UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

TRABAJO FIN DE MASTER.

El concepto de límite en Bachillerato

Valladolid, 2019

Alumno: Sara Ruiz Soto

Tutor: Tomás Ortega del Rincón

ÍNDICE

CAPÍTULO I

ANÁLISIS CURRICULAR

I.1. INTRODUCCIÓN

El trabajo que aquí se presenta posee una doble intencionalidad: primero, mostrar y caracterizar las principales concepciones en la evolución histórica de la noción de límite que han sido identificadas, y segundo, y haciendo más hincapié, generar reflexión acerca de la enseñanza y aprendizaje de estas.

El concepto de límite presenta complejidad tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Primero por su carácter estructural, ya que constituye el eje central en el campo conceptual del cálculo y es un concepto básico sobre el cual se construyen otros conceptos de otras ramas de la matemática. También por su carácter instrumental, como herramienta para la solución de problemas tanto en el interior de las propias matemáticas como en el de ciencias aplicadas, como son la física y la ingeniería. Finalmente, como objeto matemático se aplica en diferentes contextos: geométrico (fórmula del área del rectángulo), aritmético (obtención del número e), métrico (de Weierstrass), topológico (contraimagen de abiertos o de filtros), estadístico (teorema central del límite)…

Hacer un seguimiento a la evolución histórica de la noción de límite implica hacer un recorrido histórico a las matemáticas desde la época clásica, encontrando que esta noción no se desarrolla de forma independiente y autónoma sino que se obtiene por medio de la interacción e interdependencia con otras nociones vecinas del cálculo como son: exhausción, cuadratura, variable, función, función continua, infinito, infinitesimal, número, número real, continuo numérico…, las cuales vamos a ir tratando en este trabajo.

I.2. MARCO TEÓRICO

Después de que Shulman (1986) considerara tres grandes componentes sobre conocimiento profesional del profesor (Conocimiento del Contenido, Conocimiento Didáctico del Contenido y Conocimiento Curricular), varios autores han desarrollado esta teoría. Entre ellos destacan Ball, Thames y Phelps (2008), quienes propusieron un modelo que llamaron *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) que considera tres subdominios del Conocimiento del Contenido de Shulman: *Conocimiento Común del Contenido, Conocimiento Especializado del Contenido* y *Conocimiento sobre el Horizonte Matemático*. Posteriormente, Rowland, Turner, Thwaites, & Huckstep (2009) interpretan el conocimiento del contenido de Shulman como un *conocimiento contextualizado en acciones* y, por terminar, en la Universidad de Huelva, Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano y Montes (2014), desarrollan los modelos anteriores y proponen el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) en el que sobre el conocimiento del contenido destaca el *Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM).* Para el análisis que se realiza en este trabajo es suficiente considerar dos de los subdominios del MKT: el *Conocimiento Común del Contenido* (conocimiento matemático que ha alcanzado cualquier graduado con suficientes estudios en matemáticas y, como profesor, el conocimiento que necesita saber para transmitir el contenido que enseña) y el *Conocimiento Especializado del Contenido* (conocimientos y habilidades propias de la enseñanza: ¿Por qué?, ejemplos, relaciones, explicaciones, elecciones, evaluaciones,...).

I.3. EL CURRÍCULO LEGAL

Antes de nada, es importante considerar las diferencias que existen entre los contenidos que se dan en matemáticas I y matemáticas II en los cursos de bachillerato y los contenidos presentes en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales en esta etapa.

Analizando estos dos cursos de bachillerato y considerando los contenidos existentes tanto en el BOCYL como en la BOE, siguiendo la ley LOMCE, podemos observar lo siguiente:

En cuanto a cuestiones metodológicas respecto al contenido de matemáticas del bachillerato tanto en ciencias como en sociales, hay que tener en cuenta que los nuevos conocimientos que deben adquirirse tienen que apoyarse en los ya conseguidos: los contextos deben ser elegidos para que el alumnado se aproxime al conocimiento de forma intuitiva mediante situaciones cercanas al mismo, y vaya adquiriendo cada vez mayor comprensión, ampliando progresivamente la aplicación a problemas relacionados con fenómenos naturales y sociales y a otros contextos menos cercanos a su realidad inmediata. Partiendo de los hechos concretos hasta lograr alcanzar otros más abstractos, el aprendizaje de esta materia permite al alumnado adquirir los conocimientos matemáticos, familiarizarse con el contexto de aplicación de los mismos y desarrollar procedimientos para la resolución de problemas y la elaboración de trabajos de investigación. La resolución de problemas, como eje fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 1989), debe trabajarse utilizando diferentes estrategias de resolución, consolidando rutinas fundamentales y propiciando la introducción y asimilación de nuevos conceptos. La realización de trabajos de investigación permite al alumnado introducirse en la búsqueda de información, el uso del lenguaje matemático, la generalización de problemas, la formalización y abstracción de fenómenos extraídos de contextos reales y la exposición oral o escrita del propio trabajo, fomentando también su espíritu innovador.

Primero de todo, cabe destacar como idea más importante en el caso de las matemáticas en ciencias que se favorecerá que los alumnos adquieran una formación conceptual y procedimental básica: un buen bagaje de procedimientos y técnicas matemáticas, una sólida estructura conceptual y una razonable tendencia a buscar el rigor en lo que sabe, en cómo aprende y en cómo se expresa. Es decir, la importancia está en la consideración y estudio del propio concepto.

En **matemáticas I**, los contenidos que se van a trabajar son mayormente de forma conceptual. Se estudia el concepto de límite de una función en un punto y en el infinito, limites laterales e indeterminaciones. Además, se utilizan los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.

La finalidad del estudio es comprender el concepto de límite, realizar las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplicar los procesos para resolver indeterminaciones.

En el caso de **matemáticas II,** se estudia también este concepto en diversas situaciones: El límite de una función en un punto y en el infinito. La función derivada. La aplicación al cálculo de límites en la regla de L´Hôpital. Se estudia además la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. Se aplica el concepto previamente estudiado de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites, de representación de funciones y de optimización.

Esto es, se trata de aplicar los conceptos de límite y de derivada previamente estudiados y analizados, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Además, también se estudia la aplicación de la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.

Ahora bien, en las **matemáticas aplicadas a ciencias sociales** en estos dos cursos de bachillerato no se considera tanta importancia al estudio del propio concepto de límite, como hemos mencionado anteriormente, sino más bien al propio cálculo e interpretación de este en base a la propia definición. Podemos observar esta ambigüedad en los contenidos que presenta esta etapa de bachiller.

Respecto a los contenidos propios en cada curso tenemos los siguientes:

Para el primer curso, encontramos los siguientes contenidos: Idea intuitiva de límite de una función en un punto y límites en el infinito. Cálculo de límites sencillos. El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función. Tipos de discontinuidades. Aplicación al estudio de las asíntotas. Ramas infinitas. Tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

Es decir, como podemos observar no se da tanta importancia al estudio del propio concepto de límite, sino más bien una simple aplicación de la propia definición y el cálculo de límites finitos e infinitos de una función en un punto o en el infinito para estimar las tendencias de una función y así poder calcular, representar e interpretar las asíntotas de una función en problemas de las ciencias sociales.

En el segundo curso, la metodología es similar y los contenidos son: La aproximación al concepto de límite y técnicas elementales de cálculo de límites en un punto y en el infinito.

En este caso, se trata de analizar e interpretar fenómenos habituales de las ciencias sociales de manera objetiva traduciendo la información al lenguaje de las funciones y describiéndolo mediante el estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.

Esto es, se trabaja con una idea intuitiva de límite de una función. La finalidad es modelizar, con ayuda de funciones, los problemas planteados en las ciencias sociales y describirlos mediante el estudio de la continuidad, tendencias, ramas infinitas, corte con los ejes, etc. También se trata de calcular las asíntotas de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas, y finalmente de estudiar la continuidad en un punto de una función elemental o definida a trozos utilizando el concepto de límite.

I.4. EL CURRÍCULO DE LOS LIBROS

La editorial del libro de texto con el que vamos a empezar a tratar y el cual vamos a analizar es: Edelvives Bachillerato**.**

Atendiendo a este libro en el primer curso de bachillerato: *Bachillerato 1, matemáticas. Ciencias*, y considerando el tema de límites de funciones, podemos observar que los temas que se tratan en él son los que se corresponden con los contenidos del BOE.

Primero de todo, se establece la definición del límite de una función de la siguiente manera:

> "Dada una función, $f(x)$, el límite de $f(x)$, cuando x tiende al valor a, es el valor al que se aproximan los valores de la variable y cuando los valores que toma la variable x están muy próximos al valor de a. Se expresa como $\lim_{x \to a} f(x)$ y se lee "límite de $f(x)$ cuando x tiende a a". Además, añade: "La expresión $\lim_{x \to a} f(x)$ = L significa que, cuando la variable x toma valores próximos al valor de a, entonces la variable $y = f(x)$ toma valores muy próximos al valor de L".

Al igual que observamos en la definición anterior, existen definiciones ingenuas de límite de una función, como sería por ejemplo la siguiente:

> " $\lim_{x \to a} f(x)$ = L sí y solo sí $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a".

Esta definición, que puede parecer correcta, presenta un error muy común que puede aparecer muchas veces por parte del alumnado, **aproximación ≠ tendencia**, el cual vamos a tratar más adelante. Además de resultar incorrecta, puede inducir a que los alumnos crean que es correcta y no aprendan (no quieran aprender) una definición correcta del concepto.

Como bien hemos nombrado en el apartado anterior, en matemáticas I de ciencias, **la finalidad del estudio es comprender el concepto de límite** y todos los contenidos que se van a trabajar son mayormente de forma conceptual.

Siguiendo con el contenido del libro, observamos que, una vez presentado el concepto de límite de función y su existencia en un punto, y en el infinito, aplicando también técnicas de interpretación gráfica del límite, pasa al simple cálculo de éstos siguiendo una forma mecánica para ello:

> "Sustitución de la variable x por el valor de a en la función $f(x)$.
>
> Operaciones indicadas en la función y simplificación del resultado.
>
> En caso de que aparezca una operación no definida en los reales, se aplicará las propiedades de los límites o se buscará un método alternativo que permita evitar dicha operación. (Indeterminaciones)"

Para este libro, solo serán necesarios los cálculos de los límites laterales si el resultado del límite da lugar a una operación inexistente o si $f(x)$ es una función a trozos y $x = a$ es el valor en el que los trozos de la función se separan. En el resto de los casos, los límites laterales siempre coinciden.

Es evidente que en el "paso al límite" la variable x tiene que ser sustituida por el punto a. Sin embargo, el libro no explica que el límite de x cuando x tiende a a es el propio a. Una vez establecido este principio, son las propiedades aritméticas las que permiten hacer las sustituciones que índica el límite.

Como podemos observar, todo este contenido expuesto que hemos sacado de la editorial Edelvives para este curso induce a aprendizajes puramente mecánicos y de aplicación. Por tanto, se puede concluir que, aunque vimos en los contenidos del currículo del BOCYL y BOE que una de las finalidades del estudio para este curso era comprender el concepto de límite, en este caso se puede apreciar que no se considera que lo tengan muy en cuenta, ya que se dedican a la mecánica del cálculo de límites en vez de abundar en la comprensión conceptual. A pesar de ello, si atiende a otras finalidades expuestas en los contenidos del currículo como son realizar las operaciones elementales de cálculo de los mismos, y aplicar los procesos para resolver indeterminaciones. La primera aplicación teórica del concepto de límite es establecer el concepto de continuidad, pero este tópico no es objeto del presente trabajo de fin de máster.

Considerando ahora la misma editorial en matemáticas II de ciencias se realiza un estudio similar del tratamiento que hace sobre el concepto de límite. Se observa lo siguiente:

Aparece el tema de límites de funciones donde se estudian los conceptos con más rigor que los tópicos estudiados en el primer curso, aumenta la profundidad del tratamiento y aparecen conceptos nuevos, como es por ejemplo la regla de L'Hôpital aplicada a la resolución de límites que presentan indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Esta notación constituye un error didáctico ya que no está definida esa aritmética y en su lugar, tales indeterminaciones debieran escribirse así: $\frac{\to 0}{\to 0}$ y $\frac{\to \infty}{\to \infty}$.

En este curso, se presenta la definición del límite de una función en un punto de la siguiente manera:

> "Se dice[1] que $\lim_{x \to a} f(x)$ = L, si, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real $\delta > 0$, tal que, si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$".

Cabe destacar que esta definición es errónea, debería ser $0 < |x - a| < \delta$, ya que a debe ser un punto de acumulación del dominio de definición de la función y pudiera ser que a no perteneciera al dominio de la función.

