

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID  
E.T.S.I DE TELECOMUNICACIÓN

TRABAJO FINAL DE GRADO  
GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS DE  
TELECOMUNICACIÓN

Filtrado de variaciones espurias de  
amplitud en la recepción de ondas  
acústicas dentro de una cavidad  
resonante

Autor: Luis Gamarra Casero

Tutor: Juan Blas Prieto

8 de enero de 2019



TÍTULO:	Filtrado de variaciones espurias de amplitud en la recepción de ondas acústicas dentro de una cavidad resonante
AUTOR:	Luis Gamarra Casero
TUTOR:	Juan Blas Prieto
DEPARTAMENTO:	Teoría de la Señal y Comunicaciones e Ingeniería Telemática

## TRIBUNAL

PRESIDENTE:	D. Evaristo José Abril Domingo
VOCAL:	D. Juan Carlos Aguado Manzano
SECRETARIO:	D. Juan Blas Prieto
SUPLENTE:	D. Jaime Gómez Gil
SUPLENTE:	D. Ignacio de Miguel Jiménez
FECHA:	15-Enero-2019
CALIFICACIÓN:	



## Resumen

En el presente Trabajo de Fin de Grado se intenta dilucidar la manera en la cual varía, en función de diversos factores ambientales, el patrón de onda estacionaria habido en el interior de una cavidad resonante de dimensiones mucho mayores a la longitud de onda de trabajo, pretendiendo así dificultar la aparición de modos de vibración dominantes.

Para resolver empíricamente la cuestión que nos atañe se ha empleado un experimento basado en una cavidad resonante realizada en cemento, cuya forma responde a la de un cubo ligeramente irregular, a la que se ha practicado una apertura en una de sus caras. A través de tal apertura se ha hecho incidir ondas de sonido desde distintas direcciones sobre el interior de la cavidad, y se ha muestreado la amplitud de la onda en diversos puntos de la misma utilizando un micrófono montado sobre un robot móvil.

Se desconoce en principio el efecto que variables fuera de nuestro control, como la humedad y la temperatura, pueden tener sobre los resultados del experimento, ya que el coeficiente de reflexión que presentan las paredes de cemento de la cavidad depende de éstas. El objetivo de esta investigación es estudiar el tamaño de este efecto distorsionador para así determinar en qué grado es fiable la información tomada por el micrófono de muestreo.

La conclusión final a la que se llegó fue que el entorno ejerce una elevada influencia en las medidas recogidas, pero que aun así algunos puntos decisivos del patrón de onda, como ciertos máximos y mínimos, mantienen una posición relativamente estática dentro de la cavidad.

PALABRAS CLAVE: cavidad resonante, onda estacionaria, reflexión, humedad, temperatura.

# Abstract

In the present Thesis, it is desired to clarify the manner in which the stationary wave pattern formed within a resonant cavity is affected by environmental factors. The dimensions of this cavity are bigger than the used wavelength, hampering the manifestation of vibration modes.

To resolve empirically our problem it is been utilized an experiment based on a made of cement resonant cavity, slightly deformed cubical shaped, with an aperture in one of its faces. Through this aperture sound waves were projected towards the inside of the cavity, and the amplitude of the inner perturbation was measured by a microphone mounted on a mobile robot.

In principle it is unknown the effect that variables like humidity and temperature can exert in the results of the experiment. The objective of this investigation is to determine the size of such distortions and the grade of reliability of the measurements made by the microphone.

The conclusion achieved is that environment has an important significance on the results, but some decisive points, such as certain maximums and minimums, remain fixed.

