UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Didáctica de la Matemática

PROPUESTA DE INCLUSIÓN DE CONTENIDOS DE TEORÍA DE NÚMEROS Y MATEMÁTICA DISCRETA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA CON UN ENFOQUE VISUAL

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Pablo Lorenzo Vaquero

Tutor: Edgar Martínez-Moro

Valladolid, 19 de Junio de 2019

Resumen

En este trabajo, se realiza una propuesta de inclusión de contenidos relativos a la Teoría de Números y las Matemáticas Discretas; en concreto las congruencias, la Teoría de Grafos y los números figurados; en la enseñanza secundaria. Para ello, se ofrece un marco teórico que engloba los beneficios y características de su inclusión, junto a diferentes capítulos que analizan los diferentes contenidos así como contienen actividades y recursos visuales para su implementación.

Palabras clave: Enseñanza secundaria, Teoría de Números, Matemáticas Discretas, propuesta de contenidos

Abstract

In this dissertation, a proposal is made to include some concepts related to Number Thoery and Discrete Mathematics, particularly the congruences, the Graph Theory and the figurated numbers in the secondary eduaction. For this proposal, a theorical frameworks is offered, which includes the benefits and characteristics of its inclusion, in addition to different chapters that analyze the different contents as well as they contain activities and visual resources for their implementation.

Keywords: Secondary education, Number Theory, Discrete Mathematics, proposal of concepts.

Begin at the beginning and go on till you come to the end: then stop.

Lewis Carroll,
Alice in Wonderland

Índice

Salvo las imágenes ya referenciadas en la bibliografía, el resto de imágenes y figuras han sido realizadas por el autor de este trabajo con la aplicación GeoGebra: https://www.geogebra.org/

Introducción

En la medida que las matemáticas han ido avanzando y desarrollando nuevos campos del saber, podría sorprender que estos nuevos contenidos hayan quedado excluidos de las matemáticas escolares, donde únicamente son vistos como anécdotas o contenidos de carácter divulgativo.

En este trabajo, se proponen una serie de contenidos relativos a la Teoría de Números y la Matemática Discreta que no forman parte del currículo oficial, desde una perspectiva de estudio sobre qué conceptos, a qué nivel y de qué manera se pueden trabajar en un nivel de secundaria, así como los posibles beneficios de esta docencia. Además, se complementa con un gran número de posibles actividades y recursos visuales que ayuden al docente a trabajar en el aula.

En un primer capítulo, se realiza un estudio de marco teórico acerca de la integración de estas áreas en el currículo de secundaria. Para ello, se hace un análisis de las competencias clave, en especial de la competencia matemática; y su desarrollo a través de la asignatura matemática. Con la idea de primar las competencias sobre los contenidos, se analizan la teoría de números y la matemática discreta así como las ventajas (tanto en competencias como en otros aspectos) que puede suponer su integración en el currículo escolar. Se presta especial atención también a dos aspectos que se quiere conseguir con las propuestas que se realizan en este trabajo, que son una *revitalización* de la matemática escolar, enfocada en una búsqueda de la motivación del alumno mediante contextos cercanos y de su interés así como del desarrollo del juego y la diversión, el desafío, en las clases de matemáticas; y la importancia del uso de la visualización como herramienta para superar lo concreto y poder trabajar conceptos como la abstracción, la generalización o el razonamiento inductivo, claves en el desarrollo del pensamiento matemático.

En el cuerpo del trabajo, se desarrollan diferentes capítulos tratando cada uno un contenido concreto relativo a la teoría de números o las matemáticas discretas. La estructura de estos capítulos es similar en todos ellos, pues consta de:

- Introducción: En ella, se realiza un breve análisis teórico de las características relativas a la inclusión de este contenido en un aula de secundaria. A su vez, se estudia si algún aspecto de estos contenidos existe ya en el currículo oficial, a qué nivel y en que forma. En todos ellos, se concluye con la inclusión de una tabla, siguiendo el modelo de la Junta de Castilla y León en el BOCyL (2015), en el que se especifica la propuesta de contenidos que se realiza en este capítulo, así como criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables. En este apartado también se define el nivel en el que se implementaría estos contenidos. El nivel ha sido escogido atendiendo al desarrollo de los adolescentes y también por relación con otros contenidos de un nivel superior. No obstante, no se debe entender este nivel como un concepto cerrado: en todas las ocasiones este nivel podría ser readaptado y también se requeriría de otro tipo de formación y trabajo de conocimientos previos necesarios a niveles inferiores, por lo que la introducción de contenidos que se propone en este capítulo no es específica al nivel que se trata sino que va más enfocada a un cambio estructural de la docencia de las matemáticas en todos los niveles educativos.

- Desarrollo del contenido: Se muestran los contenidos que se plantean introducir. Aunque se sigue un desarrollo formal de ellos, a modo matemático, no se trata de un libro de texto ni de unos apuntes, sino más bien un índice de contenidos, a los que se acompaña de notas y observaciones sobre su didáctica, posibles metodologías o recursos en el aula. Este desarrollo está acompañado en todos los capítulos por recursos visuales, creados en su mayoría por el autor, que pueden ayudar a los alumnos a comprender de mejor manera el temario desarrollado; así como por una serie de actividades, todos ellos de alto nivel cognitivo por la escala Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998), que se presentan como ejercicios para desarrollar por los alumnos con la finalidad de favorecer el desarrollo de su competencia matemática.

En el primer capítulo, se tratará la divisibilidad enfocándose en poder dar una demostración a los alumnos a los criterios de divisibilidad que ellos conocen pero de forma meramente memorística, tratando por tanto de completar su formación en este aspecto. Para ello, se introducirá la Teoría de Congruencias (trabajando desde la perspectiva del resto y no necesariamente desarrollando conceptos como el de anillo cíclico o similares), donde los alumnos estudiarán su aritmética básica y su aplicación en diferentes contextos, en especial la demostración de los criterios de divisibilidad conocidos o la creación de nuevos. Por último, se ofrecerá una demostración muy basada en la visualización del (pequeño) Teorema de Fermat.

El siguiente, dedicado a la matemática discreta, se propone una amplia inclusión de la Teoría de Grafos en la enseñanza secundaria, pues el nivel requerido para entender la mayoría de los aspectos básicos de esta área no es realmente elevado. Así, se introducen los conceptos principales de los grafos (vértices, aristas, grado, subgrafos, completos, trayectorias, ciclos, etc.) y sus identidades, enfocando también en su uso para resolver problemas de la vida cotidiana. Se analizarán también las cualidades de los grafos eulerianos, hamiltonianos, planos y árboles; y se concluirá con dos ejemplos sencillos de modelizaciones mediante la teoría de grafos en un contexto que el alumno puede comprobar de manera inmediata: la organización de un torneo deportivo y los juegos malabares.

En el tercero y último, se abordan los números figurados y otras formas de representación, enfocando en la introducción del álgebra y el razonamiento inductivo a partir de la visualización. Para ello, se trabajan diferentes representaciones numéricas, centrándose principalmente en los números poligonales (y dentro de estos en los triangulares); para lograr desarrollar varias identidades algebraicas muy conocidas, en especial las relativas a series de números naturales.

Finalmente, se dedica un último capítulo a las conclusiones del trabajo, donde se analiza brevemente el trabajo realizado, su posible implementación en la escuela secundaria y posibles líneas de investigación futura. En esta sección se añade también una opinión acerca de la formación en matemáticas y el pensamiento matemático actualmente en las escuelas.

Marco Teórico

Competencia Matemática

El ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015), en la *orden ECD/65/2015*, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato, describe en la competencia matemática:

> La competencia matemática y las competencias básicas en ciencia y tecnología inducen y fortalecen algunos aspectos esenciales de la formación de las personas que resultan fundamentales para la vida.
>
> En una sociedad donde el impacto de las matemáticas, las ciencias y las tecnologías es determinante, la consecución y sostenibilidad del bienestar social exige conductas y toma de decisiones personales estrechamente vinculadas a la capacidad crítica y visión razonada y razonable de las personas. (…)
>
> a) La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto. (…) El uso de herramientas matemáticas implica una serie de destrezas que requieren la aplicación de los principios y procesos matemáticos en distintos contextos, ya sean personales, sociales, profesionales o científicos, así como para emitir juicios fundados y seguir cadenas argumentales (…). Forma parte de esta destreza la creación de descripciones y explicaciones matemáticas que llevan implícitas la interpretación de resultados matemáticos y la reflexión sobre su adecuación al contexto, al igual que la determinación de si las soluciones son adecuadas y tienen sentido en la situación en que se presentan.
>
> Se trata, por tanto, de reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos en la resolución de los problemas que puedan surgir en una situación determinada a lo largo de la vida. La activación de la competencia matemática supone que el aprendiz es capaz de establecer una relación profunda entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, implicados en la resolución de una tarea matemática determinada.
>
> La competencia matemática incluye una serie de actitudes y valores que se basan en el rigor, el respeto a los datos y la veracidad. (p.6993)

Por supuesto, sería bastante incompleto (por no indicar completamente erróneo) que la asignatura de matemáticas hace únicamente referencia a la competencia matemática. Es más, esta área de conocimiento tiene, junto al conocimiento lingüístico, una importancia troncal dentro del currículo de la LOMCE (Gobierno de España, 2013); que las considera asignaturas de necesaria mejora dado su saber transversal y, en parte, por lo resultados insuficientes obtenidos en diferentes informes PISA en cuanto a estas competencias. Esta importancia no es relativa, es fácil de demostrar que en la asignatura de matemáticas se pueden trabajar, con mayor o menor medida; el resto de las competencias clave, destacando principalmente (únicamente considerando el contenido) la competencia lingüística; de aprender a aprender; y la digital.

No obstante, tampoco se puede ignorar la gran importancia que tienen como área central las diferentes asignaturas de matemáticas en el desarrollo de la competencia matemática: no se puede esperar que los alumnos (en especial en secundaria) puedan desarrollar correctamente esta competencia sin una adecuada y completa docencia en las asignaturas de matemáticas.

A este último aspecto, conviene centrarse entonces en las definiciones dadas de competencia. Estas definiciones son un tanto ambiguas, pues tratan de englobar la importancia de las matemáticas (en todo su sentido) en unas breves frases, de manera que no habrá dos autores que establezcan la misma definición de *matemáticamente competente*. A este aspecto, se puede destacar la definición que se creó conjuntamente durante este curso en la asignatura de Didáctica de la Matemática:

> *"Capacidad para razonar, analizar, comprender y enfrentarse a problemas que te plantea la realidad o entorno; ser capaz de, mediante un lenguaje lógico, adquirir una actitud crítica que te permita obtener conclusiones acertadas. Asimismo, reconocer los recursos de que dispones para aplicarlos eficazmente en la resolución de problemas. Finalmente, adquirir el nivel de abstracción apropiado para relacionar la realidad con las matemáticas."*

En general, si se atiende a las principales definiciones dadas de esta competencia (Parlamento Europeo[1], DeSeCo, PISA[2] o proyecto KOM (Niss, M. A., 2003); entre otros), se observa que todas ellas refieren en gran medida a capacidades relacionadas con la abstracción, generalización, lógica, actitud crítica y modelización del mundo real para la resolución de problemas de diversos contextos.

El ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015), no obstante, va más allá y engloba la competencia matemática alrededor de cuatro áreas de las matemáticas: "Así pues, para el adecuado desarrollo de la competencia matemática resulta necesario abordar cuatro áreas relativas a los números, el álgebra, la geometría y la estadística, interrelacionadas de formas diversas." (p. 6993). A su vez, siguiendo estas directrices, la Junta de Castilla y León (2015) dispone el currículo oficial divido en cinco bloques: "Números y Álgebra",

---

[1] Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006 , sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente OJ L 394, 30.12.2006, p. 10–18. Recuperado de https://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/?uri=celex:32006H0962

[2] Education at a Glance, OECD, Paris, 2002, Glossary. Recuperado de https://stats.oecd.org/glossary/detail.asp?ID=5388

“Geometría”, “Funciones”, “Estadística y probabilidad” y un bloque transversal: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, que en parte trabaja todo ese carácter de abstracción y razonamiento que se quiere destacar en la competencia matemática.

Esta distribución del currículo es el punto de partida para la pregunta que se quiere resolver en este trabajo: ¿es posible implementar otras áreas de las matemáticas de forma que se trabajen de igual o mejor manera tanto la competencia matemática como otras competencias?.

Es en este sentido en el que se va a trabajar el siguiente trabajo, donde se van a introducir la teoría de números y la matemática discreta como nuevas posibilidades de contenidos curriculares, debido a sus beneficios que pueden reportar a la hora de trabajar y desarrollar las competencias con alumnos de secundaria. A este aspecto también es comprobable la cantidad de artículos que en los últimos años en se han ido publicando en diversas revistas especializadas en matemáticas y educación acerca de posibilidades de introducción de partes de estas áreas en la escuela, en especial en secundaria, por lo que se considera que se trata de un tema de alto interés actualmente.

Teoría de Números

Si bien es cierto que la teoría de números forma parte del currículo, esta área ha quedado prácticamente relegada a una simple aritmética memorística que se basa más en algoritmos de cálculo que en un desarrollo del razonamiento matemático completo. A este sentido, Sierra, M., González, T., García, A. y González, M., (1989) ya anunciaban que la teoría de números estaba siendo un área cada vez más ignorada en los currículos, quizás al no encontrar un punto medio entre su presentación como simple recetario y una enseñanza más profunda que requeriría de un nivel superior universitario. A pesar de los cambios de leyes educativos ocurridos desde esta publicación, este comportamiento en tanto a la teoría de números en las escuelas no ha variado, manteniendo una postura de estudio un tanto simplista de esta rama de las matemáticas.

Pastore, J. L. (2017) destaca la importancia que tiene la teoría de números en el desarrollo del pensamiento matemático puro, pues el estudiante es invitado en esta área a disfrutar y enfrentarse a razonamientos que le permiten desarrollar las competencias de manera muy nutritiva. Sigue el planteamiento de Zazkis y Campbell (2011), que distinguen dos formas del tratamiento de la teoría de números en la educación: dando mayor importancia al contenido en sí, centrado más en obtener procesos y reglas aritméticas que simplifiquen los cálculos; o una mayor importancia al contexto y al proceso, más enlazada con el desarrollo del razonamiento matemático. Tal como afirma Rico, L. (2014), las propiedades de los números y secuencias numéricas, objetos de estudio en este campo, tiene una estrecha relación con conjeturar, probar y generalizar, aspectos troncales en la competencia matemática que queremos desarrollar.

Merece la pena citar antes de concluir a Godfrey Harold Hardy, que en el prólogo de Nelsen, R. B. (2018) afirma:

> La teoría de números elemental debería ser una de las mejores asignaturas para la instrucción matemática temprana. Requiere de escaso conocimiento previo; su objeto de estudio es tangible y familiar; los procesos de razonamiento que emplea son simples, generales y no muy numerosos; y es única entre las ciencias matemáticas en su apelación a la curiosidad humana natural. Un mes de instrucción inteligente en teoría de números es el doble de instructiva, el doble de útil y al menos diez veces más entretenida que la misma cantidad de "cálculo para ingenieros". (p. ix)

Matemática Discreta

Por otro lado, la matemática discreta es prácticamente ignorada en toda la secundaria, conformando, con algo de suerte, páginas de curiosidades en finales de capítulo de libros de texto o alguna que otra charla de divulgación. Y este hecho es realmente sorprendente, pues es una realidad que esta área es cada vez más importante a niveles superiores (sobre todo por su fuerte relación con la informática y computación, que a su vez impregnan el resto de las áreas de conocimiento) al vivir en una sociedad cada vez más tecnológica, como señala Rivera-Marrero, O. (2007). Además, esta misma autora destaca la idea de que los contenidos de matemática discreta permiten ofrecer un enfoque diferente que ayude a revitalizar la matemática en las escuelas, pues ofrece una imagen de las matemáticas como un área dinámica e interesante, relacionándose con contextos del mundo real; idea que se tratará con más profundidad más adelante.

Antequera, A.T. (2012) relaciona la idea de ser competente que propone PISA con una adaptación curricular en la que interviene la Matemática Discreta; que resume en cinco componentes: Resolución de Problemas, Modelización Matemática, Competencia Matemática, Matemática Realista y Matemática Discreta. Todas estas componentes se presentan como fuertemente relacionadas en las que la matemática discreta aporta numerosos beneficios para la adquisición de las competencias básicas necesarias para la vida adulta. En este sentido también, las matemáticas discretas juegan un papel clave en el desarrollo del pensamiento computacional, que engloba cuatro componentes destacables de esta competencia como son el pensamiento abstracto, pensamiento lógico, pensamiento de modelización y pensamiento constructivo (Flores, A., 2011).

En relación a la idoneidad y ventajas de trabajar la matemática discreta en niveles de secundaria, Rosenstein, J., Franzblau, D. y Roberts, F. (1997) enfocan también la idea de revitalizar las matemáticas escolares, en tanto que ofrecen un nuevo comienzo a los estudiantes, que puede ayudar a aquellos que normalmente no han tenido éxito con las matemáticas a empezar de nuevo; y aquellos que han podido perder el interés en ellas, encontrar nuevos retos y desafíos. Por otro lado, las matemáticas discretas ofrecen una oportunidad de centrarse en *cómo* las matemáticas se hacen, añadiendo nuevos recursos a los profesores para trabajar las competencias que ya hemos mencionado. De esta manera los autores distinguen cuatro características principales de la matemática discreta que disipan toda duda y la convierten en un área que debería impartirse en centros escolares:

- Aplicabilidad, en tanto que poseen numerosas aplicaciones en distintos modelos de múltiples áreas, tanto científicas como sociales y humanas, destacando también contextos cercanos y de la vida cotidiana de los alumnos.
- Accesibilidad, pues para entender la mayoría de estas aplicaciones, no es necesario tener conocimientos muy superiores a la aritmética y álgebra elemental, lo que permite que sea una rama que se puede trabajar en prácticamente todos los niveles, consiguiendo incluso un contenido transversal y que relaciona el resto de las áreas.
- Atracción: A pesar de ser contenidos fácilmente establecidos, muchos problemas de la matemática discreta ofrecen verdaderos desafíos, tanto a nivel escolar como a niveles superiores. Esto puede servir para interesar y motivar a los alumnos, dejándoles a ellos libertad para explorar y descubrir, con actividades de alto nivel cognitivo.
- Adecuación, ya que siguiendo la idea planteada al inicio, tanto los alumnos acostumbrados al éxito en matemáticas (a los que se les ofrece nuevos desafíos, intereses y materiales que les serán útiles en el futuro si contemplan opciones científico-técnicas) como los acostumbrados a fallar (a los que se les ofrece un nuevo enfoque fresco y dinámico) se ven beneficiados por estos contenidos. Además, la matemática discreta se interrelaciona con el resto de áreas matemáticas e informáticas del currículo escolar, por lo que otorga oportunidades de interrelacionar estas áreas y en definitiva, que los alumnos obtengan una visión más completa del saber matemático.

Otras observaciones

Queda explícito entonces que la introducción de estos contenidos puede ser ventajoso tanto para el profesor como para el alumno, y además la cantidad de referencias existentes en revistas de investigación en educación y libros similares dejan entrever que cambios en el currículo son una realidad necesaria y quizás no tan lejana.

En este trabajo, se desarrollan por tanto una propuesta de posibles contenidos que se podrían desarrollar en una enseñanza secundaria, enmarcados principalmente en 3º y 4º de la ESO, aunque estos niveles han de entenderse como un nivel hipotetizado, en tanto que para incluir estos contenidos a cualquier nivel se requiere en general de cambios en todo el currículo para que los alumnos a los que se dirige puedan haber trabajado antes con conceptos previos necesarios (siempre respetando el desarrollo psicológico y educativo del estudiante). En cada uno de los capítulos, por su parte, se introducirán también otros aspectos teóricos más específicos del contenido a tratar al principio de la sección.

Además de estos hechos, sí se quiere incidir en dos aspectos que están de forma transversal en todos los capítulos y a los que se les ha intentado dar un carácter oficial y de máxima importancia: la "revitalización" de la matemática escolar, un interés por mostrar una matemática más accesible, dinámica y de contextos que sean interesantes y motivadores a los alumnos; y el uso de la visualización como herramienta fundamental en el desarrollo de la abstracción y la competencia matemática.

Revitalización de la Matemática Escolar

El término de revitalización se desarrolla en el contexto utilizado por Rosenstein, J., Franzblau, D. y Roberts, F. (1997), haciendo referencia a que, en la medida que se van a introducir nuevos contenidos de aprendizaje en la escuela, también se va a buscar un enfoque motivador y de interés para el alumno, huyendo sobre todo de la simple memorización para buscar una reflexión profunda sobre los conceptos matemáticos y su relación con la realidad dentro y fuera de la escuela y el mundo cercano de los adolescentes.

En este sentido, de manera un poco literaria, se puede comenzar citando a Paenza, A. (2012), que dice:

> Es curioso, pero es tal la desconexión entre la sociedad y la matemática que la mayoría de la gente piensa (con razón, porque ésos son los elementos con los que cuenta) que la matemática "está toda inventada" o que es algo "cuadrado" que uno va, estudia, y no aplica, salvo en contadísimas ocasiones (suma, resta, división y multiplicación incluidas). (…) "Los chicos que se gradúan hoy del colegio secundario, aun aquellos que tienen una sólida formación en álgebra, geometría y trigonometría, están casi 400 (cuatrocientos) años atrasados con respecto a lo que es la matemática de punta hoy. Es decir: aprenden lo que se sabía ya hace cuatrocientos años. Por eso, la mayoría de las cosas resultan aburridas e inexplicables. Peor aún: de difícil aplicación". Sin embargo, estoy convencido de que uno puede aspirar a más. (p. 21)

Es decir, se va a buscar escapar de una visión "tradicional" de las matemáticas, por una más dinámica, que permita al alumno relacionar la realidad directa para que de esa manera sea él mismo el que se formule las preguntas que le lleven aprender (o al menos, mostrar interés por), a relacionar, a generalizar, hipotetizar y aplicar. Esta motivación se puede lograr de muchas formas, pero si se pueden mostrar relaciones con temas de actualidad y de interés para los alumnos , esta será una de las más importantes, como afirma Ortega, T. (2005).

Para Corbalán, F. (2012), la mayoría de los aspectos matemáticos que se tratan tienen una importancia y aplicación limitada al contexto escolar, lo que genera que no se consiga relacionar correctamente las matemáticas con la realidad; lo que deriva en una suposición errónea de que esta relación no existe. En esta línea, Albertí, M. (2018) insiste en la necesidad de la incorporación de contextos de la vida cotidiana, pues es un elemento troncal para desarrollar las competencias básicas, en tanto que mediante la realización de actividades académicas relacionadas con otros contextos cercanos a la vida del estudiante, se contribuirá a su maduración como persona en tanto que se le está preparando para afrontar (con los recursos generados por las matemáticas) problemas que puedan surgir en su futuro.

La vida cotidiana no es el único aspecto que tratar en esta revitalización, sino que otros muchos autores abogan por la búsqueda del juego, del interés y la diversión que suscitan las matemáticas por sí mismas, más allá de su aplicación inmediata. Saénz, E. (2019) aboga que el proceso de aprendizaje de matemáticas en la escuela no debe estar marcado por la finalidad o la utilidad de ese conocimiento, pues la importancia reside en el modelado del estudiante, su adquisición de las competencias más allá de los contenidos. En este sentido se desarrolla que las matemáticas se pueden platear como desafíos que interesen y diviertan a los estudiantes, y que favorezcan el desarrollo de su pensamiento y razonamiento matemático.

Siguiendo este planteamiento, sorprende que se puedan encontrar actividades en libros de divulgación que generan mayor interés y requieren de un mayor esfuerzo cognitivo y desarrollo matemático que ejercicios usuales de libros de texto. Es por eso que en este trabajo, como se tratará más adelante, se plantean también ejercicios que busquen mucho más el razonamiento y reflexión del estudiante que un resultado concreto. También es destacable acerca de estas últimas ideas la importancia que se da al placer en el informe de Villani, C., Torossian, C., y Dias, T. (2018) donde se pide a las instituciones promover una matemática más lúdica y alternativa.

La visualización

La visualización (entendida también como modos de representación) es realmente una componente importante de este trabajo, ya que en la medida de lo posible se va a tratar de ofrecer a los alumnos recursos visuales que ayuden a una comprensión más profunda de los planteamientos matemáticos realizados. Así pues habrá ocasiones en las que se valorará principalmente que, con independencia de llegar a una solución exacta, el alumno pueda visualizar y entrever los procedimientos a realizar que concluyen en la solución deseada.

La importancia de la visualización se puede destacar en la Teoría del Descubrimiento de Bruner, J., en la cual los alumnos tienen que alcanzar el conocimiento de manera activa y constructiva, concluyendo en la resolución de problemas y la reflexión sobre la situación enfrentada. Para ello, la representación mental que se propone para por diferentes acontecimientos:

- Inactivo: Por medio de la acción, que en matemáticas se traduciría como ejemplos concretos.
- Icónico: Un dibujo o una imagen, es en este estado donde se dará mayor importancia a la visualización.
- Simbólico: El estado más abstracto, la representación mediante símbolos y formas.

Es común en muchos procedimientos de la matemática tratar de pasar de un conocimiento concreto, inactivo; a uno simbólico abstracto. Este camino es mucho más difícil si no se generan en los alumnos estructuras visuales que ayuden a comprender este conocimiento. Por poner un ejemplo, el Teorema de Pitágoras requiere que todos los alumnos sean capaces de visualizar los cuadrados de los lados de cualquier tipo de triángulo rectángulo (y en cualquier disposición) para poder afirmar su validez.

Albertí, M. (2018) cita a Freudenthal para mostrar que el aprendizaje es discontinuo y que los niños aprenden de forma intuitiva, informal y manipulando objetos, por lo que cobra especial relevancia la riqueza de los contextos en el aprendizaje. Cuantos más recursos visuales se pueda ofrecer a los estudiantes, su aprendizaje será también más completo. Este último aspecto se relaciona con la variedad de representación de Zoltan Dienes, que aconseja mostrar los contenidos desde varios puntos de vista y así poder percibir todas sus características estructurales.

Ortega, T. (2005) destaca que los procesos de aprendizaje de los alumnos requieren de la comprensión del lenguaje matemático, ligado a los sistemas de representación. Esta comprensión es más sencilla si hay abundancia de estas representaciones, además de destacar que: “los procesos constructivos son muchísimo más interesantes que las demostraciones de los teoremas.” (p.11) . Esta idea se intentará mantener en la medida que se buscará que si no hay una posibilidad de una demostración formal y completa al nivel del alumno, al menos pueda visualizar las estructuras que permiten la veracidad de los teoremas o identidades que se estén trabajando.

Las visualizaciones son también positivas en tanto que ayudan a entrelazar las diferentes áreas de las matemáticas (incluso de otras ciencias) en la búsqueda de un conocimiento completo y transversal. López, F. (2006) propone ser consciente de las relaciones entre la geometría y la teoría de números de forma que se trabajen conjuntamente dos acciones fundamentales de la matemática como son calcular y representar. Siguen este razonamiento Cortés, J.C., Hitt, F. y Saboya, M. (2014); que destacan la importancia de la visualización en el paso de la aritmética al álgebra, donde juega un papel mediador al poder mostrar las estructuras que relacionan ambos campos. Estos procesos de visualización matemática ayudan al alumno a construir una estructura cognitiva que le ayuden a entender las relaciones algebraicas a través de las aritméticas.

Por último, Nelsen, R.B. (2018) alude a una idea simple pero bastante directa: las diferentes representaciones de los números nos ofrecen gran variedad de argumentos visuales que pueden ayudar a comprender mejor los conceptos asociados. Por lo tanto, los libros de matemáticas (en especial educativos) deben de tener una gran cantidad de imágenes que hagan más fácil su comprensión. Esta idea se intenta mantener a lo largo del trabajo, donde se han creado numerosos recursos visuales para impartir el contenido deseado.