[1] Acción verbal con poca propiedad, así escrito parece como si se tratara de un rumor.

Se puede observar que la metodología que se utiliza en estos dos cursos es similar (definición intuitiva, ejemplos y gráficas, definición métrica, algunas propiedades y sobretodo cálculo y más cálculo de límites). Se trata de estudiar el propio concepto de límite de forma mecánica y sus variantes para su aplicación y cálculo en diferentes ámbitos.

Si consideramos ahora el siguiente libro de análisis: *Análisis clásico elemental* (Marsden, Hoffman, 1998), con el cual se trabaja en la asignatura de cálculo diferencial propia al segundo curso de Universidad de la carrera de Matemáticas, podemos extraer la siguiente definición de límite de una función en un punto:

> "Sea A $\subseteq \mathbb{R}^{n}$ y x_0 un punto de acumulación de A. Sea *f*: A $\rightarrow \mathbb{R}^{m}$ una función. Se dice que f tiene límite cuando x tiende a x_0, si se verifica la siguiente condición: Existe $y_0 \in \mathbb{R}^{m}$ de modo que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ε) tal que si $x \in$ A y $0 < ||x - x_0|| < \delta$ entonces $||f(x) - y_0|| < \varepsilon$. Se escribe $\lim_{x\rightarrow a} f(x)$ = y_0, y se dice que y_0 es el límite de *f* cuando x tiende a x_0".

Observamos que en esta definición, como en el ejemplo anterior, se hace uso de la expresión "se dice que", indica poco propiedad y ese término es más propio de un rumor. Asimismo, la acción verbal "tiene" se suele interpretar como que la función tiene imagen en $x = a$. Finalmente en el texto de la definición se utiliza una notación de normas en vez de valores absolutos que es similar a la que se estudia ya en el segundo curso de bachillerato. Sin embargo, se debe resaltar que el uso de normas solo tendría sentido en el espacio de partida, pero nunca en el de llegada, ya que es $\mathbb{R}$.

CAPÍTULO II

ANTECEDENTES

II.1. INTRODUCCIÓN

Una vez conocido el trato de concepto de límite en algunos libros tanto de bachillerato como de universidad, se realizará una pequeña investigación sobre el tema de la concepción de límite funcional y secuencial. Esta investigación de la que hablamos trata de estudiar y examinar un conjunto de trabajos y libros los cuales se analizan, y también a un grupo de estudiantes los cuales presentan su propia definición de límite, para luego investigar ciertos errores, dificultades u obstáculos, etc. que podamos observar.

Por ejemplo, atendiendo a la definición del libro de Edelvives para 2º de Bachillerato, editorial que ya hemos considerado anteriormente, tenemos:

> "Dada una función, $f(x)$, el límite de $f(x)$, cuando x tiende al valor a, es el valor al que se aproximan los valores de la variable y cuando los valores que toma la variable x están muy próximos al valor de a. Se expresa como $\lim_{x\to a} f(x)$ y se lee: "límite de $f(x)$ cuando x tiende a a". Además, añade: "La expresión $\lim_{x\to a} f(x)$ = L significa que, cuando la variable x toma valores próximos al valor de a, entonces la variable y toma valores muy próximos al valor de L". (Edelvives, 2015).

Como citamos anteriormente, existe un error muy común por parte del alumnado como es el identificar **aproximación con tendencia**. Esta diferencia es muy importante y no suele recibir la atención que merece en las definiciones de límites, tanto de funciones como de sucesiones.

Es importante tener en cuenta el siguiente resultado cuando se trabaja con aproximaciones en la recta real:

- Cualquier valor P es una aproximación de otro valor dado Q.
- Cualquier valor de una función es una aproximación del límite de la función si éste existe. Si una función tiene límite, tiende al valor del su límite.

– Que un número cualquiera P sea una aproximación de L mejor que otra Q significa que es está más cerca o próximo en la recta real (menos distancia) a L, es decir, que la diferencia positiva que existe entre P y L es menor que la diferencia positiva entre L y Q. En la Figura 1, $L - P < Q - L$.

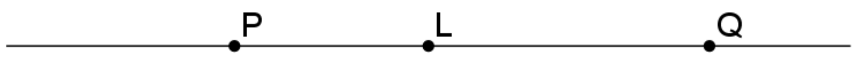


Figura 1. A representación de mejor aproximación.

Considerando la definición que hemos añadido de los apuntes del segundo curso de la carrera de matemáticas podemos observar su similitud con la que se estudia ya en el segundo curso de bachillerato (obtenida del libro de Edelvives de segundo de Bachillerato) como ya hemos visto más arriba (aunque esta última no estaba del todo bien escrita).

Como podemos intuir o ver hasta ahora, existe una manera más sencilla de definir este concepto mediante el uso de "aproximaciones óptimas" y que facilita el aprendizaje y estudio al alumnado (Blázquez, Gatica, Ortega y Banegas, 2006). Estos autores probaron que la definición basada en términos de aproximaciones es mucho más sencilla para los alumnos (la entienden mejor o mucho mejor que la definición métrica) y además no la olvidan con tanta facilidad. Estos autores proponen que para los cursos de bachillerato es más apropiada la definición que se basa en aproximaciones. Su enunciado es el siguiente:

> "El número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$ = L, sí y sólo si para cualquier aproximación K de L, (K ≠ L), existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran la aproximación K de L".

Esta definición evita el subjetivismo, considera que el límite es un atributo y utiliza el concepto de aproximación que es más sencillo para los alumnos, bien entendido que se trata de aproximaciones que mejoran a una aproximación dada y por tanto, aunque resulta más intuitiva la aproximación fijada y el entorno reducido juegan el papel de ε y δ utilizados en la definición métrica.

A esta definición haremos referencia más adelante en la propuesta didáctica del concepto.

Antes de nada, vamos a tratar de analizar el estudio y análisis de la historia del concepto de límite que se ha considerado tanto en alumnos de bachillerato como en alumnos de universidad para contrastar lo intuido en los cursos más bajos y llegar a determinar esta definición que hemos expuesto como la más propicia para el aprendizaje del alumnado atendiendo a errores, debilidades, carencias, etc., que se han apreciado en el estudio de varios trabajos de los alumnos.

Para fijar ideas, la sucesión $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n=2,3,\ldots}$ es una sucesión monótona creciente que se aproxima a 1, pero también a cualquier número mayor que 1. Sin embargo, sólo tiende a 1.

Hay muchos estudios de investigación, tanto funcional como secuencial sobre las concepciones de los alumnos en torno al concepto de límite (Blázquez, 1999, 2000, 2001, 2002, 2006; Sierpinska, 1985 y 1987; Vinner, 1981; Robinet, 1983; Cornú, 1983 y 1991; Sánchez Compaña, 2012; Sánchez, 1997; Cottrill et al, 1996; Valls, Pons y Llinares, 2011; Fernández, 2015;,…). Tall y Vinner (1981), señalan alguna de las imágenes conceptuales que los alumnos tienen en torno a los conceptos de límite secuencial y límite funcional, y que pueden producir un conflicto cognitivo, relacionándolas, eso sí, con la instrucción recibida. Estos autores destacan la imagen que los alumnos tienen del concepto de **límite secuencial como proceso sin fin**, inacabado, donde los términos de la sucesión se aproximan pero no llegan al límite (de ahí que los alumnos defiendan que 0´9999... sea distinto de 1), lo que les lleva a la imagen de tendencia con términos distintos del límite (no aceptan términos iguales y lo justifican distinguiendo entre tender y ser igual).

Con esta misma idea, Vinner (1991) constata que los alumnos tienen las siguientes imágenes conceptuales que les llevan a error:

- Una sucesión no debe alcanzar su límite (así, la sucesión 1, 1, 1,..., no tiene límite)
- La sucesión debe ser monótona (de donde sucesiones como $1 + (-1)^n/n$ no tienen límite).
- El límite es el último término de la secuencia.

Al igual que el límite secuencial, el límite funcional se asume como un proceso dinámico e inacabado: cuando x se aproxima hacia a, $f(x)$ se aproxima al límite sin alcanzarlo, y de nuevo surge la concepción de las imágenes distintas del límite.

Otros de los autores como Cornu (1983) analiza las concepciones y obstáculos de los alumnos sobre el concepto de límite y, más recientemente, Fernández Plaza (2015) vuelve a analizar las concepciones analizando tareas de significación del concepto. En esta investigación aparecen las siguientes concepciones de los alumnos:

- Respecto a la expresión "tender a", los alumnos tienen las siguientes concepciones: aproximarse, aproximarse sin llegar, aproximarse hasta que se alcanza, semejanza (sin variación, como en la expresión "este azul tiende a violeta").

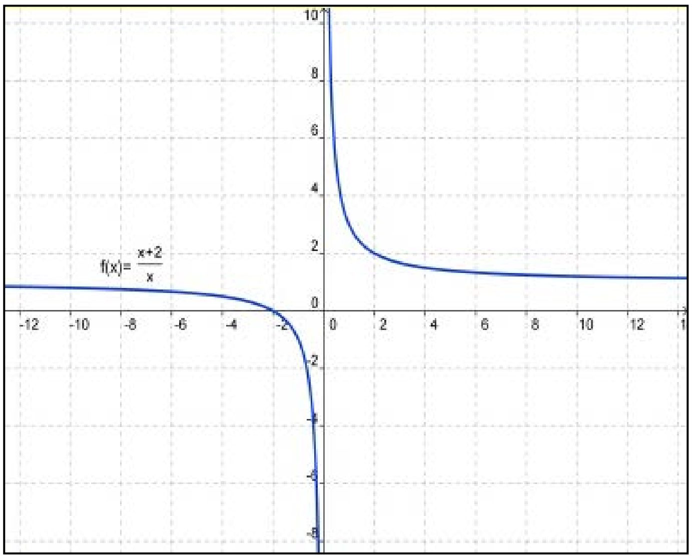
- Respecto al límite aparecen: límite inmóvil alcanzable, límite inmóvil inalcanzable, punto al que uno se acerca sin alcanzarlo, punto al que uno se acerca y alcanza, máximo o mínimo, límite inferior o superior, intervalo, lo que viene "inmediatamente después" de lo que se puede alcanzar, restricción, fin.

Basándose en los modelos que se extraen de la tesis de Cornu, Williams (1991) expone su propósito de explorar las visiones que los alumnos de la universidad tienen sobre las siguientes concepciones del límite: concepción dinámica, límite como cota, concepción formal, límite como valor inalcanzable y límite como aproximación. Concluye que la concepción dinámica y la de límite como valor inalcanzable coexisten con la definición formal, lo que quiere decir que los alumnos describen su comprensión sobre el límite en términos de dos o más modelos informales y que aceptan diferentes descripciones de límite como válidas.

En la tesis de Sánchez (1997) sobre la enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función en primer curso de ingeniería técnica, se señalan las siguientes concepciones ligadas a la génesis histórica del concepto de límite, siguiendo las etapas que consideran Cornu (1983) y Robinet (1983) en su estudio histórico del límite:

- <u>La concepción geométrico-gráfica</u>. Se considera que aparece dicha concepción cuando se utiliza la representación gráfica en el estudio de límites.

  <u>Ejemplo:</u>



$$\lim_{n \to \infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{n \to -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{n \to 0+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{n \to 0-} f(x) = -\infty$$

$$f(2) = 2$$

Figuras 2a y 2b. Ejemplo de representación gráfica (2a) y geométrica (2b) del límite de una función.

- La concepción numérica o aritmética. Las cuestiones de convergencia y aproximación están ligadas al cálculo numérico.

Ejemplo:

Ejemplo Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+n}-\sqrt{1+n}\right)$.

Solución

$$\sqrt{2+n}-\sqrt{1+n}=\frac{\left(\sqrt{2+n}-\sqrt{1+n}\right)\left(\sqrt{2+n}+\sqrt{1+n}\right)}{\sqrt{2+n}+\sqrt{1+n}}$$

$$=\frac{(2+n)-(1+n)}{\sqrt{2+n}+\sqrt{1+n}}=\frac{1}{\sqrt{2+n}+\sqrt{1+n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2+n}-\sqrt{1+n}\right)=0$.

Figura 3. Ejemplo de aplicación de la aritmética de límite al cálculo.

