightarrow El\ otro\, cateto\, mide\, 21 - 9 = 12\, cm \end{cases}$$

Los catetos miden 9 y 12 cm, respectivamente y la hipotenusa 15 cm, medida que se conocía desde el principio.

## 1.2 Polinomios de grado superior a dos. Resolución de ecuaciones

Se introducirán los cambios de variable que permiten resolver las *ecuaciones bicuadradas* y otras que podrían denominarse *ecuaciones bicúbicas*. De esta forma, los alumnos podrán pensar en los caminos que les abren los cambios de variable de manera general. Será suficiente presentarles un par de ejemplos.

1) Resolver las siguientes ecuaciones efectuando el cambio de variable apropiado:

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \{\underline{t = x^2} \Rightarrow \underline{t^2 = x^4}\} \Leftrightarrow t^2 - 5t - 36 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{5 \pm 13}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{18}{2} \Leftrightarrow t = 9 \\ t = \frac{-8}{2} \Leftrightarrow t = -4 \end{cases}$$ Se deshace el cambio de variable :

$$t = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x = 3} \\ \underline{x = -3} \end{cases}$$

$$t = -4 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow x = \pm 2i$$

La ecuación tiene dos soluciones y dos complejas.

b) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$

$$4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \{\underline{t = x^2} \Rightarrow \underline{t^2 = x^4}\} \Leftrightarrow 4t^2 - 9t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{8} \Leftrightarrow t = \frac{9 \pm 7}{8} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{16}{8} \Leftrightarrow t = 2 \\ t = \frac{2}{8} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$t = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x = \sqrt{2}} \\ \underline{x = -\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x = \frac{1}{2}} \\ \underline{x = -\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Esta ecuación posee las cuatro soluciones reales, pero ninguna es entera.

c) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow \{t = x^3 \Rightarrow t^2 = x^6\} \Leftrightarrow t^2 + 7t - 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{-7 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{2} \Leftrightarrow t = 1 \\ t = \frac{-16}{2} \Leftrightarrow t = -2 \end{cases}$$ Se deshace el cambio de variable

$$t = 1 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow \underline{x = 1}$$

$$t = -8 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow \underline{x = -2}$$

La ecuación posee dos soluciones reales (y enteras) y cuatro complejas.

2) Factorizar los polinomios que definen las ecuaciones anteriores.

Solución:

$$p(x)=(x-3)(x+3)(x^2+4)$$

$$p(x)=4\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$p(x)=?$$

La factorización del último polinomio del ejercicio anterior abre la puerta al siguiente punto.

### 1.3 La Regla de Ruffini

Pasamos a abordar la resolución de las ecuaciones de grado superior a dos. Será bueno que tengan presente la expresión general de un polinomio para que la notación no se convierta en un problema. Es muy importante que entiendan que la notación de los objetos en Matemáticas debe facilitar los conceptos y los procedimientos y nunca debe convertirse en una cuestión que suponga una dificultad añadida para el aprendizaje; todo lo contrario, debe ser una aliada para hacer las cosas más fáciles e inteligibles. El aspecto que tiene un polinomio de grado $n$ es:

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Si en las ecuaciones de segundo grado denotamos al polinomio en la forma:

$p(x) = ax^2 + bx + c$ y no $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$,

que comprendan que es para hacer más simples las expresiones que de ahí se deducen como (*1) y no tener que andar con subíndices. Sin embargo, cuando se va a atacar el problema de la resolución general de una ecuación, no tenemos más remedio que usar subíndices porque, a priori, se desconoce su grado y no sabríamos cuántas letras del abecedario se requerirían o, ni siquiera, si habría suficientes.

Recordemos que la búsqueda de una solución de una ecuación es equivalente a hallar una raíz del polinomio que genera la ecuación. Además,

$$a \in \mathbb{R} \textit{ raíz } \text{de } p(x) \Leftrightarrow p(a)=0$$

También, por el *Teorema del Resto*, sabemos que 0 será el resto de la división por $x - a$. Así, una forma de localizar raíces de polinomios con grado superior a dos, será buscar números reales que provoquen resto nulo al ejecutar el *Algoritmo de Ruffini*. Creo que no es conveniente explicar las *Fórmulas de Viéte* en el caso general de grado $n$ porque son expresiones demasiado complejas para este nivel. Sin embargo, se les debe explicar la siguiente propiedad:

*Propiedad*.- Si $a \in \mathbb{Z}$, es una raíz de $p(x)$, $a$ necesariamente debe dividir a su término independiente $a_0$.

De esta forma deben entender que a la hora de buscar las soluciones de una ecuación de grado superior a tres, tendrán que pensar exclusivamente en los divisores del término independiente, sean positivos o negativos. Y se realizarán algunos ejercicios como los siguientes (incluyen parte de la explicación que se debe ofrecer a los alumnos).

| 3) Encontrar las raíces de los siguientes polinomios y escribir su descomposición. |
|---|

Solución:

$a)\ p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Antes de afrontar la búsqueda se proponen los candidatos a raíces y se recordará que raíces serán aquellos valores que tras el *Algoritmo de Ruffini* provoquen un cero en la posición del resto.

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 1 & \downarrow & 1 & 4 & 0 \\ \hline & 1 & 4 & 0 & |\underline{\underline{-12}} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \ \ \textbf{\textit{no}} \text{ es raíz del polinomio. Descartamos 1 de entre los}$$

$$\text{candidatos que son:} \begin{cases} -1 & 1 \\ -2 & 2 \\ -3 & 3 \\ -4 & 4 \\ -6 & 6 \\ -12 & 12 \end{cases} \text{ (los divisores negativos y positivos de } -12).$$

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -2 & \downarrow & -2 & -2 & 12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & |\underline{\underline{0}} \end{array}\right\} \Rightarrow x = -2 \ \ \textbf{\textit{sí}} \text{ es raíz del polinomio. Se hará hincapié en el}$$

significado de esa división: $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x^2 + x - 6)$.

En lugar de continuar realizando *Ruffini*, al llegar al polinomio de grado dos, se instará a los alumnos a que pasen a resolver la ecuación de segundo grado, para precisamente localizar las raíces sean o no enteras.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ x = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

De esta forma la descomposición del polinomio queda en la forma:

$\therefore\ p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-2)(x+3)$

b) $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ Candidatos a raíces: $\begin{cases} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & \downarrow & 2 & 5 & -3 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & | \; \underline{\underline{0}} \end{array}\right\} \Rightarrow q(x) = (x-1)(2x^2 + 5x - 3);$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\therefore q(x) = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$$

c) $r(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x + 40$ Los candidatos son: $-1, 1, -2, 2, -4, 4, -5, 5, -8, 8, -10, 10, -20, 20, -40$ y $40$.

$$\left.\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -13 & 10 & 40 \\ -2 & \downarrow & -2 & 8 & 10 & -40 \\ \hline & 1 & -4 & -5 & 20 & | \; \underline{\underline{0}} \\ 4 & \downarrow & 4 & 0 & -20 & \\ \hline & 1 & 0 & -5 & | \; \underline{\underline{0}} & \end{array}\right\} \Rightarrow q(x) = (x+2)(x-4)(x^2-5); \quad x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\therefore q(x) = (x+2)(x-4)\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$$

d) $s(x) = x^4 + 2x^3 - 18x^2 - 19x - 20$ Posibles raíces: $1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20$ y $-20$.

$$\left.\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -18 & -19 & -20 \\ 4 & \downarrow & 4 & 24 & 24 & 20 \\ \hline & 1 & 6 & 6 & 5 & | \; \underline{\underline{0}} \\ -5 & \downarrow & -5 & -5 & -5 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & | \; \underline{\underline{0}} & \end{array}\right\} \Rightarrow s(x) = (x-4)(x+5)(x^2+x+1); \; x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \qquad \therefore s(x) = (x-4)(x+5)(x^2+x+1)$$

El apartado "d)" se construye para que observen la idoneidad de la ecuación (*1) que de forma directa aclara que no hay más soluciones reales y la descomposición finaliza ahí.

Es el momento de recalcar que *Ruffini* es un método limitadísimo porque sólo permite calcular soluciones enteras (en principio) y que, por esto, sólo sirve para resolver ejercicios que estén expresamente preparados para poder ser resueltos. Teniendo esto en cuenta, deben entender que lo natural es realizar la ecuación de segundo grado cuando acceden al polinomio de grado dos para poder encontrar todo tipo de raíces (si las hay), y no encadenar *cajas de Ruffini*, como acostumbran a hacer muchos profesores de secundaria, creo que por desconocimiento, convirtiéndose en los primeros que se adhieren a mecánicas que carecen de sentido. Los alumnos deben valorar que lo deseable es que dispusiésemos de expresiones que nos proporcionaran las raíces de polinomios para cualquier grado de éstos. Precisamente este trabajo trata de mostrar que como no disponemos de esa herramienta (y sabemos, desde que Evariste Galois demostró lo que demostró, que la deseada herramienta para grado mayor o igual que cinco ni siquiera existe) cuál debe ser la manera más apropiada de acercarnos a la resolución de ecuaciones de una manera realista.

Es conveniente que vayan familiarizándose con el concepto de *multiplicidad de una raíz*; sin necesidad de exponer ninguna definición, se aportará un ejemplo en el que aparezcan raíces con distintas multiplicidades, como el apartado "e)" con el que se completa el ejercicio anterior.

e) $t(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$

$$\left.\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 1 & -5 & -1 & 8 & -4 \\
1 & \downarrow & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 \\ \hline
 & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 & |\ \underline{\underline{0}} \\
1 & \downarrow & 1 & 3 & 0 & -4 & \\ \hline
 & 1 & 3 & 0 & -4 & |\ \underline{\underline{0}} & \\
1 & \downarrow & 1 & 4 & 4 & & \\ \hline
 & 1 & 4 & 4 & & &
\end{array}\right\} \Rightarrow t(x) = (x-1)(x-1)(x-1)(x^2+4x+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\text{Igualdades notables}\} \Leftrightarrow t(x) = (x-1)(x-1)(x-1)(x+2)^2 \Leftrightarrow t(x) = (x-1)^3(x+2)^2$$

Con este ejemplo se explica qué es una raíz múltiple como -2 que es una *raíz doble* o raíz con *multiplicidad dos* ó 1 que es una *raíz triple* o raíz de *multiplicidad tres*. Se contraponen a las *raíces simples* o raíces de *multiplicidad uno*.

Ahora estarán en condiciones de finalizar el apartado último del ejercicio de alta demanda cognitiva que quedo planteado y cuya resolución recojo a continuación:

Se trataba del polinomio $x^6 + 7x^3 - 8$, para el que habíamos localizado las raíces 1 y $-2$

$$\left.\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & -8 \\
1 & \downarrow & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 8 \\ \hline
 & 1 & 1 & 1 & 8 & 8 & 8 & |\underline{\underline{0}} \\
-2 & \downarrow & -2 & 2 & -6 & -4 & -8 & \\ \hline
 & 1 & -1 & 3 & 2 & 4\ | & \underline{\underline{0}} &
\end{array}\right\} \Rightarrow x^6 + 7x^3 - 8 = (x-1)(x+2)(x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 4)$$

¿Pero qué ocurre con el polinomio de grado cuatro? Como nos referiremos a él más adelante, vamos a referenciarlo:

$$i(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x + 4 \qquad\qquad i(x)*$$

Pueden comprobar que ninguno de los divisores de su término independiente es raíz del polinomio. ¿Tendrá alguna raíz o será irreducible? Esta pregunta, por ahora, queda abierta.

Los siguientes puntos que desarrollamos en esta primera parte, no se recogen en los libros de texto, creemos que es un error; bajo nuestro punto de vista, deberían ser incluidos, en lugar de realizar infinidad de ejercicios ni realistas ni útiles, cortados todos ellos por el mismo patrón. También creemos que la materia que se imparte debe ser justificada suficientemente, por ello mostramos los escollos que presentan las técnicas vistas hasta este punto e ilustramos las motivaciones que originan las nuevas técnicas o las mejoras que de ellas se explicarán. Así, continuamos con la teoría y las actividades propuestas.

## 1.4 Regla de Descartes y Acotación de Raíces

¿Qué ocurriría si planteáramos a un alumno en estos momentos el siguiente problema?

| Resuelve la siguiente ecuación $x^3 - 70x^2 + 1400x - 8000 = 0$. |
|---|

Claro, en un libro de texto no osan incluir un término independiente *de esa magnitud*, pero la realidad no te plantea problemas que sean sencillos de resolver. Ese término independiente tiene veintiocho divisores, que se convierten en cincuenta y seis si añadimos los negativos, los siguientes:

$$8000 = 2^6.5^3 \Rightarrow n^o\, div. = (6+1)(3+1) = 28$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 5 | 8 | 10 | 16 | −1 | −2 | −4 | −5 | −8 | −10 | −16 |
| 20 | 25 | 32 | 40 | 50 | 64 | 80 | −20 | −25 | −32 | −40 | −50 | −64 | −80 |
| 100 | 125 | 160 | 200 | 250 | 320 | 400 | −100 | −125 | −160 | −200 | −250 | −320 | −400 |
| 500 | 800 | 1000 | 1600 | 2000 | 4000 | 8000 | −500 | −800 | −1000 | −1600 | −2000 | −4000 | −8000 |

Por poder, se puede proceder con la *Regla de Ruffini*, pero parece que no es muy rentable en cuanto a complejidad y a tiempo se refiere. Si se explicara otra regla o resultado que limitara las opciones, convertiríamos a *Ruffini* en un algoritmo más eficiente.

*Regla de Descartes*.- «Si $s$ es el número de cambios de signo de los coeficientes de un polinomio $p(x)$ y $m$ es el número de sus raíces positivas (contada cada una de ellas tantas veces como indica su multiplicidad), entonces $m \leq s$ y $s - m$ es par».

El número de raíces negativas $s´$ se obtiene repitiendo el proceso anterior para $p(-x)$.

Habrá que poner ejemplos de cómo se utiliza el resultado y, en un principio, una posibilidad es centrarse en los polinomios de grado tres. De acuerdo con este resultado, toda ecuación polinómica cúbica cuyos coeficientes tengan signos alternados como, por ejemplo: $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ (donde $a$, $b$ y $c > 0$), en el supuesto de que tenga raíces reales, entonces todas serán positivas:

$p(-x) = (-x)^3 - a(-x)^2 + b(-x) - c = -x^3 - ax^2 - bx - c$. Luego $s´ = 0$.

Mientras que toda ecuación polinómica de grado tres de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (donde $a$, $b$ y $c > 0$), caso de tener raíces reales, todas serán negativas: $s = 0$.

En el ejemplo que nos ocupa, limitaríamos a la mitad los candidatos a solución de la ecuación.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 5 | 8 | 10 | 16 |
| 20 | 25 | 32 | 40 | 50 | 64 | 80 |
| 100 | 125 | 160 | 200 | 250 | 320 | 400 |
| 500 | 800 | 1000 | 1600 | 2000 | 4000 | 8000 |

Considero oportuno añadir un resultado que aporte una cota para el valor absoluto de las raíces. Aunque no tenga carácter general, porque podría significar aumentar demasiado la dificultad, sugiero añadir un resultado adaptado a polinomios de grado tres, como el siguiente, que se obtiene en el contexto de las *Fórmulas de Cardano-Viéte*.

*Proposición*.-«Sea un polinomio de grado tres $p(x)=a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ que posee todas las raíces reales, las raíces del polinomio se encuentran en el intervalo $[-M, M]$, en donde M responde a la expresión:

$$M = \sqrt{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 - 2\frac{a_1}{a_3}} \text{ ».}$$

Así, para el ejercicio anterior y, suponiendo que tuviera todas sus raíces reales, podrían encontrar un intervalo más reducido para las soluciones de la ecuación. Veamos:

$$p(x) = x^3 - 70x^2 + 1400x - 8000$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{-70}{1}\right)^2 - 2\frac{1400}{1}} = \sqrt{4900 - 2800} = \sqrt{2100} \approx 45'8$$

$\therefore$ Las raícesse encuentran en el intervalo $[-46,46]$ Las candidatas a soluciónde la ecuaciónson :

1 2 4 5 8 10 16 20 25 32 40

En estas condiciones es más razonable aplicar el *Algoritmo de Ruffini* y puede comprobarse que las soluciones son, efectivamente, 10, 20 y 40.

Añadiendo estos dos resultados, que no son extremadamente complejos, hemos conseguido que los alumnos se acerquen a la búsqueda de raíces enteras de polinomios de una manera mucho más efectiva y realista. Además se habrán enriquecido con conocimientos de tipo cualitativo en torno a los polinomios. En este contexto, planteamos el siguiente ejercicio:

4) Resolver las siguientes ecuaciones cúbicas:

Solución:

a) $x^3 - 53x^2 + 532x - 480 = 0$

El número de raícesnegativas es $s'$ (el número de variaciones de signo para $p(-x)$) :

$p(-x) = (-x)^3 - 53(-x)^2 + 532(-x) - 480 = -x^3 - 53x^2 - 532x - 480 \Rightarrow s' = 0$

$\therefore$ La raíz o tres raícesrealesque posea, si las tiene, son todas positivas.

Busquemos una cota para las posibles raíces:

$$M=\sqrt{\left(\frac{-53}{1}\right)^2-2\frac{532}{1}}=\sqrt{2809-1064}=\sqrt{1745}\approx 41'8$$

$\therefore$ Las raíces están contenidas en el intervalo: $[-42,42]$

Así, de los candidatos iniciales:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 8 & 10 & 12 & 15 & 16 & 20 & -8 & -10 & -12 & -15 & -16 & -20 \\ 24 & 30 & 32 & 40 & 48 & 60 & -24 & -30 & -32 & -40 & -48 & -60 \\ 80 & 96 & 120 & 160 & 240 & 480 & -80 & -96 & -120 & -160 & -240 & -480 \end{array}$$

pasamos a:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 10 \\ 12 & 15 & 16 & 20 \\ 24 & 30 & 32 & 40 \end{array}$$

y, resulta que 1 ¡es raíz!

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -53 & 532 & -480 \\ 1 & \downarrow & 1 & -52 & 480 \\ \hline & 1 & -52 & 480 & \underline{\underline{0}} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3-53x^2+532x-480=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-52x+480)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow \underline{x=1} \\ x^2-52x+480=0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{52\pm\sqrt{2704-1920}}{2}=\frac{52\pm\sqrt{784}}{2}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{52+28}{2} \Leftrightarrow \underline{x=40} \\ x=\dfrac{52-28}{2} \Leftrightarrow \underline{x=12} \end{cases}$$

b) $x^3-88x^2+1620x+3600=0$

Este apartado queda propuesto.

No obstante, todo lo presentado hasta aquí sigue englobándose dentro de la búsqueda de raíces enteras de ecuaciones y queremos destacar a los alumnos que no es realista plantearse que las soluciones *deben* ser números enteros. Por esto me parece imprescindible incluir un resultado fácilmente aplicable que dé respuesta al hecho de si un polinomio posee o no raíces enteras. Gracias a la lectura del artículo referido en **[6]**, he encontrado un resultado muy sencillo que puede explicarse tranquilamente en un aula de secundaria y proporciona una condición suficiente para descartar la existencia de raíces enteras para un polinomio con coeficientes enteros.