Actividades

Para finalizar con este capítulo, es necesario hacer un breve comentario acerca de las actividades que se plantean en cada uno de los capítulos posteriores. El lector podrá comprobar que la mayoría de los ejercicios se podrían catalogar como de alto nivel y esto no es una casualidad. Para una visión completa de los contenidos tratados, los alumnos deben trabajar también ejercicios más sencillos y básicos, de aplicación directa de la mayoría de los conceptos. No obstante, no se ha querido ocupar espacio de este trabajo con ejemplos de tales ejercicios, que prácticamente solo requieren del dominio de las definiciones y aritmética o álgebra básica; para plantear los ejercicios que acompañan a este trabajo, que se pueden entender como aquellas actividades que se espera que los alumnos puedan resolver al final de una correcta impartición de los contenidos.

Estos mismos tampoco se han planteado como actividades de evaluación, pues se entiende que una evaluación puede conllevar contextos de estrés, nervios y fallos que no reflejan la realidad total del alumno. Más bien, lo ideal sería su realización mediante proyectos, actividades en grupo o de toda la clase, siempre con una correcta guía del profesor.

Se ha buscado en concreto que sean actividades que puedan ser englobadas en los más altos niveles de la taxonomía de Bloom, de forma que requieran de un profundo análisis del problema y sus conceptos, una evaluación del problema y los posibles procesos para resolverlo; así como la creación de nuevos conceptos e ideas a partir de la resolución y reflexión de estas actividades. Así mismo, se busca también que las actividades puedan ser catalogadas como de alto nivel cognitivo en la escala de Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998), en categorías como *procedimientos con conexiones* y, en especial, *creación de matemáticas,* donde los alumnos no usen un pensamiento algorítmico y predecible, sino que sean capaces de reflexionar los conceptos matemáticos y sus relaciones; y relacionar las múltiples formas de representación. Siguiendo estas ideas, también se ha considerado oportuno que parte de los contenidos (siguiendo ejemplos similares vistos anteriormente o con ciertas pautas administradas por el profesor) sean propiamente desarrollados por los alumnos en estas actividades, sin necesidad de que el docente tenga que desarrollarlos en algún tipo de metodología.

Por último, y atendiendo a la diversidad, en los ejercicios que ha sido posible se han implementado diferentes cuestiones en orden de dificultad y demanda cognitiva creciente, de forma que los alumnos puedan trabajar estas actividades en grupo siguiendo algunas de las líneas generales del método MEMAD (Metodología de Educación Matemática de Atención a la Diversidad).

Divisibilidad

Introducción

Al enfrentar situaciones problemáticas en la vida cotidiana, se utiliza de manera más o menos explícita conceptos de la Teoría de la Divisibilidad. Se pueden extraer problemas relacionados en cualquier contexto tan dispares como la música (equivalencia de figuras, ritmos); el cine (velocidades de filmación, tamaño de pantallas) o fechas y calendarios (determinar días de la semana en función de la fecha en formato numérico, etc.) No obstante, cuando mayor importancia recobra cada día esta teoría por campos como la computación, su enseñanza en secundaria ha quedado relegada.

De hecho, si nos remitimos al BOCyL (2015), estas son las referencias que podemos encontrar al respecto, iguales en 1º y 2º de la ESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
PRIMER Y SEGUNDO CURSO		
Bloque 2. Números y Álgebra		
Números naturales. Sistema de numeración decimal. Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.	2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números. Aplicar estos conceptos en situaciones de la vida real.	2.1. Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales. 2.2. Aplica los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11 para descomponer en factores primos números naturales y los emplea en ejercicios, actividades y problemas contextualizados.

Los alumnos de secundaria saben dividir y conocen (o más bien recuerdan) las principales reglas de divisibilidad entre los números primos más pequeños. No obstante, esto no quita que la divisibilidad en la formación secundaria sea un mero ejercicio algorítmico, sin apenas exigencias de nivel cognitivo o profundización de base. A pesar de su nivel, se puede trabajar la divisibilidad de otra manera. En este aspecto, se cree considerable que a partir de un cierto nivel, se puede comenzar por introducir aspectos del álgebra modular, no con necesidad de tomar todas las propiedades de anillos que subyacen, pero sí hablando de igualdad de restos.

Una posible propuesta de contenidos a ampliar que se propone, establecida en 4º ESO o un curso superior, con una estructura similar al documento oficial (Junta de Castilla y León, BOCyL, 2013), sería:

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
CUARTO CURSO		
Bloque 2. Números y Álgebra		
Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad. Congruencias. Aritmética modular. Pequeño teorema de Fermat.	1. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números. Aplicar estos conceptos en situaciones de la vida real. 2. Conocer y utilizar la definición de números congruentes y módulo. Aplicar estos conceptos a situaciones de la vida real. 3. Reconocer principales resultados de la Teoría de Congruencias como la suma y producto de números congruentes, los criterios de divisibilidad y el Pequeño Teorema de Fermat.	1.1. Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales. 1.2. Aplica los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 y 11 para descomponer en factores primos números naturales y los emplea en ejercicios, actividades y problemas contextualizados. 2.1. Entiende la definición de congruencia desde diferentes perspectivas: mismo resto, divisibilidad de la diferencia. 2.2. Establece las diferencias existentes entre diferentes módulos: particularidades de los números primos, posibles restos, etc. 3.1. Opera correctamente en congruencias: suma, resta y producto. Reconoce y crea tablas de sumar y multiplicar en aritmética modular. 3.2. Reconoce los criterios de divisibilidad y su demostración a partir de congruencias. Aplica resultados parecidos para verificar o mejorar los conocidos y encontrar nuevos criterios, como el 7 o el 13. 3.3. Conoce y sabe demostrar y aplicar el Teorema de Fermat en diferentes contextos.

Desarrollo de los contenidos

Criterios de divisibilidad

Dados dos números enteros a y b; se dice que a divide a b si existe otro número entero c de forma que $a \cdot c = b$. De esta forma, b es un múltiplo de a (y de c) y la división que se realiza al dividir b entre a es exacta o no tiene resto. Esta relación se representa como $a|b$.

El procedimiento inmediato para comprobar si a divide a b es efectuar la división de estos números directamente. Pero este proceso puede ser largo y tedioso (sobre todo en números grandes); y en muchos casos se estaría obteniendo más información de la necesaria. Es por eso por lo que cobran importancia los criterios de divisibilidad, que permiten saber con relativa facilidad si un número es o no divisible por otro. En general, los alumnos ya conocen las siguientes:

- Divisibilidad por 2:

Todos los múltiplos de 2 son pares: $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ y es precisamente la propia definición de par que implica que es múltiplo de 2. Por lo tanto, basta con atender a la última cifra del número para comprobar su paridad y determinar si es divisible o no por 2.

- Divisibilidad por 3:

Un número entero es divisible por 3 si la suma de sus cifras es divisible por 3. La razón de esta regla será explicada con posterioridad, pero cabe destacar la componente algorítmica que tiene esta regla (y similares). Al no ser visual, requiere de unos cálculos para ir comprobando pero ¿qué ocurre sí la suma de las cifras vuelve a ser un número del que desconocemos si es múltiplo de 3? En este planteamiento, se debe motivar al alumno para ser capaz de reconocer por sí mimos la recurrencia de volver a usar el criterio hasta obtener un resultado conocido.

Por ejemplo para comprobar sí 6457645239416985693 es divisible o no por 3, se realizaría la suma:

$$6+4+5+7+6+4+5+2+3+9+4+1+6+9+8+5+6+9+3=102$$

$$1+0+2=3$$

Y se concluye que sí que es un múltiplo.

- Divisibilidad por 4:

Un número entero es divisible por 4 si el número formado por sus dos últimas cifras lo es.

- Divisibilidad por 5:

Basta observar los múltiplos de $5: 0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots$ para hipotetizar: un número entero es múltiplo de 5 si última cifra es 0 o 5.

- Divisibilidad por 6:

Un número entero es divisible por 6 si es múltiplo de 2 y de 3.

- Divisibilidad por 8:

Un número entero es divisible por 8 si el número formado por tres últimas cifras lo es.

- Divisibilidad por 9:

Un número entero es divisible por 9 si la suma de sus cifras es divisible por 9.

- Divisibilidad por 10:

Un número entero es divisible por 10 sí acaba en 0.

- Divisibilidad por 11:

Un número entero es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma que ocupan un lugar par es un múltiplo de 11.

Se puede establecer que hay varios tipos de criterio, y un buen ejercicio con los alumnos debería ser el intento de comprensión de por qué se dan estas diferencias.

De esta forma, criterios como el 2, el 5 o el 10, así como el 4 y el 8 pero en diferente forma; son visuales. Una actividad que se debe desarrollar es el estudio de estas cualidades, a qué se debe, para concluir en el uso del sistema de base decimal que permite estos criterios. Tanto 2 como 5 o 10 dividen al 10, por lo que basta estudiar el último número; el 4 divide a 100; y el 8 divide a 100, pudiendo restringir entonces su estudio a las dos o tres últimas cifras.

En otro tipo, se encuentran casos como el 3, el 9 o el 11, donde se puede establecer un algoritmo recursivo para estudiar números suficientemente grandes, como se ha mostrado con un ejemplo en el caso del criterio de divisibilidad por 3. A primera vista, este método es muy forzado, en tanto que el alumno no comprende (ni tiene por qué) la justificación para que los múltiplos cumplan estos criterios. Se podría pensar que su razón escapa del nivel esperado si no se introduce con prioridad nuevos conceptos de la aritmética modular, pero precisamente son algunos de estos los que se presentarán más adelante.

Merece especial atención el caso del 6 que usualmente se enseña en las escuelas: Un número es divisible por 6 si lo es por 2 y por 3. Los alumnos deberían ser capaces de concluir que esta norma se debe a que, al ser $6 = 2 \cdot 3$; múltiplo de ambos números, cualquier múltiplo de 6 lo será necesariamente de 2 y de 3; siendo esta condición suficiente además. ¿Se puede hacer entonces un razonamiento similar para otros números que no sean primos? Propuestas de ejercicios son entonces establecer criterios para números no primos sencillos como el 12 $(4 \cdot 3)$ o el 15 $(3 \cdot 5)$.

1. Determina todos los divisores de 3465.

2. ¿Todos los números divisibles entre 4 lo son entre 2? ¿Y al revés? Razona la respuesta.

3. Trata de dar un criterio de divisibilidad del 15. Utilízalo en algún ejemplo con más de 4 cifras.

4. Para recordar el número de la matrícula de su coche, Nacho se ha aprendido una serie de reglas nemotécnicas. Sabe que el número es una fecha y es múltiplo de 10, de 3 y de 11. ¿Es posible saber qué número es?
Haciendo un razonamiento similar, ¿qué condiciones pondrías para adivinar tu número de cumpleaños?

5. Explica por qué crees que funciona el criterio de divisibilidad del 5 y del 4.

6. Un número es capicúa si al colocar sus cifras al revés, se escribe de igual manera. Así, 1221 o 2345432 son capicúas. Parece que hay dos tipos de capicúas según su número de cifras.

   a) Escoge tres números capicúas con un número par de cifras y comprueba que son múltiplos de 11. Demuestra que todos los números capicúas con un número par de cifras son múltiplos de 11.
   b) ¿Ocurre lo mismo si el número de cifras es impar? ¿Se puede añadir alguna condición más para asegurarlo?

¿Se puede justificar de alguna manera formal estos criterios? En niveles superiores de la ESO o en Bachillerato se debería, dando sentido y capacidad de análisis a todo lo aprendido hasta ahora por lo estudiantes. Para ello, se pretende adentrarse ya en conceptos de aritmética modular.

Congruencias

La teoría de Congruencias no está incluida en los currículos de Secundaria pues supone una abstracción demasiada elevada. Esto no impide que se puedan abordar conceptos que los preparen para una teoría más compleja en estudios superiores, a la vez que ayude a desarrollar competencias matemáticas.

El enfoque que se plantea es abordar las congruencias hablando siempre de restos de divisiones, sin necesidad de recurrir a estructuras más complejas como anillos u otras estructuras algebraicas.

"Dos números enteros a y b son congruentes respecto de m (o módulo m) si al dividirlos entre m su resto es el mismo."

Se denota $a \equiv b$ (mod m).

Por ejemplo se puede decir que $53 \equiv 23$ (mod 5), ya que tanto el resto de dividir ambos números entre 5 es el mismo, 3. De hecho, $53 \equiv 23 \equiv 3$ (mod 5), aunque más tarde se explicará la importancia que se va a dar a relacionar las congruencias con el resto.

Dado que tienen el mismo resto, podemos escribir que

$$a = a' \cdot m + r$$

$$b = b' \cdot m + r$$

Y por lo tanto $(a - b) = (a' - b') \cdot m$; lo que nos da otra definición alternativa de la congruencia:

"Dos números enteros a y b son congruentes respecto de m si su diferencia es divisible entre m."

La ventaja de esta nueva definición es que podemos utilizar los criterios de divisibilidad a la diferencia para comprobar si dos números son o no congruentes.

Por ejemplo, ¿es posible que 1234 y 1111 sean congruentes respecto de 3? Basta con calcular que:

$$1234 - 1111 = 123$$

Y al aplicar el criterio de divisibilidad del 3: $1 + 2 + 3 = 6$ → Múltiplo de 3, luego

$$1234 \equiv 1111 \text{ (mod 3)}$$

7. Sabiendo que $27408 = 3043 \cdot 9 + 21$ ¿qué resto tendrá la división de 27408 entre 9?

8. En juegos clásicos de decisión como el "pito pito gorgorito", se decide un jugador al azar mediante el canto de una canción a la vez que se va señalando a cada persona a cada segundo. Cuando la canción acaba, el jugador señalado en ese momento es el escogido. En realidad, sabemos que la canción dura exactamente 23 segundos.

5 jugadores: A, B, C, D y E deciden jugar, comenzando a señalar a A y siguiendo este orden dado.

a) ¿Quién será el jugador escogido?
b) Y si la canción dura 57 segundos, ¿a quién le tocaría? ¿Y si fueran 13675 segundos?
c) ¿Es necesario cantar toda la canción o se puede saber de antemano quien va a ganar? Explica cómo lo descubrirías.

Si se observa detenidamente, en cualquier congruencia módulo m podemos establecer que cualquier entero es congruente con un número entre los m siguientes:

$$\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

Siendo precisamente el resto de la división este número. Si se va a trabajar con este módulo, entonces se puede restringir todos los números enteros a estos m, trabajando con una cantidad finita de elementos.

9. En nuestra clase de 26 alumnos hay que organizar el orden en que los alumnos van a hacer la exposición del trabajo que han realizado. El método que ha determinado el profesor es el siguiente: los alumnos se colocarán en círculo y empezando por un alumno comenzará a contar de 23 en 23. Los alumnos que les toque serán los primeros en presentar y se sigue contando.

a) Si queremos ser los últimos en exponer, ¿en qué posición debemos colocarnos?
b) Supón ahora que los alumnos se van retirando cada vez que sin escogidos, ¿cuál es ahora la mejor posición?

Una vez se enfoca en esta cantidad (que para niveles de secundaria será simple) podemos estudiar que les ocurre a las operaciones básicas con las relaciones que se han incluido. A partir de ahora, siempre que se denote que $x \equiv x'$ (mod m), se referirá a x' como el resto de dividir x entre m (aunque en realidad, a todos los aspectos teóricos basta con que se cumpla la congruencia, se trata de simplificar la abstracción para que los alumnos puedan manipularla correctamente).

Podemos observar que:

1. Si $a \equiv a'$ y $b \equiv b'$ (mod m) entonces $a + b \equiv a' + b'$ (mod m)

Su demostración es sencilla y podemos trabajarla con alumnos del nivel al que nos referimos (segundo ciclo de la ESO o Bachillerato). Veámosla:

Tenemos que $a = x_a \cdot m + a'$ y $b = x_b \cdot m + b'$ por la definición de congruencia. Entonces su suma es $a + b = x_a \cdot m + a' + \ x_b \cdot m + b' = (x_a + x_b)m + a' + b'$; y en tanto que $(x_a + x_b)m$ es a la fuerza un múltiplo de m; se cumple la congruencia.

Nótese que dado que se está trabajando en todo momento con los restos, podría ocurrir que $a' + b'$ sea mayor que m, en cuyo caso se debe realizar la división para hallar el resto (el número congruente natural menor que m).

Una utilidad muy práctica que debe ayudar a los alumnos a trabajar en esta nueva aritmética podría ser la siguiente:

Dado que $m \equiv 0$ (mod m) tengo que para cualquier número entero a:

$$a \equiv a + m \equiv a + 2m \equiv a + 3m \equiv \cdots \equiv a - m \equiv a - 2m \equiv \cdots \pmod{m}$$

Y a la hora de hablar de congruencias, como se va a centrar en el resto (entero no negativo menor que m) este puede ser calculado restando o sumando m tantas veces como sea necesario.

Razonamientos sencillos entonces como $3 + 3 \equiv 6 \equiv 1$ (mod 5) se pueden esperar en este momento y se van a buscar por parte de los alumnos.

En tanto que solo trabajamos con un conjunto finito de elementos, podemos establecer tablas de sumas en función del módulo en el que trabajamos. Por ejemplo, en modulo 6:

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

10. Establece las tablas de sumas del 3 y del 4. Compáralas con la del 6 que ya hemos visto. ¿Qué propiedades observas? ¿Crees que se cumplen en todos los casos?

2. Si $a \equiv a'$ y $b \equiv b'$ (mod m) entonces $ab \equiv a'b'$ (mod m)

Se puede realizar una demostración similar a la suma:

Si $a = x_a \cdot m + a'$ y $b = x_b \cdot m + b'$, entonces $ab = (x_a \cdot m + a') \cdot (x_b \cdot m + b') = x_a x_b m^2 + x_a m b' + x_a m b' + a'b'$; y dado que los múltiplos tendrán congruencia cero, hemos terminado.

Como en el caso anterior (y esta vez con más complicación y más significativo) se puede establecer una tabla de multiplicación una vez definido el módulo. Siguiendo con nuestro ejemplo en mod. 6:

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

11. Establece las tablas de productos del 3 y del 4. Compáralas con la del 6 que ya hemos visto. ¿Qué propiedades observas? ¿Crees que se cumplen en todos los casos?

12. Haz también la tabla de multiplicar en módulo 5. ¿Qué diferencias hay entre la del 6 y 4 con respecto a la de 3 y 5? Intenta buscar alguna relación con el hecho de que 3 y 5 son primos.

Criterios de divisibilidad aplicando congruencias

Con estos conocimientos previos, ya se está en condiciones de poder demostrar las reglas de divisibilidad que previamente se han enunciado. Antes de comenzar, conviene recordar que si un número N es divisible por m, entonces su resto será cero y por lo tanto $N \equiv 0 \pmod{m}$.

- Criterio del 2, 5, 10, 4, 8:

Estas reglas eran visuales y se basaban en observar la/s última/s cifra/s del número a determinar. ¿Por qué ocurre esto?

En el caso del 2, 5, 10 es bastante evidente al observar los múltiplos, pero en concreto, 10 es múltiplo de todos ellos. Al tener un número N de cifras $a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ en realidad se está representado de manera decimal como

$$N = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \cdots + 10^k a_k$$

Y a la hora de hacer congruencias:

$$N \equiv a_0 \text{ (mod 2, 5 o 10)}$$

Con lo que nos basta con estudiar la última cifra en todos estos casos.

Un caso similar ocurre para los criterios de 4 (que divide a 100 y potencias superiores de 10) y 8 (a 1000 y potencias superiores). De hecho, se pueden incluso mejorar los criterios establecidos ahora que se conoce la dinámica:

Si queremos comprobar que N (como en anteriores) es múltiplo de 4, tenemos que

$$N \equiv a_0 + 10a_1 \equiv a_0 + 2a_1 \pmod{4}$$

Con lo que basta estudiar la suma de la última cifra (unidades) con el doble de la penúltima (decenas) y comprobar que este resultado es congruente a cero en módulo 4.

12. Demuestra que la regla de divisibilidad del 8 que ya hemos dado funciona (ten en cuenta que $8 \mid 1000$) ¿Puedes mejorar este criterio de alguna manera?

- Criterio del 3

En este caso, tenemos que $10 \equiv 1 \pmod{3}$ y por lo anterior sabemos que $10^k \equiv 1^k \equiv 1$. Si tomamos un número N con sus cifras en base decimal como anteriormente, se tiene que:

$$N = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \cdots + 10^k a_k \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_k \text{ (mod. 3)}$$

Y a este se debe su criterio de divisibilidad.

- Criterio del 9 y del 11

13. Enuncia y demuestra las reglas de divisibilidad del 9 y del 11. (Piensa que $10 \equiv 1 \pmod 9$) y $10 \equiv -1 \pmod{11}$)

- Otros criterios:

¿Se podrá ahora establecer nuevos criterios desconocidos? Hay varias maneras para aplicar nuevos criterios.

En concreto, se va a proponer una forma de establecer criterios a partir del Binomio de Newton. Empezaremos estableciendo un criterio por 7 y luego generalizaremos.

Es directo que $10 = 7 + 3$; y por lo tanto $10^n = (7+3)^n$. Si a esta expresión se le aplica el binomio de Newton nos queda:

$$10^n = (7+3)^n = 7^n + \binom{n}{1} 7^{n-1} \cdot 3 + \binom{n}{2} 7^{n-2} \cdot 3^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} 7 \cdot 3^{n-1} + 3^n$$

$$10^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 7^{n-i} \cdot 3^i$$

Donde todos los sumandos son múltiplos de 7 salvo el último, por lo que al dividir 10^n entre 7, un resto será 3^n; es decir, $10^n \equiv 3^n$ (mod 7). Aplicado, a nuestro número N en cifras del sistema decimal, el resto será:

$$R = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 3^i = a_0 + 3a_1 + 3^2 \cdot a_2 + \cdots + 3^k \cdot a_k$$

Que se puede representar de la forma (*método de Horner*):

$$R = a_0 + 3(a_1 + 3(a_2 + 3(a_3 + \cdots + 3(a_k))))$$

Lo cual nos ayuda a establecer un criterio a partir de un algoritmo de operaciones sobre las cifras. Por ejemplo, para calcular el resto de 1235 entre 7:

$$\begin{array}{cccc}
\begin{array}{r} 1 \\ \times \quad 3 \\ \hline 3 \end{array} &
\begin{array}{r} 2 \\ + \quad 3 \\ \hline 5 \\ \times \quad 3 \\ \hline 15 \end{array} &
\begin{array}{r} 3 \\ + \quad 15 \\ \hline 18 \\ \times \quad 3 \\ \hline 54 \end{array} &
\begin{array}{r} 5 \\ + \quad 54 \\ \hline 59 \end{array}
\end{array}$$

Y al ser $59 = 7 \cdot 8 + 3$; entonces el resto es igual a 3.

Este proceso también se puede mejorar si aplicamos congruencias en cada paso (muy sencillo si sumamos o restamos potencias de 7):

$$\begin{array}{cccc}
\begin{array}{r} 1 \\ \times \quad 3 \\ \hline 3 \end{array} &
\begin{array}{r} \mathbf{2} \\ + \quad 3 \\ \hline 5 \\ \times \quad 3 \\ \hline 15 \equiv 1 \end{array} &
\begin{array}{r} 3 \\ + \quad 1 \\ \hline 4 \\ \times \quad 3 \\ \hline 12 \equiv 5 \end{array} &
\begin{array}{r} 5 \\ + \quad 5 \\ \hline \mathbf{10} \equiv 3 \end{array}
\end{array}$$

Y el resto nos vuelve a dar 7.

Para generalizar este ejemplo, basta con hallar siempre el número x tal que el número sobre el que aplicamos el criterio de divisibilidad sea $10 - x$. Entonces el resto será:

$$R = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x^i = a_0 + x \cdot a_1 + x^2 \cdot a_2 + \cdots + x^k \cdot a_k$$

Y aplicamos el mismo algoritmo basándonos en el método de Horner:

$$R = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \cdots + x(a_k))))$$

14. Utilizando el binomio de Newton, establece un algoritmo para calcular el resto de un número entre 13. Compruébalo para un número de al menos 4 cifras diferentes.

15. Utilizando el binomio de Newton, da otra demostración al criterio de divisibilidad por 11.

Teorema de Fermat

Para finalizar con esta unidad, vamos a ver una demostración visual de uno de los principales resultados de la teoría de números: el (pequeño) Teorema de Fermat:

Teorema de Fermat

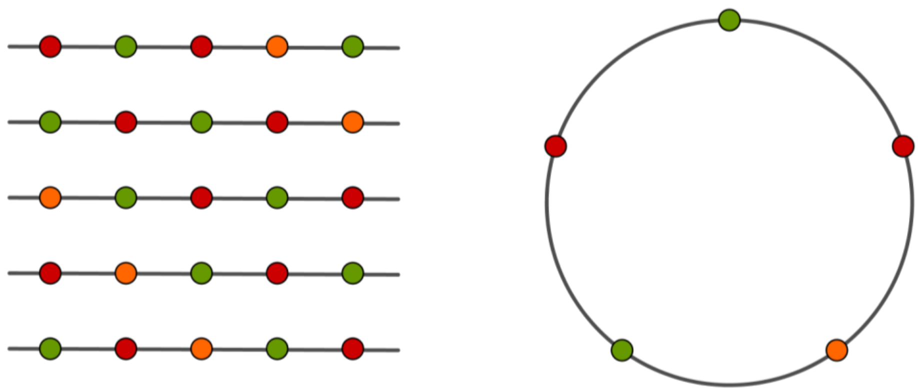
"Si p es primo y n es un número entero positivo, entonces $n^p \equiv n \pmod{p}$"

Demostración (Nelsen, R., 2018):

Vamos a ver que p divide a $n^p - n$. Supongamos que tenemos una colección de bolas de n colores diferentes y queremos hacer con ellas collares o pulseras de exactamente p bolas cada uno. Dado que para cada bola tenemos n colores entonces se pueden formar exactamente n^p tiras diferentes de p bolas cada uno.

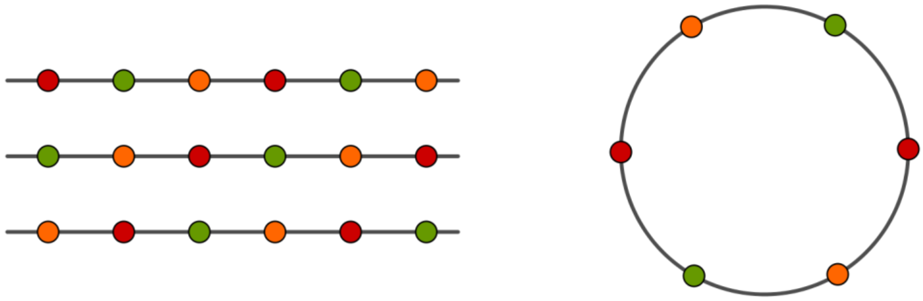
De estos, exactamente n serán monocromáticas, que se descartan para nuestro estudio: esto quiere decir que hemos construido $n^p - n$ tiras diferentes con al menos dos colores.

Ahora bien, a la hora de hacer los collares, vamos a cerrar las tiras uniendo el principio con el final, lo que quiere decir que tiras que eran diferentes por comenzar en colores diferentes van a construir el mismo collar pues tenían el mismo orden de colores. En la imagen se puede ver que, con $p = 5$ y $n = 3$, hay cinco tiras con un orden concreto que forman el mismo collar:



Podemos ver con la ayuda del dibujo que para una tira específica hay otras $p - 1$ que forman el mismo collar (siempre que p sea primo, como se explicará más adelante), pues se trata de las tiras que mantienen el mismo "orden de izquierda a derecha", pero van cambiando la primera posición. En definitiva hay $\frac{n^p - n}{p}$ collares diferentes, que tiene que ser un número entero. Esto implica que p divide a $n^p - n$ y por lo tanto $n^p \equiv n$ $(\text{mod } p)$.

¿Qué necesidad había de que p fuese primo? Habiendo hecho esta demostración podemos plantear a los alumnos esta pregunta, o que jueguen a encontrar contraejemplos para ver donde fallaría la demostración en el caso de no ser primo. El fallo ocurre al afirmar que para cada orden hay un total de p tiras diferentes que hacen el mismo collar. Si p no es primo esto no tiene por qué ser cierto: podemos hacer un patrón dentro de la tira con uno de los divisores de p, de forma que el número de tiras diferentes se reduce. Por ejemplo, con $p = 6$ y $n = 3$ podemos formar patrones de orden 3, como en el ejemplo, donde sólo hay 3 tiras que hacen el mismo collar, y no 6.