- La concepción métrico-analítica. Aparece cuando se enuncia la definición en términos de ε y δ, abandonando la geometría y los infinitésimos. La definición fue dada por Weierstrass.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 4}(2x+1)=9$$

Puesto que $2x+1$ está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a 4 cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora, se debe demostrar que

para cualquier $\varepsilon>0$ existe una $\delta>0$ tal que

si $0<|x-4|<\delta \;\Rightarrow\; |(2x+1)-9|<\varepsilon$

$\leftrightarrow$ si $0<|x-4|<\delta \;\Rightarrow\; |2x-8|<\varepsilon$

$\leftrightarrow$ si $0<|x-4|<\delta \;\Rightarrow\; 2|x-4|<\varepsilon$

$\leftrightarrow$ si $0<|x-4|<\delta \;\Rightarrow\; |x-4|<\frac{1}{2}\varepsilon$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$. Con esta elección de δ se establece el siguiente argumento:

$0<|x-4|<\delta \to 2|x-4|<2\delta \to |2x-8|<2\delta \to |(2x+1)-9|<2\delta$

$\to \quad |(2x+1)-9|<\varepsilon \quad \{\text{ya que } \delta=\frac{1}{2}\varepsilon\}$

Así, se ha establecido que si $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$, el sigiente enunciado se cumple:

si $0<|x-4|<\delta \;\Rightarrow\; |(2x+1)-9|<\varepsilon$

Esto demuestra que

$\lim_{x\to 4}(2x+1)=9.$

Figura 4. Ejemplo de concepción métrico-analítica del concepto de límite.

- La concepción topológica. El límite se define de forma más general utilizando la noción de abierto y punto de acumulación.

Sánchez también se aporta una lista de obstáculos epistemológicos y didácticos, relativos al concepto de límite bastante interesante:

- Centrarse en la forma de las aproximaciones de los valores de las variables independiente y dependiente más que en las propias aproximaciones. El obstáculo provoca errores a la hora de proponer a qué valor se aproximan ciertos números, puesto que los alumnos se fijan en la forma que tienen. Es necesario distinguir entre número y forma de escribir el número.

- Uso exclusivo de la aproximación gráfica, sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente. Este es un obstáculo didáctico que surge por el uso de gráficas para ilustrar el límite sin vincularlas a tablas de valores y por el poco énfasis que se hace en contenidos de aproximación.

- Creer que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo. Es un obstáculo epistemológico que surge al no discriminar entre aproximación y aproximación "tanto como se quiera". También se detecta cuando la aproximación no es una aproximación dinámica, por ejemplo en el caso de funciones constantes, y el alumno deduce que no hay límite.

- Creer que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos. Es necesario distinguir entre un número finito de valores y "casi todos los valores" para que no se produzcan situaciones como la de pensar que una función que tiene un límite lateral también tiene límite.

- Creer que el entorno es siempre simétrico. Es un obstáculo ligado a la transposición didáctica del concepto que se produce cuando se interpreta de forma geométrica la definición analítica.

- Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de ∞. Este obstáculo, que se puede considerar tanto epistemológico como didáctico, es el que origina el tratamiento del infinito como un número y da lugar a expresiones como $1/0$ o $1/\infty$, al no discriminar entre número y conceptos como cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas.

- Creer que las letras ε y δ, que aparecen en la definición formal de límite de una función en un punto, representan magnitudes constantes o variables, obstáculo epistemológico tiene que ver con los diferentes significados que tienen las letras en álgebra y en lógica.

- Creer que existe el límite de una función en un punto porque la diferencia entre los sucesivos valores de la variable dependiente va disminuyendo.

- Creer que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto. Obstáculo didáctico que se puede evitar discriminando entre imagen de una función en un punto y valor aproximado, distinguiendo entre función y conjunto de sus valores, y evitando ejemplos de funciones que se identifican con una función continua salvo en el valor al que tiende x, de manera que se asocia el límite de la primera función con el valor de la función continua en el punto.

La investigación concluye mostrando la persistencia de los obstáculos tras la formación, y afirma que, si bien los estudiantes son capaces de resolver ejercicios de cálculo algorítmico de límites, siguen sin comprender el concepto.

Además, Sierra, González y López (1998) también reproducen cinco concepciones del límite que aparecen en la epistemología del concepto:

- Concepción de los matemáticos hasta finales del siglo XVII, con la idea de aproximación mediante procesos geométricos iterados, procesos que de una u otra forma están basados en el método de exhausción de Eudoxo y que se transcribe a continuación:

> Método de exhausción de Eudoxo: "*Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su* mitad*, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano*". (Tomada de: "Historia de la matemática", Carl B. Boyer).

> "Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales".

- Concepción de Euler y Lagrange, centrada en los aspectos relacionales de la función sin tener en cuenta los entornos.

Euler: “Una función es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes". (Así, sienta las bases para separar el cálculo de la geometría, al trabajar sobre funciones y no sobre variables).

- Concepción de D´Alembert

“Una cantidad es el límite de otra cantidad variable, si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)”.

- Concepción de Cauchy, que está relacionada con la idea de aproximación.

“Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás”.

- Concepción de Weierstrass, que corresponde al proceso de aritmetización del análisis.

“Si, dado cualquier ε, existe un n_0 tal que, para todo $0 < n < n_0$, la diferencia $f(x_0 \pm n)$ – L es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_0$”.

- Concepción topológica de Hausdorff.

Una función $f(x)$ tiene por límite L para $x = a$ cuando para todo entorno E_L del punto L, se verifica $f^{-1}(E_L) = E_a - \{a\}$, o bien, $f^{-1}(E_L) = E_a$. En el segundo caso, además de tener límite la función en $x = a$, diremos que es continua en dicho punto.

Esta definición, que evoluciona desde la concepción dinámica de Cauchy a una concepción estática, no es el final de un largo proceso evolutivo, ya que en el siglo XX surgen concepciones de tipo topológico como hemos apuntado en ese último punto. Estas concepciones están ligadas a la generalización de los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que constituye otra etapa en el desarrollo del concepto y, por lo tanto, están muy alejadas de los planteamientos curriculares de educación secundaria. Para este trabajo, vinculado mayoritariamente a la educación secundaria, la definición de Weierstrass, en la que subyace una concepción numérica del límite, culmina esta evolución, la cual sí que es verdad que aunque elimina ciertos problemas que se asocian al dinamismo de las definiciones de Cauchy o D´Alembert también acarrea otros asociados al formalismo simbólico (Blázquez, Gatica, Ortega, y Benegas, 2006).

Los alumnos relacionan dichas concepciones con algunos de los criterios de justificación para el límite que utilizan los alumnos como son por ejemplo, límites laterales, aproximarse, el valor de la función en un punto, etc., mientras que la definición formal la utilizan esporádicamente. Concluyen que existe una diferencia entre la definición y las concepciones, y que los alumnos utilizan evocaciones de éstas últimas cuando se enfrentan a las tareas.

Otra de las propuestas que se llevan a cabo en los años pasados y que no convence respecto a la definición expuesta sobre limite secuencial es la de Tall y Schwarzenberger (1978), los cuales ponen de manifiesto una serie de dificultades que provienen de traducir al lenguaje informal la definición de límite secuencial y convertirla en una definición subjetiva:

> "s es el límite de s_n si podemos tomar s_n tan cerca de s como queramos haciendo n suficientemente grande".

Como vemos, esta definición muestra claramente una pérdida de precisión puesto que no se especifica cómo de cerca se puede tomar la sucesión con la expresión “como queramos” (¿qué ocurre si no se quiere?, ¿se puede tomar una décima, una millonésima?). Esta definición ya considera un atributo, pero la cuestión crucial es que con esta definición no se controla la aproximación. Tampoco se especifica la relación entre s y n. Y además, la palabra *cerca* se asocia a *distinto*, y dicha imagen se fomenta normalmente con los ejemplos utilizados.

Tall y Schwarzenberger proponen la siguiente definición:

> "Una sucesión s_n de números se dice que es una sucesión de aproximaciones al número real s si al representar gráficamente en la recta real s_n para cualquier grado de precisión, hay un número n_0 tal que s_{n_0}, s_{n_0+1}, s_{n_0+2}, s_{n_0+3},... son indistinguibles de s".

Observamos, primero de todo, que en esta nueva propuesta de definición siguen apareciendo imprecisiones tales como “se dice que” y tiene poco sentido la afirmación de que a partir de un término son todos indistinguibles, ya que dos números son indistinguible solamente si son iguales.

Además, establecen que traduciendo grado de precisión por ε se obtiene la definición formal y proponen también utilizar la notación $s = lím\, s_n$, sin hacer referencia a la tendencia infinita de n. Quizá con ello traten de evitar conflictos y, también, que puedan considerar el límite como algo inalcanzable. En lugar de poner el acento en que *n* tiene que ser grande, se pone en que s_n y *s* son indistinguibles (infinito actual y no potencial).

Cabe resaltar que esta propuesta definida por los autores no es así, ya que el grado de precisión del que habla en los límites de sucesiones está sujeto a la resolución de la pantalla (en caso de trabajar en un ordenador) o a la del papel (si lo estamos escribiendo en una hoja), y por lo tanto, es finita. Además, la consideración de que s_n y s son indistinguibles tampoco está bien, ya que sólo son indistinguibles si coinciden.

Para las demostraciones del cálculo de límites (que son muy intuitivas, pero difíciles de demostrar) proponen trabajar con el control del error entre el límite y su aproximación (mejor aproximación). Como vemos, la propuesta de estos autores es eminentemente numérica y eliminan la dependencia funcional de *n*.

Existen numerosos estudios e investigaciones a lo largo de la historia sobre el concepto de límite funcional y secuencial que tratan de proponer una definición que sea correcta sobre este concepto y evitar errores, obstáculos y dificultades para su aprendizaje tanto en la ESO como en bachillerato y la universidad. Como se ha podido observar en las anteriores investigaciones basadas en el currículo legal y en el currículo de los libros y los textos, el concepto de límite, ha recibido una gran variedad de tratamientos en las distintas reformas del sistema educativo español y también en la práctica educativa. Además, cabe destacar que la comprensión de dicho concepto es vital para entender otros como son la convergencia de series, la derivada o la integral, y que, por tanto, es la base del cálculo que los alumnos estudian en la etapa universitaria y tiene una importancia bastante notable.

Sea cual sea el tratamiento que se le dé al concepto, todas las investigaciones coinciden en señalar las dificultades del mismo, intrínsecas y extrínsecas, lo que apoya la intuición, extraída de la práctica educativa, que todos los profesores tenemos de que éste es uno de los conceptos más difíciles de comprender por los alumnos de la educación preuniversitaria.

Todas las investigaciones revisadas parecen coincidir en que el formalismo no es la única vía de estudio del concepto de límite y que, de hecho, no es la adecuada en la educación preuniversitaria, donde se ha probado que los alumnos utilizan otras concepciones de límite que incluso pueden estar en contradicción con la definición formal del concepto y que no llegan a comprenderlo, aunque sí sean capaces de resolver algunos problemas algorítmicos sobre el límite. En el currículo que propone la L.O.G.S.E. se ha suprimido el formalismo en gran parte, dando paso a una propuesta de un tratamiento más intuitivo de los conceptos.

A pesar de ello, la definición formal de límite sigue apareciendo en los textos que se han publicado hasta el momento, eso sí, como información complementaria en muchos de ellos. La mayoría de los textos revisados dan una idea de límite funcional como simple aproximación. Sin embargo, como señala Robinet, no basta con transmitir una concepción tan intuitiva de límite como la de aproximación, puesto que, aunque puede parecer suficiente para un alumno de educación secundaria, el concepto así creado no constituye una buena base para el resto de los conceptos de cálculo, y no es suficientemente operativo a la hora de demostrar propiedades y resultados, que es lo que demandan las enseñanzas universitarias y, sobre todo, el alumnado puede no querer aprender una conceptualización formalista porque cree que no es necesaria, que no aporta nada nuevo.

También la idea de aproximación subjetiva ("tanto como se quiera") carece de la precisión necesaria para constituir una buena herramienta, según señalan Tall y Schwarzenberger.

Otra investigación que se hace acerca del concepto de límite se estudia en los alumnos universitarios de Ciencias (matemáticas, físicas, ingenierías, arquitectura) observando la dificultad que presenta para ellos y cómo lo olvidaban fácilmente, ya que pocos alumnos que cursan estos estudios son capaces de escribir una definición del concepto si ha pasado cierto tiempo desde su estudio. Se presenta una investigación realizada con alumnos del máster de Secundaria en la que se analiza el nivel de coordinación que alcanzan los alumnos entre las variables dependiente e independiente y el conocimiento matemático para la enseñanza que poseen sobre dicho concepto. Tanto Cottrill et al. (1996) como Valls, Pons y Llinares (2011), aplicando el marco APOE, a partir de una descomposición genética del concepto, consideran que la función es la que organiza la coordinación entre las aproximaciones de la variable independiente y los valores de la función, poniendo en juego el tipo de definición del concepto que se considere. La apreciación del nivel de la coordinación de las aproximaciones es la que marca la comprensión del concepto de límite por los alumnos. Cottrill et al. tratan de establecer esta coordinación a través de la definición métrica y concluyen que sólo la logran algunos alumnos. Valls et al. no analizan más allá de la coordinación de las aproximaciones de las variables independiente y dependiente porque, según ellos, son demasiado escasos los alumnos que alcanzan la coordinación en el sentido de Cotrill et all.

