



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpt. Matemática Aplicada

LA EDUCACIÓN MANIPULATIVA:

Una propuesta para la mejora del rendimiento en Geometría de los alumnos de 1º de Bachillerato.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Julen Miguel Lanseros

Tutor: M^a Francisca Blanco Martín

Valladolid, Junio 2019

Yo, Julen Miguel Lanseros, alumno del Máster de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, en la especialidad de Matemáticas, y tutelado por M^a Francisca Blanco Martín, presento el siguiente Trabajo Fin de Máster:

LA EDUCACIÓN MANIPULATIVA: Una propuesta para la mejora del rendimiento en Geometría de los alumnos de 1º de Bachillerato.

Resumen

Este Trabajo Fin de Máster hace un recorrido por algunos autores que han investigado sobre el material didáctico manipulativo y sus metodologías de enseñanza en el aula de matemáticas. Contiene una propuesta de intervención educativa para el bloque de Geometría de 1º de Bachillerato diseñada para mostrar la forma en la que los materiales pueden ser introducidos en el aula.

La actividad se centra alrededor del Geopaper, objeto que sirve para la visualización, representación y comprensión de los conceptos que subyacen tras los ejercicios teórico-prácticos que engloban las Unidades Didácticas referidas a vectores y geometría plana. Al mismo tiempo que progresa la adquisición de conocimientos, desarrollamos diferentes competencias en el alumnado al participar en una enseñanza activa por parte tanto del profesor como del estudiante.

Palabras Clave

Matemáticas – recursos didácticos – materiales manipulativos – geometría – 1º de Bachillerato – Geopaper – didáctica de las matemáticas – aprendizaje significativo – constructivismo - descubrimiento

Abstract

This Final Master's Project takes a tour of some of the authors who have researched on the manipulative teaching material and its teaching methodologies in the mathematics classroom. It contains a proposal of educational intervention for the block of Geometry of 1º of Bachelor designed to show the way in which the manipulative materials can be introduced in the classroom.

The activity centers around the Geopaper. This object serves for the visualization, representation and understanding of the concepts that underlie the theoretical-practical exercises that include the Didactic Units referred to vectors and plane geometry. The students grow different competences at the same time that they acquire knowledge, this occurs because of the active learning where both, the teacher and the students, take part.

ÍNDICE

Resumen	3
Palabras Clave	3
Abstract	3
Introducción General	7
1. Parte I: Marco teórico	9
1.1 Marco teórico	9
1.2 El material manipulativo	15
1.3 Metodología activa y participativa	19
1.4 Introducción mediante retos	20
1.5 Criterios del uso del material manipulativo	20
1.6 El desarrollo del alumno	21
1.7 El docente como guía del proyecto	23
2. Parte II: Proyecto de trabajo en el aula	25
2.1 Propuesta del proyecto	25
2.2 Justificación	25
2.3 Planteamiento del proyecto	26
2.4 Objetivos del proyecto	27
2.5 Propuesta detallada del material manipulativo	27
2.6 Objetivos del material manipulativo	30
2.7 Evaluación del proyecto	30
3. Parte III: Unidad didáctica:	33
3.1 Introducción contextual	33
Contenidos, estándares de aprendizaje y criterios de evaluación	36
3.2 Unidad Didáctica 10: Vectores	46
3.3 Unidad Didáctica 11: Geometría analítica en el plano	69
4. Parte IV: Síntesis y Conclusiones	85
4.1 Síntesis	85
4.2 Conclusiones	85
5. Bibliografía	89
6. Anexos	95
Anexo I: Ejercicios propuestos para trabajar con el Geopaper	95
6.1 Ejercicios UD 10: Vectores	95
6.2 Ejercicios UD 11: Geometría analítica en el plano	102
6.3 Ejercicios alternativos para trabajar con el Geopaper	110

Introducción General

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo el planteamiento de una propuesta de mejora para la enseñanza en bachillerato del bloque de geometría con el fin de aumentar el impacto y la comprensión de los conocimientos en los alumnos. El documento tendrá como enfoque las matemáticas de la modalidad de Ciencias dado que, en la otra modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, el currículo no contempla la enseñanza de este bloque.

La elección de la propuesta se basa en una inquietud propia: la necesidad de representar y comprender los problemas para poder abordar su solución. Parte de una opinión personal de que para poder aprender hay que comprender y, qué mejor manera de comprender, que ver y construir. A través de este proyecto se pretende impulsar la labor del profesor hacia una mejor enseñanza y un provechoso aprendizaje del alumnado.

Para la elaboración del presente documento se han cumplido los criterios establecidos por la normativa educativa vigente, específicamente la relativa a 1º de Bachillerato que es la etapa donde se centra.

El trabajo se estructura en 3 partes principales. La primera parte incluye el marco teórico, la segunda nos explica el proyecto que se propone y en la tercera introduce el proyecto en un contexto académico a través de las unidades didácticas. Tras la finalización de las unidades didácticas se redactan una síntesis y unas conclusiones como final del trabajo.

Por último, se añade un anexo con algunas posibilidades prácticas en las que se puede incluir el proyecto.

1. Parte I: Marco teórico

1.1 Marco teórico

Según la ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación y evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León, es necesario el estudio de las matemáticas por varias razones. La primera es el uso de las matemáticas como fuerza conductora de la cultura y la civilización. La segunda, como carácter instrumental para la adquisición de nuevos conocimientos en otras disciplinas dada su amplia relación con muchas otras materias. La tercera, favorece la interpretación del mundo y la sociedad que nos rodea con mayor precisión y la cuarta es la contribución al desarrollo del pensamiento y razonamiento lógico-deductivo, algorítmico, geométrico-espacial y la creatividad.

Para una óptima enseñanza de la matemática debe conseguirse que los alumnos aprendan a pensar evitando el mero hecho de hacer y ejecutar de forma automática. Las matemáticas no son un simple libro de hechos o habilidades sino que su aprendizaje debe ir más allá y considerarse una forma de pensamiento (Kehle, 1999). Esta enseñanza óptima tendría como resultado el conseguir que todo alumno que promoció la materia sea capaz de valorar la matemática, sentirse seguro sobre sus capacidades en la materia, llegar a razonar y a resolver problemas matemáticamente y saber comunicarse con las matemáticas.

Como posible punto de partida podemos mencionar los resultados en el área de la materia que vienen reflejados en el informe PISA del 2012 que ha puesto de manifiesto los conocimientos y niveles de aprendizaje de los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria. El examen, que se realiza en 4º de la ESO, nos da una idea del nivel de conocimientos que tendrán los alumnos en el curso próximo que es el que nos atañe.

El análisis de estos resultados obtenidos muestra unas calificaciones insuficientes en el ámbito de la geometría, bloque que PISA denomina “espacio y forma”. Como se ve en la siguiente ilustración referida a los resultados del examen del 2012, las comunidades españolas se encuentran en su mayoría en la zona del gráfico sombreada en rojizo, es decir, donde los resultados son peores y la variabilidad de los resultados se considera baja (zona inferior derecha) o donde las calificaciones son mejores pero con una mayor variabilidad (zona superior izquierda).

Espacio y Forma

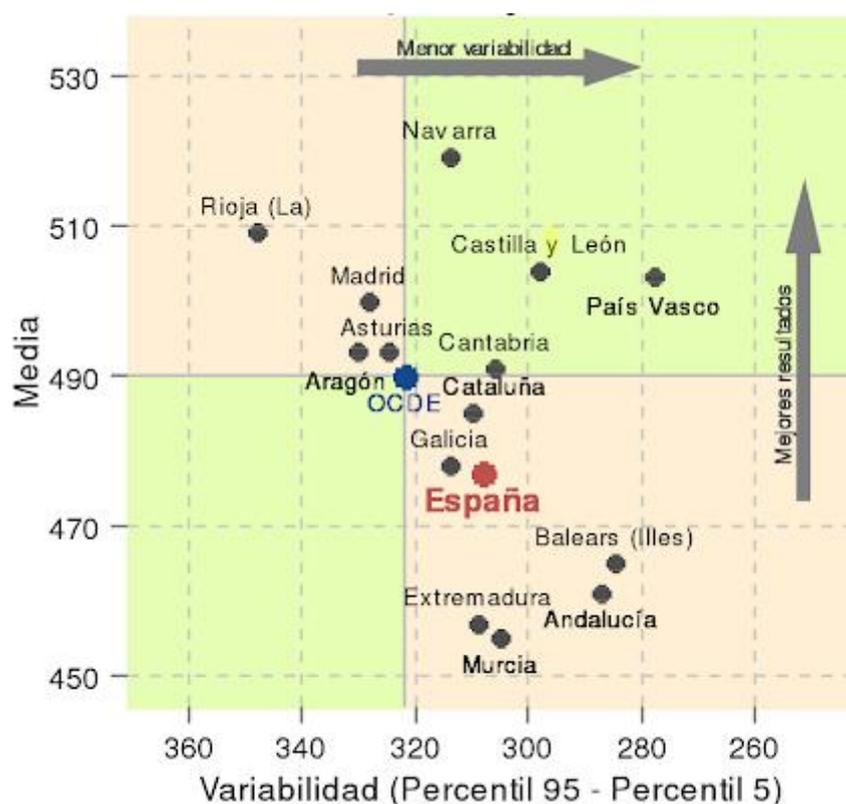


Ilustración 1. Resultados del apartado "Espacio y Forma" (correlativa al bloque de geometría) del informe PISA 2012

Este caso de resultados poco convincentes, ¿puede ser debido a una mala praxis de la enseñanza de la matemática o a una desmotivación general del alumnado? No podemos negar que ambas situaciones se encuentran relacionadas, es más, la una se retroalimenta con la otra y viceversa. En un análisis de los resultados del informe PISA del 2003 resulta que la sensación por parte de los alumnos es que no les gusta estudiar matemáticas, no se sienten competentes y no consideran que los profesores se esfuercen en prestarles ayuda cuando la necesitan (Marchesi, 2003). Por otro lado, en algunos casos, la ausencia de formación de los profesores en nuevas técnicas de enseñanza puede derivar en que la impartición de esta materia se queda en un aspecto demasiado tradicional (Luis Rico, 1998). Por tanto, ¿qué hacer para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? La respuesta a esta pregunta no tiene un único punto de vista, sino que es una suma de hechos y actitudes que deben confluír en la mejora buscada. Nosotros vamos a abordarlo desde un marco cognoscitivo.

Apuntamos que la docencia de la matemática en la escuela tiene un fuerte arraigamiento de tipo tradicional, con discursos por parte del profesorado y que aborda los contenidos matemáticos desde una visión sistematizada, relacionando los contenidos en bloques como

análisis, álgebra, números, funciones, geometría o estadística. Esto puede derivar en una ausencia de relación entre los bloques y sus contenidos y, según Flores y Rico (2015) puede ser una de las causas de una integración poco eficiente de los conocimientos de matemáticas. Podría darse el caso en la enseñanza de las matemáticas, que la transmisión de conocimientos se realice de manera lineal. El pensamiento racional, sobre todo el matemático, no se traspasa de una persona a otra, sino que debe ir construyéndose a medida que se va ganando en experiencias. El aprendizaje de las matemáticas es un proceso a largo plazo.

Como dice Cascallana (1988, citado en Chamoso y Miguel 1995), la enseñanza ha de entenderse como el desarrollo del alumno en sus aspectos social, emocional y cognoscitivo, de lo que deducimos, que una mera transmisión de conocimientos es un tipo de enseñanza completamente infructuoso. En propias palabras de Cascallana: *el objetivo último perseguido es conseguir que los niños sean intelectualmente curiosos, que estén interesados en el mundo que les rodea, sin temor a equivocarse; en definitiva, a pensar por sí mismos y que en este proceso hagan su pensamiento más lógico y adecuado a la realidad.*

Si queremos provocar esa inquietud y, con ella, unas vivencias lo más sustanciosas posibles con las que fomentar el descubrimiento propio y la creación de relaciones entre los conocimientos, tenemos que cambiar a una metodología casi autodidacta. *“El conocimiento matemático no se adquiere exclusivamente por transmisión verbal de los adultos como sucede con el conocimiento social. El aprendizaje de las matemáticas supone una actividad mental, que en estas edades ha de tener una base manipulativa”* (Cascallana, 1988).

Según describen Howson, Keitel y Kilpatrick (1981) en su obra *Currículum Development in Mathematics*, la enseñanza de las matemáticas comenzó bajo una corriente conductista a partir de la cual se produce el proceso de aprendizaje basado en un proceso de estímulo-respuesta. La enseñanza de la matemática atravesó una etapa estructuralista (Bruner) y llegó a la enseñanza de tipo constructivista, que es cuando se sientan las bases del aprendizaje denominado como significativo, del cual podemos destacar su esencia: un nuevo conocimiento debe relacionarse con los conocimientos previos.

En este campo del constructivismo podemos destacar en el estudio de las enseñanzas matemáticas a Dienes, quien, trabajando con Bruner, desarrolló una serie de materiales manipulativos con los cuales poder enfocar la docencia. Dienes creía que los niños son constructivistas más que analíticos y que construyen su realidad y su conocimiento basado en las experiencias e interacciones (Armendáriz, Azcárate y Deulofeu, 1993).

Concretando en el aprendizaje de la geometría, hay que hacer alusión al matrimonio Van Hiele. Éstos exponen que en el razonamiento de la geometría del alumnado existen varios niveles de desarrollo necesarios para comprender los conceptos nuevos que han de adquirir. Son cuatro niveles, que tienen una relación de dependencia entre sí: si no se alcanza uno, no se puede avanzar al siguiente. El primero consiste en reconocer las figuras geométricas de manera global (color, forma, tamaño y nombre); en el siguiente ya se reconocen las propiedades elementales de las figuras y pueden dar una definición de ellas. En el tercer nivel, existe un carácter deductivo y pueden abstraer las propiedades implícitas de una figura, y por último, en el cuarto nivel, el alumnado ya puede entender y hacer demostraciones, es decir, alcanzan el nivel de deducciones formales.

Aquí es donde toma parte el material manipulativo. Dada la complejidad de las relaciones y las pautas de carácter abstracto en las matemáticas, se propone que los alumnos materialicen los conocimientos y los conceptos con objetos específicos para la enseñanza. El uso del material manipulativo intenta resolver uno de los problemas de la excesiva abstracción de las matemáticas, aunque su utilización debe ser el adecuado, ya que, el apoyo excesivo o mal orientado puede terminar en fracaso escolar.

Este tipo de enfoque se puede utilizar a lo largo de un proceso de enseñanza completo, estableciendo un uso propicio y adecuado para que el conocimiento se desarrolle de forma paralela de la abstracción y extrapolando la manipulación del elemento a múltiples situaciones matemáticas con el que conseguir la comprensión generalizada del contenido.

Al utilizar material manipulativo es necesario que a los alumnos se les planteen problemas que deben ser apropiados para su nivel intelectual y deben estar vinculados con sus intereses. El docente debe ayudar al alumno al desarrollo de la tarea para que él mismo pueda resolver los problemas dirigiéndolo hacia las competencias más relevantes (Jiménez y Roncal, 2015). Dicho esto, clasificamos cualquier material manipulativo como una herramienta con la cual obtener unos resultados, nunca como un fin en sí mismo.

Podemos encajar la enseñanza con materiales manipulativos dentro de la teoría Ausubeliana del aprendizaje significativo. El significativo asienta sus bases en unos conocimientos previos de los que hay que partir y unos organizadores avanzados que debemos utilizar para la creación de las conexiones. Los materiales manipulativos ayudan a la hora de una educación de calidad ya que con ellos trabajamos las dimensiones físicas, afectivas, cognitivas y sociales (Peña, citado en Jiménez y Roncal, 2015). Para un correcto uso de los materiales es necesaria una amplia participación tanto por parte de los alumnos en su correcto uso como por parte de los profesores

en una minuciosa selección y planeamiento de las actividades. Se deben tener en cuenta los siguientes aspectos (Rodríguez, 2005):

- El material debe estar vinculado al momento evolutivo del estudiante.
- El alumno debe manipular el material por sí mismo.
- El material debe perseguir el objetivo principal de cada actividad.
- Que proporcione los estímulos adecuados según los objetivos.
- Que favorezca la actividad social y evite actitudes de discriminación.

De esta forma el uso de materiales manipulativos puede ser utilizado para la enseñanza y su función, a parte de contribuir a la integración de contenidos, es hacer más fructífera, fácil y amena la adquisición de competencias y conocimientos. Aunque, el uso de materiales manipulativos no queda exento de críticas. Según Freudenthal (citado en Jiménez y Roncal, 2015) existen abstracciones que no pueden ser entendidas por los alumnos aunque se representen en objetos y que, a menudo, el hecho de querer materializar un concepto puede dar un resultado falso, en tanto que la materialización no pueda reflejar los rasgos esenciales del concepto que subyace.

Según Moreno Lucas (2013) los materiales manipulativos se pueden clasificar en varios grupos: de manipulación, observación y experimentación, de desarrollo del pensamiento lógico, de representación y simulación, objetos cotidianos, de desarrollo de la expresión oral, imágenes o libros entre otros. Nosotros nos vamos a centrar en los del primero grupo, de manipulación, observación y experimentación.

La utilización de este tipo de materiales con los que los alumnos desarrollan sus conocimientos no es una tarea de fácil planificación. Casas, L.M. y Sánchez, C. (1998) expresan la dificultad que comprende la correcta utilización de estos objetos. Es necesaria una exhaustiva organización tanto en espacio como en tiempo y hay que estudiar la compatibilidad de la inversión del tiempo necesario con los programas tan ajustados que establece la normativa y la dificultad a la hora de establecer un criterio de evaluación.

Para un correcto uso de los materiales se tiene que tener un control absoluto sobre las siguientes cuestiones:

- ¿cuál es el aprendizaje que se quiere traducir a los alumnos con el uso del material?
- ¿qué factores intervienen en el estudio?
- ¿buscamos que los alumnos aprendan a utilizar la herramienta o que solamente sea algo visual?
- ¿cuándo y de qué modo debemos dejar de usar materiales tangibles y pasar al textual?

Aun teniendo claras las respuestas a las preguntas previamente señaladas hay que utilizar los materiales manipulativos de forma correcta, siguiendo los siguientes consejos:

- Los materiales manipulativos deben adecuarse al desarrollo psicológico del grupo para evitar una complejidad excesiva o la desmotivación por parte del estudiante.
- El número de unidades del material manipulativo debe ser el adecuado para el número de alumnos del grupo evitando el reparto del material en grupos muy numerosos.
- El material debe ser intuitivo para que su manejo sea sencillo.
- El precio del material debe ser asequible y los componentes serán fácilmente localizables con el fin de que sean accesibles para todos los alumnos.
- El material será activo para conseguir la implicación del alumno en su uso fomentando la motivación y la atención en la tarea.

Vista la dificultad de planificación, Casas y Sánchez (1998, citado en García 2017) defienden del uso de estos materiales en la docencia de la matemática. Siempre que se encuentren en el contexto correcto y se realice la elección del material adecuado podemos derivar en:

- Un cambio de actitud de los alumnos hacia la asignatura de matemáticas.
- Un desarrollo notable en el aspecto creativo individual.
- Un modelo de desarrollo estratégico a la hora de enfrentarse a resolver los problemas.
- La desaparición del miedo al error y la inclusión de este como aprendizaje.
- La adaptación de las Matemáticas a las capacidades individuales del alumno.

Como hemos mencionado, el material manipulativo, como medio para alcanzar el fin de la comprensión del tema, es otra herramienta más de la que disponer por parte de los alumnos. No es un método exclusivo, se trata de una ayuda para la concreción de la abstracción de la matemática. En ningún caso se considera la solución a los problemas de la enseñanza matemática, ni siquiera es un modelo de enseñanza, se trata de una herramienta auxiliar que se debe combinar con otras técnicas, como por ejemplo, el juego y los retos. Combinando la manipulación y juego, el aprendizaje será aún más efectivo y los alumnos estarán más motivados al ser un elemento con el que salir de la rutina.

“Para Jean Piaget (1956) el juego es un mecanismo que el estudiante utiliza para asimilar la realidad, bien de manera funcional o bien simbólica, dependiendo de la etapa evolutiva en que se encuentre. El juego cambiará de características con estas etapas evolutivas y, a la vez, será un mecanismo que active la evolución de una a otra, de modo que el juego y la estructura intelectual estarán íntimamente vinculados.” (Sánchez Iglesias, S., 2016).

Esta combinación de material manipulativo junto con los juegos y retos que se le presentan al alumno deriva en la construcción del conocimiento, al constructivismo. Según Castejón et al. (2010) “el conocimiento que los estudiantes adquieren al final es sólo el conocimiento que ha sido construido activamente por ellos mismos, no la información que se les transmite”.

Cobb (1996, citado en Castejón et al (2010) enuncia tres principios generales para la enseñanza que derivan de las teorías constructivistas:

- Se le da prioridad al desarrollo de los significados y al entendimiento frente al entrenamiento de la conducta.
- Se comprenden las acciones del propio alumno a partir del sentido que el alumno de a las cosas.
- Los errores que cometen los estudiantes son una ocasión para comprender lo que entienden y lo que no.

A través de la presentación de retos y del uso de elementos manipulativos nos encontramos bajo un paraguas que alberga un modelo de aprendizaje por descubrimiento al amparo de la influencia de una teoría constructivista.

1.2 El material manipulativo

Podemos resumir que en la enseñanza de las matemáticas el aprendizaje basado en procesos autónomos de descubrimiento es una buena base para un aprendizaje significativo. Recordemos que este aprendizaje no es el que se basa en la transmisión de información del profesor al alumno, sino que es el alumno quien, a través de la investigación y el hallazgo, va desarrollando y conectando las ideas y conocimientos para lograr el avance en su educación.

En el ámbito que nos atañe, podemos decir que una buena opción para la enseñanza de las matemáticas consiste en basarse en lo manipulativo y lo concreto con el fin de llegar hasta lo simbólico y lo abstracto.

El uso de los materiales manipulativos no es una ciencia moderna, ya se conocía el uso de algunos de ellos en la antigüedad, como por ejemplo, el uso de nudos en cuerdas, quemaduras en madera, piedras u otros objetos. Entre los más usuales y los más antiguos materiales nos encontramos el ábaco, uno de los primeros para la realización de cuentas y operaciones con números.

J. A. Comenius (1592-1670), famoso filósofo, empirista y convencido del importante papel de la educación en el desarrollo del hombre, habló sobre la necesidad de reflejar la creación de la naturaleza en la mente humana. Para lo cual, era necesario el apoyo en objetos naturales con

los que estimular los sentidos y terminar dando origen a desarrollo cognitivo. J. H. Pestalozzi, eminente pedagogo, siguió los pasos de Comenius y creó una enseñanza matemática basada en la estimulación de los sentidos. Elaboró tres tablas basadas en la descomposición de cuadrados con las cuales consiguió enseñar aritmética a alumnos de 5 y 6 años.

En este ámbito de materiales manipulativos también destacamos a Fröbel (1782-1850), Montessori (1870-1952), Delcroy (1871-1932), y Claparède (1873-1940). Cada uno de ellos, mediante el juego, permite al niño a través de su propia experiencia, educar sus sentidos y descubrir las ideas. No es un juego que facilite la enseñanza sino que el juego es la enseñanza en sí misma y a través del juego viene el aprendizaje.

Pero, ¿qué es el material manipulativo? Dada la amplitud del término, no existe una única definición. Podríamos empezar por definirlo a grandes rasgos: Se trata de elementos y objetos que usamos durante el transcurso de la docencia.

Por tanto, podemos decir que se encuentran integrados dentro de los materiales docentes o materiales didácticos. Si hablamos de la enseñanza de las matemáticas, el material didáctico puede ser algo característico como una calculadora o una hoja llena de problemas, pero vamos a ir más allá de lo usual.

Zabala, (1990, citado en Moreno 2004) lo llama material curricular y lo define como: *Instrumentos y medios que proveen al educador de pautas y criterios para la toma de decisiones, tanto en la planificación como en la intervención directa en el proceso de enseñanza.*

San Martín (1991, citado en Moreno 2004) abarca con su definición tanto aspectos de contenido como a los medios materiales propios cuyo fin es construir el conocimiento y entiende por materiales didácticos: *Aquellos artefactos que, en unos casos utilizando las diferentes formas de representación simbólica y en otros como referentes directos (objeto), incorporados en estrategias de enseñanza, contribuyen a la reconstrucción del conocimiento aportando significaciones parciales de los conceptos curriculares.*

Mattos (1963, citado en Moreno 2004) también define recurso didáctico como: *Los medios materiales de que se dispone para conducir el aprendizaje de los alumnos.*

Nosotros nos quedaremos con la definición que da Marqués (2011) que diferencia entre recurso educativo: *material que, en un contexto educativo determinado, sea utilizado con una finalidad didáctica o para facilitar el desarrollo de las actividades formativas*, y material didáctico: *material elaborado con la intención de facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje.* Nos quedamos con estas definiciones porque son las que más se acercan a nuestro proyecto.

Además de material didáctico, a nuestro proyecto se le va a pedir que tenga la cualidad de manipulativo. Entre los materiales manipulativos podemos encontrar tanto recursos analógicos como el goniómetro, las piezas de Lego, el tangram, el odómetro, dominós matemáticos... hasta recursos digitales, las englobadas dentro de las TIC.