16. Aplicando el Teorema de Fermat, demuestra que el cuadrado de un número par es par; y el de un impar es impar.

17. Demuestra el siguiente enunciado: "Si p es un primo impar y n un número entero positivo, entonces $n^p \equiv n \pmod{2p}$"

18. Sea n un entero positivo. Demuestra que n y n^5 tienen la misma unidad. Por ejemplo:

$$7^5 = 16807 \qquad o \qquad 12^5 = 248832$$

(Pista: Dos números tienen la misma unidad si son congruentes en módulo 10. Puede que te sea útil el resultado anterior).

19. a) Completa la serie cambiando las x por cifras:

$$7 \longrightarrow 7$$

$$5 \longrightarrow 75$$

$$11 \longrightarrow 759$$

$$2 \longrightarrow 759x$$

$$13 \longrightarrow 759xx$$

$$3 \longrightarrow 759xxx$$

$$17 \longrightarrow 759xxxx$$

b) Completa la serie hasta donde seas capaz:

$$2 \longrightarrow 8$$

$$3 \longrightarrow 84$$

$$5 \longrightarrow 845$$

$$7 \longrightarrow \cdots$$

… … … … … … …

20. La letra del DNI no se asigna aleatoriamente, sino que es asignada mediante una congruencia. Por grupos, realizad una investigación sobre cómo funciona la letra del DNI y cómo se asigna. Comprobadlo con vuestros propios números para ver si se cumple. ¿Por qué crees que el DNI lleva una letra asignada?

21. Toma un número de tres cifras. Repite el mismo número para obtener un número de 6 cifras. Comprueba que este número es divisible entre 7, 11 y 13. ¿Cuál es el motivo?

22. Un reloj estropeado da las campanadas correctas hasta las 11, pero a la siguiente hora da la una. Si el lunes por la mañana da bien las campanadas, ¿cuándo volverá a ocurrir esto de nuevo?

Generaliza el resultado en el caso de que el reloj al llegar las 11 salte 2, 3, 4… horas.

23. Encuentra el menor número positivo que deja restos 5, 4, 3, 2 y 1 al ser dividido por 6, 5, 4, 3 y 2 respectivamente.

24. Demuestra que para todo número entero positivo, hay al menos dos números formados por una cadena de unos consecutivos que son congruentes. Deduce que entonces, todo número entero n tiene un múltiplo formado por una cadena de unos seguida de una de ceros.

25. Muchos juegos de adivinación se basan en realidad en congruencias. Por ejemplo, este es uno que ya propuso Leonardo da Pisa (Fibonacci) para calcular un número inferior a 105:

> *Él divide el número que ha pensado por 3, por 5 y por 7 y, en cada caso, tú le pides el resto de cada división. Por cada unidad del resto de la división por 3 guardas 70, por cada unidad del resto de la división por 5 guardas 21 y por cada unidad del resto de la división por 7 guardas 15. Y cuando el total sea mayor que 105, debes quitar 105 y lo que sobre después de quitar todos los 105 que se puedan es el resto elegido.*
>
> *Por ejemplo, si después de la división por 3 sobran 2, entonces tomas dos veces setenta, que son 140. De estos quitas 105 y te quedan 35. Si después de la división por 5 sobran 3, entonces toma tres veces 21, que son 63, que debes añadir a 35, serán 98. Si después de la división por 7 sobran 4, entonces toma cuatro veces 15, que son 60, que debes añadir a 98, serán 158. De estos quitas 105 y sobran 53. Este es el número elegido.*
>
> Leonardo da Pisa (Fibonacci). *Liber Abaci* (1202)

a) Escribe un algoritmo que refleje todos los pasos realizados para calcular el número que se adivina. Pruébalo con un número a tu elección.
b) ¿A qué te suena quitar múltiplos de 105? ¿Puedes volver a escribir el proceso con congruencias?
c) ¿Qué tienen de especial 70, 21 y 15 para utilizarse? (Pista: descompón 105 en factores primos).
d) ¿Por qué funciona este proceso?

Teoría de grafos

Introducción

Se podría decir que la Teoría de Grafos es la gran olvidada del currículo en matemáticas. Quizás sea por su relativa modernidad (su primer artículo data de 1736), pero no deja de ser sorprendente que uno de campos de las matemáticas de mayor aplicación y relación con la vida real no tenga cabida en una clase de secundaria. De hecho, ejercicios como identificación de grafos, de coloreado o de conexión podrían ser fácilmente integrados en la educación primaria.

Un estudio integral de esta teoría ha quedado relegado en muchas ocasiones a cursos universitarios en el grado de matemáticas, a pesar de su facilidad y ventajas de integración en secundaria; mientras que a la vez son más numerosos los estudios superiores que requieren de este contenido o de razonamientos de matemática discreta debido a su alta relación con la computación y modelización. Este aspecto ya se ha tratado con anterioridad en el marco teórico, pero si se destacará que existen numerosos aspectos por los que se considera muy positivo su introducción en los programas escolares.

Núñez, R., Núñez, J., Paluzo, E. y Salguero, E. (2016) destacan, siguiendo en parte con las ideas que ya se mencionaron de Rosestein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997), la idoneidad una implementación de la Teoría de Grafos en la enseñanza secundaria, destacando algunas propiedades como:

- Su sencillez, en tanto que los elementos utilizados (puntos y líneas) son fácilmente integrables incluso para cualquier persona con escaso conocimiento de matemáticas, lo que permite empezar de cero con independencia del contexto de los estudiantes.
- Los problemas que en general plantea esta teoría (o se pueden resolver a través de ella) son muy intuitivos, lo que permite, a pesar de la posible dificultad, los alumnos intuyan soluciones válidas y avancen sin encontrarse con un bloqueo total.
- Integra procedimientos algorítmicos fáciles de entender por los alumnos.
- Unifica la mayoría de las áreas conocidas por los alumnos de secundaria y Bachillerato, como la combinatoria, álgebra, probabilidad, geometría o aritmética, lo que permite a los alumnos una visión más transversal de las matemáticas y desarrolla de manera más fuerte sus competencias en este sentido, al tener una perspectiva general y unificada.
- Su gran aplicabilidad en otras áreas, tanto científicas como sociales y humanas; lo que supone un beneficio a doble escala: Por una parte se estará preparando con recursos y competencias a los alumnos que posiblemente necesiten en estudios superiores; mientras que a la vez puede suponer un extra de interés del alumnado

en la clase de matemáticas al poder trabajar con contextos reales y muy cercanos al alumnado.

De esta manera, se propone el siguiente desarrollo de contenidos, que se fijará en un nivel de 3º de la ESO o superior. Por conveniencia, tendría sentido su estudio en 2º de Bachillerato debido a su relación con las matrices; ya que tal como indica Menéndez (1998), se puede aplicar una ventaja de la representación matricial, debido a que para las matrices ha sido desarrollada toda una teoría superior a la de grafos, lo que permite la manipulación de matrices para la extracción de información característica del grafo. No obstante, la mayoría del resto de conceptos presentan una gran sencillez, sin un requerimiento de ningún conocimiento previo que pueden ser integrados con mucha anterioridad, por lo que en este trabajo omitiremos la representación matricial para poder establecer el nivel en cursos inferiores.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
TERCER CURSO		
Bloque 5. Matemática discreta		
Grafos, subgrafos, tipos de grafos. Grados de los vértices Trayectorias en el grafo. Grafos eulerianos y hamiltonianos. Grafos planos. Caras. Fórmula de Euler. Árboles. Árbol generador. Grafos valuados. Árbol generador mínimo. Modelos. Valoración de la teoría de grafos para plantear y resolver problemas de la vida cotidiana	1. Conocer las principales definiciones de la teoría de grafos: grafo, vértice, arista, grado, grafo simple, conexión, etc. Aplicar estas definiciones a la hora de modelizar problemas con contextos de la vida cotidiana. 2. Conocer y saber establecer los diferentes tipos de trayectorias que se pueden dar en un grafo: cerradas, cadenas, circuitos, caminos y ciclos. Visualizarlas en un grafo cualquiera. 3. Conocer las características que cumplen los grafos eulerianos y hamiltonianos, en especial el teorema de Euler para caminos eulerianos. Aplicarlos en contextos de la vida cotidiana. 4. Conocer las propiedades que cumplen los grafos planos, sus posibles representaciones y la relación entre el número de caras, vértices y aristas.	1.1. Identifica un grafo y sabe reconocer sus partes: vértices y aristas, así como su nomenclatura. 1.2. Establece los grafos de los vértices y considera resultados conocidos al respecto. 1.3. Aplica las propiedades de los grados de un grafo en actividades con un contexto de la vida cotidiana. 1.4. Razona a partir de las definiciones de grafo para establecer resultados en tipos de grafo especiales, como el completo o los conexos. 1.5. Modela planteamientos de un contexto de la vida diaria mediante grafos y aplica esta modelización para hallar soluciones. 2.1. Reconoce los distintos tipos de trayectorias que se pueden establecer en los grafos, así como las diferencias entre ambas y sus inclusiones como conjuntos. 2.2. Aplica los diferentes tipos de trayectorias para resolver problemas a partir de la modelización mediante grafos. 3.1. Conoce y aplica el Teorema de Euler para reconocer si un grafo es o no euleriano o si admite una cadena euleriana. 3.2. Asimila las principales ideas de la demostración del Teorema de Euler.

	5. Conocer las definiciones de árbol y árbol generador. Reconocer y establecer algoritmos de búsqueda de árboles generadores y minimales en grafos y grafos valuados. 6. Establece relaciones entre la teoría de grafos y su realidad más cercana mediante modelización.	3.3. Aplica las características de los grafos eulerianos para resolver problemas en un contexto de la vida cotidiana. 3.4. Conoce las características de los grafos hamiltonianos y sabe visualizar ciclos hamiltonianos en estos grafos. 3.5. Plantea estrategias propias de búsqueda de ciclos hamiltonianos. 3.6. Aplica las características de los grafos hamiltonianos para resolver problemas en un contexto de la vida cotidiana. 4.1. Identifica las propiedades topológicas de los grafos y la existencia de diferentes representaciones para un mismo grafo. 4.2. Considera representaciones planas y establece posibles grafos planos y no planos. 4.3. Reconoce las caras de un grafo plano así como la cara exterior. 4.4. Asimila la relación entre el número de caras, vértices y aristas, así como entiende y reconoce el proceso inductivo que conlleva su demostración. 4.5. Aplica las propiedades de los grafos planos en la resolución de problemas con contexto de la vida cotidiana, especialmente en el uso de mapas. 4.6. Entiende el problema de los cuatro colores y se plantea estrategias de coloración para problemas contextualizados. 5.1. Reconoce los grafos y las principales propiedades que cumplen los de tipo árbol. 5.2. Asimila el concepto de grafo valuado y entiende la relación entre el peso de una arista y su significado en un contexto real. 5.3. Conoce y aplica los algoritmos de búsqueda de árboles generadores y generadores mínimales en grafos y grafos valuados. 5.4. Aplica la existencia de árboles generadores para resolver problemas contextualizados. 6.1. Reconoce relaciones entre la vida real y la Teoría de grafos. 6.2. Establece modelos a partir de contextos de la vida real y aplica la Teoría de grafos para obtener resultados de una manera más sencilla.

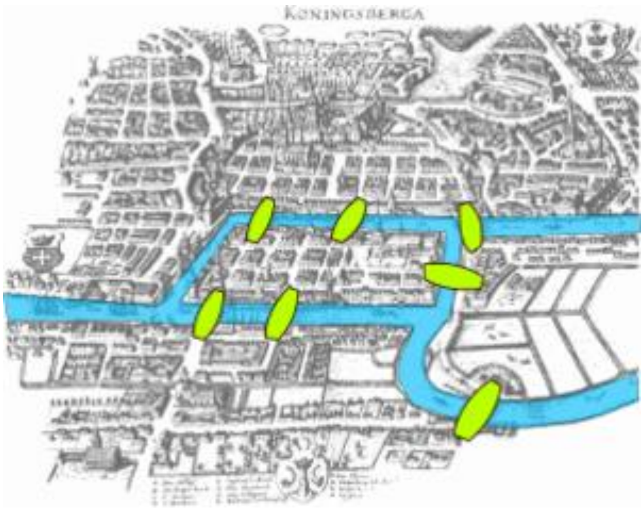
Desarrollo de los contenidos

Primer planteamiento

A pesar de que no existe un contenido curricular sobre los grafos, si se podría destacar que es un contenido que contiene un grado de interés o anécdotas que al final todos los estudiantes han podido observar algunos aspectos o impresiones de esta teoría. En concreto, es común que la mayoría de los alumnos se hayan enfrentado a ejercicios similares (si no es al original en sí mismo) a de los puentes de Könisberg, el problema resuelto por Euler en 1736; y que se considera el primer enunciado de la teoría de grafos. En este caso, se puede seguir un desarrollo histórico y comenzar el contenido planteando este mismo ejercicio a los alumnos:

1. **Problema de los puentes de Königsberg**

En la antigua ciudad de Könisberg, en Prusia Oriental (actualmente es la ciudad rusa de Kaliningrado), el río Pregel se bifurca dividiendo la ciudad en cuatro regiones distintas, que están conectadas por siete puentes; tal y como se muestra en el siguiente mapa:



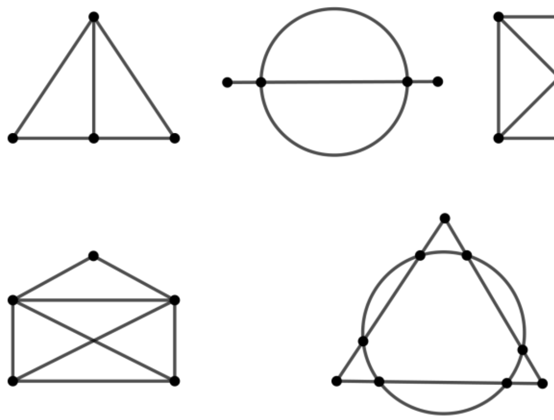
Muchos habitantes de la ciudad (Euler, entre ellos) se plantearon si se podía encontrar una ruta por la ciudad para recorrer los siete puentes, cruzando por cada uno de ellos una sola vez; de tal manera que se regresará al punto de partida.

Intenta hacerlo (te puedes ayudar con el dibujo que se ha proporcionado, pero por si acaso usa mejor un lápiz). ¿Lo has conseguido? ¿Crees que es o no posible? ¿Se te ocurre alguna explicación?

Por supuesto, no se puede esperar que un alumno ya conozca conceptos como ciclos eulerianos, pero este tipo de pasatiempos, fácilmente resolubles mediante la aplicación de grafos, abundan en la actualidad en imágenes en redes sociales.

Se pueden plantear alguno más para generar interés en los alumnos:

2. Observar las siguientes figuras. Hay algunas que se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y otras que no, sin hacer dos veces la misma línea. Intenta dibujarlas de esta forma.



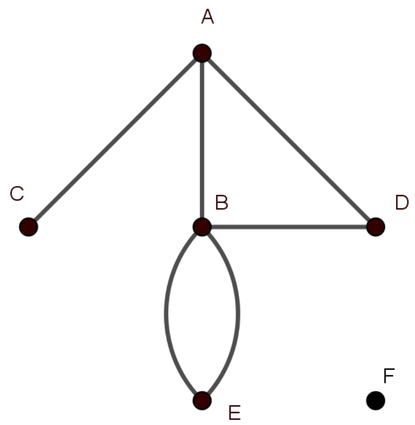
a) ¿Cuáles has conseguido?
b) Fíjate en las que es posible hacer el dibujo y en las que no, ¿reconoces alguna característica que les diferencie? (Pista: siempre es muy útil fijarse en los números de líneas o de puntos).
c) ¿Por qué crees que sucede este hecho?

Si con estos ejemplos ya se ha conseguido captar el interés del alumno, se puede comenzar a desarrollar la teoría. No existe una terminología completamente uniforme en teoría de grafos, por lo que en este trabajo se seguirá la terminología que se vaya definiendo en cada caso.

Primeras definiciones

Un grafo es un conjunto de vértices que están unidos (o relacionados) por aristas. La manera usual de denotar un grafo es de la siguiente forma: $G = \{V, A\}$; donde V es el conjunto de vértices (que normalmente se denotan por un número o una letra). Por su parte, A es el conjunto de aristas. Cada arista se denota por los dos grafos que une: si una arista une el vértice *a* con el *b*, será la arista *ab*. En caso de que más de una arista una los mismos vértices, se indica con un subíndice. De manera sistemática, se va a ignorar para este nivel la existencia de aristas del tipo *lazo*, (una arista que une un vértice consigo mismo).

Veamos un ejemplo que nos ayude a comprender estas definiciones:



Hay 5 vértices y 6 aristas:

$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$
$$A = \{AC, AB, AD, BD, BE_1, BE_2\}$$

En general, si el grafo no está orientado (las aristas no tienen flechas), entonces una arista se puede escribir sin importar que vértice escribimos primero (es decir, es la misma arista AB que BA).

Se dice que dos vértices son adyacentes si existe al menos una arista que los une. Por ejemplo, en nuestro grafo A y C son adyacentes, pero no lo son D y C. Así mismo, dos vértices están conectados si es posible encontrar una sucesión, *un camino*, de aristas y vértices que vaya desde un vértice hasta el otro. Por ejemplo, podemos conectar C con E siguiendo las aristas y vértices: C, CA, A, AB, B, BE_1. Todos los vértices de nuestro grafo estaban conectados salvo F, que no se podía conectar con ninguno.

Cada vértice tiene asociado un grado, que es el número de aristas que tocan ese vértice. Se representa con $gr(\ldots)$; por ejemplo $gr(A) = 3$. Siguiendo con el ejemplo en nuestro grafo:

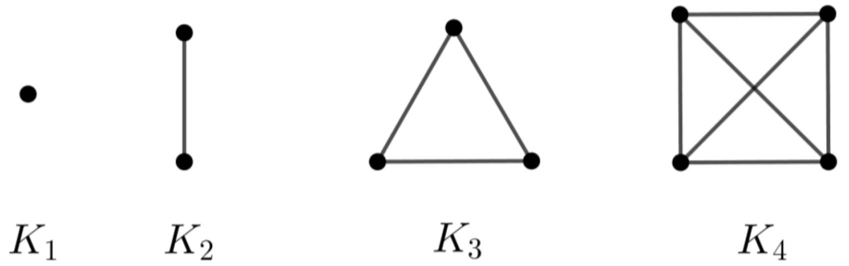
Vértice	A	B	C	D	E	F
Grado	3	4	1	2	2	0

3. Escoge alguno de los grafos que hemos visto en el ejercicio 2. Indica su grupo de vértices y de aristas. ¿Cuál es el grado de los vértices?

4. Suma todos los grados de los vértices del grafo de ejemplo, así como el que has escrito en el ejercicio 3. Haz lo mismo con algún ejemplo más.

   a) ¿Puedes establecer alguna propiedad que relaciona esta suma con algún elemento de los grafos?
   b) Dibuja grafos pequeños y simples, con diferentes números de vértices y aristas. ¿Se cumple la propiedad que has hipotetizado?
   c) Demuestra la relación.

5. Un tipo especial de grafo es el grafo completo de n vértices, que se denota como K_n. Este grafo tiene la propiedad de que todos los pares de vértices son adyacentes; es decir, todos los vértices están unidos dos a dos por una arista. A continuación se muestran los grafos K_1, K_2, K_3 y K_4 .



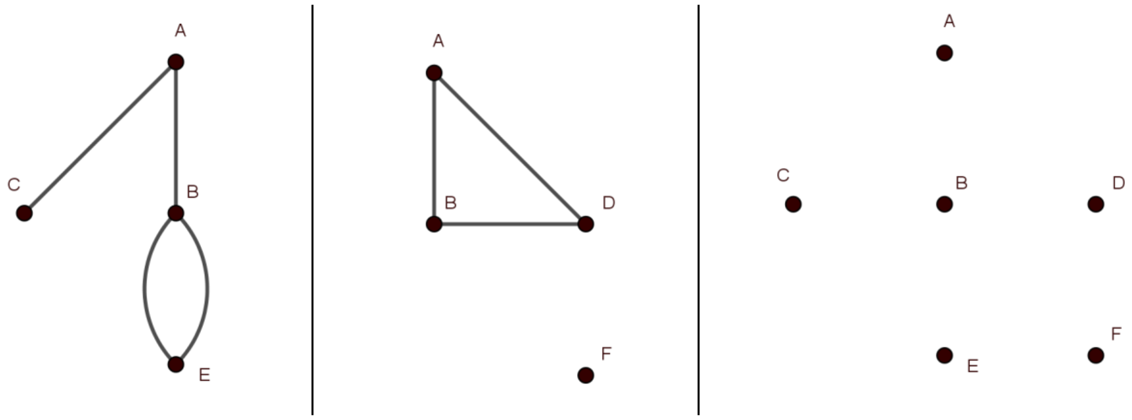
a) Dibuja el grafo K_5 y K_6.

Para un n cualquiera,

b) ¿cuál es el grado de los vértices de K_n?
c) ¿cuál es el número de aristas de K_n?

Una vez estamos trabajando con un grafo, se puede escoger algunos de los vértices (o todos) y algunas de las aristas (por supuesto, que unan los vértices con los que nos hemos quedado) para definir un subgrafo.

Sobre el grafo que habíamos puesto como ejemplo, he aquí algunos subgrafos:



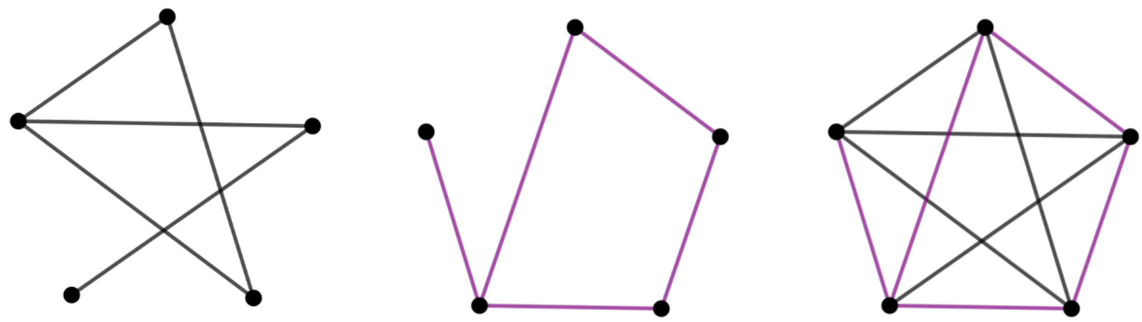
Entre los subgrafos, tienen un poco de interés aquellos que tienen los mismos vértices que el grafo original (es decir, sólo se han quitado algunas aristas), que se denominan maximales.

Si un grafo no tiene más de una arista que una los mismos vértices, decimos que es un grafo *simple*. El grafo con el que hemos trabajado hasta ahora como ejemplo no era simple, pues los vértices B y E se unían mediante dos aristas. No obstante, ya se han propuesto numerosos ejemplos de grafos simples en los ejercicios propuestos, por lo que omitiremos aquí un ejemplo.

Cualquier grafo simple de n vértices se puede ver entonces como un subgrafo del grafo completo K_n, y podemos definir la figura del grafo complementario:

Decimos que dos grafos simples son complementarios si tienen los mismos vértices, no tienen ninguna arista en común pero superponiendo ambos se formaría el grafo completo. Es decir, dos vértices adyacentes en un grafo no lo son en su complementario y viceversa.

Como en este contenido las explicaciones visuales son mucho más eficientes y sencillas que las definiciones formales, veamos un ejemplo de un grafo simple y su complementario, así como la observación de que forman juntos el completo, con 5 vértices.



Vamos a ver un primer ejemplo de porqué los grafos nos pueden servir para resolver problemas de la vida real de una manera más sencilla. Para ello, se propondría el siguiente ejercicio a los alumnos:

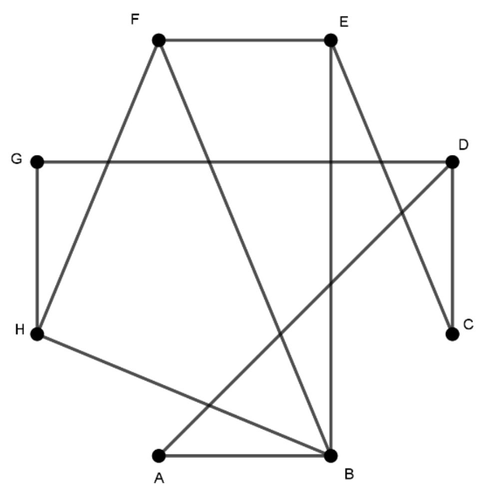
> 6. Alba, Beatriz, Carlos, Diana, Ernesto, Fernando, Gabriel y Haizea tienen que sentarse juntos en una mesa circular para una reunión. No obstante, cada uno de ellos no acepta sentarse con algunos de los demás. Alba no quiere sentarse junto a Beatriz ni junto a Diana; Beatriz no quiere a Alba, Ernesto, Fernando ni Haizea cerca suyo; Carlos no se va a sentar junto a Diana ni Ernesto; Diana no quiere sentarse junto a Alba, Carlos y Gabriel; Ernesto no quiere junto a Beatriz, Carlos ni Fernando; Fernando junto a Beatriz, Ernesto o Haizea; Gabriel no puede con Diana ni Haizea; y, por último, Haizea no quiere sentarse junto a Beatriz, Fernando ni Gabriel.
>
> ¿Hay alguna distribución en la mesa para que todos estén contentos? ¿Sabrías encontrar alguna?

Normalmente, este problema se resolvería tomando todas las combinaciones posibles e intentar encontrar una solución que respete las condiciones, pero esto implicaría una solución sin estrategia ni procedimiento lógico, que se va a intentar evitar que los alumnos realicen, a la vez que valoren la idoneidad de establecer una estrategia y la modelización, fomentando tanto su capacidad matemática como de aprender a aprender.

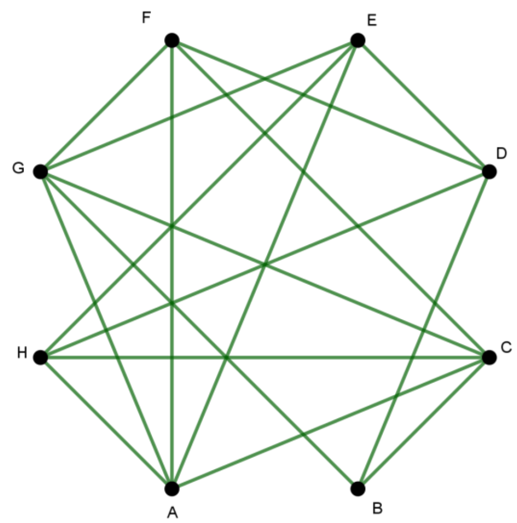
Por otro lado, la propia enunciación del problema implica la necesidad de organizarse ante la cantidad de datos expuestos, por lo que plantear sin una organización previa podría inducir a errores por no tener en cuenta todas las posibilidades.

Además, una estrategia basada en comprobar opciones sería cuanto menos desastrosa, pues un sencillo cálculo nos permite afirmar que hay $7! = 5040$ posibles posiciones para colocar a 8 personas alrededor de una mesa redonda, lo que supone un esfuerzo bastante improductivo.

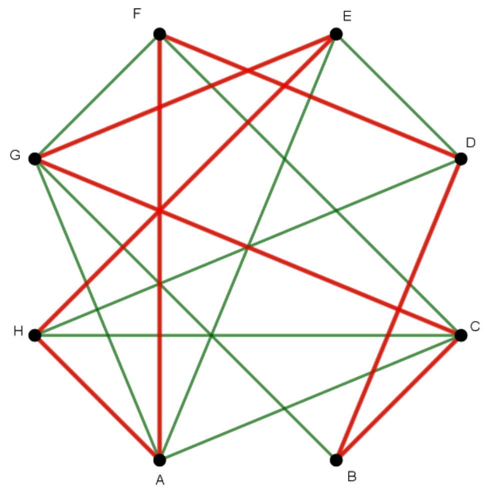
¿Cómo se puede relacionar este problema con grafos? Fácil, para organizarnos mejor podemos tomar un grafo de 8 vértices (las ocho personas) donde tengamos una arista por cada par de personas que no se pueden sentar juntas:

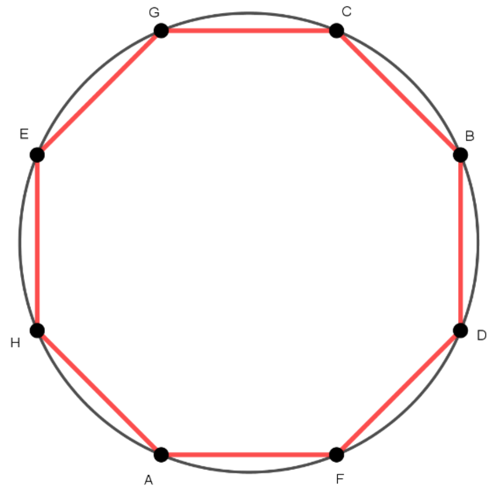


Como queremos ver, las posibles personas que sí se pueden sentar juntas, basta con tomar el complementario:



Y ahora es muy fácil encontrar un ciclo, un orden de la mesa circular recorriendo las aristas permitidas. Por ejemplo, podemos dar esta solución:





Se puede continuar proponiendo actividades en los que relacionen problemas que a priori no existiría ninguna conexión con un grafo, para que los alumnos practiquen esta capacidad de relacionar:

7. Por su cumpleaños, Julen ha invitado a muchos de sus amigos. Algunos se conocían ya de antes y otros no. Demuestra, que, independientemente de la cantidad de personas que acuden a la fiesta, hay al menos dos que conocen a exactamente el mismo número de personas.