Con el fin de averiguar qué tipo de conocimiento matemático sobre el concepto de límite tenían los alumnos del "Máster de Secundaria", en el curso 2015-2016 se realizó un taller con esos alumnos sobre dicho concepto y uno de los objetivos del mismo consistía en averiguar si los alumnos del máster de secundaria (módulo de matemáticas) eran capaces de establecer coordinaciones entre las variables optimizando y controlando las aproximaciones mediante tablas numéricas. Un segundo objetivo consiste en averiguar cuál es la comprensión del concepto de límite finito de una función en un punto que muestran los futuros profesores de matemáticas, y que podrían transmitir a sus alumnos de bachillerato, y determinar qué tipo de conceptualización (intuitiva, aproximación óptima, métrica) era la más apropiada (Arce, Conejo, Ortega, y Pecharromán, 2016).

A continuación, se describen algunas de los resultados y valoraciones que surgieron en el citado taller en algunas de las tareas. Éstas se realizaron íntegramente en el aula.

1. La mayor parte de los alumnos con los que se realizó el taller respondieron que *2-1/n, n=1, 2,…* es una sucesión que se aproxima a *2* y que tiende a *2*, pero todos afirmaron que no se aproxima a *1000.*
2. Ningún alumno del taller escribió una definición correcta de límite. La más acertada es ésta:

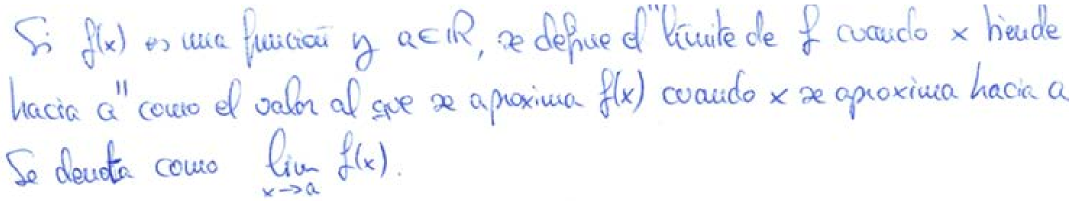

Si $f(x)$ es una función y $a \in \mathbb{R}$, se define el "límite de f cuando x tiende hacia a" como el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima hacia a. Se denota como $\lim_{x \to a} f(x)$.

Figura 5 . Definición dada por un alumno del grado de matemáticas. (Tomada de: *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico*).

Se observó además que todos los alumnos del máster identificaron aproximación con tendencia, y todas las definiciones que escribieron del concepto de límite se quedan en una concepción intuitiva. El análisis de las respuestas y del debate posterior con los alumnos exponiendo dichas respuestas y diferentes formas de definición a cerca del concepto de límite generaron un debate sobre su familiaridad, su equivalencia, su veracidad o falsedad del concepto de límite y cuáles consideraban más apropiadas para la docencia en bachillerato. Todo esto puso de manifiesto que los alumnos se han ido afianzando en los conceptos de aproximación, tendencia y límite finito de una función en un punto. Se observó también que no se encontraron diferencias sustanciales entre las respuestas de los graduados en matemáticas, ingeniería y arquitectura, todas ellas caracterizadas por su alto grado de deficiencia. Además, los alumnos fracasan al utilizar las definiciones más familiares para ellos (las métricas) en la demostración de alguna propiedad sencilla (por ejemplo, la unicidad del límite). Ante varias definiciones equivalentes, interpretan la equivalencia entre ellas más por su forma que por su significado.

Ítem 13. Señala con un asterisco las 2 definiciones que sean más familiares para ti de las siguientes. Escribe las que sean verdaderas o falsas (previamente se ha trabajado el concepto de tendencia):

I. La función *f* tiende hacia el límite *L* en *a* significa: para todo $\varepsilon>0$ existe algún $\delta>0$ tal que, para todo *x*, si $0<|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$. (*)

II. La función *f* tiende hacia el límite *L* en *a* significa: para todo $\varepsilon>0$ existe algún $\delta>0$ tal que para todo x de $(a-\delta, a+\delta)$* se verifica que f(x) pertenece a $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

III. El número L *es el límite de la función* f *en el punto* a*, y se escribe* $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$ *(se lee límite de* f(x) *cuando* x *tiende a* a *es* L*), sií cuando* x *tiende a* a*, siendo* x *distinto de* a*, sus imágenes,* f(x)*, tienden a* L.

IV. *El* número L *es el límite de la función* f *en el punto* a*, y se escribe* $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$*, sií para cualquier aproximación* K *de* L *(distinta de L) existe otra aproximación* H *de* a *(distinta de* a*) tal que las imágenes,* f(x)*, de todos los puntos, distintos de* a*, que mejoran esta aproximación, H, mejoran la aproximación* K *de* L

V. *El número* L *es el límite de la función* f *en el punto* a*, y se escribe* $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$*, sií para cualquier aproximación* K de L ($K \neq L$) *existe un entorno reducido de* a *tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran la aproximación* K *de L.*

VI. *El número* L *es el límite de la función* f *en el punto* a*, y se escribe* $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$*, sií para toda sucesión* $\{x_n\}$ *con límite* a, *la sucesión formada por sus imágenes*, $\{f(x_n)\}$, *tiene límite* L.

VII. *El número* L *es el límite de la función* f *en el punto* a*, y se escribe* $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$*, sií* $\text{lím}_{x\to a^-}f(x)= \text{lím}_{x\to a^+}f(x)=L$

Sólo 1/3 de los alumnos considera correctas las definiciones presentadas. En suma, poseen un conocimiento común bastante deficiente y están muy lejos de poseer un conocimiento especializado sobre el concepto y su estructura. Después de este debate, se vuelve a hacer un estudio con los alumnos y se aprecia que sus respuestas permiten apreciar que los alumnos han evolucionado en la opinión sobre la creencia acerca de qué definición es la más apropiada en Bachillerato

En conclusión, inicialmente los alumnos del máster, que ya habían completado su formación matemática, no discriminaban entre aproximación y tendencia. Sólo acertaban a reproducir una definición intuitiva en términos de aproximación, y casi siempre incompleta o errónea. El carácter formativo y el desarrollo de los debates les han afianzado progresivamente en la discriminación entre aproximación y tendencia, y en la insuficiencia de la definición intuitiva. La evolución de todos ellos es positiva, pero desigual, y son los alumnos de matemáticas quienes más han progresado durante el desarrollo de la metodología.

Finalmente se pone de manifiesto que sí que se producen coordinaciones numéricas (utilizando tablas numéricas en las que tienen que encontrar los entornos del punto dada una aproximación del límite tal y como se muestra posteriormente) de las variables independiente y dependiente asociadas al concepto del límite, y que estas coordinaciones pueden garantizar la comprensión del concepto. Esto supone un avance respecto de la posición de Valls et al. (2011) que sólo se quedan en aproximaciones y de la de Cotrill el al. (1996), ya que la dependencia $\delta=\delta\ (\varepsilon, f, a)$ utilizando la definición métrica solo puede determinarse en funciones muy sencillas.

Los alumnos participantes en el taller aprecian que la definición como aproximación óptima es la más adecuada para que se utilice en bachillerato. Por esta razón será la que se considere en adelante.

CAPÍTULO III

PROPUESTA

III.1. INTRODUCCIÓN

Para la elección de un concepto de límite como el señalado, la referencia debía ser el currículo de la nueva ley. En lo que se refiere a contenidos relacionados con el límite funcional, merece destacar la supresión en el nuevo currículo del concepto de límite secuencial, lo que es un error, ya que este concepto en sucesiones tiene menos dificultades de aprendizaje que el de límite funcional, ya que la tendencia de la variable es siempre la misma (Blázquez, Gatica y Ortega, 2009). Éste no aparece en forma explícita, aunque pueda considerarse como un caso particular de límite funcional y así se presente en algunos textos de bachillerato. También hay que destacar la idea de introducir el límite infinito como tendencia de una función, concepto que aparece en el último curso de Secundaria Obligatoria y en Bachillerato, así como la importancia que se da a las cuestiones de aproximación en ambas etapas (el currículo anterior, como señala Espinoza (1998), hace una propuesta en esta línea, pero no es una propuesta coherente con el resto del currículo y, de hecho, no tiene proyección en los textos). Hasta el último curso de Bachillerato no aparece en el currículo el concepto de límite finito en un punto y sus aplicaciones a la derivada y a la integral, así como de límites infinitos conducentes al estudio de asíntotas.

Se deseaba aprovechar el hecho, señalado por muchos de los investigadores citados, de que los alumnos utilizan más las concepciones que poseen del concepto de límite que la propia definición formal, y que es la concepción dinámica la más potente en este sentido. Esta concepción, ligada a la aproximación y, por tanto, a las indicaciones del currículo, había que reconducirla hacia una definición de límite lo más precisa posible. Así, se decidió destacar la propiedad que distingue al límite de una simple aproximación, esto es, el hecho de ser la mejor de las aproximaciones (aproximación que no se puede mejorar, y que para facilitar el lenguaje se denomina **aproximación óptima**).

III.2. PROPUESTA DE DEFINICIÓN DE LÍMITE

Considerando las comparaciones de las diferentes conceptualizaciones de límite funcional que son tradicionalmente usadas en la docencia universitaria, añadimos una nueva conceptualización propuesta por Blázquez y Ortega (2009), los cuales, junto a Gatica (2007), tratan de detectar las propuestas de enseñanza de este concepto en el aula, señalando las posibles carencias y comparando dichas propuestas con la realizada por Blázquez y Ortega, que nace de varias publicaciones derivadas de las tesis doctorales de Blázquez (1999) y de Gatica (2007) que a diferencia de los otros autores, apuestan por una definición rigurosa pero exenta del formalismo de la notación métrica o topológica mediante un texto con rigor lingüístico y evitando el subjetivismo y el despotismo propio de todos los otros autores investigados y que forma parte de la detección de posibles carencias, ambigüedades, personalismos, imprecisiones, etc., que aparecen reflejadas en los textos analizados.

Como ya se ha visto, existen numerosas conceptualizaciones de los límites de una función en un punto. El concepto de límite no es ni uniforme, ni único, ni inmutable, ya que la subjetividad, la acción, el orden, el simbolismo, las representaciones gráficas, etc. son diferentes en cada autor y docente y, esto implica que los aprendizajes sean forzosamente diferentes En el análisis realizado por Blázquez Ortega y Gatica (2009) sobre siete textos utilizados en la Universidad (t. Finey, Linés, Spivack,…), entre otras cosas, concluyen que:

> Las definiciones difieren en el orden de las implicaciones y en los usos de éstas, tanto simples como dobles (sin entrar en detalles, respetando la intencionalidad del autor, y considerando que el formalismo está garantizado). Las acciones verbales de la definición son diferentes según los autores (es, tiene, presenta, tiende), lo que lleva a una interpretación diferente de los alumnos. Por ejemplo, el uso de ***tiende*** favorece el obstáculo epistemológico de la inaccesibilidad, mientras que la acción ***tiene*** favorece la interpretación de que la función está definida en el punto. Los subjetivismos ligados al uso del ***plural personalizado*** están presentes en muchos textos (fijamos, encontramos, tanto como queramos, escribimos, diremos), lo que supone un razonamiento particular asociado a la voluntad del usuario y, en consecuencia, le resta el rigor de la universalidad. El uso de la forma impersonal, ***se dice***, tiene una connotación de rumor, el significado se debilita y se resta credibilidad. Las representaciones gráficas son bastante diferentes en los textos, y casi todos ellos presentan representaciones estáticas.