**KEYWORDS:** resonant cavity, stationary wave, reflexion, humidity, temperature.



# **Agradecimientos**

A mi familia y amigos, y a mi tutor Juan Blas Prieto.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Experimento desarrollado . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. Fases de la investigación . . . . .	3
1.4. Medios . . . . .	3
<b>2. Principios físicos y formulación analítica del problema</b>	<b>5</b>
2.1. Principios físicos de las ondas acústicas . . . . .	5
2.1.1. Ecuación de conservación de la masa . . . . .	7
2.1.2. Ecuación del movimiento de Euler . . . . .	9
2.1.3. Relación entre presión y densidad . . . . .	11
2.1.4. Obtención de la ecuación de ondas . . . . .	11
2.2. Propagación de ondas: principio de Huygens . . . . .	12
2.3. Fórmula de Helmholtz . . . . .	13
2.4. Significado físico de la fórmula de Helmholtz . . . . .	17
2.5. Teoría de la difracción . . . . .	19
2.5.1. Formulación de Kirchhoff de la difracción debida a una pantalla plana . . . . .	20
2.5.2. Primera solución de Rayleigh-Sommerfeld al problema de la difracción debida a una pantalla plana . . . . .	22
2.5.3. Segunda solución de Rayleigh-Sommerfeld al problema de la difracción debida a una pantalla plana . . . . .	25
2.5.4. Comparación de las soluciones de Kirchhoff y de Rayleigh-Sommerfeld . . . . .	26
<b>3. Experimento desarrollado</b>	<b>27</b>
3.1. Cavidad resonante . . . . .	28
3.2. Micrófono y carrito internos . . . . .	28
3.3. Micrófono externo . . . . .	31

---

3.4. Generador de señales y bocina . . . . .	33
3.5. Carrito externo . . . . .	35
3.6. Analizador dinámico de señal . . . . .	35
<b>4. Resultados y conclusiones extraídas</b>	<b>39</b>
4.1. Distribución estadística de los valores de la perturbación en el interior de la cavidad. . . . .	40
4.2. Rectas de humedad y temperatura . . . . .	46
4.3. Efecto de la humedad y de la temperatura en la correlación de las medidas. . . . .	52
4.4. Variación de la forma de onda debida a la humedad y a la temperatura. . . . .	56
4.5. Efecto de la frecuencia: análisis para una longitud de onda comparable a las dimensiones de la cavidad. . . . .	73
4.6. Variación de la forma de onda debida a la humedad y a la temperatura para baja frecuencia. . . . .	76
4.7. Conclusiones y líneas futuras. . . . .	91
<b>A. Anexo: Código de ficheros utilizados</b>	<b>93</b>
A.1. Fichero imagenes-patrones.m . . . . .	93
A.2. Fichero corrTemp.m . . . . .	95
A.3. Fichero rectaT-H.py . . . . .	97
A.4. Fichero rectaT-Hv2.py . . . . .	100
<b>Índice de figuras</b>	<b>105</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>



# Capítulo 1.

## Introduccion

El presente trabajo versará sobre la propagación de ondas en el interior de una cavidad resonante, con forma básicamente de cubo aunque las paredes se han inclinado un poco para que no sean paralelas entre sí. La longitud del lado del cubo es aproximadamente unas 15 longitudes de onda en la frecuencia de trabajo habitual. De esta manera se evita que se formen modos claros en la cavidad, y se facilita que el patrón de amplitud de vibración se defina principalmente a partir de la dirección de llegada de las ondas externas que alimentan la cavidad y de factores ambientales como la humedad y la temperatura. El objetivo final del trabajo consiste en determinar de qué forma estas condiciones ambientales ya mencionadas afectan al patrón de vibración interior.

El problema abordado está claramente basado en los fenómenos físicos de la propagación y la difracción de ondas abordados por científicos como Huygens o Fresnel. Estos científicos desarrollaron un modelo analítico que se utilizará para explicar en profundidad la naturaleza del problema y para intentar tratarlo adecuadamente.