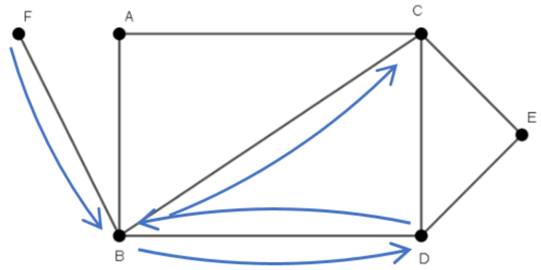
Trayectorias, circuitos y ciclos

Una trayectoria en un grafo es una secuencia finita intercalada de vértices y de aristas que unen dos vértices consecutivos, comenzando y acabando por un vértice. Si este vértice (primero y último es el mismo) decimos que la trayectoria es cerrada.

Si la trayectoria no repite ninguna arista, entonces se trata de una cadena. Si además es una cadena cerrada, es decir, que empieza y acaba por el mismo vértice, entonces lo denotaremos circuito.

Por último, existe la opción de que la cadena no repita ningún vértice (salvo quizás empiece y acabe en el mismo). En este caso es un camino. De manera similar a las anteriores definiciones, un camino cerrado vamos a llamarlo ciclo.

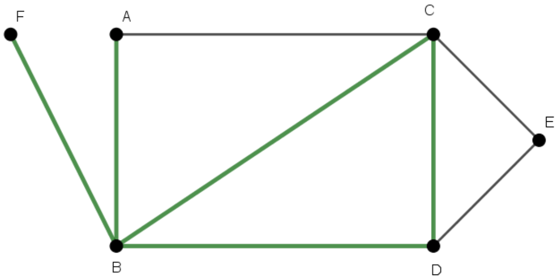
Se vuelve a poner unos ejemplos para verlo más claro:



Trayectoria

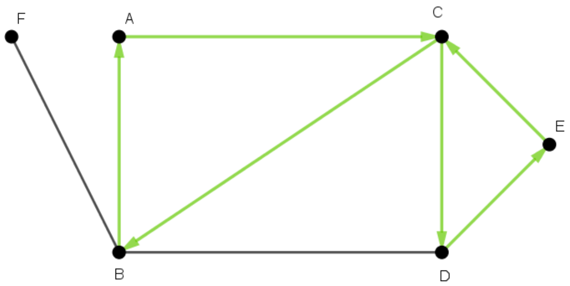
$$F \rightarrow FB \rightarrow B \rightarrow BD \rightarrow D \rightarrow DB \rightarrow B \rightarrow BC \rightarrow C$$

Siempre que trabajamos con grafos simples, como este caso, se puede omitir las aristas, pues se entienden por el contexto. La trayectoria sería: $F \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$



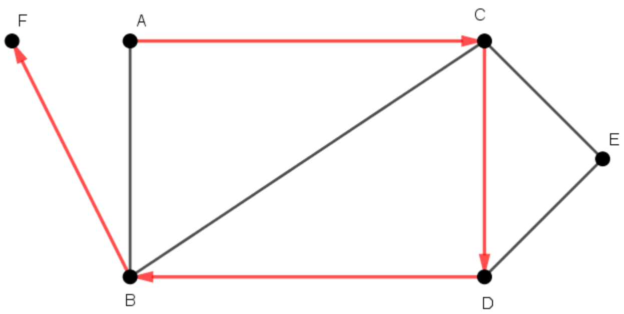
Cadena

$$F \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$$



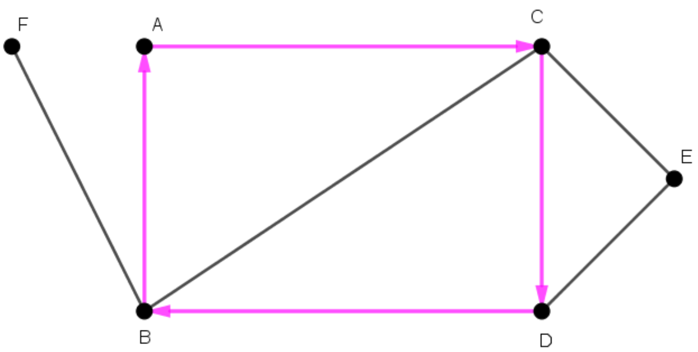
Circuito

$$C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C$$



Camino

$$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$$



Ciclo

$$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$$

Nótese que en los ciclos, el vértice de inicio (y final) es indiferente

Decimos que un grafo es conexo si entre dos vértices cualesquiera es posible establecer una trayectoria (o una cadena, o un camino), es decir, están “conectados”. En general, vamos a trabajar siempre con grafos conexos, pero conviene que los alumnos tengan en cuenta este concepto a la hora de trabajar con los circuitos eulerianos, por ejemplo, para no dejar grafos disconexos.

Estas definiciones dan pie también a trabajar algunas nociones elementales sobre conjuntos, en tanto que el alumno ha de reconocer que un ciclo es a la vez un camino y un circuito, siendo todos ellos también cadenas. En concreto, se puede organizar con la siguiente tabla:

> 8. Organiza los conjuntos de trayectorias que hay un grafo en función de sus propiedades y orden de inclusión.

Una respuesta esperada podría ser:

			No se repiten aristas		No se repiten vértices
	Trayectoria	$\supset$	Cadena	$\supset$	Camino
	$\cup$		$\cup$		$\cup$
Mismo vértice inicial y final	Trayectoria cerrada	$\supset$	Circuito	$\supset$	Ciclo

En cada una de las definiciones anteriores, se dice que tiene como longitud el número de aristas que se recorren.

Además, jugando con las definiciones sencillas se puede pedir a los alumnos que se adentren en matemáticas “más formales” o, al menos, más abstractas:

> 9. Lee el siguiente teorema:
>
> *“Si existe una trayectoria que empieza en el vértice X y acaba en el vértice Y en un grafo G, entonces existe un camino en G que va desde X hasta Y”.*
>
> a) ¿Qué es lo que dice el teorema? ¿Podrías explicarlo con otras palabras?
> b) Haz al menos un dibujo donde se demuestre que el teorema se cumple. ¿Sirve esto como demostración?
> c) Da una demostración del teorema, explica por qué se cumple.

La siguiente pregunta que podemos plantearnos es entonces bastante lógica: ¿Existirá alguna cadena o circuito que pase por todas las aristas? De existir, supondría el mismo ejercicio que dibujar el grafo sin levantar el lápiz del papel o a pasar por todos los puentes una solo vez. A este aspecto hablaremos de los grafos eulerianos. ¿Podremos establecer algún camino o ciclo que pase por todos los vértices? Ya hicimos un caso particular en el ejercicio 7, pero sobre esta cuestión hablaremos de ciclos hamiltonianos.

El hecho de una cualidad euleriana no es casualidad: está directamente relacionado con el enigma de los puentes de Könisberg. En un grafo, si hay una cadena que pasa por todos los vértices, se dice que tiene una cadena euleriana. Si esta cadena empieza y acabe en el mismo vértice entonces se trata de un circuito euleriano, y decimos que un grafo es euleriano.

Euler ya dedujo las cualidades que debía cumplir un grafo para ser euleriano:

Teorema de los grafos eulerianos

"Un grafo (conexo) es euleriano sí y sólo sí los grados de todos sus vértices son pares. Sí dos vértices exactamente tienen grado impar, entonces es posible construir una cadena euleriana tal que empiece en uno de estos dos"

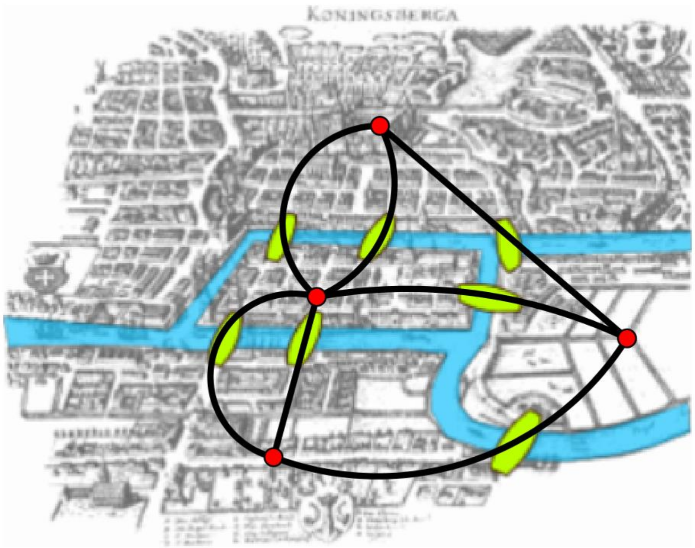
Las demostraciones de este teorema son, aunque no difíciles, bastante formales y abstractas como para plantearlas en este nivel, debido principalmente a la demostración de suficiencia; pero si se puede y se debe plantear en el aula el proceso y las principales ideas que componen esta demostración.

Pedir que el grado sea par parte de una idea sencilla: en tanto que queremos pasar por todas las aristas, es necesario que cada vez que se llegue a un vértice, exista al menos otro vértice para "salir" de él, es decir, se requiere que los vértices se puedan agrupar de dos en dos, uno de llegada y otro de salida. Si todos los vértices tienen grado par, este hecho es posible y además es suficiente, pues al poder agrupar los vértices de dos en dos, también siempre tendremos una arista para continuar la cadena (escogiendo convenientemente para no desconectar el subgrafo formado por las aristas que aún no han sido añadidas a la cadena).

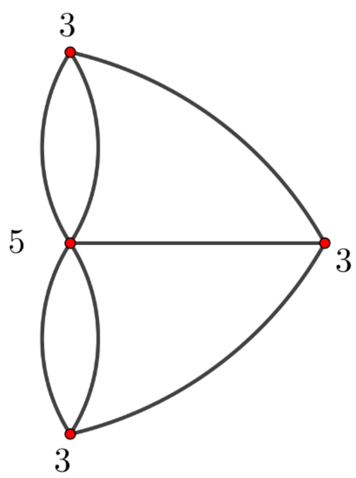
Por otro lado, si hay exactamente dos vértices con grado impar, el razonamiento es el mismo salvo para estos dos vértices, en los que necesariamente ha de empezar y acabar la cadena pues en el caso contrario nos encontraríamos con una situación en el que pasaríamos por el vértice y no tendríamos formar de "salir" de él mediante una arista por la que no se hubiese pasado anteriormente.

Está claro que con esta información ya se puede revisar el ejercicio 2 y comprobar como de acertadas habían sido las respuestas de los alumnos. Además, conocido ahora cuando es y no posible, una siguiente actividad sería plantear con la clase una forma algorítmica de encontrar alguno de los circuitos que hace euleriano el grafo en cuestión.

De este modo, ya se tiene la capacidad y las herramientas para dar una solución completa al problema de los puentes de puentes de Könisberg. Si volvemos a la imagen de la ciudad, es necesario ser consciente que atravesar alguno de los puentes supone cambiar de una de las cuatro zonas que el río divide la ciudad a otra diferente. Estas zonas van a ser los vértices del grafo que requiere del estudio, mientras que los puentes, el único medio para cruzar de una zona a otra, serán las aristas que relacionan los vértices. Nos queda:



Para hacerlo más comprensible, podemos establecer el mismo grafo (las mismas propiedades) pero liberado de la fotografía, en el que se ha indicado ya el grado de cada vértice:

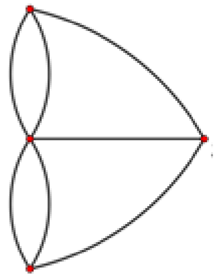


Como se puede observar, todos los vértices son de grado impar, por lo que es imposible un circuito euleriano. Entonces el viaje pasando por todos los puentes una sola vez es imposible. De hecho, ni siquiera era posible sin la condición de volver al lugar de partida, pues no hay únicamente dos vértices de grado impar para hacer una cadena euleriana.

La siguiente actividad que podemos plantear a los alumnos es como mejorar entonces la ciudad para satisfacer a Euler y sus vecinos:

10. El ayuntamiento de Könisberg, en vista de la fama que la ciudad ha cogido debido a este problema, decide construir tantos puentes como sea necesario para que se pueda realizar el viaje propuesto por el problema: Volver al punto de partida habiendo cruzado todos los puentes y sin repetir ninguno.

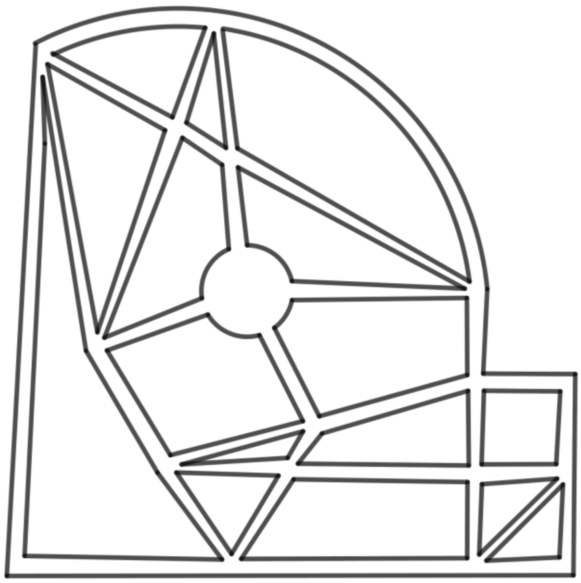
a) Da una posible resolución construyendo aristas sobre el grafo que representa la ciudad:



b) ¿Cuál era la cantidad mínima de puentes que hay que construir?¿Por qué?

Así mismo, los grafos eulerianos ofrecen otras posibles actividades de modelización bastante enriquecedoras:

11. El pueblo de Villalar de Arriba tiene el siguiente mapa:

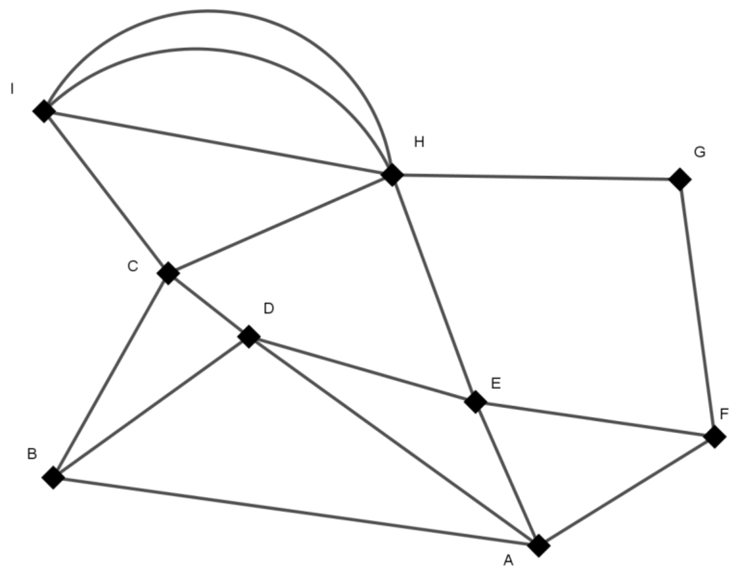


Se pretende organizar la ruta que debe realizar el cartero, pasando por todas las calles, de forma que la distancia que recorre sea mínima:

a) Propón alguna ruta que cumpla estas condiciones.
b) ¿Por qué sabes que el recorrido es mínimo?

12. Tras uno de sus atracos, la famosa banda de atracadores de El Profesor, efectúo una maniobra de distracción recorriendo numerosas calles de la ciudad y sin repetir ninguna (la policía les iba pisando los talones), para que nadie pudiera saber dónde se habían escondido junto con el botín.

No obstante, el vehículo que utilizaron dejo marca en la calzada, por lo que se sabe que éste fue su recorrido por la ciudad:



Cada letra marca un edificio donde los ladrones se podrían haber escondido, salvo el edificio B (de banco) que es precisamente donde realizaron el atraco.

Tras un vistazo rápido al mapa, un agudo inspector de policía manda a todas las unidades a un único lugar. ¿En qué edificio se ha escondido la banda?

Si nos centramos ahora en la posibilidad de pasar por todos los vértices, el interés en muchas problemáticas se encuentra en encontrar un ciclo que pase por todos ellos (sin repetir ninguno). Este tipo de ciclo se llaman hamiltonianos. De igual manera que el anterior, si un grafo tiene un ciclo hamiltoniano se dice que es hamiltoniano. En el ejercicio 6 ya trabajamos con un ejemplo de grafo hamiltoniano.

A diferencia que los Eulerianos, no existe un resultado que nos permita decidir siempre si un grafo cualquiera es o no hamiltoniano; muchas veces consistirá en un ejercicio de agudeza visual, aunque si se puede mostrar a los alumnos algún resultado sencillo como el siguiente:

Criterio de los grafos hamiltonianos

"Si G es un grafo (conexo) con n vértices, siendo $n \geq 3$ y todos los vértices tienen grado al menos $\frac{n}{2}$, entonces G es Hamiltoniano."

Al igual que el teorema anterior, una demostración formal podría resultar demasiado abstracta para el nivel indicado, pero si se puede reflexionar en el aula sobre la idea de la demostración: en tanto que de cada vértice salen suficientes aristas debido a su alto grado, se podrá encontrar siempre una manera de realizar el ciclo.

A pesar de que no hay un resultado concreto como en los grafos eulerianos, si se puede destacar las consideraciones que tienen Braicovich, T., Oropeza, M. y Cerda, V. (2008), pues se trata de un problema abierto que servirá para que los estudiantes adquieran también una visión distinta de las matemáticas, donde no está "todo resuelto" (creencia muy común en ellos) ni se nos da ya "masticado". Por otro lado, este tipo de situaciones le pueden servir al maestro como una ocasión idónea para introducir temática acerca de la importancia de la matemática: puede ser que nosotros podamos resolver visualmente si un ciclo hamiltoniano o no existe en un grafo dado, pero sin una base matemática que lo sostenga no podremos implementar un proceso en un ordenador para que lo haga con nosotros (que es al final un objetivo bastante deseable cuando queremos encontrar ciclos de este tipo en grafos de 200, 1000 o 10^{20} vértices). Además, tanto para este como para otros problemas con ninguna otra resolución que la visual y supuesto *prueba-error*, servirá a los alumnos para desarrollar estrategias de resolución propias.

13. La Reina de Inglaterra ofrece anualmente un banquete en su honor a todos los políticos de la corte, que acuden siempre con acompañante por lo que son una cantidad par. En política, no siempre es fácil que se lleven tan bien como los alumnos de una clase de secundaria, y los hay que se llevan mejor y peor. No obstante, si se da que afortunadamente para cada invitado (o acompañante) hay más personas que le cae bien que las que le cae mal. Demuestra que las enemistades no son entonces un problema para los mayordomos de la Reina, que pueden colocar a todos los invitados en una mesa redonda de forma que cada persona esté al lado de alguien que sea un amigo.

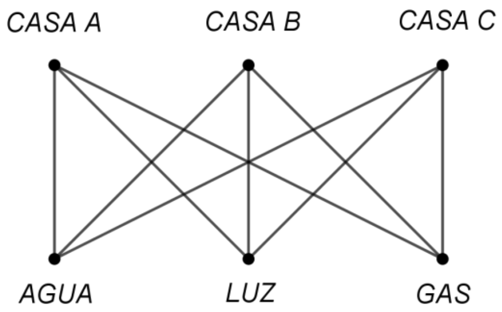
Grafos planos

Para adentrarse en la teoría de grafos planos, podemos comenzar planteando el siguiente ejercicio, muy usual como acertijo para matar el tiempo, por lo que es probable que algún alumno ya conozca la respuesta.

14. **Problema de los tres servicios**

Tres casas recién construidas quieren ser conectadas a la red de electricidad, gas y agua. Para ello, es necesario construir un conducto desde cada una de las tres proveedoras hasta cada una de las casas, pero no queremos que las conexiones se crucen. ¿Es este hecho posible?

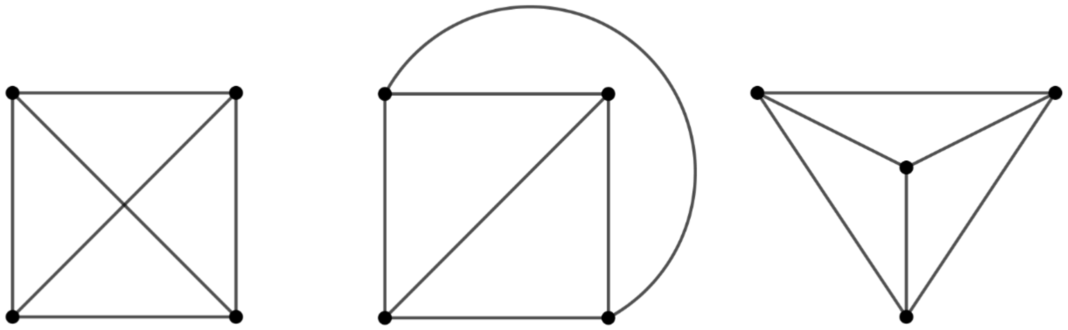
El problema consiste en conectar cada uno de 3 vértices a otros 3, sin que ninguna de las aristas se cruce. Es decir, hacer un grafo sin aristas que se crucen del grafo bipartito $K_{3,3}$ (para este contenido, no se ha considerado necesario desarrollar los grafos bipartitos, aunque es igualmente un contenido apto para los estudiantes de este nivel).



El estudiante puede tratar de resolverlo una y otra vez hasta caer en la cuenta de que la actividad es imposible de resolver (al menos en un plano)[3], pues aunque consiga colocar 8 aristas que no se superpongan, siempre tendrá como imposible dibujar la novena restante sin cruzar con alguna de las ya escritas.

Este es el estudio que se va a realizar en esta sección: que características tienen aquellos grafos que pueden ser dibujados en una hoja, sobre un plano, sin que las aristas se corten entre sí.

Para introducirnos, es necesario primeramente una breve reflexión topológica (aunque quizás se debería omitir la palabra topología durante las sesiones). Visualmente es muy sencillo comprobar que los siguientes grafos son en realidad el mismo:



[3] Un ejercicio también muy interesante es mostrar a los alumnos como se puede resolver este mismo problema sobre un toroide, una esfera o usando el reverso de la hoja; pero este hecho es más una curiosidad por lo que se propone, a aquellos interesados, revisar la entrada de Gaussianos (Morales, M.A., 2013) o el enlace del problema en Wikipedia (Problema de los tres servicios, 2019)

Y es que en realidad todos ellos son el grafo completo de 4 vértices, K_4. A la hora de definir un grafo, solo tenemos en cuenta el número de vértices y las asíntotas que se establecían entre ellos. Si nos fijamos en los grafos anteriores, todos ellos tienen 4 vértices y 6 aristas, de forma que de cada vértice es adyacente a los otros tres. Entonces los tres grafos son, esencialmente, el mismo (o isomorfos, pero también se va a intentar ignorar la definición de isomorfía a este nivel). Entonces, en un grafo cualquiera dado, se pueden mover los vértices o las aristas tantas veces y de la manera que se quiera, siempre que se mantenga las relaciones de adyacencia que había definido en él. Para este aspecto es muy útil y visual utilizar geometría dinámica, que permitirá a los alumnos entender mejor esta cualidad topológica (de deformar los objetos siempre que no se rompan). Se puede recomendar (entre otras muchas aplicaciones), Geogebra y, especialmente si se piensa trabajar únicamente con grafos, la web Graph drawer, que admite una interacción en 3 dimensiones.

Si nos fijamos en las dos últimas representaciones de K_4, es evidente que el completo de cuatro vértices es un grafo que se puede representar en el plano sin que ninguna arista se cruce. Denominamos a este tipo de grafos como grafos planos.

Los grafos planos introducen un nuevo concepto: las caras de un grafo. Se denomina cara a cada una de las áreas o regiones del plano bordeadas por las aristas del plano. Por conveniencia, se considera también una cara exterior, no acotada, que corresponde a la parte del plano que queda fuera del grafo.

Se puede relacionar el número de aristas, vértices y caras con la siguiente propiedad:

Fórmula de Euler para los grafos planos

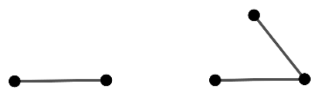
"En toda representación plana de un grafo conexo plano, si G tiene un número v de vértices, a aristas y c caras, se cumple que:

$$v - a + c = 2".$$

Su demostración si puede ser explicada a este nivel, que puede servirnos para trabajar por primera vez con la inducción (a este nivel no se espera que los alumnos sepan aplicar procesos de inducción correctamente, pero si han desarrollado, o se pretende, que adquieran suficiente competencia como para poder seguir un razonamiento de inducción sencillo).

Hay que hacer inducción sobre el número de aristas, a. Si $a = 0$, entonces para que el grafo sea conexo debe ser K_1, un único punto; mientras que sólo habrá una única cara, la exterior. La fórmula es cierta en este caso.

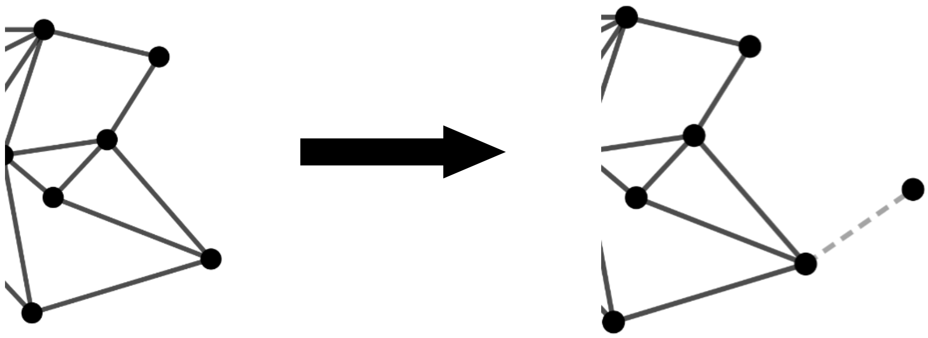
Podemos observar cómo, con $a = 1$ o $a = 2$, hay únicamente un camino que une dos o tres vértices y sigue habiendo una única cara, la exterior, por lo que la fórmula sigue funcionando.