Dentro de las TIC podemos encontrar desde móviles, tablets, ordenadores, pizarras electrónicas o proyectores en los que podemos utilizar desde la realidad aumentada hasta la realidad virtual, pasando por programas de grafiado... Para encontrar la efectividad de las TIC en la metodología docente hay que planificar bien las posibilidades del uso que tienen, dado que el hecho de su uso no nos aporta la certeza de que los alumnos estén aprendiendo. Para una correcta enseñanza, hay que comprobar que el procedimiento, los recursos y las formas de hacer estén justificados.

Los materiales tecnológicos en la actualidad se encuentran fuertemente vinculadas a la sociedad y, por ende, a la educación. Mientras que aún se utiliza la hoja, el lápiz y el libro de texto, se intenta asumir, en la medida de lo posible, el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el aula. Por muy cierto que sea el hecho de que las TIC han abierto un gran abanico de posibilidades delante de nosotros, no todas pueden considerarse beneficiosas para una adecuada calidad de la experiencia educativa (Área 2015).

El aprendizaje a través de materiales manipulativos es una técnica ampliamente defendida por numerosos pedagogos.

Piaget e Inhelder (1975, citado en Alsina y Domingo 2010) establecieron la edad máxima de 12 años como límite del uso de material manipulable como método de desarrollo de la inteligencia en general y el conocimiento matemático en particular. A día de hoy, ese argumento se encuentra obsoleto por Alsina y Planas (2008) que no establece ningún límite de edad siempre y cuando el material tenga su justificación en el ambiente académico, social y evolutivo que tengan los estudiantes.

Godino, Batanero y Font (2004) los clasifican como objetos físicos extraídos del entorno o específicamente pensados y ratifica el uso de los materiales manipulativos argumentando su funcionamiento como medio de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.

Godino et al. (2004) califica los materiales manipulativos como un método para establecer un puente entre la realidad y los objetos matemáticos. Más adelante, en el mismo artículo, hace una distinción entre materiales manipulativos tangibles y grafico-textuales-verbales. Nosotros los que nos interesa son los primeros.

Si se comprenden bien los modelos matemáticos, la realidad puede ser descrita de forma abstracta y simplificada en un objeto. Todo este proceso de construcción de los modelos matemáticos, la relación con la realidad y su perfeccionamiento a través del ensayo-error es una transformación del objeto tangible al conocimiento y tiene unas fases ya marcadas: observación de la realidad, descripción simplificada de la realidad, construcción de un modelo, trabajo matemático con el modelo e interpretación de los resultados en la realidad.

Aubanell (2006, citado en Alsina y Planas, 2008) entiende los materiales como objetos pertenecientes al proceso de enseñanza-aprendizaje, son objetos que se convierten en un medio a lo largo de su vida. Primero se le otorga al objeto la cualidad de recurso cuando un profesor descubre las posibilidades didácticas y ve en él una buena herramienta con la que trabajar en el entorno educativo. Segundo, se introduce en el aula donde los alumnos y el profesor le dotan del interés, entusiasmo, sorpresa y las ganas de descubrir que se merece. Tercero, prosigue su vida útil dando ideas matemáticas, estrategias e imágenes mentales a quien de él se quiera valer y por último desaparece cuando se le ha exprimido todo su jugo académico y vuelve a ser un objeto corriente. Una metáfora muy estimulante para entender el papel que puede jugar un material manipulativo.

Puig (1956, citado en Benavente, Palacios y de Prada 1985) argumentaba la utilización de los recursos manipulativos en la enseñanza. Razonaba la relación directa existente entre el interés del niño con la participación que tiene en la adquisición del conocimiento, es decir, la motivación como primer motor del aprendizaje. Otro razonamiento vincula “la acción” como proceso inherente del ser humano, las acciones que realiza el estudiante son esenciales para la formación de su pensamiento. En el caso de la enseñanza de la matemática esto es especialmente relevante dado que, al trabajar con abstracciones, éstas pueden partir de situaciones reales. *Cuando los estudiantes pueden conectar las ideas matemáticas entre sí, con las aplicaciones a otras áreas, y en contextos de su propio interés, la comprensión matemática es más profunda y duradera* (Godino, Batanero y Font 2003).

A partir de todo esto deducimos que los materiales que se van a utilizar en el aula tienen que tener un carácter atractivo para el estudiante, con el que conseguir su interés y debe presentar de forma manipulable los contenidos a trabajar de forma que el alumno sea parte activa del proceso de enseñanza-aprendizaje. Cuando el niño toca, juega, actúa, construye, toma decisiones y opera con el manejo, no sólo está jugando con el objeto sino que está ejercitando su intelecto, al mismo tiempo que en su memoria está instaurando, a través de experiencias significativas, los cimientos de nuevos conocimientos.

No olvidemos que el material manipulativo se encuentra directamente vinculado con el aprendizaje significativo ausubeliano, el aprendizaje por descubrimiento y la teoría del constructivismo. Es a partir de las ideas fijas que se tienen en la cabeza que el alumno va a construir nuevos aprendizajes y para ello el docente debe tener claro de dónde parte el alumno, cómo se le puede dirigir y hacia dónde debe continuar.

1.3 Metodología activa y participativa

Al introducir un cambio tan significativo sobre la enseñanza usual, el profesor tiene que tener muy bien meditada la metodología con la que se va a llevar a cabo. Se puede caer en el error de pensar que, mientras que se le proporciona al alumno el objeto con el cual se va a desarrollar el aprendizaje, es éste quien tiene todo el poder sobre el desarrollo exitoso del aprendizaje, aunque, nada más lejos de la realidad ya que es el docente quien tiene el papel fundamental, y su participación y compromiso deben ser constantes para guiar a los alumnos a lo largo de todo el proceso.

Debe encontrarse un equilibrio para el uso de los materiales manipulativos. Su uso excesivo puede dar lugar a situaciones en las que el alumno se acostumbre a una metodología completamente visual y se olvide de la parte fundamental de la matemática que es su abstracción. Por otro lado, se encuentra el caso de no utilizar este tipo de materiales tangibles en la docencia y caer en un formalismo y una abstracción completa en la cual muchos alumnos pueden no comprender los conceptos. Lo ideal se encuentra en el equilibrio entre ambas, un punto medio en el que coexistan la simbología abstracta y los materiales manipulativos permitiendo la reflexión, comprensión y asimilación por parte del alumno de la totalidad de los contenidos

A partir de estas ideas y conceptos principales se propone una metodología activa y participativa tanto por parte del profesor como por parte de los alumnos los cuales van a conseguir, según Martín, 2014:

- Desarrollar habilidades de búsqueda, selección, análisis y evaluación de la información convirtiéndose en los responsables del aprendizaje.
- Establecer relaciones con sus compañeros intercambiando opiniones y experiencias, creando una participación activa general.
- Controlar lo que pasa a su alrededor estableciendo un vínculo con las actividades realizadas por sus compañeros.
- Desarrollar un proceso en zigzag entre los conocimientos del grupo y la reflexión individual de la actividad.

- Asumir aspectos como la autonomía, pensamiento crítico y capacidad de autoevaluación. Esto último lo pueden conseguir mediante actitudes comparativas y/o colaborativas.

Todos deben tener claro que el trabajo de cada uno de ellos debe ser activo y participativo y lo más importante de esta metodología es su carácter lúdico. Dado el desarrollo del aprendizaje a través del juego y retos, el alumno debe asumir su parte interactiva crear un ambiente flexible basado en el diálogo y con un objetivo claro de superación.

1.4 Introducción mediante retos

La presentación de un material manipulativo en el aula no es una tarea simple, hay que conseguir presentárselo a los alumnos de forma atractiva y que empiecen a investigar y a jugar con él. El material en sí tiene carácter inactivo por lo que podría llegar a usarse de forma incorrecta si la planificación no es la adecuada.

La presentación se puede realizar como si se tratase de un juguete interactivo que le llega al alumno y éste puede investigar, tocar, observar y manipular. Una vez entregado el objeto, la forma de establecer una experiencia inmediata podría ser a través de su uso directo mediante un reto. El alumno deberá solucionar un problema utilizando el objeto que se le ha proporcionado de tal forma que situamos al alumno en un entorno didáctico en el que tendrá que utilizar técnicas concretas que ampliarán sus conocimientos conceptuales (Godino et al., 2004). Así, lo que se considera como recurso didáctico no es el material manipulativo en sí, sino la situación global que se genera tanto de la práctica, como de la metodología, como en el uso del material.

En el campo de la didáctica de la matemática se ha dedicado un amplio estudio al ámbito de resolución de problemas. Los investigadores no dejan ningún cabo suelto y tienen en cuenta un gran número de variables a la hora de estudiar la interrelación entre el estudiante y la tarea. Atendiendo a estas investigaciones, a la hora de plantear la utilización del material manipulativo enfocado a un ejercicio, se va a tener en cuenta estas tres variables principales: las variables del problema a resolver, las del sujeto y la situación de resolución. El uso del material atenderá y dará una solución correcta a a las tres de un modo satisfactorio. (Godino et al., 2004)

1.5 Criterios del uso del material manipulativo

El uso de materiales manipulativos tiene como objetivo extender un puente entre la realidad y los conceptos matemáticos, es decir, permiten al alumno resolver problemas que se le planteen mediante la representación tangible de los contenidos que correspondan en cada caso.

Para que se efectúe un uso correcto del aprendizaje mediante el uso de este tipo de materiales, Godino et al., (2004) presenta una serie de criterios generales que se deben cumplir:

- **Implicación personal en la tarea por parte de los alumnos**, a través de propuestas que correspondan a situaciones diarias vividas por los alumnos o a alguna de sus aficiones. De esta forma conseguimos que tengan un papel activo y mantenemos un interés y una motivación elevadas con los que se obtienen mejores resultados.
- **Materialización factible**. La tarea encomendada debe ser construible físicamente o su realización debe hacerse directamente con el material propuesto. De esta forma nos aseguramos que todos puedan participar en el aprendizaje y que puedan comprobar y comparar resultados.
- **Expresión verbal**. El material debe permitir la interacción entre los alumnos, la descripción de lo que están realizando, la elaboración de conjeturas y la discusión de los pasos con sus compañeros. De esta forma consiguen aclarar las ideas, se establece una discusión entre iguales que aporta seguridad y confianza en la materia y se puede trabajar psicológicamente contra el error como fracaso.
- **Generalización**. El material debe ser capaz de aportar los suficientes casos para extraer una norma general del concepto que subyace al reto. Para ello se anima a los alumnos a participar a través de distintos caminos para que tengan suficientes referencias y ejemplos con los cuales alcancen el concepto.
- **Mecanización**. Las matemáticas hay que comprenderlas, pero también hay que mecanizarlas, practicarlas hasta tener claro el proceso detrás de cada paso hasta integrar las herramientas para en un futuro utilizarlas economizando esfuerzos.

1.6 El desarrollo del alumno

El proyecto está pensado para 1º de Bachillerato por lo que es conveniente conocer la característica evolutiva del alumno en esa etapa. Para hablar sobre estas teorías evolutivas vamos a basarnos en las investigaciones realizadas por Piaget (1964/1985, citado en Delgado. 2009). Este psicólogo clasificaba el desarrollo en 4 etapas cognitivas: la etapa sensomotriz, la etapa preoperatoria, la etapa de las operaciones concretas y la etapa de las operaciones formales. En el curso que nos atañe los alumnos tienen una edad de transición en la que entre la edad adolescente y la edad adulta.

Durante el periodo inmediatamente anterior, de los 12 a los 16 años, se desarrolla la pubertad. Es en esta etapa cuando se da el crecimiento físico individual y acaba cuando son capaces de asumir tareas y responsabilidades. A lo largo de estos años se van creando nuevos procesos de pensamiento, el alumno avanza desde el pensamiento concreto simple hacia un pensamiento

formal. A través de este pensamiento los alumnos ya son capaces de utilizar habilidades cognitivas como formular hipótesis, comprobarlas, combinar las variables del problema, probarlas de forma ordenada y ser capaz de aislarlas.

Con la llegada del pensamiento formal, según Inhelder y Piaget (1995 citado en Delgado 2009) llega a los alumnos la capacidad de pensar de forma abstracta. Los problemas pierden su dimensión exclusivamente real y pueden desarrollarse en la imaginación. Esto hace que el planteamiento de la resolución de un problema no sea al azar, sino que sea posible la realización de la formulación de hipótesis sobre el mismo. También se desarrolla su puesta a prueba y la interpretación de resultados lo que deriva en la aparición de razonamiento hipotético-deductivo. Los alumnos se empiezan a plantear lo posible, lo que puede ser en vez de lo que es.

Frente a esta etapa de adolescencia, los alumnos ya se están transformando hacia una etapa de desarrollo caracterizada como la edad adulta. Cognitivamente hablando, los alumnos de primero de bachillerato ya están entrando en la etapa denominada adultez.

En esta etapa de vida adulta aumentan los conocimientos de carácter declarativo, con un crecimiento del léxico, y se mejora el conocimiento procedimental, por ejemplo, con el perfeccionamiento del razonamiento verbal. Se incorporan nuevas estrategias intelectuales lo que hace que se puedan resolver de una forma más eficaz diferentes problemas y tareas y se tiene un mayor grado de comprensión de los conceptos más abstractos.

Tras la cuarta etapa del desarrollo cognitivo de Piaget del pensamiento formal, podríamos clasificar la cognición de los adultos dentro de una supuesta quinta etapa que estaría marcada por el pensamiento postformal. Según Arlin (1984, 1989, citado en Berguer 2006) esta etapa está más vinculada a la trascendencia de los problemas más que a la búsqueda de su solución.

Se empieza a comprender un problema desde diferentes puntos de vista. *Cada perspectiva es sólo una de muchas y cada problema tiene muchas soluciones potenciales* (Sinnott, 1998 citado en Berger 2006). Empieza una mayor relación entre las emociones y la cognición y nuestro pensamiento adquiere la capacidad de afrontar problemas prácticos en la vida.

Las dos etapas mencionadas, la adolescencia y la adultez, son dependientes entre sí, no existe una división clara entre una y la otra por lo que deberemos tener en cuenta todo tipo de combinaciones posibles que puedan ocurrir en el aula, amén de que cada una de ellas afecta al individuo de forma diferente por lo que vamos a encontrar alumnos indistintamente de una u otra etapa.

Atendiendo a estas características de los alumnos se puede concluir que el trabajo realizado por el alumno debe empezar a parecerse al de un adulto. Debe investigar, ser capaz de predecir la solución, recabar información, de toda la posible elegir la adecuada, crear su modelo matemático, comprobar si la solución es factible, comunicarse en lenguaje matemático con sus compañeros y extraer los conceptos válidos (Godino et al., 2004).

Para todo ello contarán con la ayuda de los materiales manipulativos.

1.7 El docente como guía del proyecto

En un lado de la conjunción enseñanza-aprendizaje se encuentra el alumno, en el otro se encuentra el docente. Dada la transición que está sufriendo la educación en la actualidad resulta muy complejo dar un listado de características que debe cumplir el docente. Es más, la complejidad no viene sólo de la transición mencionada sino, además, de la gran variedad de situaciones sociales y personales que pueden aparecer en el aula. La amplia diversidad de clasificaciones y características nunca dejará de crecer gracias a la constante renovación de los tiempos y de las metodologías educativas.

Para acompañar al alumno a lo largo de su aprendizaje, el profesor debe ser guía en el proceso y en la transmisión de conocimientos. Vamos a intentar dar unas pautas para un buen liderazgo.

El profesor como guía es la clave del aprendizaje del alumno. Debe ser organizado y comprometido. Debe ser una persona responsable y respetuoso con todos los alumnos. Es muy importante que sea capaz de crear un buen clima de trabajo y traslade la motivación a los estudiantes. Innegablemente, debe conocer la materia que está dando y debe estar dotado de la capacidad de la comunicación. La finalidad global se puede resumir en la integración de todos los alumnos en el grupo, la creación de una clase ordenada y tranquila y la dirección efectiva del aprendizaje, siempre bajo las condiciones de paciencia y de autoridad (Palomero, 2003 citado en de la Calle 2004).

La utilización del material manipulativo hace que la clase sea muy dinámica y que se pueda perder el ritmo en un segundo por lo que la atención del educador a todo lo que está ocurriendo es fundamental. El profesor deberá tener ganas de innovar y salir de la rutina de la enseñanza tradicional. Para la transmisión de los conocimientos debe ser asertivo y cercano a los alumnos.

2. Parte II: Proyecto de trabajo en el aula

Veamos ahora el desarrollo del proyecto que se va a plantear.

2.1 Propuesta del proyecto

Está pensado para alumnos de 1º de Bachillerato de la rama de ciencias, concretamente para el bloque de geometría de la asignatura de Matemáticas I. Se trata de utilizar el material manipulativo **Geopaper** creado para la enseñanza del bloque de geometría. El Geopaper dará respuesta a los conocimientos que estén vinculados con los diferentes temas, en concreto se centrará en dos unidades didácticas.

2.2 Justificación

García y López (2008 citado en Román 2018) opinan que el aprendizaje de las matemáticas es necesario para un desarrollo del intelecto, para un ordenado razonamiento y para la elaboración de críticas, abstracciones y pensamientos. Asimismo, Vegas (2005 citado en Román 2018) apoya lo anterior suscribiendo que, con su aprendizaje, los alumnos adquieren valores como la tolerancia, la solidaridad, el respeto y el espíritu crítico, necesarios para enfrentarse a la realidad con una actitud coherente y lógica.

Concretamente, con la aplicación en diversos contextos de la geometría, se incrementa su capacidad de razonamiento lógico (Báez e Iglesias, 2007, citado en Gamboa y Ballester 2010), su contribución en el desarrollo de habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002 citado en Gamboa y Ballester 2010). Autores como Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004, citado en Gamboa y Ballester 2010) vinculan la geometría con actividades humanas, sociales, culturales y científicas a lo largo de la historia de la humanidad.

Por todo ello se considera a la geometría como uno de los pilares fundamentales de formación básica y cultural.

Uno de los motivos por el que se ha elegido este tema ha sido la percepción que tienen los alumnos del mismo. En el artículo publicado por Gamboa y Ballester (2010), Barrantes y Blanco (2005,2004) muestran la siguiente lista con opiniones de estudiantes ya graduados:

- Conciben la geometría escolar como una materia difícil.
- Es una materia muy teórica, abstracta y complicada de entender.
- La dificultad del aprendizaje radica, principalmente, en la memorización de fórmulas y saber cuándo aplicarlas.

- La pizarra y el libro de texto son los recursos más utilizados.
- El uso de materiales auxiliares es poco frecuente y en el caso de su uso no tienen una finalidad clara.
- El examen es el elemento más importante de la evaluación.

Durante el periodo de prácticas en el Colegio Nuestra Señora de Lourdes en Valladolid, no tuve opción de asistir a ninguna clase de geometría de bachillerato, pero estuve en contacto con profesores del centro a los cuales tuve opción de realizar ciertas preguntas. La valoración general es que la enseñanza de la geometría es uno de los bloques que establece la normativa con peor calificación media. Lo cual me dejó dubitativo. Aunque no pude acceder a la docencia directa en Bachiller, tuve opción de participar en la docencia del grupo de ESO 4ºC, muy próximos en edad a los de primero de bachillerato y cuyo currículo alberga ciertas similitudes. En este caso la docencia era muy analítica, tenía un apoyo de herramientas digitales para su exposición, aunque las cuentas, los problemas y la teoría se presentaba apoyándose en los números. La mayor carencia que observé fue: mientras los alumnos y alumnas realizaban problemas en clase, las dudas que preguntaban eran sobre concepto básico de los contenidos del tema. La reflexión continuó hasta el punto de terminar surgiendo en mi cabeza la idea de que, si tuvieran los conceptos claros, las operaciones no supondrían ningún problema para ellos y para tener los conceptos claros, lo más importante es que sean ellos quienes los descubran.

Se ha reflexionado sobre la cantidad de alternativas que existen para poder trabajar este tema de forma mucho más amena y que favorezca su comprensión y se ha llegado a la conclusión de que, un material manipulativo que nos presente los conceptos y que, con ello, podamos asociar a cada fórmula o a cada contenido una representación mental y real es un sistema de enseñanza muy competente. A través de estos materiales, los alumnos pueden realizar las manipulaciones necesarias y así explorar y comprender las relaciones y el alcance de los contenidos del tema.

2.3 Planteamiento del proyecto

Hay que promover una enseñanza de la geometría de forma teórico-práctica, con una buena planificación y unos recursos adecuados al tema. Hay que conseguir acercar la enseñanza a una realidad lo más fielmente posible y para ello, el profesor debe valerse de todos los recursos que crea conveniente en función del grupo asignado.

Gamboa y Ballesteros (2006) hacen una mención especial al uso de material electrónico en la enseñanza, como la pizarra digital, haciendo énfasis en que los procesos de visualización, argumentación y justificación que pueden proporcionar son mucho más elevados que los dibujos planos y estáticos de la pizarra o el libro de texto. En efecto estos materiales ayudan a

la visualización de los objetos, aunque, esto ocurre si es el alumno quien genera las cosas digitalmente, en caso de ser el profesor quien manipula el ordenador, lo visual acaba quedándose en un segundo plano olvidado.

El Geopaper presenta un enfoque mecanicista en el que los alumnos manifiestan los problemas en el objeto que se les proporciona. Incluso habiendo pasado la Educación Secundaria Obligatoria, lo cual indica un desarrollo cognitivo ya casi de una persona adulta, se pueden solucionar muchos ejercicios relacionados con el tema y cuya comprensión geométrica puede llevarse a cabo a través del Geopaper.

2.4 Objetivos del proyecto

Lo que se busca con este proyecto es elaborar un apoyo educativo en forma de material manipulativo para que los alumnos tengan una herramienta con la que puedan integrar de forma más significativa los conceptos base de la geometría plana y aportar una alternativa que puede coexistir con la enseñanza tradicional de lección magistral y ejercicios.

Objetivos generales:

- Crear una propuesta de intervención compuesta por materiales manipulativos en 1º de bachillerato, en el tema de geometría plana dentro del bloque 4 establecido en el BOCYL.

Objetivos específicos:

- Hacer una llamada de atención sobre la importancia del bloque de geometría dentro del ámbito de la matemática.
- Realzar el uso de materiales manipulativos como favorecedores del aprendizaje.
- Proporcionar nuevas mejoras a la metodología docente.
- Proporcionar nuevas herramientas de estudio al alumnado.
- Dotar a los alumnos la capacidad autónoma de observación, manipulación y representación.

2.5 Propuesta detallada del material manipulativo

Como hemos mencionado previamente, y se ha observado durante las prácticas, existe multitud de estudiantes que no sabe cómo acometer los problemas relacionados con las matemáticas. Se pretende, por tanto, conseguir una aproximación a los problemas de forma gráfica y de representar los elementos del problema a través de objetos ya que, una vez se tienen bien expresados, la solución llega a ellos con mucha mayor facilidad.

Visto el problema existente de plasmar en un papel los datos de partida de cada problema, hay que buscar otras alternativas. Una solución podría ser realizar dicha representación usando las Tecnologías de la Información y Comunicación. Pero nosotros vamos a presentar otra alternativa a través de un objeto real de carácter manipulativo.

El material va a representar un entorno interactivo como Cabri, Desmos o GeoGebra para una interacción real entre los alumnos y el propio entorno. Dicho entorno se llamará Geopaper.

El Geopaper será portátil, estará realizado en madera con elementos que se pueden adquirir fácilmente y sin un coste elevado. Su definición más precisa se puede dar a través de su finalidad: se trata de un objeto cuyo uso es manual y cuya finalidad es su empleo como sistema de representación de elementos geométricos.

Se coloca una referencia de origen en el centro del rectángulo que delimita el objeto. Los ejes se fijan paralelos a los lados del rectángulo (eje OX-base del rectángulo y eje OY-altura del rectángulo). La unidad de medida es de 3cm.

El área del plano que delimita está comprendida entre los valores $x \in [-8, 8]$ e $y \in [-6, 6]$ abarcando una superficie de $16 \cdot 12 = 192 u^2$. Esta limitación puede variar cambiando la escala del plano, es decir, colocando la unidad de medida diferente.

En cada uno de los puntos que delimitan el Geopaper se coloca una espiga de madera en la cual nos apoyamos, por ejemplo, para situar el extremo de los segmentos que simbolizarán las rectas.