*Teorema*.- « Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $p(0)$ y $p(1)$ son números impares; entonces, la ecuación polinómica $p(x) = 0$ no tiene soluciones enteras».

Al menos para mí, se trata de un resultado llamativo y novedoso, por esto voy a acompañarlo de la demostración, aunque no es muy viable mostrarla en el aula dado que precisa del *Teorema de Taylor*. Acompaño la demostración por el interés de este trabajo.

Demostración.- Consideremos el *desarrollo de Taylor* de orden $n$ asociado al polinomio $p(x)$ alrededor del punto $x_0=0$:

$$p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{p^{n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{p^{n)}(0)}{n!}x^n$$

Supongamos que $p(x)$ se anula en un entero par $2n$:

$$p(2n)=0 \Leftrightarrow p(0)+\frac{p´(0)}{1!}2n+\frac{p´´(0)}{2!}4n^2+\cdots+\frac{p^{n-1)}(0)}{(n-1)!}2^{n-1}n^{n-1}+\frac{p^{n)}(0)}{n!}2^n n^n=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p´(0)}{1!}2n+\frac{p´´(0)}{2!}4n^2+\cdots+\frac{p^{n-1)}(0)}{(n-1)!}2^{n-1}n^{n-1}+\frac{p^{n)}(0)}{n!}2^n n^n=-p(0) \qquad \#$$

Es contradictorio porque la paridad del entero de la izquierda (recuérdese que el polinomio es de coeficientes enteros) es par, pero en la izquierda hay un número impar.

Ahora hagamos su *polinomio de Taylor* alrededor de $x_0=1$ de grado $n$:

$$p(1)+\frac{p´(1)}{1!}(x-1)+\frac{p´´(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots+\frac{p^{n-1)}(1)}{(n-1)!}(x-1)^{n-1}+\frac{p^{n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

Supongamos que $p(x)$ se anula en un entero impar $2n+1$:

$$p(2n+1)=0 \Leftrightarrow p(1)+\frac{p´(1)}{1!}2n+\frac{p´´(1)}{2!}4n^2+\cdots+\frac{p^{n-1)}(1)}{(n-1)!}2^{n-1}n^{n-1}+\frac{p^{n)}(1)}{n!}2^n n^n=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p´(1)}{1!}2n+\frac{p´´(1)}{2!}4n^2+\cdots+\frac{p^{n-1)}(1)}{(n-1)!}2^{n-1}n^{n-1}+\frac{p^{n)}(1)}{n!}2^n n^n=-p(1) \qquad \#$$

Se produce una contradicción por el mismo motivo que antes.

$\therefore$ El polinomio no se anula ni en un entero par ni en uno impar, luego la ecuación no tiene soluciones enteras.

□

Nótese la independencia en la demostración:

*p*(0) impar provoca que no pueda tener soluciones enteras pares.
*p*(1) impar provoca que no pueda tener soluciones enteras impares.

De hecho, la mitad del resultado ya era conocido porque si *p*(0) es impar, como coincide con el término independiente del polinomio, ya se sabía que no podían existir soluciones enteras pares porque nunca una raíz así podría dividir al término independiente. Con un resultado así, podemos proponer en el aula ejercicios del tipo siguiente:

5) Averiguar si la ecuación $x^3 - 61x^2 - 50x + 135 = 0$ posee soluciones enteras.

Solución:

Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - 61x^2 - 50x + 135$,
$p(0) = 135$, luego no tiene soluciones enteras pares.
$p(1) = 1 - 61 - 50 + 135 = 25$, tampoco tiene soluciones enteras impares.

Llegados a este punto, si una ecuación no tiene soluciones enteras, ¿qué se puede hacer? Abandonamos a los alumnos con este vacío o intentamos mejorar las técnicas para buscar otro tipo de soluciones. Yo creo que sí se pueden conseguir mejoras en este nivel y propongo añadir el siguiente epígrafe. Además, me gustaría señalar que durante las prácticas correspondientes al presente Máster, disfruté de un curso de 3º E.S.O. y llegué a comentar por encima los resultados que incluyo en el siguiente punto y los alumnos entendían perfectamente la idea que encierra: cómo se podrían localizar las candidatas a raíces racionales de polinomios.

## 1.5 Regla de Ruffini adaptada a Números Racionales

Antes de ampliar el uso del *Algoritmo de Ruffini* para hallar las raíces racionales, es necesario que conozcan la condición necesaria para que un número racional, escrito en forma de su fracción irreducible, pueda convertirse en la solución de una ecuación polinómica. Esta condición nos la proporciona el siguiente resultado.

<u>Lema (Gauss)</u>.- Dado un polinomio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$, si $\dfrac{\alpha}{\beta}$ es una una raíz racional del polinomio, siendo $\dfrac{\alpha}{\beta}$ la fracción irreducible, entonces $\alpha$ es un divisor del término independiente $a_0$ y $\beta$ será un divisor del coeficiente principal $a_n$

Me parece imprescindible aclarar el enunciado con un ejemplo:

Sea el polinomio $p(x)=4x^2+3x-6$, las posibles raíces enteras son:

$$\begin{cases}1 & -1\\ 2 & -2\\ 3 & -3\\ 6 & -6\end{cases}\quad \text{que coinciden con:}\quad \begin{cases}1/1 & -1/1\\ 2/1 & -2/1\\ 3/1 & -3/1\\ 6/1 & -6/1\end{cases}$$

Además, observando los divisores de 4, será suficiente con observar exclusivamente los positivos, gracias a la regla de los signos que son: 1, 2 y 4, podemos establecer que las posibles raíces racionales del polinomio son:

$$\begin{cases}1/2 & -1/2 & 1/4 & -1/4\\ 2/2 & -2/2 & 2/4 & -2/4\\ 3/2 & -3/2 & 3/4 & -3/4\\ 6/2 & -6/2 & 6/4 & -6/4\end{cases}\quad \text{aunque las realmente nuevas son:}\begin{cases}1/2 & -1/2 & 1/4 & -1/4\\ 3/2 & -3/2 & 3/4 & -3/4\end{cases}$$

Y, sin embargo, este polinomio no tiene ninguna de ellas, como podemos deducir gracias a la expresión (*1):

$$4x^2+3x-6=0\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+96}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{105}}{8}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-3+\sqrt{105}}{8}\\ x=\dfrac{-3-\sqrt{105}}{8}\end{cases}$$

Precisamente ilustro la propiedad con este ejemplo para que valoren el hecho de que aunque la propiedad sea cierta, no garantiza que alguna de las raíces racionales propuestas se convierta en raíz efectivamente. Es decir, sabemos un poco más, pero seguimos sin acercamos de manera concluyente al problema. Lo realmente definitivo sería tener una expresión como (*1) que nos resolviera en cualquier caso la ecuación.

Ahora adjunto la demostración del *Lema*, que podría incluirse como parte de la explicación, puesto que no es muy difícil.

Demostración.- Sea $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ y supongamos que $\dfrac{\alpha}{\beta}$ es una raíz siendo $\alpha$ y $\beta$ primos entre sí (coprimos), esto quiere decir que:

$$p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=0\Leftrightarrow a_n\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}+\cdots+a_2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+a_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+a_0=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta+\cdots+a_2\alpha^2\beta^{n-2}+a_1\alpha\beta^{n-1}+a_0\beta^n}{\beta^n}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta+\cdots+a_2\alpha^2\beta^{n-2}+a_1\alpha\beta^{n-1}+a_0\beta^n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta+\cdots+a_2\alpha^2\beta^{n-2}+a_1\alpha\beta^{n-1}=-a_0\beta^n\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\alpha\left(a_n\alpha^{n-1}+a_{n-1}\alpha^{n-2}\beta+\cdots+a_2\alpha\beta^{n-2}+a_1\beta^{n-1}\right)=-a_0\beta^n\Rightarrow\alpha$ es divisor de $-a_0\beta^n$, pero como $\alpha$ no es divisor de $\beta^n$ porque $\alpha$ y $\beta$ son primos entre sí, $\alpha$ necesariamente ha de dividir a $a_0$.

Por otro lado, $a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta+\cdots+a_2\alpha^2\beta^{n-2}+a_1\alpha\beta^{n-1}+a_0\beta^n=-a_n\alpha^n\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\beta\left(a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_2\alpha^2\beta^{n-3}+a_1\alpha\beta^{n-2}+a_0\beta^{n-1}\right)=-a_n\alpha^n\Rightarrow\beta$ es divisor de $-a_n\alpha^n$, como $\beta$ no es divisor de $\alpha^n$, necesariamente $\beta$ es divisor de $a_n$.

□

**6) Encontrar las raíces enteras y racionales de los siguientes polinomios:**

Solución:

a) $p(x)=24x^3+10x^2-3x-1$. Los candidatos a raíces enteras y racionales teniendo en cuenta que los divisores de 1 son $-1$ y $1$ y que los de 24 (positivos) son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24 serán:

$$\begin{cases}1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/6 & 1/8 & 1/12 & 1/24\\ -1 & -1/2 & -1/3 & -1/4 & -1/6 & -1/8 & -1/12 & -1/24\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 24 & 10 & -3 & -1\\ -1/2 & \downarrow & -12 & 1 & 1\\ \hline & 24 & -2 & -2 & |\ \underline{\underline{0}}\end{array}\right\}\Rightarrow 24x^3+10x^2-3x-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)(24x^2-2x-2)$$

$$24x^2-2x-2=0\Leftrightarrow 12x^2-x-1=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{24}=\frac{1\pm7}{24}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{8}{24}=\dfrac{1}{3}\\[2mm] x=\dfrac{-6}{24}=\dfrac{-1}{4}\end{cases}$$

$$\therefore r(x)=24\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)$$

b) $q(x)=6x^3+17x^2-4x-3$. Las posibles raíces son los divisores de 3 entre los divisores de 6, es decir,

$$\begin{cases}1 & -1 & & \\ 1/2 & -1/2 & 3 & -3\\ 1/3 & -1/3 & 3/2 & -3/2\\ 1/6 & -1/6 & & \end{cases}\qquad \left.\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 17 & -4 & -3\\ 1/2 & \downarrow & 3 & 10 & 3\\ \hline & 6 & 20 & 6 & |\ \underline{\underline{0}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^3+17x^2-4x-3=\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x^2+20x+6);\ 6x^2+20x+6=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+10x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{6}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{-10+8}{6}=\frac{-1}{3} \\ x=\frac{-10-8}{6}=-3 \end{cases}$$

$$\therefore q(x)=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+3)$$

Recuérdese a los alumnos que en la descomposición debe aparecer el coeficiente principal de polinomio, es un error muy común olvidarlo. Se aconseja efectuar un producto para que los alumnos visualicen que, efectivamente, coincide con el polinomio original y que, si no estuviera dicho coeficiente principal, la igualdad sería imposible. Debe remarcarse que otra vez se tratan de ejercicios preparados para que puedan ser resueltos con la *Regla de Ruffini*, pero seguimos sin saber si el polinomio $i(x)$* es o no irreducible. ¿Existirá una expresión como (*1) para las ecuaciones cúbicas?

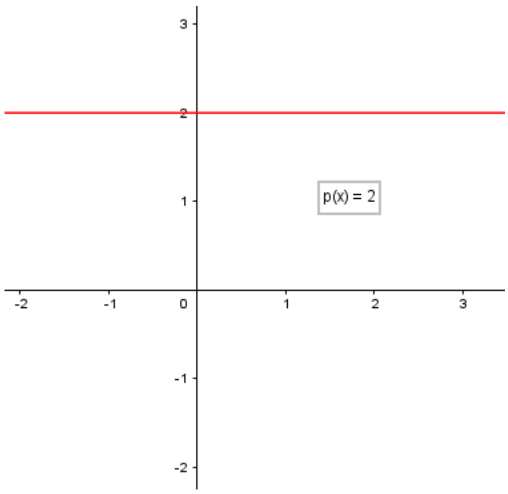
## 1.6 Gráficas de Polinomios

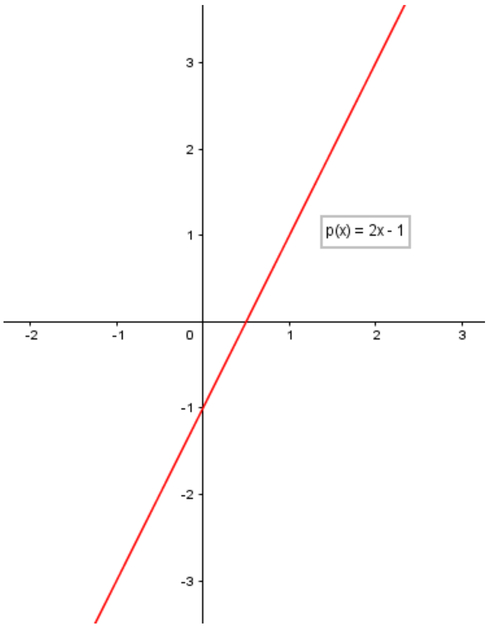
Me parece esencial que los alumnos aprendan a reconocer en estos niveles la forma que tienen las gráficas de los polinomios vistos como funciones reales de variable real. Se llenan los libros de texto con infinidad de ejercicios (¡todos iguales!) en los que deben representar *funciones afines* (polinomios de grado uno) y *funciones cuadráticas* (polinomios de grado dos), diciéndoles que se tratan de rectas y parábolas, respectivamente, pero no saben detectar que son polinomios. De esta forma, llegan a Bachiller sin saber cómo es el aspecto que tienen las gráficas de los polinomios, siendo algo muy sencillo y elemental. Concretamente no vinculan las funciones con polinomios, para ellos son conceptos que no tienen nada que ver; y, aunque sí reconocen que la gráfica de una función del tipo $f(x) = ax + b$ es una recta, ante la pregunta ¿cuál es la gráfica de un polinomio de grado uno? Se quedan boquiabiertos. No reconocen que los polinomios son un subconjunto muy especial dentro del conjunto de las funciones.

En este escenario, ni qué decir tiene que, ligar el concepto de raíz de un polinomio o solución de una ecuación con el de *punto de corte con el eje OX*, es magia pura. Pocas chicas y chicos saben que se está hablando del mismo concepto. ¡Cómo los polinomios se ven en la primera o segunda evaluación en el bloque de Álgebra y *cortes con los ejes* es algo de la última evaluación dentro del tema de funciones!¡¿Qué va a tener que ver una cosa con otra?!

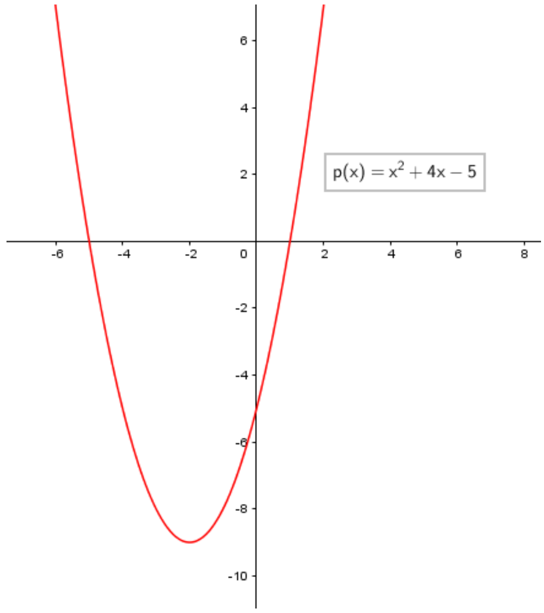
Así las cosas, creo fundamental que hagan representaciones de polinomios, pero no en sus cuadernos dando valores a las *x's* y buscando los de las *y's*, sino utilizando un programa de representación apropiado. Para elaborar las actividades que planteo utilizaré Geogebra, pero cualquier otro programa como Matematica, Derive o página web sería válida. Me remito al Geogebra porque me parece muy sencillo y potente. Un software que no conocía y, a partir de las actividades que realizamos en la asignatura de *Innovación Docente en Matemáticas* en el presente Máster, impartida por los profesores D. Tomás Ortega y Dña. Cristina Pecharromán, he tenido la oportunidad de familiarizarme con él y la considero una herramienta fácil de utilizar (es muy intuitiva, no es necesario dar clases para comenzar a hacer uso de él), muy potente (resuelve cuestiones aritméticas, algebraicas, analíticas, probabilísticas y, obviamente, geométricas) y accesible (es gratuito e implementable en cualquier ordenador o tablet) que se me antoja casi imprescindible en un aula de secundaria. Creo que cuanto primero se habitúen los chavales a su entorno, será terreno ganado para el futuro: por ejemplo, explicar cónicas y trigonometría en Primero de Bachiller de Ciencias o las distribuciones estadísticas (visualizar las funciones de densidad y las áreas que encierran) en Primero de Bachiller de Ciencias Sociales con el apoyo de Geogebra, facilitaría bastante las cosas al profesor y, sobre todo y lo más importante, a ellos.

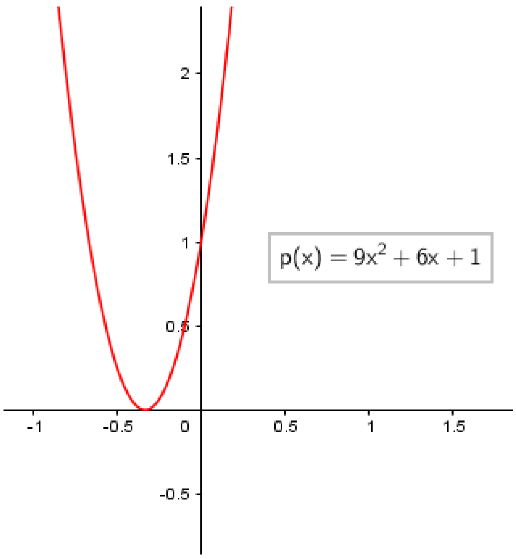
En principio representaremos gráficamente varios polinomios de grado cero (rectas horizontales) y de grado uno (rectas cualesquiera salvo verticales). No creo que sea el momento de analizar cuestiones como la *pendiente* o la *ordenada en el origen*, las dejo para el tema de funciones. Se les dará la expresión analítica del polinomio y los alumnos la introducirán en el programa considerado para visualizar su gráfica. Obtendremos algo del tipo:



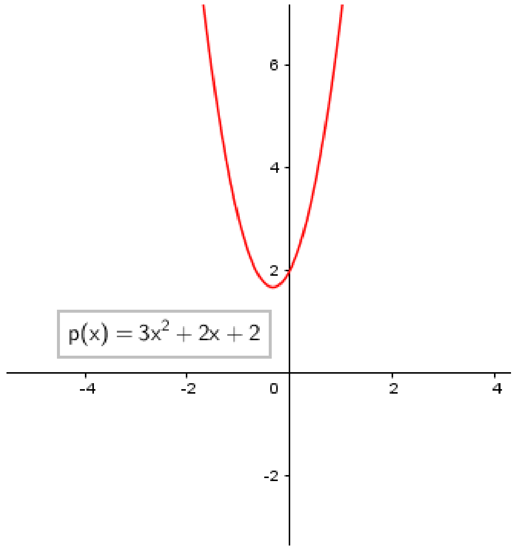



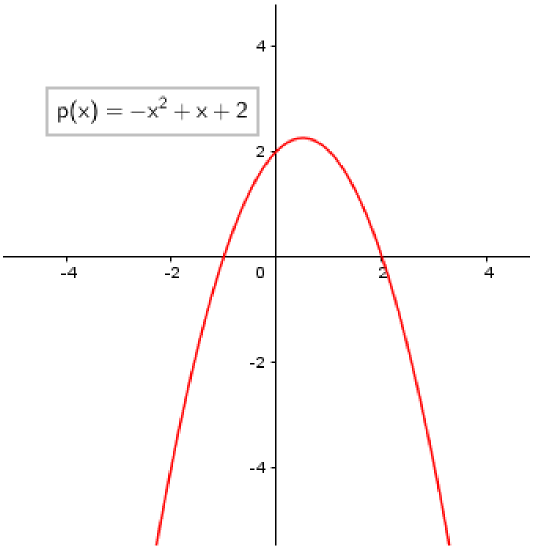

Pasemos a representar alguna de las parábolas con las que han trabajado en clase, concretamente haremos las gráficas de las parábolas correspondientes a las ecuaciones del primer ejercicio de ecuaciones de segundo grado que resolvieron.



