CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 2

1. 1 ENSEÑANZAS MÍNIMAS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA EN CASTILLA Y LEÓN ESTABLECIDAS EN EL DECRETO 52/2007, CORRESPONDIENTES AL BLOQUE DE ALGEBRA. 3

1.2. CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. 5

1.3. SEGUIMIENTO DE DOS DE LOS TEMAS ESTUDIADOS A LO LARGO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA: 13

1.3.1 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO 13

1.3.2 SISTEMAS DE ECUACIONES 17

1.3.3 Ejemplos de Problemas que se proponen a los estudiantes en educación Secundaria 22

1.4 CONCLUSIONES 27

PARTE II ESTUDIO DE LOS CONTENIDOS DEL BLOQUE DE ÁLGEBRA EN EL BACHILLERATO EN LAS MODALIDADES DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES Y CIENCIA Y TECNOLOGÍA. 29

2.1. ENSEÑANZAS MÍNIMAS DEL BACHILLERATO EN CASTILLA Y LEÓN ESTABLECIDAS EN EL DECRETO 42/2008, CORRESPONDIENTES AL BLOQUE DE ALGEBRA. 29

2.2 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN EL BACHILLERATO. 31

2.3. SEGUIMIENTO DE DOS DE LOS TEMAS ESTUDIADOS EN LAS DOS MODALIDADES DEL BACHILLERATO 33

2.3.2 SISTEMAS DE ECUACIONES 34

2.3.3PROBLEMAS QUE SE PROPONEN EN EL BACHILLERATO 46

2.4CONCLUSIONES 49

INTRODUCCIÓN

El trabajo de fin de Máster que se presenta a continuación se centra en el análisis del tratamiento curricular del álgebra en la Educación secundaria y el Bachillerato. El objetivo del trabajo es ver cómo evolucionan los contenidos del bloque de álgebra, a lo largo de los diferentes cursos de la Educación Secundaria. El estudio se realizará en dos partes primero para la Educación Secundaria Obligatoria y después para el Bachillerato.

Para la etapa de educación Secundaria Obligatoria tendremos en cuenta los cuatro cursos, considerando las dos opciones que se presentan en el último. Para la etapa de Bachillerato se estudiará el contenido de los dos cursos de Bachillerato en sus dos modalidades: Bachillerato en Ciencias Sociales y Bachillerato en Ciencias y Tecnología.

En cada una de las dos partes del trabajo se procederá de la siguiente forma: en primer lugar se expondrán los contenidos de álgebra que las normativas regulan para cada etapa. A continuación se presentarán los contenidos que se dan en cada curso con base en diferentes libros de texto, con el fin de hacer un seguimiento de los mismos a lo largo de la etapa. Con esta información se realizará un análisis comparativo de los temas que se van impartiendo diferenciando entre los que se dan por primera vez y los que se repiten.

Finalmente se escogerán dos temas que estén presentes en la mayor parte de la Educación Secundaria y se estudiará cómo son tratados en los diferentes cursos.

1. 1 ENSEÑANZAS MÍNIMAS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA EN CASTILLA Y LEÓN ESTABLECIDAS EN EL DECRETO 52/2007, CORRESPONDIENTES AL BLOQUE DE ALGEBRA.

Marco General

El Real decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, establece las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en España. Las comunidades autónomas establecen sus currículos a través de Decretos, que como mínimo deben comprender los contenidos estipulados en los Reales Decretos. En el caso de Castilla y León, El Decreto 52/2007 del 17 de mayo, establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

Según El Real decreto 1631/2006, las matemáticas cumplen una doble función dentro del contexto de la educación Secundaria Obligatoria. Por un lado está el aspecto formativo, cuya finalidad es el desarrollo de la facultad de razonamiento y abstracción, que permita al estudiante reflexionar sobre distintos aspectos de una situación. En el aspecto instrumental, el objetivo de las matemáticas es proporcionar herramientas para solucionar problemas de la vida cotidiana. Para algunos alumnos/as, esta es la etapa final del aprendizaje de las matemáticas y para otros es una etapa intermedia.

En cuarto curso se presentan dos opciones, la A y la B. Los contenidos de la opción A se orientan hacia un desarrollo más práctico de la materia, contribuyendo a la resolución de problemas cotidianos y de otros ámbitos de conocimiento, esta opción de cuarto curso tiene un carácter más terminal y por ello se le dan al estudiante las herramientas necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. En la opción B, los contenidos de matemáticas son impartidos con mayor rigurosidad y precisión del lenguaje, concediéndole una mayor importancia al razonamiento, de esta forma se prepara al estudiante para la etapa del Bachillerato.

Contenidos del Bloque de Álgebra establecidos en el Decreto 52/2007 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en Castilla y León.

A continuación se presenta una tabla con los contenidos del bloque de álgebra, fijados en el Decreto 52/2007.

Tabla 1. Contenidos del Bloque de Álgebra en establecidos en el Decreto 52/2007 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en Castilla y León

1º ESO	2ºESO	3ºESO	4ºESO OPCIÓN A	4º ESO OPCIÓN B
-Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y sin concretar. Utilidad de simbolización para expresar cantidades en distintos contextos. -Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. - Búsqueda y Expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. -Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas. -Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.	-El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y expresar relaciones. -Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. -Binomios de primer grado: Suma, resta y producto por un número. -Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Resolución de Ecuaciones de Primer Grado. -Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Interpretación de las soluciones.	-Sucesiones de números enteros y fraccionarios. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas. -Estudio de las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. -Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico. -Polinomios. Valor numérico. Operaciones elementales con polinomios. Identidades notables. Ceros de un polinomio. -Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. -Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado. Soluciones exactas y aproximaciones decimales. Propiedades de las raíces. -Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación crítica de las soluciones	-Valor numérico de polinomios y otras expresiones algebraicas. -Suma resta y producto de polinomios. -Identidades notables: estudio particular de las expresiones : $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ y $(a+b).(a-b)$. Factorización de polinomios. -Resolución algebraica y gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. -Ecuación de segundo grado en una incógnita. -Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. -Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.	-Polinomios. Operaciones con polinomios. Raíces de un polinomio. Factorización polinomios. Utilización de las identidades notables y de la regla de Ruffini en la descomposición factorial de un polinomio. -Resolución algebraica de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Ecuaciones reducibles a cuadráticas. -Resolución algebraica y gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. -Uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos y simplificación de fracciones. -Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. -Resolución ecuaciones algebraicas mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos. -Inecuaciones y sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Interpretación gráfica. -Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

1.2. CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA.

A continuación se expondrán los contenidos de álgebra estudiados en la educación secundaria obligatoria, teniendo en cuenta los libros de texto y los contenidos mínimos vistos anteriormente.

Los contenidos se han repartido en diferentes temas para facilitar su observación. Como criterio para esta distribución, se ha tenido en cuenta el orden en el que se van introduciendo, a lo largo de los diferentes cursos de la ESO.

1. **Lenguaje Algebraico**
2. **Expresiones Algebraicas**
   Monomios
   Polinomios
3. **Ecuaciones e Inecuaciones**
   Ecuaciones de Primer Grado
   Ecuaciones de Segundo Grado
   Otras Ecuaciones Polinómicas, Ecuaciones no Polinómicas e Inecuaciones
4. **Sistemas de Ecuaciones**
5. **Sucesiones, Progresiones Aritméticas y Geométricas**

Cada tema es tratado en una o dos tablas dependiendo de su extensión. En cada una se muestran los contenidos que se estudian del tema en consideración, distribuyéndolos por cursos. Como se podrá apreciar, hay contenidos que se ya se han introducido en el curso anterior, por esta razón están sombreados.

Existen temas que son tratados sólo en uno o en dos curos, como el caso de Sucesiones, que solamente se imparte en tercero. En cuanto al cuarto curso, existen algunos contenidos que no son comunes a las dos opciones y están indicados con asterisco.

El objetivo de estas tablas es tener una mejor visualización de la evolución de los contenidos a lo largo de la educación secundaria.

TABLA 2 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA.

1. Lenguaje Algebraico

1ºESO	2ºESO
Definición y Utilidad del Algebra El lenguaje numérico El lenguaje algebraico	Definición y Utilidad del Algebra El lenguaje algebraico

TABLA 3 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA.

2.1 Expresiones Algebraicas (monomios)

1º ESO	2ºESO	3ºESO	4ºESO A
Expresión algebraica y Valor numérico	Expresión algebraica y Valor numérico	Expresión algebraica y Valor numérico	
MONOMIOS Definición de Monomio y Elementos Monomios semejantes Operaciones entre monomios	**MONOMIOS** Definición de Monomio y Elementos Monomios semejantes Operaciones entre monomios	**MONOMIOS** Definición de Monomio y Elementos Monomios semejantes Operaciones entre monomios	**MONOMIOS*** Definición de Monomio y Elementos Monomios semejantes Operaciones entre monomios

*Temas vistos exclusivamente en alguna de las dos opciones del cuarto curso.

TABLA 4 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA.

2.2. Expresiones Algebraicas (Polinomios)

2ºESO	3ºESO	4ºESO OPCIÓN A	4ºESO OPCIÓN B
POLINOMIOS Definición de Polinomio y sus elementos. Valor numérico de un polinomio Operaciones entre polinomios: _Suma y resta de polinomios _Producto de polinomios _División de un polinomio entre un monomio.	**POLINOMIOS** Definición de Polinomio y sus elementos. Valor numérico de un polinomio Operaciones entre polinomios: _Suma y resta de polinomios _Producto de polinomios	**POLINOMIOS** Definición de Polinomio y sus elementos. Valor numérico de un polinomio Operaciones entre polinomios. Identidades notables	**POLINOMIOS** Definición de Polinomio y sus elementos. Valor numérico de un polinomio Operaciones entre polinomios. Identidades notables
	_División de polinomios Identidades notables _Cuadrado de una suma _Cuadrado de una diferencia _Suma por diferencia	Regla de Ruffini Teorema del Resto Raíces de un polinomio Factorización de un polinomio	Regla de Ruffini Teorema del Resto Raíces de un polinomio Factorización de un polinomio Potencia de un polinomio*

*Temas vistos exclusivamente en alguna de las dos opciones del cuarto curso.