A modo de ejemplo se presenta las dos gráficas siguientes, Figuras 6 y Figura 7, que se tomaron del artículo citado:

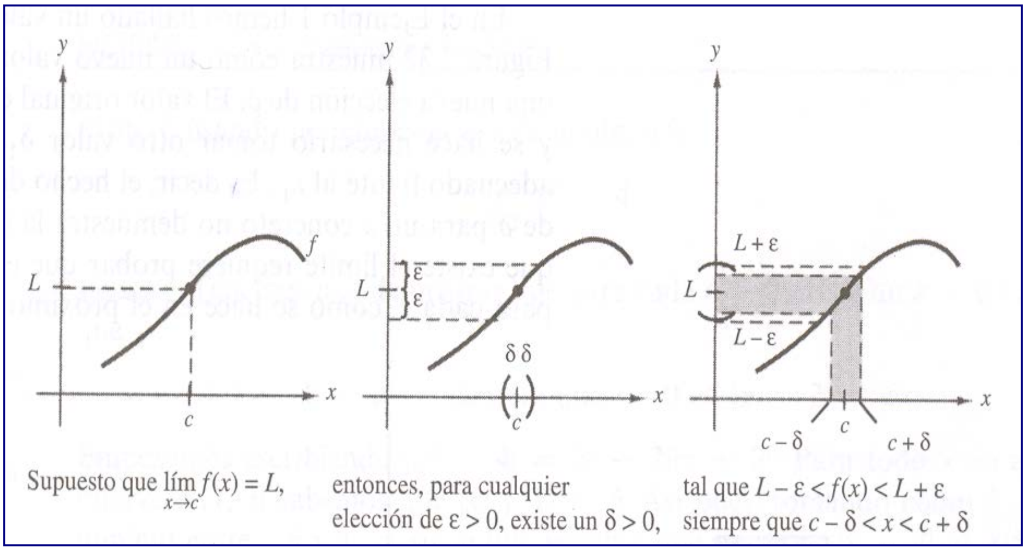


Figura 6: Gráficos secuenciales utilizados por Thomas y Finney para establecer el concepto de límite.

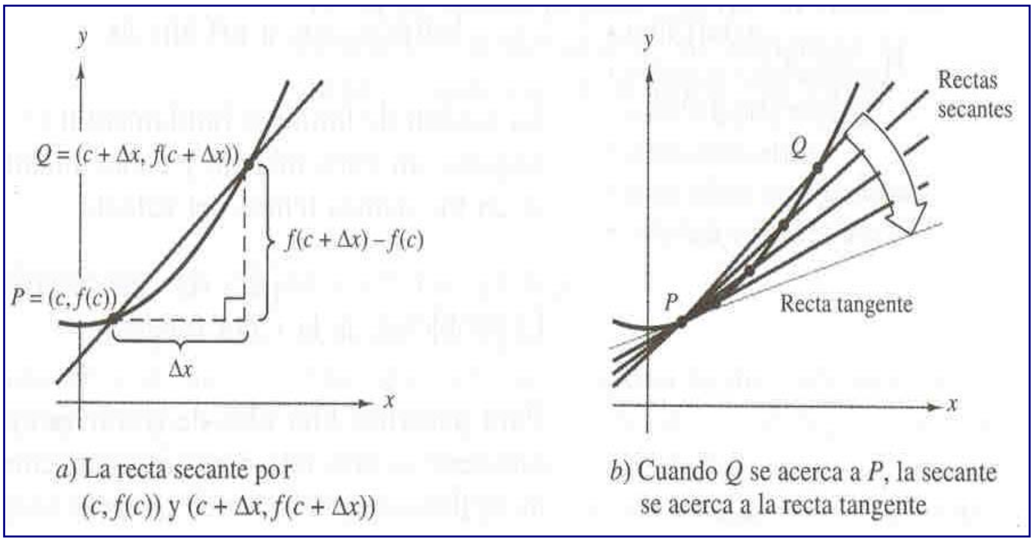


Figura 7. Gráficos utilizados por Larson, Hostler y Edwards para introducir el concepto de límite.

La definición que presentan Blázquez y Ortega es la que hemos citado más arriba y está basada en la idea intuitiva de aproximación, pero imponiendo la condición de que mejore a cualquier otra. Como ya se ha indicado, esta definición presenta mayor sencillez para el aprendizaje por parte del alumnado y que se repite a continuación, pero antes se escribe la definición de límite secuencial, concepto que según estos autores no presenta tantas dificultades de comprensión. De hecho, en la investigación realizada con alumnos de primer curso de universidad por Blázquez, Gatica, Ortega y Banegas (2006), estos autores indican que en los debates de comprensión de la definición métrica se registraron más de 300 intervenciones de los alumnos, mientras que con la definición como aproximación óptima apenas llegaron a 30.

A continuación se reproducen las definiciones de límite tanto de sucesiones como de funciones, pero como es lógico no se escriben todas las variantes.

Definición de límite secuencial finito: L es el límite de una sucesión a_n cuando n tiende a infinito, y se escribe $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \text{L}$, sií para cualquier aproximación K de L, K ≠ L, existe un término de la sucesión n_0 tal que todos los que siguen a éste están más próximos a L que K $\forall n > n_0$ (a_n está más próximo a L que K).

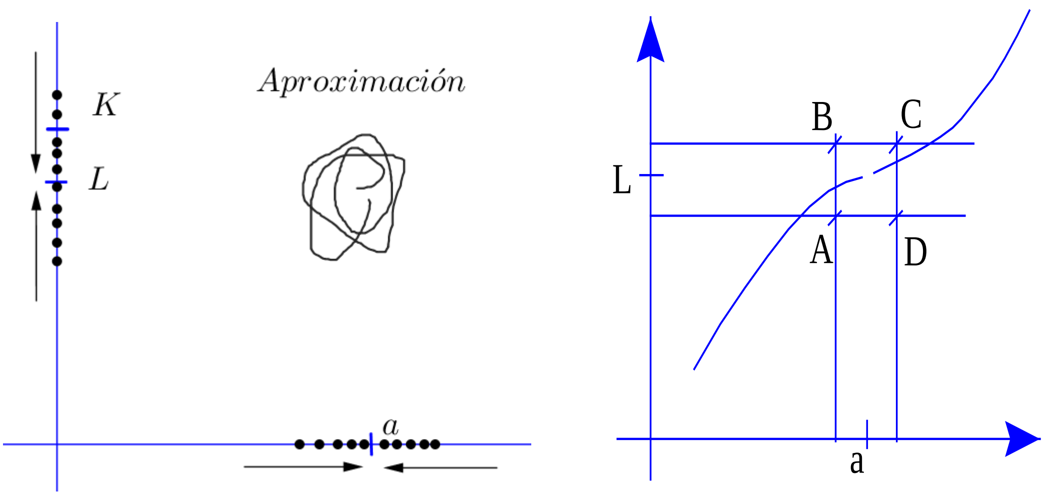
¿Qué quiere decir que a_n está más cercano a L que K? Lo que quiere decir es que la diferencia positiva entre a_n y L es menor que la diferencia positiva entre L y K. Sin embargo, cuando el límite es infinito no se pueden considerar diferencias porque el resultado vuelve a ser infinito, pero es fácil establecer cuando una aproximación de infinito es mejor que otra. K es una aproximación mejor que H de $+\infty$ $(-\infty)$ sií K > H (K < H).

Para el límite secuencial infinito se considera la siguiente definición:

***Definición de límite secuencial infinito*:** El límite de una sucesión a_n cuando n tiende a infinito es $+\infty$ $(-\infty)$ y se escribe $\lim_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$, sií para cualquier número real K, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall\ n > n_0$, a_n > K. Esto es de la misma forma para el caso de $\lim_{n\to\infty}(a_n) = -\infty$.

Límites de una función:

Definición de límite finito El número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe $\lim_{x\to a} f(x)$ = L, sí y sólo si para cualquier aproximación K de L, (K ≠ L), existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran la aproximación K de L.



Figuras 8a y 8b. A representación de aproximación.

Lo que se refleja en la Figura 8a de la izquierda es que el límite de la función en $x = a$ es L si cuando x tiende a a sus imágenes $f(x)$ tienden a L.

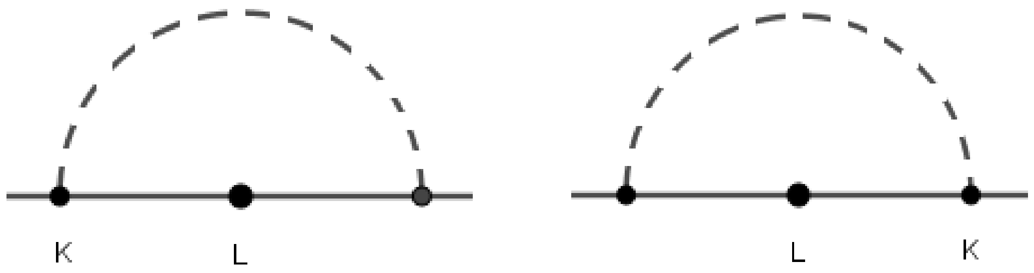
La Figura 8b de la derecha representa lo siguiente: cualquier aproximación a L (distinta de L) determina una banda horizontal que contiene a L, y cualquier aproximación a a (distinta de a) define otra banda vertical que contiene a a y recíprocamente. Por lo tanto, fijada una banda horizontal que contiene a L, existe una banda horizontal que contiene a a, tal que la gráfica de la función tiene que atravesar el rectángulo ADCB exclusivamente por los segmentos AB y CD. Se puede establecer una comparación de estas representaciones gráficas con las anteriores y, en todo caso, serían complementarias.

Definición de límite infinito. El límite de la función f en el punto a es $+\infty$ y se escribe $\lim_{x\to a} f(x)$ =$+\infty$, sí y sólo si para cualquier número real K existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran la aproximación K de $+\infty$, es decir $f(x) > K$.

Casos de $\mathbf{lim}_{x\to a} \boldsymbol{f(x)}$ **:**

Si $x \to a, f(x) \to$ L	**Si** $x \to +\infty, f(x) \to$ L	**Si** $x \to -\infty, f(x) \to$ L
Si $x \to a, f(x) \to +\infty$	**Si** $x \to +\infty, f(x) \to +\infty$	**Si** $x \to -\infty, f(x) \to +\infty$
Si $x \to a, f(x) \to -\infty$	**Si** $x \to +\infty, f(x) \to -\infty$	**Si** $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$

Es evidente que cualquier número real es una aproximación de otro y que cualquier aproximación K de L, K≠L, tanto por la izquierda como por la derecha determina un entorno de L centrado en este punto como vemos en la siguiente ilustración, porque al considerar diferencias positivas es irrelevante que la aproximación sea por la izquierda que por la derecha.



Figuras 9a y 9b. A representación del entorno de un punto L *determinado por* K.

La definición métrica, que es prácticamente la misma que la dada por Heine (Weierstrass), es muy compleja por el formalismo que imponen los símbolos ε y δ y, como hemos visto, sobre todo las dificultades asociadas al valor absoluto. Tal definición, que parece en los textos de bachillerato es la siguiente:

305 **Límites y continuidad**

1.1. Definición

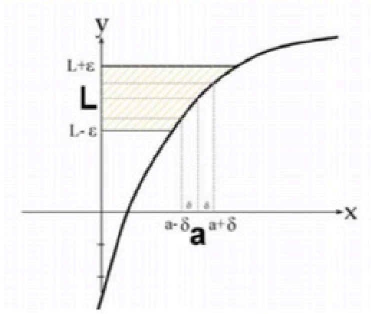
Se define, matemáticamente, el límite de una función, según la expresión:

Dada una función $f(x)$: $X \rightarrow \Re$, X un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando se aproxima a a es L, y se expresa:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Cuando:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Del gráfico anterior, se desprende que, cualquier punto x que pertenezca al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, salvo quizás el propio punto a (por ese motivo aparece en la definición es signo <, $0 < |x - a|$, para eliminar del entorno al punto a), su imagen siempre estará contenida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Y como lo podemos hacer para cualquier ε, entonces, podremos afirmar que L es el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a.

Figura 10. Definición de límite de una función en un punto tomada de la editorial Marea Verde, Matemáticas I. Capítulo 7.

No es fácil que los alumnos comprendan que δ es una función de ε, de la propia función y del punto en el que se considere el límite. Incluso estas dos últimas dependencias pasan desapercibidas.

En la siguiente tabla, figura 11, se muestran las equivalencias entre las unidades elementales de definición de la definición métrica y la definición como aproximación óptima. Esta tabla fue tomada de Blázquez et all (2006).

Asociación de las unidades significantes elementales	
Definición métrica	**Definición como aproximación óptima**
Para todo $\varepsilon > 0$	Para toda aproximación $K \neq L$,
Existe $\delta > 0$	Existe una aproximación $H \neq a$,
Los x tales que $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$	Los x que mejoran la aproximación H de a.
$\lvert f(x) - l \rvert < \varepsilon$.	Las imágenes $f(x)$ mejoran la aproximación K de l.

Figura 11. Tabla de equivalencia entre las unidades elementales de definición.