Entonces supongamos que la fórmula se cumple para todos los grafos con un número fijo a de aristas y queremos demostrar que se cumple si hay una arista más. Se puede suponer que esta arista se ha añadido entonces a un grafo que si cumplía la fórmula (hipótesis de inducción: $v - a + c = 2$); y sólo hay dos opciones:

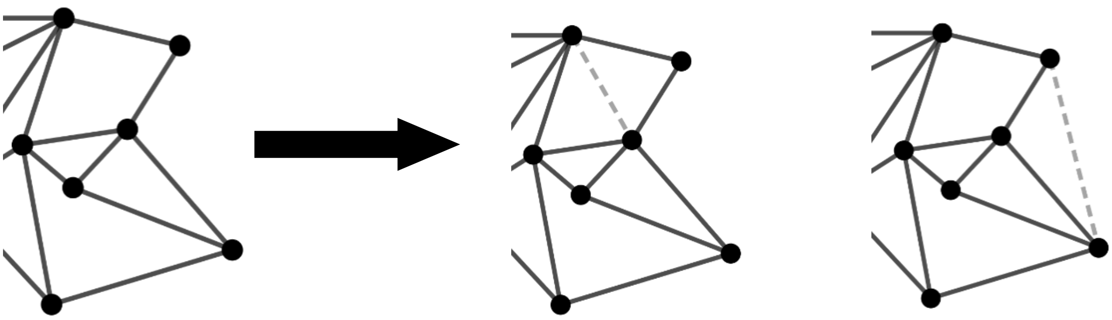
- Se añade una arista más entre un vértice que estaba en el grafo y uno nuevo. En este caso, el número de caras sigue siendo el mismo pues al añadir un vértice nuevo no hemos delimitado ninguna región adicional más del espacio. Se tiene que:

$$(v+1)-(a+1)+c=v-a+c=2$$



- Se añade una arista al unir dos vértices que ya estaban en el grafo. En este caso (de ser posible de manera que el grafo siga siendo plano), la nueva arista debe recorrer completamente a través de una de las caras del grafo (que puede que sea la exterior), separando esta región en dos partes, por lo que donde había una cara ahora hay dos, que quiere decir que aumenta en una unidad el número de caras:

$$v-(a+1)+(c+1)=v-a+c=2$$



En ambos casos, se cumple que la fórmula era cierta para un grafo con una arista más, por lo que podemos concluir por inducción.

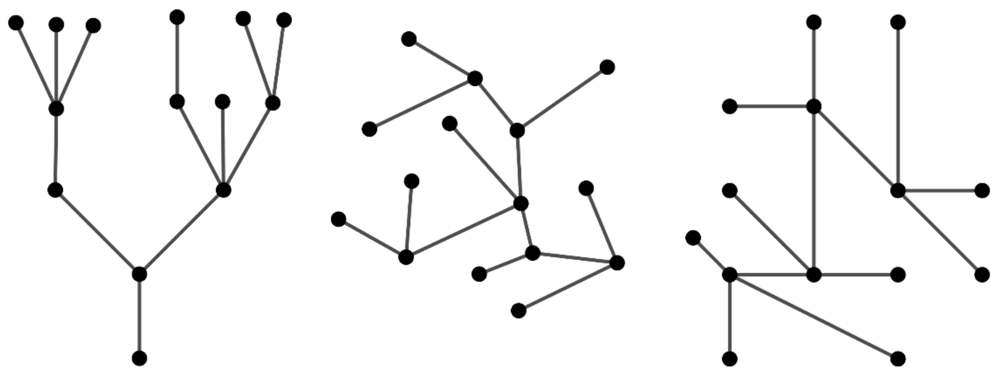
De este resultado se puede extraer una importante conclusión que los alumnos deben también trabajar y reflexionar: el número de caras de un grafo plano únicamente depende del número de aristas y vértices, es independiente de una u otra representación.

Aunque ya sólo por curiosidad o para aumentar el nivel de los alumnos, también se les puede comentar el problema de los 4 colores, que afirma que en cualquier mapa, se pueden colorear todos los países de forma que ningún limítrofe (que comparten frontera) sea del mismo color; utilizando únicamente 4 colores. Este es un problema que ha estado sin resolver durante 100 años (1840-1976) hasta que se dio una solución con un ordenador.

15. Para abastecer de electricidad al barrio, los vecinos deciden colocar una placa fotovoltaica en cada una de las manzanas del barrio, que tiene 155 intersecciones y 260 calles. ¿Cuántas placas se van a colocar?

Árboles

Un árbol es un tipo de grafo que no contiene ningún circuito. Es decir, existe siempre un camino único para ir de un vértice a otro; y es imposible volver al vértice de salida sin repetir alguna arista al menos. El nombre de árbol viene porque siempre se puede representar con una estructura similar a un árbol, con ramificaciones. He aquí algunos ejemplos de representaciones de árboles:



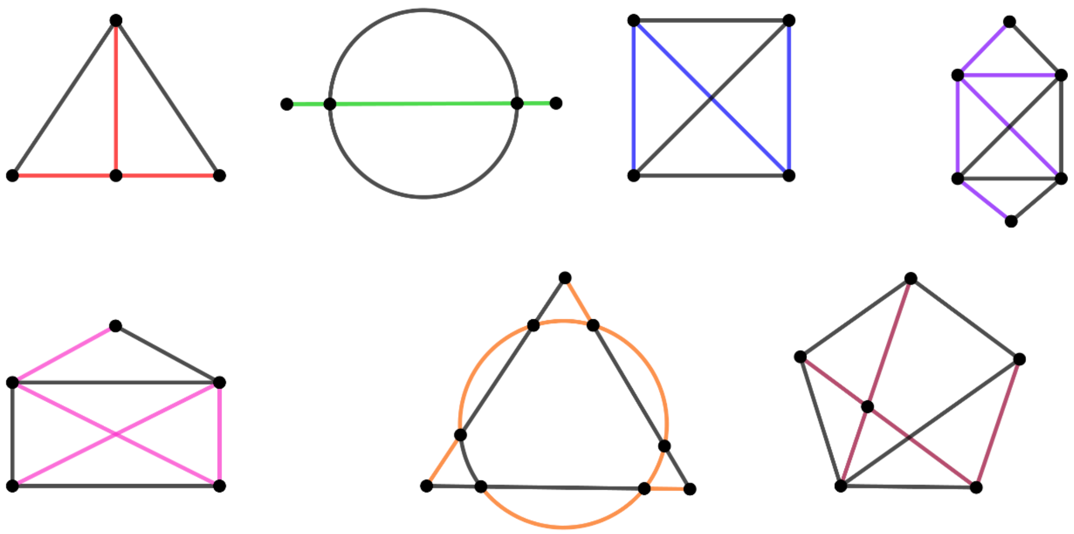
Una característica de los árboles es que todas sus aristas son puentes: quitar alguna de ellas supondría desconectar el grafo, que se dividiera en dos partes con ninguna trayectoria posible entre los vértices de una de las partes y los de la otra. Se puede pedir a los alumnos que estudien por ellos alguna característica más también sencilla, siguiendo un modelo de deducción de hipótesis:

16.

a) Fíjate en los árboles que hemos dibujado antes. Dibuja también algunos más sencillos y cuenta su número de vértices y de aristas. ¿Qué sucede?
b) ¿Cumplen todos los árboles esta propiedad? ¿Lo puedes explicar?
c) Piensa al revés, todo grafo que cumpla esta propiedad, ¿será un árbol? Recuerda que ya hemos visto dos características de los árboles, intenta relacionarlas con el número de vértices y aristas.

Un estudio de mucha importancia con los árboles es debido a que todo grafo conexo tiene un subgrafo maximal (con todos los vértices) que es un árbol. Esta propiedad es sencilla de observar: basta con eliminar aristas del grafo que estén incluidas en algún circuito (y por lo tanto no serán puentes, pues los vértices seguirán conectados por las otras aristas del circuito); hasta finalizar necesariamente en un árbol, que será maximal pues no hemos eliminado ninguna arista. A estos árboles (subgrafos maximales) los denominaremos árbol generador.

El proceso algorítmico de búsqueda de un árbol generador puede ser implementado por los alumnos, aunque no se detallará en este trabajo pues sí se explicará un proceso similar al buscar el árbol generador minimal (de menor peso) a continuación. Se ofrece en la siguiente imagen algunos de los grafos del ejercicio 2 a los que se ha coloreado un posible árbol generador a cada uno de ellos:



Al modelizar mediante grafos relaciones que ocurren entre elementos de la vida real, suele suceder que no todas las relaciones tengan las mismas propiedades, siendo algunas más fáciles, más sencillas o más baratas. Así, si por ejemplo estableciéramos un grafo con los distintos caminos que se pueden recorrer para viajar entre estaciones de tren desde Valladolid hasta Mérida, puede ser que algunas sean más baratas que otras; o más rápidas. Para que los grafos que representamos puedan reflejar esta realidad usamos ponderaciones: asignamos un número a cada arista de forma que este es el peso o valor que le corresponde. Nótese que pueden existir casos en los que es mejor realizar una trayectoria de longitud mayor debido a que la suma de los pesos de las aristas es menor en total.

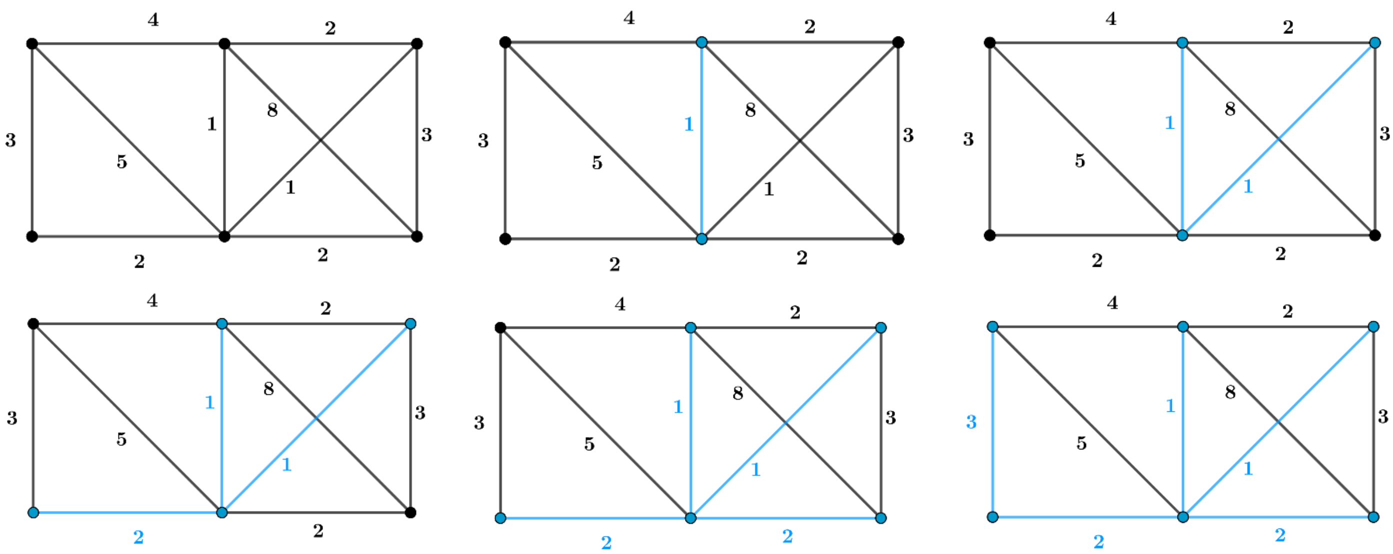
Si se traduce la actividad anterior de encontrar árboles generadores que sean subgrafos maximales de grafos a los que se les ha asignado pesos; de forma que la suma de las aristas de este árbol generador sea mínima. Se denominará a este concepto árbol generador mínimo.

Para encontrar (o que un ordenador encuentre) un árbol generador mínimo de un grafo dado, nos basaremos en el algoritmo de Prim que consta de los siguientes pasos (se realiza una simulación sobre el grafo dado)

1. Escoge la arista (o una de las aristas si hay más de una) que menor peso tenga; y los dos vértices adyacentes por esta arista. Se puede colorear las aristas y los

vértices usados, o comenzar un nuevo grafo únicamente con las aristas y vértices indicados para una mejor organización.

2. Entre los vértices aún no escogidos, escoge uno nuevo y una arista que lo conecte a un vértice ya coloreado, de forma que se cumplan dos condiciones:
   i. Con la nueva arista, no se forma ningún ciclo en el subgrafo “coloreado”, el formado por los elementos que estamos seleccionando
   ii. Cumpliendo la condición i, escogemos una de las aristas de menor peso entre las posibles.
3. Se continúa con el paso 2 hasta colorear todos los vértices. El subgrafo resultante será un árbol (pues no habrá ciclos) con el menor peso posible. Téngase en cuenta que este árbol no tiene porqué ser único, aunque su valor suma sí lo será.



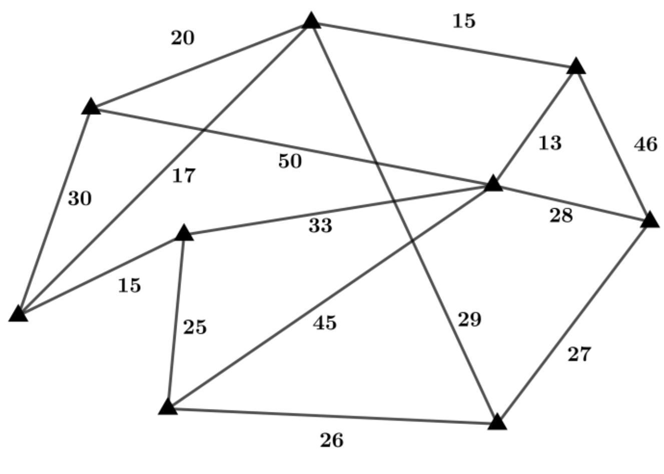
17. Un algoritmo similar al de Prim consiste en realizar un procedimiento inverso: Partiendo de todas las aristas del grafo, ir *eliminando* aquellas de mayor peso posible de forma que el subgrafo resultante de quitar la arista no sea desconectado; así hasta concluir en un árbol generador.

a) Realiza este proceso sobre el grafo que hemos usado como ejemplo. ¿te queda el mismo valor en el árbol generador?
b) Escribe de forma algorítmica los pasos que habría que realizar para usar este procedimiento con cualquier grafo.
c) Dibuja un grafo que al realizar uno u otro algoritmo, al árbol generador minimal sea diferente. ¿Sigue siendo el mismo valor mínimo?

18. Para el torneo de Navidad del instituto se han inscrito 13 equipos participantes. El torneo se va a realizar siguiendo el modo olímpico: enfrentamientos directos donde el equipo que pierde es eliminado. El patio del recreo cuenta con 5 canchas, y se estima que cada ronda, incluyendo descansos, durará una hora. ¿Cuánto tiempo se necesita para realizar el torneo?

19. Como modo de entrenamiento, Lebron James suele practicar tiros libres después de todos los entrenamientos. Su efectividad es bastante buena, así que ha decidido que comenzará lanzando cinco tiros y, por cada tiro que falle, tirará dos más. Finalmente ha realizado 25 tiros libres. ¿Cuántas veces ha fallado?

20. Una empresa de distribución tiene que situar un almacén central en uno de los 9 edificios que tiene, de forma que los repartos se realizarán desde este almacén central al resto, siguiendo el mismo camino tanto en la ida como en la vuelta. Las distancias y caminos posibles que hay entre los edificios es la siguiente:



a) Indica cuales son los caminos que se han de utilizar para que las distancias sean siempre las más cortas posibles.
b) ¿En cuál de los 7 edificios se debería de colocar el almacén central?

Algunas modelizaciones

Para finalizar este contenido, se van a proponer dos ejemplos de modelizaciones sencillas, con un contexto muy cercano para los alumnos, de forma que pueden comprobar directamente el uso de la teoría de grafos en estas modelizaciones. Se trata de los juegos malabares y la organización de una competición deportiva.

A partir de estas modelizaciones, se pretende aumentar el interés de los alumnos por la asignatura, en tanto que se ofrecen ejemplos que pueden ser muy cercanos y útiles para ellos, pero también trabajar la capacidad de abstracción y modelización a medida que puedan seguir estas modelizaciones y los procesos de razonamiento y conceptos matemáticos relacionados con ellos.

Se puede proponer a continuación que los alumnos investiguen acerca de otras modelizaciones con teoría de grafos como por ejemplo el problema del viajante, el PageRank de Google, etc.

Otros muchos ejemplos de modelizaciones y usos de la teoría de grafos en contextos cercanos a los alumnos y de reciente actualidad se pueden encontrar en Grima, C. (2018); aunque en este caso la teoría de grafos desarrollada se encuentra en algunos ejemplos por encima del nivel que se ha establecido en este trabajo. Por otro lado, López, J.A. (2018) propone también una interesante modelización que relaciona la teoría de grafos con redes sociales y superhéroes, ofreciendo también un enfoque transversal para conectar el mundo real y cercano de los adolescentes con las matemáticas, objetivo de esta sección. No obstante, en este trabajo únicamente se referenciará el artículo.

Organización de competiciones

Siguiendo el planteamiento que estudia Froncek, D. (2010), imagínese que se quiere organizar un torneo deportivo entre varios equipos, de forma que todos se enfrenten con todos.

Por comenzar con un ejemplo, si tenemos cuatro equipos: 1, 2, 3, 4 y queremos que todos se enfrenten entre ellos, a una vuelta, es necesario al menos 3 jornadas (cada equipo jugará tres partidos), pero se pueden jugar dos partidos (cuatro equipos) en cada una de las jornadas. Con tan pocos equipos, un rápido ensayo de prueba y error puede dar un resultado, como por ejemplo el siguiente:

Jornada	1º	2º	3º
Partido A	$1-2$	$1-3$	$1-4$
Partido B	$3-4$	$2-4$	$2-3$

Se puede pedir ahora hacer lo mismo (organizar un torneo) pero con 6 equipos (5 jornadas, 3 partidos por jornada). Encontrar una solución posible depende mucho de los partidos que se escogen al inicio de rellenar la tabla, pues muchas veces se llega a una situación imposible, por ejemplo:

Jornada	1º	2º	3º	4º	5º
Partido A	$1-2$	$2-3$	$1-4$	$1-3$	
Partido B	$3-4$	$4-5$	$2-5$	$5-?$	
Partido C	$5-6$	$1-6$	$3-6$		

Obviamente, se puede seguir con el método de prueba error, cambiar algunos de los partidos que ya se habían inscrito y volver a intentarlo, pero este proceso puede ser demasiado largo y cansado, más aún si se pretende organizar un torneo como la Primera División de la liga nacional de fútbol, que cuenta con 20 equipos. ¿Existirá alguna manera de organizar el torneo sin necesidad de recurrir a un método de ensayo-error, sabiendo de antemano que es posible la construcción de ese horario? Para responder a esta pregunta es por ello por lo que se introduce en la Teoría de Grafos.

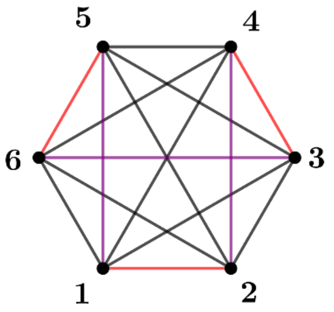
Para establecer un modelo, vamos a suponer primeramente que el número de equipos que participan en el torneo es par, $2n$. Los equipos van a ser precisamente los vértices de un grafo, mientras que cada partido supone una arista que relaciona los dos equipos (vértices) que se enfrentan en ese partido. Como queremos que todos los equipos se enfrenten todos con todos, entonces tenemos que formar el grafo completo de $2n$ vértices, K_{2n}. Si el alumno ya ha trabajado el ejercicio 5 ya puede obtener que para un grafo completo K_m; el número de aristas es $\frac{m\cdot(m-1)}{2}$. En nuestro caso entonces el número de aristas es

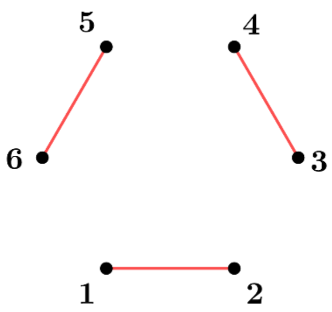
$$\frac{2n\cdot(2n-1)}{2}=n\cdot(2n-1)$$

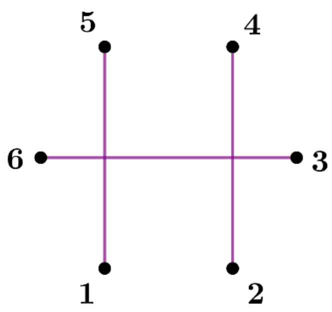
Un ejercicio sencillo para plantear a los alumnos es comprobar que efectivamente, si se enfrentan $2n$ equipos todos con todos, se jugarán $n\cdot(2n-1)$ partidos.

El nuevo objetivo consistirá entonces en generar $2n-1$ subgrafos diferentes, cada uno con n aristas; que representan los n partidos que se jugarían en cada una de las $2n-1$ jornadas. Estos subgrafos no pueden tener ninguna arista en común (pues se repetiría alguno de los partidos) y juntos deben completar el grafo K_{2n}.

En cada uno de estos subgrafos, el grado de cada vértice ha de ser 1, pues cada equipo juega exactamente un único partido. Se trata de establecer entonces n aristas que relacionan los vértices 2 a 2. Este tipo de subgrafos (maximales, pues están todos los equipos) se van a denotar subgrafos de factor 1. Se muestra un ejemplo de K_6 con algún ejemplo de subgrafo de factor 1:

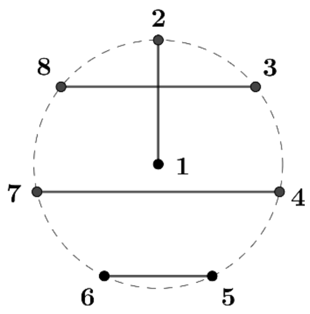




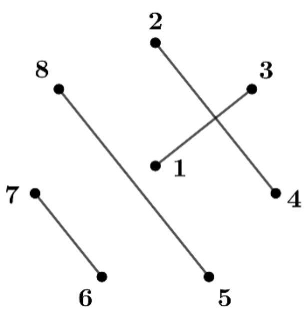


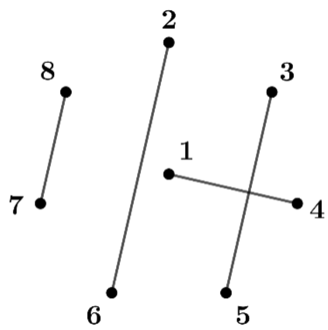
¿Cómo podemos encontrar todos los subgrafos que queremos de una forma metódica entonces? La solución que se va a ofrecer es el método de Kirkman, que aplicaremos para un torneo de 8 equipos.

Se colocan los ocho vértices del grafo de forma que hay un vértice central (que será nuestro equipo número 1) y los otros 7 equipos (del 2 al 8) en una circunferencia con centro el primer vértice. Ahora, unimos uno los vértices exteriores al central (por conveniencia, comenzaremos por el 2). El resto de los vértices se unen dos a dos, de forma que las aristas sean perpendiculares a primera arista formada. Esta será nuestra primera ronda:



Para las siguientes rondas, los emparejamientos se definirán rotando el esquema de este grafo, es decir, emparejando el vértice central con el siguiente número (mantendremos un orden horario dado la numeración actual); $1-3$, y uniendo el resto de los vértices con aristas perpendiculares (que tendrán la misma longitud que las definidas en el primer subgrafo). Siguiendo este proceso, rotando, se van definiendo las distintas rondas. Estas serían la 2º y 3º:

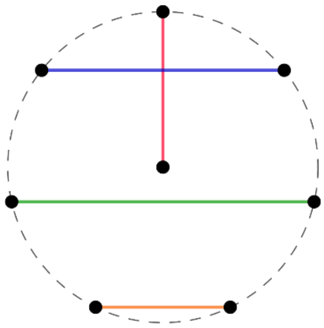




Para saber si esta construcción es válida, basta con comprobar que se dan todos los partidos. Dado que el vértice central se une en cada ronda a un vértice diferente, hay exactamente 7 rondas; en las que en cada una se juegan 4 partidos, luego hemos establecido $7 \times 4 = 28$ que son exactamente los necesarios para enfrentar 8 equipos todos contra todos (o las aristas de K_8). Si todos estos partidos son diferentes (ninguno se repite), la organización mediante este método será válida.

Para comprobar que todos los partidos son diferentes, basta fijarse en las aristas de los subgrafos. Se tratan de 4 aristas que son esencialmente diferentes:

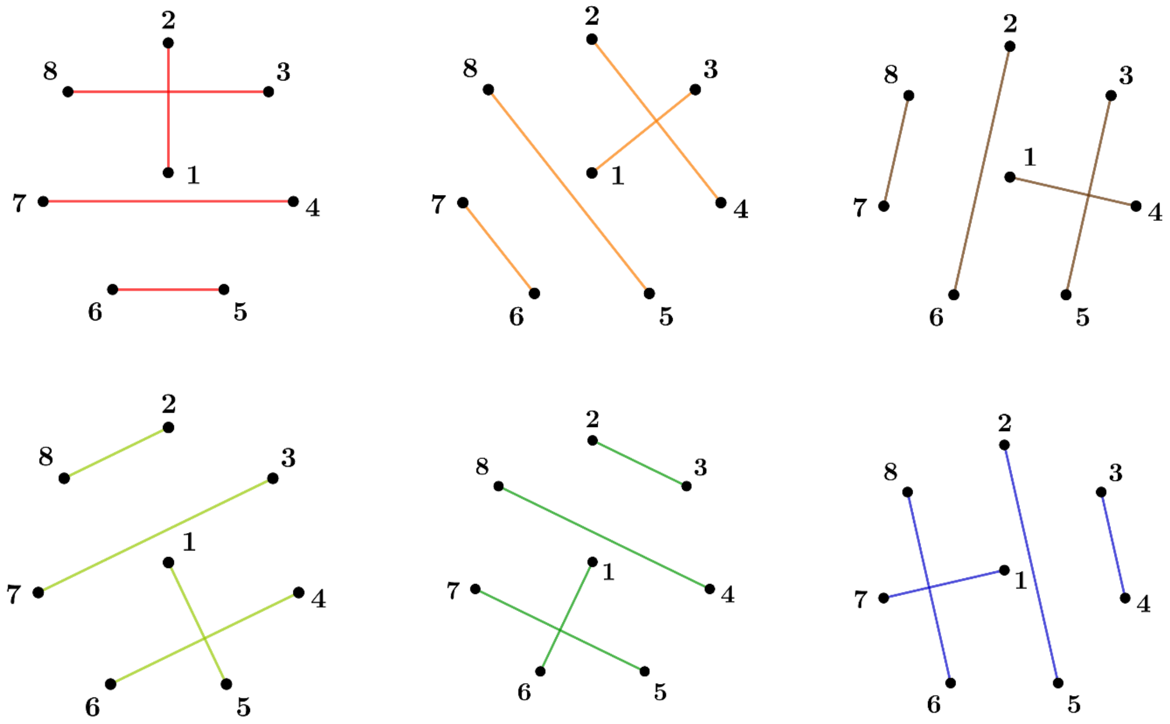
- La arista *central*, que une el vértice central con uno de la circunferencia (en esencia, es un radio)
- La arista *pequeña*, que une dos puntos de la circunferencia que son vecinos o adyacentes (se encuentran a distancia 1 si siguiéramos un camino por un arco de la circunferencia).
- La arista *mediana*, que une vértices de la circunferencia a una distancia mínima de 2 arcos de la circunferencia).
- La arista *grande*, que une vértices de la circunferencia a una distancia mínima de 3 arcos).

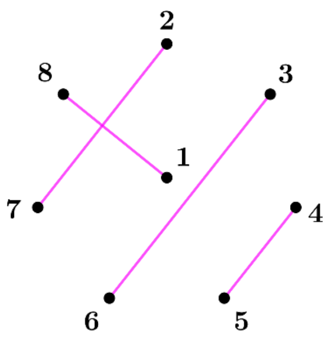


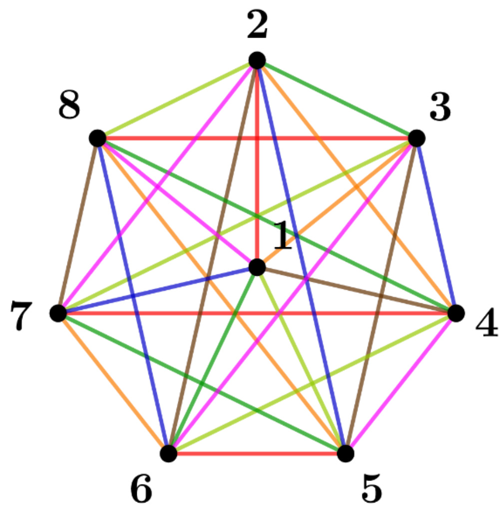
Si a un vértice fijo unimos cada una de estas aristas, es imposible por la construcción que sea adyacente a otro mismo vértice mediante dos aristas esencialmente diferentes. Por otro lado, al seguir un sentido horario y tener las distancias de arcos definidas en la no centrales un valor menor que la mitad de los vértices de la circunferencia, 7); en las dos rondas en las que cualquiera de estas aristas no centrales llega al vértice fijado, el otro vértice es también diferente. Con este se prueba que no hay ninguna arista repetida en todos los subgrafos, luego la construcción de una organización mediante este modelo es válida.