TABLA 5 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA.

3.1 Ecuaciones e Inecuaciones (Ecuaciones de Primer Grado)

1ºESO	2ºESO	3º ESO	4º ESO A	4º ESO B
IGUALADADES Igualdad Numérica. Igualdad Algebraica.(identidad y ecuación) **ECUACIONES** Significado y Utilidad Elementos y nomenclatura Ecuaciones Equivalentes Transposición y reducción de términos **ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA** Primeras técnicas para la resolución de ecuaciones Procedimiento general para resolver las ecuaciones de primer grado Resolución de ecuaciones sencillas, con paréntesis y con denominadores. Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita.	**IGUALADAD ALGEBRAICA** Igualdad Algebraica.(identidad y ecuación) **ECUACIONES** Significado y Utilidad Elementos y nomenclatura Ecuaciones Equivalentes Transposición y reducción de términos **ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA** Procedimiento general para resolver las ecuaciones de primer grado Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita.	**ECUACIONES** Elementos y nomenclatura Ecuaciones Equivalentes Transposición y reducción de términos **ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA** Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita. **Soluciones de una Ecuación:** Ecuación compatible Ecuación incompatible	**ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA** Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita	**ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA** Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita Definición y Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

TABLA 6 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA.

3.2 Ecuaciones e Inecuaciones (Ecuaciones de Segundo Grado)

2ºESO	3ºESO	4ºESO OPCIÓN A	4º ESO OPCIÓN B
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA Definición de ecuación de Segundo Grado, forma general y resolución. Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas	**ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA** Definición de ecuación de Segundo Grado, forma general y resolución. Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas. Deducción de la fórmula de resolución. Estudio del número de soluciones de una ecuación de segundo grado. Propiedades de las raíces de una ecuación de Segundo Grado. Resolución de problemas	**ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA** Definición de ecuación de Segundo Grado, forma general y resolución. Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas. Soluciones de una ecuación de segundo grado. Resolución de problemas.	**ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA** Definición de ecuación de Segundo Grado, forma general y resolución. Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas. Soluciones de una ecuación de segundo grado. Resolución de problemas

TABLA 7 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA.
3.1 Ecuaciones e Inecuaciones (Ecuaciones Factorizadas y Bicuadradas, Ecuaciones no Polinómicas e Inecuaciones)

4ºESO OPCIÓN A	4º ESO OPCIÓN B
OTROS TIPOS DE ECUACIONES POLINÓMICAS Ecuaciones Factorizadas Ecuaciones Bicuadradas **ECUACIONES NO POLINÓMICAS** Ecuaciones Fraccionarias Ecuaciones Irracionales.	**OTROS TIPOS DE ECUACIONES POLINÓMICAS** Ecuaciones Factorizadas Ecuaciones Bicuadradas Resolución de ecuaciones de grado superior a dos **ECUACIONES NO POLINÓMICAS** Ecuaciones Fraccionarias Ecuaciones Irracionales
INECUACIONES Inecuaciones de primer grado con una incógnita Solución de una inecuación de primer grado con una incógnita y representación en la real Inecuaciones de segundo grado con una incógnita*. Resolución de problemas con inecuaciones	**INECUACIONES** Inecuaciones de primer grado con una incógnita Solución de una inecuación de primer grado con una incógnita y representación en la real Resolución de problemas con inecuaciones

TABLA 8 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA.

4. Sistemas de Ecuaciones

2ºESO	3ºESO	4ºESO A	4ºESO B
SISTEMAS DE ECUACIONES Ecuaciones lineales Sistemas lineales Ecuaciones lineales con dos incógnitas y Representación gráfica. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y representación gráfica. Métodos algebraicos para la resolución de sistemas Resolución de problemas mediante sistemas.	**SISTEMAS DE ECUACIONES** Ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución de sistemas Resolución de problemas mediante sistemas.	**SISTEMAS DE ECUACIONES** Sistemas lineales Solución de un sistema Discusión de un sistema de ecuaciones. Métodos algebraicos de resolución de sistemas Resolución de problemas mediante sistemas.	**- SISTEMAS DE ECUACIONES** Sistemas lineales Solución de un sistema Discusión de un sistema de ecuaciones. Métodos algebraicos de resolución de sistemas Resolución de problemas mediante sistemas.
	-Discusión de un sistema de ecuaciones	Sistemas equivalentes de ecuaciones Reglas de transformación de ecuaciones. Sistemas de tres ecuaciones lineales Sistemas lineales homogéneos* Otros tipos de sistemas de ecuaciones _Sistemas de segundo grado con dos incógnitas. _Sistemas de ecuaciones fraccionarias	Sistemas equivalentes de ecuaciones Reglas de transformación de ecuaciones. Otros tipos de sistemas de ecuaciones _Sistemas de segundo grado con dos incógnitas. _Sistemas de ecuaciones fraccionarias

***Temas vistos exclusivamente en alguna de las dos opciones del cuarto curso.**

TABLA 7 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA.
5. Sucesiones, Progresiones Aritméticas y Geométricas

3ºESO
SUCESIONES. Definición. El término general. **TIPOS DE SUCESIONES** Sucesión recurrente. Sucesión creciente. Sucesión decreciente. **PROGRESIONES ARITMÉTICAS.** El término general Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética. **PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.** El término general Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica. Producto de los n primeros términos de una progresión geométrica.

1.3. SEGUIMIENTO DE DOS DE LOS TEMAS ESTUDIADOS A LO LARGO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA:

Se han presentado los contenidos del bloque de álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria, al no ser posible estudiarlos todos detalladamente, nos centraremos en dos temas representativos con el objetivo de comprender como se desarrollan en los diferentes niveles la ESO.

Se han escogido dos temas: Ecuaciones de Segundo Grado y Sistemas de Ecuaciones los cuales se desarrollan desde segundo de la ESO, hasta cuarto curso en sus dos opciones.

1.3.1 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Segundo Curso

Las Ecuaciones de Segundo Grado con una incógnita se introducen en segundo curso.

Definición

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una igualdad algebraica, que tiene una única incógnita y alguno de sus términos es de grado 2 y no contiene términos de grado mayor que 2. Una ecuación de segundo grado con una incógnita se puede expresar utilizando su forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números conocidos y a≠0

Clasificación de ecuaciones de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es **incompleta** cuando alguno de los coeficientes: b o c, o ambos, son iguales a cero.

Una ecuación de segundo grado es **completa** cuando todos los coeficientes: b o c, o ambos, son diferentes de cero.

Resolución de Ecuaciones de Segundo Grado Incompletas:

I Caso. Si b=0. Ecuaciones del tipo $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$. Las soluciones son:
Si $-\frac{c}{a} > 0$, hay dos soluciones: $x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$
Si $-\frac{c}{a}$ <0, no hay solución.

II Caso. Si c=0. Ecuaciones del tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$. Las soluciones son:

$x_1 = 0 \; y \; x_2 = -\frac{b}{a}$

Resolución de ecuaciones de Segundo grado Completas:

Ecuaciones del tipo $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, las soluciones se obtienen aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La ecuación puede tener dos soluciones, una o ninguna.

Tercer curso

En tercero se vuelve a dar la definición pero centrándose en la forma de la ecuación, se explica de una manera más resumida la diferencia entre ecuación completa e incompleta.

Definición:

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita son equivalentes a la ecuación:

$ax^2 + bx + c = 0$, y a≠0, los **coeficientes** de la ecuación son a y b, y el término **independiente** de la ecuación es c. Si b=0 ó c=0 se dice que la ecuación es **incompleta**. Si b≠0 y c≠o, **la ecuación es completa.**

Se explica el proceso mediante el cual se obtiene la fórmula cuadrática (en los libros de texto en este nivel simplemente es llamada fórmula de resolución).

Deducción de la fórmula cuadrática. (La deducción de la fórmula cuadrática no se explica en todos los libros de texto)

Se tiene la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$

Se multiplican por 4a los dos miembros de la ecuación:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Se suma a los dos miembros de la ecuación b^2 para completar el desarrollo del cuadrado de un binomio:

$$4a^2x^2 + 2(2ax)b + b^2 + 4ac = b^2 \rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Se despeja la incógnita x:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \ \rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este curso se enseña también a discutir una ecuación y se trata con más detalle las soluciones.

Discusión de una ecuación de segundo grado:

Discutir una ecuación es estudiar si es compatible o incompatible y analizar el número de soluciones que tiene. Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita pueden tener dos, una o ninguna solución.

Se define el **discriminante** de una ecuación de segundo grado al radicando $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$:

$$\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$$

El signo del discriminante, determina si una ecuación de segundo grado es compatible o incompatible.

Si $\Delta > 0, la\ ecuación\ es\ compatible\ con\ dos\ soluciones\ distintas$.

Si $\Delta = 0, la\ ecuación\ es\ compatible\ con\ una\ solución\ doble$.

Si $\Delta<0, la\ ecuación\ es\ incompatible$.

Propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado.

Este contenido aparece en los estipulados por la ley, pero no suele estar en los libros de texto, a pesar de que son propiedades que tienen demostraciones sencillas.