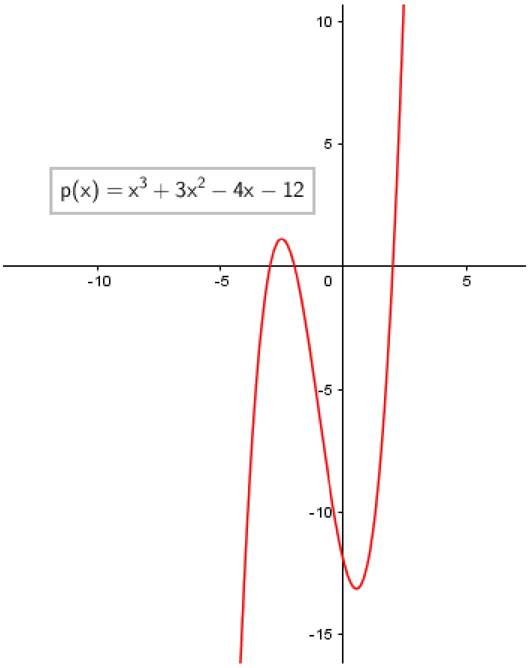



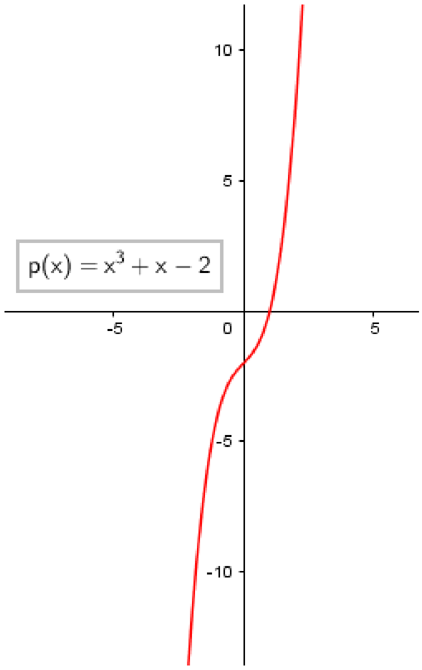

Deben observar cuidadosamente que las escalas de los ejes no coinciden en las distintas representaciones gráficas. Asimismo, tienen que visualizar ahora gráficamente, las raíces que previamente han calculado analíticamente. Tenemos un ejemplo de una parábola con dos raíces reales y distintas, otro de una con una única raíz real doble, vamos a completar con una parábola sin raíces reales y otra que no ha sido trabajada previamente pero que tenga máximo; es importante que reconozcan que las parábolas pueden *mirar* para arriba y para abajo.



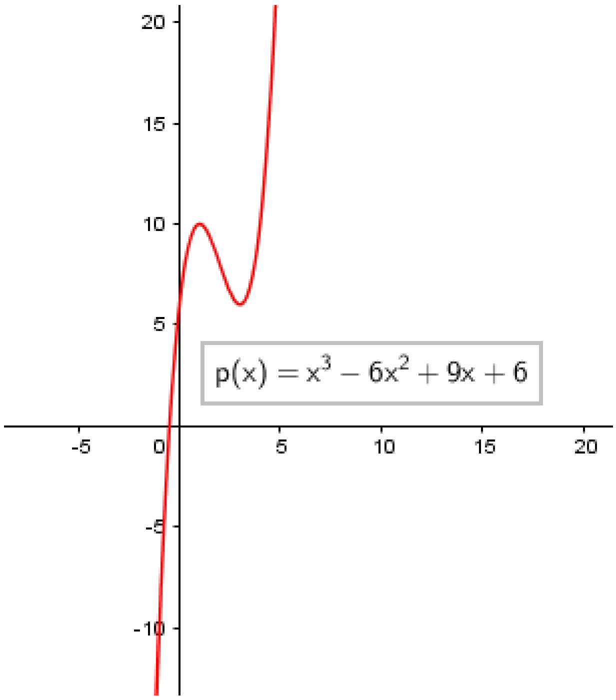




Pasemos ahora a las *cúbicas*, lo primero será que reconozcan el nombre de estas nuevas curvas: *cúbica*. Haremos la representación de una que tenga las tres raíces reales y distintas y otra que sólo posea una raíz real. La primera ha sido trabajada previamente de forma analítica pero no la segunda, será aconsejable que posteriormente realicen su estudio analítico.

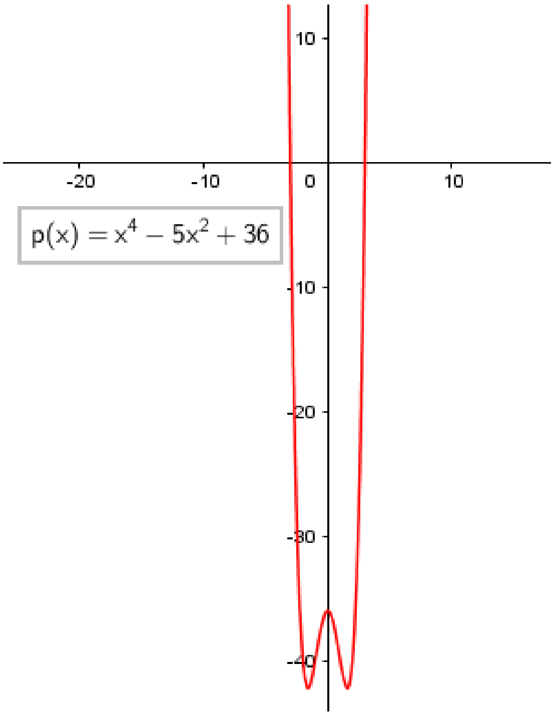


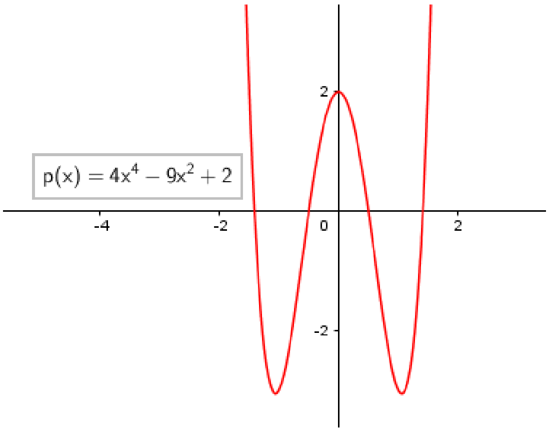




Han de observar que la segunda cúbica está suficientemente *estirada* como para que no forme ni un máximo ni un mínimo, aunque ésta no es condición necesaria para que sólo tenga una raíz como puede observarse en el siguiente ejemplo (tampoco se trabajó analíticamente).




Vamos ahora con los polinomios de grado cuatro, primero uno que tiene sólo dos raíces reales y otro con cuatro raíces y que estudiaron con las ecuaciones bicuadradas.




El número de oscilaciones es, a lo sumo, una unidad menor que el grado.

## 2) Cuarto de Educación Secundaria Obligatoria

Una de las características que pienso que es contraproducente y que poseen los currículos actuales de Educación Secundaria y Bachiller, es el carácter repetitivo de algunos temas a lo largo de los cursos. Un ejemplo es el cálculo de dominios de funciones. Se calcula el dominio de una función en cuarto de la E.S.O. (en Enseñanzas Académicas y Aplicadas), en primero de Bachiller y en segundo de Bachiller (independientemente de la modalidad que se curse), abordando los tres casos clásicos de funciones en cuyas expresiones analíticas aparezcan denominadores, raíces de índice par y logaritmos. La repetición de la materia no garantiza que los alumnos la aprendan mejor, ni siquiera que se aprenda. Es más, soy testigo de que al llegar a segundo de Bachiller, los chicos no entienden porque si aparece un denominador tienen que hacer una ecuación y si aparece una raíz, una inecuación. Conocen las mecánicas pero no sus motivaciones. Otro ejemplo es la resolución de ecuaciones y la factorización de polinomios que nos ocupa.

En vistas de que repetir hasta la saciedad las ideas no garantiza su mejor aprendizaje (ni siquiera su aprendizaje), proponemos avanzar y profundizar en la materia. Tampoco garantizaremos la comprensión de la materia, pero reivindicamos la filosofía del currículo en espiral para que, mostrando otros puntos de vista acerca de ideas ya tratadas, facilitemos el entendimiento de la materia ya explicada y las nuevas ideas que se incorporen. Los estándares de aprendizaje oficiales respaldan y habilitan la materia que vamos a proponer puesto que sugieren otros métodos para la resolución de ecuaciones **[8]**:

3.2. *Obtiene las raíces de un polinomio y lo factoriza utilizando la regla de Ruffini u otro método más adecuado.*

Si bien es cierto que lo anterior sólo está recogido en los estándares de aprendizaje correspondientes a las Enseñanzas Académicas, y en ellas nos vamos a centrar, las ideas que vamos a exponer tendrían cabida perfectamente en las Enseñanzas Aplicadas.

Me parece que ha quedado perfectamente justificado que sólo reservemos dos o tres periodos lectivos para recordar y repasar los contenidos que se estudiaron en el curso anterior y que se recogieron en la Primera Parte de este trabajo. A partir de ahora desarrollaremos nuevas ideas acerca de la resolución de ecuaciones y la búsqueda de raíces de polinomios.

### 2.1 Fórmulas de Cardano-Viéte

En el curso pasado entendieron que existe una relación entre las raíces de un polinomio y los coeficientes del mismo (gracias a la descomposición en factores que provocan dichas raíces) cuando tenemos un polinomio mónico de grado dos:

$$p(x) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 \quad \text{siendo } r_1 \text{ y } r_2 \text{ las raíces del polinomio}$$

Vamos a generalizar estas fórmulas para polinomios de grado $n$. Comencemos con un polinomio mónico de grado tres.

Sea un polinomio mónico de grado tres: $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$ y supngamos que sus raíces son: $r_1, r_2$ y $r_3$.

$$\begin{aligned} x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o &= (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = (x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2)(x - r_3) = \\ &= x^3 - r_3x^2 - (r_1 + r_2)x^2 + (r_1 + r_2)xr_3 + r_1r_2x - r_1r_2r_3 = \\ &= x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \{\text{Igualando coeficientes}\} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -(r_1 + r_2 + r_3) \\ a_1 = r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 \\ a_o = -r_1r_2r_3 \end{cases}$$

En general, pueden intuirse ya las dos relaciones siguientes para polinomios mónicos de grado $n$:

Sea un polinomio mónico de grado $n$: $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ se verifican:

$$\begin{cases} a_{n-1} = -(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) = -\sum_{i=1}^{n} r_i \\ a_0 = (-1)^n r_1r_2 \cdots r_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} r_i \end{cases}$$

Las expresiones con el sumatorio y el productorio tal vez sean excesivas para el nivel de secundaria pero pueden incluirse y dependiendo de la reacción de los alumnos, decidir si eliminarlas o dejarlas. Será necesario explicar o recordar los valores que toma el factor $(-1)^n$ que aparece en la segunda igualdad, aunque se supone que es perfectamente comprensible porque las sucesiones se conocen desde el curso de tercero **[8]**.

El profesor valorará si es conveniente o contraproducente incluir el resto de fórmulas para el caso general de grado $n$ que expongo a continuación (las intermedias):

$$\begin{cases} a_{n-1} = -(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) = -\sum_{i=1}^{n} r_i \\ a_{n-2} = \sum_{1 \le i < j \le n} r_ir_j \\ \quad\vdots \\ a_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} r_{i_1}r_{i_2} \cdots r_{i_k} \\ \quad\vdots \\ a_0 = (-1)^n r_1r_2 \cdots r_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} r_i \end{cases}$$

Los alumnos deben reconocer que existe una relación íntima entre las raíces de un polinomio y sus coeficientes.

## 2.2 La Ecuación Cúbica. Fórmula de Tartaglia-Cardano

Me gustaría comenzar con un poco de historia. No es éste el tipo de historia con la que aconsejo acompañar a la materia en el aula, ésa creo que debe ser una historia salpicada de anécdotas y vivencias de los matemáticos involucrados en los descubrimientos que se exponen. Por ejemplo, en este contexto a los chicos les contaría que Tartaglia es un mote que significa *tartaja* o *tartamudo*, que su verdadero nombre era Niccolo Fontana, que se pelearon Cardano y Tartaglia por la publicación de la fórmula que se les va a explicar, etc. Cuestiones menores que humanicen las Matemáticas y acerquen a los protagonistas de su evolución a lo largo de la Historia.

Vamos a encontrar las soluciones de la ecuación cúbica tal como procedieron Scipione del Ferro y Niccolo Fontana (Tartaglia). Dicho método fue publicado por el médico, filósofo y matemático Gerolamo Cardano en su obra *Ars Magna* en 1545 cuyo título completo es *Artis Magnae sive de regulis algebraicis*. Incluyo su título completo porque me interesa su traducción: *Del Gran Arte, o de las reglas algebraicas*. Este tratado que recoge la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado (la resolución de éstas últimas se debe a Ludovico de Ferrari, discípulo y protegido de Cardano) constituye un hito en la Historia de las Matemáticas y, en particular, de la Historia del Álgebra porque por primera vez se aborda el estudio de ecuaciones de grado superior a dos (que ya habían preocupado desde la época clásica) y se convierte en un intento de aglutinar el conocimiento completo de las técnicas algebraicas descubiertas hasta el momento. Cardano creía que el problema de las ecuaciones concluía ahí, puesto que las ecuaciones de grado uno tratan de la longitud, las de grado dos de la superficie y las cúbicas de los cuerpos (o volúmenes) y la Naturaleza no te puede plantear problemas en mayor número de dimensiones. En sus propias palabras:

> *… que en cuanto el hombre haya llegado a conocer todos los capítulos hasta el relativo al cubo (…) tendrá cuanto basta para cualquier caso algebraico, porque hasta el cubo se encuentra la gradación de la Naturaleza: de hecho hay líneas, superficies y cuerpos. Y las líneas corresponden a la incógnita lineal, las superficies a los cuadrados y los cuerpos a los cubos. Por tanto, si sobre éstos hemos dado noticias suficientes, se conocerá todo lo que es necesario. En realidad todo lo que añadiremos más allá* [aquí se refiere a las ecuaciones de grado cuatro]*, será por entretenimiento y no por el fruto que pueda obtenerse de tal estudio. Tales capítulos sucesivos no existen verdaderamente de por sí, sino por accidente, si bien existen* [fórmulas] *generales*.
> (Martín Casalderrey, F., 2000, p. 135) **[10]**

Bajo el punto de vista del Álgebra y la resolución de ecuaciones polinómicas, la obra de Cardano supone un punto de inflexión, puesto que recoge todo el progreso desde la época clásica hasta el Renacimiento y señala el camino que habrá que tomar hasta llegar a los descubrimientos de Evariste Galois en el siglo XIX. Sin embargo, los cuatro matemáticos italianos nombrados anteriormente todavía no usan el cálculo simbólico que voy a utilizar yo más adelante. Todavía están sumergidos en el Álgebra Retórica donde se explican los razonamientos y operaciones con palabras. No en vano, Tartaglia recoge como regla mnemotécnica los pasos para resolver las ecuaciones cúbicas del tipo:

$$x^3 + px = q$$
$$x^3 = px + q$$
$$x^3 + q = px$$

en verso, con siete tercetos y un cuarteto. Como puede observarse, las tres situaciones anteriores eran consideradas distintas modalidades de lo que para nosotros hoy es el mismo tipo de ecuación, porque no concebían la posibilidad de que las cantidades que acompañan a la *cosa* (la incógnita $x$) o el número ($q$) fueran negativas. Evidentemente yo expondré el método más general y quiero ilustrar su deducción.

El proceso para obtener las soluciones de la ecuación de tercer grado lo dividiré en dos fases. La primera fue la que ideó Cardano para convertir cualquier ecuación cúbica en otra equivalente que carezca del término en $x^2$; a este tipo de ecuaciones las denominaré *ecuaciones tipo Bombelli* (*). La segunda fase consiste en la obtención de las soluciones de la ecuación tipo *Bombelli*: $x^3 + px + q = 0$, que consiguieron de forma independiente Scipione del Ferro (primeramente, pero no sacó a la luz sus resultados) y, posteriormente, Tartaglia.

Fase I.- Cómo pasar de una ecuación cúbica general $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a una del tipo *Bombelli*: $x^3 + px + q = 0$.

Cardano, inspirado en un cambio de variable que permite deducir la expresión (*1) de forma distinta a como lo hice en la Parte Primera de este trabajo, efectúa otro cambio de variable para eliminar el término en $x^2$. El cambio es:

$$\boxed{x = y - \frac{b}{3a}}$$

Veamos que ocurre:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow \left\{x = y - \frac{b}{3a}\right\} \Leftrightarrow a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\left(y^3 - \frac{b}{a}y^2 + \frac{b^2}{3a^2}y - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(y^2 - \frac{2b}{3a}y + \frac{b^2}{9a^2}\right) + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ay^3 - by^2 + \frac{b^2}{3a}y - \frac{b^3}{27a^2} + by^2 - \frac{2b^2}{3a}y + \frac{b^3}{9a^2} + cy - \frac{bc}{3a} + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ay^3 - \frac{b^2}{3a}y + cy - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0 \Leftrightarrow ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^2} = 0$$

(*) Rafael Bombelli, ingeniero italiano coetáneo de Cardano y Tartaglia aportó una demostración en su obra *Álgebra* de 1572 independiente de la de Tartaglia-Cardano construible con Geogebra y que no precisa acudir a interpretaciones de volúmenes para $x^3$.