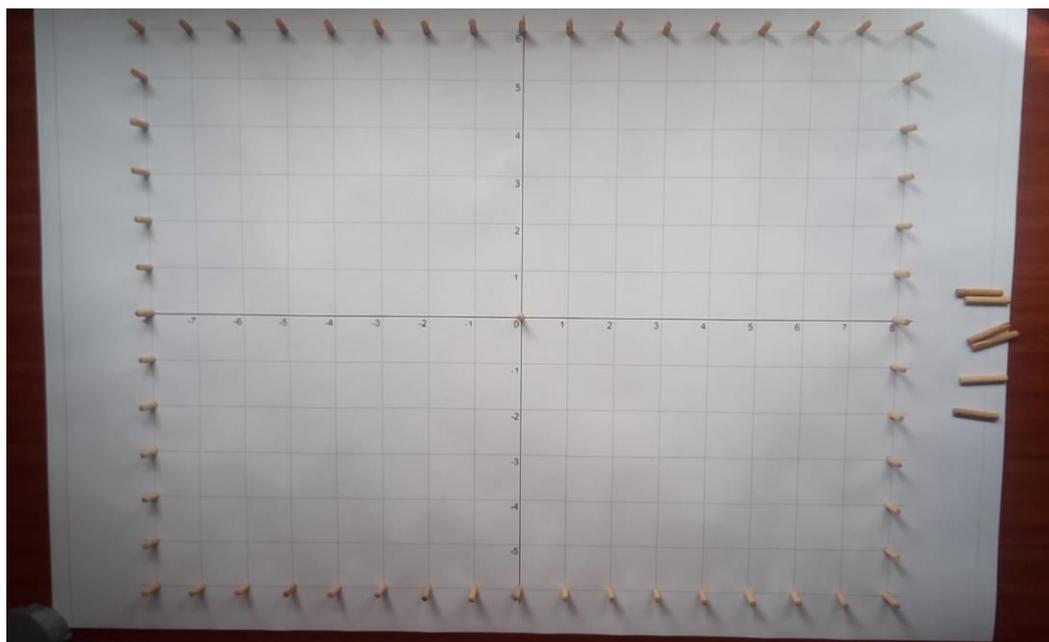


Ilustración 2. Geopaper

En el origen de coordenadas también se situará una de las espigas la cual servirá como punto de origen de los vectores del plano. Para la representación de los vectores utilizaremos el elemento auxiliar Geomaker. Está diseñado con impresora 3D, impreso y construido con elementos plásticos y de tela. Se trata de un objeto que se apoya en la espiga de madera del origen de coordenadas y estirando de la flecha extraemos tanta longitud de vector como necesitemos. Mientras se estira hay que mantener fijo el elemento superior del Geomaker dado que el elemento inferior girará para permitir la salida del vector. Para volver a recoger el vector hay que deshacer todas las rotaciones realizadas girando la pieza inferior de forma manual.

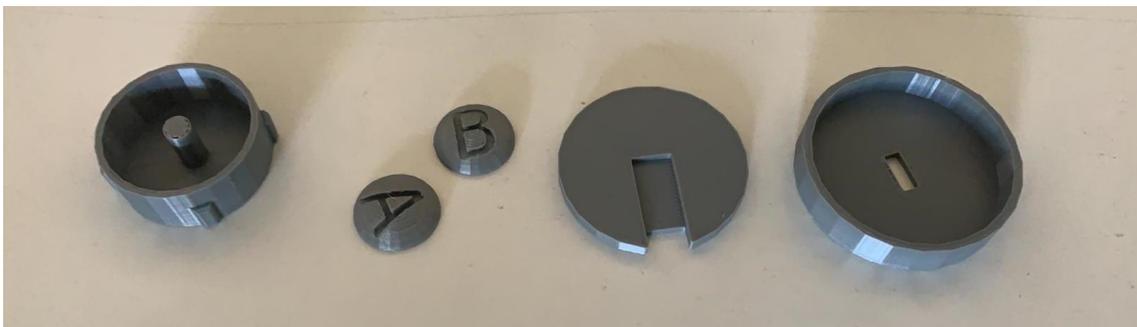


Ilustración 3. Piezas impresas del Geomaker

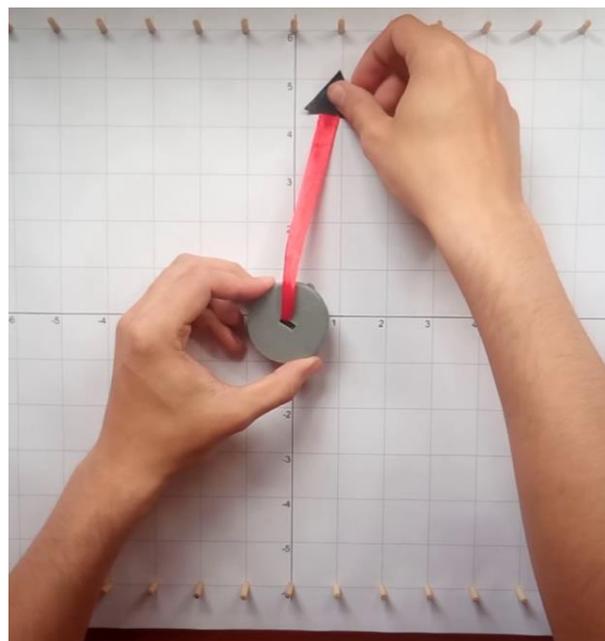


Ilustración 4. Uso del Geomaker

La utilidad de este objeto viene dada por las posibilidades que ofrece de manipulación tanto de rectas, como de vectores, como de figuras. Se observa su construcción, su significado geométrico y la posible relación que existe entre ellos.

Los materiales de los que está hecho el Geopaper son fácilmente accesibles y no requieren un coste elevado adicional por lo que se podría construir en casa fácilmente. Si llevamos el proyecto a un nivel académicamente más global, la construcción de este objeto se podría realizar en conjunto con la asignatura de tecnología en el aula-taller del colegio.

2.6 Objetivos del material manipulativo

Los objetivos que se pretenden conseguir con este objeto son los siguientes:

Objetivos generales:

- Utilizar el material manipulativo para que el alumno pueda entender, abstraer y relacionar los elementos de la geometría del plano y la aplicación de sus reglas.

Objetivos específicos:

- Establecer un aprendizaje autónomo del alumno guiado por el profesor.
- Favorecer la comprensión de los elementos geométricos mediante su representación.
- Reconocer la geometría en la vida real.
- Resolver situaciones y operaciones ligadas al ámbito geométrico.
- Relacionar y agrupar objetos según sus atributos.
- Verbalizar los procedimientos, las acciones y los descubrimientos.

2.7 Evaluación del proyecto

El uso de este material manipulativo es principalmente para la comprensión geométrica del plano y de los enunciados de los problemas. Su empleo les va a ayudar a planificar los ejercicios para su posterior resolución y, sobre todo, para comprender geométricamente el significado de muchos de los conceptos que se verán en la unidad didáctica. Véase: vector, recta, ángulo, proyección, producto escalar, simetría, giro...

Para una correcta evaluación del proyecto hay que realizar la valoración de dos aspectos: una evaluación al alumnado y una evaluación al propio proyecto.

La evaluación al alumnado es una primera fase para conocer si el proyecto ha dado sus frutos, la evaluación será continua desde su inicio hasta su finalización y podemos encontrar tres métodos principales:

- Evaluación inicial: Se realizará a todos los alumnos y servirá para comprender el punto de partida global y el individual. Esta evaluación inicial se hará desde la perspectiva matemática y servirá para reactivar los conocimientos previos de los alumnos, además de que puede servir como introducción del tema.
- Evaluación continua y formativa: El trabajo en el aula es clave para la evaluación de los alumnos, no es suficiente con el uso de un examen final. De esta forma estamos evaluando el progreso de cada alumno y su desarrollo tanto individual como grupal. Este tipo de evaluación sirve para realizar un seguimiento de los alumnos para ir proponiendo nuevos retos que les guíen en su aprendizaje. Esta evaluación tendrá una parte oral a través de las exposiciones de los ejercicios realizados y otra parte de representación de elementos en el Geopaper (sin olvidar el resto de actividades fuera del material manipulativo).
- Autoevaluación: se puede realizar mediante una rúbrica. Se debe fomentar un tipo de evaluación poco usual en el que el alumno analiza su propio trabajo y su propio proceso a lo largo de la unidad didáctica. Este tipo de evaluación se puede realizar a través de preguntas que sean intuitivas y no difíciles de responder. Con ello se pretende la realización de un examen de autoconciencia para mejorar sus resultados y estrategias de aprendizaje propios.

Todos estos datos ayudarán al docente a realizar una primera aproximación a la utilidad del Geopaper y extraer unas conclusiones que pueden ayudar a establecer, en caso de ser necesario, un mejor uso de la herramienta.

Esta evaluación es la que queda reflejada en las calificaciones de los alumnos y la que, posteriormente, se puede comentar a los padres o en el claustro de profesores.

Al final de cada curso hay que valorar si la aplicación de cada proyecto está fundamentada, hay que modificarla o puede llegar el punto de que sea necesario eliminarla. Para tomar esta decisión el docente tendrá en la mano los resultados académicos de los alumnos, la autoevaluación de ambos y decidirá si se están consiguiendo los objetivos planteados o no. De igual forma se tendrá en cuenta las opiniones de sus compañeros de trabajo recibidas en la reunión trimestral para concretar los resultados del grupo.

También es interesante conocer la opinión de los alumnos respecto al proyecto. Es cierto que los alumnos carecen de un criterio de evaluación de la docencia suficientemente desarrollado, pero sus opiniones pueden servir como información adicional.

Estas evaluaciones mencionadas pueden llevarse a cabo mediante una rúbrica, preguntas directas o preguntas escritas.

3. Parte III: Unidad didáctica:

3.1 Introducción contextual

Vistos los aspectos más relevantes de nuestro proyecto en cuestión vamos a ver cómo incluirlo en una docencia real a través de una unidad didáctica. Para la realización de la propuesta se ha tenido en cuenta todo lo mencionado previamente. Se tiene como referencia el marco legal docente, el estudio de conocimientos matemáticos relacionados con el tema, la importancia de los conceptos, al análisis realizado al alumnado y la didáctica más adecuada para su aprendizaje.

El desarrollo de la unidad didáctica tiene una finalidad muy clara. Se pretende conseguir un aprendizaje significativo a través del uso de materiales manipulativos y presentando los ejercicios a través de retos. Con el uso del Geopaper se busca motivar al alumnado generando curiosidad y, en apoyo a la enseñanza tradicional, conseguir una participación directa de los alumnos en su propio aprendizaje. Estas prácticas consiguen una mayor integración de las matemáticas y, con ello, un aumento de métodos procedimentales que posteriormente puedan utilizar para situaciones reales. Los alumnos experimentan de manera directa absorbiendo el conocimiento de forma más óptima.

La unidad didáctica se compone de los siguientes apartados:

- Introducción Contextual
- Contribución a las Competencias Básicas
- Objetivos Didácticos
- Contenidos
- Metodología: Estrategias Didácticas
- Recursos
- División en Tiempos y Espacios
- Actividades de Aprendizaje y Enseñanza
- Actividades Complementarias
- Evaluación
- Atención a la Diversidad
- Autoevaluación de la Unidad

Nos encontramos en la asignatura de Matemáticas I. Esta asignatura se encuentra dentro del programa del primero curs del Bachillerato de la modalidad de ciencias, se considera una asignatura troncal y consta de la siguiente organización:

Bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

Bloque 2: Números y álgebra.	Ud (1, 2, 5, 9)
Bloque 3: Análisis.	Ud (6, 7, 8)
Bloque 4: Geometría.	Ud (3, 4, 10, 11, 12)
Bloque 5: Estadística y probabilidad.	Ud (13)

Dentro del Bloque 4 de geometría tenemos los siguientes temas: nº3: Resolución de triángulos; nº4: Fórmulas y funciones trigonométricas; nº10: Vectores; nº11: Geometría analítica y nº12: Lugares geométricos, cónicas.

Los alumnos que se encuentran en primero de bachillerato ya tienen una noción de lo que se considera geometría del plano. Saben que, entre otros conocimientos, se explican rectas, vectores, ángulos y transformaciones de figuras. Se adquirirán, en todo el bloque de geometría, la totalidad de los siguientes conocimientos según la Orden EDU/363/2015:

1º Bach. Bloque 4: Geometría
<ul style="list-style-type: none"> • Medida de un ángulo en radianes. • Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Razones trigonométricas de los ángulos suma, diferencia de otros dos, doble y mitad. Fórmulas de transformaciones trigonométricas. Razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos, y reducción al primer cuadrante. • Resolución de ecuaciones trigonométricas. • Teoremas del seno y del coseno. Resolución de triángulos. Resolución de problemas geométricos diversos. • Vectores libres en el plano. Operaciones con vectores. • Producto escalar. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores. • Bases ortogonales y ortonormales. • Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Paralelismo y perpendicularidad. Distancias y ángulos. Resolución de problemas. • Lugares geométricos del plano. • Cónicas. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Ecuación y elementos.

El estudio de este bloque no se realiza de forma lineal. Se fragmentan sus temas para vincularlo con los demás bloques del curso, de esta forma: los temas nº3: resolución de triángulos y nº4:

fórmulas y funciones trigonométricas se integran con el bloque 2, números y álgebra. Para la enseñanza de estas dos unidades didácticas se van a necesitar un total de 12 sesiones.

Los temas nº10, nº11 y nº12, que son los relativos a la geometría analítica plana, requerirán de 24 sesiones.

Según los criterios del BOCyL (ORDEN EDU/363/2015 Anexo II) la totalidad de estas 36 sesiones corresponden a 9 semanas, teniendo 4 periodos lectivos de 60min cada la semana.

Siguiendo el calendario propuesto encontramos las sesiones distribuidas de la siguiente manera:

EVALUACIÓN	TEMA	TÍTULO	SESIONES
Primera Ev.	1	Números reales	12
	2	Álgebra	16
	3	Resolución de triángulos	8
		Sesiones de ajustes, desfases y refuerzos	2
Segunda Ev.	4	Fórmulas y funciones trigonométricas	4
	5	Sucesiones	8
	6	Funciones elementales	8
	7	Límites de funciones y Continuidad	8
	8	Iniciación al cálculo de derivadas. Aplicaciones	16
			Sesiones de ajustes, desfases y refuerzos
Tercera Ev.	9	Números complejos	8
	10	Vectores	8
	11	Geometría analítica en el plano	12
	12	Lugares geométricos. Cónicas	4
	13	Distribuciones bidimensionales	4
		Sesiones de ajustes, desfases y refuerzos	4
	Total		124

El resto de horas se reservan para exámenes.

Las unidades didácticas que se van a desarrollar son **Unidad 10: Vectores** y **Unidad 11: Geometría Analítica en el Plano**. Estos dos temas, junto con el de números complejos, se encuentran en la tercera evaluación, después del bloque de análisis y previo al bloque de estadística y probabilidad y son las bases de la geometría plana que se da a lo largo del curso.

Contenidos, estándares de aprendizaje y criterios de evaluación.

Previo a comenzar a dictar las unidades didácticas, se va a proceder a hacer una relación con el curso anterior a 1º de Bachillerato, dado que es el primer curso en el que se imparte geometría plana, y con el curso posterior cuyos contenidos son semejantes, pero en ámbitos diferentes.

El análisis va a dividirse en tres apartados que hacen referencia a las tablas de contenidos, estándares de aprendizaje y criterios de evaluación del currículo en vigor en relación al bloque de geometría.

Las siguientes tablas recogen la información relativa a 4º de la ESO y 1º y 2º de Bachillerato dentro de la normativa del Boletín Oficial de Castilla y León, Real Decreto 1105/2014. En el curso de 4º de la ESO, a partir del cual se va a comenzar el análisis, aparece una bifurcación en el ámbito de las matemáticas. Los alumnos tienen que decidir si comienzan a trabajar las Matemáticas Académicas o las Matemáticas Aplicadas en función de sus planes de futuro. Cuando terminan 4º ESO tienen que tomar otra elección en la que tendrán que elegir las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales o Matemáticas I y II que están vinculadas con el Bachillerato de ciencias.

El análisis realizado se muestra en tablas en las que se observa la continuidad o discontinuidad de ciertos temas a partir de palabras clave que definen los contenidos.

Contenidos

A continuación se describen los contenidos correspondientes asociados a matemáticas académicas de 4º de la ESO y 1º y 2º de bachillerato. Se ha decidido partir de 4º ESO porque es en este curso donde se presenta a los alumnos el espacio Euclídeo y se realiza una aproximación principal al tema de vectores y al tema de geometría plana asegurando los conocimientos básicos sobre los conceptos de geometría cartesiana y plana que van a servir para los dos cursos venideros.

Palabras clave	Contenido 4º ESO. Bloque 3: Geometría
Ángulos	Radian. Medidas de ángulos en el sistema sexagesimal y en radianes.
Lugar geométrico	
Relaciones entre figuras	Relaciones métricas en los triángulos. Semejanza. Figuras semejantes.

	Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
Trigonometría.	Razones trigonométricas de ángulos agudos y de ángulos cualesquiera. Relaciones entre las razones trigonométricas. Relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios, opuestos y que se diferencian en uno y dos rectos. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos aplicando trigonometría elemental.
Geometría cartesiana del plano	
Geometría analítica	Coordenadas Vectores. Definiciones geométricas y analíticas de las operaciones: suma de vectores y producto de un número por vector.
Elementos de la geometría analítica	Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétricas, continua y general o implícita. Paralelismo, perpendicularidad: condiciones de las coordenadas de dos vectores.
Uso de tecnología	Aplicaciones informáticas de geometría dinámica que facilite la comprensión de conceptos y propiedades geométricas.
Figuras volumétricas.	
Aplicaciones reales	Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.

Palabras clave	Contenido 1º Bach. Bloque 4: Geometría
Ángulos	Medida de un ángulo en radianes.
Lugar geométrico	Cónicas. Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Ecuación y elementos.
Relaciones entre figuras	

Trigonometría.	<p>Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.</p> <p>Razones trigonométricas de los ángulos suma, diferencia de otros dos, doble y mitad.</p> <p>Fórmulas de transformaciones trigonométricas.</p> <p>Razones trigonométricas de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos, y reducción al primer cuadrante.</p> <p>Resolución de ecuaciones trigonométricas.</p>
Geometría cartesiana del plano	
Geometría analítica	<p>Teoremas del seno y del coseno. Resolución de triángulos.</p> <p>Resolución de problemas geométricos diversos.</p> <p>Vectores libres en el plano.</p> <p>Operaciones con vectores.</p> <p>Producto escalar.</p> <p>Módulo de un vector.</p> <p>Ángulo de dos vectores.</p>
Elementos de la geometría analítica	<p>Bases ortogonales y ortonormales.</p> <p>Geometría métrica plana.</p> <p>Ecuaciones de la recta.</p> <p>Posiciones relativas de rectas.</p> <p>Paralelismo y perpendicularidad.</p> <p>Distancias y ángulos.</p> <p>Resolución de problemas.</p>
Uso de tecnología	
Figuras volumétricas.	
Aplicaciones reales	

Palabras clave	Contenido 2º Bach. Bloque 4: Geometría
Ángulos	
Lugar geométrico	
Relaciones entre figuras	
Trigonometría.	

Geometría cartesiana del plano	
Geometría analítica	Vectores en el espacio tridimensional. Dependencia e independencia lineal.
Elementos de la geometría analítica	Base del espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos). Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).
Uso de tecnología	
Figuras volumétricas.	
Aplicaciones reales	

Estándares de aprendizaje

A continuación se describen los estándares de aprendizaje correspondientes asociados a matemáticas académicas de 4º de la ESO y 1º y 2º de bachillerato. Vemos como la evaluación va centrándose cada vez más en elementos abstractos y cada vez se preocupa menos de la representación de los contenidos.

Palabras clave	Estándares de aprendizaje 4º ESO. Bloque 3: Geometría
Ángulos	
Lugar geométrico	
Relaciones entre figuras	
Trigonometría.	1.1. Utiliza conceptos y relaciones de la trigonometría básica para resolver problemas empleando medios tecnológicos, si fuera preciso, para realizar los cálculos. 2.2. Resuelve triángulos utilizando las razones trigonométricas y sus relaciones. 2.3. Utiliza las fórmulas para calcular áreas y volúmenes de triángulos, cuadriláteros, círculos, paralelepípedos, pirámides, cilindros, conos y esferas y las aplica para

	resolver problemas geométricos, asignando las unidades apropiadas.
Geometría cartesiana del plano	
Geometría analítica	3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.
Elementos de la geometría analítica	3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.
Uso de tecnología	2.1. Utiliza las herramientas tecnológicas, estrategias y fórmulas apropiadas para calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.
Figuras volumétricas.	
Aplicaciones reales	

Palabras clave	Estándares de aprendizaje 1º Bach. Bloque 4: Geometría
Ángulos	1.1. Conoce las razones trigonométricas de un ángulo, su doble y mitad, así como las del ángulo suma y diferencia de otros dos.
Lugar geométrico	5.1. Conoce el significado de lugar geométrico, identificando los lugares más usuales en geometría plana así como sus características.
Relaciones entre figuras	

Trigonometría.	2.1. Resuelve problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico, utilizando los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales.
Geometría cartesiana del plano	
Geometría analítica	3.1. Emplea con asiduidad las consecuencias de la definición de producto escalar para normalizar vectores, calcular el coseno de un ángulo, estudiar la ortogonalidad de dos vectores o la proyección de un vector sobre otro. 3.2. Calcula la expresión analítica del producto escalar, del módulo y del coseno del ángulo. 4.1. Calcula distancias, entre puntos y de un punto a una recta, así como ángulos de dos rectas.
Elementos de la geometría analítica	4.2. Obtiene la ecuación de una recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos. 4.3. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas.
Uso de tecnología	5.2. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos en las que hay que seleccionar, estudiar posiciones relativas y realizar intersecciones entre rectas y las distintas cónicas estudiadas.
Figuras volumétricas.	
Aplicaciones reales	

Palabras clave	Estándares de aprendizaje 2º Bach. Bloque 4: Geometría
Ángulos	
Lugar geométrico	
Relaciones entre figuras	
Trigonometría.	
Geometría cartesiana del plano	

Geometría analítica	<p>1.1. Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.</p> <p>3.1. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.</p> <p>3.2. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.</p> <p>3.3. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.</p> <p>3.4. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.</p>
Elementos de la geometría analítica	<p>2.1. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.</p> <p>2.2. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente.</p> <p>2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.</p> <p>2.4. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.</p>
Uso de tecnología	<p>3.4. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.</p>
Figuras volumétricas.	
Aplicaciones reales	

Criterios de evaluación

A continuación se describen los criterios de evaluación correspondientes asociados a matemáticas académicas de 4º de la ESO y 1º y 2º de bachillerato. Vemos como la evaluación va centrándose más en elementos del espacio euclídeo que en otros elementos que caracterizan el bloque de geometría de la educación obligatoria.

Palabras clave	Criterios de evaluación 4º ESO. Bloque 3: Geometría
Ángulos	1. Utilizar las unidades angulares del sistema métrico sexagesimal e internacional y las relaciones y razones de la trigonometría elemental para resolver problemas trigonométricos en contextos reales.
Lugar geométrico	
Relaciones entre figuras	2. Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas en situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas y aplicando las unidades de medida.
Trigonometría.	
Geometría cartesiana del plano	
Geometría analítica	3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.
Elementos de la geometría analítica	
Uso de tecnología	
Figuras volumétricas.	
Aplicaciones reales	

Palabras clave	Criterios de evaluación 1º Bach. Bloque 4: Geometría
Ángulos	1. Reconocer y trabajar con los ángulos en radianes manejando con soltura las razones trigonométricas de un ángulo, de su doble y mitad, así como las transformaciones trigonométricas usuales.
Lugar geométrico	
Relaciones entre figuras	

Trigonometría.	2. Utilizar los teoremas del seno, coseno y tangente y las fórmulas trigonométricas usuales para resolver ecuaciones trigonométricas, así como aplicarlas en la resolución de triángulos directamente o como consecuencia de la resolución de problemas geométricos del mundo natural, geométrico o tecnológico.
Geometría cartesiana del plano	
Geometría analítica	3. Manejar la operación del producto escalar y sus consecuencias.
Elementos de la geometría analítica	3. Entender los conceptos de base ortogonal y ortonormal. Distinguir y manejarse con precisión en el plano euclídeo y en el plano métrico, utilizando en ambos casos sus herramientas y propiedades. 4. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo las ecuaciones de rectas y utilizarlas, para resolver problemas de incidencia y cálculo de ángulos y distancias. 5. Manejar el concepto de lugar geométrico en el plano. Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos usuales, estudiando las ecuaciones reducidas de las cónicas y analizando sus propiedades métricas.
Uso de tecnología	
Figuras volumétricas.	
Aplicaciones reales	

Palabras clave	Criterios de evaluación 2º Bach. Bloque 4: Geometría
Ángulos	
Lugar geométrico	
Relaciones entre figuras	
Trigonometría.	

Geometría cartesiana del plano	
Geometría analítica	<p>1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores. Estudiar la dependencia lineal de un conjunto de vectores, y decidir si forman una base.</p> <p>3. Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico.</p>
Elementos de la geometría analítica	2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.
Uso de tecnología	
Figuras volumétricas.	
Aplicaciones reales	

Conclusiones

En el curso de 4º de la ESO se introducen nuevos elementos relacionados con la geometría como es la trigonometría, la geometría del plano y las nociones de vector y recta. Más adelante, en segundo de bachillerato, se estudia geometría euclidiana en espacio de 3 dimensiones.

Mientras que en los cursos inferiores el currículo establece cierta prioridad en la representación de los objetos, a medida que se llega a los cursos más elevados se “pierde” la necesidad de visualizar lo que se está calculando, contextualizarlo mediante su representación. Pasa a tener más importancia la realización de ejercicios a través de elementos teóricos que la realización de ejercicios a través de elementos visuales.

El uso de las TIC no disminuye, desaparece del currículo de contenidos, pero se mantiene en los estándares de aprendizaje evaluables.

En las enseñanzas post-obligatorias se nota ya el cambio necesario de etapa cognitiva del alumnado en tanto que, la falta de visualización de los elementos se realiza con el desarrollo del pensamiento abstracto y del método de desarrollo hipotético-deductivo. Los contenidos tienen un grado de dificultad más elevado relacionando la geometría plana con otros elementos. El segundo curso de bachillerato establece unos contenidos muy similares que el primer curso con

la salvedad de que, en esta ocasión, en vez de tener los elementos definidos en dos dimensiones están definidos en tres.