Dada la ecuación de segundo grado $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$, y x_1 y x_2, sus soluciones, se cumple:

La suma de las dos soluciones o raíces de una ecuación de segundo grado, $\boldsymbol{x_1 + x_2}$, es:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Demostración:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

El producto de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado, $x_1 \cdot x_2$, es

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Demostración:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2}$$

El numerador es una suma por una diferencia. Su resultado es la diferencia de cuadrados:

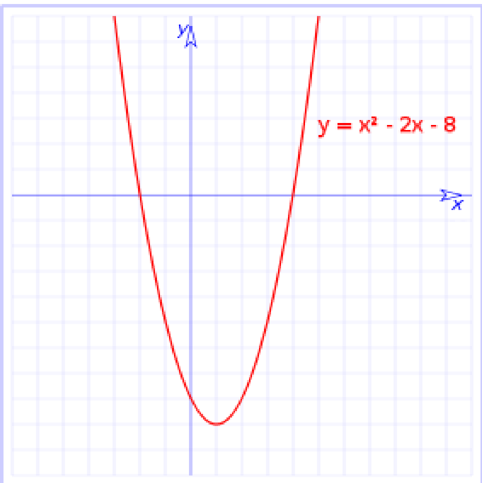
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Finalmente se estudia la resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado.

Cuarto Curso Opción Ay B

En ambas opciones además de recordar lo visto en los cursos anteriores se da una interpretación geométrica de las soluciones de la ecuación de segundo grado con una incógnita:

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, son las abscisas de los puntos de corte con el eje OX de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.



Se hace énfasis en la resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas se explica el método de completar cuadrado como procedimiento para resolver ecuaciones de segundo grado.

Ecuaciones Bicuadradas

Aunque en la mayoría de los textos se estudian las ecuaciones bicuadradas en un apartado diferente, se tratarán a continuación pues se tiene en cuenta que expresada de una manera general la ecuación cuadrática en x^n es de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, siendo n un número natural distinto de cero. El caso particular donde n=2. Se conoce como ecuación bicuadrada.

La cual es definida en cuarto curso de la siguiente manera:

Una ecuación con una incógnita es **bicuadrada** si se puede llegar a expresar en la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0, con\ a, b, c\ números\ reales\ y\ a \neq 0.$

Resolución de ecuaciones bicuadradas

Para resolver estas ecuaciones se hace el cambio $x^2 = z, con\ lo\ que\ se\ obtiene$

$$x^4 = (x^2)^2 = z^2$$

Sustituyendo en la ecuación dada tendríamos una ecuación de segundo grado

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Al resolver esta ecuación de segundo grado se obtienen las soluciones de z. A continuación se hallan los posibles valores de la incógnita inicial x, deshaciendo el cambio de variable:

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z}$$

1.3.2 SISTEMAS DE ECUACIONES

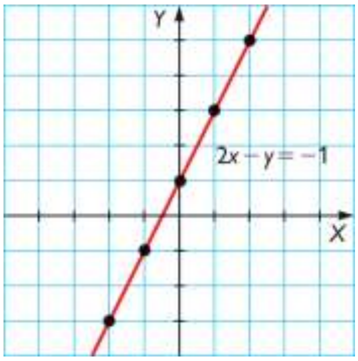
Segundo Curso

Este tema es tratado a partir de segundo de la ESO. Se empieza introduciendo la definición ecuación lineal.

Ecuación lineal es una ecuación de primer grado con una o varias incógnitas.

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación que se puede expresar de la forma $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas, y a, b y c, números conocidos. Una solución de una ecuación lineal con dos incógnitas es cada par de valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad. Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Representación gráfica de una ecuación lineal, cada ecuación lineal tiene una recta asociada al plano, y cada punto de la recta representa una de las infinitas soluciones a la ecuación lineal.

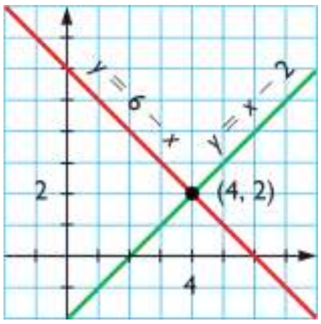


Sistemas de ecuaciones lineales

Dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común forman un **sistema de ecuaciones lineales.**

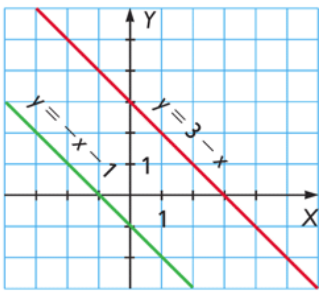
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

La solución de un sistema de ecuaciones lineales coincide con el punto de corte de las rectas que representan a las ecuaciones.

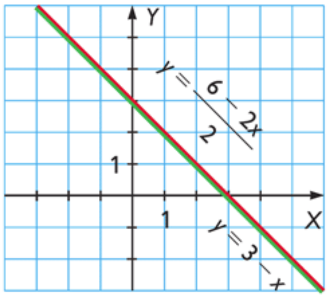


Pero pueden darse casos especiales:

El sistema no tiene solución, las ecuaciones son incompatibles y las rectas paralelas



El sistema tiene infinitas soluciones, las ecuaciones son equivalentes, las rectas se superponen.



Métodos de algebraicos de resolución de de sistemas

Resolver un sistema es encontrar su solución, en caso de que la tenga. Para encontrar las soluciones se utilizan diferentes métodos de resolución.

Método de sustitución: Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra ecuación para obtener así una ecuación de primer grado con una incógnita.

- Despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones.
- Sustituir este valor de la incógnita en la segunda ecuación.
- Resolver la ecuación con una incógnita que resulta, cuando sea posible.
- Calcular el valor de la otra incógnita, sustituyendo en la expresión obtenida en el primer paso.
- Comprobar que la solución obtenida es solución del sistema, sustituyendo en las dos ecuaciones.

Método de igualación: consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar los resultados.

- Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema.
- Igualar las expresiones obtenidas
- Resolver la ecuación de una incógnita que resulta, cuando sea posible.
- Calcular el valor de la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las dos expresiones obtenidas en la primera parte.
- Comprobar que la solución obtenida es la solución del sistema.

Método de reducción: consiste en transformar las ecuaciones en otras equivalentes procurando que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos. De este modo, al sumar miembro, a miembro las dos ecuaciones, resulta un sistema equivalente, en el que una de las ecuaciones tiene sólo una incógnita.

- Igualar los coeficientes de una de las incógnitas mediante las multiplicaciones apropiadas
- Restar o sumar las dos ecuaciones, según los coeficientes tengan igual o distinto signo para eliminar una incógnita.
- Resolver la ecuación de una incógnita que resulta, cuando sea posible.

- Calcular el valor de la otra incógnita, sustituyendo el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones.
- Comprobar que la solución obtenida es solución del sistema.

Resolución de problemas mediante sistemas

Un problema o situación en la que hay dos incógnitas expresadas en lenguaje ordinario se puede trasladar al lenguaje algebraico y como consecuencia, plantear un sistema de ecuaciones. Para ello se definen las incógnitas y se relacionan con la información que proporciona la situación, los pasos que se deben seguir son:

- Leer el enunciado e identificar las incógnitas
- Plantear el sistema
- Resolver el sistema
- Comprobar que la solución es válida e interpretarla en el contexto del problema.

Tercer curso:

Se vuelve a definir una ecuación lineal con dos incógnitas:

Una ecuación lineal con dos incógnitas se expresa de la forma $ax+by=c$, $a\neq0$ y $b\neq0$ son los coeficientes, c es el termino independiente. Las soluciones de la ecuación son los pares de números (x,y) que la verifican.

Esta definición es un poco más completa ya que se mencionan a y b como los coeficientes y c como el término independiente, en la anterior definición se les nombraba como números conocidos.

La definición de **sistemas de ecuaciones** tiene pocos cambios en comparación con la estudiada en el segundo curso, y también es un poco más específica con respecto a los coeficientes y los términos independientes.

Se estudian nuevamente los métodos algebraicos de resolución de ecuaciones.

En tercer curso se trata la **discusión de sistemas de dos ecuaciones de primer grado** con dos incógnitas. Según el número de soluciones que pueden presentar los sistemas se pueden clasificar en:

Sistema incompatible, si no tiene solución.

Sistema compatible determinado, cuando tiene una única solución.

Sistemas compatibles indeterminados, cuando tiene infinitas soluciones.

Se continúa trabajando en la resolución de problemas.

Cuarto Curso

Se dan definiciones parecidas pero se generaliza a sistemas de más de dos ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas que deben verificarse simultáneamente.

Solución de un sistema es conjunto de valores de las incógnitas que cumple cada una de las ecuaciones.

Sistemas equivalentes de ecuaciones: dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Reglas de transformación de ecuaciones:

Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.

Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.

Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.

Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.

Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente

Se vuelve a estudiar la **discusión de sistemas de ecuaciones lineales.**

Los métodos de algebraicos de resolución de ecuaciones son estudiados en todos los cursos, pero en cuarto se recuerda su utilidad y se le muestra al estudiante en qué casos es más oportuno emplear un método u otro: Método de sustitución (cuando alguna incógnita tiene coeficiente 1 o -1), método de igualación (cuando al despejar una de las incógnitas en las dos ecuaciones no se obtienen denominadores) y reducción(cuando los coeficientes de una de las incógnitas son iguales u opuestos en las dos ecuaciones, también cuando el coeficiente de una de las incógnitas en una de las ecuaciones es múltiplo del coeficiente de la misma incógnita en otra ecuación.