### Contenido

---

<b>1.1. Experimento desarrollado</b> . . . . .	2
<b>1.2. Objetivos</b> . . . . .	2
<b>1.3. Fases de la investigación</b> . . . . .	3
<b>1.4. Medios</b> . . . . .	3

---

## 1.1. Experimento desarrollado

La investigación realizada se basa en la recogida de resultados empíricos de un experimento que simula la situación estudiada. Dicho experimento consiste en una cavidad aproximadamente cúbica (no es exactamente un cubo para dificultar la aparición de modos) que posee una apertura en el centro de una de sus caras. A través de esta apertura se han hecho incidir ondas acústicas sobre la cavidad desde distintas direcciones, cada una de las cuales originará un patrón característico de amplitudes máximas de oscilación en cada punto del interior de la cavidad.

En nuestro experimento, las ondas que se van a utilizar como medio para analizar empíricamente los patrones de onda originados por la cavidad son ondas acústicas. Se ha tomado esta decisión debido a que su carácter escalar las hace más sencillas de manejar que las ondas electromagnéticas, que están formadas por dos campos vectoriales y por tanto pueden tener distintos tipos de polarización.

Las paredes de la cavidad están realizadas en cemento, material al cual se supone un elevado coeficiente de reflexión. Así se intenta confinar a las ondas completamente en el interior de la cavidad y evitar en lo máximo de lo posible fugas de energía a través de las paredes. El patrón característico se ha medido en un plano bidimensional, a altura fija, utilizando un micrófono montado sobre un robot móvil que recorre toda la cavidad y mide sucesivamente el valor eficaz de la perturbación sonora.

## 1.2. Objetivos

El objetivo último de esta investigación es tratar de averiguar la influencia que tienen factores ambientales como la humedad y temperatura en la propagación de señales acústicas en el interior de una cavidad resonante aproximadamente cúbica. Hallar un modelo matemático de dicha influencia es una tarea tremendamente compleja y que requiere instrumentación de medida con más precisión que la disponible en el laboratorio. Por tanto, ateniéndose al material disponible se ha logrado arrojar luz sobre el problema, alcanzando hitos que podrían entenderse como subobjetivos en el proceso de obtener una solución final. Algunos de los mencionados subobjetivos serían:

- Entender la influencia de los factores ambientales, como la temperatura o la humedad, sobre las condiciones habidas en la cavidad resonante.
- Deducir en qué medida afecta la dirección de llegada de las ondas a la cavidad en el patrón de onda formado en el interior de esta en relación a la influencia de los distintos factores ambientales.
- Dar explicación a ciertas estadísticas seguidas por el patrón de onda originado en la cavidad.

### 1.3. Fases de la investigación

Las fases seguidas en el desarrollo de esta investigación son las expuestas a continuación.

1. Comprender en profundidad las leyes que gobiernan la propagación de ondas en entornos de las características de nuestro experimento, explicadas en profundidad en el capítulo 2.
2. Calibración del robot interno de medida en lo referido a la exactitud de sus desplazamientos automáticos.
3. Toma de varias series de medidas en idénticas condiciones.
4. Análisis de las medidas obtenidas y deducción de los resultados oportunos.

### 1.4. Medios

Como se explicó anteriormente, la investigación se basa en un experimento en el cual intervienen diversos equipos que son coordinados por un programa central.

Los medios físicos y equipos utilizados consisten en:

- La cavidad resonante.
- El micrófono de medida interno (Behringer ECM8000), que mide sucesivamente la perturbación en distintos puntos de la cavidad.

- El carrito interno que se encarga de desplazar el micrófono de muestreo por el interior de la cavidad para tomar medidas sucesivas. Tiene dos grados de libertad en un plano paralelo al suelo.
- El micrófono externo (Behringer ECM8000), que se toma como referencia para así reducir el ruido obtenido en las medidas internas.
- El analizador dinámico de señal (Agilent 3567A), que calcula la diferencia entre la medida tomada por el micrófono interno y la tomada por el externo.
- Un generador electrónico de funciones arbitrarias (Agilent 33120A), que genera una señal monocromática y la envía a la bocina.
- Una bocina, que transforma la señal llegada del generador de funciones en una onda de sonido.
- Un carrito externo, que desplaza la bocina según se programe desde el ordenador central. Tiene un grado de libertad (es unidimensional).
- Dos arduinos (Arduino Mega 2560, Arduino Uno), que se encargan de mover los dos carritos y orientar la bocina acústica. Además también ayudan a registrar la temperatura y humedad al comienzo de cada muestra.
- El ordenador central en el cual corren los programas que controlan a todas las partes integrantes del experimento, algunas de ellas indirectamente a través del control de los dos arduinos mediante un puerto usb.