Como vemos, hemos eliminado el término en el cuadrado. Si dividimos por *a* en la última expresión (cosa que siempre se puede hacer porque *a* necesariamente debe ser distinto de cero; si no fuera así, no habría ecuación cúbica) llegamos a una *ecuación tipo Bombelli* que vamos a denotar: $x^3 + px + q = 0$ (volvemos a llamar a las incógnitas $x$ en lugar de $y$). Está claro que si procediéramos desde un principio y realizáramos todo el proceso no podríamos utilizar la misma letra para la ecuación original y la que vamos a resolver ahora.

Fase II.- Cómo resolver una ecuación tipo *Bombelli*: $x^3 + px + q = 0$.

Supongamos que tenemos una ecuación del tipo $x^3 + px + q = 0$, haremos otro cambio de variable: $x = u + v$, que nos permitirá obtener una expresión para las soluciones de la ecuación.

$$x^3 + px + q = 0 \Leftrightarrow \{x = u + v\} \Leftrightarrow (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + u(3uv + p) + v(3uv + p) + q = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0$$

Impongamos: $3uv + p = 0$. Tenemos:

$$3uv + p = 0 \Leftrightarrow uv = -\frac{p}{3} \Leftrightarrow (uv)^3 = -\frac{p^3}{27} \Leftrightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$
$$\text{Y además, teníamos:}\, u^3 + v^3 + (u+v).0 + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 = -q$$
$$\text{Es decir,} \quad \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

Observar que tenemos dos números $u^3$ y $v^3$ cuya suma y producto son conocidos. Gracias a las *Fórmulas de Cardano-Viéte*, podemos construir la ecuación de segundo grado (usaré la indeterminada $X$) para obtener $u^3$ y $v^3$:

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0 \Rightarrow X = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{-q \pm \sqrt{\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X = \frac{-q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{27}} \Rightarrow \begin{cases} u^3 = \dfrac{-q}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}} \\ v^3 = \dfrac{-q}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}} \end{cases}$$

Los papeles de $u$ y $v$ son intercambiables, puesto que $x$ es la suma de ellas. Ahora sólo falta realizar las raíces cúbicas para tener $u$ y $v$, y sumarlas para conseguir $x$. Veamos:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27q^2+4p^3}{27}}} \\ v=\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27q^2+4p^3}{27}}} \end{array}\right\} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27q^2+4p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\dfrac{-q}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{27q^2+4p^3}{27}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\text{Introducimos el factor } \frac{1}{2} \text{ dentro de las raíces cuadradas}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{4.27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{27q^2+4p^3}{4.27}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Finalmente, vamos a escribirlo en la forma más conocida que identificaremos por (*2):

$$\boxed{x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

□

Tartaglia y Cardano fueron capaces de razonar cómo conseguir convertir una ecuación cúbica en una ecuación cuadrática, aunque para ello tuvieran que introducir una nueva variable. Uno podría suponer que esta forma de proceder puede extrapolarse a cualquier grado de la ecuación polinómica que se presente. Si fuera así, dada una ecuación de grado *n*, tras un número finito de cambios de variable e introduciendo el número de variables que fuera necesario, podríamos convertirla en una ecuación de grado dos. Nada más alejado de la realidad.

Joseph Louis Lagrange, originalmente se llamaba Giuseppe Ludovico Lagrangia pero por lo que fuera afrancesó su nombre, así que, en realidad, no nos desmarcamos del Norte de Italia porque Lagrange era de Turín, Tartaglia vivió en Venecia, Scipione del Ferro, Cardano y Ludovico de Ferrari eran de Bolonia y Bombelli de Borgo Panigale (a cinco kilómetros al noroeste de Bolonia); decía que en una memoria titulada *Reflexions sur la Resolution Algebraique des Equations* o *Reflexiones sobre la resolución algebraica de las ecuaciones* publicada en 1771, Lagrange demostró que para una ecuación polinómica de grado *n* puede encontrarse una resolvente de grado (*n* – 1)! Lo que consiguieron Tartaglia y Cardano fue, para la ecuación de grado 3, encontrar una resolvente de grado (3 – 1)! = 2! = 2.1 = 2. Bien, para la ecuación de grado 4, la resolvente que predice Lagrange sería de grado (4 – 1)! = 3! = 3.2.1 = 6 (peor que el problema original); ocurre que Ferrari consiguió convertir, de forma excepcional, la ecuación de grado 4 en una cúbica y así se puede encontrar una expresión de sus soluciones por radicales. No obstante, insisto en que ésta es una situación excepcional, porque, como estableció Étienne Bézout (ahora sí que nos desplazamos a Francia), la excepción se produce porque 4 = $2^2$ y por ser esta su descomposición en factores primos, se produce una circunstancia afortunada y feliz. Sin embargo, para la ecuación de grado cinco, la resolvente sería de grado (5 – 1)! = 4! = 24 (Y ahora me gustaría incluir un "!" realmente exclamativo). O sea, los caminos abiertos por Tartaglia, Cardano y Ferrari, tenían el recorrido que tenían y tienen.

Paolo Ruffini (de Valentano, un poco más sureño que sus otros compatriotas protagonistas de esta historia) trató de probar que las ecuaciones de grado superior a cuatro no son resolubles por radicales de forma general. Pero no puede darse por buena su demostración. Niels Henrik Abel (de Findö, Noruega) sí consiguió demostrarlo correctamente en 1824. Y finalmente, sabemos que tuvimos que esperar hasta que Evariste Galois (de Bourg-la Reine, Francia), creó en el primer cuarto del siglo XIX la teoría que lleva su nombre y encuentra una condición necesaria y suficiente para que una ecuación polinómica de grado mayor o igual que cinco sea resoluble por radicales. Para ello asocia un grupo a cada polinomio, el *grupo de Galois*, y si es un grupo resoluble lo será también la ecuación asociada al polinomio. Cabe señalar que aunque hablemos de grupos, la estructura básica que sustenta la *Teoría de Galois* son los cuerpos y sus extensiones.

La resolución de cuarto grado por radicales no voy a incluirla en este trabajo y los razonamientos matemáticos desarrollados anteriormente no creo que sea necesario incluirlos en las explicaciones de un aula de 4º E.S.O., aunque no entrañan demasiada dificultad. Son perfectamente desarrollables en Bachiller y no estaría mal completar la historia de las ecuaciones en Bachiller en cualquiera de sus modalidades. Ahora me parece muy razonable que conozcan la fórmula (*2), que la anoten y que se realicen algunos ejercicios como los que propongo a continuación. También me parece que, aunque no se entre en demasiados detalles, es imprescindible que sepan que la ecuación de cuarto grado también se puede resolver *con una fórmula* y que *no existen fórmulas* para las de grado mayor o igual que cinco. Es cuestión de cultura general.

1) Resolver las siguientes ecuaciones cúbicas, encontrando la primera solución utilizando la Fórmula de Tartaglia-Cardano:

Solución:

a) $x^3-3x+2=0$ Observar que : $p=-3$ y $q=2$

Recordemos que : $x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

En nuestro caso : $x=\sqrt[3]{\frac{-2}{2}+\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{-2}{2}-\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{3}\right)^3}}\Leftrightarrow$

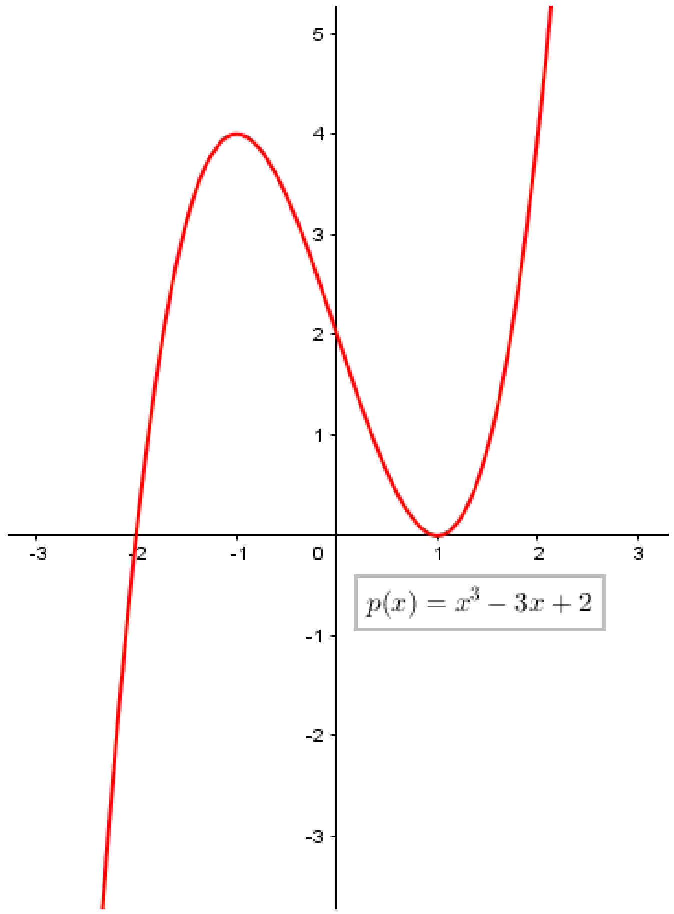
$\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-1+\sqrt{1-1}}+\sqrt[3]{-1-\sqrt{1-1}}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-1+0}+\sqrt[3]{-1-0}\Leftrightarrow \underline{x=-2}$

De esta forma tenemos una de las soluciones, hacemos Ruffini, para efectuar la división y pasar a la ecuación de segundo grado.

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2\\ -2 & \downarrow & -2 & 4 & -2\\ \hline & 1 & -2 & 1 & |\ \underline{\underline{0}} \end{array}\right\}\Rightarrow x^3-3x+2=(x+2)(x^2-2x+1)=(x+2)(x-1)^2$$

<u>Las soluciones son $-2$ (simple) y 1 (doble).</u>

Como los alumnos ya conocen Geogebra, me parece esencial que representen los polinomios que definen las ecuaciones que van resolviendo para que visualicen geométricamente las soluciones que encuentran con las fórmulas. Veámoslo:




b) $2x^3 - x + 2 = 0$ No está escrita en la forma deseada, debemos dividir por 2 :

$x^3 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$ Luego $p = -\frac{1}{2}$ y $q = 1$

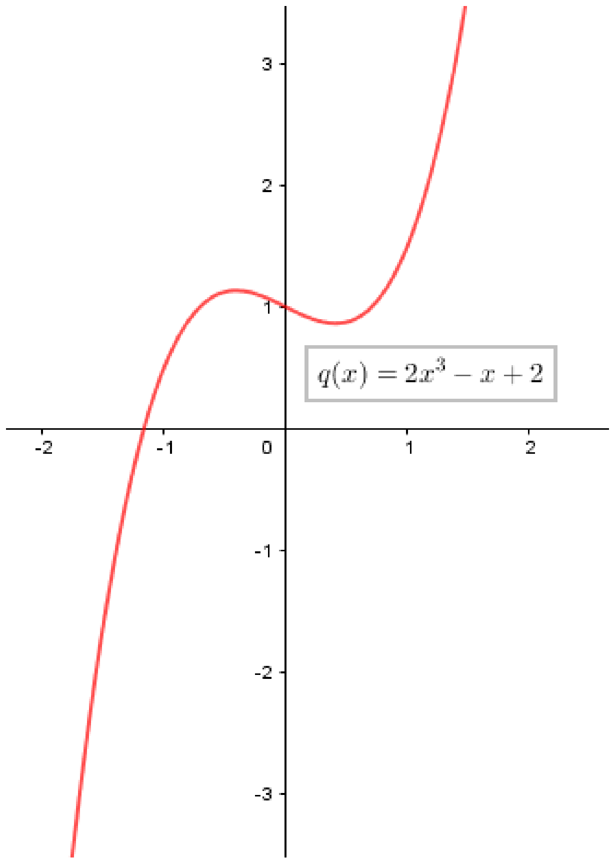
$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$ ; en nuestro caso :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1/2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1/2}{3}\right)^3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{216}}} + \sqrt[3]{\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{216}}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{53}{216}}} + \sqrt[3]{\frac{-1}{2} - \sqrt{\frac{53}{216}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \approx -0'1669 - 0'9984 = -1'1653$$

Podría tener otras dos raíces reales pero vamos a representar el polinomio que determina la ecuación para ver que no es así y que sólo tiene una raíz real.




También se les podría mostrar un *Ruffini aproximado* para que observaran que el polinomio cociente es irreducible:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1'1653 & \downarrow & -2'3306 & 2'7158 & -1'9995 \\ \hline & 2 & -2'3306 & 1'7158 & |\ \underline{\underline{0'0005}} \end{array}$$

$$2x^2 - 2'3306x + 1'7158 = 0 \Rightarrow x = \frac{2'3306 \pm \sqrt{5'4317 - 13'7264}}{4} \notin \mathbb{R}$$

Por último, me gustaría añadir un apartado que contenga una ecuación de tercer grado completa para realizar las dos fases de Cardano y Tartaglia. Primero el cambio de variable que encontró Cardano y, posteriormente utilizar la expresión de Tartaglia.

c) $x^3 + 6x^2 + 20x - 100 = 0$

Fase I.- Hagamos el cambio de variable apropiado para convertirla en una del tipo de Bombelli.

$$x^3 + 6x^2 + 20x - 100 = 0 \Leftrightarrow \left\{ y = x - \frac{b}{3a} : y = x - \frac{6}{3.1} \Leftrightarrow y = x - 2 \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^3 + 6(y-2)^2 + 20(y-2) - 100 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6y^2 - 24y + 24 + 20y - 40 - 100 = 0 \Leftrightarrow y^3 + 8y - 124 = 0$$

Fase II.- Usamos ahora la expresión de Tartaglia para la ecuación:

$$y^3+8y-124=0;\ \ p=8\ \text{ y }\ q=-124$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}:$$

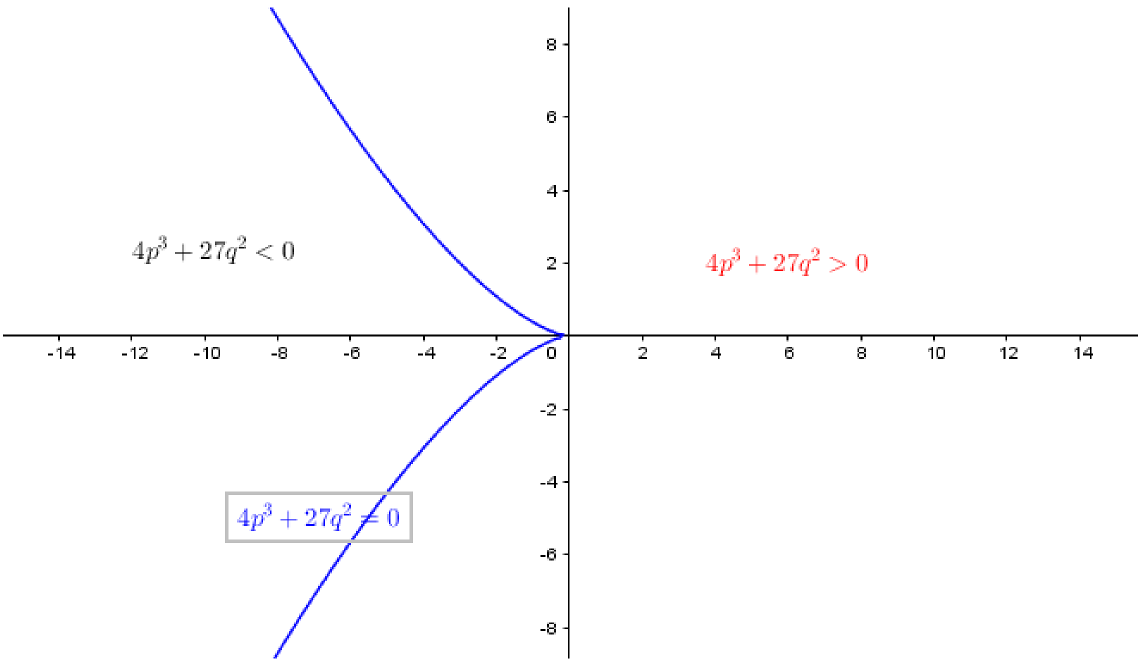
$$y=\sqrt[3]{\frac{124}{2}+\sqrt{\left(\frac{-124}{2}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{124}{2}-\sqrt{\left(\frac{-124}{2}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^3}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\sqrt[3]{62+\sqrt{3844+\frac{512}{27}}}+\sqrt[3]{62-\sqrt{3844+\frac{512}{27}}}\Leftrightarrow y\approx 4'9887-0'5345\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\approx 4'4542$$

Observar que aparecen dos raíces cuadradas en la expresión de la *Fórmula de Tartaglia-Cardano* en el radicando de las raíces cúbicas. Si la cantidad en el interior de esas raíces cuadradas fuese negativa, aparecerían números complejos cuya raíz cúbica tendría que ser calculada y, en ese caso, podrían reaparecer valores reales. Esas ecuaciones no se pueden resolver en 4º E.S.O y habrá que esperar hasta los cursos de Bachiller para poder resolverlas.

Notar también que el discriminante de dichos radicales es: $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$. Sería interesante averiguar qué zona del plano ($p$,$q$) dicho valor es positivo. Véase:



## 2.3 Método de Sturm

Vamos a estudiar el *Método de Sturm* para contar y separar las raíces de un polinomio. De esta forma proporcionaremos a los alumnos de secundaria una mecánica que les permita averiguar cuál es el número de raíces reales que posee un polinomio y además que sean capaces de separarlas, esto es, determinar intervalos de números reales en los que se localice una, y sólo una, raíz del polinomio.

Como se propone en el enunciado del presente trabajo, el libro de referencia para esta parte será el *Benedetti, R. & Risler, J.J.* **[2]**. En él encontramos la siguiente definición:

*Definición*.- Dado un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y un intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, diremos que un conjunto finito de polinomios $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_s(x) \in \mathbb{R}[x]$es una *sucesión de Sturm* para $p(x)$ si y sólo si se cumple:

*i)* $p_0(x) = p(x)$

*ii)* $p_s(x)$ no posee raíces reales en $[a,b]$

*iii)* si $0 < i < s$ y si $\alpha \in [a,b]$ es tal que $p_i(\alpha) = 0$, entonces $p_{i-1}(\alpha).p_{i+1}(\alpha) < 0$

*iv)* si $\alpha \in [a,b]$ es tal que $p_0(\alpha) = 0$, existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que: $(p_0p_1)(\alpha - \varepsilon) < 0$ y $(p_0p_1)(\alpha + \varepsilon) > 0$ (i.e. la función $p_0p_1$ es creciente en $\alpha$)

Esta definición, quizá no sea necesario darla en el aula tal cual; la escribo para seguir los pasos del *Benedetti, R. & Risler, J.J.*, pero es muy probable que sea más eficaz mostrarles la mecánica para la generación de una *sucesión de Sturm*, que detenerse en estas definiciones tan rigurosas.

Observaciones (a la definición):

I) La condición *iii)* garantiza que polinomios consecutivos de la sucesión, no tienen raíces comunes en $[a,b]$.

II) Si un polinomio de la sucesión se anula en $\alpha$, el anterior y posterior cambian de signo en $\alpha$ por *iii)*.

III) La condición *iv)* garantiza que $p_0p_1$ cambia de sino de menos (–) a más (+) cuando las $x$'s crecen y superan a $\alpha$ (raíz de $p(x)$).