Los siguientes temas solamente son estudiados en 4º ESO Opción A

Sistemas de tres ecuaciones lineales Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas está formado por tres ecuaciones de primer grado con las mismas tres incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

Resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es hallar todas las ternas de números reales que sustituidos en lugar de las incógnitas respectivas verifican las tres ecuaciones. Estos sistemas se pueden resolver utilizando los métodos de sustitución y reducción.

Sistemas homogéneos: Un sistema de ecuaciones lineales se denomina homogéneo si todos los términos independientes son cero:

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases}$$

Los sistemas lineales homogéneos son siempre compatibles ya que tienen siempre la solución trivial, es decir: $x = 0, y = 0,\ z = 0$. Si el sistema tiene una única solución, debe ser la solución citada. Pero puede ocurrir que el sistema tenga infinitas soluciones.

1.3.3 Ejemplos de Problemas que se proponen a los estudiantes en educación Secundaria

Se presentarán algunos ejemplos de los problemas que se proponen a los estudiantes de Secundaria Obligatoria, con relación a los dos temas escogidos.

Uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas es que el estudiante sea capaz de aplicar el razonamiento matemático para resolver problemas de la vida cotidiana. Según el proyecto OCDE/PISA, el proceso fundamental que los estudiantes emplean para resolver problemas de la vida real se denomina matematización. Aprender a matematizar debería ser uno de los objetivos más importantes para todos los alumnos. La matematización se lleva a cabo de la siguiente manera:

1. Comenzar con un problema enmarcado en la realidad.
2. Sistematizar el problema según conceptos matemáticos.
3. Gradualmente reducir la realidad mediante procedimientos como la consideración de cuáles son los rasgos importantes del problema, la generalización y la formalización, para potenciar

los rasgos matemáticos de la situación y transformar el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación.

4. Resolver el problema matemático.
5. Dar sentido a la solución matemática en términos de la solución real y se identifican las limitaciones de la solución.

En el proyecto OCDE/PISA, se clasifican los problemas en tres grupos:

Problemas de reproducción: para su resolución se reproduce un procedimiento que se ha explicado previamente al estudiante y del que se han dado ejemplos y este ejecuta unas operaciones rutinarias.

Problemas de conexión: Estos, a pesar de ser problemas sencillos, son problemas ubicados en un contexto real y requieren que el estudiante razone y no sólo siga un algoritmo conocido. De modo que conecta el material practicado con el problema que se le está presentando. Los estudiantes traducen esta situación del contexto real a leguaje matemático.

Problemas de reflexión: Incluyen las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problemas que contienen más elementos que los del grupo anterior. En este tipo de problemas se le exige al estudiante que realice una argumentación, requieren una mayor abstracción, generalización y construcción de modelos aplicados a contextos nuevos.

A continuación mostraremos para cada curso de la ESO problemas con ecuaciones de segundo grado y con sistemas de ecuaciones. Si nos fijamos en los enunciados de los problemas estos se encuentran en un contextos intramatemático o de la vida cotidiana, el primer tipo requiere que el estudiante relacione conceptos de otras materias como la geometría, o requieren cierto grado de abstracción al centrarse sólo en números y símbolos matemáticos, el segundo tipo permite al estudiante relacionar lo que aprende con el mundo que le rodea, y ver la utilidad de los contenidos. Los problemas escogidos de los libros de texto de Anaya, marcados con un nivel de dificultad 2 o 3 son en su mayoría de conexión. Los problemas que he observado en los libros suelen ser de los tres tipos, encontrando con menor frecuencia los de reflexión.

Los problemas se suelen ubicar en un tema lo que no es recomendable ya que el estudiante debe ver el conocimiento matemático de una forma integral.

Ecuaciones de Segundo Grado

1. Los miembros del equipo vamos a hacer un regalo al entrenador que cuesta 80 €. Nos sale un poco caro, pero si fuéramos dos más, tocaríamos a dos euros menos cada uno. ¿Cuántos somos en el equipo?(Segundo ESO)

Paso I sistematizar el problema según conceptos matemáticos:	Número de componentes del equipo→ $\boldsymbol{x}$ Cada uno debe pagar → $\boldsymbol{\frac{80}{x}}$ Si fueran dos más cada uno pagaría → $\boldsymbol{\frac{80}{x+2}}$ Lo que cada uno paga -2= lo que pagaría cada uno si fueran dos más
Paso II Transformar el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación	$\frac{80}{x}-2=\frac{80}{x+2}$
Paso III Resolver el problema matemático.	$x^2+2x-80=0 \quad x=8 \;\; x=-10$
Paso IV dar sentido a la solución matemática en términos de la solución real y e identificar las limitaciones de la solución.	En el equipo hay 8 jugadores, la solución negativa no es lógica.

2. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 18 cm y su área es 40 cm^2. Halla los catetos de este triángulo. (tercer curso). Aunque el contexto de este problema es intramatemático el estudiante debe hacer una conexión de los conceptos de geometría, y utilizar el álgebra para su resolución

Paso I sistematizar el problema según conceptos matemáticos:	Si un cateto mide $\boldsymbol{x}$ cm, el otro medirá $(\mathbf{18} - \boldsymbol{x})$ cm, el área del triángulo es: $\boldsymbol{Area=\frac{x(18-x)}{2}=40}$
Paso II Transformar el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación	Al ser un problema intramatemático se pasa directamente al paso siguiente.
Paso III Resolver el problema matemático.	$x^2-18x+80=0 \;\; x=8 \;\; x=10$
Paso IV dar sentido a la solución matemática en términos de la solución real y e identificar las limitaciones de la solución.	Los catetos miden 10 y 8 cm respectivamente.

3. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394, determina estos números. (Cuarto curso)

Paso I sistematizar el problema según conceptos matemáticos:	Los números impares consecutivos son $\mathbf{2n-1}$ $\boldsymbol{y}$ $\mathbf{2n+1}$
Paso II Transformar el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación	Al ser un problema intramatemático se pasa directamente al paso siguiente.
Paso III Resolver el problema matemático.	$(2n-1)^2+(2n+1)^2=394\ ,\ n^2=\frac{392}{8} \to n=\sqrt{\frac{392}{8}} \to n=\pm 7$
Paso IV dar sentido a la solución matemática en términos de la solución real y e identificar las limitaciones de la solución.	$Si\ n=7$, los impares serían 13 y 15 y la suma de los cuadrados sería 394 $Si\ n=-7$, los impares serían -13 y -15 y la suma de sus cuadrados también sería 394

Sistemas de Ecuaciones

4. Un ciclista sale de paseo y recorre un tramo de carretera, cuesta arriba, a 8 km/h. Después, sigue llaneando, a 20 km/h, hasta que llega a su destino. Si el paseo ha durado 3 h, y la velocidad media resultante ha sido de 16 km/h, ¿cuánto tiempo ha invertido en cada tramo? (segundo curso)

Paso I sistematizar el problema según conceptos matemáticos:	Tiempo de subida $\to \boldsymbol{x}$ Tiempo en llano $\to$ y Tiempo total 3h Distancia en subida $\to \mathbf{8}\boldsymbol{x}$ Distancia en llano $\to \mathbf{20}\boldsymbol{y}$ Distancia total $\to 16 \cdot 3 = 48$ km
Paso II Transformar el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación	$\begin{cases} 8x+20y=48 \\ x+y=3 \end{cases}$
Paso III Resolver el problema matemático.	$x=1\quad y=2$
Paso IV dar sentido a la solución matemática en términos de la solución real y e identificar las limitaciones de la solución.	Ha subido durante una hora y ha llaneado durante dos

1. ¿Una empresa aceitera ha envasado 3000 litros de aceite en 1200 botellas de 2y5 litros cuántas botellas de aceite se han utilizado? (tercer curso)

Paso I sistematizar el problema según conceptos matemáticos:	$\boldsymbol{x}$= número de botellas de 2 litros $\boldsymbol{y}$= número de botellas de 5 litros.
Paso II Transformar el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación	$\begin{cases} x+y=1200 \\ 2x + 5y = 3000 \end{cases}$
Paso III Resolver el problema matemático.	$x=1000\ y=200$
Paso IV dar sentido a la solución matemática en términos de la solución real y e identificar las limitaciones de la solución.	Se han utilizado 1000 botellas de 2 litros y 200 de 5 litros

2. La nota media de los aprobados en un examen de matemáticas fue de 6,5 y la de los suspensos 3,2. En la clase son 30 alumnos y alumnas y la nota media global fue de 5,29. Calcula cuántos aprobaron y cuántos suspendieron. (Cuarto curso)

Paso I sistematizar el problema según conceptos matemáticos:	$\boldsymbol{x}$ = Número de aprobados, $\boldsymbol{y}$ =número de suspensos, si la nota media de es 6,5, sumando las notas de aprobados queda (6,5· $\boldsymbol{x}$) . Al sumar los suspensos queda (3,2· $\boldsymbol{y}$)
Paso II Transformar el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación	$\begin{cases} 6.5x+3.2y=5.29(x+y) \\ x + y = 30 \end{cases}$
Paso III Resolver el problema matemático.	$y=11\ \ x=19$
Paso IV dar sentido a la solución matemática en términos de la solución real y e identificar las limitaciones de la solución.	Aprobaron 19 alumnos y no aprobaron 11

1.4 CONCLUSIONES

Se han expuesto los contenidos que se dan en cada curso de la ESO según lo establecido por la ley, con base en lo anterior y en los libros de texto se han presentado los contenidos curso por curso.