Si tomamos por ejemplo estas dos funciones afines:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x) + 3$$

$$g(x) = 2x - 1$$

Cuando se ha comprendido que en el límite x se sustituye por a: $\lim_{x\to a} x = a$, es fácil calcular sus límites cuando x tiende a 2,

$\mathbf{\lim_{x\to 2} f(x) = 4}$ $\mathbf{\lim_{x\to 2} g(x) = 3}$

Y en ellos se utiliza que $\lim_{x\to a} x = a$, por eso es interesante establecerlo. Para ello se considera la representación de la función identidad, $y = x$. La aproximación fijada, K, de la ordenada $y = a$, determina un entorno de a, no necesariamente reducido en este caso, $(a - \mathrm{H}, a + \mathrm{H}), \mathrm{H} < \mathrm{K}$, en el que todas sus imágenes mejoran la aproximación fijada.

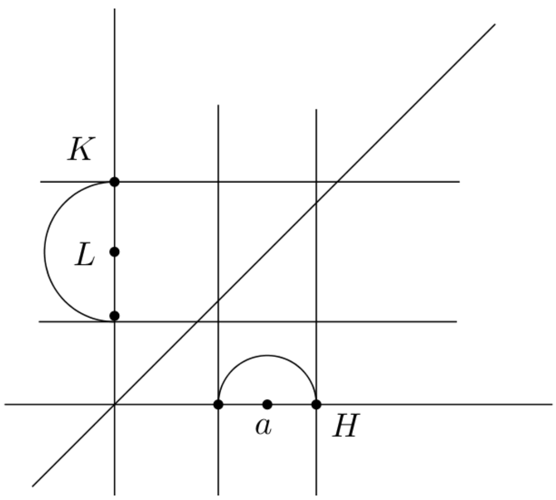


Figura 12. Representación de $\lim_{x\to a} x = a$.

Con los cálculos basados en que $\lim_{x\to a} x = a$ y en las propiedades aritméticas de los límites (alguna se determinará después) se ha "establecido" que los límites son 4 y 3, pero no se ha demostrado que 4 y 3 sean los límites de las funciones de partida cuando x tiende a 2. Para ver que realmente es así, hay que probar que, en ambos casos, se cumple la definición. Para ello hay que establecer las desigualdades que se escriben a continuación:

En un primer caso, para $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x-2| < \delta_1$, entonces

$$|f(x) - 4| < \varepsilon_1$$

Y, en otro caso, que para $\varepsilon_2 > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que $0 < |x-2| < \delta_2$, entonces

$$|g(x) - 3| < \varepsilon_2$$

$|f(x) - 4| = |\frac{1}{2}x + 3 - 4| = |\frac{1}{2}x - 1| = \frac{1}{2}|x-2| < \varepsilon_1$ es suficiente que $\delta_1 < 2\varepsilon_1$.

$|g(x) - 3| = |2x - 1 - 3| = |2x - 4| = 2|x-2| < \varepsilon_2$ es suficiente que $\delta_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_2$.

De las desigualdades anteriores es claro que δ_1 = función de ε_1, δ_2 = función de ε_2 y también se ha visto que dependen de la función, pero como son afines no se aprecia que dependen del punto. Para esto convendría sustituir, por ejemplo, una función afín por una cuadrática $g(x) = x^2 - 1$.

Figura 13. Representación gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}(x) + 3$, δ_1 y ε_1 con la relación de $\delta_1 < 2\varepsilon_1$.

Aquí se puede observar la dependencia de δ_1 numéricamente.

Tomando la definición propuesta anteriormente considerando aproximaciones:

> "El número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = \mathrm{L}$, sí y sólo si para cualquier aproximación K de L, (K ≠ L), existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran la aproximación K de L".

Podemos demostrar estos mismos casos aunque tienen una dificultad bastante considerable como vamos a apreciar.

Vamos a demostrar que: $\mathbf{\lim_{x\to 2} f(x) = 4}$ $\mathbf{\lim_{x\to 2} g(x) = 3}$

Siendo: $f(x) = \frac{1}{2}(x) + 3$ y $g(x) = 2x - 1$

(1) Si K es una aproximación de p = 3 por exceso, por definición $\exists\ \mathrm{E}_2$ tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación. Por tanto, $\forall x \in \mathrm{E}_2$ se tiene que verificar la desigualdad $f(x) <$ K.

(2) Si K' es una aproximación de p = 3 por defecto, por definición $\exists\ \mathrm{E}_2'$ tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación. Por tanto, $\forall x \in \mathrm{E}_2'$ se tiene que verificar la desigualdad $f(x) <$ K'.

Además, sabemos que para cualquier aproximación, tanto por exceso como por defecto, existe un entorno tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación.

Por (1), si tomamos por ejemplo $g(x) = 2x - 1$

Y considerando K como aproximación de 3, que es el valor del límite: $\lim_{x\to 2} g(x) = 3$.

Tenemos que: $2x - 1 - 3 < \mathrm{K} - 3$, es decir:

$$2x - 4 < \mathrm{K} - 3$$

$$2(x - 2) < \mathrm{K} - 3$$

$$x - 2 < \frac{\mathrm{K} - 3}{2}$$

Poniendo $0 < \mathrm{H} < \frac{\mathrm{K}-3}{2}$

Todas las imágenes de $(2 - \mathrm{H}, 2 + \mathrm{H})$ mejoran la aproximación considerada K.

Si tomamos, por ejemplo, K = 3.1, tenemos que $0 < \mathrm{H} < \frac{3.1-3}{2} = 0.05$

Y, como aproximación por exceso a 2 sería: T = $2 + 0.05$

$$x \in (1.95,2.05)$$

Y así observamos que, si seguimos las restricciones de x según K vamos aproximándonos al límite de la función, que es 3.

Lo mismo ocurriría si tomamos una K por defecto en vez de por exceso.

Como vemos, esta forma de demostrar que el cálculo que se ha "establecido" con el valor 3 del límite realizado mediante la definición que hemos considerado de aproximaciones óptimas es muy compleja y en este caso, por ejemplo, vemos que tiene "mayor sencillez" utilizar la definición métrica para quienes estamos habituados a utilizar la definición métrica.

Como no se puede demostrar la dependencia de δ para funciones que sean más complejas se establecen los teoremas de la aritmética de límites ya que todas las funciones elementales se construyen mediante la aritmética y composición de funciones básicas $(cte, x, e^x, sen(x), \dots)$.

Aunque hemos visto que la demostración del cálculo de un límite que hemos realizado anteriormente es bastante complejo mediante esta definición considerada de aproximaciones óptimas, si se pueden demostrar propiedades de los límites mediante esta definición para observar su sencillez de aprendizaje del concepto, como por ejemplo serían las siguientes:

Antes de demostrar esto es importante recordar el siguiente resultado que será de máxima utilidad:

Cualquier número es una aproximación de cualquier otro distinto de él.

Teorema de unicidad del límite:

Si una función $f(x)$ tiene límite, el mismo es único.

Demostración:

La demostración se hace por reducción al absurdo. Suponemos que $f(x)$ tiene dos límites distintos p y q (con p $<$ q) cuando x tiende a a, es decir:

Si $lim_{x \to a}\ f(x)$ = p y Si $lim_{x \to a}\ f(x)$ = q, p $\neq$ q.

Se considera un valor intermedio k entre estos dos puntos, p < k < q.

Como k es una aproximación del límite q, existirá un entorno de a, E_1, tal que todas las imágenes mejoran dicha aproximación. Por lo tanto, $\forall x \in E_1$ se tiene que $f(x) > k$.

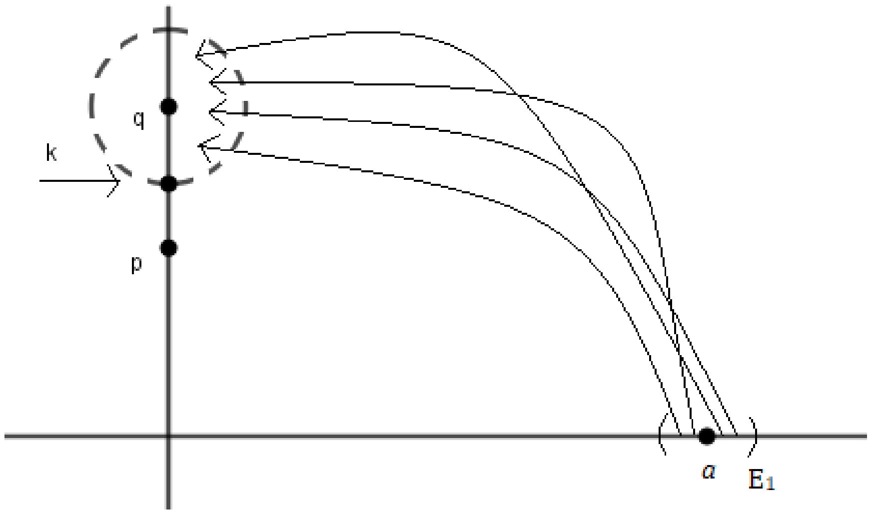


Figura 14. Representación gráfica para la demostración de la unicidad del límite.

Análogamente, como k es una aproximación de p, $\exists E_2$ de a, es decir, otro entorno de a, tal que $\forall x \in E_2$ se tiene que $f(x) < k$.

Considerando $E = E_1 \cap E_2$ (que naturalmente es distinto del vacío ya que se tratan de dos entornos de a) las imágenes de todos sus puntos son mayores y menores que k, lo cual es imposible. Por lo tanto, se tiene que p=q, y los limites deben ser iguales.

Teorema del signo:

Si $\lim_{x\to a} f(x) = p > 0$, existe un entorno de a en el que $f(x)$ es positiva.

Demostración:

Como 0 es una aproximación de p, $\exists$ un entorno E de a tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación y, por tanto, en dicho entorno $f(x) > 0$.

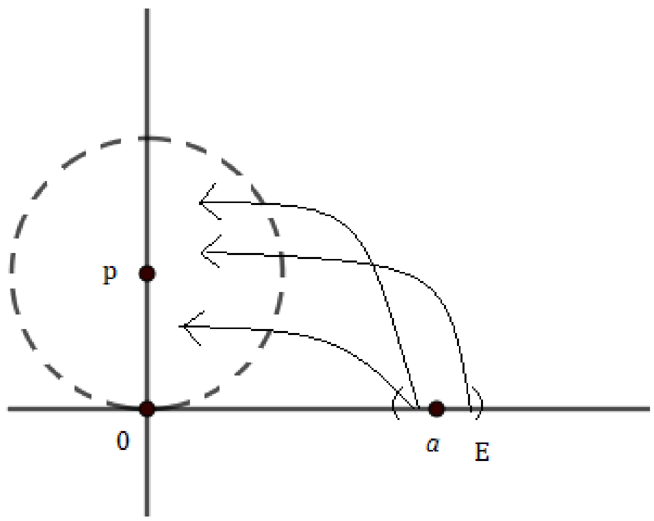


Figura 15. Representación gráfica para la demostración del Teorema del signo

Límite de una suma:

El límite de una suma de funciones siempre será igual a la suma de los límites de sus funciones, es decir:

$lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = lim_{x \to a} f(x) + lim_{x \to a} g(x) = p + q$

Demostración:

$lim_{x \to a} f(x) = p$, $lim_{x \to a} g(x) = q$, $lim_{x \to a} (f + g)(x) = p + q$

Se considera una aproximación arbitraria K de p+q y hay que probar que ∃ un entorno de *a* tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación.

Considero la aproximación K tal que K > p+q, y a partir de ella elijo dos aproximaciones K_1 y K_2, ambas por exceso de p y de q respectivamente, tales que $K = K_1 + K_2$.

Como K_1 es una aproximación p y $lim_{x \to a} f(x) = p$, existe un entorno de K_1 tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación.

De igual manera, como K_2 es una aproximación de q y $lim_{x \to a} g(x) = q$, existe un entorno de K_2 tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación.

En definitiva, en el entorno intersección sus imágenes mejoran la aproximación K de $f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

Como K = K_1 + K_2 y K_1 y K_2 son aproximaciones por exceso de los límites p y q, respectivamente, se verifican las siguientes desigualdades:

$f(x) < K_2$, $g(x) < K_1$ y, por tanto, $(f + g)(x) < K_1 + K_2 = K$. Esto permite hacer la siguiente representación del límite de la suma de dos funciones:

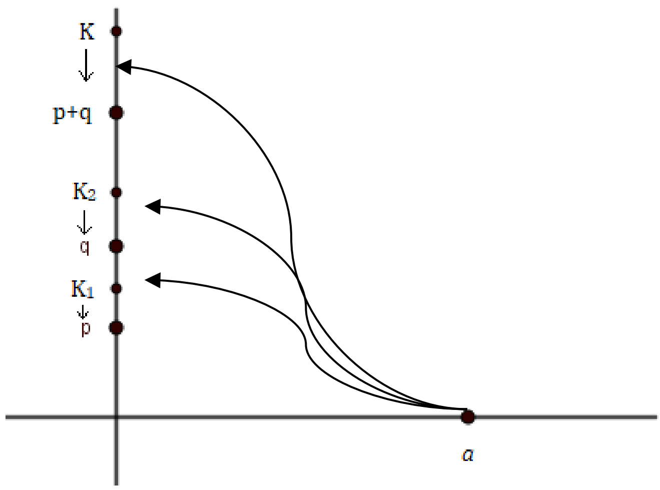


Figura 16. Representación gráfica para la demostración del límite de una suma de funciones.