IV) La condición *iv)* se cumple si $p_1(x) = p_0'(x) = p'(x)$ o si $p_1(\alpha).\ p'(\alpha) > 0$, para cualquier raíz $\alpha \in [a,b]$.

Por otro lado, denotaremos por $w$ al número de cambios de signo o *variación* en una sucesión de números reales cualquiera; en particular, si tenemos una *sucesión de Sturm* $p_0, p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{R}[x]$, para $p(x)$ en $[a,b]$ y $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $w(x)$ a la variación de $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_s(x)$.

*Proposición*.- «En las condiciones anteriores, $w(a) - w(b)$ coincide con el número de raíces reales $\alpha$ de $p(x)$ en $(a,b]$».

Demostración.- Sea $\alpha \in [a,b]$, pueden ocurrir dos cosas:

- Si $p_i(\alpha) \neq 0, \forall i \in \{0,1,\ldots,s\}$, entonces $w(x)$ es constante en un entorno de $\alpha$.

• $p_0(\alpha) \neq 0, \exists i \in \{1,\dots,s\}$ tal que $p_i(\alpha)=0$, entonces $w(x)$ es otra vez constante en un entorno de $\alpha$ para todo $i<s$ por *ii*) y por *iii*), $p_{i-1}(x)p_{i+1}(x)<0$; por tanto, gracias a *iv*) para cierto $\varepsilon>0$, tendremos una tabla de signos:

| | $p_{i-1}(x)$ | $p_i(x)$ | $p_{i+1}(x)$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha-\varepsilon<x<\alpha$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $\alpha<x<\alpha+\varepsilon$ | $-$ | $-$ | $+$ |

Y la variación de la sucesión total: $p_0(x), p_1(x),\dots,p_s(x)$ es la misma cuando $x$ *atraviesa* $\alpha$.

• $p_0(\alpha)=0$, tendremos por *iv*), una de las dos posibilidades siguientes para cierto $\varepsilon>0$:

| | $p_0(x)$ | $p_1(x)$ | | $p_0(x)$ | $p_1(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha-\varepsilon<x<\alpha$ | $-$ | $+$ | ó | $+$ | $-$ |
| $\alpha<x<\alpha+\varepsilon$ | $+$ | $+$ | | $-$ | $-$ |

En cualquier caso, $w(x)$ disminuye en una unidad cuando $x$ atraviesa $\alpha$ siempre que $\alpha \in (a,b]$ y es localmente constante en $\alpha$ si $\alpha=a$. De hecho, para cada $\alpha$ en $[a,b]$, se tiene que, para un $\varepsilon>0$ $w(\alpha)=w(\alpha+\varepsilon)$.

□

Consecuentemente, se explicará a los alumnos la siguiente forma de construir una *sucesión de Sturm* asociada a un polinomio *p*(*x*). En este curso de 4º E.S.O. los chavales no tienen porqué saber derivar… ¡no importa! Para eso estamos aquí. Les definiremos el derivado de un polinomio anticipándoles algunas reglas básicas de derivación pero sin necesidad de entrar en cuestiones teóricas sobre derivadas.

*Definición*.- Dado un polinomio *p*(*x*) ϵ $\mathbb{R}[x]$, llamaremos *polinomio derivado* de *p*(*x*) y lo denotaremos *p´*(*x*) a:

$$\boxed{\begin{array}{l} p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow p´(x)=a_n n x^{n-1}+a_{n-1}(n-1)x^{n-2}+a_{n-2}(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_3 3x^2+a_2 2x+a_1 \end{array}}$$

Y ahora se hacen unos ejercicios para practicar este concepto de polinomios derivados.

2) Obtener el polinomio derivado de los siguientes que se indican:

Solución:

a) $p(x)=3x^4+5x^3+x^2+7x+14 \Rightarrow p´(x)=3.4x^3+5.3x^2+2x+7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p´(x)=12x^3+15x^2+2x+7$$

b) $q(x)=x^4+2x^3-8x^2-17x+2019 \Rightarrow p´(x)=4x^3+2.3x^2-8.2x-17 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow p´(x)=4x^3+6x^2-16x-17$$

c) $r(x)=-5x^3+4x-10 \Rightarrow r´(x)=-15x^2+4$

d) $s(x)=-x^3+x^2-x+1 \Rightarrow s´(x)=-3x^2+2x-1$

e) $t(x)=\frac{1}{5}x^4-8x^3+\frac{1}{4}x^2-5x+9 \Rightarrow t´(x)=\frac{4}{5}x^3-24x^2+\frac{2}{4}x-5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t´(x)=\frac{4}{5}x^3-24x^2+\frac{1}{2}x-5$$

Una vez practicado el cálculo de los polinomios derivados definimos la *sucesión de Sturm* asociada a un polinomio $p(x)$, cuando $p_1(x) = p'(x)$ y los siguientes términos de la sucesión de Sturm son los opuestos de los restos de las sucesivas divisiones euclídeas:

Nota.- Debemos suponer que el polinomio original no tiene raíces múltiples porque si no, la sucesión construida como se va a explicar a continuación, no tendría por qué cumplir las condiciones impuestas en la definición, concretamente no se podría garantizar que se verificaran ni *iii)* ni *iv)*. En consecuencia, la sucesión no serviría para contar raíces.

Sucesión de Sturm

$$
\boxed{\begin{array}{lcr}
 & & p_0(x) = p(x) \\
 & & p_1(x) = p'(x) \\
p_0(x) = p_1(x)q_1(x) + r_1(x) & \Rightarrow & p_2(x) = -r_1(x) \\
p_1(x) = p_2(x)q_2(x) + r_2(x) & \Rightarrow & p_3(x) = -r_2(x) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\
p_{s-3}(x) = p_{s-2}(x)q_{s-2}(x) + r_{s-2}(x) & \Rightarrow & p_{s-1}(x) = -r_{s-2}(x) \\
p_{s-2}(x) = p_{s-1}(x)q_{s-1}(x) + r_{s-1}(x) & \Rightarrow & p_s(x) = -r_{s-1}(x)
\end{array}}
$$

La sucesión anterior es finita porque, por el *Algoritmo de Euclides*, sabemos que el grado del resto en cada una de las divisiones euclídeas es inferior al grado del divisor. Esto significa que el grado de los polinomios de la sucesión construida decrece en, al menos, una unidad en cada paso. Como partimos de un polinomio de grado $n$ (finito), habrá un momento en que el resto de la división es un polinomio de grado cero (una constante), que además será no nulo porque coincidirá con el los polinomios de los que partimos $p_0(x) = p(x)$ y $p_1(x) = p'(x)$ no tienen ningún factor común puesto que el polinomio original estamos dando por supuesto que no tiene raíces múltiples.

Es imprescindible mostrar la construcción de la sucesión anterior con un ejemplo.

Ejemplo.- Construir la sucesión de Sturm para el polinomio $p(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

$p_0(x) = p(x) = x^3 + 3x^2 - 1$
$p_1(x) = p'(x) = 3x^2 + 6x$

$$
\left.\begin{array}{rrr|l}
x^3 & +3x^2 & -1 & 3x^2 + 6x \\ \cline{4-4}
-x^3 & -2x^2 & & \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ \cline{1-2}
 & x^2 & -1 & \\
 & -x^2 & -2x & \\ \cline{2-3}
 & & -2x - 1 & \\
\end{array}\right\} \Rightarrow r_1(x) = -2x - 1 \Rightarrow p_2(x) = -r_1(x) = 2x + 1
$$

$p_2(x) = 2x + 1$

$$\left.\begin{array}{ll} 3x^2 + 6x & \underline{|\,2x+1\quad} \\ \underline{-3x^2 - \frac{3}{2}x} & \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \\ \quad \frac{9}{2}x & \\ \quad \underline{-\frac{9}{2}x - \frac{9}{4}} & \\ \qquad \underline{\underline{-\frac{9}{4}}} & \end{array}\right\} \Rightarrow r_2(x) = -\frac{9}{4} \Rightarrow p_3(x) = -r_2(x) = \frac{9}{4}$$

$p_3(x) = \frac{9}{4}$

Y aquí finaliza la construcción de nuestra sucesión de Sturm, luego, en este caso $s$ = 3 y, obsérvese que, efectivamente $p_s(x) = p_3(x)$ no se anula nunca. Podríamos evitar operar con números racionales porque cualquier término de la sucesión es susceptible de ser multiplicado por cualquier número real positivo: las raíces de $p(x)$ y de $k.p(x)$ son las mismas sea quién sea el número real $k$, pero ¡ojo! Como posteriormente contaremos variaciones de signo, es trascendental que este factor sea positivo. De esta forma la última división podía transformarse en esta otra mucho más cómoda:

$$\left.\begin{array}{ll} 6x^2 + 12x & \underline{|\,2x+1\quad} \\ \underline{-6x^2 \;\; -3x} & 3x+9 \\ \qquad 9x & \\ (x2) \quad 18x & \\ \quad \underline{-18x-9} & \\ \qquad \underline{\underline{-9}} & \end{array}\right\} \Rightarrow r_2(x) = -9 \Rightarrow p_3(x) = -r_2(x) = 9$$

Personalmente, aconsejo no hacerlo a no ser que aparezcan cálculos realmente tediosos. En el resto de actividades que proponga y realice en este trabajo no voy a hacerlo.

Una vez que los alumnos conozcan cómo se construye la sucesión de Sturm, enseñémosles cómo se utiliza para contar y separar raíces de polinomios. Recordamos que en el curso anterior (Primera Parte de este trabajo) proporcionamos una cota para las raíces de polinomios de grado tres:

$$M = \sqrt{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 - 2\frac{a_1}{a_3}}$$

Para nuestro polinomio, obtenemos la siguiente cota:

$$M = \sqrt{\left(\frac{3}{1}\right)^2 - 2\frac{0}{1}} = \sqrt{3^2 - 0} = |3| = 3$$

Luego las raíces reales del polinomio anterior se encuentran en el intervalo [-3,3]. Sólo importa lo que ocurre en este intervalo, considerando los valores enteros que tenemos en ese intervalo, hacemos la siguiente tabla:

| | $p_0(x)=x^3+3x^2-1$ | $p_1(x)=3x^2+6x$ | $p_2(x)=2x+1$ | $p_3(x)=9$ | $w(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | $p_0(-3)=-1$ | $p_1(-3)=+9$ | $p_2(-3)=-5$ | $+$ | 3 |
| $-2$ | $p_0(-2)=+3$ | $p_1(-2)=0$ | $p_2(-2)=-3$ | $+$ | 2 |
| $-1$ | $p_0(-1)=+1$ | $p_1(-1)=-3$ | $p_2(-1)=-1$ | $+$ | 2 |
| 0 | $p_0(0)=-1$ | $p_1(0)=0$ | $p_2(0)=+1$ | $+$ | 1 |
| 1 | $p_0(1)=+3$ | $p_1(1)=+9$ | $p_2(1)=+3$ | $+$ | 0 |
| 2 | $p_0(2)=+19$ | $p_1(2)=+24$ | $p_2(2)=+5$ | $+$ | 0 |
| 3 | $p_0(3)=+53$ | $p_1(3)=+45$ | $p_2(3)=+7$ | $+$ | 0 |

La tabla anterior recoge explícitamente todas las expresiones que se están evaluando pero no es necesario ser tan minucioso, realmente sólo interesan los signos de las evaluaciones de los polinomios de la sucesión de Sturm. Así que, a partir de ahora veremos algo de la forma:

| | $p_0(x)$ | $p_1(x)$ | $p_2(x)$ | $p_3(x)$ | $w(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | 3 |
| $-2$ | $+$ | 0 | $-$ | $+$ | 2 |
| $-1$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | 2 |
| 0 | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | 1 |
| 1 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 |
| 2 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 |
| 3 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 |

También las dos últimas filas de la tabla anterior son redundantes: cuando el número de variaciones de signo es nulo, ya se han localizado todas las raíces reales y carece de sentido seguir evaluando los signos de la sucesión en otras *x*´s.

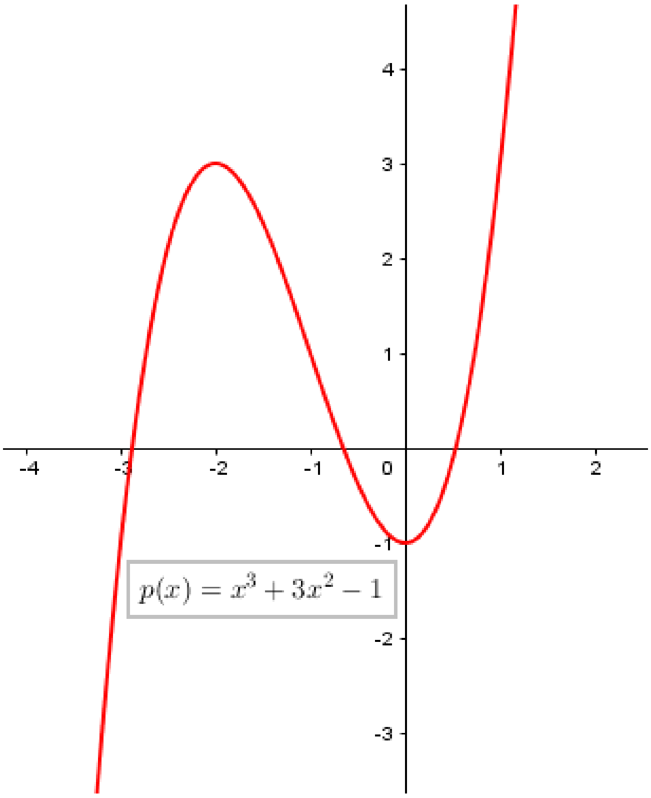
$w(-3) - w(-2) = 1$, el polinomio posee una raíz real en el intervalo [–3,–2].
$w(-1) - w(0) = 1$, el polinomio tiene otra raíz en el intervalo [–1,0].
$w(0) - w(1) = 1$, el polinomio tiene la última raíz en el intervalo [0,1].

Los alumnos deben observar que gracias al *Método de Sturm*, somos capaces de averiguar el número de raíces reales que tiene un polinomio y dónde se encuentran estas raíces. Proponemos la siguiente definición:

*Definición*.- Se llama *separación de las raíces* de un polinomio al procedimiento por el que se proporcionan distintos intervalos de números reales que contienen una, y sólo una, raíz de dicho polinomio.

Por ejemplo, lo que hemos conseguido anteriormente.

Representemos el polinomio anterior con Geogebra para confirmar las conclusiones obtenidas analíticamente.




Sugerimos realizar unos ejercicios como los siguientes cuya resolución adjuntamos.

3) Construir la sucesión de Sturm para los siguientes polinomios, averiguar el número de raíces reales que posee y separarlas en intervalos de amplitud inferior a la unidad. Utilizando el programa Geogebra, representar los polinomios y comprobar los resultados obtenidos.

Solución:

a) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 2$

$p_0(x) = p(x) = x^3 + x^2 + x + 2$

$p_1(x) = p'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$\left.\begin{array}{rl|l} & x^3 \quad + x^2 \quad + x + 2 & 3x^2 + 2x + 1 \\ \cline{3-3} & -x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \\ \cline{2-2} & \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 2 & \\ & -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{1}{9} & \\ \cline{2-2} & \frac{4}{9}x + \frac{17}{9} & \end{array}\right\} \Rightarrow r_1(x) = \frac{4}{9}x + \frac{17}{9} \Rightarrow p_2(x) = -r_1(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_2(x) = -\frac{4}{9} - \frac{17}{9}$$

$$\left.\begin{array}{ll|l} & 3x^2+2x+1 & -\frac{4}{9}x-\frac{17}{9} \\ \cline{3-3} & -3x^2-\frac{51}{4}x & \frac{-27}{4}x+\frac{387}{16} \\ \cline{2-2} & -\frac{43}{4}x+1 & \\ & \frac{43}{4}x+\frac{731}{16} & \\ \cline{2-2} & +\frac{747}{16} & \end{array}\right\} \Rightarrow r_2(x)=+\frac{747}{16} \Rightarrow p_3(x)=-r_2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_3(x)=-\frac{747}{16}$$

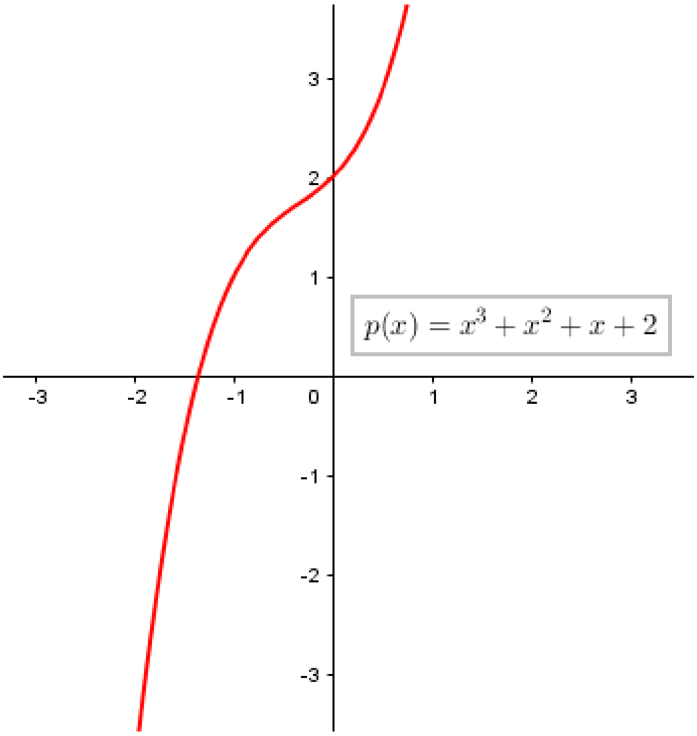
Buscamos una cota para el valor absoluto de las raíces:

$$M=\sqrt{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2-2\frac{a_1}{a_3}};M=\sqrt{\left(\frac{1}{1}\right)^2-2\frac{1}{1}}=\sqrt{1-2}=\sqrt{-1}$$

No tenemos cota para las raíces, pero por la Regla de Descartes, sabemos que no tiene raíces positivas, así que evaluaremos en números enteros negativos.

| | $p_0(x)=x^3+x^2+x+2$ | $p_1(x)=3x^2+2x+1$ | $p_2(x)=-\frac{4}{9}x-\frac{17}{9}$ | $p_3(x)=-\frac{747}{16}$ | $w(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3$ | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ | 2 |
| $-2$ | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ | 2 |
| $-1$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | 1 |
| 0 | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | 1 |

La única raíz pertenece al intervalo [–2,–1]. Comprobémoslo con Geogebra.



b) $p(x)=-6x^3+2x^2+8x+1$

$p_0(x)=p(x)=-6x^3+2x^2+8x+1$

$p_1(x)=p'(x)=-18x^2+4x+8$ vamos a dicidirlo por 2

$p_1(x)=-9x^2+2x+4$

$$\left.\begin{array}{l|l} -6x^3+2x^2+8x+1 & -9x^2+2x+4 \\ \underline{6x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{3}x} & \frac{2}{3}x-\frac{2}{27} \\ \quad\frac{2}{3}x^2+\frac{16}{3}x\ \ +1 & \\ \quad\underline{-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{27}x+\frac{8}{27}} & \\ \qquad\underline{\underline{\frac{148}{27}x+\frac{35}{27}}} & \end{array}\right\}\Rightarrow r_1(x)=\frac{148}{27}x+\frac{35}{27}\Rightarrow p_2(x)=-r_1(x)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow p_2(x)=-\frac{148}{27}x-\frac{35}{27}$, multipliquémoslo por 27:

$p_2(x)=-148x-35$

$$\left.\begin{array}{l|l} -9x^2\quad+2x+4 & -148x-35 \\ \underline{9x^2+\frac{315}{148}x} & \frac{9}{148}x-\frac{611}{148^2} \\ \quad\frac{611}{148}x+4 & \\ \quad\underline{-\frac{611}{148}x-\frac{21385}{148^2}} & \\ \qquad[?>0] & \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{No importa su valor exacto, sólo su signo,}\\ \text{luego a partir de ahora nos quedaremos con}\\ 1\text{ ó }-1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow r_2(x)=1\Rightarrow p_3(x)=-r_2(x)\Leftrightarrow p_3(x)=-1$

Ahora la cota de las raíces:

$M=\sqrt{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2-2\frac{a_1}{a_3}};M=\sqrt{\left(\frac{2}{-6}\right)^2-2\frac{8}{6}}=\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{-23}{9}}$; ¡No tenemos cota! Probemos y confiemos en que las raíces no se alejen mucho del origen.