Al comparar los contenidos establecidos en la ley (tabla 1) con los contenidos expuestos en las siguientes tablas, se puede observar que en cada curso se dan los contenidos mínimos exigidos, pero se empieza a tratar algunos en el cuso anterior al que establece en el Decreto 52/2007. Por ejemplo, la resolución de ecuaciones de segundo grado se empieza a ver en segundo curso y en el Decreto este contenido se encuentra en tercer curso.

Se puede observar que en cada curso se dan simultáneamente contenidos nuevos con algunos vistos durante el curso anterior. Si analizamos las tablas y comparamos el número de temas introducidos en cada curso, con el número de temas ya vistos. Tenemos lo siguiente: en segundo de la ESO los temas ya vistos representan el 30% de los contenidos estudiados, en tercero de la ESO, este porcentaje es del 40%, al igual que en las dos opciones de cuarto curso.

Esto nos muestra que se emplea gran parte del tiempo en estudiar contenidos que ya han sido vistos en cursos anteriores, y como se puede apreciar en las tablas estos contenidos no son sólo vistos en dos cursos consecutivos, sino que son repetidos a lo largo de toda la educación secundaria obligatoria. Por ejemplo los métodos algebraicos de resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, son explicados en todos los cursos, aunque el tiempo que se dedica a ello es menor y los ejemplos que se dan en cada curso van aumentando el grado de dificultad.

Una explicación para que los contenidos sean vistos de esta forma es que sean afianzados, pero creo que si se dedica tiempo a consolidar los conocimientos que se introducen en un curso, no sería necesario repetirlos durante el siguiente. De esta forma en cada curso se podría dedicar más tiempo a un tema y el siguiente año se podría avanzar en el estudio de nuevos conceptos.

El Decreto 52/2007. (Página 99) nos dice que “en cada curso deben coexistir nuevos contenidos, con otros que afiancen y complementen de los cursos anteriores, con ampliación del campo de trabajo, del nivel de información y precisión y a la vez enriquecidos con nuevas relaciones”.

De lo anterior, podemos deducir que en cada curso se deberían manejar los conceptos vistos en años anteriores (para enlazar los nuevos conocimientos) pero de una manera más formal y precisa, adaptando las definiciones al nivel de los estudiantes. Sin embargo, podemos encontrar definiciones que se mantienen durante los diferentes cursos sin cambios significativos por ejemplo; durante los tres primeros cursos de la ESO se define expresión algebraica de la misma forma:

Una expresión algebraica: es un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones matemáticas.

Observamos entonces que lo que se hace es recordar el concepto pero no se da una definición más formal y específica como podría ser la siguiente:

Una expresión algebraica en una o más variables es una combinación cualquiera de estas variables y de números, mediante una cantidad finita de operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación o radicación.

Hay casos de definiciones que evolucionan para que el estudiante se habitúe a utilizar un lenguaje más formal.

En segundo curso se define una ecuación de segundo grado con una incógnita como "una igualdad algebraica, que tiene una única incógnita, alguno de sus términos es de grado 2 y no contiene términos de grado mayor que 2. Se puede expresar utilizando su forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números conocidos y a≠0" .

En este caso podemos ver que la definición se da para estudiantes que necesitan una explicación más detallada, y puede resultar redundante para estudiantes de un nivel más avanzado, pero este concepto se va explicando de una forma más rigurosa a medida que se avanza en la educación secundaria.

Una definición más formal de este concepto sería:
"Una ecuación de segundo grado es una ecuación que tiene la forma de una suma de términos cuyo grado máximo es dos, es decir, que puede ser representada por un polinomio de segundo grado o polinomio cuadrático. La expresión canónica general de una ecuación cuadrática es: $ax^2 + bx + c = 0$ donde x representa la variable y a, b y c son constantes; a es un coeficiente cuadrático (distinto de 0), b el coeficiente lineal y c es el término independiente".(Artículo la Ecuación de Segundo Grado, Wikipedia).

En cuanto a procedimientos, aunque la mayoría se repiten de un curso a otro, la explicación suele ser más sintética a medida que se aumenta el nivel. Por ejemplo en primer curso se explica la transposición y reducción de términos como sigue: Si a los dos términos de una ecuación se les suma o resta un mismo número, se obtiene otra ecuación equivalente. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente.

En los siguientes cursos la trasposición y la reducción de términos se presentan de forma más resumida, se explica que se realiza haciendo que cualquier término aparezca de forma inversa a como estaba.

En este caso vemos que en el primer curso se pretende explicar al estudiante porqué al sumar o restar términos en ambos miembros de una ecuación se mantiene la igualdad, así sabrá porqué al resolver una ecuación puede reducir miembros a ambos lados. La primera definición explica el porqué del procedimiento y hace que tenga sentido para el estudiante, la segunda es un recordatorio del procedimiento en sí.

A manera de conclusión se puede decir que hay contenidos que se repiten para ir avanzando en ellos de forma gradual, e ir aumentando la formalidad en las definiciones y el nivel de dificultad de los ejercicios pero en la mayor parte de los casos se repiten los contenidos de la misma forma. Lo más adecuado sería que en cada nivel se afianzaran los conceptos para que sean asimilados totalmente por el estudiante y el siguiente curso se hiciera un pequeño repaso de los contenidos vistos durante el curso anterior.

PARTE II ESTUDIO DE LOS CONTENIDOS DEL BLOQUE DE ÁLGEBRA EN EL BACHILLERATO EN LAS MODALIDADES DE HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES Y CIENCIA Y TECNOLOGÍA.

2.1. ENSEÑANZAS MÍNIMAS DEL BACHILLERATO EN CASTILLA Y LEÓN ESTABLECIDAS EN EL DECRETO 42/2008, CORRESPONDIENTES AL BLOQUE DE ALGEBRA.

El bachillerato es una enseñanza que da acceso a los Ciclos formativos de Grado Superior, o a los estudios Universitarios. Existen tres modalidades de Bachillerato: Artes, Ciencia y Tecnología y Humanidades y Ciencias Sociales. El Real decreto 1467/2007, de 2 de noviembre establece la estructura del Bachillerato y sus enseñanzas mínimas en España, además en Castilla y León, el Decreto 42/2008 del 5 de junio, establece el currículo de Bachillerato, el cual debe recoger como mínimo los contenidos establecidos por el Real decreto.

Bachillerato en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales.

La enseñanza de las matemáticas en el Bachillerato de Ciencias Sociales, concede más importancia a los algoritmos y se enfoca en la resolución de problemas referentes a las materias estudiadas por esta rama. Es decir, que el carácter de esta matemática es más instrumental. Las asignaturas de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I y II, se estructuran en torno a tres ejes: Aritmética y Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística. Al ser objeto de estudio de este trabajo la materia de Álgebra, no tendremos en cuenta la parte de Aritmética.

Bachillerato en la modalidad de Ciencias y Tecnología.

En el Bachillerato de Ciencia y Tecnología, la matemática está más centrada en dar un respaldo teórico a los procedimientos, los contenidos se deben desarrollar de modo que el estudiante maneje de una forma más rigurosa los conceptos. Las definiciones son más formales y se introducen más demostraciones. Las matemáticas en la modalidad de Ciencias y Tecnología están en intensa relación con las disciplinas científicas

A continuación se presenta una tabla con los contenidos del bloque de álgebra, fijados en el Decreto 42/2008.

Tabla 1. Contenidos del Bloque de Álgebra en establecidos en el Decreto 42/2008 por el que se establece el currículo del Bachillerato en Castilla y León.

BACHILLERATO HUMANIDADES Y CIENCIAS SOCIALES	BACHILLERATO CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	**Matemáticas I**
– Ecuaciones lineales, cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Aplicaciones. _ Estudio y resolución gráfica y algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sistemas con tres incógnitas: método de Gauss. – Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Interpretación y resolución gráfica. – Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales. – Resolución de problemas de matemática financiera en los que intervienen el interés simple y compuesto, y se utilizan tasas, amortizaciones, capitalizaciones y número índice. Parámetros económicos y sociales.	-Resolución algebraica e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones. -Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Sistemas de inecuaciones. -Utilización de herramientas algebraicas en la resolución de problemas.
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II	**Matemáticas II**
– Sistemas de ecuaciones lineales. Estudio e interpretación gráfica. – Las matrices como expresión de tablas y grafos. Suma y producto de matrices. Matrices inversibles. Obtención de matrices inversas sencillas por el método de Gauss. Interpretación del significado de las operaciones con matrices en la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales. – Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Interpretación y resolución gráfica. – Programación lineal bidimensional. Aplicaciones a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos. Interpretación de las soluciones.	-Sistemas de ecuaciones lineales. Operaciones elementales y reducción Gaussiana. Discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss. -Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales. -Operaciones con matrices. Matrices inversibles. Obtención por el método de Gauss del rango de una matriz y de la matriz inversa. Aplicación de las operaciones y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales. -Determinantes. Propiedades elementales de los determinantes. Cálculo de determinantes. Rango de una matriz. -Utilización de los determinantes en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.2 CONTENIDOS DE ÁLGEBRA ESTUDIADOS EN EL BACHILLERATO.

A continuación se expondrán los contenidos de álgebra estudiados en El Bachillerato en las dos modalidades tratadas, teniendo en cuenta los libros de texto y los contenidos mínimos vistos anteriormente.

Se realizará una tabla por modalidad y cada una se dividirá en primer y segundo curso del Bachillerato. De esta forma tendremos una visualización de los contenidos y se podrán hacer comparaciones por curso.

La mayoría de los contenidos de primero de Bachillerato de ambas modalidades han sido tratados en la ESO, los que se tratan por primera vez están marcados con asterisco.