Nuestro torneo en este caso quedaría de la siguiente manera:

Jornada	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º
Central	$1-2$	$1-3$	$1-4$	$1-5$	$1-6$	$1-7$	$1-8$
Pequeña	$6-5$	$7-6$	$8-7$	$2-8$	$3-2$	$4-3$	$5-4$
Mediana	$8-3$	$2-4$	$3-5$	$4-6$	$5-7$	$6-8$	$7-2$
Grande	$7-4$	$8-5$	$2-6$	$3-7$	$4-8$	$5-2$	$6-3$







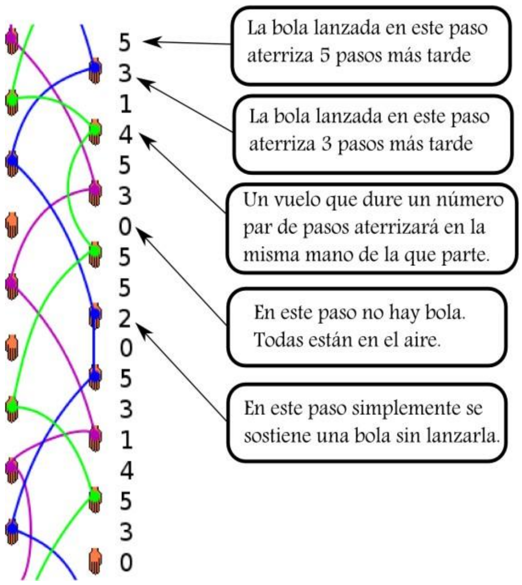
Las 7 rondas de un torneo de 8 equipos y el grafo completo como unión de los subgrafos, siguiendo el modelo de Kirkman.

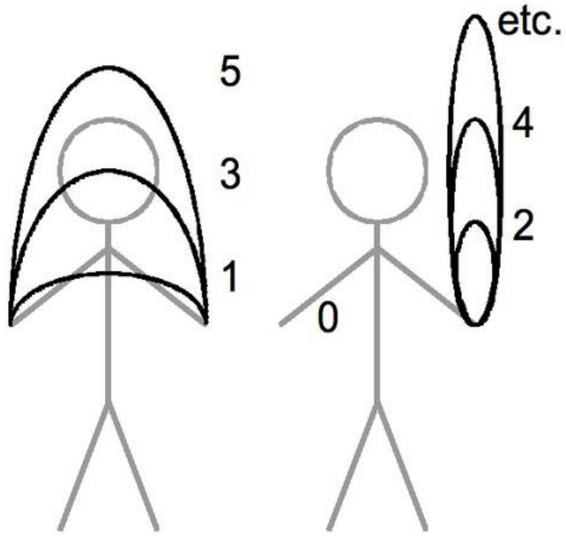
A partir del ejemplo con 8 equipos, se puede extrapolar fácilmente un caso general con $2n$. A partir de este ejemplo, se puede seguir trabajando con los alumnos con otros modelos para responder preguntas como: ¿Qué ocurre si hay un número impar de jugadores? (basta con incluir un equipo más, el descanso); ¿Cómo organizaríamos un torneo a ida y vuelta, que tenga en cuenta el lugar de local y visitante?; etc.

Juegos Malabares

¿Qué tienen que ver las matemáticas con los malabares? Bastante en realidad, aunque para entender bien como se pueden aplicar las matemáticas al ámbito de los juegos malabares es necesario introducirnos antes en alguna dinámica de esta actividad.

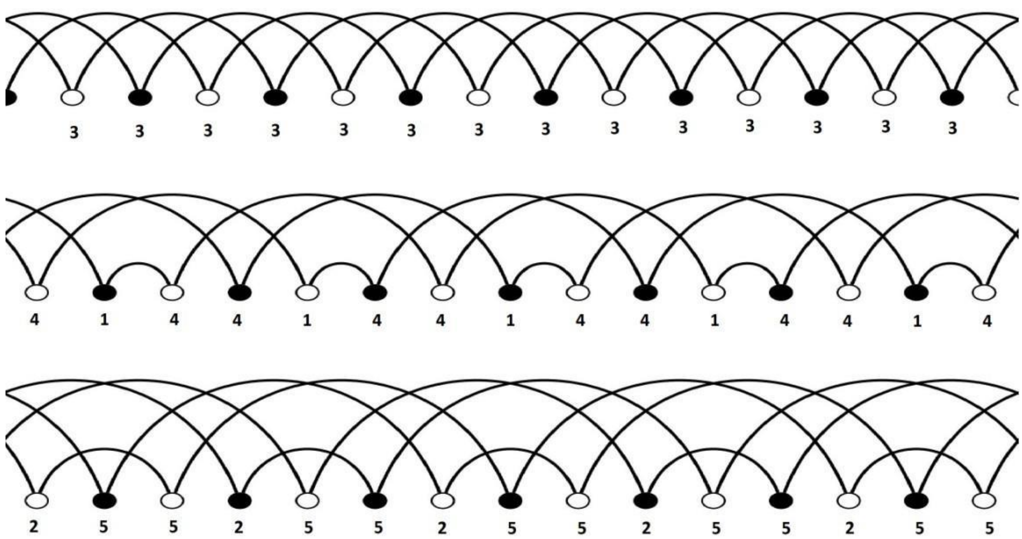
La principal relación se da de manera natural con la notación SITESWAP, utilizada por los malabaristas para compartir entre ellos los patrones de una secuencia malabar.





En esta notación, a cada lanzamiento se le asigna un número que representa la "altura" o el "tiempo" de lanzamiento, entendido como el número de lanzamientos ocurridos desde que una misma bola es lanzada, recibida y vuelta a lanzar (es decir, en un lanzamiento de altura 3, se harían otros dos lanzamientos antes de recibir esta bola).

De esta manera se pueden establecer esquemas de patrones clásicos como 3, 441 (de tres bolas) o 552 (4 bolas).



Una vez conocidas las secuencias, cabe preguntarse como interaccionan entre ellas. Para ello, pasamos a estudiar los estados malabares.

En un instante de tiempo, si las bolas se encuentran en el aire y van a caer, por ejemplo, en los instantes 1,2 y 4 siguientes, entonces se dice que el estado malabar en ese instante es:

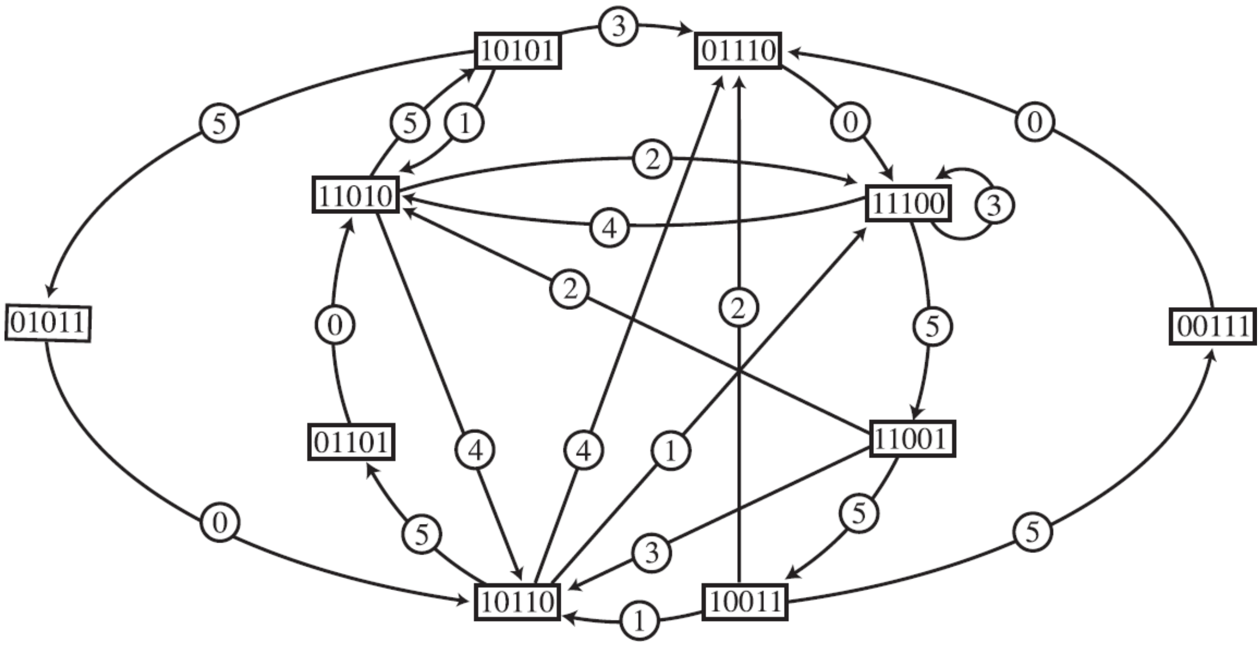
110100000 ….

Es decir, toma el valor 1 en los momentos en lo que una bola caerá y 0 en los que no. Desde este estado, la primera bola que cae se podrá lanzar a cualquier altura salvo 1 o 3 de forma que no caigan dos bolas a la vez. Si la altura es por ejemplo 4, se pasaría al estado construido mediante la eliminación del primer 1 y la sustitución del cuarto 0 por un 1, es decir:

10110000 …

De esta forma, recopilando los posibles lanzamientos (alturas) y sus estados malabares asociados, es posible establecer un grafo que relacione los estados (que serán los vértices) con cada lanzamiento de alturas permitidas (las aristas con valores asociados): el grafo malabar. Obsérvese que a diferencia de los grafos planteados en esta sección, este es un grafo orientado: las aristas parten de un vértice a otro en un único sentido, no relacionan dos vértices en igualdad de condiciones. No obstante, la idea de grafo orientado se asimila de manera lógica-visual al observar las flechas, por lo que no requiere estrictamente de un estudio aparte para casos simples.

Dejamos como ejemplo el grafo de tres bolas y altura máxima 5:



A partir de este grafo malabar, podemos buscar circuitos en él para volver a un mismo estado. Durante ese circuito, lo que se está realizando es una secuencia malabar. El estudio de los grafos malabares puede ayudar para descubrir que trucos son o no posibles, o cómo funciona la dinámica de las bolas.

21. Seguro que alguna vez has escuchado esta adivinanza clásica, parte del folclore de numerosos grupos étnicos africanos:

> “*Un hombre necesitaba transportar un lobo, una cabra y una col al otro lado de un río. Para ello, dispone de una barca en la que solo puede llevar una de sus pertenencias. Obviamente, no puede dejar al lobo solo con la cabra, porque se la come; ni puede dejar a la cabra solo con la col, por la misma razón.*
>
> *¿Qué procedimiento usará para que todos puedan cruzar el río ilesos?”*
>
> *Meavilla, V. (2011) El hombre, la cabra y la col.*

a) Resuelve el acertijo por la estrategia que creas conveniente.
b) Intenta hacer un modelo de grafos para resolverlo. Para ello, piensa primero:
    i. ¿Cuántos estados posibles hay? Esos serán nuestros vértices.
    ii. ¿Qué relaciones hay entre los vértices? ¿Son todas posibles? Estas serán nuestras aristas, las formas posibles de pasar de un estado a otro.
    iii. ¿Qué habrá que buscar en el grafo que resuelva el acertijo?
c) ¿Qué conclusiones sacas de las dos estrategias empleadas?

Números figurados

Introducción

Los números figurados, en especial los poligonales sobre los que se centrará este capítulo, suponen un potente recurso visual a la hora de adentrarnos en cuestiones de teoría de números y del álgebra, precisamente porque guardan una profunda relación con la geometría y permiten mediante estas interacciones la capacidad de obtener demostraciones y propiedades visuales que puedan ser más accesibles para los alumnos.

A pesar de estas ventajas, podría sorprender que estas representaciones tienen muy poca representación en el currículo oficial y son conocidas prácticamente como "recurso curioso" en algunos libros de texto o relegadas a libros de divulgación. En concreto, se mencionan únicamente en los contenidos de 1º de ESO del BOCyL (2015) de donde se podrían extraer estas menciones:

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
PRIMER CURSO		
Bloque 2. Números y Álgebra		
Significados y propiedades de los números en contextos diferentes al del cálculo: números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.	6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.	6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas. 6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. 6.3. Utiliza las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.

Como señalan Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J. y Morera, L. (2016), los números figurados son extremadamente útiles para descubrir propiedades y argumentarlas a la hora de trabajar con los números naturales, en una representación más allá que la simple recta numérica (sí presente por costumbre en los centros educativos). Son además ideales también para una introducción al álgebra, como muestran las actividades que plantean el grupo Azarquiel (1993), que utilizan estos números como un recurso principal a la hora de comenzar a trabajar procesos de generalización; o de razonamiento inductivo (que no confundir con la inducción matemática, aunque guarda una estrecha relación), como muestran Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., Hernández, J. (1996).

Por otro lado, Gairin. J.M., y Sancho, J. (2002) destacan la necesidad educativa de los sistemas de representación dada su importancia en los procesos cognitivos que se dan al trabajar con representaciones de conceptos e ideas matemáticas; pues implican un pensamiento profundo acerca de las estructuras numéricas y sus relaciones.

Por estas últimas cualidades, se considera oportuno que centraremos nuestro nivel en 3º ESO, sirviéndose además de generar un contexto de aprendizaje y unos recursos que puedan resultar útiles y generar unas intuiciones matemáticas que ayuden a reforzar temario posterior y de cursos superiores, en especial en relación a las series y sucesiones aritméticas y geométricas.

Una propuesta de contenidos que se hace en este curso es entonces la siguiente (añadiendo y ampliando las que ya se tenían en 1º ESO):

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
TERCER CURSO		
Bloque 2. Números y Álgebra		
Representaciones numéricas. Números poligonales: Triangulares, cuadrados, pentagonales y de orden superior. Identidades derivadas del uso de números poligonales. Números figurados tridimensionales: Tetraédricos y piramidales. Significado y propiedades de estos contextos. Razonamiento inductivo.	1. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas. 2. Reconocer los números figurados, los patrones que siguen y las estructuras geométricas relacionadas, así como servirse de estas propiedades para comprobar y demostrar identidades y relaciones de los números naturales, tanto de manera visual como algebraica. 3. Desarrollar un razonamiento inductivo e hipotético a través de la formulación de hipótesis, comprobación de estas, generalizaciones y abstracción, basándose principalmente en pruebas visuales pero desarrollando identidades algebraicas de manera correcta.	1.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas. 1.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones. 1.3. Utiliza las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas. 2.1. Conocer la construcción de los números poligonales en relación a la diferencia entre dos números consecutivos (en el contexto histórico griego) así como sus patrones geométricos. 2.2. Desarrollar la fórmula de suma de los primeros números naturales, relacionando su construcción mediante números triangulares con la demostración de Gauss. 2.3. Desarrolla relaciones entre los números triangulares y el resto de los números figurados, basándose en la fórmula del número triangular para probar otras identidades. 2.4. Reconoce los patrones de figuras tridimensionales como los números tetraédricos y piramidales; siendo capaz de

		relacionarlos con los poligonales estableciendo un razonamiento visual interdimensional. 3.1. Establecer hipótesis sobre patrones en los números poligonales, que comprueba y generaliza. 3.2. Encuentra relaciones de manera visual en las estructuras de los números figurados; y formula dichas relaciones de manera algebraica. 3.3. Distingue entre demostración formal, prueba visual y ejemplo, entendiendo las relaciones entre todos ellos pero diferenciando lo concreto de lo general.

Desarrollo de los contenidos

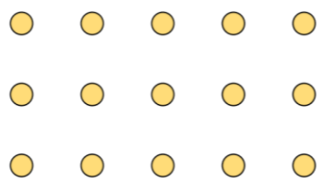
Representaciones numéricas

Se suele atribuir a la escuela pitagórica el uso de piedrecillas (cálculos) o figuras dibujadas para representar los números, de forma que cada número puede tener unas propiedades en función de la forma geométrica que se establezca.

Se trata de los números figurados, que precisamente se pueden representar gráficamente mediante figuras geométricas, o físicamente mediante acumulación de objetos. Entre ellos, se va a enfocar primariamente en números figurados planos, que se denominan poligonales en tanto que seguirán formas de un polígono.

Un primer ejemplo muy útil puede ser estudiar aquellos números que se pueden representar mediante un rectángulo (de al menos dos filas o columnas) y no, pues servirá para distinguir aquellos números primos de los que no:

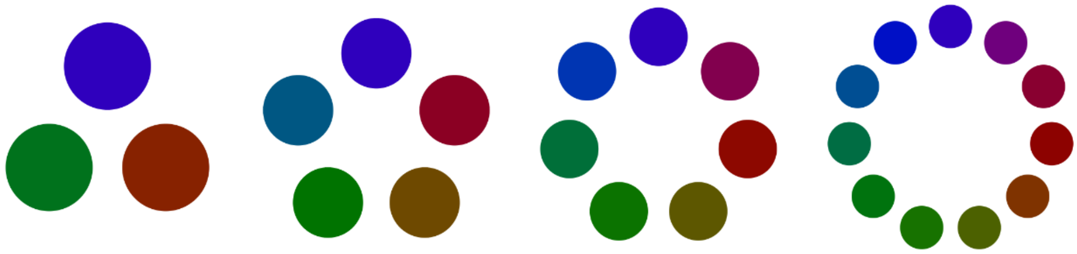
$7 \;\; primo$



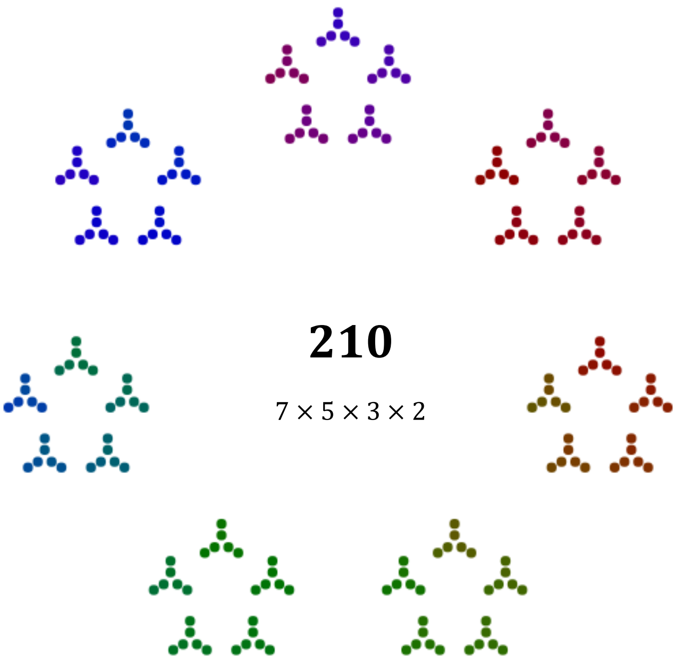
$15 = 3 \times 5 \;\; compuesto$

A este aspecto puede resultar muy útil para introducir las representaciones y trabajar de nuevo con los números primos (y con los divisores de un número, también); La Danza de los números los Números Primos, una animación interactiva realizada por Von Worley,

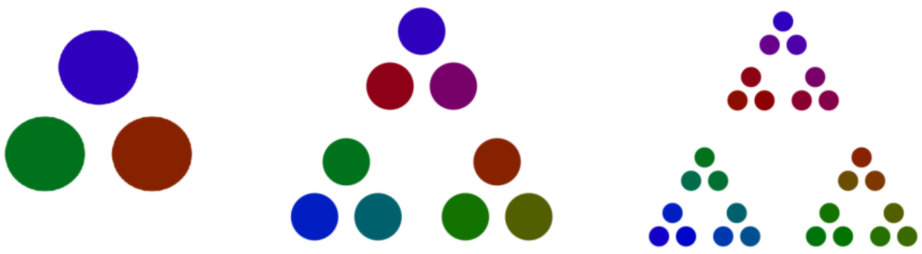
S. (2012) donde se van sucediendo todos los números naturales representados mediante diagramas de factorización (Yorgey, B. (2012)), de forma que para cada número natural se representa una cantidad de figuras geométricas igual al valor de dicho número; pero agrupadas en función de los divisores del número en cuestión; siguiendo una estructura circular. Por ejemplo, un número primo tendrá todos sus elementos dispuestos alrededor de un círculo (aunque se distinguirán las figuras de un triángulo, pentágono, heptágono etc. para el 3, el 5, el 7, etc. respectivamente):

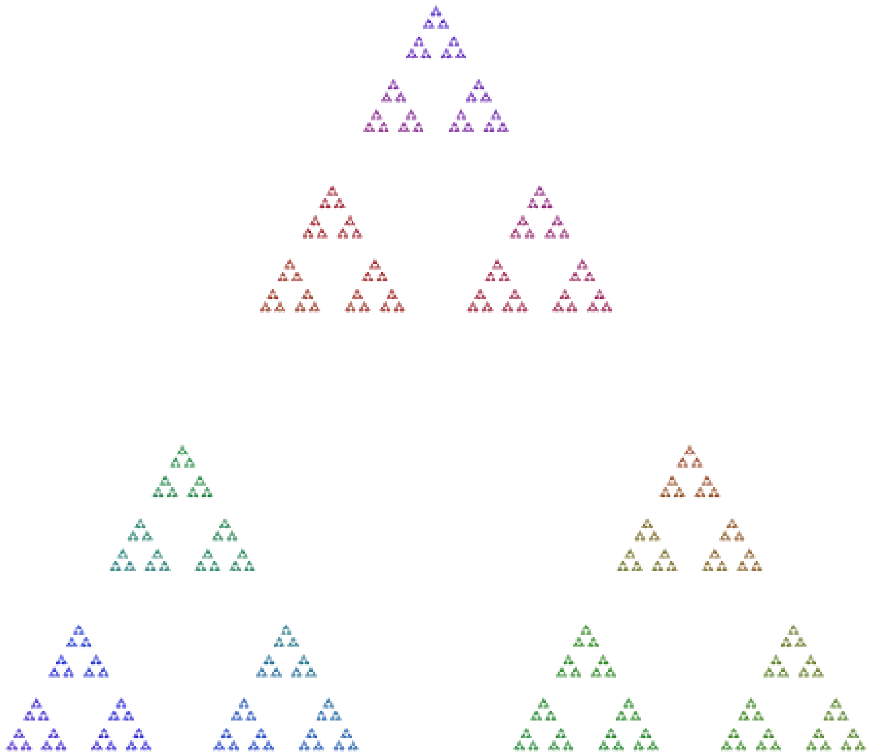


Por otro lado, cualquier número compuesto se representa agrupando bloques del tamaño de uno de los divisores. Por ejemplo, $210 = 7 \times 5 \times 3 \times 2$ en el que se pueden observar 7 bloques que mantienen la estructura del número $30 = 5 \times 3 \times 2$: 5 bloques con una estructura del número 6 (tres bloques de dos). Todos los divisores están de esta forma representados de alguna manera u otra en este diagrama:



Como curiosidad, con esta animación se pueden trabajar algunos otros aspectos muy interesantes acerca de los números primos, los divisores e incluso otras áreas de las matemáticas como los fractales, pues, por ejemplo, las potencias de 3 (números de la forma 3^k van formando una estructura similar al triángulo de Sierpinski, se añade un ejemplo con las primeras potencias y la séptima).

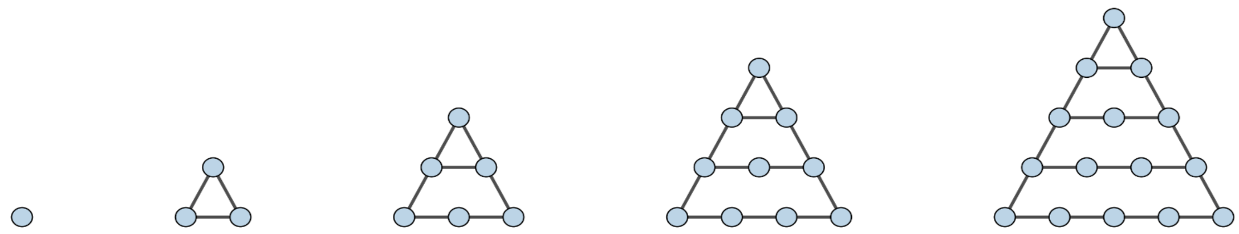




Evidentemente, era de esperar que una estructura organizada en función de los divisores guarda propiedades de autosimilitud en las potencias de números definidos (en especial los primos) y estructuras interesantes se obtienen también con $2^n, 5^n, 7^n, \ldots$ No obstante, este estudio se escapa del tema principal al que se quiere referenciar este capítulo, por lo que nos centraremos en los números poligonales.

Números poligonales

Los números triangulares son aquellos que se obtienen por adición sucesiva de los términos de la serie natural $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ (de Alejandría, D., 2007). Pueden ser representados como mediante figuras triangulares, siguiendo el patrón que se muestra a continuación:



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$ $T_5 = 15$

Como se puede observar, se establece un orden en función del número de filas del triángulo representado, se usará la notación T_k para indicar el k-ésimo número triangular, que cumple que

$$T_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$$

Es decir, es la suma de todos los números naturales desde el 1 hasta el número k. En general, la representación es siempre triangular, pero no tiene por qué ser la misma. A lo largo de este trabajo, de hecho, se utilizarán de igual manera triángulos equiláteros, isósceles o rectángulos en función de las necesidades.

Los números triangulares resultan ser entonces $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots$

Es de especial interés a este punto plantearse cuál puede ser el número triangular k-ésimo, para cualquier k, sobre todo porque supone la suma de todos los números naturales desde el 1 hasta el número k. Es incluso probable, que, aunque pueda ser de un nivel superior, alguno de los alumnos ya conozca la anécdota de Gauss al sumar los cien primeros naturales. Se puede incluso plantear como ejercicio:

1. Se dice que en sus primeros años en la escuela, un maestro castigó a toda la clase de un jovencísimo Carl (Gauss) a sumar todos los números naturales del 1 al 100 (aunque después de este hecho ya se cambiaron los castigos por copiar 100 veces el mismo enunciado). Gauss lo logró en apenas en unos minutos, dejando a toda su clase sorprendida.

Para hacer la suma, Gauss se dio cuenta que si colocaba los números del 1 al 100 ordenados, y justo debajo los mismo pero en orden inverso, ocurría el mismo hecho en todas las columnas:

1	2	3	4	5	...	98	99	100
100	99	98	97	96	...	3	2	1
					...			

a) ¿Qué patrón se dio cuenta que se repetía? (Pista: Prueba a hacer operaciones con los dos números de la columna, ¿qué resultados obtienes?)

b) Sabiendo este patrón, ¿Cuánto será la suma de todos los números de la tabla?¿Cuántas veces has contado cada número?
c) Imagínate que ahora queremos calcular la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 56 + 57$. ¿Serías capaz de repetir el mismo proceso para hallar esta suma?
d) Con lo que has visto hasta ahora, ¿puedes conjeturar una fórmula para hallar el valor de la suma

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k$$

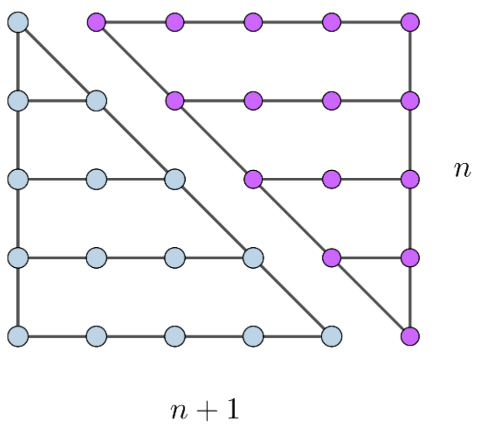
Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ (k número natural)?
e) Prueba esta fórmula con valores pequeños ($k = 2, 3, 4, 5, \ldots$) ¿se cumple? ¿Qué se cumpla en estos casos quiere decir que la fórmula está necesariamente bien?