A modo de resumen, podemos cerrar este análisis a lo largo de la geometría de ESO y Bachillerato concluyendo que existe una evolución progresiva desde los conceptos más intuitivos y visuales en los primeros cursos de la ESO hasta unos contenidos eminentemente abstractos en los dos últimos cursos de Bachillerato. La evolución de los contenidos a lo largo del currículo se ve que tiene una progresión en espiral, cada curso abarca contenidos que se han visto en cursos anteriores y, a partir de ellos, se van desarrollando nuevos conceptos. Podemos ver la huella de la Teoría de Aprendizaje Significativo de Ausubel en esta estructuración en espiral, en el cual se origina el objeto de estudio relacionándolo con ideas ya establecidas en la estructura cognitiva.

Analizado los conocimientos que deben tener, según las dos normativas ORDEN EDU/362/2015 y ORDEN EDU/363/2015, vamos a planificar las dos Unidades Didácticas que están más directamente relacionadas con el Geopaper, que son la **Unidad Didáctica 10** relativa a **Vectores** y la **Unidad Didáctica 11** cuyo contenido es **Geometría Analítica en el Plano**.

3.2 Unidad Didáctica 10: Vectores

Introducción contextual

La materia que se va a impartir en este bloque parte de los conocimientos que los alumnos adquirieron sobre geometría plana en el curso previo. Será necesario reactivar dichos conocimientos para la correcta integración de los conceptos que se van a impartir, a su vez, estos nuevos conocimientos, serán la base para la geometría de segundo de bachillerato.

Para un adecuado seguimiento de la clase, los alumnos deben asegurarse tener un mínimo de control sobre los siguientes aspectos:

- Comprensión del sistema cartesiano y noción del término coordenadas.
- Definición de un punto a través de dos coordenadas.
- Suma/resta de vectores y producto por escalar.
- Vector que une dos puntos.

Asimismo, es necesario establecer cuáles son los conocimientos mínimos que debe tener los alumnos para las tareas que van a llevar a cabo en el siguiente nivel de matemáticas. Podemos clasificarlos en los siguientes:

- Definición de vector a partir de sus coordenadas.
- Dependencia e independencia lineal.

- Concepto de base del plano.
- Significado geométrico del producto escalar.

Temporalización

La unidad didáctica se va a impartir en el tercer trimestre, posterior a los bloques 1, 2 y 3 de repaso, números y álgebra y análisis respectivamente y previo al bloque 5 de estadística y probabilidad. El tema 10 relativo a Vectores quedaría situado globalmente de la siguiente forma:

	1ª Evaluación	2ª Evaluación	3ª Evaluación
Números y álgebra	Ud: 1, 2	Ud: 5,	
Análisis		Ud: 6, 7, 8	
Geometría	Ud: 3	Ud: 4	Ud: 9, 10, 11, 12
Estadística y probabilidad			Ud: 13

Dada la cantidad de materia a impartir, la unidad didáctica contará con 8 sesiones distribuidas a lo largo de dos semanas. Se considera que los alumnos vienen con un conocimiento mínimo de la geometría plana derivada de la enseñanza del curso anterior.

Contribución a las competencias básicas

Dado el creciente cambio sociodemográfico durante los últimos 20 años, los cambios en la vida laboral y la crisis económica mundial en la que estaba sumida la comunidad europea a principios de siglo, se optó por dar un cambio radical al planteamiento de la enseñanza estableciendo unos objetivos de los sistemas educativos que se adaptaran a los nuevos requerimientos.

El resultado de esto fue la implantación de competencias en el ámbito docente. Intentando dar respuesta a cuáles serían las exigencias sociales y laborales que deben adquirir los ciudadanos y ciudadanas en la sociedad, nació el término de competencia clave que se establece dentro del sistema educativo como competencia básica y la evaluación de la misma.

A lo largo de los cursos académicos, el alumno va adquiriendo competencias básicas que le servirán para la integración global en el futuro laboral o social, por tanto, la adquisición de las mismas es imprescindible para un desarrollo íntegro.

A continuación se desarrollan las 7 competencias clave con la aportación de la Unidad Didáctica de Vectores a cada una de ellas:

1. Competencia en comunicación lingüística (CCL)

Habilidad para utilizar la lengua española, expresarse e interactuar con los demás de manera oral o escrita. La matemática utiliza una terminología específica y diferente a cualquier lenguaje que se utilice en otras materias y con ello se potencia el uso de la diversidad del lenguaje. Los alumnos deben saber interpretar los problemas de la vida cotidiana y saber traducirlos a un lenguaje matemático.

El alumno aprenderá en esta unidad el interpretar el lenguaje matemático tanto de forma escrita como de forma oral. Al mismo tiempo debe saber expresarse a través de este lenguaje. Dentro de esta unidad surgen nuevos conceptos que debe saber extrapolar al resto de unidades del curso. Gracias al material que se va a utilizar, esta competencia se desarrolla en alta medida debido a la verbalización que va a existir durante el proceso de uso del Geopaper.

2. Competencia matemática y competencia básica en ciencias y tecnología (CMCT)

Capacidades para aplicar el razonamiento matemático para resolver cuestiones de la vida cotidiana, habilidades para usar los conocimientos y métodos científicos para explicar la realidad y la forma de aplicar estos conocimientos y métodos para responder a nuestras necesidades. Ésta es la competencia por excelencia de la materia. Habiendo realizado todo el bagaje de problemas aplicados a los 5 bloques en que clasifica la ley las asignaturas de matemáticas (operaciones con números, cambio de unidades, notación científica, tablas y gráficos, evaluación de resultados, solución de sistemas de ecuaciones, vectores, figuras geométricas, trigonometría...) tenemos un gran repertorio de procedimientos para afrontar problemas del día a día.

El alumno aprenderá en esta unidad el vínculo que existe entre ella y la realidad que nos rodea. Con esta unidad comprenderán con mayor facilidad la naturaleza del mundo que tienen al rededor ya que obtendrán unas nociones que se utilizarán mucho, por ejemplo, en el ámbito físico. Además, con estos conocimientos tendrán una mayor comprensión de las asignaturas como Dibujo Técnico y Física.

3. Competencia digital (CD)

Uso seguro y crítico de las TIC para obtener, analizar, producir e intercambiar información. En la actualidad la información digital es parte de la vida cotidiana y hay que enseñar al alumno a utilizar los recursos digitales con espíritu crítico. A través de las herramientas informáticas los alumnos podrán ver las aplicaciones reales de lo que están estudiando.

El alumno aprenderá en esta unidad el desarrollo de distintos programas informáticos como medio de realización de actividades matemáticas y como medio de búsqueda de información.

4. Competencia de aprender a aprender (CAA)

Iniciar el aprendizaje y persistir en él, organizarse y trabajar correctamente de manera individual o colectiva. Se desarrollan habilidades para que el alumno sea capaz de prolongar el aprendizaje a lo largo de su vida de la forma más autónoma posible. Esto se consigue fomentando el espíritu crítico cuando se cuestiona la información que se recibe. Se aprende a valorar las diferentes herramientas matemáticas para poder decidir cuál es la más efectiva en cada momento.

El alumno aprenderá en esta unidad, y a través de los materiales manipulativos, nuevas formas de abordar los problemas matemáticos, adquiriendo nuevas perspectivas a la hora de solucionar los problemas. A través de los materiales manipulativos se fomenta la comprensión e identificación del problema, el diseño e investigación de los posibles métodos para su resolución, la preparación y realización de experimentos para encontrar la metodología adecuada, el análisis y realización de predicciones a partir de los experimentos y la determinación de conclusiones a partir de todo el proceso.

5. Competencias sociales y cívicas (CSC)

Capacidades para relacionarse con las personas y participar de manera activa en la sociedad, para una participación colectiva activa. Se inculcan el estudio de diferentes puntos de vista o las diferentes formas de proceder ante un problema.

El alumno aprenderá en esta unidad, a través de los juegos y los retos, a valorar el trabajo colectivo. Aprenderá a participar en él y a fomentar el crecimiento cooperativo.

6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE)

Habilidad para convertir ideas en actos, la creatividad o planificación y gestión de proyectos dotando al alumno de la confianza y la autonomía personal adecuada para el futuro.

El alumno aprenderá en esta unidad los pasos del método científico que favorecerá el análisis y el planteamiento de los caminos a escoger ante un problema. Una forma de lograr esta competencia es a través del juego, potenciando el método de ensayo-error y deshaciéndonos de la asociación del error al fracaso. El aporte de material táctil a las clases es un refuerzo muy beneficioso ante este pensamiento.

7. Conciencia y expresiones culturales (CEC)

Capacidad para apreciar la expresión a través de la música, las artes plásticas o la literatura. Toda ciencia tiene su punto de partida a partir de expresiones culturales y, por ello mismo, la ciencia, y por ende la matemática, está directamente relacionada con la cultura (de una época, de un lugar, de una familia...específicos). La geometría ha tenido un uso innegable a lo largo de muchas expresiones artísticas.

El alumno aprenderá en esta unidad que la definición de la geometría plana tiene muchas utilidades en el diseño tanto actual como antiguo. La física de vectores ha sido un concepto muy desarrollado a lo largo de la historia.

Objetivos didácticos

Se dividen en objetivos generales, objetivos específicos y los objetivos propuestos por el profesor.

Objetivos Generales

Acorde con el Real Decreto 1105/2014, el bachillerato contribuirá a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades que les permitan:

- a) **Ejercer la ciudadanía democrática**, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española, así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.
- b) **Consolidar una madurez personal y social** que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.
- c) **Fomentar la igualdad** efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
- d) **Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina**, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
- e) **Dominar**, tanto en su expresión oral como escrita, **la lengua castellana** y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.
- f) **Expresarse con fluidez** y corrección en una o más **lenguas extranjeras**.
- g) **Utilizar** con solvencia y responsabilidad **las tecnologías de la información y la comunicación**.
- h) **Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo**, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.

- i) **Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales** y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
- j) **Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación** y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
- k) **Afianzar el espíritu emprendedor** con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
- l) **Desarrollar la sensibilidad artística y literaria**, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
- m) **Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.**
- n) **Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.**

Objetivos Específicos

Vamos a la normativa de Castilla y León establecida en el BOCyL (ORDEN EDU/363/2015) de la cual podemos extraer unos objetivos específicos realizando una analogía entre estos y los criterios de evaluación que se encuentran para Matemáticas I. La justificación de este procedimiento se encuentra en la relación que debe existir entre el proceso de enseñanza-aprendizaje que marca el profesor con la evaluación que se realizará al alumno. El alumno debe aprender los conocimientos que le imparte el profesor y aquí es donde vemos la relación entre contenidos y criterios de evaluación.

Encontramos en la normativa los objetivos didácticos clasificados por bloques, estos son los que atienden a esta unidad didáctica:

Del bloque 1: Contenidos comunes:

1. **Expresar verbalmente y de forma razonada el proceso seguido** en la resolución de un problema.
2. **Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas**, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.
3. **Realizar demostraciones sencillas** de propiedades o teoremas relativos a contenidos algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.
5. **Planificar adecuadamente el proceso de investigación**, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado.
7. **Elaborar informes escrito** que recojan el proceso, resultados y conclusiones del trabajo realizado, con el rigor y la precisión adecuados.
8. **Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana** (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.
10. **Desarrollar y cultivar las actitudes personales** inherentes al quehacer matemático.
11. **Superar bloqueos e inseguridades** ante la resolución de situaciones desconocidas.
12. **Reflexionar sobre las decisiones tomadas**, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones similares futuras.

13. **Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas**, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.
14. **Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual** en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

Del bloque 4: Geometría:

3. **Manejar la operación del producto escalar y sus consecuencias**. Entender los conceptos de **base ortogonal** y ortonormal. Distinguir y manejarse con precisión en el **plano euclídeo** y en el **plano métrico**, utilizando en ambos casos sus herramientas y propiedades.
4. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo las **ecuaciones de rectas y utilizarlas, para resolver problemas de incidencia y cálculo de ángulos y distancias**.

Los objetivos descritos hasta ahora son los que vienen en la normativa vigente, pero un profesor debe tener sus propios objetivos fijados, siempre y cuando estén en relación con los mencionados previamente. Podemos decir que estos objetivos son las expectativas que tiene el profesor de lo que deben conocer sus alumnos. Dada la necesidad de evaluación por competencias es imprescindible la relación de los objetivos con las competencias básicas antes definidas. Veamos la relación entre los objetivos personales con las competencias básicas:

OBJETIVOS	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC
Descripción de un vector	X	X					
Significado geométrico de: Módulo, dirección y sentido de un vector.		X					
Igualdad de vectores. Vectores equipolentes.		X					
Cálculo y significado geométrico del producto de escalar por vector.	X	X	X	X		X	
Identificación y construcción de vectores opuestos		X				X	
Suma y diferencia de vectores		X	X	X		X	
Cálculo y significado geométrico de la combinación lineal de vectores.	X	X	X	X	X		
Identificación de un vector como combinación lineal de otros.		X		X	X		

Identificación de una base del conjunto de vectores.	X	X			X	X	
Expresión de un vector respecto de una base concreta.		X	X	X			
Definición geométrica y cálculo del producto escalar de dos vectores.	X	X		X	X	X	
Condición de perpendicularidad.	X	X					
Cálculo de un vector perpendicular a otro dado.		X					
Identificación de una base ortonormal.	X	X	X				
Cálculo y significado geométrico del módulo de un vector.	X	X		X		X	
Ángulo de dos vectores.		X					
Reconocer y analizar el uso de vectores en la vida cotidiana.			X		X		X

Contenidos

Los contenidos a impartir en las dos unidades didácticas (la 10 relativa a **Vectores** y la 11 relativa a **Geometría Analítica en el Plano**) se basan en los establecidos en la normativa de Castilla y León, concretamente en la ORDEN EDU/363/201 del BOCyL. En la cual se establecen los siguientes contenidos:

- Vectores libres en el plano. Operaciones con vectores.
- Producto escalar. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores.
- Bases ortogonales y ortonormales.
- Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Paralelismo y perpendicularidad. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.

Se clasifican según las funciones que contemplan:

- **Contenidos Conceptuales** (construyen conocimiento)

Las sesiones se desarrollarán a través de explicaciones sobre los conceptos matemáticos siguientes:

- Vector: definición, identificación, módulo, dirección y sentido.
- Operaciones con vectores: suma y diferencia de vectores, producto de vector por escalar.

- Combinación lineal: expresión, base del plano, expresión del vector en diferentes bases, base ortonormal.

- Producto escalar: definición, cálculo analítico, cálculo geométrico, ángulo entre vectores.

- **Contenidos Procedimentales** (construyen procesos de actuación)

Para la elaboración de las actividades los alumnos se servirán del Geopaper, con el fin de dar una justificación a todas las fórmulas que se planteen. Vienen resumidas en la siguiente enumeración:

- Cálculo del módulo de un vector.

- Vector formado a partir de otros.

- Significado geométrico del producto escalar.

- Construcción de la base de un plano.

- **Contenidos Actitudinales** (construyen actitudes y valores)

En la edad cognitiva adulta ya no es tan necesaria la revisión de cuaderno o la inculcación de conductas de trabajo, sino que se transmitirán otro tipo de actitudes como las siguientes:

- Interés por afrontar problemas relacionados con la geometría en el plano y ganas de aprender nuevos conceptos.

- Capacidad autocrítica sobre los procedimientos realizados y habilidad para rectificar los pasos seguidos en un futuro problema.

- Participar activamente en las clases y entender los procedimientos que se realizan y preguntar si no se entiende.

- Reflexionar sobre los procedimientos, que no sean sólo números y operaciones, sino que lleven asociados un porqué.

En las tres clasificaciones de los contenidos tiene un uso principal el aprendizaje manipulativo a través del Geopaper.

Metodología: estrategias didácticas

No existe un método de enseñanza ideal que se ajuste a todo tipo de alumnos y objetivos educativos [...] la eficacia docente depende fundamentalmente de la capacidad del profesor para tomar decisiones y ajustar su enseñanza a las circunstancias y contexto en que se desarrolla (Tejedor, 2001 citado en Krutakova 2014).

Podemos definir metodología como la maquinaria en la que nos apoyamos para conseguir los objetivos planteados y contribuir al desarrollo de competencia. No existe la metodología definitiva y perfecta. Como bien ha mencionado previamente Tejedor, cada situación, cada aula, cada grupo, cada momento del día... requieren de una metodología diferente. *Un método pedagógico consiste en una forma de ordenar la actividad docente para conseguir los objetivos que se han definido (Amat 2000 citado en Krutakova 2014).* Por ello atendiendo a los objetivos definidos y con el fin de realizar un aprendizaje significativo se van a seguir los métodos docentes desarrollados en este apartado.

Se va a planificar un uso de metodología activa. La participación de los alumnos a lo largo de la enseñanza del tema será lo más elevada posible. Esta participación se alternará con una exposición explicativa por parte del profesor. Con la mezcla de estos dos aspectos se conseguirá una integración completa de los conceptos y contenidos.

Lo que se pretende conseguir con la participación activa del alumno es el aumento de su capacidad crítica, el desarrollo de su imaginación, la cooperación grupal y la creación de procedimientos de resolución. De esta forma también dotamos al alumno de autonomía en el estudio y de responsabilidad.

La metodología seleccionada va a girar en torno a nuestro Geopaper y podrá variar a lo largo del transcurso de la unidad didáctica adaptándose a las situaciones requeridas por el grupo y por los alumnos para resolver los problemas que se puedan ocasionar. El objetivo principal es estimular la reflexión y el pensamiento crítico del alumno y favorecer el descubrimiento, la investigación, el espíritu emprendedor y la iniciativa personal, por ejemplo, alternando prácticas de trabajo individual y colectivo.

En las sesiones siempre se reservará el tiempo necesario al inicio para la corrección de las tareas para casa enviadas previamente o para la resolución de dudas de la clase anterior. De la misma forma, al final de cada unidad se realizará una sesión de repaso con ejercicios para recordar la materia impartida previa al examen.

A continuación se enumerarán las estrategias didácticas:

- **Lección magistral.**

Es la clásica explicación de los contenidos por parte del profesor a la totalidad de los alumnos. Con este tipo de estrategia conseguimos que los alumnos tengan un esquema desde el principio del tema y de cada sesión de los contenidos que se vayan a impartir. Se consigue vincular de forma global los contenidos con todos los alumnos del aula y se establece un vínculo con toda la clase al mismo tiempo.

La explicación no tiene por qué ser unidireccional, es más, es recomendable que no lo sea. Entablando un diálogo entre los alumnos y el profesor el grado de integración y transmisión de la información es mucho mayor.

A medida que el profesor vaya exponiendo los temas y los conceptos de cada uno de los temas, los alumnos tendrán el permiso para realizar intervenciones cuando lo crean necesario o cuando un concepto no haya quedado lo suficientemente claro. El profesor podrá utilizar los recursos tanto analógicos como digitales para la presentación de la clase y en caso de ser necesario facilitará a los alumnos el material auxiliar necesario.

El profesor utilizará su capacidad para transmitir convirtiendo el aula en un espacio dinámico, motivador y flexible ante los cambios.

- **Trabajo individual.**

Para poner en práctica lo aprendido a través de las exposiciones explicativas el alumno desarrollará algunos trabajos de forma individual. Estos trabajos se realizarán en el aula o pueden ser proyectados como tareas para casa.

En cualquiera de los casos, estos trabajos tienen que tener una finalidad. La finalidad es la integración de los contenidos enunciados en clase al mismo tiempo que se crea en el alumno una inquietud por descubrir y experimentar y lo estimula para la extraer conclusiones.

- **Trabajo cooperativo.**

Será una de las metodologías a utilizar para promover la participación activa de los alumnos. Es una actividad que complementa las limitaciones que pueda tener lección magistral.

Los equipos estarán formados por integrantes de forma heterogénea para asegurar un funcionamiento óptimo de los mismos. Las actividades girarán en torno al Geopaper que se utilizará con el fin de entender los procedimientos que se están haciendo. Los grupos se realizarán con el fin de que todo alumno participe en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las prácticas que se realizarán engloban todo tipo de actividades, desde resolución de problemas, hasta planteamiento de ejercicios y hasta deducción de fórmulas.

Habrán dos tipos de grupos para la realización de estas tareas. En aquellas ocasiones en las que el ejercicio requiere de un proceso más largo de resolución se dividirá la clase en equipos de 4 ó 5 personas, en el caso de actividades de planteamiento los equipos serán más reducidos, de 2 ó 3 personas a lo sumo.

Al trabajar en equipo se debe escuchar las propuestas de los compañeros, evaluarlas y dar una opinión fundamentada ante ellas por lo que con este ejercicio se pretende fomentar el trabajo en equipo, el desarrollo de la competencia lingüística y la iniciativa emprendedora. Los alumnos, además, desarrollarán su capacidad crítica y su asertividad si quieren conseguir el beneficio del grupo. De esta forma los alumnos tendrán un diálogo entre iguales a través del cual van intercambiando ideas, conceptos y procedimientos para completar los desconocimientos de unos con los conocimientos de los otros.

El papel del profesor en este tipo de prácticas es el de resolver dudas, su labor se va a centrar en orientar y motivar el avance de las labores grupales.

- **Puesta en común**

Al final de cada uno de los ejercicios resueltos de forma grupal, o al día siguiente de las tareas para casa, se va a pedir a uno de los alumnos, al azar, la explicación del trabajo realizado y de los pasos seguidos. Los alumnos se van a enfrentar a una situación real, delante de los demás compañeros y del profesor, para contarnos cuáles son los resultados de las tareas realizadas. Se atenderá a la clara explicación de los pasos realizados al mismo tiempo que la elección de los términos matemáticos adecuados.

- **Resolución de problemas**

La aplicación real de los ejercicios es la mejor forma de alcanzar la competencia matemática por lo que este apartado es de gran importancia. Situar a los alumnos en una posición real hace que entiendan la aplicación del contenido que están estudiando. A través del Geopaper se pretende fomentar el uso de imágenes con manifestaciones lo más reales posible de los vectores.

- **Uso de herramientas informáticas**

Como método auxiliar para el uso de nuestra herramienta Geopaper se pueden utilizar programas de grafiado como Desmos o GeoGebra con el fin de comprobar los resultados de las operaciones realizadas a en el aula.

Los dispositivos tecnológicos son un gran apoyo para el aprendizaje, pero no debemos olvidar que son una herramienta, no un fin, en ningún momento debemos entenderlos como la solución a nuestros problemas.

Recursos

Los recursos utilizados deben servirles como guía para alcanzar los objetivos descritos previamente. De esta forma, todo material o personal que se utilice tendrá su significado y su participación activa en la adquisición de conocimientos de los alumnos y alumnas. Serán los siguientes:

1. Los propios recursos proporcionados por el centro: **aulas, pupitres, sillas, pizarra, tizas...**
2. **Libro de texto** al que el alumno pueda acudir en casa en caso de duda o apuntes en papel creados y proporcionados por el profesor, pudiendo sustituir el libro de texto o ser anexo al mismo.
3. **Material audiovisual** que se proyectará en las clases.
4. **Pizarra digital** o sustituto para aquellas acciones que necesiten mostrar a los alumnos actividades o soluciones desde un ordenador, pueden ser de Geogebra, Desmos o similar.
5. Un **cuaderno** con formato de hojas DIN A-4 para la formalización de apuntes y ejercicios realizados en clase y en casa.
6. **Hojas** que se presenten al principio de cada tema **con ejercicios** a resolver. Estos ejercicios estarán clasificados en distintos niveles para atender a la diversidad.
7. **Material de refuerzo** para aquellos alumnos que tengan mayor dificultad a la hora de afrontar los contenidos.
8. Una **bibliografía**, donde poder comprobar conceptos, completar apuntes o jugar para aprender.
9. **Calculadora** para la realización de operaciones complejas.
10. Material manipulativo **Geopaper**.

División en tiempos y espacios

División en tiempos

Como se expresó en el apartado de introducción contextual, para que el alumno adquiriera todos los contenidos relativos al bloque de geometría se necesitan 36h.

De estas 36h a la unidad 10 de vectores corresponden 8 sesiones de 1h. Estas sesiones se imparten en la tercera evaluación.

Las 8 sesiones buscarán los objetivos y seguirán las metodologías previamente mencionadas.

Cada una de ellas tiene una planificación concreta:

- **Sesión 1**

Introducción de la Unidad: Se realiza un repaso breve de los conceptos relacionados con la unidad. A través de preguntas lanzadas a todo el grupo se averiguan los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre el tema de vectores.

Motivación de la Unidad:

https://www.youtube.com/watch?time_continue=64&v=hlp1gf4uRGE

Lección magistral: Se comienza la explicación del tema dando una definición de vector y hablando de los componentes que lo definen. El alumno deberá apuntar cómo se construye un vector, cuáles son los elementos que lo definen y cuál es su forma de representación.

- Vector: módulo, dirección sentido, representación a partir de coordenadas.
- Se presenta el Geopaper

Trabajo cooperativo 1: En parejas coger el Geopaper y el Geomaker y mientras uno construye el vector, el otro tiene que definir y calcular sus elementos.

Trabajo cooperativo 2: En las mismas parejas, pensar en el Geopaper una explicación para la suma y resta de vectores.

- **Sesión 2**

Lección magistral: Se explica a los alumnos lo que significa analítica y geoméricamente la suma y resta de vectores. Se vincula con la combinación lineal.

- Operaciones con vectores: Suma, resta y vector por escalar.
- Combinación lineal.