Tabla 2 Contenidos de álgebra estudiados en el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
POLINOMIOS Definición y Términos de un Polinomio Valor numérico de un Polinomio Operaciones con polinomios Regla de Ruffini. Teorema del resto Potencia de un binomio Raíces de un polinomio Factorización de polinomios Fracciones algebraicas Operaciones con fracciones algebraicas **ECUACIONES** Ecuaciones Lineales Ecuaciones de segundo grado ❖ Ecuaciones Exponenciales y logarítmicas. Factorización de ecuaciones Resolución de Problemas con ecuaciones e Inecuaciones. **SISTEMAS DE ECUACIONES** Sistemas de ecuaciones lineales. ❖ Método de Gauss Sistemas de ecuaciones no lineales Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones. **INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES**	**MATRICES** Suma de Matrices Producto de matrices por Números Producto de matrices Rango de una matriz Matriz inversa Resolución de Problemas con Matrices. **DETERMINANTES** Determinantes de orden dos y tres Propiedades de los determinantes Menor complementario y adjunto Determinantes de cualquier orden Cálculo del rango de una matriz Cálculo de la inversa de una matriz **SISTEMAS DE ECUACIONES** Sistemas de ecuaciones lineales Método de Gauss para resolver sistemas Expresión matricial de un sistema Teorema de Rouché-Fröbenius Regla de Cramer Sistemas Homogéneos Sistemas de ecuaciones con parámetros Resolución de Problemas con sistemas **PROGRAMACIÓN LINEAL** Inecuaciones lineales con dos incógnitas Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas Programación lineal Métodos de resolución Tipos de soluciones Problema de la producción Problema de la dieta Problema del Transporte

Tabla 3. Contenidos de álgebra estudiados en el Bachillerato de Ciencia y Tecnología

Matemáticas I	Matemáticas II
ECUACIONES Ecuaciones de Segundo Grado Ecuaciones con radicales Factorización como recurso para resolver ecuaciones Resolución con la x en el denominador ❖ Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas. Inecuaciones **SISTEMAS DE ECUACIONES** Definición y Sistemas de ecuaciones Sistemas de inecuaciones de primer y segundo grado **INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES** ❖ **FACTORIALES Y NÚMEROS COMBINATORIOS** **POTENCIAS DE UN BINOMIO**	**SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS** Sistemas de ecuaciones lineales Sistemas de ecuaciones con solución y sin solución Sistemas escalonados Método de Gauss Discusión de Sistema de Ecuaciones **MATRICES** Nomenclatura y definiciones Operaciones con Matrices Propiedades de las operaciones con matrices Matrices cuadradas Complemento teórico para el estudio de matrices Rango de una matriz **DETERMINANTES** Determinantes de orden dos Determinantes de orden tres Determinantes de orden cualquiera Menor complementario y adjunto Desarrollo de un determinante por elementos de una línea Método para calcular determinantes de orden cualquiera. Rango de una matriz a partir de sus menores **RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES** Criterio para saber si un sistema es compatible Regla de Cramer Aplicación de la regla de Cramer a Sistemas cuales quiera Sistemas Homogéneos Discusión de sistemas mediante determinantes Cálculo de la inversa de una matriz Forma matricial de un sistema de ecuaciones

2.3. SEGUIMIENTO DE DOS DE LOS TEMAS ESTUDIADOS EN LAS DOS MODALIDADES DEL BACHILLERATO.

Se han presentado los contenidos del bloque de álgebra en las dos modalidades de bachillerato que nos ocupan, nos centraremos en los mismos temas que hemos tratado en la primera parte del trabajo. Las ecuaciones de segundo grado y los sistemas de ecuaciones, este último está presente en los dos cursos de cada bachillerato.

2.3.1ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y BICUADRADAS

Bachillerato en Humanidades y Ciencias Sociales.

Este tema es tratado solamente en **Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I** y se trata de forma más resumida que en el cuarto curso.

Primero se da la siguiente definición de ecuación de segundo grado, más precisa que en los cursos anteriores:

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c, números reales y $a \neq 0$

Se trata la diferencia entre ecuación de segundo grado completa e incompleta.

Se explica la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Se recuerda como se conoce el número de soluciones de una ecuación a partir del discriminante.

Finalmente se da la definición de ecuación bicuadrada:

Una ecuación bicuadrada es una ecuación que se puede expresar de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ con $a, b\ y\ c$ números reales y $a \neq 0$, además se explica la forma de resolverla.

Bachillerato en Ciencia y Tecnología

El tema de Ecuaciones de Segundo Grado es visto sólo en la asignatura de matemáticas I se trata de forma todavía más resumida que en el Bachillerato de Ciencias Sociales. Se da una definición muy parecida, se explica cuando es completa o incompleta y su resolución.

Se da una definición utilizando un lenguaje verbal y no simbólico:
Son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar. A continuación se da su forma general y el procedimiento de resolución.

2.3.2 SISTEMAS DE ECUACIONES

Antes de ver sistemas de ecuaciones, se tratan los temas de matrices y determinantes.

Bachillerato en Humanidades y Ciencias Sociales.

Primer curso:

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una ecuación lineal es una ecuación polinómica de grado uno que puede tener una o varias incógnitas.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales con varias incógnitas para el que se quiere encontrar una solución común.

Clasificación de sistemas: compatibles determinados e indeterminados, y sistemas incompatibles

Resolución de problemas mediante sistemas.

Método de gauss

El método de Gauss, se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consiste en encontrar mediante las transformaciones adecuadas, otro sistema con la misma solución en el que cada una de las ecuaciones tiene una incógnita menos que la anterior. Para conseguir un sistema de este tipo se pueden utilizar estas transformaciones:

- Cambiar el orden de dos ecuaciones
- Multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero.
- Sustituir una ecuación u otra por la suma de ambas, multiplicadas por un mismo número distinto de cero.

Sistemas de ecuaciones no lineales

Un sistema de ecuaciones no lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones donde alguna de ellas no es lineal, como pueden ser las ecuaciones de grado mayor que 1, ecuaciones con fracciones algebraicas o con radicales.

Segundo Curso

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal de incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, es una igualdad de la forma $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, donde los números reales $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ se denominan coeficientes, y b, término independiente.

Se llama solución de una ecuación lineal con n incógnitas a cada conjunto de valores $x_1 = c_{1,} x_2 = c_{2,} x_3 = c_{3,} \dots, x_n = c_{n,}$ que verifican la ecuación.

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es el conjunto formado por m ecuaciones lineales con las mismas n incógnitas del que se quiere buscar una solución común. Lo representamos así:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Los números reales a_{ij} se denominan **coeficientes del sistema** y los números reales b_i, **términos independientes**.

Se llama **solución** de un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas a cualquier conjunto de valores $x_1 = c_{1,} x_2 = c_{2,} x_3 = c_{3,} \dots, x_n = c_{n,}$ que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Sistemas escalonados

Un sistema de ecuaciones lineales tiene forma escalonada cuando cada ecuación tiene, al menos una incógnita menos que la anterior.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Método de Gauss para resolver sistemas

El método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones consiste en convertir ese sistema de ecuaciones en otro escalonado equivalente, utilizando las transformaciones elementales adecuadas.

Las transformaciones elementales que se pueden realizar en el sistema son:

- Intercambiar el orden de la ecuación i por la ecuación j: $F_i \leftrightarrow F_j$
- Sustituir la ecuación i por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número $a \neq 0$: $F_i = aF_i$
- Sustituir la ecuación i o la ecuación j por la suma de ambas, multiplicada por números ayb no nulos: $F_i = aF_i + bF_j$

Discusión de Sistemas

Discutir un sistema de ecuaciones es clasificarlo, atendiendo a su número de soluciones, en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Para discutir un sistema mediante el método de Gauss, una vez terminado el proceso, nos fijamos en la última fila de la matriz en la que todos sus elementos no sean nulos.

Si la fila es del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 & b \end{array}\right)$$

Si $a_1 \neq 0$ o $a_2 \neq 0$ y tenemos más incógnitas que ecuaciones válidas. El sistema es compatible indeterminado.

Si la fila es del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{array}\right)$$

Si $a \neq 0$ y tenemos tantas ecuaciones válidas como incógnitas. El sistema es compatible determinado.

Si la fila es del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

Si $b \neq 0$ $\rightarrow$ Tenemos la ecuación 0=b, (ecuación imposible). Sistema incompatible.

Si al finalizar el proceso, o en algún paso intermedio, encontramos una fila cuyos elementos son todos ceros, podemos suprimir esa ecuación.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

Esto en forma de ecuación significa: $0x_1 + 0x_2 + 0x_{3+\dots+}0x_n = 0$, es decir una ecuación trivial.

Expresión Matricial de un sistema

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Llamaremos expresión matricial de este sistema a la expresión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

La primera matriz es A, llamada matriz de los coeficientes, X es la matriz de las incógnitas y B es la matriz de los términos independientes. La expresión matricial de este sistema se puede indicar como:

$$A \cdot X = B$$

También se llamará **matriz ampliada**, A^*, del sistema a la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes de cada ecuación.

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | & b_2 \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots & | & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | & b_n \end{pmatrix}$$

Teorema de Rouché – Fröbenius

La condición necesaria y suficiente para que el sistema $A \cdot X = B$ tenga solución es que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema, A, sea el mismo rango de su matriz ampliada, A^*.