Los medios *software* utilizados son:

- Arduino, necesario para controlar los dos procesadores arduinos de los que consta el experimento.
- Python, lenguaje en el cual está realizado el programa principal de control del experimento. Así mismo, también se ha utilizado para analizar algunas medidas.
- MATLAB, utilizado para analizar las medidas.

## Capítulo 2.

# Principios físicos y formulación analítica del problema

El problema abordado en la investigación se podría abordar como sigue: dada una superficie cerrada, que a su vez se puede subdividir en una parte reflectante y otra parte (la apertura) en la cual el valor de la perturbación es conocido, hemos de hallar el valor de la perturbación en el interior de la superficie. Este problema involucra los fenómenos de la reflexión de ondas (en el lado interno de las paredes) y de la difracción de ondas (en la apertura). Analicemos pues detalladamente los modelos matemáticos que describen estos dos fenómenos.

### Contenido

---

<b>2.1. Principios físicos de las ondas acústicas</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>2.2. Propagación de ondas: principio de Huygens</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2.3. Fórmula de Helmholtz</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>2.4. Significado físico de la fórmula de Helmholtz</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.5. Teoría de la difracción</b> . . . . .	<b>19</b>

---

### 2.1. Principios físicos de las ondas acústicas

En este apartado presentamos una introducción sobre los principios físicos que siguen y originan las ondas sonoras. Es importante para este trabajo tener una cierta base en esta materia, pues son ondas sonoras la parte central de nuestro experimento, y la difracción y reflexiones que sufran estas dentro de la cavidad vendrán dadas por

las leyes físicas del sonido. Demostraciones habidas en posteriores subsecciones de esta introducción harán referencia inevitablemente a conceptos presentados en este punto.

En nuestro caso concreto, las ondas acústicas utilizadas viajan a través del aire. Por lo tanto dichas ondas consistirán esencialmente en la propagación de perturbaciones de las magnitudes fluidas del aire en reposo, como son la presión, la densidad, la velocidad o la entropía. Su propagación obedecerá, como no puede ser de otra manera, a las leyes de la mecánica de fluidos.

La mecánica de fluidos forma parte de la rama de la física conocida como *mecánica de los medios continuos*. Ella se caracteriza por tratar las magnitudes de los cuerpos físicos de estudio mediante funciones continuas, que asignan a cada punto del espacio y del tiempo un valor a cada magnitud física. Un ejemplo sencillo es el de la densidad de fluido. Se modela como un campo escalar de densidades  $\rho(\vec{r}, t)$ , el cual viene definido en cada punto por:

$$\rho(\vec{r}_0, t) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m}{V}$$

Donde  $V$  es un volumen que contiene al punto definido por el vector de posición  $\vec{r}_0$ , y  $m$  es la masa del volumen  $V$ .

Otro concepto central de la mecánica de fluidos es el de presión. Es una magnitud escalar que indica la fuerza normal por unidad de superficie que el fluido ejercería sobre cada una de las caras de una superficie infinitesimal  $dS$  inmersa en el fluido, independientemente de su orientación. Puede definirse como:

$$p(\vec{r}_0, t) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{F}{S}$$

Donde  $S$  es una superficie que contiene al punto definido por el vector de posición  $\vec{r}_0$ , y  $F$  es la fuerza normal que el fluido ejerce sobre cada una de las caras de dicha superficie  $S$ .