Trabajo individual: Ejercicios para comprobar si un vector es combinación lineal de otros dos.

Trabajo cooperativo 1: Encontrar una pareja de vectores a través de los cuales no se pueda generar otro vector.

- **Sesión 3**

Corrección de las TPC: Se da la solución a la pregunta planteada sobre dar una pareja de vectores que no formen una base.

Lección magistral: Se cuenta a los alumnos el concepto de base. Se vincula con la combinación lineal. Se explica la existencia de diferentes bases y la noción de dependencia e independencia lineal.

- Vectores canónicos: Ortogonalidad y ortonormalidad.
- Base: Expresión de un vector en diferentes bases, dependencia e independencia lineal.

Trabajo individual: Ejercicios para comprobar si un vector es combinación lineal de otros dos y ejercicios de dependencia e independencia lineal.

- **Sesión 4**

Lección magistral: Se explica a los alumnos el procedimiento de cambio de base y se realiza una representación gráfica explicativa en la pizarra.

- Cambio de base: A partir de la combinación lineal.

Trabajo cooperativo: En grupos de 4 personas, aprovechando el Geopaper, van a tener que realizar un proceso explicativo a través de un ejemplo concreto de un cambio de base de una base ortonormal a otra base. El trabajo se recogerá al final de la clase.

- **Sesión 5**

Puesta en común: Uno de los grupos saldrá a exponer a los demás el trabajo grupal realizado previamente.

Lección magistral: Se cuenta a los alumnos el concepto de producto escalar y sus propiedades fundamentales.

- Producto escalar: Fórmula, propiedad conmutativa, asociativa, distributiva.

Trabajo individual: Ejercicios para calcular productos escalares conocidos los vectores.

Trabajo cooperativo 1: En grupos de 2 personas, apoyándose en el Geopaper se realizará un análisis geométrico del significado de producto escalar atendiendo a su fórmula.

- **Sesión 6**

Puesta en común: Puesta en común del significado geométrico del producto escalar.

Lección magistral: Se explica a los alumnos la forma de hallar un vector perpendicular a uno dado, la relación con el significado geométrico del producto escalar y la manera de averiguar el ángulo que forman dos vectores a través del producto escalar.

- Vectores: Ortogonalidad, ángulo.

Trabajo cooperativo 1: En grupos de 2 personas se pide justificar gráficamente, con el material manipulativo, la manera de construir un vector ortogonal a otro dado.

Trabajo individual: Ejercicios para calcular ángulos y vectores ortogonales.

- **Sesión 7**

Trabajo individual: Utilizando el Geopaper, realización de ejercicios de repaso de la unidad didáctica.

- **Sesión 8**

Ejercicio del billar (desarrollado en el Anexo I).

Nota: El examen de esta unidad didáctica se plantea conjuntamente al de la Unidad Didáctica 11 y se planifica al final de los dos temas.

División en espacio

El desarrollo de esta unidad didáctica se realizará en la propia aula de 1º de bachillerato. La flexibilidad que ofrecen las mesas es adecuada para el movimiento que tengan que realizar cuando necesiten juntarse para los trabajos en grupo. El aula además dispone de pizarra digital o proyector donde poder poner el video de presentación de la primera sesión. Además, al ser un aula que conocen, los alumnos se sienten más seguros para poder moverse por ella, por ejemplo, a la hora de preguntar dudas, por lo que la dinámica de la clase será mucho más fluida.

Actividades de aprendizaje y enseñanza

Las actividades propuestas estarán siempre en relación con la teoría que se ha enseñado en las lecciones magistrales. Las actividades son necesarias ya que acentúan los contenidos aprendidos en la teoría. La resolución de los ejercicios requiere de un tiempo determinado, este tiempo les será asignado tanto en horas de clase como en tareas para casa. Las tareas tienen todo tipo de finalidades, están desde las que sirven para practicar e integrar procedimientos hasta las que tienen una finalidad más reflexiva o de tomar decisiones.

Podemos realizar una primera clasificación de las tareas atendiendo a las funciones a desempeñar por los alumnos:

1. **Ejercicios de repaso:** Hoja complementaria de ejercicios. Estarán relacionados con la teoría vista en el aula y será necesaria su comprensión para el aprendizaje de la presente unidad. Se le proporciona al alumno de manera individual al principio de la unidad didáctica y el alumno decidirá si realizar las tareas o no.

2. **Actividades cooperativas:** Se dividen en tareas para 2-3 o tareas para 4-5 personas, serán tareas que requieran del uso del Geopaper y la interacción entre los alumnos.
3. **Actividades individuales:** se dividirán en tareas para el aula o tareas para casa, suelen tener un carácter de interiorización de procedimientos y de conceptos. Estas tareas son fundamentales para que el alumno adquiera la destreza suficiente para poder pasar el examen.

Podemos ver ejemplos de los ejercicios en el Anexo I.

Actividades complementarias

Para conocer los planes complementarios se mirará aquellos que ofrezca el Ayuntamiento o la Comunidad Autónoma. El centro prestará toda su atención a aquellos alumnos o alumnas que quieran tomar parte en estas actividades y promoverá la participación en ellos. Asimismo, el centro dotará de actividades internas para aquellos alumnos que quieran ir más allá de los ejercicios realizados en clase, como por ejemplo, actividades de robótica o de investigación más exhaustiva sobre algún tema.

Entre las más conocidas se encuentra la Olimpiada Matemática, que se realiza todos los años. Se preparará al alumno para la participación de la Olimpiada de la fase regional. Esta preparación es anexa a las clases ordinarias, se realizará en horario extraescolar, una hora a la semana con aquellos alumnos que sean voluntarios.

También se puede proponer la participación en el Canguro Matemático. En este caso la preparación se realizará de la misma forma que en el anterior y exclusivamente a aquellos alumnos y alumnas interesados en la participación. En este caso la preparación se realizará con ejercicios semejantes a los problemas enunciados en la página web de los organizadores de la prueba.

Sería conveniente a la par que educativo la realización de una salida cultural por la ciudad a algún lugar donde se puedan visualizar elementos matemáticos. La salida está pensada para propiciar un contacto distinto con las matemáticas, una aproximación diferente a la usual, más atractiva y más motivadora. Se puede plantear como salida de curso, no exclusivamente como salida de la propia unidad didáctica.

Evaluación

La evaluación es un elemento importante en la labor de un docente. A través de ella vemos el grado de satisfacción de los alumnos a través de sus conocimientos u opiniones y si se han

cumplido los objetivos planteados. De esta forma podemos tomar decisiones de si la metodología ha sido la correcta o necesita de algún cambio.

Los alumnos son conscientes de los criterios de evaluación desde el comienzo de la unidad didáctica.

Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación vienen descritos en la Normativa de la comunidad, concretamente en la Orden EDU/363/2015. Nos apoyaremos en estos criterios para evaluar individualmente el progreso de cada alumno. Dichos criterios están vinculados con los estándares de aprendizaje previamente expuestos por lo que la calificación de unos se encuentra vinculada al cumplimiento de los otros.

Resumimos en la siguiente tabla los criterios de evaluación marcados en el BOCyL para la unidad correspondiente y la relación de los mismos con los estándares de aprendizaje u las competencias clave:

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	COMPETENCIAS CLAVE
<i>3. Manejar la operación del producto escalar y sus consecuencias. Entender los conceptos de base ortogonal y ortonormal. Distinguir y manejarse con precisión en el plano euclídeo y en el plano métrico, utilizando en ambos casos sus herramientas y propiedades.</i>	3.1. Emplea con asiduidad las consecuencias de la definición de producto escalar para normalizar vectores, calcular el coseno de un ángulo, estudiar la ortogonalidad de dos vectores o la proyección de un vector sobre otro.	CCL, CMCT, CAA, CSC, SIEE, CEC
	3.2. Calcula la expresión analítica del producto escalar, del módulo y del coseno del ángulo.	CCL, CMCT, CAA
<i>4. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo las</i>	4.1. Calcula distancias, entre puntos y de un punto a una recta, así como ángulos de dos rectas.	CCL, CMCT, CD, CAA, CSC, SIEE
	4.2. Obtiene la ecuación de una recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos.	CCL, CMCT, CAA, CSC

<p><i>ecuaciones de rectas y utilizarlas, para resolver problemas de incidencia y cálculo de ángulos y distancias.</i></p>	<p>4.3. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas.</p>	<p>CCL, CMCT, SIEE</p>
--	--	------------------------

En definitiva, los criterios a evaluar están basados en los objetivos mencionados y estos, a su vez, están en relación con las competencias clave necesarias para alcanzar un aprendizaje satisfactorio. Lo que se está evaluando es lo siguiente:

Vectores y operaciones

El alumno debe conocer el significado del vector, así como identificar su módulo, dirección y sentido. Al mismo tiempo debe saber representarlo y calcular suma y diferencia de vectores y producto de un vector por un escalar tanto gráfica como analíticamente.

Combinación lineal

Expresar un vector como combinación lineal de otros.

Concepto de base

El alumno debe saber expresar y representar un vector según las coordenadas de diferentes bases y debe saber operar con estos vectores en las diferentes bases.

Producto escalar de dos vectores

El alumno debe conocer las propiedades de esta operación. Debe saber expresar de forma analítica en una base ortonormal y conocer las aplicaciones: módulo de un vector, ángulo de dos vectores, ortogonalidad entre vectores, la proyección de un vector sobre otro y la obtención de vectores ortogonales a uno dado.

Instrumentos de evaluación

- **Prueba escrita**

Se evaluará la UD en un tiempo posterior a su docencia. Se realizará una prueba por escrito durante horario de clase. Se avisará de la prueba con el tiempo suficiente para que los alumnos tengan tiempo para estudiar y se evaluarán los contenidos de la unidad didáctica.

La prueba constará de ejercicios y problemas cuyas bases serán los contenidos y competencias básicas, los estándares de aprendizaje y los criterios de evaluación acorde a la normativa vigente.

- **Trabajos cooperativos**

Se evaluarán con rúbricas los trabajos realizados en clase, se tendrá en cuenta a parte del resultado, la claridad de la explicación del trabajo.

- **Expresión escrita y exposición oral**

A través de las preguntas realizadas en clase y la claridad de los términos de los trabajos y de la prueba escrita se emitirá una calificación acerca de su expresión matemática.

- **Actitud y participación en clase**

Se valorará positivamente la actitud y la participación demostrada en clase hacia el profesor, así como hacia sus compañeros.

- **Trabajo individual (diario)**

Dentro de los puntos de evaluación personal se tendrá en cuenta también el trabajo realizado en clase. El alumno tiene la obligación de realizar todas las tareas que mande el profesor.

Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación evolucionarán a medida que avance la unidad didáctica e irán cambiando adaptándose a las capacidades y habilidades de cada uno de los grupos. Se fijan, no obstante, los siguientes puntos de partida:

1. Calificación de la unidad didáctica

Cada unidad didáctica tendrá una calificación acorde a los conocimientos impartidos para la misma para su posterior suma en la nota global del trimestre. Los resultados se medirán según los criterios y los instrumentos previamente mencionados. Al final de cada trimestre se realizará la ponderación correspondiente y se extraerán las conclusiones individuales por alumno.

Esta unidad didáctica tendrá parte de todos los instrumentos previamente mencionados: prueba escrita, trabajo cooperativo por parejas, trabajo cooperativo por grupos, trabajo individual, exposición oral, expresión escrita y actitud y compañerismo en el aula.

La evaluación de la unidad didáctica se realizará con la ponderación de las calificaciones recogidas sobre los instrumentos previamente mencionados:

INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN	% CALIFICACIÓN
Prueba escrita	70%
Trabajos cooperativos	10%
Trabajo individual Expresión escrita y exposición oral	10%
Actitud y participación en clase	10%
Calificación Total	100%

2. Calificación trimestral

La calificación se realizará por evaluaciones trimestrales, la nota final de la evaluación se decidirá como ponderación de las unidades didácticas que se han desarrollado en el trimestre.

Pruebas Escritas

Se realizarán pruebas escritas cada trimestre englobando el final de un bloque didáctico o el final de una unidad didáctica concreta. Cada prueba dispondrá de ejercicios tanto teóricos como prácticos que cumplan con los límites tanto mínimos como máximos establecidos por la normativa vigente.

Para la realización de la media de la nota trimestral en la parte de las pruebas escritas no se requerirá ninguna nota mínima.

Mecanismos de recuperación trimestral

Cada evaluación tendrá su examen de recuperación tras la entrega del boletín de calificaciones oficial. Para la preparación de estos parciales se da el tiempo suficiente para el estudio de la asignatura, así como una serie de hojas de repaso orientativo para el examen.

3. Calificación al final de curso

CALIFICACIÓN POR EVALUACIÓN	% CALIFICACIÓN
1ª Evaluación	≥ 4
2ª Evaluación	≥ 4
3ª Evaluación	≥ 4
Calificación Final	$\frac{1^{\text{a}}Ev + 2^{\text{a}}Ev + 3^{\text{a}}Ev}{3}$

Mientras que para la realización de la nota media del trimestre no se requería de una nota mínima en los exámenes, en este caso sí que se pide que la nota media mínima por trimestre, que será de 4. Para superar la asignatura global la nota resultante debe de ser mayor que 5 puntos sobre 10.

Mecanismos de recuperación anual

Si el alumno no ha llegado a conseguir la calificación necesaria para promocionar la asignatura se le proporcionará una opción para recuperar la asignatura en horas no lectivas después de la finalización del curso en el periodo de recuperación establecido por el centro. Dicha oportunidad constará de un examen de duración de 2 horas en las que el alumno se enfrentará a todo el contenido de la materia. La calificación obtenida dependerá exclusivamente del resultado de dicho examen. Así pues, el 100% de la calificación que se puede obtener es la nota de la corrección en el examen, no se contarán la parte proporcional de participación en clase y de trabajos.

Atención a la diversidad

La educación sigue siendo el principal pilar de la sociedad para la preparación de los alumnos para la correcta inclusión social y la adecuada evolución individual. Ofrece oportunidades a las personas para tomar decisiones sobre sus propias vidas, utilizar sus capacidades, tener unas expectativas e intereses propicios y convertirse en un ser social. En definitiva, es una forma de educarnos en valores.

En bachillerato la diversidad es innegable. Con el crecimiento demográfico actual, la existencia de alumnos dispares es muy probable y este hecho obliga al profesor a estar alerta de los acontecimientos individuales de cada uno de los individuos del grupo.

Queda recogida en la Orden EDU/363/2018 la obligación de prestar servicio a todos aquellos alumnos que requieran de una necesidad educativa diferente en la medida de las oportunidades de cada centro. Podemos hablar de dos tipos de diversidad, físicas o psíquicas. Las discapacidades físicas son más fáciles de tratar puesto que, en la mayoría de los casos, se conocen antes de empezar el curso y se puede generar un plan de actuación conjuntamente con el centro y con el departamento de orientación.

Las discapacidades psíquicas son más frecuentes y, en muchas ocasiones, hay que saber verlas a medida que el alumno va creciendo. No debemos comprender este tipo de discapacidades como un hecho que afecta a las posibilidades del alumnado bien positiva bien negativamente, sino que es una situación a la que se le puede dar solución de muchas maneras.

En este apartado vamos a dar un procedimiento para la forma de acometer estos casos. En el momento en el que se detecte un posible caso de diversidad el paso principal es comunicarlo al tutor de la clase, la acción tutorial es fundamental en este tipo de casos. Una vez hablado con el tutor, éste se pondrá en contacto con el departamento de orientación y psicología del centro y con la dirección del mismo para evaluar la posibilidad de la incidencia.

En el caso de que sea cierta, los tres organismos previamente mencionados elaborarán un plan de actuación hacia el alumno o alumna que será respaldado, en todo momento, por los padres o tutores del mismo.

En ocasiones, como, por ejemplo, es el caso del TDA (trastorno de déficit de atención), la actuación se puede considerar aislada a la organización y tareas encomendadas al alumno. En otras ocasiones más severas se podría necesitar una adaptación curricular de distinto nivel. Estas últimas medidas mencionadas se consideran de carácter extraordinario y especializado y pueden llegar a modificar los elementos curriculares del alumno con el objetivo siempre claro de favorecer el desarrollo personal del mismo.

El caso particular de alumnos con bajas calificaciones es una situación compleja. Lo primero que hay que comprobar es si el alumno tiene alguna deficiencia o es que su participación e interés son bajos. Ambos casos tienen su tratamiento.

En el caso de un bajo interés se puede intentar presentar la docencia con otra metodología más atractiva, con mayor reto intelectual o con una motivación diferente.

En el primer caso de existir verdaderamente un déficit se optará por una adaptación curricular de carácter significativo o no significativo.

Sea cual sea la diversidad lo más importante es hacer saber al alumno que el centro tiene un plan de actuación para favorecer su proceso de aprendizaje. El alumno ha de sentirse integrado y no desplazado ni por los profesores, ni por el centro ni por los compañeros. El objetivo del centro es posicionar al alumno en igualdad de condiciones en relación a sus compañeros.

Adaptación a alumnos con altas capacidades

A los alumnos con superdotación intelectual se les tratará con una atención especial. A lo largo de la clase participarán con los demás en la lección magistral y en las actividades, aunque en el trabajo individual y grupal se les pedirá un plus para que puedan aportar todo de lo que son capaces.

Con este tipo de capacidades hay que tener especial atención en la motivación del alumno. Hay que conseguir captar su atención mediante actividades que supongan un reto como pueden ser las Olimpiadas Matemáticas, el Canguro Matemático o el proyecto Estalmat. Del mismo modo que una motivación externa al centro también se puede plantear un trabajo de investigación al nivel de sus capacidades o un proyecto de ayuda a sus compañeros.

Autoevaluación de la unidad

Para conocer la idoneidad de la unidad didáctica planificada, tras finalizar el desarrollo de la misma, el profesor debe analizar de la forma más objetiva posible algunos aspectos en relación con la unidad didáctica, su enseñanza, su aceptación y su planificación. A partir de los datos obtenidos se realizarán las modificaciones necesarias para mejorar para veces futuras.

La evaluación se expone en la Unidad Didáctica correspondiente al tema 11: **Geometría analítica en el Plano.**

3.3 Unidad Didáctica 11: Geometría analítica en el plano

Introducción contextual

La materia que se va a impartir tiene unos conocimientos previos del bloque de geometría visto en 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria. La comprensión de este tema es muy relevante para la geometría que se va a impartir en segundo de bachillerato. La integración de los conceptos desde su raíz es fundamental para el paso a geometría espacial.

Los alumnos deben asegurarse tener un mínimo de control sobre los siguientes aspectos para un correcto seguimiento de la clase:

- Distintas formas de definir una recta. Las ecuaciones de una recta.
- Significado de los términos de las ecuaciones de la recta.
- Significado geométrico de intersección de rectas.

A los alumnos se les exigirá tener los siguientes conocimientos mínimos:

- Definición de un punto y de un vector a través de coordenadas.
- Definición de una recta a través de sus ecuaciones.
- Significado y cálculo del vector normal a una recta.
- Distancia entre punto-punto, punto-recta y recta-recta.
- Intersección de rectas.
- Posición relativa entre rectas.

Temporalización

La unidad didáctica se va a impartir en el tercer trimestre, posterior a los bloques 1, 2 y 3 de repaso, números y álgebra y análisis respectivamente y previo al bloque 5 de estadística y probabilidad. El tema relativo a Geometría Analítica en el Plano quedaría situado globalmente de la siguiente forma:

	1ª Evaluación	2ª Evaluación	3ª Evaluación
Números y álgebra	Ud: 1, 2	Ud: 5,	
Análisis		Ud: 6, 7, 8	
Geometría	Ud: 3	Ud: 4	Ud: 9, 10, 11, 12
Estadística y probabilidad			Ud: 13

Para impartir esta unidad didáctica se planifican 12 sesiones de 1h distribuidas a lo largo de tres semanas en las que se impartirá cada uno de los contenidos relacionándolos con los vistos en el curso previo.

Contribución a las competencias básicas

A lo largo de los cursos académicos, el alumno adquiere la destreza en competencias básicas para su futura integración laboral o social, por tanto, la adquisición de las mismas es imprescindible para obtener un desarrollo íntegro del alumno.

A continuación se desarrolla la aportación de la UD a cada una de las 7 competencias clave. Para la descripción completa de cada una de ellas véase el apartado correspondiente en “Contribución a las competencias básicas” de la unidad didáctica 10: Vectores

1. Competencia en comunicación lingüística (CCL)

Dentro de la asignatura recuperamos conceptos que los alumnos ya conocen y se realiza una mayor profundización en otros nuevos. La exposición oral será un punto clave en esta unidad debido a la necesidad de relación que se crea a través del uso grupal de materiales manipulativos. El alumno aprenderá en esta unidad el interpretar el lenguaje matemático tanto de forma escrita como de forma oral.

2. Competencia matemática y competencia básica en ciencias y tecnología (CMCT)

A través de esta competencia el alumno aprenderá a extrapolar la matemática a la vida cotidiana y comprenderá la potencia que tiene la geometría plana en ámbitos muy

conocidos como el diseño a todos los niveles. Este bloque de la asignatura se relaciona con otras asignaturas como Dibujo Técnico y Física.

3. Competencia digital (CD)

El alumno adquirirá la competencia para identificar en la red elementos que le sirvan de ayuda para la resolución del tema, así como a establecer y trabajar con programas de grafiado geométrico.

4. Competencia de aprender a aprender (CAA)

El alumno aprenderá en esta unidad, y a través de los materiales manipulativos, nuevas formas de abordar los problemas matemáticos, adquiriendo nuevas perspectivas a la hora de solucionar los problemas. A través de los materiales manipulativos se fomenta la comprensión e identificación del problema, el diseño e investigación de los métodos posibles para su solución, la preparación y realización de experimentos para encontrar la metodología adecuada, el análisis y realización de predicciones a partir de los experimentos y la determinación de conclusiones a partir de todo el proceso.

5. Competencias sociales y cívicas (CSC)

El alumno aprenderá en esta unidad, a través de los juegos y los retos, a valorar el trabajo colectivo. Aprenderá a participar en él y a fomentar el crecimiento cooperativo.

6. Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE)

A través de retos se fomentará el desarrollo creativo del alumno potenciando el método de ensayo-error y deshaciéndonos de la asociación del error al fracaso. El aporte de material táctil-manipulativo a las clases es un refuerzo muy beneficioso para fomentar el espíritu emprendedor.

7. Conciencia y expresiones culturales (CEC)

El alumno aprenderá en esta unidad que la definición de la geometría plana tiene muchas utilidades en el diseño tanto actual como antiguo y se le demostrará a base de ejemplos concretos como los logos de las empresas.

Objetivos didácticos

Objetivos Generales

Acorde con el Real Decreto 1105/2014, el bachillerato contribuirá a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades que les permitan:

Desarrollados en el apartado "Objetivos generales" del apartado Objetivos didácticos de la unidad didáctica 10: Vectores.

Objetivos Específicos

Vamos a la normativa de Castilla y León establecida en el BOCyL (ORDEN EDU/363/2015) de la cual podemos extraer unos objetivos específicos realizando una analogía entre estos y los criterios de evaluación que se encuentran para Matemáticas I. Encontramos en la normativa los objetivos didácticos clasificados por bloques, estos son los que atienden a esta unidad didáctica:

Del bloque 1: Contenidos comunes:

Desarrollados en el apartado "Objetivos específicos" del apartado Objetivos didácticos de la unidad didáctica 10: Vectores.

Del bloque 4: Geometría:

Desarrollados en el apartado "Objetivos específicos" del apartado Objetivos didácticos de la unidad didáctica 10: Vectores.

Estos son los objetivos personales fijados por el profesor:

OBJETIVOS	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC
Coordenadas de un punto y un vector	X	X			X		
Construir un vector a través de dos puntos		X					
Ecuación vectorial, paramétrica, continua de la recta a partir de un punto y un vector		X		X			
Hallar la ecuación general implícita y la explícita a partir de las anteriores.		X					
Saber si un punto pertenece a una recta		X		X			
Dada una ecuación graficar la recta				X			
Vector normal a un vector o a una recta.		X		X			

Distancia punto-punto, punto-recta, recta-recta	X	X		X	X	X	
Identificar rectas perpendiculares.	X	X		X	X		
Intersección de rectas, geométrica y analíticamente.	X	X	X	X	X	X	
Pendiente de una recta significado geométrico	X	X		X	X	X	
Obtención de la pendiente de una recta descrita con una ecuación		X	X	X	X	X	
Punto medio a dos puntos dados		X		X	X		
Recta equidistante a dos rectas paralelas		X	X	X	X	X	
Identificación de rectas en logotipos	X	X	X		X		X

Contenidos

Los contenidos relativos a esta unidad didáctica se encuentran en la ORDEN EDU/363/201 del BOCyL, ya se redactaron en la Unidad Didáctica correspondiente a Vectores, vamos a recordarlas:

- Vectores libres en el plano. Operaciones con vectores.
- Producto escalar. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores.
- Bases ortogonales y ortonormales.
- Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Paralelismo y perpendicularidad. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.

Se clasifican según las funciones que contemplan:

- **Contenidos Conceptuales** (construyen conocimiento)

Las sesiones se desarrollarán a través de explicaciones sobre los conceptos matemáticos siguientes:

- Coordenadas: de un vector y un punto. Vector ligado a dos puntos.
- Recta: ecuaciones general, paramétrica, continua, implícita, general y explícita. Ángulo entre rectas, pendiente de una recta.
- Distancia entre puntos, rectas y punto y recta.
- Intersección entre rectas: Cálculo, paralelismo y perpendicularidad.