$Si\ Rango(A) \neq Rango(A^*), el\ sistema\ es\ incompatible.$
$Si\ Rango(A) = Rango(A^*) = r, el\ sistema\ es\ compatible.$
$Si\ r = nº\ de\ incógnitas, el\ sistema\ es\ compatible\ determinado$
Si r$<$ $nº\ de\ incógnitas, el\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado$

Regla de Cramer

Dado un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Si se cumple que el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, $|A| \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado y su solución es:

$$x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|}, para\ i = 1,2, \dots, n$$

Siendo A_{x_i} la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x_i por la columna de los términos independientes.

Sistemas Homogéneos

Si todos los términos independientes de un sistema de ecuaciones son ceros, diremos que es un sistema homogéneo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Propiedades

- Un sistema homogéneo siempre tiene como solución $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ (Solución trivial)
- Un sistema homogéneo siempre es compatible.
- $Rango(A) = Rango(A^*)$, por que las matrices A y A* solo se diferencian en una columna de ceros.

    Si $Rango(A) = Rango(A^*) = nº$ de incógnitas, el sistema es compatible determinado y, por tanto, sólo tiene como solución la solución trivial.

    Si $Rango(A) = Rango(A^*) < nº$ de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado y, tiene infinitas soluciones.

Sistemas de Ecuaciones con parámetros

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ kx + (k-1)y + z = k \\ x + y + z = k + 1 \end{cases}$$

Este es un conjunto de sistemas de ecuaciones Para cada parámetro de k, hay un sistema de ecuaciones distinto. De esos infinitos sistemas, es posible que unos sean compatibles y otros incompatibles.

Discutir un sistema de ecuaciones dependiente de uno o más parámetros es identificar para qué valores de los parámetros del sistema, es compatible distinguiendo los casos en que es determinado o indeterminado o incompatible.

Un sistema de ecuaciones con parámetros se puede discutir utilizando determinantes y el teorema Rouché-Fröbenius o por Gauss.

Se halla el rango de la matriz de los coeficientes
Hallamos el rango de la matriz ampliada.
Aplicamos el teorema de Rouché, comparando los rangos de las matrices.

Resolución de Sistemas con parámetros

Se pueden resolver sistemas de ecuaciones con parámetros utilizando la regla de Cramer, si el sistema es cuadrado.

Se analiza el parámetro cómo se explicó anteriormente.
Se resuelve el sistema para los valores del parámetro en los que es compatible determinado.
Se resuelve el sistema para los valores del parámetro en los que es compatible indeterminado.

Bachillerato en Ciencia y Tecnología

Primer curso:

Se recuerda lo siguiente:

- Una **solución** de una ecuación con varias incógnitas es un conjunto de valores (uno para cada incógnita) que hacen cierta la igualdad.
- Las ecuaciones con más de una incógnita suelen tener infinitas soluciones.
- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones en las que pretendemos encontrar su solución común (o sus soluciones comunes), en el caso de que las tenga.

Finalmente se hace un repaso de los procedimientos algebraicos para la resolución de sistemas. Las ecuaciones de los sistemas que se proponen, son más complejas que las tratadas en la educación secundaria obligatoria y se combinan diferentes tipos de ecuaciones incluyendo las que se acaban de aprender en Bachillerato, por ejemplo ecuaciones con radicales, ecuaciones exponenciales y logarítmicas, entre otras.

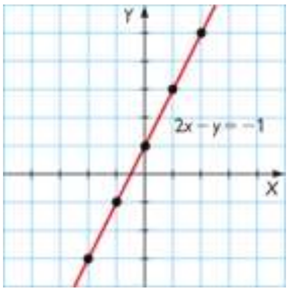
Segundo Curso:

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

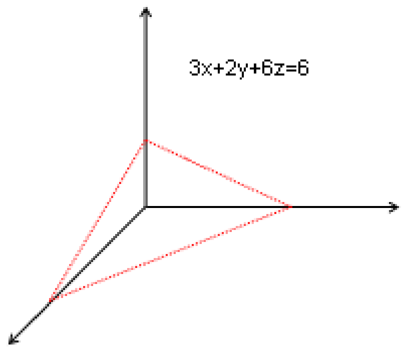
Ecuación lineal

Se da la misma definición de ecuación lineal que en el bachillerato de ciencias sociales, pero se trata su representación gráfica:

Una ecuación lineal con dos incógnitas representa una recta en el plano. Los puntos de la recta son las soluciones de la ecuación.



Una ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano en el espacio. Los puntos del plano son las soluciones de la ecuación.



Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución (o las mismas soluciones)

Sistemas de ecuaciones lineales

Se da la misma definición de sistemas de ecuaciones lineales en ambas ramas del Bachillerato, pero en el Bachillerato de Ciencia y Tecnología se habla de su representación gráfica:

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas representa un conjunto de rectas, su resolución consiste en averiguar si todas ellas tienen un punto en común y localizarlo.

Si las ecuaciones del sistema tienen tres incógnitas, representan planos. Resolver el sistema es encontrar el punto o los puntos que tienen en común todos los planos.

Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Dos sistemas pueden ser equivalentes sin que lo sean las ecuaciones que los forman.

Transformaciones validas en un sistema de ecuaciones.

Se llaman transformaciones validas a las que mantienen las soluciones del sistema. En la resolución del sistema se deben realizar transformaciones que además de válidas, sean convenientes, es decir, que se aproximen a la solución:

Multiplicar o dividir los miembros de una de las ecuaciones por un número distinto de cero.

Añadir una ecuación que sea combinación lineal de las demás o al contrario.

Sistemas de ecuaciones con solución y sin solución

Se trata la clasificación de sistemas compatibles determinados e indeterminados, y sistemas incompatibles. Además se da la interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas:

Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.

Compatible determinado: son dos rectas que se cortan.

Compatible indeterminado: son dos rectas coincidentes.

Incompatible: son dos rectas paralelas.

Estas representaciones se han visto durante la ESO.

Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

Compatible determinado: los tres planos se cortan en un punto.

Compatible indeterminado: los tres planos se cortan en una recta.

Incompatible: los tres planos son paralelos.

Sistemas escalonados.

Se da la misma definición que en el Bachillerato de Ciencias Sociales.

Método de Gauss

Se explica de forma similar que en el Bachillerato de Ciencias Sociales.

Son un poco más explícitos en los pasos ya que explican que al finalizar el proceso o en algún paso intermedio se llega a uno de los siguientes casos:

a) Una fila de ceros, corresponde a una ecuación trivial y se puede prescindir de ella.
b) Dos filas iguales o proporcionales. Corresponden a ecuaciones equivalentes y se puede prescindir de una de ellas.
c) Una fila de ceros, salvo el último número que corresponde al término independiente, distinto de cero. En tal caso se reconoce que el sistema es incompatible.

Al finalizar el proceso, se puede llegar a uno de los siguientes casos:

Sistema compatible determinado. Hay tantas ecuaciones válidas como incógnitas. Paso a paso se va obteniendo un valor numérico para cada incógnita.

Sistema compatible indeterminado. Hay menos ecuaciones válidas que incógnitas. Las incógnitas que están demás se pasan al segundo miembro con lo que el valor de las demás se dará en función de ellas.

Sistema incompatible. La ecuación señalada no se puede cumplir nunca.

Finalmente se explica que el método de Gauss es una generalización del método de reducción que ya se conoce.

Discusión de sistemas de ecuaciones

Se explica en qué consiste discutir un sistema de ecuaciones dependiente de uno o más parámetros.

Resolución de sistemas mediante determinantes.

Teorema de Rouché- Fröbenius

Se enuncia el Teorema: La condición necesaria y suficiente para que tenga solución el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Es que el rango de la matriz de los coeficientes , A, coincida con el rango de la matriz ampliada A*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

Es decir el sistema tiene solución ⇔rango (A)= rango (A*)

Demostración:
Se puede poner el sistema como una combinación lineal entre los vectores columna de la matriz A

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1+\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2+\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \cdots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Se observa que si el sistema tiene solución existen unos números, $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ que permiten poner la columna de los términos independientes como combinación lineal de las columnas de la matriz A, por tanto al añadir la columna de los términos independientes a la matriz A, esta no aumenta su rango. Es decir si el sistema tiene solución entonces: rango (A*)= rango (A).

El argumento recíproco es similar: si rango (A*)= rango (A), es porque la columna de los términos independientes es combinación lineal de las restantes y por tanto, existen unos números, $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, que multiplicados por los vectores columna de la matriz A, dan como resultado el vector columna de los términos independientes. De modo que estos números son solución del sistema.

Relación entre rango (A) y rango (A*) en un sistema incompatible

Si el sistema es incompatible rango (A) $\neq$ rango (A*), puesto que A* tiene una columna más que A, su rango sólo puede ser una unidad mayor. Por tanto, si el sistema es incompatible, rango (A*)= rango A+1.

Regla de Cramer

Se explica que la regla de Cramer sirve para obtener la solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. A diferencia del Bachillerato en Ciencias Sociales en el cual se da el enunciado de forma general, se enuncia y se demuestra para $n = 4$. Su generalización para un n cualquiera es inmediata.

Enunciado: Se tiene un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t = c_3 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t = c_4 \end{cases} \text{con } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

Puesto que, $|A| \neq 0$, rango (A)=4= rango (A*) . Por tanto el sistema es compatible.

Su solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, y = \frac{|A_y|}{|A|}, z = \frac{|A_z|}{|A|}, t = \frac{|A_t|}{|A|},$$

Siendo A_x la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes.