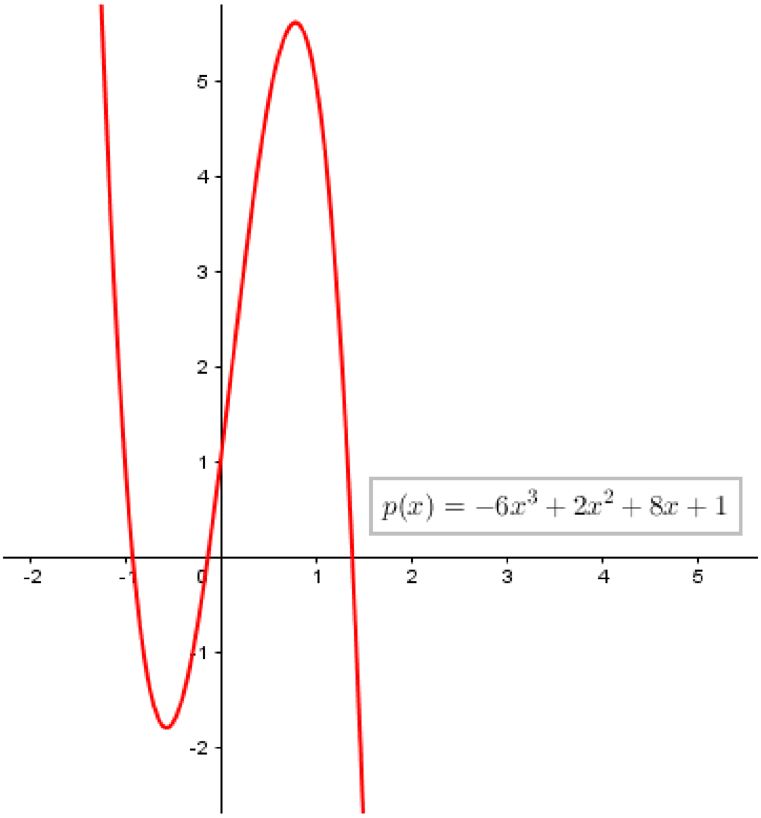
| | $p_0(x)=-6x^3+2x^2+8x+1$ | $p_1(x)=-9x^2+2x+4$ | $p_2(x)=-148x-35$ | $p_3(x)=-1$ | $w(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | 3 |
| $-1$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | 3 |
| 0 | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | 1 |
| 1 | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 |
| 2 | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 |

Tenemos localizadas dos raíces en el intervalo $[-1{,}0]$ y una raíz en el intervalo $[0{,}1]$. Debemos afinar más para separar las dos primeras raíces.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | 2 |

Así cada uno de los intervalos $\left[-1,-\frac{1}{2}\right],\left[-\frac{1}{2},0\right]$ y $[0{,}1]$ contiene una única raíz.

Ahora comprobémoslo con el programa Geogebra:




También nos parece conveniente que los alumnos aprendan a contar raíces en intervalos no acotados para responder, por ejemplo y sin lugar a dudas, cuántas raíces positivas o raíces negativas tiene un polinomio. Para ello es necesario que los alumnos comprendan el comportamiento de los polinomios cuando los valores de *x* tienden a +∞ o –∞. No es cuestión de que comiencen a calcular límites de forma rigurosa, será suficiente que conozcan que ese comportamiento lo determina el coeficiente principal del polinomio. Junto con la regla de los signos y las igualdades:

$$(-\infty)^{impar} = -\infty \quad (-\infty)^{par} = +\infty$$
$$(+\infty)^{n} = +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$$

Y planteamos un ejercicio como el siguiente:

4) Calcular el número de raíces positivas y el número de raíces negativas del polinomio $p(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 5$

Solución:

$p_0(x) = p(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 5$

$p_1(x) = p'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 4x + 1$

$$\left.\begin{array}{l|l} 3x^4 \quad -5x^3+2x^2 \quad +x \quad -5 & 12x^3-15x^2+4x+1 \\ \underline{-3x^4+\frac{15}{4}x^3-x^2-\frac{1}{4}x} & \frac{1}{4}x-\frac{5}{48} \\ \qquad -\frac{5}{4}x^3 \quad +x^2 \quad +\frac{3}{4}x \quad -5 & \\ \qquad \underline{+\frac{5}{4}x^3-\frac{25}{16}x^2+\frac{5}{12}x+\frac{5}{48}} & \\ \qquad\qquad \underline{\underline{-\frac{9}{16}x^2+\frac{7}{6}x-\frac{235}{48}}} & \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$r_1(x)=-\frac{9}{16}x^2+\frac{7}{6}x-\frac{235}{48}\Rightarrow p_2(x)=-r_1(x)\Leftrightarrow p_2(x)=\frac{9}{16}x^2-\frac{7}{6}x+\frac{235}{48}$$

Como los coeficientes son número racionales de cierta entidad, multipliquemos el polinomio por 48:

$p_2(x)=27x^2-56x+235$

$12x^3-15x^2+4x+1 \qquad | \underline{27x^2-56x+235}$

Multipliquemos por $+9$ al dividendo para simplicar cálculos.

$$\left.\begin{array}{l|l} 108x^3 \quad -135x^2+38x+1 & 27x^2-56x+235 \\ \underline{-108x^3+224x^2-940x} & 4x+\frac{89}{27} \\ \qquad 89x^2-902x \quad +1 & \\ \qquad \underline{-89x^2+\frac{4984}{27}x-\frac{20915}{27}} & \\ \qquad\qquad \underline{\underline{\frac{-19370}{27}x-\frac{20888}{27}}} & \end{array}\right\}\Rightarrow r_2(x)=\underline{\underline{\frac{-19370}{27}x-\frac{20888}{27}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_3(x)=-r_2(x)=\frac{19370}{27}x+\frac{20888}{27}$$

Multiplicamos por 27 y así el cuarto polinomio de la sucesión es:

$p_3(x)=19370x+20888$

$$\begin{array}{l|l} 27x^2 \qquad -56x+235 & 19370x+20888 \\ \underline{-27x^2-\frac{281988}{9685}x} & \frac{27}{19370}x-\frac{140994}{93799225} \\ \qquad\qquad \vdots & \end{array}$$

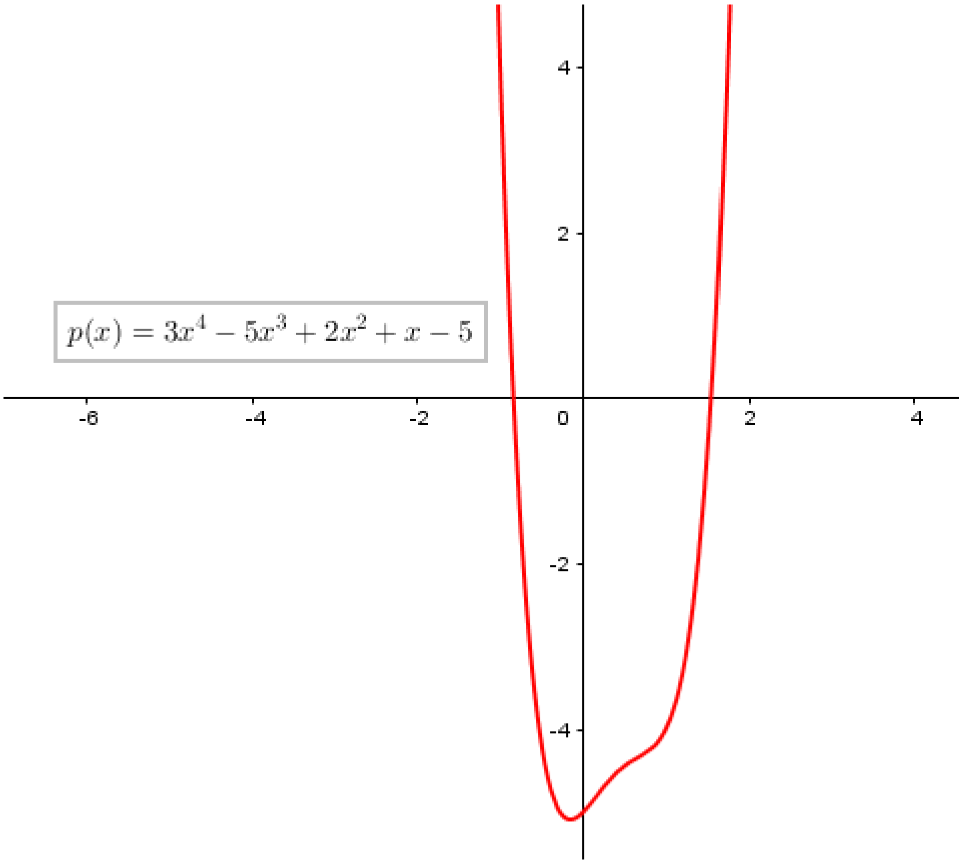
Como se observan los números que aparecen provocan operaciones tediosas, pero como lo único que importa es el signo del resto dado que estamos con el último término de la sucesión, es claro que: $r_3(x)=235+a : a>0 \Rightarrow r_3(x)>0 \Rightarrow p_4(x)=-r_3(x)\Leftrightarrow p_4(x)<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p_4(x)=-1$

| | $p_0(x)=3x^4+\cdots$ | $p_1(x)=12x^3+\cdots$ | $p_2(x)=27x^2+\cdots$ | $p_3(x)=19370x+\cdots$ | $p_4(x)=-1$ | $w(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ | 3 |
| 0 | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | 2 |
| $+\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | 1 |

Luego el polinomio posee una raíz negativa y una raíz positiva.

Comprobémoslo con Geogebra




Parece que llegados a este punto sería conveniente completar la materia que proponemos con algún método iterativo que permita aproximar el valor de las raíces. Ya que han tenido que aprender a calcular el polinomio derivado para construir la *sucesión de Sturm*, propongo incluir el *Método de Newton-Raphson*. Inicialmente había pensado en el *Método de Bisección* por su simplicidad, pero aprovechando la materia vista creo que es mucho mejor enseñarles el *Método de Newton-Raphson* que, además tiene convergencia cuadrática bajo ciertas condiciones. Asimismo, los ejercicios que deben plantearse no deben involucrar a polinomios que posean raíces múltiples, esto garantiza que $p(x)$ y su derivada no tienen raíces comunes, es decir, el denominador de la función de iteración del método no se podrá anularse, que es otro posible inconveniente del método.

## 2.4 Método de Newton-Raphson

Antes de nada, tendremos que explicar cuál es la filosofía de un método iterativo en la resolución de ecuaciones no lineales porque es una materia totalmente novedosa para ellos. Además, personalmente me gusta definir las partes de las Matemáticas que se abordan en clase, así que, aunque sea sólo de manera oral, aconsejo incluir la siguiente definición que es muy personal y por ello, tal vez poco rigurosa y ortodoxa:

*Definición*.- Se conoce por *Cálculo Numérico* a la parte de las Matemáticas que se ocupa de la búsqueda y el estudio de caminos alternativos para resolver problemas que no pueden ser resueltos por los métodos tradicionales.

Por ejemplo.- En la ecuación $x - sen(2x) = 0$, no puede despejarse la incógnita $x$ por el camino tradicional (lo que está sumando, restando, multiplicando, dividiendo en un miembro, pasa para el otro miembro, restando, sumando, dividiendo, multiplicando, respectivamente; elevar al cuadrado los dos miembros, etc.), es en ese momento en el que aparece el *Cálculo Numérico* para proponer y estudiar otros métodos que permitan resolver la ecuación.

En este contexto, propongo que se les defina lo que es un *método iterativo* para resolver una ecuación. Creo que en estos momentos no debemos ser muy rigurosos, el objetivo es que comprendan la idea general y el espíritu de lo que queremos conseguir.

*Definición*.- Llamamos *método iterativo* a un algoritmo que permite construir una sucesión convergente cuyo límite es la solución de la ecuación que se está buscando.

Así que los alumnos tendrán que comprender que seremos capaces de construir un método que a su vez proporcionará una sucesión (concepto incluido en el currículum ya en 3º E.S.O.) y cuyo límite será la raíz de un polinomio, que por no ser ni entera ni racional y, por tener el polinomio grado mayor que tres, no tenemos otro camino para localizarla.

El aspecto de los métodos iterativos es el siguiente:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

A $x_0$ lo llamaremos *semilla* y a la función $f(x)$, *función de iteración*. Les pondremos un ejemplo para que entiendan cómo se realizan las evaluaciones y se calculan los términos de la sucesión.

Por ejemplo.- $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n + 1} \end{cases}$

Y a partir de esta definición, construimos los primeros términos, cuatro o cinco, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1\\
x_1 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0'5\\
x_2 &= \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = 0'\widehat{6}\\
x_3 &= \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} = 0'6\\
x_4 &= \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} = 0'625\\
x_5 &= \frac{1}{1+\frac{5}{8}} = \frac{1}{\frac{13}{5}} = \frac{5}{13} = 0'3846153846\cdots\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Se les explicará que cuántas más evaluaciones hagamos más *cerca* estaremos de la solución buscada. He escogido el *Método de Newton-Raphson* por dos razones. La primera es una cuestión funcional, dado que los chicos ya saben hacer la sucesión de Sturm, la función de iteración está prácticamente construida (sólo hay que hacer el cociente de los dos primeros elementos de la sucesión de Sturm y restarlo al término anterior). La segunda es el orden de convergencia del método, este concepto no será necesario contarlo en el aula, pero nos aprovecharemos de la convergencia cuadrática del método para que observen buenos resultados del método con pocas iteraciones.

Ahora se les definirá el *Método de Newton- Raphson*. Dado un polinomio $p(x) = p_0(x)$, consideremos su polinomio derivado $p'(x) = p_1(x)$.

<u>Método de Newton-Raphson</u>:

$$
\begin{cases}
x_0\\
x_{n+1} = x_n - \dfrac{p(x_n)}{p'(x_n)}
\end{cases}
$$

La única cuestión que queda por aclarar es quién es $x_0$, propongo que si al valor no es muy complicado tomen como semilla el punto medio del intervalo que han encontrado gracias a la sucesión de Sturm. También pueden valorar *arrancar* de alguno de los extremos del intervalo, pero en principio tomaremos su punto medio.

Como ejemplo me parece apropiado comenzar por el del apartado a) del ejercicio 3) del epígrafe anterior que ya han visto en que intervalo está la raíz [–2,–1]  y además se trata de una raíz única.

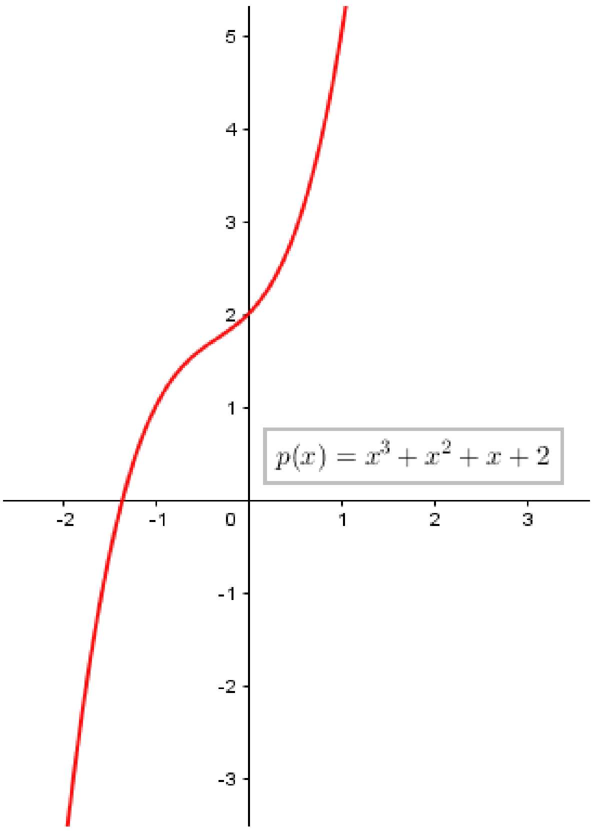
$$\left.\begin{array}{l} p(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \\ p_0(x) = p(x) = x^3 + x^2 + x + 2 \\ p_1(x) = p'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1'5 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 + x_n^2 + x_n + 2}{3x_n^2 + 2x_n + 1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

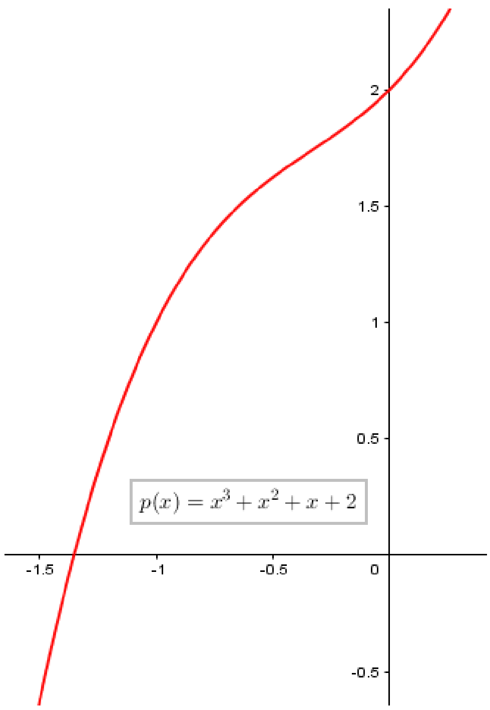
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1'5 \\ x_{n+1} = \dfrac{3x_n^3 + 2x_n^2 + x_n - x_n^3 - x_n^2 - x_n - 2}{3x_n^2 + 2x_n + 1} \end{cases} \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + x_n^2 - 2}{3x_n^2 + 2x_n + 1}$$

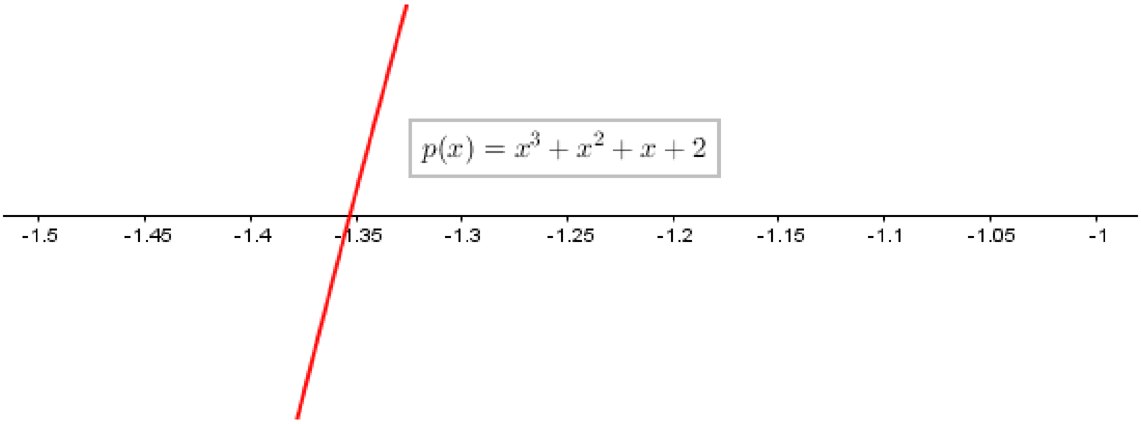
$$\begin{array}{l} x_0 = -1'5 \\ x_1 = -1'3684211 \\ x_2 = -1'3533942 \\ x_3 = -1'35321 \\ x_4 = -1'35321 \end{array}$$

El método se ha estabilizado tan sólo en cuatro iteraciones. Téngase en cuenta que los cálculos los he realizado con una calculadora CASIO *fx-82B*, ¡muy antigua! tan sólo con ocho cifras significativas; es muy probable que con calculadoras más actuales sea necesaria una iteración más hasta que se estabilice. En cualquier caso, se podrá explicar a los alumnos que hemos sido capaces de obtener una aproximación muy buena de la solución buscada.