- **Contenidos Procedimentales** (construyen procesos de actuación)

Para la elaboración de las actividades los alumnos se servirán del Geopaper, con el fin de dar una justificación a todas las fórmulas que se planteen. Vienen resumidas en la siguiente enumeración:

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una dirección determinada.
- Transformación de la ecuación de una recta en todas sus formas.
- Trazado de recta perpendicular y paralela a otra por un punto.
- Obtención de la pendiente de la recta.
- Presentación de una recta a partir de su ecuación.

- **Contenidos Actitudinales** (construyen actitudes y valores)

Desarrollados en el apartado “Contenidos Actitudinales” del apartado Contenidos de la unidad didáctica 10: Vectores.

En las tres clasificaciones de los contenidos tiene un uso principal el aprendizaje manipulativo a través del Geopaper.

Metodología: estrategias didácticas

Como se hizo referencia en la anterior unidad didáctica, no existe una única metodología universal que sirva para todas las situaciones. Análogamente a la metodología previamente descrita la de esta unidad didáctica girará alrededor del material manipulativo presentado Geopaper.

La metodología a utilizar va a ser eminentemente activa. Para el uso de este material es fundamental la participación de los alumnos, tanto de forma oral como de forma actitudinal. Se realizará una exposición explicativa por parte del docente de los contenidos y posteriormente se realizarán problemas y ejercicios. Tanto en la explicación como en la parte de problemas se utilizará el Geopaper.

En las sesiones siempre se reservará el tiempo necesario al inicio para la corrección de las tareas para casa enviadas previamente o para la resolución de dudas de la clase anterior. De la misma forma, al final de cada unidad se realizará una sesión de repaso con ejercicios para recordar la materia impartida.

A continuación se realizará un resumen las estrategias didácticas a utilizar, la fundamentación teórica de cada una de ellas viene expresada en el apartado de “Metodología: estrategias

didácticas” de la Unidad Didáctica 10: Vectores, aunque es conveniente no olvidarse de los siguientes puntos:

- **Lección magistral.**
 - Existencia de un esquema de la unidad y de la sesión.
 - La docencia será bidireccional los alumnos tienen permitido participar en la enseñanza.
 - Todas las dudas que surjan a los alumnos se responderán cuando se pregunten.
 - El docente debe preocuparse de que la información haya llegado al alumno.
 - Es importante la creación de un espacio dinámico, motivador y flexible en el aula.
- **Trabajo individual.**
 - Trabajo orientado a poner en práctica lo aprendido, con una finalidad.
 - El trabajo puede ser para el aula o como tareas para casa.
 - Importante la elección de ejercicios que creen la inquietud de descubrir y experimentar en el alumno.
- **Trabajo cooperativo.**
 - Complementa la lección magistral.
 - Los grupos serán heterogéneos y de 2-3 o de 4-5 personas en función de la actividad.
 - Las actividades estarán relacionadas con el Geopaper.
 - Gran importancia a la comunicación.
- **Puesta en común**
- **Resolución de problemas**
- **Uso de herramientas informáticas**

Recursos

Los recursos utilizados deben servirles como guía para alcanzar los objetivos descritos previamente. De esta forma, todo material o personal que se utilice tendrá su significado y su participación activa en la adquisición de conocimientos de los alumnos y alumnas. A modo de síntesis de lo mencionado en la unidad 10: Vectores, recalamos los siguientes:

1. Pizarra y tizas de colores.
2. **Libro de texto y cuaderno** como fuente a la que acudir con dudas en las horas de estudio personal.
3. **Pizarra digital**
4. **Hojas con ejercicios de refuerzo o ampliación**

5. Calculadora.

6. Material manipulativo **Geopaper**.

División en tiempos y espacios

División en tiempos

De las 36h relativas al bloque de Geometría que marca la normativa vigente, a la unidad 11: Geometría Analítica en el Plano corresponden 12 sesiones de 1h. Estas sesiones se imparten en la tercera evaluación.

Las 12 sesiones buscarán los objetivos y seguirán las metodologías previamente mencionadas. Cada una de ellas tiene una planificación concreta:

- **Sesión 1**

Motivación de la Unidad:

<https://www.youtube.com/watch?v=BKorP55Aqvg>

Introducción de la Unidad: Se vinculará la unidad didáctica con la de vectores previamente desarrollada y se planteará algún ejemplo real de esta unidad analizando el video adjunto.

Lección magistral: Se recuerdan los conceptos de punto, vector y base. A partir de un punto y un vector se presenta la recta en su forma vectorial.

- Punto, vector, base y recta.

Trabajo cooperativo 1: En parejas, ayudándose del Geopaper y del cuaderno describir la ecuación vectorial de 4 rectas en diferentes posiciones.

- **Sesión 2**

Corrección: Se da un resultado del ejercicio del día anterior.

Lección magistral: A partir de la recta vectorial describir las diferentes ecuaciones de la recta. Representación gráfica de una recta en el Geopaper.

- Ecuaciones de la recta.

Trabajo individual 1: Dado un punto y dos vectores, describir las ecuaciones de las rectas posibles.

- **Sesión 3**

Lección magistral: Revisión de los contenidos vistos previamente y explicación de la pendiente de una recta y la ecuación punto pendiente. Pertenencia de un punto a una recta.

- Pendiente de una recta y ecuación punto pendiente.
- ¿Pertenece un punto a la recta?

Trabajo cooperativo 1: Describir una serie de rectas, representarlas en el Geopaper y hallar su pendiente.

Trabajo cooperativo 2: Evaluar si varios puntos pertenecen a las rectas anteriormente representadas y comprobar con el Geopaper.

- **Sesión 4**

Puesta en común: Uno de los grupos saldrá a exponer a los demás el trabajo grupal realizado en la sesión anterior.

Lección magistral: Se explica el paralelismo y la perpendicularidad entre rectas y cómo se resuelven estas cuestiones a partir del vector director.

- Vector director de una recta.
- Paralelismo y perpendicularidad de rectas.

Trabajo cooperativo 1: En equipos de dos o tres, apoyándose en el Geopaper. Resolver problemas relativos a paralelismo y perpendicularidad entre rectas.

Trabajo cooperativo 2: En los mismos equipos anteriores, describir la pendiente de rectas definidas según diferentes ecuaciones. Justificar su respuesta con el Geopaper.

- **Sesión 5**

Trabajo individual: Ejercicios de repaso sobre los contenidos previamente vistos. Pueden apoyarse en el Geopaper.

- **Sesión 6**

Trabajo cooperativo 1: Dado un triángulo definido por tres rectas hallar los puntos notables del mismo.

Trabajo cooperativo 2: Dado un pentágono regular definido por los 5 puntos hallar una diagonal principal y el centro.

Ambos se realizarán en grupos de 2-3 personas y será obligatorio el uso del Geopaper.

- **Sesión 7**

Lección magistral: Se explica la forma de calcular el ángulo que forman dos rectas deduciendo los pasos a través del Geopaper.

- Ángulos y distancias punto-punto, punto-recta y recta-recta.

Trabajo individual: Ejercicios para calcular ángulos y distancias.

- **Sesión 8**

Trabajo cooperativo 1: En equipos de 4 ó 5 personas se realizará un trabajo sobre la forma de calcular el simétrico de un punto, de un vector y de una recta respecto de un eje de simetría utilizando el Geopaper.

- **Sesión 9**

Trabajo cooperativo 1: En equipos de 4 ó 5 personas se realizará la actividad de definir el logo de una empresa a través de las rectas que lo formen. Es imprescindible el uso del Geopaper.

- **Sesión 10 y 11**

Trabajo individual: Se realizará un repaso con ejercicios del presente tema y del tema anterior con el fin de preparar a los alumnos para el examen.

- **Sesión 12**

Examen escrito. Relativo a las dos Unidades Didácticas 10 y 11.

División en espacio

El desarrollo de esta UD se realizará en la propia aula de 1º de Bachillerato. Los motivos de esta decisión vienen descritos en el apartado correspondiente a la “División de espacios” en la Unidad Didáctica 10: Vectores.

Actividades de aprendizaje y enseñanza

Las actividades tendrán el mismo carácter que el descrito en la Unidad Didáctica 10: Vectores.

Recordemos sus principales características:

- Vinculadas con la teoría.
- Tiempo repartido entre las horas de aula y las tareas para casa.
- Tareas reflexivas y de toma de decisiones.

Podemos realizar una clasificación del tipo de tareas atendiendo a las funciones a desempeñar por los alumnos:

1. Ejercicios de repaso: Hoja complementaria de ejercicios.

2. Actividades cooperativas: Se dividen en tareas para 2-3 o tareas para 4-5 personas, serán tareas que requieran del uso del Geopaper y la interacción entre los alumnos.
3. Actividades individuales: se dividirán en tareas para el aula o tareas para casa.

Podemos ver ejercicios relacionados con cada uno de los apartados en Anexo I.

Actividades complementarias

Análogamente a lo descrito en la Unidad Didáctica 10: Vectores podemos resumir que entre las actividades complementarias se pueden mencionar las externas al centro (Olimpiada Matemática, Canguro Matemático o Proyecto Estalmat) o las internas del centro (clases extracurriculares de robótica o de proyectos de investigación) en ambos casos el centro prestará toda su atención a aquellos alumnos o alumnas que quieran tomar parte en alguna de estas actividades y promoverá la participación en las mismas.

Evaluación

Como hemos descrito previamente, la evaluación es uno de los elementos importantes para la realización de una labor docente adecuada dada la extensa información que nos proporciona.

Recordemos que, para una evaluación eficiente, los alumnos son conscientes de los criterios de evaluación desde el comienzo de la unidad didáctica.

Criterios de evaluación

Son los que vienen marcados en la Orden EDU363/2018 y figuran en la tabla del mismo apartado en la Unidad Didáctica 10: Vectores.

Los criterios a evaluar están basados en los objetivos mencionados y estos, a su vez, están en relación con las competencias clave necesarias para alcanzar un aprendizaje satisfactorio. En definitiva, estamos evaluando lo siguiente:

Vectores en los problemas geométricos

Descripción de un vector a través de sus coordenadas, cálculo del punto medio de un segmento.

Ecuaciones de la recta

Saber expresar una recta a través de todas las ecuaciones explicadas y, a partir de las ecuaciones, extraer información de cada recta (punto por el que pasa, vector director y pendiente).

Vectores en problemas métricos

Vector normal a uno dado y ángulo, distancia e intersección entre rectas. Distancia entre puntos.

Posición relativa de rectas

Identificación del paralelismo y perpendicularidad entre rectas. Creación de rectas paralelas o perpendiculares a otra dada. Simetría de objetos.

Instrumentos de evaluación

Los recordaremos brevemente:

- **Prueba escrita**

Constará de ejercicios y problemas cuyas bases serán los estándares de aprendizaje, criterios de evaluación, contenidos y competencias básicas acorde a la normativa vigente.

- **Trabajos cooperativos**

Se evaluarán con rúbricas los trabajos realizados en clase.

- **Expresión escrita y exposición oral**

A través de las preguntas realizadas en clase y la claridad de los términos de los trabajos y de la prueba escrita.

- **Actitud y participación en clase**

Se valorará positivamente la actitud y la participación.

- **Trabajo individual (diario)**

Criterios de evaluación

1. Calificación de la unidad didáctica

La unidad didáctica se calificará acorde a los contenidos impartidos y con los criterios previamente mencionados y el resultado tendrá un peso concreto en la evaluación trimestral.

Asimismo, tendrá parte de todos los instrumentos previamente mencionados: prueba escrita, trabajo cooperativo por parejas, trabajo cooperativo por grupos, trabajo individual, exposición oral, expresión escrita y actitud y compañerismo en el aula.

2. Calificación trimestral

Para la descripción véase el apartado correspondiente en “Calificación trimestral” de la Unidad Didáctica 10: Vectores.

3. Calificación al final de curso

Véase el apartado correspondiente en “Calificación al final de curso” de la Unidad Didáctica 10: Vectores.

Atención a la diversidad

Para la descripción véase el apartado correspondiente en “Diversidad” de la Unidad Didáctica 10: Vectores.

Autoevaluación de la unidad

Para poder tomar la decisión de si una metodología ha sido la adecuada o no, no queda más remedio que realizar una autorreflexión.

La autoevaluación se realizará de la forma más sencilla posible para ver los fallos de una sola ojeada, por lo que se puede llevar a cabo cumplimentando una tabla como la siguiente:

	A DESTACAR	A MEJORAR	PROPUESTAS DE MEJORA
Resultados			
Temporalización de la unidad didáctica			
Desarrollo de los objetivos didácticos			
Manejo de los contenidos de la unidad			
Adquisición de competencias básicas			
Realización y comprensión de tareas			
Adecuación de metodologías seleccionadas			
Comprensión de los recursos manipulativos			

Utilización de los recursos manipulativos			
Validez de los recursos manipulativos			
Claridad en los criterios de corrección y evaluación			
Diversidad de evaluación			
Atención a la diversidad en caso de existir			
Satisfacción del profesor			

Para tener una visión externa a la del propio profesor se puede establecer relaciones con otros docentes del centro que hayan dado la misma materia y establecer un cambio de opiniones.

También es conveniente obtener opiniones de los alumnos y alumnas dado que son ellos los directamente afectados por la docencia. Para obtener una opinión de ellos lo adecuado es realizar preguntas muy directas y cuya respuesta sea fácil de emitir, en este caso vamos a proponer un cuestionario de valoración numérica. Los aspectos que se pueden preguntar son los siguientes:

1=Muy poco – 2=Poco – 3=Normal – 4=Mucho – 5=Muchísimo

Aspectos a considerar	1	2	3	4	5
¿Cuánto tiempo dedico al estudio a la semana?					
¿Cuánto tiempo a esta asignatura?					
Estoy contento en esta clase					
Creo que estoy aprendiendo					
La unidad didáctica ha estado ordenada					
Entiendo al profesor cuando explica					
Entiendo los problemas que propone el profesor					

Entiendo las palabras que utiliza el profesor					
El proceso de resolución de problemas está justificado					
Al principio del tema pensé que iba a ser más difícil					
Al principio del tema pensé que iba a ser más fácil					
Deberíamos trabajar más de forma individual					
Deberíamos trabajar más de forma grupal					
El Geopaper me ha ayudado a comprender los conceptos					
El Geopaper me ha ayudado a entender los ejercicios					
El Geopaper me ha ayudado a planificar los ejercicios					
El Geopaper me ha ayudado a expresarme mejor					
El Geopaper no me ha resultado útil					
Creo que he mejorado mi nota con respecto al año pasado					
Resulta útil preguntar dudas al profesor					
Otros:					

Ambos cuestionarios nos dan resultados sobre la enseñanza-aprendizaje a lo largo de la unidad. Analizando los resultados de ambos se puede obtener unas opiniones fundamentadas sobre las que extraeremos nuestras conclusiones.

Estas conclusiones serán un argumento con la suficiente importancia como para establecer los cambios que consideremos oportunos en la planificación, metodología o material didáctico, siempre pensando en la mejora de la comprensión por parte del alumno.

4. Parte IV: Síntesis y Conclusiones

4.1 Síntesis

Los materiales manipulativos son una gran ayuda para un buen resultado de la conjunción enseñanza-aprendizaje. Apoyado en numerosas investigaciones encontramos el hecho de que el uso de materiales en el ámbito docente propulsa al alumno hacia un aprendizaje de carácter significativo. Concretamente en los temas de Geometría Plana y Vectores del bloque de geometría se puede realizar un buen aporte a través de estos materiales.

El Geopaper mezcla la parte abstracta de la matemática y la parte real de la misma. Podemos utilizarlo sin dejar de lado la metodología tradicional de clase magistral, sino a través de la combinación de esta metodología con el uso del material, de esta forma se pueden alcanzar límites más altos en cuanto a contenido y comprensión por parte de los alumnos de los temas en cuestión.

Presentando los ejercicios a través de retos y construyendo sus soluciones a través del Geopaper estimularemos los sentidos de los alumnos y conseguiremos una motivación extra para que los alumnos avancen en la adquisición de los conocimientos matemáticos. Estos materiales son un complemento adecuado para las aulas. Su uso es muy extenso abarcando ámbitos como el apoyo durante la explicación, la manipulación a la hora de resolución de ejercicios o como elemento auxiliar durante las horas de estudio. Al margen de las posibilidades de uso de forma individual, el Geopaper admite un uso de forma grupal con el que se conseguirá una mayor comunicación e intercambio de ideas entre los alumnos con lo que se mejora la exposición oral y la información llega a todos de una manera más completa.

A través de estas metodologías y utilizando los materiales manipulativos estamos generando en el alumno un tipo de aprendizaje por descubrimiento en el que el alumno es un sujeto activo de su aprendizaje adquiriendo los conocimientos por ellos mismos.

Bajo el amparo de la ley vigente podemos decir que el uso de estos materiales es completamente compatible con la enseñanza actual. Fruto de dicha combinación han surgido las dos Unidades Didácticas descritas en el trabajo en las que se observa la forma de contribuir a una buena educación de los estudiantes mediante el uso de estos objetos.

4.2 Conclusiones

La elaboración de este Trabajo Fin de Máster me ha ayudado a realizar una reflexión global sobre la educación actual. La investigación realizada para la concreción del material manipulativo

Geopaper ha sido útil para una inmersión general en la labor real de un docente. A través de ello he estudiado, comprendido y cuestionado el proceso de enseñanza actual.

Aunque el eje de desarrollo sea la Geometría, el trabajo me ha servido como punto de partida de planificación de las unidades didácticas que definen la enseñanza de los contenidos y competencias matemáticas en los centros educativos.

Me he dado cuenta de que ninguno de los contenidos que se imparten en el máster a lo largo de todo el curso ha resultado banal y que la conjunción de todos ellos me ha preparado para lo que me espera en la futura labor docente.

Este Trabajo Fin de Máster constituye el final de mi paso por el Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, en el cual quedan recogidos los conocimientos que he adquirido a lo largo de todo el curso. Estos conocimientos han quedado reflejados en el trabajo cuyo eje se centra en la elaboración de una **Propuesta Didáctica para la mejora del rendimiento en Geometría de los alumnos de 1º de Bachillerato** a través de **Materiales Manipulativos**.

Los objetivos y competencias generales de las asignaturas impartidas del máster se muestran en este Trabajo Fin de Máster que voy a concluir con una mención del aporte de cada uno de los 3 módulos a los contenidos y habilidades que he adquirido:

Para la elaboración del presente documento ha sido fundamental conocer el desarrollo evolutivo de los alumnos, los cambios sociales, personales y, sobretudo, intelectuales por los que pasan los estudios preuniversitarios. Asimismo, ha sido necesario conocer el ambiente en el que se desarrolla la enseñanza, el centro, sus características, su organización, las tareas de cada uno y las leyes vigentes que lo rigen y saber entender la enseñanza desde sus inicios y enfocarla hacia un futuro equitativo y universal. El máster contribuye a todo ello a través del **módulo genérico: Psicopedagógico y Social**.

La contribución del **módulo específico de Matemáticas y su didáctica** se clasifica en tres bloques.

Del primer bloque, **Contenidos curriculares específicos en Matemáticas**, a través de sus cuatro asignaturas, he aprendido a:

- Tener un conocimiento de mayor nivel que el impartido en las aulas preuniversitarias con el cual poder controlar las situaciones que puedan producirse a través de las preguntas de los alumnos o en el tratamiento de estudiantes de altas capacidades.

Complementos de Matemáticas.

- Comprender los fundamentos de las matemáticas y los pasos de su evolución como método explicativo para facilitar la memorización por parte de los alumnos de los conceptos y fórmulas que subyacen esta asignatura. **Ideas y conceptos matemáticos a través de la historia.**
- Basándose en los diferentes modelos estudiados se han planteado diversas actividades para que los alumnos hagan sus propias deducciones y establezcan las estrategias a seguir al enfrentarse a los diferentes ejercicios. **Modelos Matemáticos en Educación Secundaria.**
- Obtener una buena capacidad de organización y planificación de los ejercicios para su exposición delante de los alumnos y usar un lenguaje matemático adecuado para la transmisión correcta de los conceptos. **Resolución de Problemas en Educación Secundaria.**

Del segundo bloque, Didáctica específica de las Matemáticas, a través de sus tres asignaturas, he aprendido a:

- Elaborar una buena Unidad Didáctica a partir de los mínimos y límites exigidos por la normativa vigente y los documentos institucionales pertinentes. Conocer el sistema educativo actual basado en contenidos y en competencias. **Diseño Curricular en Matemáticas.**
- Preparación de una clase adecuada para cada grupo de alumnos y un enfoque basado en la forma más adecuada de transmitir los conocimientos para contribuir al aprendizaje significativo. **Didáctica de la Matemática.**
- Elegir la metodología más adecuada a cada tipo de enseñanza, en nuestro caso con el uso de materiales manipulativos, y elaborar una buena planificación para la evaluación que incluya tanto los objetivos como las competencias. **Metodología y Evaluación en Matemáticas.**

Del tercer bloque, Innovación e investigación educativa en Matemáticas, a través de sus dos asignaturas, he aprendido a:

- Investigar sobre las metodologías actuales para poder proponer mejoras a las mismas y establecer unas estrategias que mejoren en rendimiento didáctico del profesor y el aprendizaje de los alumnos. **Iniciación a la Investigación educativa en Matemáticas.**
- Elaborar actividades diferentes y novedosas incluidas en la Unidad Didáctica que motiven a los alumnos a la integración de los contenidos con los que lograr un aprendizaje más consolidado. **Innovación Docente en Matemáticas.**

Por último, quería destacar la importancia que han tenido las **Prácticas Externas** en un centro de Educación Secundaria y Bachillerato. Aunque durante mi estancia no pude asistir a ninguna clase de geometría en Bachillerato debido a la no correspondencia temporal, he podido basar mi propuesta en base a comentarios y charlas realizadas con los integrantes del departamento de matemáticas del centro. Habiendo asistido a otras clases de matemáticas de 1º de Bachillerato, se observó la falta de “realismo” que dotan los alumnos a los ejercicios, es decir, la ausencia de representación de los datos del enunciado, derivando en una solución exclusivamente analítica. Por ello, se intenta, a través del Geopaper, dar a los alumnos la opción a un enfoque diferente con el que abordar la solución de los problemas y, al mismo tiempo, conseguir una mayor concentración y motivación de los estudiantes.

Como conclusión final, se puede deducir que el Máster ha sido un requisito fundamental no solamente para la realización del presente TFM, sino, también para la práctica de la futura labor del docente, tanto en la planificación de la programación y unidades didácticas correspondientes al temario de ESO y Bachillerato, como para la adquisición de las técnicas educación que involucra todo el proceso de enseñanza - aprendizaje.

5. Bibliografía

1. Alonso, M. (2009). Fröebel. La pelota como primer juguete del niño. En Hernández, J. L., Sánchez, B. y Pérez, I., *Temas y Perspectivas sobre la educación*. Salamanca, España: AJITHE.
2. Alsina, Á. y Domingo, M. (2010). Idoneidad Didáctica de un Protocolo Sociocultural de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 7-32.
3. Alsina, Á. y Planas, N. (2008). Matemática Inclusiva. Propuesta para una educación matemática accesible. Madrid, Narcea S. A. ISBN: 8427715919, 9788427715912, 172 p.
4. Area, M. (2015). Capítulo: Reinventar la escuela en la sociedad digital. Del aprender repitiendo al aprender creando. En M. Poggi (1ª Ed.), *Mejorar los aprendizajes en la Educación Obligatoria. Políticas y Actores* (pp.167-194), Buenos Aires: IIPE–UNESCO Buenos Aires.
5. Armendáriz, M. V., Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las Matemáticas y Psicología. *Infancia y Aprendizaje* 62-63, pp. 77-99.
6. Berger, K.S. y Thompson, R.A. (2007): *Psicología del Desarrollo. Infancia y Adolescencia*. Madrid. España, Panamérica.
7. Cañadas, M. C., Marín, S., Rico, L. y Sánchez, M. T. (2016). *Investigaciones en didáctica de la matemática. Homenaje a Moisés Coriat*. Granada, España: Comares.
8. Casas, L.M. y Sánchez, C., (1998). Juegos y materiales manipulativos como dinamizadores del aprendizaje en Matemáticas. Bilbao: Centro de publicaciones. Secretaría General Técnica.
9. Castejón, J.L., González, C., Gilar, R. y Miñano, P. (2010). *Psicología de la educación*. Alicante, España: Edutorial Club Universitario.
10. Castillo, S. y Cabrerizo, J (2010). *Evaluación educativa de aprendizajes y competencias*. Madrid, España: Pearson Educación, S.A.
11. Chamoso, J. M., Durán, J., García, J. M., Martín, J. y Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 47, p. 47-58.
12. Chamoso, J. y Miguel, E. (1995) Materiales y recursos didácticos para la enseñanza de las Matemáticas. El cuenta-drez. *Aula [Internet]*, 7. Recuperado de: <http://revistas.usal.es/index.php/0214-3402/article/view/3409>.
13. de la Calle, M. J. (2004). El Reto de ser profesor en el contexto de la convergencia europea. La formación pedagógica como necesidad. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 18(3), pp.251-258.