Vamos a anticipar que, cuando estemos tratando el caso de magnitudes referidas a ondas acústicas, descompondremos dichas magnitudes por conveniencia en la suma de dos contribuciones: una de ellas será el valor que la magnitud tiene en reposo, o lo que es lo mismo, el valor que tendría de no haber perturbación sonora; la otra será, precisamente, la desviación respecto al valor de reposo, que es la propia perturbación sonora [AS].

$$p_{tot} = p_0 + p$$

$$\rho_{tot} = \rho_0 + \rho$$

$$v_{tot} = v_0 + v$$

Donde los caracteres con el subíndice representan el valor en reposo, y los caracteres desnudos representan la perturbación sonora.

Se puede demostrar que, mediante una aproximación lineal de las ecuaciones de la mecánica de fluidos para gases, las magnitudes fluidas fundamentales que posee el aire cumplen la ecuación de ondas, lo cual demuestra la existencia de ondas mecánicas viajando a través de ellos. Esas ondas mecánicas son el sonido. A continuación se exponen las mencionadas ecuaciones y su tratamiento, hasta llegar a la ecuación de ondas[AS].

### 2.1.1. Ecuación de conservación de la masa

Básicamente expresa que la variación temporal de la masa contenida en un volumen fluido es igual al balance de flujo que atraviesa la frontera del volumen en ese instante. Matemáticamente, se podría expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_{tot}(\vec{r}, t) dV = \iint_S \rho_{tot}(\vec{r}, t) \vec{v}_{tot}(\vec{r}, t) \cdot \vec{dS} \quad (2.1.1)$$

donde  $\vec{v}_{tot}(\vec{r}, t)$  es el campo de velocidades del fluido, es decir, la velocidad que toma el fluido en cada punto del espacio y en cada instante temporal. Observemos que la integral del término de la izquierda

$$\iiint_V \rho_{tot}(\vec{r}, t) dV$$

representa la masa total contenida dentro del volumen de fluido  $V$ , mientras que el integrando del término de la derecha

$$\rho_{tot}(\vec{r}, t) \vec{v}_{tot}(\vec{r}, t)$$

representa el flujo de fluido por unidad de superficie que atraviesa una superficie infinitesimal  $dS$  perpendicular a  $\vec{v}$ . Al integrarlo sobre la superficie  $S$  del volumen fluido, obtenemos el balance de flujo que entra y sale de todo volumen.

La ecuación 2.1.1 es una ecuación en forma integral. Sin embargo, es fácil transformarla en una ecuación en forma diferencial aplicando el teorema de Gauss al miembro derecho de la ecuación:

$$\iint_S \rho_{tot} \vec{v}_{tot} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho_{tot} \vec{v}_{tot}) dV$$

Y sustituyendo en 2.1.1 queda

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_{tot}(\vec{r}, t) dV = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\rho_{tot} \vec{v}_{tot}) dV$$

En la igualdad anterior tenemos integrales sobre el volumen  $V$  a ambos lados, por lo que podemos obviarlas e igualar los integrandos para así obtener la ecuación de conservación de masa en forma diferencial:

$$\frac{\partial \rho_{tot}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\rho_{tot} \vec{v}_{tot}) \quad (2.1.2)$$

Que es más sencilla de manejar que la forma integral.

Apliquemos ahora una simplificación a esta ecuación. Recordemos que las magnitudes de fluido totales pueden descomponerse en la suma de su valor en reposo y de la perturbación sonora. Debido a que las perturbaciones sonoras son muy pequeñas, podemos considerar despreciables los términos procedentes del producto de dos perturbaciones. Además, consideraremos que el aire permanecía inmóvil en estado

de reposo, es decir, asumiremos  $v_0 = 0$ . Con estas simplificaciones, la ecuación 2.1.2 quedaría:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho) = \vec{\nabla} \cdot ((\rho_0 + \rho) \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v} + \rho \vec{v})$$

y considerando despreciable el término  $\rho \vec{v}$ , obtenemos finalmente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (2.1.3)$$