Esto ocurre de manera análoga si se considera una aproximación K por defecto en vez de por exceso y eligiendo K_1 y K_2 como aproximaciones de p y q por defecto tales que $K = K_1 + K_2$.

Teorema de Bolzano:

Sea una función $f(x)$ continua definida en un intervalo $[a, b]$. Entonces si se cumplo que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (es decir, $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, ó $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$), existe al menos un punto *c* perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f(c) = 0$.

Demostración:

Se comienza evaluando la función *f* en el punto medio del intervalo, si es igual a cero se termina aquí. En caso contrario, se escoge una de las mitades del intervalo $[a, b]$, tal que los signos de la función evaluada en los extremos son diferentes. Este nuevo intervalo será $[a_1, b_1]$. Ahora si f evaluada en el punto medio de $[a_1, b_1]$ no es cero, entonces se realiza la misma operación de antes, y así sucesivamente se continua con este proceso obteniendo dos sucesiones a_n y b_n tal que $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$.

Es decir, un intervalo $[a_n, b_n]$ tal que $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

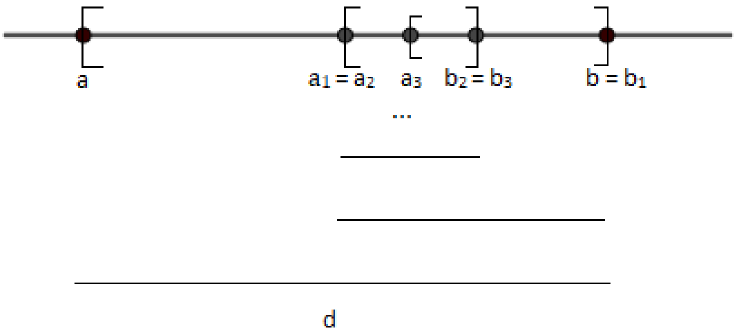


Figura 17. Representación gráfica para la demostración del Teorema de Bolzano.

El límite de estos intervalos encajados que se generan es un punto, x_0, porque sus amplitudes, que son $\frac{\mathrm{d}}{2^{\mathrm{n}}}$, tienden a cero.

Hay que probar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{p} > 0$, entonces existe un entorno E_1 de x_0 tal que $f(x) > 0$ $\forall x \in E_1$, pero como $\frac{\mathrm{d}}{2^{\mathrm{n}}} \to 0$ en este entorno tiene que haber infinitos intervalos $[a_n, b_n]$. Por tanto, no es posible que $f(x) > 0$. Análogamente ocurriría si suponemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{p} < 0$, ya que no sería posible que $f(x) < 0$. Por lo tanto, de estas dos contradicciones concluimos que $f(x) = 0$.

Otro de los resultados que es utilizado y aplicado frecuentemente en la enseñanza de estos cursos es el caso de crecimiento y decrecimiento de una función en un punto, determinando que derivada de la función en dicho punto x tiene que ser mayor o menor que cero respectivamente.

Sabemos por definición que $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Si $f'(x) > 0$ entonces $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, y por lo tanto, existe un entorno E de x_0 tal que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$

Si $x > x_0$ como el cociente tiene que ser positivo, se tiene que $f(x) > f(x_0)$.

Si $x < x_0$ como el cociente tiene que ser positivo, se tiene que $f(x) < f(x_0)$.

Por lo tanto, la función es creciente en un entorno de x_0.

Teorema de mayoración 1:

Si una función $f(x)$ es positiva en un entorno del punto a, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$.

Demostración:

Si el límite fuese positivo, entonces aplicando el teorema del signo la función sería positiva en un entorno de a.

Teorema de mayoración 2:

Si dos funciones son tales que $f(x) \leq g(x)$ en un entorno de a, entonces $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x)$.

Demostración:

Es evidente y para ello solo hay que considerar la función $f(x) - g(x) \geq 0$ y aplicar el teorema anterior.

A continuación se van a enunciar y demostrar dos teoremas importantes en los que se aplican estos teoremas sobre el límite:

Teorema del encaje:

Si dos funciones tienden al mismo límite en un punto, cualquier otra función que pueda ser acotada entre las dos anteriores tendrá el mismo límite en el punto. Esto es, si tenemos $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y supongamos también que: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$ = L, entonces $\lim_{x\to a} g(x)$ = L.

Demostración:

Sabemos que si $f(x) \leq g(x)$, entonces: $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

Además, si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \mathrm{L}$

Como $lim\, f(x) \leq lim\, g(x) \leq lim\, h(x)$, tenemos que:

$\mathrm{L} \leq lim\, g(x) \leq L$, y por lo tanto: $\lim_{x \to a} g(x)$ = L.

Usando el teorema del encaje podemos demostrar la derivada del seno:

Aplicando la definición de derivada a la función $f(x) = sen(x)$, con x dado en radiantes:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2cos\frac{x+h+x}{2}\, sen\frac{x+h-x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) sen\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{sen\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \cos(x) \cdot 1 = \cos(x)$$

En la tercera igualdad se considera la fórmula trigonométrica que expresa la suma de dos senos en un producto de seno por coseno. En la quinta igualdad se pone denominador $h/2$ para hacerlo coincidir con el ángulo del seno. En la sexta igualdad se considera que el límite de un producto es el producto de los límites y en la séptima igualdad, que posiblemente sea la más complicada, apoyándonos en la representación gráfica de la figura 18, se obtiene que $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

Este límite se ha utilizado junto con el teorema del encaje para establecer que la derivada de $sen(x)$ es $\cos(x)$.

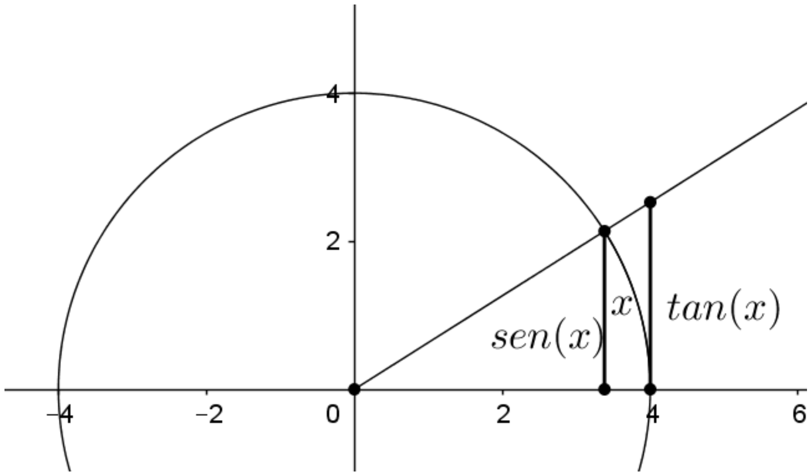


Figura 18. Representación gráfica de $y = x$, $y = sen(x)$, $y = tan(x)$.

Tenemos que $sen\,(x) \leq x \leq tan(x)$, y si dividimos por el $sen(x)$ obtenemos:

$1 \leq \frac{x}{sen(x)} \leq \frac{1}{cos(x)}$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0} 1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)} \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{cos(x)}$

$$1 \leq \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)} \leq 1$$

Y en consecuencia: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)}$, que es una indeterminación del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$, es la unidad, y análogamente, $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$.

Cabe destacar que esto no significa que no se deba trasmitir la definición propiamente métrica, pero si podemos considerar por su gran complejidad que debe ser enseñada posteriormente a esta definición más intuitiva que tratamos, ya que como hemos visto ahora se pueden demostrar igualmente todas las propiedades de los límites y de forma más sencilla sin tratar con términos más complejos para el entendimiento del concepto.

Ejemplos de sucesiones:

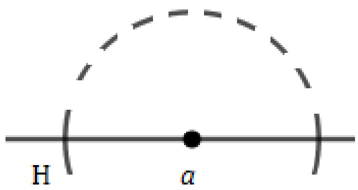
$\lim_{n \to\infty} \frac{1}{n} \to 0$ muy despacio

$\lim_{n \to\infty} \frac{1}{n^2} \to 0$ más rápido. Ensayamos con esta sucesión.

1	1	1
2	4	0,25
3	9	0,11111111
4	16	0,0625
5	25	0,04
6	36	0,02777778
7	49	0,02040816
8	64	0,015625
9	81	0,01234568
10	100	0,01
11	121	0,00826446
12	144	0,00694444
13	169	0,00591716
14	196	0,00510204
15	225	0,00444444
16	256	0,00390625
17	289	0,00346021
18	324	0,00308642
19	361	0,00277008
20	400	0,0025
21	441	0,00226757
22	484	0,00206612
23	529	0,00189036
24	576	0,00173611
25	625	0,0016
26	676	0,00147929
27	729	0,00137174
28	784	0,00127551
29	841	0,00118906
30	900	0,00111111

En esta tabla podemos observar lo siguiente: la primera columna hace referencia a los valores que hemos considerado que va a tomar n (del 1 al 30). La segunda hace referencia a los valores de n^2, y la tercera al valor de la sucesión tomando el valor de n, que será la imagen de este valor.

De esta manera podemos hacernos una pequeña idea al observar la tabla de que cuanto más crece el número n, es decir, más se aproxima al infinito, más tiende la sucesión al valor que hemos conjeturado que toma el límite, 0.



La cuestión es fijar una aproximación K al límite en la tabla de valores y localizar la aproximación H al punto $x = a$ a partir de la cual las imágenes de todas las aproximaciones que siguen , que está dentro del entorno determinado por H, están más cerca de L (valor del límite) que la aproximación K fijada.

La tabla anterior pone de manifiesto que se pueden utilizar sucesiones para ver el comportamiento de una función en un punto. De hecho, se puede considerar la definición VI escrita anteriormente y que se reproduce aquí:

> *El número* L *es el límite de la función* f *en el punto* a*, y se escribe* $\text{lím}_{x \to a} f(x) = L$*, sií para toda sucesión* $\{x_n\}$ *con límite* a*, la sucesión formada por sus imágenes*, $\{f(x_n)\}$, *tiene límite* L.

Considerando la función $f(x) = x^2$ y el punto $x = 2$, se trabaja numéricamente con sucesiones que tiendan a 2 como valores de la variable x. Sus cuadrados serán las imágenes de esta función. La tabla siguiente muestra aproximaciones al puno $x = 2$ y aproximaciones a su límite en este punto. Para que las aproximaciones sean tanto por la izquierda como por la derecha, se considera la siguiente sucesión: $2 + \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Lógicamente, las imágenes de estos valores serán: $(2 + \frac{(-1)^n}{n^2})^2$.

La tabla siguiente reproduce estos valores:

n	n^2	x=2+(-1)^n/n^2	x^2
1	1	1	1
2	4	2,25	5,0625
3	9	1,888888889	3,56790123
4	16	2,0625	4,25390625
5	25	1,96	3,8416
6	36	2,027777778	4,11188272
7	49	1,979591837	3,91878384
8	64	2,015625	4,06274414
9	81	1,987654321	3,9507697
10	100	2,01	4,0401
11	121	1,991735537	3,96701045
12	144	2,006944444	4,027826
13	169	1,99408284	3,97636637
14	196	2,005102041	4,02043419
15	225	1,995555556	3,98224198
16	256	2,00390625	4,01564026
17	289	1,996539792	3,98617114
18	324	2,00308642	4,0123552
19	361	1,997229917	3,98892734
20	400	2,0025	4,01000625
21	441	1,997732426	3,99093485
22	484	2,002066116	4,00826873
23	529	1,998109641	3,99244214
24	576	2,001736111	4,00694746
25	625	1,9984	3,99360256
26	676	2,00147929	4,00591935
27	729	1,998628258	3,99451491
28	784	2,00127551	4,00510367
29	841	1,998810939	3,99524517
30	900	2,001111111	4,00444568
31	961	1,998959417	3,99583875
32	1024	2,000976563	4,0039072
33	1089	1,999081726	3,99632775
34	1156	2,000865052	4,00346096
35	1225	1,999183673	3,99673536

Observando los valores de la tabla anterior, se conjetura que el límite cuando x tiende a 2 es igual a 4.