14. Cubillo, C. y Ortega, T. (2000). Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las Matemáticas. *Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.*, 3(2), pp.189-206.
15. Delgado, B. (2008). *Psicología del desarrollo. Volumen 2: Desde la infancia a la vejez*. Aravaca, Madrid: McGraw-Hill.
16. Flores, P., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2018). *Enseñar Matemáticas. Homenaje a los profesores FRANCISCO FERNÁNDEZ y FRANCISCO RUIZ*. Granada, España: Atrio.
17. Gamboa, R. y Ballester, E. (2010, 15 de diciembre). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare* 14(2), pp. 125-142.
18. Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.
19. Gómez, R. (2002). Análisis de los métodos didácticos en la enseñanza. *Publicaciones* 32, pp. 261-233.
20. Gutiérrez, Á, y Jaime, A. (1991). El modelo de Razonamiento de Van Hiele Como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática* 3(2), pp. 49-65.
21. Kehle, P. (1999): *Shifting Our Focus From Ends to Means: Mathematical Reasoning*. *Journal for Research in Mathematics Education*,30(4), pp. 468-474.
22. Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1998). *Educación Matemática*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
23. Jiménez, C. y Roncal, L., (2015). *Recursos en la enseñanza de las matemáticas. Curso 2015/2016*. Logroño: Universidad de La Rioja
24. Marchesi, A. (2006). El informe PISA y la política educativa en España. *Revista de Educación*, extraordinario, pp. 337-355.
25. Moreno, F. M. (2013). La manipulación de los materiales como recurso didáctico en educación infantil. *Estudios sobre el Mensaje Periodístico* 19(especial marzo), pp. 329-337.
26. Moreno, I. (2004). *La utilización de medios y recursos didácticos en el aula*. Recuperado de: <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/doe/profe/isidro/merecur.pdf>.
27. Petro, A. B., Guevara, I., Solá Solé, M. G., Monzò, O. y Perales, V. (2015). «Matemáticas, ahora lo veo». 12 Jornada de educación matemática. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 80, p. 131-140.
28. Rodríguez, M. (2005): *Materiales y Recursos en educación infantil. Manual de usos prácticos para el docente*. Vigo, España: Ideaspropias Editorial.

Webgrafía

- 29.** Benavente, J.M., Palacios, M.J. y de Prada, M.D. (1985). *Didáctica de las matemáticas. Homenaje a D. Pedro Puig Adam*. Recuperado de <https://books.google.es/books?id=6EQbCgAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false>
- 30.** Marqués, P. (2001). *Los medios didácticos y los recursos educativos*. Recuperado de: <http://peremarques.pangea.org/medios.htm>.
- 31.** Martín, G. (2014, diciembre). *Enseñanza: hacia una metodología activa* [Mensaje en un blog]. Recuperado de <http://www.pedagogia.com/metodo-y-actividades/metodologia-activa/>
- 32.** Muñoz, J. y Moya, P. (2015). *Matemáticas I. 1º de Bachillerato*. Recuperado de: <http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/Matematicas%20I.pdf>

Documentos escolares.

- 33.** Programación didáctica. Departamento de matemáticas. (2016) I.E.S. Marqués de Lozoya. Recuperado de: <http://iesmarquesdelozoya.net/pec/programaciones/matematicas.pdf>

Tesis, TFM y TFG.

- 34.** Fraile, M. y Baridón, D.(2017). *Matemáticas, materiales manipulativos y rutinas* (Trabajo Fin de Grado). Universidad Internacional de La Rioja, Barcelona, España.
- 35.** García, M. y Extremiana, J. I. (2017). *Materiales manipulativos para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (Trabajo Fin de Grado). Universidad de La Rioja, La Rioja, España.
- 36.** Krutakova, A. y Vega, J. (2014). *Métodos docentes para la Enseñanza-Aprendizaje de la Economía. Aplicación a la unidad didáctica. "El Dinero y el Sistema Financiero"* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.
- 37.** Prieto, B. y Fernández R. M. (2014). *Materiales manipulativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas rutinas* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.
- 38.** Sánchez, S. y García, M. (2016). *La importancia del juego en el proceso de enseñanza-aprendizaje de una lengua extranjera rutinas* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Valladolid, Palencia, España.

39. Santos, C. y Reyes, M. E. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los movimientos del plano rutinas* (Trabajo Fin de Máster). Perspectiva histórica. Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

40. Valenzuela M. y Ruiz, F. (2011). *Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Un estudio sobre algunos colegios de Chile rutinas* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Normativa vigente

41. España. Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015, núm. 3. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

42. España. Orden EDU 362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León, 8 de mayo de 2015, núm. 86. Consejería de Educación.

43. España. Orden EDU 363/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León, 8 de mayo de 2015, núm. 86. Consejería de Educación.

Ilustraciones

44. Ilustración 1: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español. Resultados y Contexto. Recuperado de: <https://books.google.es/books?id=psiGCAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=es#v=onepage&q&f=false>

45. Ilustración 2: Elaboración propia.

46. Ilustración 3: Elaboración propia.

47. Ilustración 4: Elaboración propia.

48. Ilustración 5: Universidad Complutense de Madrid (s.f.). Vamos a jugar al Billar. Recuperado de: <http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/geometriahoy/experimentosgeom/vamos.htm>

49. Ilustración 6: Mitsubishi. (s.f.). En Wikipedia. Recuperado el 23 de mayo de 2019 de https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Mitsubishi_logo.svg

50. Ilustración 7: Rodríguez, A. (2018, 17 de julio). La matemática y geometría de estos logos famosos. Recuperado de:

https://www.paredro.com/la-matematica-y-geometria-de-estos-logos-famosos/?utm_medium=email&utm_campaign=Daily%20Noticias%20destacadas%20%20paredrocom&utm_content=Daily%20Noticias%20destacadas%20%20paredrocom+CID_9fed30467cc1dedf8c86bbf62d4e5b3c&utm_source=Email%20marketing%20CM&utm_term=La%20matemtica%20y%20geometra%20de%20estos%20logos%20famosos

51. Ilustración 8: Muñoz, J. y Moya, P. (2015). Matemáticas I. 1º de Bachillerato. Recuperado de:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/Matematicas%20I.pdf>

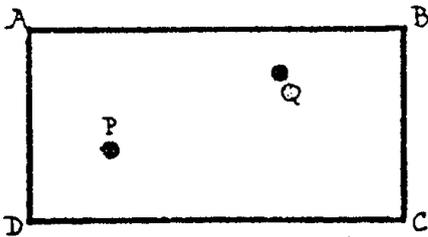
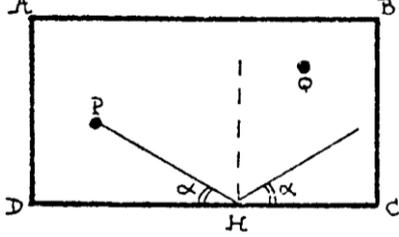
52. Ilustración 9: Muñoz, J. y Moya, P. (2015). Matemáticas I. 1º de Bachillerato. Recuperado de:

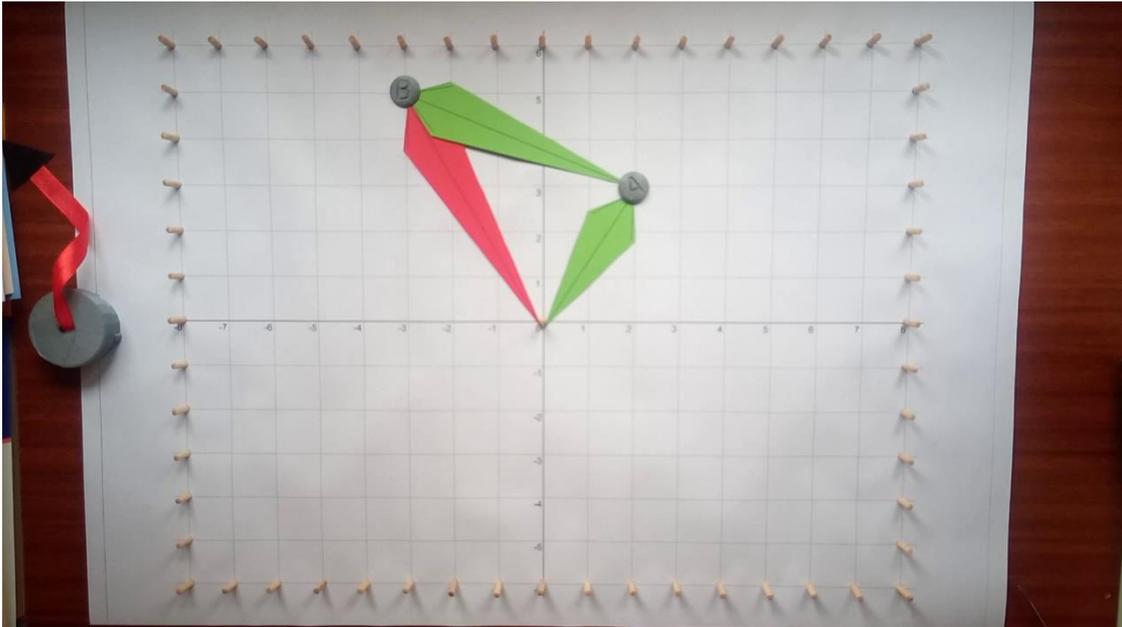
<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Bachillerato/Matematicas%20I.pdf>

6. Anexos

Anexo I: Ejercicios propuestos para trabajar con el Geopaper

6.1 Ejercicios UD 10: Vectores

Ejercicio 1: Las Bolas de Billar	
Enunciado	<div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div> <p style="text-align: center;"><i>Ilustración 5 Mesa de billar en las que se toma como plano donde realizar el ejercicio.</i></p> <p>Se coloca una bola de billar P en una posición conocida $(1, 1/2)$ y se golpea siguiendo el vector $(2, 1)$. Se sabe de la mesa de billar que sus lados más grandes miden $6ud$ y sus lados más pequeños $4ud$ cada uno. También se sabe que los lados grandes tienen la banda lisa por lo que el ángulo en el que entra la pelota es el mismo que el ángulo en el que sale, los lados pequeños, en cambio, son rugosos y la pelota siempre rebota en un ángulo exacto de 90 grados. Utilizando el Geopaper se pide:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Calcular los 6 primeros vectores mientras la pelota va rebotando en las bandas. • La bola P, ¿chocará con una bola Q ubicada en las coordenadas $(1, 3)$? • La pelota P, ¿volverá en algún momento a su posición inicial? <p>Nota: tomamos el origen de coordenadas en el punto D de la mesa de billar.</p>
Contenidos	<p>Se trabajarán los siguientes contenidos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Concepto de vector (módulo, dirección y sentido) • Operaciones con vectores. • Producto escalar entre vectores. • Ángulos entre vectores. • Paralelismo y perpendicularidad entre vectores.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollo de la comunicación grupal y del trabajo y colaboración cooperativo. • Supuesto real de la aplicación de los vectores. • Comprensión de las operaciones con vectores. • Aplicación del producto escalar.

Ejercicio 2	
Enunciado	Si las coordenadas de dos vectores, \vec{u} y \vec{v} , son $\vec{u}(2,3)$ y $\vec{v}(5,-2)$, comprobar gráfica y analíticamente que las de $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son respectivamente $(7, 1)$ y $(-3, 5)$ y que $2\vec{u}$ es $(4,6)$
Contenidos	<ul style="list-style-type: none"> • Concepto de vector (módulo, dirección y sentido) • Operaciones con vectores.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollo de la comunicación grupal y del trabajo y colaboración cooperativo. • Comprensión analítica y geométrica de las operaciones con vectores.
Video	 <p>Escanéame</p>
Geopaper	

Ejercicio 3

Enunciado Hallar los módulos de los vectores siguientes: $\vec{u}(1, 5)$, $\vec{v}(-2, 4)$, $\vec{w}(5, 1)$ y $\vec{t}(1, -3)$.

Contenidos

- Concepto y cálculo del módulo de un vector.

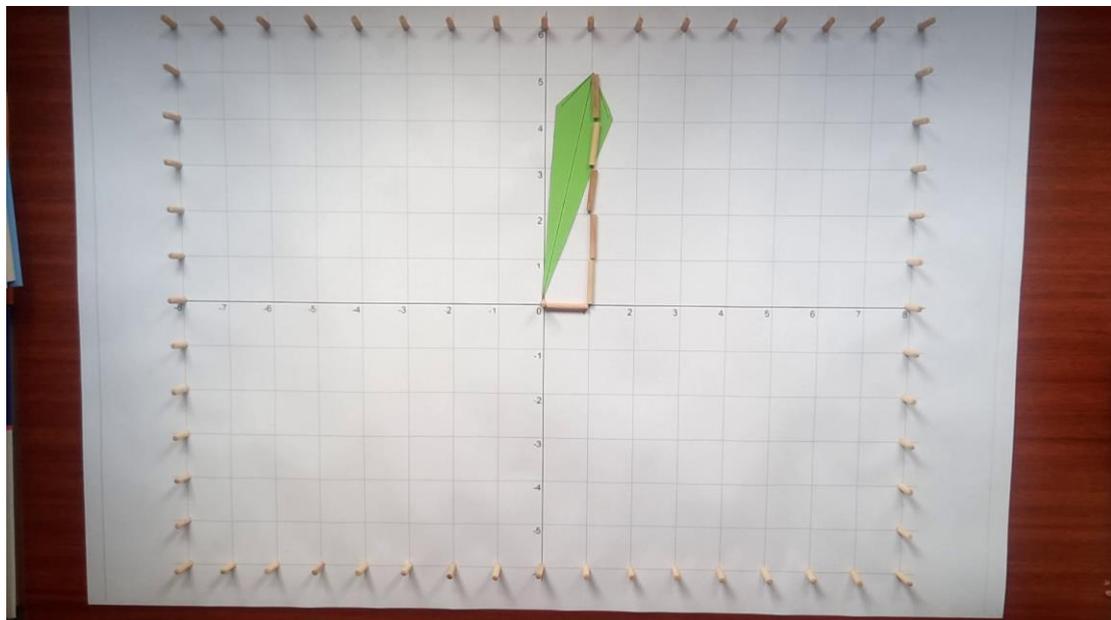
Objetivos

- Comprensión analítica y geométrica del cálculo del módulo de un vector.

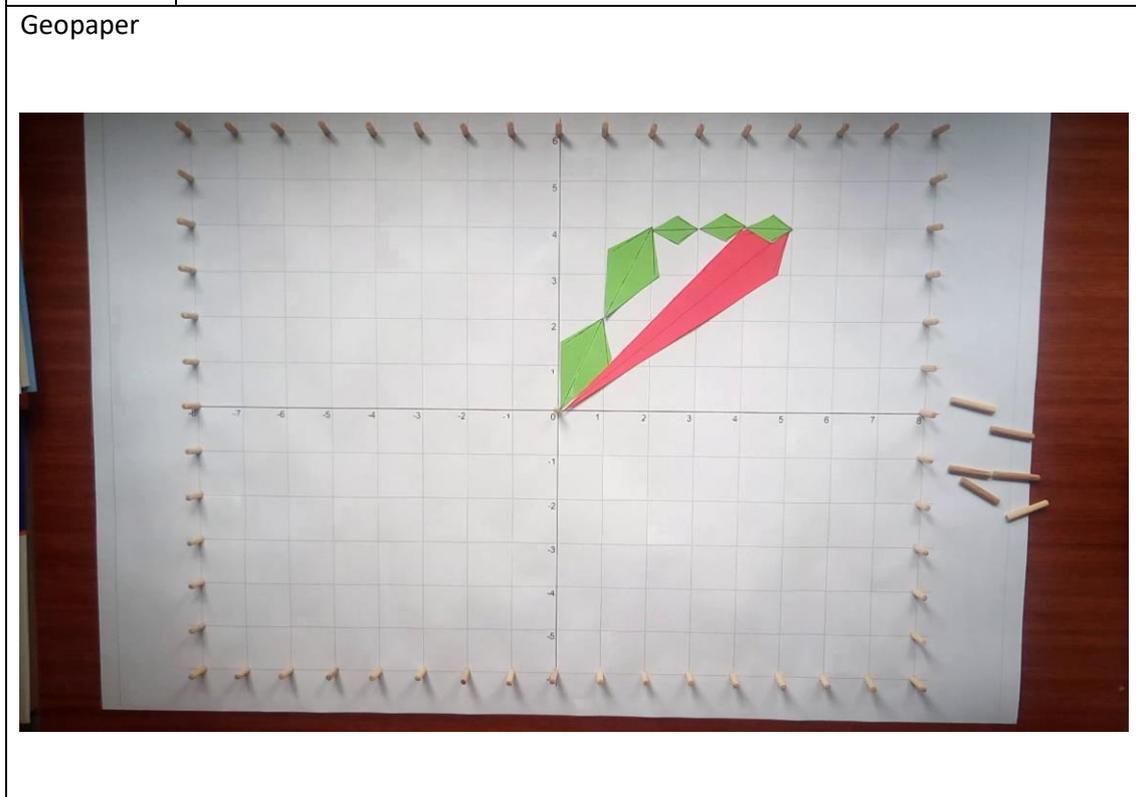
Video



Geopaper



Ejercicio 4	
Enunciado	Se definen tres vectores $\vec{u}(1, 2)$, $\vec{v}(1, 0)$ y el $\vec{w}(5, 4)$. Calcular a y b para que se verifique: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
Contenidos	<ul style="list-style-type: none"> • Concepto de vector (módulo, dirección y sentido) • Operaciones con vectores. • Combinación lineal. • Concepto de base
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Comprensión analítica y geométrica de combinación lineal.
Video	 <p>Escanéame</p>



Ejercicio 5

Enunciado En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2, -5)$. Halla las coordenadas de \vec{v} en la base $B = ((1, -1), (0, -1))$

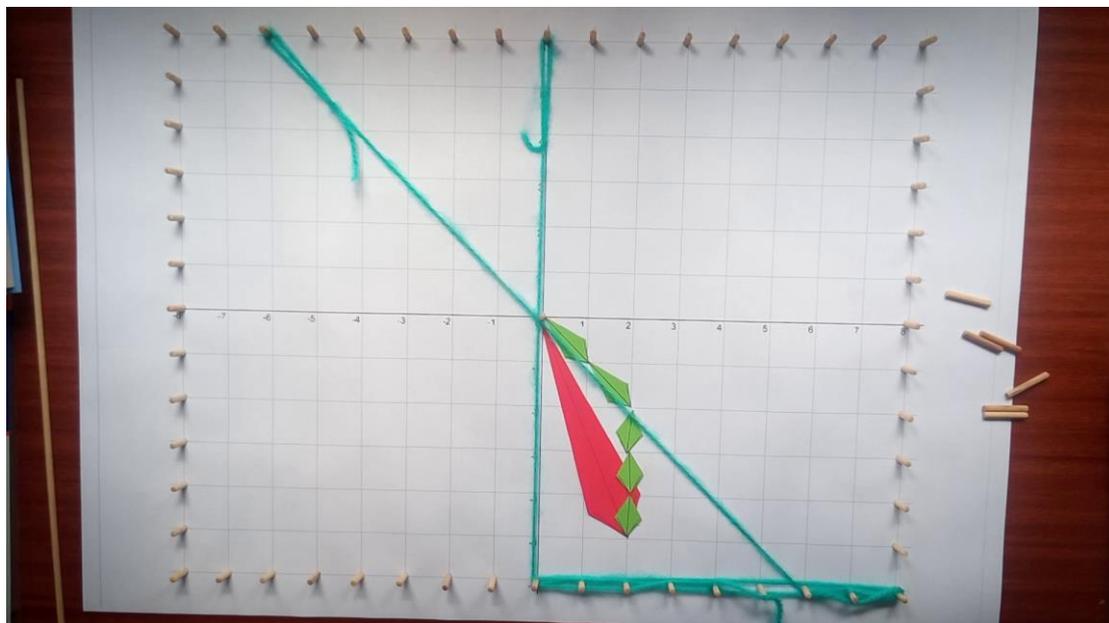
- Contenidos
- Combinación lineal.
 - Concepto de base

- Objetivos
- Comprensión analítica y geométrica del cambio de base.

Video

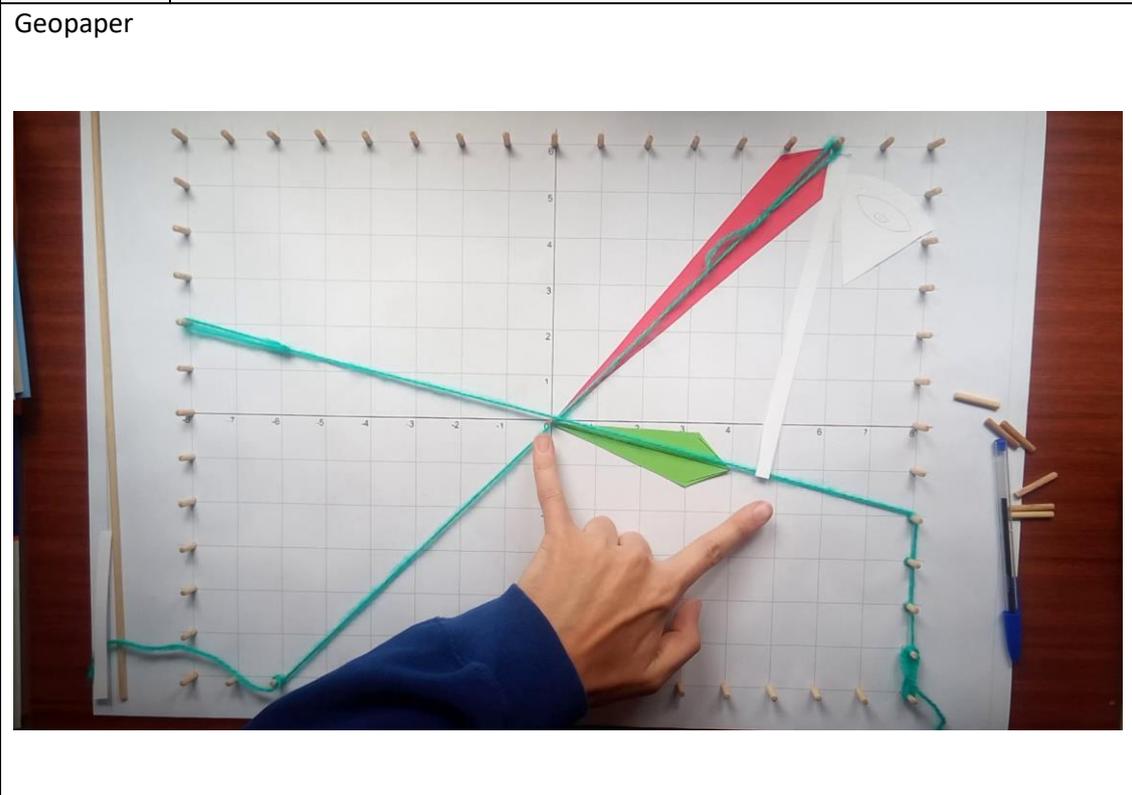


Geopaper



Ejercicio 6

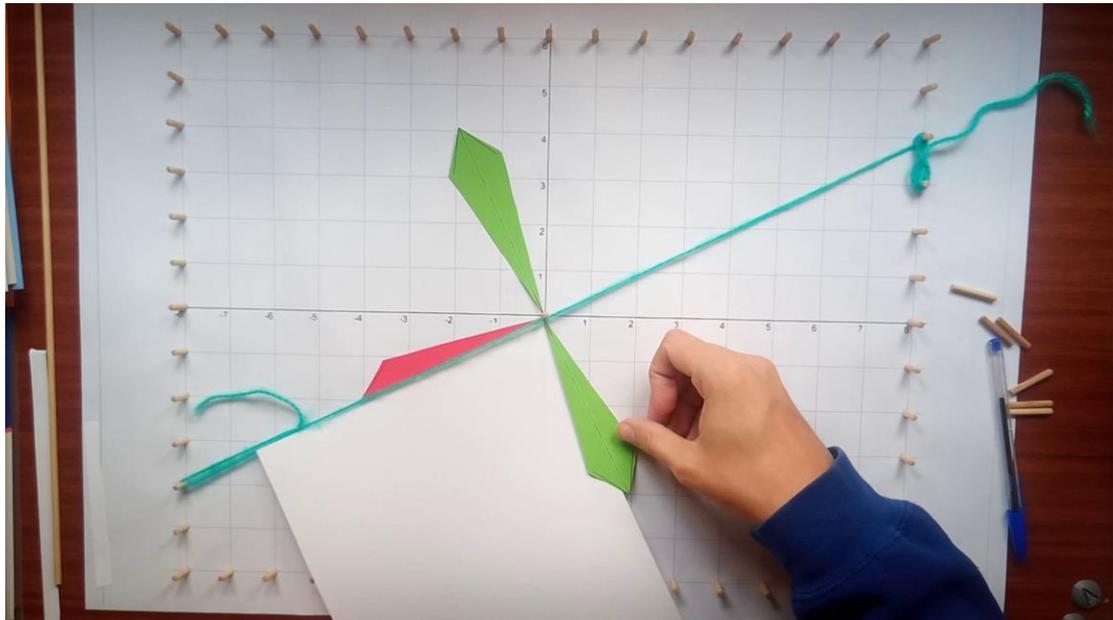
Enunciado	Significado geométrico del producto escalar.
Contenidos	<ul style="list-style-type: none">• Producto escalar entre vectores.• Proyección de un vector sobre otro.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none">• Comprensión geométrica del producto escalar.
Video	 <p>Escanéame</p>



Ejercicio 7

Enunciado	Vector ortogonal a $\vec{v}(-4, -2)$
Contenidos	<ul style="list-style-type: none">• Perpendicularidad.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none">• Comprensión geométrica de la perpendicularidad de un vector.
Vídeo	 <p>Escanéame</p>

Geopaper



6.2 Ejercicios UD 11: Geometría analítica en el plano

Ejercicio 8: Análisis de Logotipos	
Enunciado	<div style="text-align: center;">  <p><i>Ilustración 6 https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Mitsubishi_logo.svg</i></p>  <p><i>Ilustración 7 https://laciaturacreativa.com/2018/09/20/las-matematicas-y-la-geometria-oculta-detras-de-algunos-logotipos-famosos/</i></p> </div> <p>Se pide colocar el logo en el Geopaper y analizarlo definiendo las rectas y los elementos que lo conforman.</p>
Contenidos	<ul style="list-style-type: none"> • Concepto y definición de recta. • Intersección de rectas. • Vectores normales. • Ángulos entre rectas. • Paralelismo y perpendicularidad entre rectas.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollo de la comunicación grupal y del trabajo y colaboración cooperativo. • Supuesto real de la aplicación de las rectas. • Comprensión analítica y geométrica de la intersección de rectas. • Relación entre rectas.