Tras un ejercicio de este estilo, y la ayuda del profesor si es necesario, es de esperar que los alumnos conozcan ya la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Nótese aquí una diferencia respecto al planteamiento que propone el currículo oficial y el que se propone en este trabajo. Tal como explicita el BOCyL (2013), las sumas de progresiones aritméticas son un contenido propio de 3º de la ESO. Sin atender a detalles sobre si este nivel debería ser o no el más adecuado para establecer este contenido, el planteamiento de este trabajo es que en un nivel inferior ya se puede trabajar con sumas finitas como la propuesta, sin necesidad propia de adentrarnos en temática de progresiones si no se considera oportuno y, sobre todo, valiéndonos de recursos visuales que "siembren una semilla de conocimiento", exijan un esfuerzo cognitivo por parte de los alumnos, que será recompensado en niveles superiores pues se espera una reflexión interna de los conceptos y un desarrollo de la competencia matemática (y otras) a este nivel.

Por su parte, los números triangulares pueden ser de gran ayuda para ofrecer un recurso más al planteamiento que ofreció Gauss, pues de hecho la lógica es la mismo, pero además trabajando con una perspectiva visual y geométrica. En concreto, por la propia definición de T_k y sus estructuras (recuérdese que $T_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k$); podemos unir dos números triangulares para un n natural dado de forma que se forma el rectángulo de lados k y $(k+1)$:



Y entonces es muy fácil discurrir (lo que supone un acercamiento también al álgebra que ya se ha comentado) que

$$2 \cdot T_k = k \cdot (k+1)$$

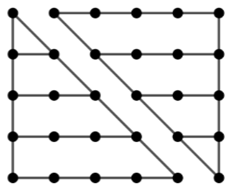
Luego (a este nivel ya se sabe resolver ecuaciones de 1º grado):

$$T_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Indicar que los números que se pueden representar como un rectángulo de lados k y $k+1$ (es decir, son producto de dos números consecutivos) se denominan números oblongos, denotados como O_k.

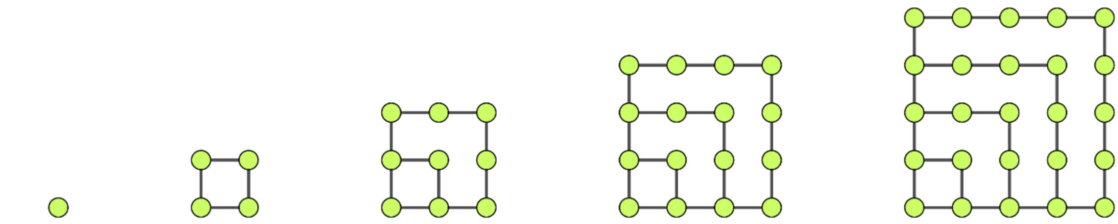
Una actividad interesante consiste en relacionar el procedimiento utilizado por Gauss con su semejante visual utilizando los números triangulares que se ha propuesto en la página anterior. Es muy intuitivo concluir que al situar un segundo triángulo invertido, el número de puntos de cada fila será en todas de $n+1$ bolas, y que por tanto hay n filas (las del triángulo) con ese número de bolas, lo cuál permite hipotetizar la fórmula ya dada. Como indica Azarquiel (1993), este proceso de percepción es en general rápido e intuitivo, pero puede ser necesario se favorezca de alguna manera. Se propone un ejercicio como el siguiente para trabajar esta idea:

2. Observa la siguiente disposición de dos números triangulares:



a) ¿Qué números triangulares son? ¿Por qué crees que están en esta posición?
b) ¿Cuántos puntos hay en cada fila? ¿Cuántas filas hay? ¿Cuántos puntos hay en total?
c) Si tomásemos otro número triangular, ¿se pueden colocar en la misma disposición? Haz un dibujo de cómo serían las posiciones para T_2, T_3, T_4.
d) ¿Qué pasaría si quiero hacer lo mismo con T_{100}? Haz un esquema de cómo quedaría la disposición, explicando cada detalle.
e) ¿Cuántos puntos hay en dos T_{100}? ¿Y en uno?
f) Relaciona este dibujo con el método que descubrió Gauss del ejercicio 1.
g) ¿Sabrías dar una fórmula para saber cuántos puntos tiene T_k, para cualquier k natural?

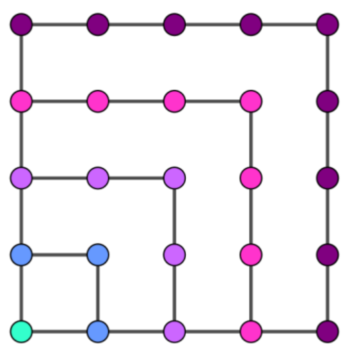
De igual manera a los triangulares, se pueden definir los números cuadrados, cuya definición formal es que se trata de los números que se forman sumando los términos de la serie $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$; pero su importancia radica en que pueden ser representados prolongando dos lados contiguos del cuadrado y completando este. Se forma un patrón como el siguiente:



$C_1 = 1$ $C_2 = 4$ $C_3 = 9$ $C_4 = 16$ $C_5 = 25$

Un primer razonamiento visual que ya se puede ejercer con los números cuadrados es evidente, y es que, con una notación similar a los triangulares; es evidente que $C_k = k^2$; es decir, de manera redundante, los números cuadrados son cuadrados perfectos; en tanto que es el número de puntos dispuestos en un cuadrado con k puntos de lado. Para el resto de este capítulo, utilizaremos en general la expresión k^2 para referirnos al número cuadrado Pero principalmente esta estructura ofrece una demostración visual del siguiente resultado:

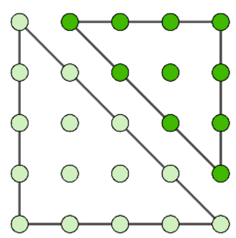
$$k^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1)$$



$$C_5 = 25 = 5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Es decir, las sumas de los primeros k números impares consecutivos son siempre un cuadrado perfecto, k^2.

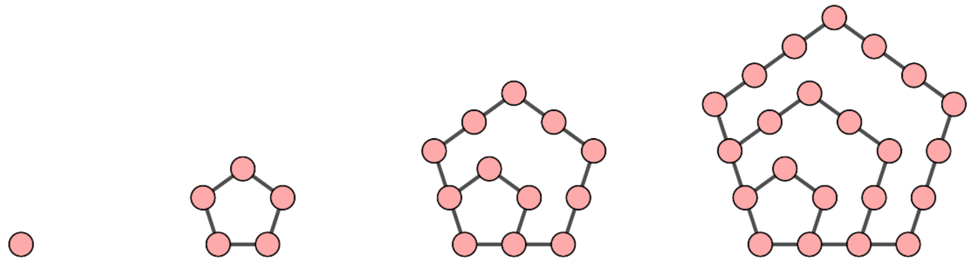
Una perspectiva visual que ayudará posteriormente a realizar tareas más complicadas es observar la relación que hay entre los números triangulares y los cuadrados. Basta un vistazo rápido al esquema de la izquierda para observar que podemos unir dos números triangulares consecutivos para formar un cuadrado.



Se trata de un soporte visual en el que es fácil comprobar que

$$k^2 = T_k + T_{k-1}$$

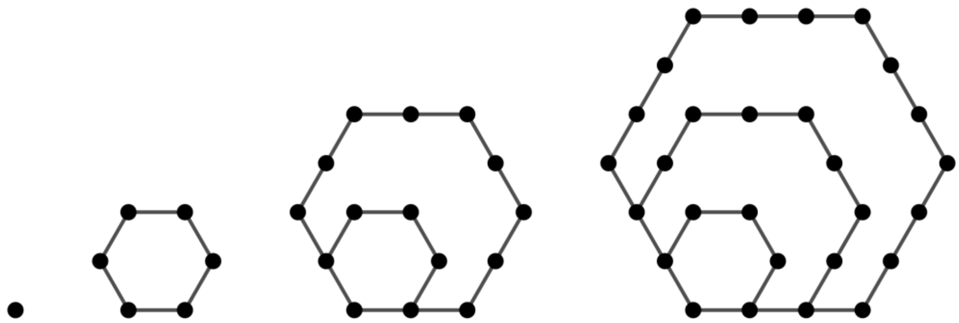
Siguiendo con las estructuras definidas, podemos terminar introduciendo los números pentagonales, que, como siguiente paso a las anteriores representaciones; son aquellos números que se forman sumando los términos de la serie 1, 4, 7, 11, ... Como es de esperar por su nombre, se podrá obtener una representación en forma de pentágonos:



$P_1 = 1$ $P_2 = 5$ $P_3 = 12$ $P_4 = 22$

Una vez ya se ha establecido un patrón con los alumnos, podemos empezar a trabajar su razonamiento inductivo para establecer números de orden superior:

3. Fíjate en la siguiente secuencia. Se llaman los números hexagonales:



H_1 H_2 H_3 H_4

a) ¿Por qué crees que se llaman hexagonales? ¿Cómo se forma un número a partir del anterior? Haz un dibujo de H_5.
b) Cuente el número de puntos que hay en cada figura, ese el valor del número hexagonal. Resta a cada número hexagonal su anterior. ¿Identificas algún patrón?
c) Establece una hipótesis sobre cuánto valdrá H_5 según el patrón de b). ¿Se cumple? Calcula H_6 y H_7.

4. Sea $X_1 = 1$. Definimos los siguientes números de la siguiente manera:

$$X_2 = X_1 + 6; \quad X_3 = X_2 + 11; \quad X_4 = X_3 + 16; \quad \ldots$$

a) Calcula los números X_2, X_3, X_4.
b) Se llaman los números heptagonales. ¿Sabrías dibujar X_2 y X_3?
c) Con la ayuda de las diferencias entre números heptagonales y sus estructuras, calcula X_5, X_6, X_7.

5. Ya hemos trabajado con números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales y heptagonales. Fíjate bien en cada caso como se podían representar, como se formaban y la diferencia que había entre dos consecutivos. ¿Podrías explicar se forman los números octogonales? ¿Y los endecagonales? Calcula en cada caso los cuatro primeros números de cada clasificación.

6. Vamos a extrapolar los resultados del ejercicio anterior. ¿Cuál será el primer número hexagonal? ¿Y el segundo y el tercero?

(Nota: El hectágono es el polígono regular de 100 lados)

Hacer una tabla con los primeros números de cada tipo es también una buena actividad, pues ayudará a encontrar patrones con los que luego trabajar para establecer algoritmos y deducciones. En este caso, los k-ésimos números n-gonales serán:

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n = 3$ (triangular)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
$n = 4$ (cuadrado)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$n = 5$ (pentagonal)	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
$n = 6$ (hexagonal)	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
$n = 7$ (heptagonal)	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
$n = 8$ (octogonal)	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280

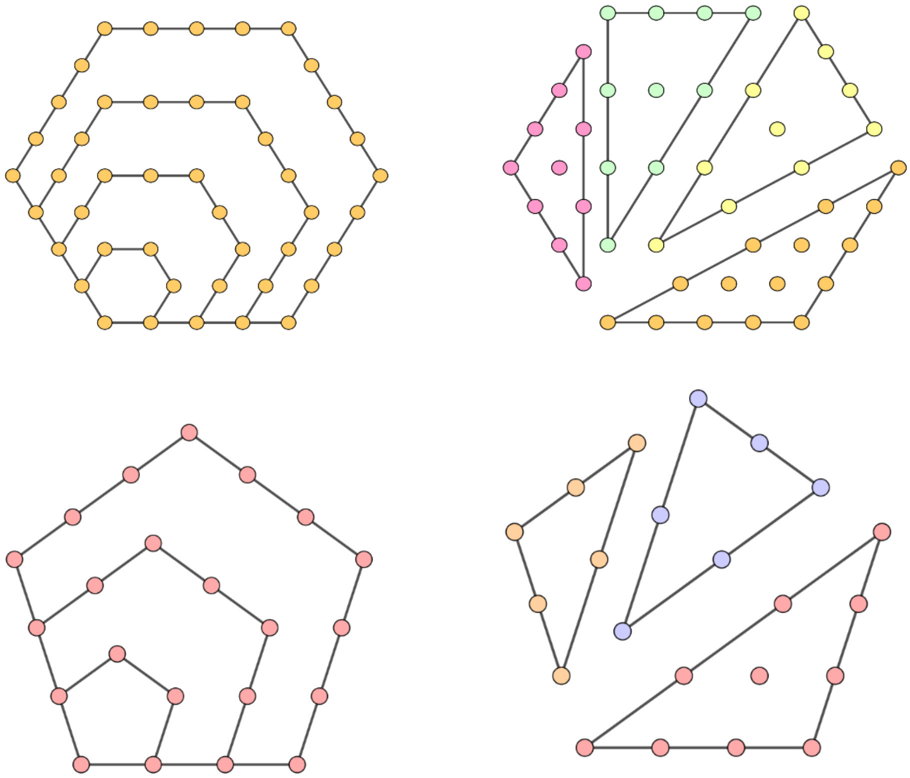
Esta tabla servirá en adelante para hacer comprobaciones sencillas de las relaciones que establezcamos. Podemos observar también que los números crecen linealmente en cada columna mientras que de forma cuadrática (linealmente la diferencia) en cada fila. Obviamente, términos y conceptos como la linealidad escapan al nivel que estamos planteando, pero si podemos hacerles trabajar un poco sobre estas características de manera intuitiva:

7. Observa la tabla de los primeros números poligonales de cada tipo.

a) En cada fila, observa las restas que hay entre dos números consecutivos. ¿Qué patrones encuentras? Este hecho se debe a la manera en que hemos construido cada tipo de número poligonal.
b) Vamos ahora a estudiar cada columna por separado. ¿Qué ocurre si le resto a un número el que está justo encima?¿Depende de la columna y/o la fila en la que esté?

Para concluir con las definiciones de los números poligonales, vamos a establecer algunas relaciones entre ellos, en concreto las relaciones que hay entre los triangulares y el resto.

Estas relaciones se pueden encontrar visualmente en poder “triangular” las figuras de orden superior. Por ejemplo, en el caso del $H_5 = 45$ (quinto número hexagonal) o $P_4 = 22$ (cuarto pentagonal):



Es intuitivo a través de la visualización que estas relaciones se mantienen si aumentamos el orden del número poligonal en cuestión. Así, observando que $H_5 = T_5 + 3T_4$ o $P_4 = T_4 + 2T_3$ podemos trabajar con el razonamiento inductivo para obtener las fórmulas (añadiendo la que ya sabíamos de los cuadrados):

$$C_k = T_k + T_{k-1}; \quad P_k = T_k + 2T_{k-1}; \quad H_k = T_k + 3T_{k-1}$$

En realidad estas deducciones (de las que no se ha dado una demostración explícita y es además importante que este pensamiento sea también impartido a los alumnos) vienen a corroborar una fórmula general que también podría ser deducida a partir de estos ejemplos una clase abierta:

El número n-gonal k-ésimo es igual a $T_k + (n-3)T_{k-1}$

Y además, como ya sabemos cuánto vale cada número triangular, se puede llegar a una fórmula general para número n-gonal k-ésimo:

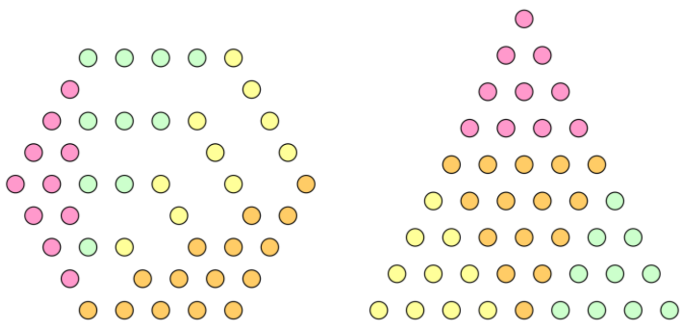
$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot (k+1) + (n-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot (k-1) \cdot k = \frac{1}{2}[(n-2)k^2 - (n-4)k]$$

Se puede jugar con esta fórmula como un test para comprobar si un número pertenece a cierto polígono; para hallar números que sean a la vez de dos tipos (por ejemplo, cuadrado y triangular, como el 36), etc.

Aunque sea un nivel más elevado, con una correcta guía del profesor se puede incluso jugar con la tabla y la fórmula para descubrir patrones dentro de los números poligonales.

8. Fíjate que todos los números hexagonales son también triangulares. Observa la tabla,

a) ¿Puedes encontrar alguna relación que parezca existir entre los triangulares y los hexagonales?
b) Observa ahora la siguiente figura:



¿Qué números aparecen representados?¿Qué observas con esta coloración?

c) Vamos a tratar de ver esta relación de manera algebraica. Recuerda que el número n-gonal k-ésimo es el siguiente:

$$\frac{1}{2}[(n-2)k^2-(n-4)k]$$

i. Comprueba que T_9 y H_5 son el mismo número.
ii. Pruébalo para otros dos ejemplos de números triangulares y hexagonales que sean el mismo. ¿Qué observas al comparar las k en los triangulares y hexagonales?
iii. Demuestra que $H_k = T_{2k-1}$, para cualquier k.

9. Fíjate en los números triangulares de la tabla. Observa que siguen un patrón sobre si el número es par o impar que es el siguiente: $I-I-P-P-I-I-P-P-\cdots$

a) El número T_{11}, ¿será par o impar? ¿Y el número T_{25}? ¿Y T_{100}?
b) Recuerda la definición de los números triangulares, que se forman sumando consecutivamente los números $1, 2, 3, 4, \ldots$. ¿Tiene sentido este patrón? ¿Por qué se da?

10. Siguiendo el ejemplo del ejercicio anterior, fíjate ahora en los números cuadrados que son pares e impares.

a) ¿Hay algún patrón?
b) Piensa que $C_k = k^2$, ¿se puede explicar con esta fórmula el patrón que has establecido?
c) Piensa ahora como se forman los números cuadrados, sumando que números. ¿Puedes explicar el patrón desde esta definición?
d) ¿Qué ocurre con los pentagonales, los hexagonales, etc.? Observa la tabla y plantea alguna hipótesis. ¿Puedes explicarla?

Identidades a partir de números triangulares

Siguiendo en su mayoría algunos ejemplos que propone Nelsen, R. (2018) y Calvo, C. Deulofeu, J., Jareño, J. y Morera, L. (2016); podemos trabajar a partir de los números triangulares para establecer varias identidades algebraicas conocidas. Por supuesto, los ejemplos que se muestran a continuación no suponen en todos los casos una demostración explícita de las identidades; y todas ellas pueden ser demostradas mediante un método algebraica (usando la inducción matemática, en la mayoría de los casos). Aún así trabajar con estos ejemplos en el aula nos puede ayudar a desarrollar competencias específicas de las matemáticas como la generalización, abstracción, modelización, razonamiento inductivo y planteamiento de hipótesis.

1. Sumas consecutivas de enteros consecutivos

Si se considera la secuencia de números enteros positivos

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ \ldots$$

se pueden establecer igualdades integrando los signos $+$ y $=$ en la secuencia de números consecutivos anterior.

En un primer juego, se puede realizar una actividad en el aula para ver si cuántas de estas relaciones se encuentran. Como mínimo, aparecerán las siguientes igualdades:

$$1 + 2 = 3; \quad 4 + 5 + 6 = 7 + 8; \quad 9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15; \ldots$$

Y se puede hipotetizar la identidad:

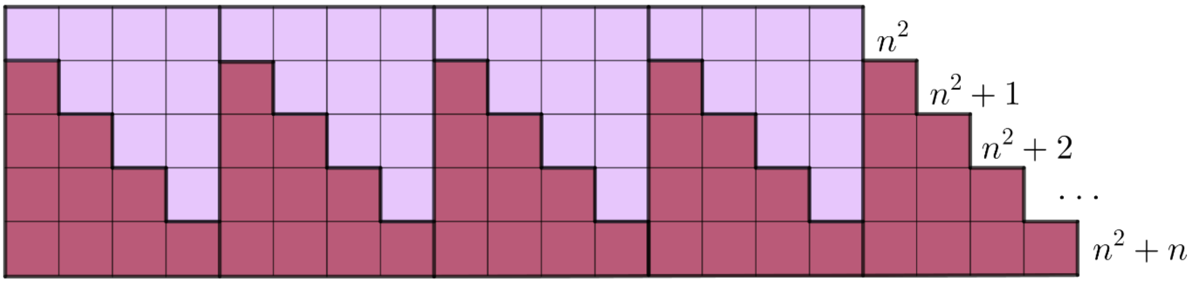
$$n^2 + (n^2 + 1) + \cdots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + \cdots + (n^2 + 2n)$$

Como a este nivel ya conocerán las identidades del tipo $(a + b)^2$, se puede destacar que el siguiente término en la secuencia se trata de $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$; con lo que la identidad continúa y engloba a todos los números naturales.

Esta identidad es muy visual si recurrimos a los números triangulares. En primer lugar, guiados por el profesor, la clase debe notar que las primeras sumas, 3, 15, 42; son múltiplos impares de los números triangulares, en concreto $3T_1, 5T_2, 7T_3$. En general:

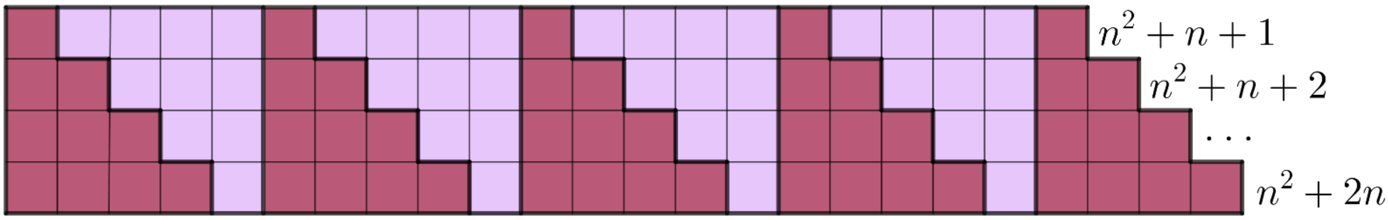
$$n^2 + (n^2 + 1) + \cdots + (n^2 + n) = (2n + 1)T_n$$

Este hecho se puede comprobar en el siguiente ejemplo, con $n = 4$.



La base de n triángulos T_n tiene n^2 unidades. Si a estos n le añadimos otros $n + 1$ de la forma estructurada, tendremos $n + 1$ filas con los valores consecutivos desde n^2 hasta $n^2 + n$, lo que concluye la última fórmula mostrada.

Para completar la identidad, basta con intercambiar la configuración de los triángulos, de forma que, con los mismos $(2n + 1)T_n$, se tiene que:



Donde hay n, cada una con $n(n + 1) = n^2 + n$ elementos más la fila correspondiente del triángulo sobrante, es decir, las filas son los números consecutivos desde el $n^2 + n + 1$ hasta $n^2 + 2n$.

2. Sumas de enteros al cubo

Una identidad algebraica bastante conocida es la suma de los primeros n enteros al cubo, que cumple que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Los números triangulares son de gran utilidad en este caso en tanto que la expresión de la izquierda no es otra que T_n^2.

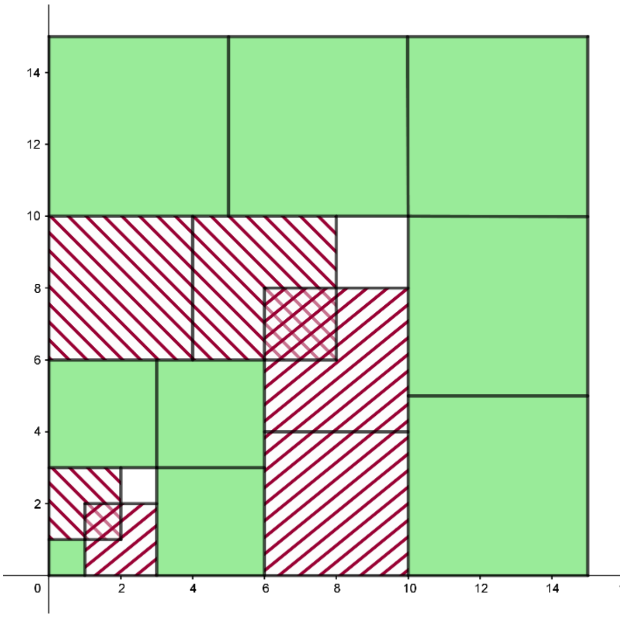
Al describir los números triangulares y cuadrados, ya se observó que $k = T_k - T_{k-1}$; mientras que $k^2 = T_k + T_{k-1}$. Si combinamos ambas expresiones:

$$k^3 = k \cdot k^2 = (T_k - T_{k-1}) \cdot (T_k + T_{k-1}) = T_k^2 - T_{k-1}^2$$

Dado que $T_1^3 = T_1^2 = T_1 = 1$, podemos reconvertir las sumas de cubos de la siguiente manera:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = T_1^2 + (T_2^2 - T_1^2) + (T_3^2 - T_2^2) + \cdots + (T_n^2 - T_{n-1}^2) = T_n^2$$

Esta demostración (bastante algebraica), se puede acompañar fácilmente con una demostración visual como la que se expone a continuación, representando k^3 como k copias de k^2 como se muestra en la siguiente figura, para $n = 5$:



Obsérvese que cuando k es impar, podemos colocar ese número de cuadrados encajados a la perfección.

Por otro lado, k es par, dos cuadrados se superponen. No obstante, la misma área que se superpone se corresponde con el área que se deja sin cubrir. Esta visualización nos puede también ayudar a trabajar brevemente conceptos como el de inclusión exclusión.

3. Divisores de un número triangular.

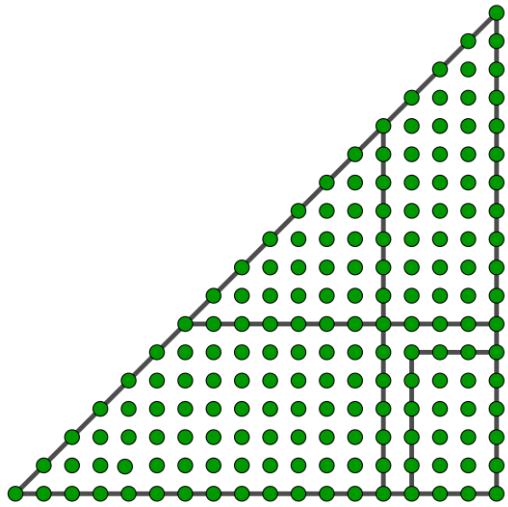
Podemos establecer este ejemplo como una actividad con los alumnos:

11. Vamos a trabajar la siguiente relación:

$$T_n = pq \iff T_{n+p} + T_{n+q} = T_{n+p+q}$$

a) Busca valores enteros n, p, q donde se cumpla la primera propiedad ¿se cumple la segunda?
b) Busca valores enteros n, p, q donde se cumpla la segunda propiedad ¿se cumple la primera?

Observa la siguiente figura:



c) Identifica en la figura $T_7 = 28$, T_{11}, T_{14} y T_{18}. ¿Se cumple la propiedad para estos tres números?¿Cuáles serán los divisores p y q?

d) Fíjate en T_{11}, T_{14} marcados en la figura, ¿en cuántos puntos coinciden exactamente? ¿Cuántos puntos de T_{18} no están recubiertos por estos dos triángulos?

e) ¿Se cumple con esta estructura la relación indicada? Explica por qué.

f) ¿Se puede repetir esta estructura con otros números? Dibuja para ejemplos más pequeños una disposición similar.

g) Haz un esquema general de esta estructura para números n, p y q cualesquiera. Explica con tus propias palabras por qué la relación es cierta.

4. El juego de los triángulos.

Esta actividad se propone como un juego de cálculo y estrategia que los alumnos pueden practicar en una sesión. Servirá en gran manera para que los alumnos se familiaricen con los números triangulares y otros números poligonales (en otras versiones).

La componente teórica que da fundamento al juego es el Teorema Eureka de Gauss, que establece que todo número natural se puede escribir como la suma de tres números triangulares o menos[4].

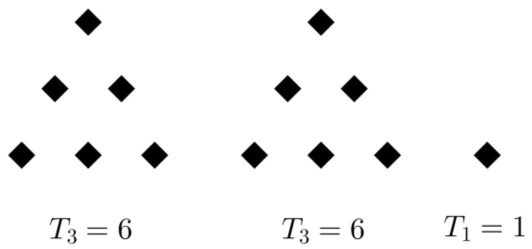
La demostración de este resultado la omitiremos dado el nivel con el que estamos trabajando, pero juegos como el que se plantea nos pueden servir para que los alumnos terminen conociendo el resultado y también se planteen estrategias de resolución y búsqueda de números triangulares.