Para establecer “numéricamente” que efectivamente este es el valor del límite, se considera la aproximación K a 4,006. Se trata de buscar y encontrar un entorno de x=2 tal que todas las imágenes de ese entorno que aparecen en la tabla mejoran la aproximación fijada, es decir, están comprendidas en el entorno (3,994, 4,006). Buscando en la tabla se encuentra que todas las imágenes de todos los valores numéricos de la propia tabla perteneciente al entorno (1,998628158 -2,00127551) mejoran la aproximación fijada.

De esta manera, contrariamente a lo que decían tanto Cottrill et al. (1996) como Valls, Pons y Llinares (2011), los alumnos sí que encuentran coordinaciones a través de la función.

Ejercicios y problemas

Sustitución del aprendizaje mecánico (repetición de límites todos iguales por el aprendizaje razonado).

Se deben considerar las siguientes representaciones sobre las indeterminaciones utilizando la notación de tendencia porque de lo contrario contradicen las definiciones aritméticas:

$\frac{\to 0}{\to 0}$, $\frac{\to \infty}{\to \infty}$, $\to \infty - \to \infty$, $\to 0 \cdot \to \infty$, $\to 1^{\to \infty}$, $\to 0^{\to 0}$, $\to \infty^{\to 0}$

III.3. PROPUESTA DIDÁCTICA

Prerrequisitos

Concepto de función, conceptos de función y sucesión, manejo del software adecuado (GeoGebra), saber representar gráficamente funciones y la correspondencia numérica entre los valores de la variable y los de la función elaborando tablas numéricas, y cierta manipulación simbólica.

Objetivos

El objetivo de esta propuesta didáctica es desarrollar una estructura para la comprensión del concepto de límite y sus aplicaciones para alumnos del curso de segundo de bachillerato de una manera llamativa, sencilla y eficaz para su aprendizaje. Esta forma de enseñanza que vamos a considerar está basada principalmente en el entendimiento del propio concepto de límite mediante el concepto aproximación óptima como introducción al contenido para luego considerar también la definición métrica como apoyo a esta y sus diferentes aplicaciones.

Como hemos descrito al principio de este trabajo, el concepto de límite se estudia en los dos cursos de bachillerato teniendo una alta importancia en ambos, pero en este caso sólo vamos a considerar el segundo curso en el bachillerato de ciencias.

El punto de partida de este proyecto comienza con el estudio de los distintos estándares de aprendizaje presentes en los conceptos pertenecientes al contenido de límites de este curso (conforme al BOE). Seguido de esto, se presenta una temporalizarían prevista para la impartición de este contenido por parte del profesor, configurada con la realización de actividades de compresión del concepto y algunos ejercicios. Luego se proponen una evaluación para esta propuesta didáctica y finalmente se exponen los “ejercicios tipo” que se van a considerar para el aprendizaje de este contenido y el examen parcial que deben realizar los alumnos al final de este periodo.

Los estándares de aprendizaje evaluables que se corresponden con el tema que va a ser tratado y los contenidos expuestos a continuación, se recogen en el BOE, num3 (2015), por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Contenidos

- Concepto de sucesión, límite de sucesiones
- Límite de una función en un punto y en el infinito.
- Propiedades de los límites
- Demostración de alguna de estas propiedades
- Indeterminaciones
- Ejercicios y problemas sobre límites.

Estándares de aprendizaje

1.1 Aplica los conceptos de límite para definir continuidad y derivada, así como los teoremas relacionados con estos conceptos.

1.2 Resolución de ejercicios de cálculo, abarcando diferentes tipos de indeterminaciones.

1.3 Resolución de problemas.

Observamos en estos estándares lo criticado durante todo el trabajo, esto es, la consideración de la definición de límite como simple información de aplicación, sin ni siquiera tener conocimiento del propio concepto.

Temporalización

La temporalizarían del contenido que se va a trabajar viene estructurada en 8 sesiones divididas de la siguiente manera:

- La dos primeras sesiones tratan meramente de la explicación mediante aproximación óptima del concepto de límite, es decir, se trabaja con los conceptos de límite como “tendencia”, “aproximación”, “aproximación óptima”, y “coordinación”.
- En la tercera sesión, una vez aclarado el concepto mediante la definición como aproximación óptima, se les expone la ya conocida para ellos definición métrica, tratándoles de exponer las dificultades que se les presenta frente a estas una vez comprendido el concepto.
- La cuarta sesión está dedicada a la realización de juegos interactivos basados en la comparación y la distinción de estas definiciones.
- Una vez comprendido el concepto, que es lo considerado más importante para el aprendizaje de los alumnos, la quinta sesión se dedicará a la explicación teórica del cálculo de límites y las indeterminaciones existentes.
- Las dos últimas sesiones impartidas, sexta y séptima, están destinadas a la realización de ejercicios de pura aplicación y cálculo de límites e indeterminaciones.
- Finalmente, la octava y última sesión está destinada a la realización de una prueba parcial.

Evaluación

Los criterios de evaluación tendrán en cuenta diferentes aspectos a la hora de evaluar.

El criterio de evaluación general y principal viene dado por el objetivo de la comprensión del concepto de límite tanto de una función como de una sucesión para después abordar los temas de cálculo y aplicación de estos. Es decir, se hará una evaluación crítica de lo aprendido.

Los criterios de evaluación están basados en lo siguiente:

Así como en este curso y concretamente en esta parte del bloque no se recoge el cuaderno de trabajo ni se puntúan los apuntes que recogen los alumnos ya que se considera que es una edad suficientemente madura para ello, si influirá la asistencia, puntualidad y actitud del alumnado con un total de un 10%.

Cabe destacar en los estudiantes que influirá de forma negativa en la evaluación del alumno aquellas actitudes en las que se refleje un incumplimiento de sus obligaciones y/o deberes, esto es por ejemplo, la interrupción en la clase, molestar a sus compañeros, no traer su material de trabajo personal, no atender a las explicaciones, etc…

Además, un tanto por cierto de la nota de evaluación de esta parte vendrá dada por la entrega de los 20 ejercicios finales que se ejercitan en las últimas sesiones y que tienen la estructura de los "ejercicios tipo" que se presentan más abajo. Estas actividades contaran un 25% de la nota de esta parte del bloque.

Finalmente, la mayor calificación evaluable de este contenido viene dada por una prueba parcial en la última sesión, un 65% de la nota, en la que se tendrá en cuenta tanto el manejo de la comprensión del contenido y temario, como la claridad y precisión para explicar este, es decir, en esta prueba escrita se valorará tanto el contenido como la forma de expresarse y la precisión y claridad en las explicaciones. Añadido a esto, también está la parte de aplicación y cálculo, que viene penalizada de forma diferente mediante los errores que puedan presentar los valores obtenidos y la mecánica de realización. Se penalizará la ausencia de explicaciones o la presencia de explicaciones incorrectas así como la falta de rigor matemático en las expresiones, las definiciones y los cálculos.

Junto a la nota de esta pequeña parte se consideran las otras dos partes con sus respectivos exámenes parciales pertenecientes al tercer bloque, análisis, de este segundo curso de bachillerato. Es importante saber que para aprobar todo este bloque, es necesario aprobar todas las partes de este bloque. En caso contrario, el alumno contará con un examen de recuperación al finalizar el curso en junio, donde podrá recuperar tanto los exámenes parciales de forma aislada como toda la asignatura en su totalidad si es que no ha superado ninguna de sus partes.

También es importante y necesario saber que si un alumno copia en alguno de los exámenes parciales tendrá una calificación de 1 en dicho examen y perderá la oportunidad de realizar el examen final de recuperación de la materia del bloque de análisis, constituido por todas las partes, obteniendo una nota final igual de un 1 de forma automática.

Ejercicios tipo

1. **Realiza una tabla numérica para el siguiente límite:**

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

2. **Construye una tabla numérica para determinar aproximaciones del número $\boldsymbol{e}$ utilizando la sucesión $\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$.**

3. **Aprovecha las tablas anteriores para establecer que los límites respectivos son 6 y el número $\boldsymbol{e}$, respectivamente. Para ello, considera como aproximaciones de los límites 6,01 y 6,001para el primer caso, y 2,71 y 2,717 para el número $\boldsymbol{e}$, hallando los correspondientes entornos de 2 y de ∞.**

4. **Calcula los siguientes límites de sucesiones y funciones. Representa algunas de las sucesiones y de las funciones:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+4}-\ 2}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5}{-x^2-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x$$

$$\lim_{x\to 0}[1+3x]^{\frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x{\cdot}e^{-x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(sen(x))^x$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$$

5. Pon un ejemplo de dos sucesiones a_n y b_n tales que $a_n > b_n$ y $lim\ a_n = lim\ b_n$.

6. La sucesión $3 - \frac{1}{n}$

¿A qué número tiende?

¿5 es una aproximación del límite de la sucesión? ¿Y 50?

Demuestra que se aproxima a 3,01 pero que no tiende a 3,01.

Examen parcial

1. Imagina que eres profesor de instituto y tienes que explicarles a tus alumnos el concepto de límite de funciones y sucesiones. Determina la explicación que consideres más adecuada y explica el porqué.

2. ¿Es lo mismo aproximación y tendencia? ¿Si? ¿No? Explica el porqué.

3. Escribe la definición métrica del concepto de límite de una función. ¿Es igual a la definición considerada en el ejercicio 1? ¿Sí? ¿No? ¿Por qué?

4. Realiza el cálculo de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x-1}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+x^5+\ x^3}{(\frac{1}{2})^x}$$

5. Representa gráficamente las dos últimas funciones del ejercicio 4.

BIBLIOGRAFÍA

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T. y Pecharromán, C. (2016). *Conocimiento matemático del concepto de límite en alumnos del Máster de Secundaria (Matemáticas)*. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico (pp. 199-207). Granada: Comares.

Bláquez, S. (1999). Noción *de Límite en Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1999). *Didáctica del Análisis en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Concepto de límite.* En, T. Ortega (ed.): Temas controvertidos en Educación Matemática. Valladolid: SAE de la Universidad de Valladolid, 121-154.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). *El concepto de límite en la educación secundaria. En el futuro del cálculo infinitesimal.* Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. pp. 331-354. ISBN: 970-625-246-0. México.

Blázquez., S. y Ortega, T. (2001b). *Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato.* AULA, Vol. 10, pp. 117-133. ISSN: 0214-3401. Salamanca.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). *Nueva definición de límite funcional.* UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. Vol. 30, pp. 67-82. Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.

Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., Benegas, J. (2006). *Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad.* RELIME. Vol 9. Nº2, 189-210. CLAME. ISSN: 1665-2436. México DF.

Blázquez, S. Gatica, N. y Ortega, T. (2009). *Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional*. La Gaceta de la RSME, Vol. 12, Núm. 1, Págs. 145–168. Madrid.

Boyer, C. (1992). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de 3ème cycles, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). *Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme*. Journal of Mathematical Behavior, 15, 167-192.

Fernández Plaza, J.A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*. Universidad de Granada.

Gatica, S.N. (2007). *Aprendizaje de Límite Funcional en Alumnos de Ingenierías,* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

NCTM. (1989). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Thales.

Marsden, J.E., Hoffman, M.J. (1998). *Análisis clásico elemental*, Ed. Addison Wesley. Iberoamérica.

Robinet, J. (1983). *Un experience d´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 4.3, 223-292.

Sánchez, C. (1997). Estudio *estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Tesis doctoral. Dpto. de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Granada.

Sánchez Compaña, M.T. (2012). *Límite finito de una función en un Punto: Fenómenos que* organiza. Universidad de Granada.

Sierpinska (1985). Obstacles *epistemologiques relatifs a la notion de limite*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 6.1 Pg. 5-67.

Sierpinska, A. (1987). *Humanities students and epistemological obstacles related to limits*. Educational Studies in Math. Vol 18, 371-397.

Sierra, M., González, Mª T. y López, Mª C. (1998). *Límite funcional y continuidad: desarrollo histórico y concepciones de los alumnos*. Actas del V Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática. Toro: SCLPM (en prensa).

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Math, vol 12, 151-169.

Tall, D. O., y R. L. E. Schwarzenberg (1978). *Conflicts in the learning of real numbers and limits*. Published in Mathematics Teaching, 82, 44-49.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). *Coordinación en los procesos de aproximación en la comprensión de límite de una función*. Enseñanza de las Ciencias. 29(3), 325-338.

Vinner, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*. En D. Tall (Ed): Advanced Mathematical Thinking, 65-81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Williams, S. (1991). *Models of limit held by college calculus students*. Journal for Research in Mathematics Education. Vol 22, No. 3, pp. 219-236.