Recuperemos la representación gráfica que hicimos con Geogebra y efectuemos unas ampliaciones alrededor de la raíz para que se observe gráficamente lo que hemos obtenido analíticamente:






Propongo un ejercicio para que practiquen la construcción de la *sucesión de iteración de Newton-Raphson* teniendo en cuenta que, la expresión de la función de iteración que provoque el polinomio, no sea muy complicada.

5) Separar la única raíz real positiva del polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 2$ en un intervalo de, a lo sumo, amplitud la unidad. Realizar cinco iteraciones del Método de Newton-Raphson. Realizar la representación gráfica con Geogebra.

Solución:

$$p_0(x) = p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 2$$

$$p_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$\left.\begin{array}{l|l}
x^3 - 4x^2 + 4x - 2 & 3x^2 - 8x + 4 \\
\underline{-x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{4}{3}x} & \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \\
-\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 2 & \\
\underline{\frac{4}{3}x^2 - \frac{32}{9}x + \frac{16}{9}} & \\
-\frac{8}{9}x - \frac{2}{9} &
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$r_1(x) = -\frac{8}{9}x - \frac{2}{9} \Rightarrow p_2(x) = -r_1(x) \Leftrightarrow p_2(x) = \frac{8}{9}x + \frac{2}{9}, \text{multipliquémoslopor } \frac{9}{2}:$$

$$p_2(x) = 4x + 1$$

$$\left.\begin{array}{l|l}
3x^2 - 8x + 4 & 4x + 1 \\
\underline{-3x^2 - \frac{3}{4}x} & \frac{3}{4}x - \frac{35}{16} \\
-\frac{35}{4}x + 4 & \\
\underline{\frac{35}{4}x + \frac{35}{16}} & \\
+\frac{99}{16} &
\end{array}\right\} \Rightarrow r_2(x) = \frac{99}{16} \Rightarrow p_3(x) = -r_2(x) \Leftrightarrow p_3(x) = -\frac{99}{16}$$

$$p_3(x) = -1$$

Como el enunciado dice que la raíz real es única y positiva comencemos evaluando la sucesión de Sturm en los valores enteros:

| | $p_0(x)=x^3-4x^2+4x-2$ | $p_1(x)=3x^2-8x+4$ | $p_2(x)=4x+1$ | $p_3(x)=-1$ | $w(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | 2 |
| 1 | $-$ | $-$ | $+$ | $-$ | 2 |
| 2 | $-$ | 0 | $+$ | $-$ | 2 |
| 3 | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | 1 |

Por tanto, la raíz del polinomio se encuentra en el intervalo [2,3]. Construyamos el Método de Newton-Raphson:

$$\begin{cases} x_0 = 2'5 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{p(x)}{p'(x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2'5 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3-4x_n^2+4x_n-2}{3x_n^2-8x_n+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2'5 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3-4x_n^2+2}{3x_n^2-8x_n+4} \end{cases}$$

$x_0 = 2'5$

$x_1 = 3$

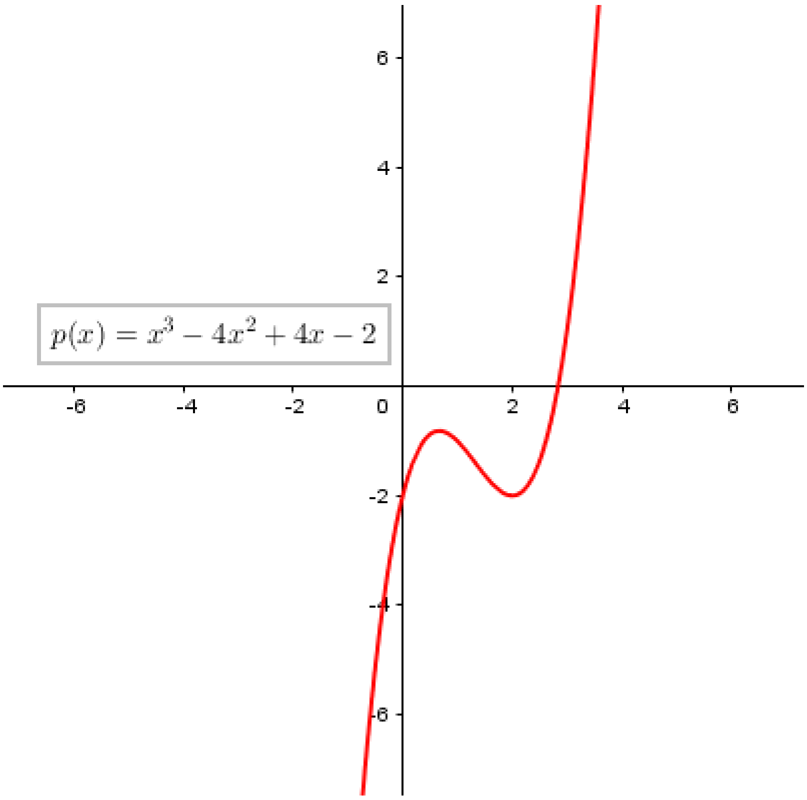
$x_2 = 2'8571429$

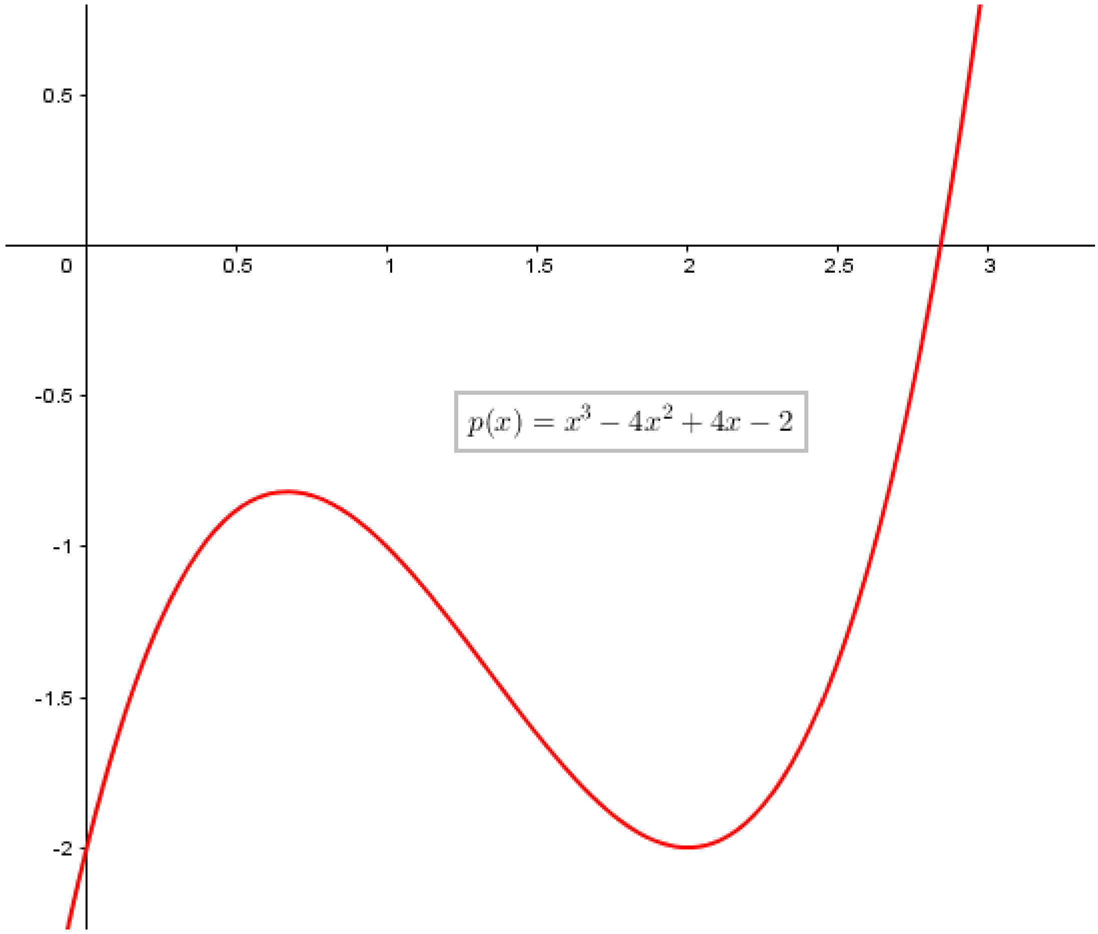
$x_3 = 2'8395445$

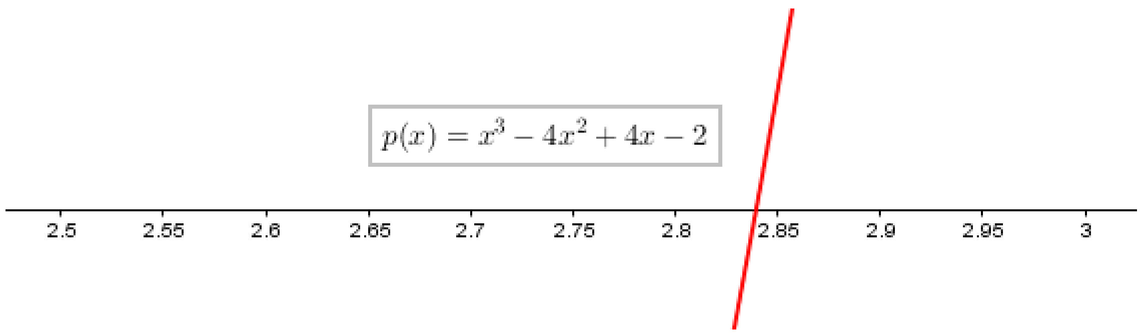
$x_4 = 2'8392868$

$x_5 = 2'8392867$

Gráficamente:




$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 2$
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0.5
1
1.5
2
2.5
3


$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 2$
2.5
2.55
2.6
2.65
2.7
2.75
2.8
2.85
2.9
2.95
3

## 2.5 Inecuaciones

Otro apartado que se recoge en los contenidos de 4º E.S.O. es el planteamiento y resolución de inecuaciones de primer grado y grado superior a dos. La resolución de una inecuación pasa por encontrar las soluciones de la ecuación correspondiente; de hecho, la manera en que se explica cómo resolver las inecuaciones, consiste en buscar las soluciones de la ecuación y a partir de ellas construir una tabla en la que se indican los signos de cada uno de los factores del polinomio en cada una de las regiones en que queda dividida la recta real por las soluciones para, finalmente, deducir el signo del polinomio usando la regla de los signos. Algo del tipo siguiente:

$$\text{Resolver: } x^2+3x-10\geq 0$$

$$x^2+3x-10=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-3+7}{2}\Leftrightarrow \underline{x=2} \\ x=\dfrac{-3-7}{2}\Leftrightarrow \underline{x=-5}\end{cases}$$

$$\therefore\ x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$$


| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ - 2 | - | - | + |
| $x$ + 5 | - | + | + |
| ($x$ - 2)($x$ + 5) | + | - | + |

Otra vez, si no se construyen las inecuaciones intencionadamente preparadas para que las soluciones sean enteras, cuando los alumnos se enfrenten a inecuaciones de grado superior o igual a dos, serán incapaces de resolverlas y esto no es una visión realista de los problemas que aparecen en la Naturaleza. Cabe destacar que la resolución de inecuaciones está íntimamente relacionada con la obtención de dominios de funciones, por esto es necesario que los chavales aprendan a resolver inecuaciones cualesquiera ya que, el propio desarrollo posterior de las Matemáticas requerirá de ellos estos procedimientos.

No me parece oportuno desarrollar ni la teoría ni los ejercicios correspondientes a las inecuaciones, sólo pretendo destacar que este tema atañe directamente a la resolución de ecuaciones polinómicas. Al fin y al cabo, tanto ecuaciones como inecuaciones definen a un tipo de conjuntos conocidos como *conjuntos semialgebraicos*.

## 3) Más allá de la E.S.O. Introducción a la Geometría Semialgebraica

Para finalizar este trabajo, vamos a introducir los conceptos elementales de la *Geometría Semialgebraica*, algún resultado que se obtiene en esta disciplina y distintas aplicaciones que permiten resolver problemas planteados en múltiples campos. Obviamente, esta parte no es susceptible de ser explicada en las aulas de secundaria, constituye una guía de por dónde podría profundizarse en el estudio de los conceptos que se han desarrollado en las partes anteriores.

Como se indicó anteriormente, nuestro libro de referencia es el *Benedetti, R. & Risler, J.J.* **[2]**, por esto, antes de otra cosa, me gustaría incluir algunos resultados que se recogen en él, concernientes a posibles cotas de las raíces reales de un polinomio y a la separación de las mismas.

### 3.1 Cotas y separación de raíces

En principio, consideraremos un polinomio mónico $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, una raíz del mismo:

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(3.1) *Lema*.- «Se cumple que $|\alpha| < 1 + Sup\{|a_i| / i \in \{0,1,\ldots,n-1\}\}$».

Nota.- No incluí esta cota en los contenidos ofrecidos a los alumnos de secundaria porque en muchas ocasiones no es muy útil, es decir, no es muy efectiva.

(3.2) *Lema de Lagrange-McLaurin*.- «Sea $m = Sup\{\, i / a_i < 0\}$ y $B = Sup\{-a_i / a_i < 0\}$, (si no existiera ningún coeficiente negativo, sea $B = 0$; entonces,

$\alpha < 1 + B^{1/(n-m)}$».

(3.3) *Lema de Cauchy*.- «Sean $i_1,\ldots, i_r$ los subíndices correspondientes a los coeficientes negativos; entonces, se tiene que

$\alpha \leq Sup\left\{ \left(r|a_{i_k}|\right)^{1/(n-i_k)} / k \in \{1,\ldots,r\}\right\}$».

(3.4) *Lema*.- «Si $a_0 \neq 0 \Rightarrow |\alpha| \geq \left(1 + Sup\left\{ \left|\dfrac{a_i}{a_0}\right| / i \in \{0,1,\ldots,n-1\}\right\}\right)^{-1}$».

Por ejemplo.- Sea el polinomio $p(x) = x^6 - 12x^4 - 2x^3 + 37x^2 + 10x - 10$, obtengamos cotas para las raíces reales según los resultados anteriores.

(3.1).- $Sup\{|-12|, |-2|, |37|, |10|, |-10|\} = 37 \Rightarrow |\alpha| < 1 + 37 \Leftrightarrow \alpha \in (-38,38)$, ésta es la cota que conscientemente no incluí en los contenidos que pueden ser desarrollados en la E.S.O.

porque no ayuda mucho a separar las raíces y preferí aportar otro, aunque tiene la limitación que es sólo utilizable para polinomios cúbicos.

(3.2).- $m = Sup\{4,3,0\} = 3$ y $B = \{12,2,10\} = 12 \Rightarrow \alpha < 1 + 12^{1/6-4} = 1 + 12^{1/2} = 1 + \sqrt{12} \approx 4'464$

Ésta segunda cota es más interesante que la anterior, ahora bien, no sé si sería excesivo incluirla en un curso de Secundaria.

(3.3).- $i_1 = 4, i_2 = 3, i_3 = 0 \Rightarrow r = 3$ y $Sup\left\{(3.|-12|)^{1/6-4}, (3.|-2|)^{1/6-3}, (3.|-10|)^{1/6-0}\right\} =$

$= Sup\left\{\sqrt{36}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[6]{30}\right\} = Sup\{6, 1'817, 1'763\} = 6$

(3.4).- $Sup\left\{\left|\dfrac{a_i}{a_0}\right| / i \in \{0,1,\ldots,n-1\}\right\} = Sup\left\{\left|\dfrac{-12}{-10}\right|, \left|\dfrac{-2}{-10}\right|, \left|\dfrac{37}{-10}\right|, \left|\dfrac{10}{-10}\right|, \left|\dfrac{-10}{-10}\right|\right\} = 3'7$

Luego: $|\alpha| \geq (1+3'7)^{-1} \approx 0'213$.

Así, haciendo uso de todas las cotas obtenidas sabemos que:

$\alpha \in (-38, -0'213) \cup (0'213, 4'464)$

También me gustaría hacer referencia a otro resultado que aparece en el libro y que fue explicado por D. Francisco de Asís Vicente Ruiz en la asignatura de Complementos de Matemáticas.

<u>(3.5) *Teorema*</u>.- «Sea $L \in \mathbb{R}$ tal que la derivada $i$-ésima $p^{i)}(L) \geq 0, 0 \leq i \leq n$, entendiendo la derivada 0-ésima como el propio polinomio, entonces $\alpha \leq L$».

Podría ser explicado en 4º E.S.O. puesto que los alumnos han aprendido a derivar polinomios para construir la sucesión de Sturm, no obstante, no consideré oportuno incluirlo porque sería extender demasiado la materia, preferí hacer hincapié en otros contenidos.