Demostración:

Es necesario despejar cada una de las incógnitas. Si se empieza por la x, hay eliminar y, z, t. Esto se consigue multiplicando las cuatro ecuaciones, que llamamos (1), (2), (3), (4), por los adjuntos de los coeficientes de la x.

$$\begin{aligned} (1).A_{11} &\rightarrow a_{11}A_{11}x + a_{12}A_{11}y + a_{13}A_{11}z + a_{14}A_{11}t = c_1A_{11} \\ (2).A_{21} &\rightarrow a_{21}A_{21}x + a_{22}A_{21}y + a_{23}A_{21}z + a_{24}A_{21}t = c_2A_{21} \\ (3).A_{31} &\rightarrow a_{31}A_{31}x + a_{32}A_{31}y + a_{33}A_{31}z + a_{34}A_{31}t = c_3A_{31} \\ (4).A_{41} &\rightarrow a_{41}A_{41}x + a_{42}A_{41}y + a_{43}A_{41}z + a_{44}A_{41}t = c_4A_{41} \end{aligned}$$

Sumando se obtiene una igualdad que se va a analizar por partes:

El coeficiente de la x es: $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} = |A|$

El coeficiente de la y es: $a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} + a_{42}A_{41} = 0$

Análogamente se ve que los coeficientes de z y t son cero.

El término independiente es:

$$c_1A_{11} + c_2A_{21} + c_3A_{31} + c_4A_{41}$$

Que es el determinante de la matriz A_x que resulta de sustituir en A, la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes.

$$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ c_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Al efectuar la suma $(1)\cdot A_{11} + (2)\cdot A_{21} + (3)\cdot A_{31} + (4)\cdot A_{41}$, se obtiene:

$$|A|x + 0y + 0z + 0t = |A_x|$$

Puesto que $|A| \neq 0$, se puede despejar la x, y obtenemos: $x = \frac{|A_x|}{|A|}$

Para despejar la y, habría que multiplicar las ecuaciones (1), (2), (3), (4) por $A_{12}, A_{22}, A_{32}\, y\ A_{42}$ respectivamente y análogamente se despejarían z y t, obteniendo:

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} \qquad t = \frac{|A_t|}{|A|}$$

Aplicación de la regla de Cramer

En principio esta regla sólo es válida para sistemas cuadrados (nxn) que cumplen que $|A| \neq 0$ a estos sistemas se les llama de Cramer. Sin embargo también puede aplicarse a cualquier sistema compatible, basta con obtener un sistema equivalente, eliminando ecuaciones superfluas o dependientes.

Supongamos que se tiene un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, siendo $m > n$ y tal que rango (A)= rango (A*)=n. Por lo tanto sobran $m - n$ ecuaciones. Para encontrar cuáles son las ecuaciones de las que se puede prescindir, se deben encontrar la matriz de los coeficientes de (A) un menor de orden n distinto de cero, por ejemplo el que se utiliza para conocer el rango de la matriz A. Las filas que intervienen en este menor, son las que corresponden a las ecuaciones principales, las restantes se pueden suprimir.

Sistemas Homogéneos

Se trata de la misma forma que en Bachillerato de Ciencias sociales y se incluye que para que un sistema homogéneo tenga otras soluciones, es necesario y suficiente que: rango (A)$<$ número de incógnitas.

2.3.3PROBLEMAS QUE SE PROPONEN EN EL BACHILLERATO

Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales

Ecuaciones de Segundo Grado

1. Determinar el valor de k para que la ecuación $3x^2 - 6x + k = 0$, tenga solución
(Primer curso)
Este problema está dentro de un contexto intramatemático, pero requiere que se relacionen conceptos de otros temas como es el caso de inecuaciones y no consiste simplemente en aplicar la fórmula si no en razonar antes de resolver.

1. Establecer la condición que debe cumplir el discriminante

Para que la ecuación no tenga solución debe ser:

$\boldsymbol{\Delta}= b^2 - 4ac < 0 \xrightarrow{a=3, b=-6, c=K} (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k < 0 \quad 36 - 12k < 0$

2.Resolver la inecuación resultante

$\mathbf{36 - 12}\boldsymbol{k} < 0 \quad \rightarrow \boldsymbol{k} > 3$ el coeficiente k puede tomar cualquier valor del Intervalo

Sistemas de Ecuaciones

3. El gasto mensual en salarios de una empresa de 36 trabajadores es de 54900€. Hay tres categorías de trabajadores: A, B,C y el salario mensual de un trabajador de la categoría A es de 900€, el de uno de B es de 1500€ y el de uno de C es de 3000€. Sin despreciar a nadie, la empresa quiere reducir el gasto salarial en un 5%. Para ello ha rebajado un 5% el salario a la categoría A, un 4% a B y un 7% a C. Averigua cuantos trabajadores hay de cada categoría.

1. Determinar las incógnitas y Traducir al lenguaje algebraico

Las incógnitas son el número de trabajadores que hay en cada categoría
$\boldsymbol{x}$ =nº trabajadores de la categoría A
$\boldsymbol{y}$ =nº trabajadores de la categoría B
$\boldsymbol{z}$ =nº trabajadores de la categoría C

La empresa tiene 36 trabajadores $\boldsymbol{x+y+z=36}$
El gasto mensual en salarios es de 54.900€ $\boldsymbol{900x+1500y+3000z=54900}$
Es decir reducir un 5% rebajando un 5% a la categoría A, un 4% a B y un 7% a C.

$$\frac{5\cdot 900}{100}x+\frac{4\cdot 1500}{100}y+\frac{7\cdot 3000}{100}z=\frac{5\cdot 54900}{100}$$

2 .Plantear y simplificar el sistema resultante

$$\begin{cases} x+y+z=36 \\ 900x+1500y+3000z=54900 \\ \dfrac{5\cdot 900}{100}x+\dfrac{4\cdot 1500}{100}y+\dfrac{7\cdot 3000}{100}z=\dfrac{5\cdot 54900}{100} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=36 \\ 3x+5y+10z=183 \\ 3x+4y+14z=183 \end{cases}$$

3 Resolver el sistema de ecuaciones

Utilizando el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 36 \\ 3 & 5 & 10 & | & 183 \\ 3 & 4 & 14 & | & 183 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{F_2=F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 36 \\ 0 & 2 & 7 & | & 75 \\ 0 & 1 & 11 & | & 75 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-\frac{1}{2}F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 36 \\ 0 & 2 & 7 & | & 75 \\ 0 & 0 & \dfrac{15}{2} & | & \dfrac{75}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=36 \\ 2y+7z=75 \\ \frac{15}{2}z+\frac{75}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{y=20,\ z=5} \\ \xrightarrow{Z=5} \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} x+20+5=36 \rightarrow x=11 \\ 2x+35=75 \rightarrow y=20 \\ z=5 \end{array}$$

Modalidad de Ciencia y Tecnología

Sistemas de Ecuaciones

Además de problemas como el anterior en el que hay que resolver un problema utilizando sistemas de ecuaciones, también encontramos algunos ejercicios como el siguiente:

3. Demuestra la regla de Cramer para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (Segundo Curso)

Al ser una demostración se podría considerar un problema de reflexión, pero el estudiante debe seguir el mismo procedimiento que se ha explicado en el texto para la demostración de la regla de Cramer para un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Con lo cual es más bien un ejercicio de repetición.

2.4CONCLUSIONES

Lo que podemos observar de los primeros cursos en las dos modalidades de Bachillerato, es que la mayoría de los contenidos ya se han tratado durante la ESO. Entre los contenidos que se introducen por primera vez en ambos cursos tenemos las ecuaciones exponenciales y logarítmicas y el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones.

En primer curso de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, se hace un extenso repaso de Polinomios, a diferencia del Bachillerato en Ciencia y Tecnología. En este último, se trata el tema de factoriales y números combinatorios y se repite el Binomio de Newton, pero con mucha más profundidad que en el cuarto curso de la ESO y no es estudiado en la modalidad de Bachillerato de Ciencias Sociales.

En cuanto al Segundo curso podemos observar que los contenidos son muy parecidos pero que la profundidad con la que son tratados es diferente, en bachillerato de Ciencias Sociales estos temas son tratados con menos profundidad y se realizan más ejercicios. En la modalidad de Ciencia y Tecnología, se presentan demostraciones.

En matemáticas aplicadas a las ciencias sociales se estudia programación lineal y se proponen una gran cantidad de problemas sobre el tema.

De esta forma podemos comprobar cómo en el Bachillerato de Ciencias Sociales, los contenidos son más prácticos y en la modalidad de Ciencia y Tecnología los contenidos están más enfocados a estimular el razonamiento matemático y a que el estudiante maneje un lenguaje más formal y riguroso.

BIBLIOGRAFÍA

Decreto 42/2008 por el que se establece el currículo de Bachillerato en Castilla y León.

Decreto 52/2007 por el que se establece el currículo de la ESO en Castilla y León.

Real Decreto 1631 a 5 de Enero de 2007, del BOE.

Matemáticas 1 ESO, Editorial Santillana, 2010

Matemáticas 2 ESO, Editorial Santillana, 2010

Matemáticas 3 ESO, Editorial Santillana, 2010

Matemáticas 4 ESO Opción A, Editorial Santillana, 2010

Matemáticas 1 ESO, Editorial Santillana, 2010

Matemáticas 2 ESO, Editorial Santillana, 2010

Matemáticas 3 ESO, Editorial Santillana, 2010

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, 1 Bachillerato, Editorial Santillana, 2008

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, 2 Bachillerato, Editorial Santillana, 2008

Matemáticas II, 2 Bachillerato, Editorial ANAYA, 2012

Matemáticas I, 2 Bachillerato, Editorial ANAYA, 2012

Matemáticas 4 ESO Opción B, Editorial EDELVIVES, 2008

Informe PISA 2003 OCDE, Aprender para el mundo de mañana, editorial Santillana 2005.

Gráficas extraídas de: https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n