[4] https://proofwiki.org/wiki/Integer_is_Sum_of_Three_Triangular_Numbers

12. **El juego de los triángulos.**

Para realizar este juego se usará como material una cantidad suficientemente grande de fichas y un dado. Para dos jugadores se puede comenzar con 10 fichas encima de la mesa. Si el número de jugadores es más alto, se puede empezar con un número menor de fichas. Cada jugador, en su turno, lanza el dado y añade tantas fichas como el valor que haya sacado en el dado. Por ejemplo, si saca un 3, añade esas fichas al montón y por lo tanto habrá 13 fichas en juego.

El objetivo es utilizar todas las fichas para formar triángulos, siguiendo la estructura de los números triangulares, utilizando como máximo tres triángulos. Por ejemplo, para el número $13 = 6 + 6 + 1$; esta podría ser una solución:



En cada jugada, se otorgan a ese jugador tantos puntos como fichas ha utilizado, siempre y cuando lo haya conseguido con tres triángulos o menos y en menos de un tiempo prefijado de 2 minutos.

El juego acaba tras 5 rondas (en la que todos los jugadores han jugado una vez por ronda).

Una versión alternativa puede ser realizar la misma actividad pero generando cuadrados. En este caso, Lagrange demostró en 1770 que todo número se puede expresar como suma de un máximo de cuatro cuadrados.

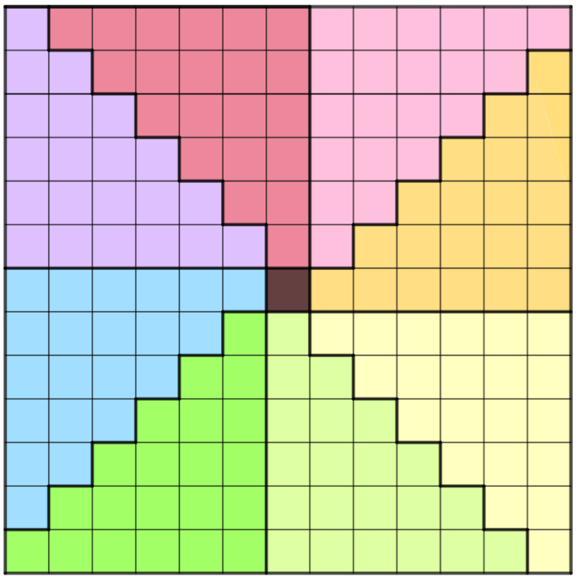
5. Ocho triángulos más uno hacen un cuadrado.

Se trata de un ejemplo de cómo se puede hacer una prueba visual muy sencilla sobre una igualdad algebraica. En concreto, se establece que multiplicando por 8 un número triangular y sumándole 1, se obtiene entonces un número cuadrado; o lo que es lo mismo, un cuadrado perfecto.

En concreto, la proposición consiste en

$$8T_k + 1 = (2k + 1)^2$$

Una demostración algebraica podría ser más costosa que sí sólo buscamos establecer la forma cuadrada, basta con agrupar los números triangulares en torno a un único punto:

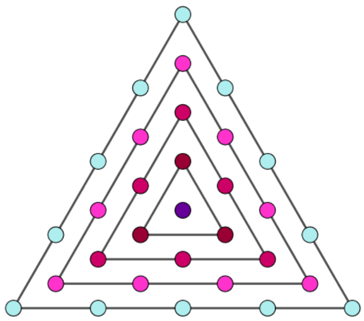


Una vez visto esta visualización, que parece ayudarnos a entender el problema, podemos ir a la demostración algebraica, y es que la visualización ya nos una idea de agrupar los triángulos en pares, sabiendo ya que $2T_k = k(k+1)$:

$$8T_k + 1 = 4(2T_k) + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2$$

13. **Números triangulares centrados.**

Otro tipo de números triangulares son los centrados, donde siguen una estructura con un punto central rodeado de triángulos. Los denotaremos c_k Este es el desarrollo de los primeros números triangulares:

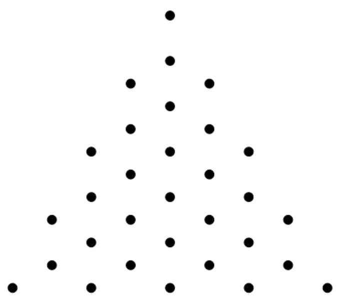


Observa que $c_1 = 1$; $c_2 = 4$; $c_3 = 10$; $c_4 = 19$; ...

a) ¿Qué números se van sumando para formar el siguiente número triangular centrado? Calcula c_5 y c_6 siguiendo esta idea.
b) Vamos a ver sobre la figura las siguientes relaciones:

$$c_k = 1 + 3T_k; \qquad c_k = T_{k-1} + T_k + T_{k+1}$$

Para ello, trata de buscar los números triangulares en los siguientes patrones (que corresponden a $c_4 = 31$).

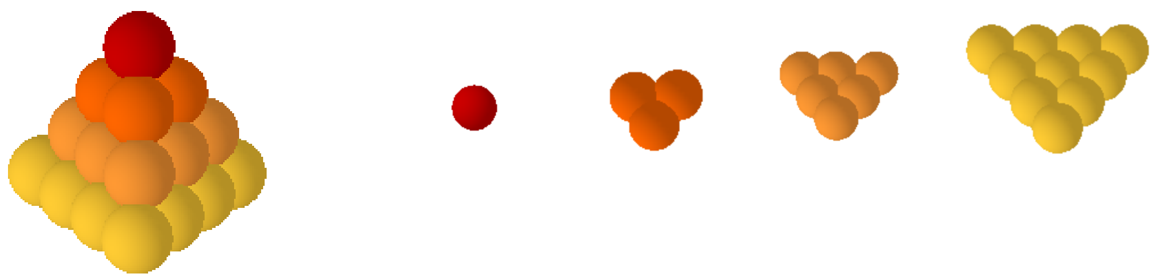


Números figurados en tres dimensiones

Los números figurados que siguen una estructura poliédrica son también muy interesantes para desarrollar contenidos en el aula. En concreto, esta sección se centrará únicamente en los tetraedros y pirámides de base cuadrada, buscando también demostrar de manera visual algún resultado importante como $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

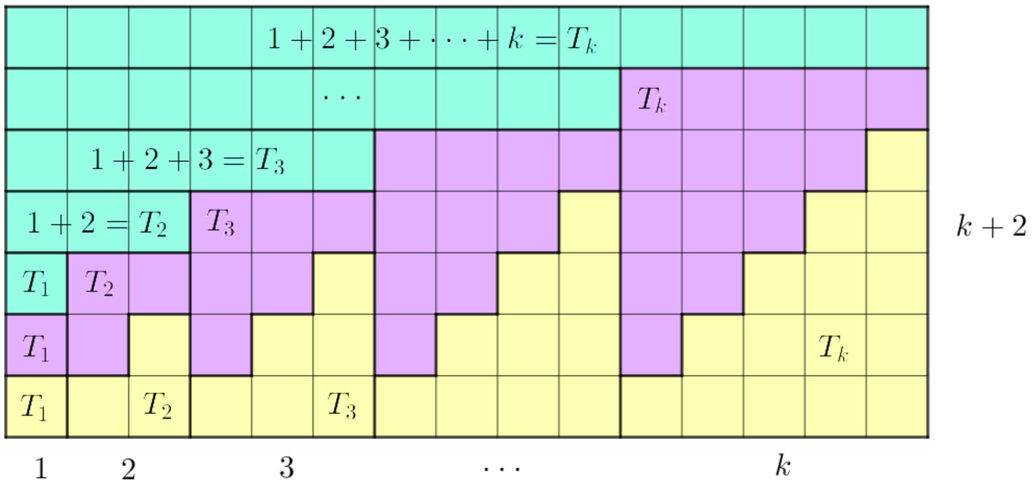
Los números tetraédricos son aquellos de forma que el mismo número de bolas se podría estructurar en un tetraedro. Los primeros son: $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$ Se denotarán como Tet_k.

En particular, y como se puede observar en la siguiente figura, pueden resultar muy interesante ya que cada "piso" del tetraedro supone un número triangular:



Es decir, tenemos que $Tet_k = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_k$

Este cálculo también se puede observar en la siguiente figura, en la que se puede formar un rectángulo de lados $(1 + 2 + 3 + \cdots + k) \cdot (k + 2) = T_k \cdot (k + 2)$ a partir de tres copias de cada uno de los tres números triangulares hasta T_k:



Por lo tanto,

$$3Tet_k = 3(T_1 + T_2 + \cdots + T_k) = T_k \cdot (k+2) = \frac{k(k+1)}{2} \cdot (k+2)$$

$$Tet_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$

Se podrían hacer siguiendo la estructura planteada en la división del tetraedro como suma de triángulos, iguales formas geométricas como sumas de los distintos números poligonales. Igualmente, figuras formadas por dos tetraedros o pirámides invertidas, así como números estrellados pueden ser de gran interés y ayuda para trabajar los contenidos, y sobre todo las competencias, que se quiere trabajar en este capítulo.

Por su interés especial, acabaremos con un último ejemplo con los números piramidales cuadrados.

Los números piramidales cuadrados (en adelante, únicamente piramidal) son aquellos que con el mismo número de bolas se puede construir una pirámide de base cuadrada. Estos son: $1, 5, 14, 30, 55$ ... Se denotarán como Pir_k.

De igual manera a la descomposición realizada en el tetraedro en números triangulares, cada "piso" de la pirámide es una base cuadrada, que representa el número cuadrado correspondiente; es decir, k^2.

Queda entonces que $Pir_k = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2$.

Un ejercicio "visualmente sencillo" que los propios alumnos pueden realizar es comprobar que un número piramidal es la suma de dos números tetraédricos seguidos, obteniendo mediante la fórmula anterior la suma de cuadrados consecutivos. Se plantea como actividad:

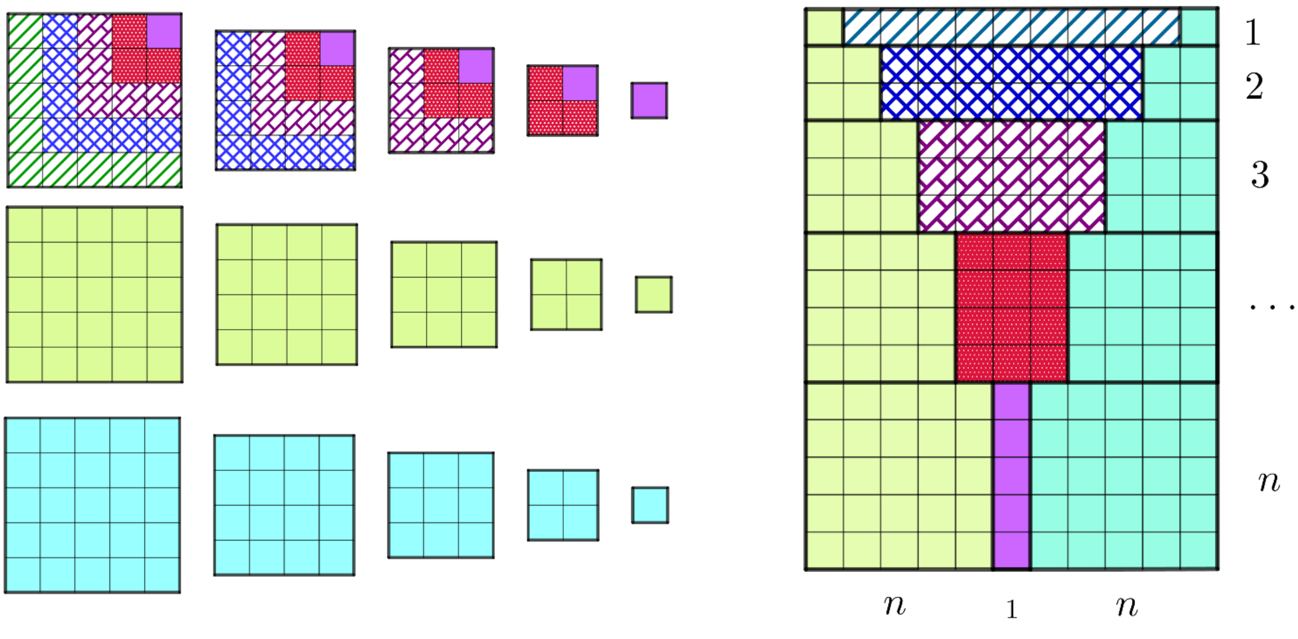
(*Nota: En este tipo de ejercicios de tres dimensiones, puede ser muy útil trabajar con material manipulativo de forma que los alumnos puedan construir y contar la cantidad* *de elemento que hay en una pirámide, por ejemplo. A este aspecto se recomiendan materiales manipulativos como por ejemplo los recomendados por Barba, D., y Calvo, C. (2014).)*

> 14. Dibuja o construye varias pirámides de base cuadrada, que representen números piramidales.
>
> Vamos a comprobar que $Pir_k = Tet_k + Tet_{k-1}$
>
> a) Localiza la forma de Tet_k y Tet_{k-1} dentro de la pirámide. ¿Puedes lograr que no tengan ningún punto en común?
> b) De manera general, ¿serviría esta estructura para cualquier pirámide? (Pista: piensa en la relación que había entre los números triangulares y los cuadrados, ¿Dónde se localizan ahora los números cuadrados y triangulares en las pirámides y tetraedros?
> c) Recuerda la fórmula de los números tetraédricos; $Tet_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$; y que $Pir_k = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2$. ¿Eres capaz de encontrar una fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros k números naturales? Trata de simplificarla lo máximo posible.
> d) Comprueba la suma para $k = 2, 3, 4$.
> e) Calcula $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$.

Unos sencillos cálculos algebraicos llevan en la tercera pregunta a concluir el resultado que se quería alcanzar en esta sección:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para demostrar esta fórmula, además de los números piramidales, se puede también utilizar como recurso la siguiente prueba visual (Kalman, D., 1991), en la que se combinan los n primeros cuadrados para formar el rectángulo de lados T_n y $(2n+1)$:



Conclusiones

El principal inconveniente que se puede encontrar a la hora de tratar una temática como la que se ha estudiado durante este trabajo es que se trata de un planteamiento un tanto utópico. En tanto que hemos desarrollado contenidos que no forman parte del currículo, su implantación en un aula para un posterior estudio de investigación con unas condiciones formales se hace muy difícil en general, y de en particular imposible para un alumno en prácticas docentes.

Se podrían haber realizado breves sesiones, de carácter casi divulgador, para considerar la respuesta del alumnado (sobre todo en temas de motivación e interés) ante estos nuevos contenidos, pero este no era tampoco el propósito que se quería realizar con este trabajo. La idea final debe ser por tanto la integración de unidades didácticas y un número suficientemente alto de sesiones que permitan valorar de verdad la adaptabilidad de los contenidos escogidos, la respuesta del alumnado, las exigencias de nivel de los conceptos y las actividades propuestas y otros tantos aspectos que, en la actualidad, se hace muy difícil de medir con un currículo bastante cerrado.

Es atendiendo a esta imposibilidad de implantar en el aula la razón de que este trabajo se haya centrado más en el estudio del contenido (qué conceptos y de qué manera pueden ser introducidos en el nivel escogido, así como que estándares de evaluación deberían ser aplicados) y la creación de actividades y recursos visuales que acompañen a estos contenidos; frente a un estudio integral con una metodología particular con la que se implementarían dichos contenidos. A pesar de que este último aspecto se ha tratado mediante comentarios, a modo de pinceladas, que se pueden encontrar durante todo el trabajo; un desarrollo teórico, práctico y formal de las posibilidades metodológicas así como el desarrollo de unidades didácticas completas queda relegado a posibles investigaciones futuras, en la que también se debería de contar con la posibilidad de trabajar con alumnado real en las aulas.

Por otro lado, desde la perspectiva del autor, se insiste también que no sólo es necesaria una revisión a fondo de los contenidos que son tratados en la escuela, con el fin de introducir nuevos o retirar contenidos ya innecesarios o superados (tema que podría ser objeto de otro trabajo, por lo que no se introducirá debate al respecto) sino también es necesario un planteamiento de base acerca de cuáles son los objetivos de la docencia de matemáticas en todos los niveles educativos obligatorios y de qué manera se evalúa la adquisición de estas competencias.

Es una realidad general a nivel universitario que la gran mayoría de los alumnos no acceden a los estudios superiores con la suficiente competencia matemática como para ser capaces de desenvolverse en este nuevo nivel educativo superior. Ejemplos prácticos completamente actuales como puede ser el examen de EBAU (Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad) de matemáticas en la comunidad valenciana de este mismo año (en mi opinión no necesariamente difícil, sino muy diferente de lo “esperado”) demuestran que la educación, al menos en 2º de Bachillerato (y por lo tanto una gran parte de los cursos anteriores, que van enfocados a llegar a ese nivel) falla a la hora de educar en la competencia matemática si se exige la adquisición de unos contenidos concretos y sin necesidad de relación. Opino que es entonces necesario un cambio estructural en la formación matemática y en este aspecto es también en el que se ha desarrollado este trabajo y planteado las actividades: en tanto que se debería enfocar el desarrollo de las competencias por encima de cualquier contenido (pues otorgando a los alumnos las correctas herramientas, ellos mismos son los que a la larga deberán ser competentes como para afrontar cualquier contenido que les sea necesario de manera autónoma); se obtiene la resolución que podemos integrar otros contenidos que nos ayuden a trabajar las competencias de otra manera y seguir evolucionando en el modelo educativo.

Bibliografía

Abramovich, S. (2017) *Diversifying mathematics teaching: advanced educational content and methods for prospective elementary teachers*. New Jersey: World Scientific.

Acuña, C. M. (2012) *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación.* Barcelona: Editorial Gedisa

de Alejandría, D. (2007) *La Aritmética y el libro sobre los números poligonales*. *Tomo II.* Tres Cantos: Nivola libros y ediciones.

Albertí, M. (2011) *La creatividad en matemáticas. Cómo funciona una mente maravillosa.* Barcelona: RBA Libros.

Albertí, M. (2018) *Las matemáticas de la vida cotidiana. La realidad como recurso de aprendizaje y las matemáticas como medio de comprensión*. Madrid: Instituto de Ciencias Matemáticas y Los libros de la catarata.

Antequera, A.T. (2012) Propuesta Educativa para enseñar nociones de Teoría de Juegos en Educación Secundaria. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 79, 101-126.

Azarquiel, Grupo (1993) *Ideas y actividades para enseñar Álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Síntesis.

Barba, D., y Calvo, C. (2016) Tareas ricas para practicar divisiones. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 83*, 83-88.

Barba, D., y Calvo, C. (2014) Representar cuerpos tridimensionales mediante vistas. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 83,* 93-100.

Braicovich, T., Oropeza, M. y Cerda, V. (2008). Un desafío: incluir grafos en los distintos niveles educativos. *Memorias del II REPEM* (pp. 70-76). La Pampa, Argentina: Editorial de la Universidad Nacional de la Pampa. Recuperado de: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/talleres/T11.pdf

Bruner, J. (2011). *Aprendizaje por descubrimiento*. NYE U: Iberia. Citado a partir de https://www.psicologia-online.com/teorias-del-aprendizaje-segun-bruner-2605.html

de Burgos, J. (2012) *Números y grafos.* Madrid: García-Maroto Editores.

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., y Morera, L. (2016) *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria.* Madrid: Síntesis.

Canto, F., Valdes, J., y Ruiz Cabello, S. (2007) ¿Conocía Sherlock Holmes la Teoría de Grafos?. *Revista UNION. Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM), 10,* 37-51.

Cilleruelo, J. y Córdoba, A. (2010) *Los números. ¿Qué sabemos de?*. Madrid: CSIC y Los Libros de la Catarata.

Corbalán, F. (1998) *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó.

Corbalán, F. (2011) *Mates de cerca*. Barcelona: Graó.

Coriat, M., Sancho, M., Gonzalvo, P. y Marín, A. (1989) *Nudos y nexos. Grafos en la escuela. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Síntesis.

Cortés, J.C., Hitt, F., y Saboya, M. (2014). De la Aritmética al Álgebra: Números Triangulares, Tecnología y ACODESA. *REDIMAT*, *Vol 3(3)*, 220-252. Recuperado de http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2014.52

Ferrraris, C. y Montoro, V. (1999) Procedimientos utilizados en la resolución de problemas de teoría de números: una experiencia con alumnos de la escuela media. *Suma: Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, 32,* 61-68.

Flores, A. (2011) Desarrollo del Pensamiento Computacional en la Formación en Matemática Discreta. *Lámpsakos, 5*, 28-33.

Frabetti, C. (2000) *Malditas matemáticas. Alicia en el País de los Números.* Madrid: Grupo Santillana de Ediciones.

Froncek, D. (2010). *Scheduling a Tournament. Mathematics and Sports.* 10.5948/UPO9781614442004.018.

Gairín, J.M. y Sancho, J. (2002) *Números y algoritmos*. Madrid: Síntesis.

Gardner, M. (2018) *El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos*. Madrid: Alianza.

Geogebra. https://www.geogebra.org/

Gobierno de España (Jefatura del Estado). (9 de Diciembre de 2013). *Ley Orgánica 8/2013. «BOE» núm. 295.* Recuperado de https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2013-12886

Graph drawer, applet para dibujar grafos. http://g.ivank.net/#11:1-2,2-3,3-4,4-5,5-1,6-7,7-8,8-9,9-10,10-6,11-1,11-2,11-3,11-4,11-5,11-6,11-7,11-8,11-9,11-10

Grima, C. (2018) *¡Que las matemáticas te acompañen!*. Barcelona: Ariel.

Holt, M. (1986) *Matemáticas recreativas 2*. Barcelona: Martínez Roca.

Integer is Sum of Three Triangular Numbers (2019) Recuperado 13/06/2019 de https://proofwiki.org/wiki/Integer_is_Sum_of_Three_Triangular_Numbers

Juggle Wiki. http://juggle.wikia.com/wiki/Juggle_Wiki

Junta de Castilla y León (Consejería de Educación). (4 de mayo de 2015). *ORDEN EDU/362/2015*. Recuperado de https://www.bocyl.jcyl.es/

Junta de Castilla y León (Consejería de Educación). (4 de mayo de 2015). *ORDEN EDU/363/2015*. Recuperado de https://www.bocyl.jcyl.es/

Kalman, D. (1991) $(1+2+\cdots+n)(2n+1)=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)$, *The College Mathematics Journal, 22, nº 2,* 124. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/i326551

Knutson, A. (2010) Mathematics of Juggling. Cornell University. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=38rf9FLhl-8. Publicado 29/04/2010.

Letona, J.M. (2010) *Uno + uno son diez.* Madrid: La Muralla.

LibrosMareaVerde. (2014). *Matemáticas. 1º de ESO*. LibrosMareaVerde. Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/1ESO/1ESO.pdf

LibrosMareaVerde. (2014). *Matemáticas. 2º de ESO*. LibrosMareaVerde. Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO/2ESO.pdf

LibrosMareaVerde. (2014). *Matemáticas. 3º B de ESO.* LibrosMareaVerde. Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3B/TerceroB.pdf

LibrosMareaVerde. (2014). *Matemáticas. 4ºB de ESO*. LibrosMareaVerde. Recuperado de http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/4B/CuartoB.pdf

Lorenzo, P. (2017) *Información, codificación y malabares: Claude E. Shannon.* (Trabajo Fin de Grado). Valladolid: Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias.

López, F. y otros (2006) *Matemáticas re-creativas*. Barcelona: Graó.

López, J.A. (2018) Teoría de grafos y redes sociales: un enfoque matemático. *Suma: Revista para enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, 89*, 55-62.

Meavilla, V. (2011) *El lobo, la cabra y la col.* Córdoba: Almuzara.

Menéndez, A. (1998) Una breve introducción a la Teoría de Grafos. *Suma: Revista para enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, *28,* 11-26.

Miélnikov, O.I. (2009) *Teoría de grafos en problemas recreativos resueltos*. Moscú: URSS.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (29 de enero de 2015) Orden ECD/65/2015, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. *«BOE» núm. 25*, 6986-7003. Recuperado de https://www.boe.es/eli/es/o/2015/01/21/ecd65

Morales, M. A. (^DiAmOnD^) (2013) El problema de las tres casas y los tres suministros y la banda de Möbius [Mensaje en un blog]. Gaussianos. Recuperado de https://www.gaussianos.com/el-problema-de-las-tres-casas-y-los-tres-suministros-y-la-banda-de-mobius/

Nelsen, R. B. (2018) *Nuggets of Number Theory: a Visual Approach*. Classroom resource materials, 55. Providence, Rhode Island: MAA Press, AMS.

Nuñez, R., Nuñez, J., Paluzo, E. y Salguero, E. (2016) Jugueteando con grafos. *Unión, revista iberoamericana de educación matemática*, *46*, 188-204.

Niss, M. A. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project. In A. Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education - Athens, Hellas 3-4-5 January 2003* (pp. 116-124). Athen: Hellenic Mathematical Society. Recuperado de http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve375/1112/docs/KOMkompetenser.pdf

Ortega, T. (2005) *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática.* Barcelona: Graó.

Ortega, T., Berciano, A., y Pecharromán, C. (2018). *Complementos de formación matemática.* Madrid: Síntesis.

Pastore, J. L. (2017) Teoría de los números en la escuela secundaria: algunas posibilidades menos convencionales. *Educación Matemática*, *29, num. 2*, 209-227

Polster, B. (2003) *The Mathematics of Juggling*. New York: Springer-Verlag.

Pickover, C.A. (2000) *El prodigio de los números*. Barcelona: Robinbook.

Problema de los puentes de Königsberg. (2019) Recuperado 04/06/2019 de https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_puentes_de_K%C3%B6nigsberg Imagen recuperada de https://www.google.com/search?q=los+puentes+de+konigsberg&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiXxp6TjdDiAhWy5OAKHbD5AuAQ_AUIECgB&biw=1366&bih=608#imgrc=ibcib1gkUW6jkM:

Problema de los tres servicios (2019) Recuperado 06/06/2019 de https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_los_tres_servicios

Rico, L. (2014). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación Secundaria.* Madrid: Síntesis.

Rivera-Marrero, O. (2007). *The Place of Discrete Mathematics in the School Curriculum: An Analysis of Preservice Teachers' Perceptions of the Integration of Discrete Mathematics into Secondary Level Courses*. Dissertation submitted to the faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia. Recuperado de http://scholar.lib.vt.edu/theses/available/etd-04252007-140123/unrestricted/DM-Dissertation-Olgamary-May2007.pdf

Rosentein, J., Franzblau, D. y Roberts, F. (Eds) (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*, DIMACS Series in Discrete Mathematics Computer Science, Volume 36, Providence, RI: American Mathematical Society (AMS).

Sáenz, E. (2019) *¿Para qué sirven las matemáticas?.* Aprendamos juntos. Recuperado de https://aprendemosjuntos.elpais.com/especial/para-que-sirven-las-matematicas-eduardo-saenz-de-cabezon/

Sierra, M., González, T., García, A. y González, M., (1989). *Divisibilidad. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Síntesis.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998) Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 344–350.

Smithers, D. B. (2005) *Graph Theory for the Secondary School Classroom.* Electronic Theses and Dissertations. Paper 1015. Recuperado de https://dc.etsu.edu/etd/1015

Socas, M.M., Camacho, M., Palarea, M., y Hernández, J. (1996) *Iniciación al Algebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Síntesis.

Vallejo-Nájera, A. (2002) *¿Odias las matemáticas?* Barcelona: Martínez Roca.

Vanegas, J., Henao, S., y Gustin, J. (2013). La teoría de grafos en la modelación matemática de problemas en contexto. En Perry, Patricia (Ed.), *Memorias 21° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 283-290). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Villani, C., Torossian, C., et Dias, T. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.* Paris, France: Ministère de l'Education Nationale (France). Recuperado de http://hdl.handle.net/20.500.12162/1695

Wallis, W.D. (2007) *A Beguinner's Guide to Graph Theory*. Boston: Birkhäuser.

Von Worley, S. (2012) *Dance, Factors, Dance. A Variation On Yorgey's Factorization Diagrams.* Recuperado de http://www.datapointed.net/2012/10/animated-factorization-diagrams/.
Animación:
http://www.datapointed.net/visualizations/math/factorization/animated-diagrams/

Yorgey, B. (2012). *Factorization diagrams*. Recuperado de https://mathlesstraveled.com/2012/10/05/factorization-diagrams/

Zazkis, R. y Campbell, S. R. (2011). *Number Theory in Mathematics Education Research: Perspectives and Prospects*. New York: Routledge.