Además me parecieron muy interesantes los siguientes resultados que permiten realizar separaciones de las raíces de un polinomio con coeficientes enteros de forma mucho más eficiente. Sea pues $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Consideremos las raíces de $p(x)$, aunque tengamos que buscarlas en $\mathbb{C}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, definimos: $sep(p) = Inf|\alpha_i - \alpha_j| : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n, i \neq j$.

<u>(3.6) *Proposición*</u>.- «Sea $C = |a_n| + Sup\{|a_i| / 0 \leq i < n\}$; entonces, si $p(x)$ posee sólo raíces simples, $sep(p) \geq 2(2C)^{-n(n-1)/2}$».

Ahora la cota inferior del *diámetro* de las raíces puede mejorarse, para ello se requieren las siguientes definiciones.

$$L(p)=|a_o|+|a_1|+\cdots+|a_n|=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$$
$$M(p)=|a_n|\prod_{1\le i\le n}Max\{1,|\alpha_i|\}\ \text{donde}\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n\ \text{son las partes reales de las raíces.}$$

Puede probarse que $M(p)\le L(p)$. A partir de estas definiciones pueden probarse las siguientes cotas inferiores para la menor diferencia entre dos raíces cualesquiera del polinomio:

$$sep(p)\ge\frac{\sqrt{3}}{n^{(n+2)/2}\left(M(p)\right)^{n-1}} \tag{3.7}$$

$$sep(p)>\frac{\sqrt{3}}{n^{(n+2)/2}\left(L(p)\right)^{n-1}} \tag{3.8}$$

Nota.- Entre las dos cotas anteriores, la *mejor* es la primera, por ser mayor, puesto que $L(p)$ es mayor que $M(p)$; no obstante, es más costosa porque requiere el conocimiento de las raíces del polinomio y, generalmente, nos interesa construir la cota a priori, sin saber las raíces.

En las condiciones anteriores, dado $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sin raíces múltiples, si $M$ es una cota superior del valor absoluto de las raíces y $m$ es una cota inferior para $sep(p)$, podemos construir los siguientes algoritmos:

Método de Kronecker

*i)* Divídase el intervalo $[-M,M]$ en $2M/m$ $(l_i,l_{i+1})$ de longitud $m$.

*ii)* Evalúese $p(l_i)$.

*iii)* Si $p(l_i)\ne 0, p(l_{i+1})\ne 0$, evalúese $p(l_i)p(l_{i+1})$

*iv)* Si $p(l_i)p(l_{i+1})<0 \Rightarrow \exists$ raíz real en $(l_i,l_{i+1})$
Si $p(l_i)p(l_{i+1})>0 \Rightarrow$ no existe raíz real en $(l_i,l_{i+1})$ porque $m\le sep(p)$

Método de Sturm

*i)* Constrúyase la sucesión de Sturm $p_0(x), p_1(x),\ldots, p_r(x)$. Si $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $w(x)$ al número de variaciones de la sucesión $p_0(x), p_1(x),\ldots, p_r(x)$.

*ii)* Sea $x_0 = -M$, $x_1 = M$ y $w = w_1 = w(x_0) - w(x_1)$. Si $w = 0$ entonces $p$ no tiene raíces reales. Si $w = 1$, entonces $p$ posee una única raíz real en $(x_0,x_1]$ y el algoritmo concluye.

*iii)* Si $w > 1$, sea $x_2 = (x_0 + x_1)/2$ (en el primer paso en que acudamos a este punto $x_2 = 0$). Considérese $w_2 = w(x_0) - w(x_2)$ y $w_3 = w(x_2) - w(x_1)$ y váyase al paso anterior primeramente con $w = w_2$, $x_0 = x_0$ y $x_1 = x_2$ y seguidamente con $w = w_3$, $x_0 = x_2$ y $x_1 = x_1$.

El algoritmo finaliza cuando todos los valores de $w_i$ son 0 ó 1.

## 3.2 Resultantes y discriminantes

Veamos cómo se puede definir, de forma general, lo que conocemos cómo discriminante de una ecuación, el clásico $b^2 - 4ac$ de las ecuaciones de segundo grado.

<u>(3.9) *Definición*</u>.- Sean polinomios $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots b_q x^q$ que tienen coeficientes en un anillo conmutativo cualquiera *A*, llamaremos *resultante de p y q* al determinante de la siguiente matriz (*matriz de Sylvester*) $M(p,q)$ de orden $p + q$ que denotaremos $R(p,q)$:

$$M(p,q) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_p & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_p \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_p & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_p \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \to q \text{ filas} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \to p \text{ filas} \end{array}$$

<u>Por ejemplo</u>.- Sean los polinomios $p(x) = 2x^3 + 4x^2 + 6x + 8$ y $q(x) = x^2 + x + 1$,

$$M(p,q) = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante sería el resultante de *p* y *q* que no voy a calcular.

<u>(3.10) *Definición*</u>.- Dado un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$ , llamaremos *discriminante de p* y lo denotaremos por $D(p)$ a:

$$D(p) = \begin{cases} 0 & si \quad a_p = 0 \\ \dfrac{1}{a_p} R(p, p') & si \quad a_p \neq 0 \end{cases}$$

<u>Por ejemplo</u>.- Dado el polinomio $p(x) = x^3 + 4x^2 + x + 9$, el discriminante de *p* será el determinante de la siguiente matriz:

$$M(p,p')=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$ teniendo en cuenta que $p'(x) = 3x^2 + 8x + 1$.

Veamos otros ejemplos que tienen un carácter más general e ilustran la utilidad de las definiciones anteriores.

[1] Sea el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, calculemos su discriminante:

$$M(p,p')=\begin{pmatrix} c & b & a \\ b & 2a & 0 \\ 0 & b & 2a \end{pmatrix} \Rightarrow R(p,p')=\begin{vmatrix} c & b & a \\ b & 2a & 0 \\ 0 & b & 2a \end{vmatrix} = 4a^2c + ab^2 - 2ab^2 = 4a^2c - ab^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(p)=\begin{cases} 0 & si \quad a=0 \\ \frac{1}{a}\left(4a^2c-ab^2\right) & si \quad a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow D(p)=\begin{cases} 0 & si \quad a=0 \\ 4ac-b^2 & si \quad a\neq 0 \end{cases}$$

que es el radicando (aunque cambiado de signo, pero no importa porque lo que trasciende es cuándo se anula) que aparece en la expresión de las soluciones de una ecuación de segundo grado.

[2] Sea el polinomio $p(x) = x^3 + px + q$ (que provoca una ecuación del *tipo de Bombelli*, que hemos llamado en su momento), veamos cual es su discriminante:

$$M(p,p')=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(p,p')=\begin{vmatrix} q & p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{desarrollemos por los elementos de la primera columna}\} =$$

$$= q.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} q & p & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ p & 0 & 3 & 0 \\ 0 & p & 0 & 3 \end{vmatrix} + p(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} p & 0 & 1 & 0 \\ q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & 0 \\ 0 & p & 0 & 3 \end{vmatrix} = \{F_4 \to F_4 - 3F_1 \quad \text{y} \quad F_4 \to F_4 - 3F_2\} =$$

$$= q\begin{vmatrix} q & p & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ p & 0 & 3 & 0 \\ -3q & -2p & 0 & 0 \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} p & 0 & 1 & 0 \\ q & p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 & 0 \\ -3q & -2p & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{ahora, desarrollamos por los coeficientes de la última columna}\} = q.1.(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ p & 0 & 3 \\ -3q & -2p & 0 \end{vmatrix} +$$

$$= +p(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ p & 0 & 3 \\ -3q & -2p & 0 \end{vmatrix} = \{\text{Regla de Sarrus}\} = -q(-27q) + p\left(-2p^2+6p^2\right) = 4p^3 + 27q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(p) = \frac{1}{1}\left(4p^3+27q^2\right) \Leftrightarrow D(p) = 4p^3 + 27q^2$$

Cuya región, en función de los coeficientes $p$ y $q$, fue representada en el final del epígrafe 2.2.

### 3.3 Lema de Thom

Ahora me gustaría introducir este resultado que establece un puente entre las raíces de polinomios y ciertas propiedades topológicas que verifican esas raíces. Previamente, definiré el concepto básico de la *Geometría Semialgebraica*.

(3.11) *Definición*.- Un *subconjunto semialgebraico* de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de la forma:

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \left\{ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \,/\, p_{i,j}(x_1, \ldots, x_n) *_{i,j} 0 \right\} \text{en donde } *_{i,j} \in \{=,<,>\} \text{ y } p_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$$

son polinomios en $n$ variables.

Observaciones:

1) Se trata de uniones de soluciones de sistemas de ecuaciones e inecuaciones de $n$ variables.

2) Por definición la clase de los conjuntos semialgebraicos es cerrada para uniones finitas, intersecciones finitas y complementarios.

3) Sería posible quedarse en la definición con sólo uno de los signos de la relación de orden < ó >.

Ahora centrémonos en el caso de polinomios en una sola variable y para una familia concreta de polinomios, un caso muy particular de conjuntos semialgebraicos.

(3.12) *Lema de Thom*.- «Sea una familia finita de polinomios $F = \{p_1, \ldots, p_k\}$ de $\mathbb{R}[x]$ y supongamos que cualquier derivada $p_j^{i)} \in F$, sea $X$ cualquier conjunto de $\mathbb{R}$ de la forma:

$$X = \bigcap \left\{ x \in R / p_j *_j 0 \right\} \text{donde } *_j \in \{=,<,>\}$$

Entonces, $X$ es conexo, luego se da una de las posibilidades siguientes:

*i)* $X = \varnothing$

*ii)* $X$ = {un único punto} (necesariamente debe haber una igualdad en alguno de los conjuntos de la intersección anterior

*iii)* $X$ es un intervalo no trivial

Es más, la adherencia de X se obtiene reemplazando los menores y mayores estrictos por menores o iguales y mayores o iguales (relajando las desigualdades)».

Este *Lema* garantiza que las soluciones de cualquier sistema de ecuaciones e inecuaciones polinómicas en una variable son un intervalo en $\mathbb{R}$ (y, por tanto, un conjunto semialgebraico). Pero vamos a ahondar un poco más pensando en polinomios de varias variables.

(3.13) *Teorema*.- «Sea $A$ un subconjunto semialgebraico de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $\pi$: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ la proyección al espacio de las primeras $n$ coordenadas; entonces, $\pi(A)$ es un subconjunto semialgebraico de $\mathbb{R}^n$».

Por poner un ejemplo de secundaria del teorema anterior, en primero y segundo de Bachiller de Ciencias Sociales se estudian problemas de Programación Lineal, en ellos se construyen regiones factibles en cuya frontera se encuentran los óptimos de funciones lineales; este teorema garantiza que la proyección sobre los ejes de esas regiones factibles (politopos) necesariamente tienen que volver a ser conjuntos semialgebraicos. Si proyectamos una región factible del plano sobre uno de los ejes necesariamente será un intervalo o un punto. Además, como consecuencia de este teorema puede demostrarse que el interior y la adherencia de cualquier conjunto semialgebraico vuelve a ser semialgebraico.

Pero ahora vamos a abordar un resultado, en principio, insospechado, por lo menos para mí, que conecta la *Geometría Semialgebraica* con la Lógica.

## 3.4 Teorema de Tarski-Seidenberg

(3.14) *Definición*.- Llamaremos cuerpo real cerrado a un cuerpo $F$ que no admite extensiones reales algebraicas no triviales o, equivalentemente, existe un orden en $F$ para el que los elementos positivos de $F$ son cuadrados en $F$ y todo polinomio de grado impar de $F[x]$ tiene una raíz en $F$.

Por ejemplo.- $\mathbb{R}$ es un cuerpo real cerrado o $\mathbb{R}_{\text{alg}}$, el conjunto de los números reales algebraicos sobre $\mathbb{Q}$ es también un cuerpo real cerrado.

El *Teorema de Bolzano* es extensible a los cuerpos reales cerrados para polinomios cuyos coeficientes pertenecen a ese cuerpo.

(3.15) *Teorema*.- «Sea $F$ un cuerpo real cerrado y sea $p(x) \in F[x]$, sean $a < b \in F$ tales que $p(a)p(b) < 0$, entonces, existe un $c \in F$ tal que $p(c) = 0$».

*Teorema de Tarski-Seidenberg*.- «Sea $F$ un cuerpo real, sean $p_i(x,Y)$ polinomios en $n$+1 variables con coeficientes en $F$, para cada $i = 1,\ldots, s$ donde $Y = (y_1,\ldots, y_n)$ y sea, para cada $i = 1,\ldots, s$, $*_i \in \{=,<,>\}$; entonces, existe una combinación booleana $B(Y)$ (es decir, una composición finita de disyunciones, conjunciones y negaciones) de ecuaciones e inecuaciones polinomiales en las variables $y_1,\ldots, y_n$ con coeficientes en $F$ tal que para todo cuerpo real cerrado $R$ que contiene a $F$ y para todo $y \in R^n$, el sistema

$$\begin{cases} p_1(x,y) *_1 0 \\ \qquad \vdots \\ p_s(x,y) *_s 0 \end{cases}$$

tiene una solución $x \in R$ si y sólo si $B(y)$ es verdadera en $R$».

No me preocupa tanto el enunciado en sí, sino lo que de él se desprende y que podré traducir más adelante. No obstante, quería mostrar una versión del *Principio de Tarski-Seidenberg* para ver que está íntimamente ligado (como puede intuirse) con los conjuntos semialgebraicos.

Ahora bien, para describir conjuntos semialgebraicos será necesario utilizar fórmulas que involucran igualdades y desigualdades polinomiales, junto con cuantificadores $\forall$ (universales) y $\exists$ (existenciales). Concretamente una *fórmula de primer orden del lenguaje de cuerpos ordenados con parámetros en R*, es una cantidad finita de conjunciones (intersecciones), disyunciones (uniones), negaciones y cuantificadores universales y existenciales sobre variables, empezando con fórmulas atómicas del tipo $p(x_1,\ldots, x_n)*0$ donde $*\in \{=,<,>\}$ y $p$ es un polinomio con coeficientes en $R$. Las *variables libres* de la fórmula son aquéllas no afectadas por cuantificadores. Denotaremos por $L(R)$ al lenguaje de primer orden con parámetros en $R$.

Nos hemos metido en cuestiones de Lógica que fueron abordadas en la asignatura de *Complementos de Matemáticas*, en la parte impartida por el doctor D. Fernando Sanz Sánchez, y es en esta disciplina en la que aparece una de las aplicaciones más sorprendentes de la Geometría Semialgebraica y que trataré de explicar a continuación. Del *Principio de Tarski-Seidenberg* se deduce el teorema siguiente:

<u>(3.16) *Teorema*</u>.- «Sea una fórmula de primer orden de $L(R)$, $\Phi(x_1,\ldots, x_n)$ con variables libres $x_1,\ldots,x_n$; entonces, el conjunto $\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n/\ \Phi(x_1,\ldots,x_n)\}$ es un conjunto semialgebraico».

Y, a partir de éste, se puede probar:

<u>(3.17) *Teorema de eliminación de cuantificadores*</u>.- «Sea $\Phi$ una fórmula de $L(R)$; entonces existe una fórmula libre de cuantificadores $\Psi$ de $L(R)$ con las mismas variables libres $x_1,\ldots,x_n$ que $\Phi$, tal que para toda extensión real cerrada $K$ de $R$ y para todo $(x_1,\ldots,x_n) \in K^n$ se cumple que: $\Phi(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow \Psi(x_1,\ldots,x_n)$».

En definitiva, la construcción de los conjuntos semialgebraicos ha permitido elaborar fórmulas en las lógicas de primer orden que carecen de cuantificadores equivalentes a otras originales que sí los tenían. De esta forma, bajo ciertas condiciones puede suponerse que una fórmula de primer orden no tiene cuantificadores. Ésta es una aplicación puramente matemática o metamatemática (me atrevería a decir).

Para finalizar me gustaría indicar que la *Geometría Semialgebraica* tiene múltiples aplicaciones en campos tan variados como la biología molecular, el procesamiento de señales, diseño asistido por ordenador, la estadística, la teoría de juegos o la robótica entre otros. Centrándonos en esta última, por ejemplo, ciertos problemas han motivado el estudio de ciertas propiedades topológicas de los conjuntos semialgebraicos como la *conexión*. El problema general consiste en guiar a un robot entre dos puntos en un ambiente con obstáculos. La cuestión es determinar si existe un camino que evita los obstáculos y, si existe, construirlo algorítmicamente. En el mayor número de casos, las restricciones para los movimientos del robot se plantean en términos de igualdades y desigualdades polinomiales y el conjunto en que se pueden elegir los parámetros para moverlo es semialgebraico.

## Referencias


**[1]** Baragallo, M.L. & Jerónimo, G. (2010). *Roadmaps en conjuntos semi-algebraicos* (Tesis de Licenciatura). Universidad de Buenos Aires, Argentina. Recuperado de: http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2010/Barbagallo_Laura.pdf

**[2]** Benedetti, R. & Risler, J.J. (1990). *Real algebraic and semi-algebraic sets*. 293 rue Lecourbe, París. Hermann, Édieterus des Sciencies et des Arts.

**[3]** Chuches, A. (2013). *Taxonomía de Bloom para la era digital*. Recuperado de: http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/TaxonomiaBloomDigital

**[4]** Corbalán, F. (2017). *El triunfo sobre las ecuaciones de tercer y cuarto grados*. Colección: *Genios de las Matemáticas*. España: RBA Coleccionables, S.A.

**[5]** Dunham, W. (2000). *Euler, El maestro de todos los matemáticos*. Colección: *La matemática en sus personajes*. Tres Cantos (Madrid), España: NIVOLA libros y ediciones, S.L.

**[6]** Fonseca Bon, C., Bosch, M. & Gascón, J. (2005). *El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la "regla de Ruffini"*. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/228890629_El_momento_del_trabajo_de_la_tecnica_en_la_completacion_de_organizaciones_matematicas_el_caso_de_la_regla_de_Ruffini

**[7]** Gabriel Yánez, C. (1983). *El Teorema de Sturm*. Recuperado de: https://revistas.uis.edu.co/index.php/revistaintegracion/article/view/1236

**[8]** Junta de Castilla y León (Consejería de Educación). (8 de Mayo de 2015). ORDEN EDU/362/2015. Recuperado de: https://www.bocyl.jcyl.es/

**[9]** Junta de Castilla y León (Consejería de Educación). (8 de Mayo de 2015). ORDEN EDU/363/2015. Recuperado de: https://www.bocyl.jcyl.es/

**[10]** Martín Casalderrey, F. (2000). *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Colección: *La matemática en sus personajes*. Tres Cantos (Madrid), España: NIVOLA libros y ediciones, S.L.

**[11]** Molina Iglesias, C. (¿?). *El estudio de las funciones y ecuaciones polinómicas en 1º B.U.P: Un enfoque diferente al usual*. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2364873

**[12]** Niévares, E. & Mozo, J. (2013). *Polinomios y resolución de ecuaciones en Educación Secundaria Obligatoria y Bachiller* (Trabajo de Fin de Máster). Universidad de Valladolid, España. Recuperado de: http://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/3855/1/TFM-G219.pdf