Ejercicio 9

Enunciado Describir las coordenadas de tres vectores que se pueden formar con los puntos $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$ y $C(-2, -3)$. Una vez los tengas escribe los mismos vectores pero con sentido opuesto.

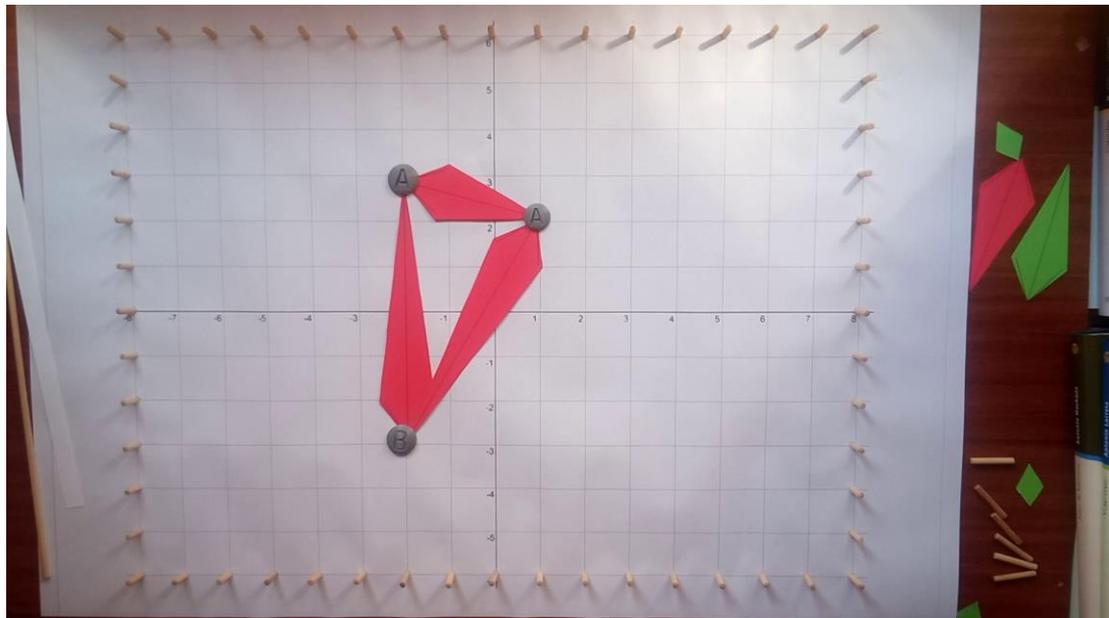
- Contenidos**
- Concepto de vector (módulo, dirección y sentido)
 - Vector de posición.

- Objetivos**
- Diferenciación entre vector fijo y vector libre.

Video



Geopaper



Ejercicio 10

Enunciado Calcular el punto medio de un segmento definido por dos de sus puntos $A(-2, -2)$ y $B(4, 4)$

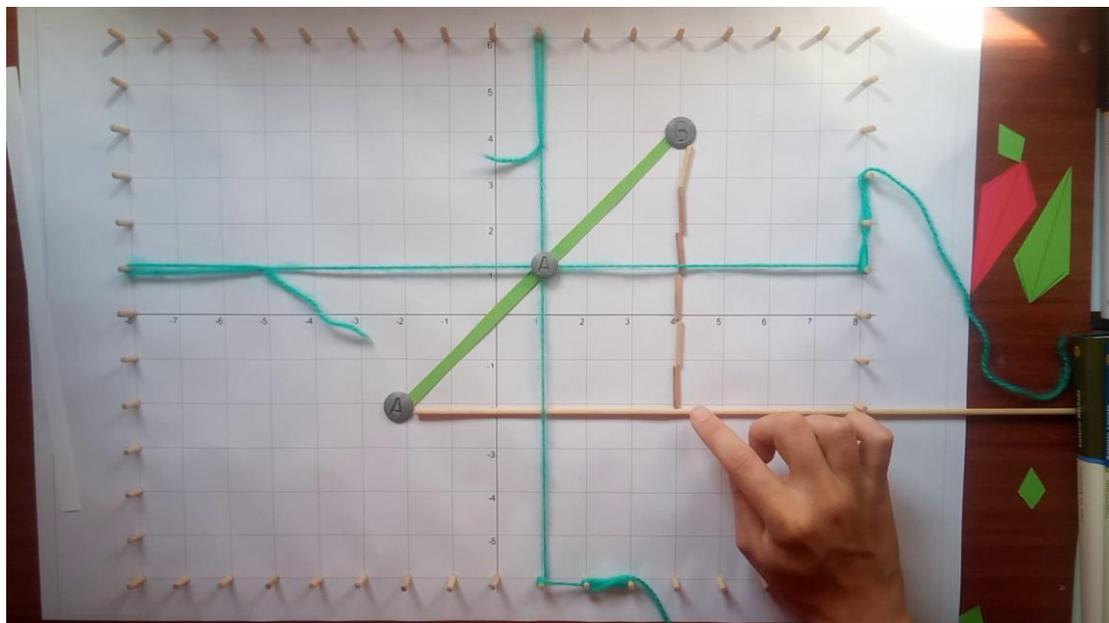
- Contenidos
- Módulo de un segmento.
 - Operaciones con vectores.

- Objetivos
- Trabajar con el vector medio.

Video



Geopaper



Ejercicio 11

Enunciado Formación de la ecuación vectorial de una recta a partir de un punto A y un vector \vec{v} . $A(0, 2)$ y $\vec{v}(4, -1)$.

Contenidos

- Ecuación de la recta

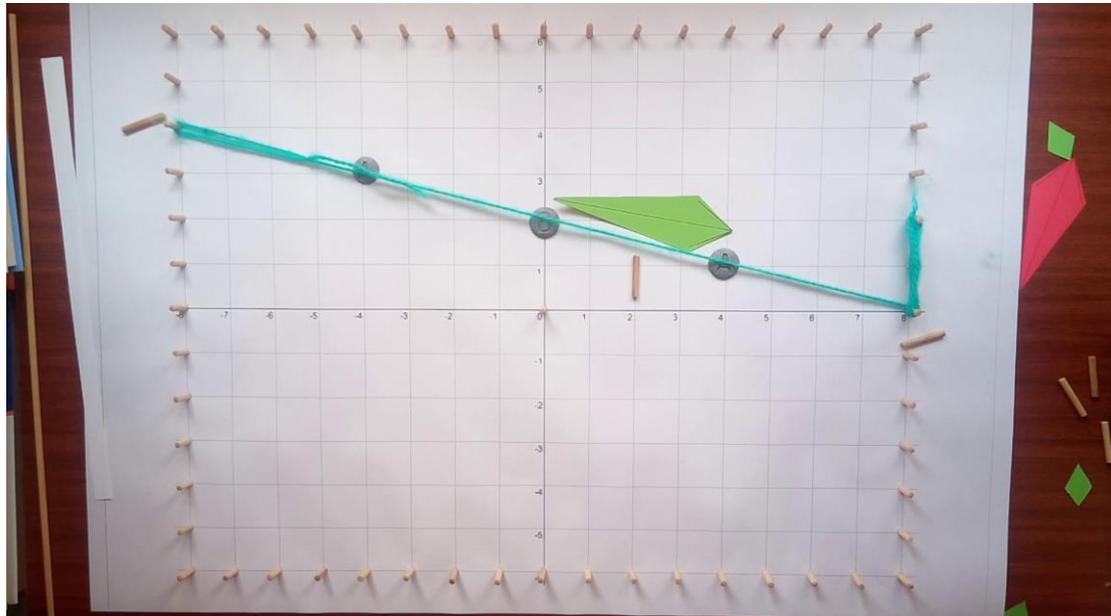
Objetivos

- Comprensión de la descripción de la ecuación de una recta.

Video



Geopaper



Ejercicio 12

Enunciado Hallar y describir los vectores que se han utilizado para la construcción de un cuadrado de lado igual al vector $\vec{v}(1, 4)$, apoyado en la recta $y = -x/4$ sabiendo que uno de sus vértices se encuentra en el origen de coordenadas.

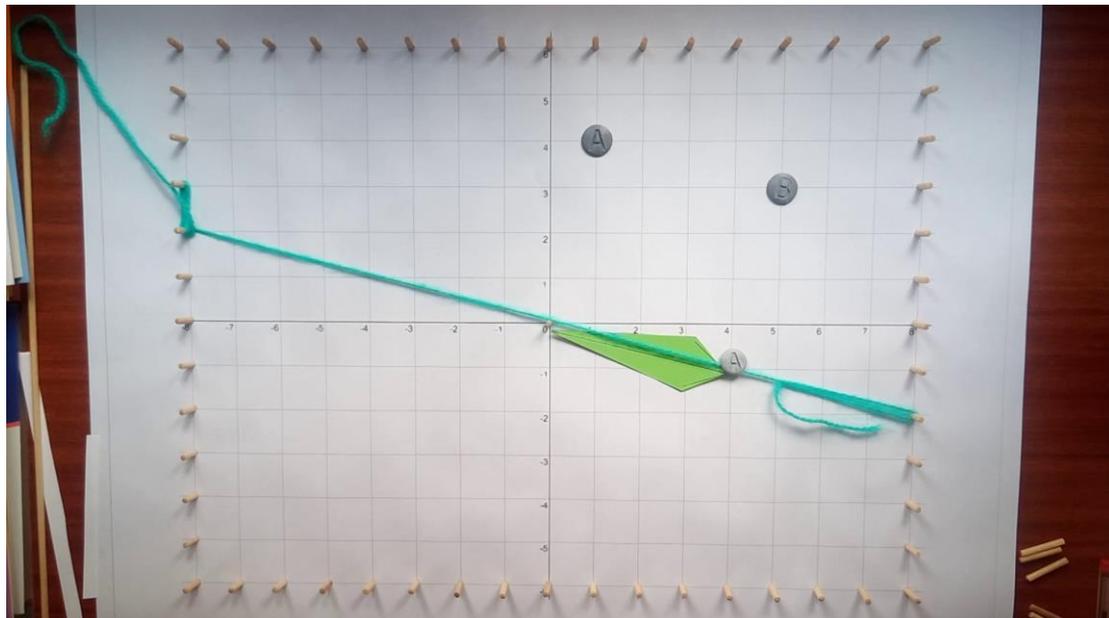
- Contenidos**
- Ortogonalidad de vectores y rectas.
 - Representación de rectas.

- Objetivos**
- Saber hacer un vector ortogonal a una recta.

Video



Geopaper



Ejercicio 13

Enunciado Calcular el lado de un cuadrado conociendo que dos de sus lados pertenecen a las rectas $3x - y + 15 = 0$ y $\frac{7-x}{4} = \frac{6-y}{12}$.

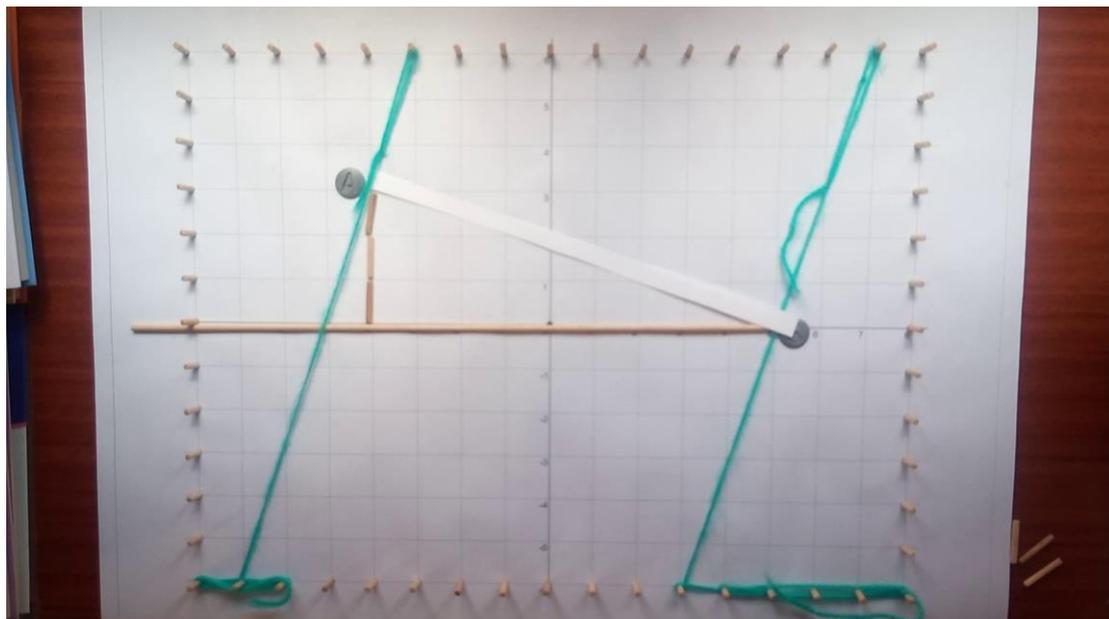
- Contenidos
- Ecuaciones de la recta.
 - Distancia entre puntos, entre rectas y entre punto y recta.

- Objetivos
- Dominio del dibujo de rectas a partir de las diferentes ecuaciones.
 - Comprensión del concepto de distancia.
 - Cálculo de la distancia entre elementos.

Video



Geopaper



Ejercicio 14

Enunciado Trazar una recta paralela y otra perpendicular a la recta $y = 2x - 16$ por el punto $A(0, 0)$.

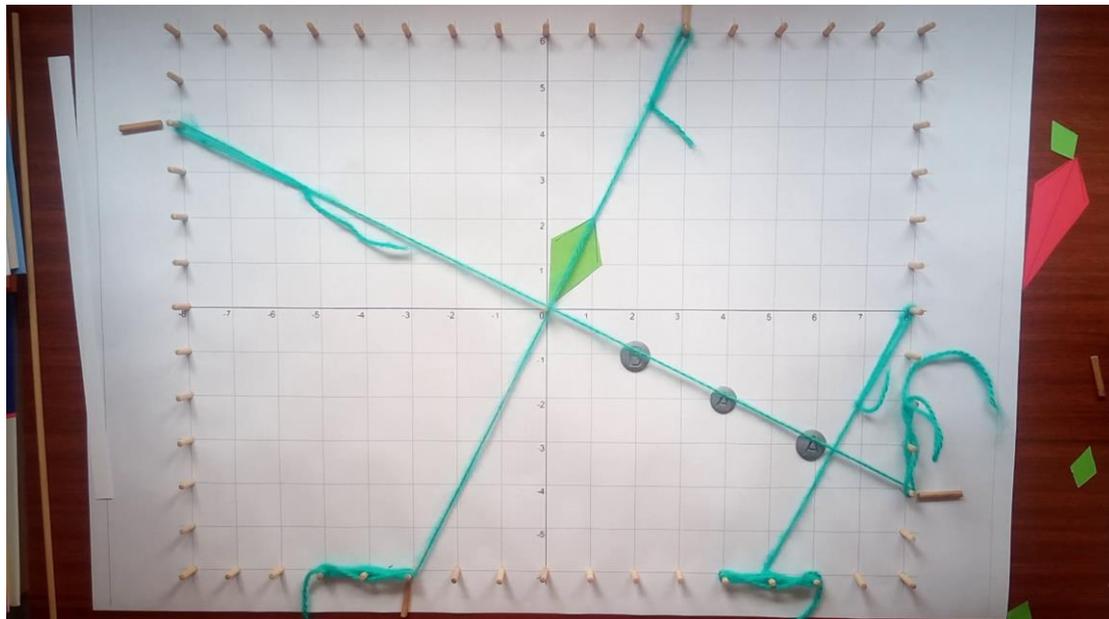
- Contenidos**
- Definición de rectas a través de su ecuación.
 - Paralelismo y perpendicularidad de vectores.

- Objetivos**
- Dominio del dibujo de rectas a partir de las diferentes ecuaciones.
 - Recta paralela y perpendicular.

Video



Geopaper



Ejercicio 15

Enunciado Hallar el simétrico del punto $A(3, 1)$ respecto de la recta $(x, y) = (2 - 8t, 6 - 12t)$

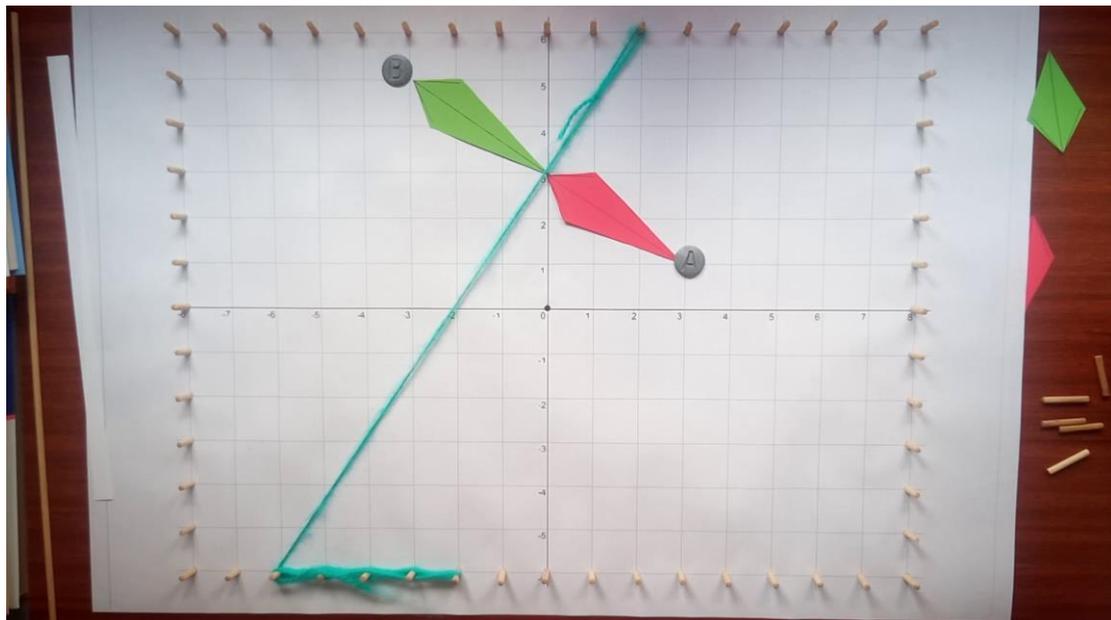
- Contenidos
- Definición de rectas a través de su ecuación vectorial.
 - Vector perpendicular a una recta.

- Objetivos
- Comprensión lectora de términos matemáticos.
 - Dominio del dibujo de rectas a partir de las diferentes ecuaciones.
 - Comprensión geométrica del significado de simetría.

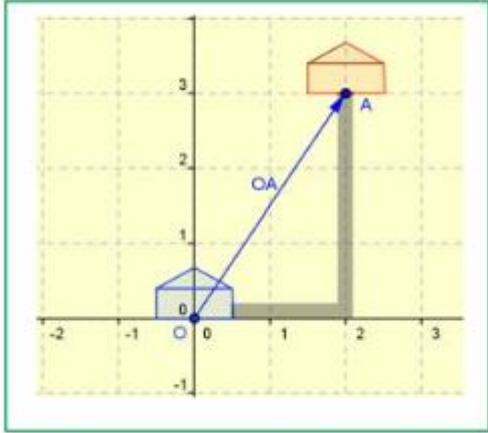
Video



Geopaper



6.3 Ejercicios alternativos para trabajar con el Geopaper

Ejercicio 01	
Enunciado	<p>Susana está en su casa y quiere ir a casa de Nadia, que vive 2 calles al Este y 3 calles al Norte, el trayecto que debe hacer es el que en la figura está dibujado en gris. Dibujar el vector de traslación que ha realizado Susana.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;"><i>Ilustración 8 Esquema de desplazamiento de Susana</i></p>
Contenidos	<ul style="list-style-type: none"> • Concepto de vector (módulo, dirección y sentido) • Operaciones con vectores.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollo de la comunicación grupal y del trabajo y colaboración cooperativo. • Supuesto real de la aplicación de los vectores. • Comprensión de las operaciones con vectores.

Ejercicio 02

Enunciado Dada la figura adjunta de color verde, se va girando como indica la figura roja hasta conseguir un giro de ángulo 90° en sentido contrario al giro de las agujas del reloj. ¿Dónde terminará el punto A si sus coordenadas originales son $(-2, 4)$?

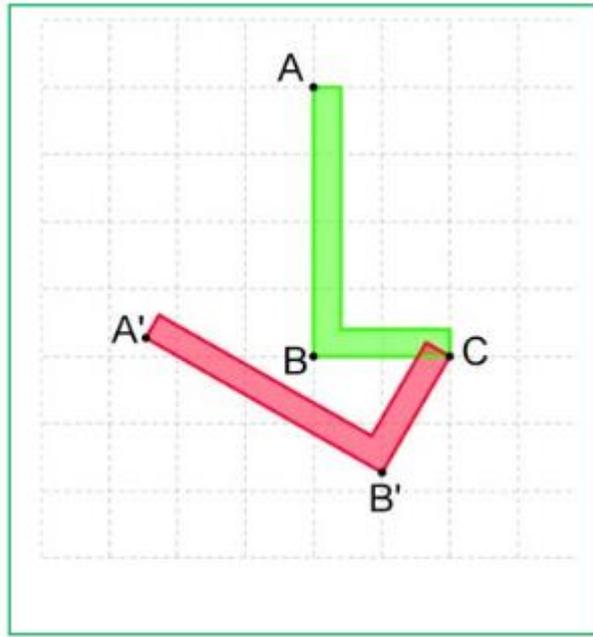


Ilustración 9 Esquema de giro de la figura

Contenidos

- Concepto de giro.
- Comprensión del ángulo de giro y su plasmación en los ejes cartesianos.

Objetivos

- Identificación en el Geopaper de los elementos que definen un giro.

Ejercicio 03	
Enunciado	<p>Dada la figura adjunta plasmarla en el Geopaper e identificar y definir con sus ecuaciones todas sus rectas de simetría.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
Contenidos	<ul style="list-style-type: none"> • Concepto de simetría. • Visualización del significado geométrico de la simetría.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación en el Geopaper de los elementos que definen una simetría.

Ejercicio 04	
Enunciado	<p>Utilizando el método del jardinero dibujar utilizando el Geopaper una circunferencia y una elipse. Visualizar cómo se modifica la elipse si se varía la distancia focal o el semieje mayor.</p>
Contenidos	<ul style="list-style-type: none"> • Concepto de elipse. • Visualización del significado geométrico de la elipse.
Objetivos	<ul style="list-style-type: none"> • Identificación en el Geopaper de los elementos que definen una elipse.

Enlaces de los códigos QR de los videos:

1. Ej.02: https://drive.google.com/open?id=1KTS95LNNU3HfZgtMQ0p4D9Jyf0d_OgTr
2. Ej.03: <https://drive.google.com/open?id=1DZ2bopTN0Tv9pLSGebjDFUEmBgrfkagv>
3. Ej.04: <https://drive.google.com/open?id=1oLK49hr3ceGkDWX2J1NizS5C5C9z2XHd>
4. Ej.05: <https://drive.google.com/open?id=1ZKdKMTxeV4IlhSpi7QX5EY0SMemNBKdK>
5. Ej.06: <https://drive.google.com/open?id=1YfctUGIYoQ7PxGXlpLPWOg8yWehP2xdZ>
6. Ej.07: <https://drive.google.com/open?id=1wY8FUt3cfOTnTqyn55vJ8nI5mOXbx8P5>
7. Ej.09: <https://drive.google.com/open?id=1LSKefhB43U1e0njuTOIYKU6znOI-bkIE>
8. Ej.10: <https://drive.google.com/open?id=1KI2xvQXzpPYqNwALZ-FVU2qjKKgBi6rC>
9. Ej.11: <https://drive.google.com/open?id=18EK212m35Fd7k4kvNkWpleSQIN4PFReE>
10. Ej.12: <https://drive.google.com/open?id=1ddXdOh11r-qagZgIPclkc72gHUyQtrBT>
11. Ej.13: https://drive.google.com/open?id=1u1pv6pE616X2_3tWp9Yn8FKrS-1iDMUX
12. Ej.14: <https://drive.google.com/open?id=1PMB5Sggwj3jx0PX57o07lpIXFn7Wglhp>
13. Ej.15: <https://drive.google.com/open?id=1CTL-2pBtFmyhZo4soBZW7WWyB8JtVKmb>