### 2.1.2. Ecuación del movimiento de Euler

Esta ecuación es la equivalente en mecánica de fluidos a la segunda ley de Newton. Expresa que la variación temporal de cantidad de movimiento que experimenta un volumen fluido es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre dicho volumen. Matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_{tot} \vec{v}_{tot} dV = \iint_S \vec{f}_s dS + \iiint_V \vec{f}_v(\vec{r}, t) dV \quad (2.1.4)$$

Donde  $\vec{f}_s$  representa las fuerzas de superficie, es decir, fuerzas que se ejercen sobre la superficie S del volumen, y  $\vec{f}_v$  representa las fuerzas másicas, que son las que se ejercen sobre cada partícula de fluido contenida en V y son del orden de su masa. Al tener el aire una densidad baja, se pueden despreciar las fuerzas másicas frente a las fuerzas de superficie. Al integrar estas fuerzas de superficie sobre toda la superficie del volumen, obtenemos la fuerza total que actúa sobre dicho volumen. Esto es lo que se representa en el término derecho de la igualdad. El término izquierdo representa la variación de cantidad de movimiento total del volumen fluido, pues se está integrando el momento lineal por unidad de volumen

$$\rho_{tot} \vec{v}_{tot}$$

sobre todo el volumen V.

En nuestro caso, consideraremos como única fuerza de superficie a la presión,  $\vec{f}_s = -\vec{n} p_{tot}$ , donde  $\vec{n}$  es el vector unitario normal a la superficie S. Al igual que antes,

podemos aplicar el teorema de Gauss sobre la integral de las fuerzas de superficie en la ecuación 2.1.4, y quedaría:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_{tot} \vec{v}_{tot} dV = \iint_S p_{tot} \vec{dS} = - \iiint_V \nabla p dV \quad (2.1.5)$$

Sin embargo, ahora no podemos introducir la derivada temporal dentro de la integral como hicimos antes, pues el volumen  $V$  es un volumen en movimiento y varía con el tiempo. Para sortear este obstáculo, hemos de utilizar el teorema de transporte de Reynolds, que enuncia que[AS]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_{tot} \vec{v}_{tot} dV = \iiint_V \rho_{tot} \frac{D\vec{v}_{tot}}{Dt} dV$$

Donde el operador  $\frac{D}{Dt}$  se define por:

$$\frac{D\vec{v}_{tot}}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{tot} \cdot \nabla \right) \vec{v}_{tot}$$

Sustituyendo esto en la ecuación 2.1.5, esta quedaría:

$$\iiint_V \rho_{tot} \frac{D\vec{v}_{tot}}{Dt} dV = - \iiint_V \nabla p dV$$

De lo cual concluimos que:

$$\rho_{tot} \frac{D\vec{v}_{tot}}{Dt} = -\nabla p$$

que es la ecuación del movimiento de euler en forma diferencial.

Seguidamente, desglosamos cada magnitud en la suma del término en reposo mas la perturbación

$$(\rho_0 + \rho) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = -\nabla(p_0 + p)$$

Para terminar, igual que hicimos con la ecuación de conservación de la masa, linealizamos la ecuación despreciando los sumandos que sean el producto de dos perturbaciones, con lo que obtenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.1.6)$$

### 2.1.3. Relación entre presión y densidad

Es posible demostrar que la relación entre la presión se puede expresar como función de la densidad y la [AS]:

$$p = p(\rho, s)$$

Si suponemos entropía constante, la presión pasa a ser únicamente función de la densidad. En este caso, podemos desarrollar  $p$  en serie de Taylor, con lo cual quedaría:

$$p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \rho + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial^2 \rho}\right)_0 \rho^2 + \dots$$

despreciando los términos producto de dos o más perturbaciones, obtendríamos:

$$p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \rho$$

El término  $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0$  tiene dimensiones de velocidad al cuadrado. Si lo llamamos  $c$ , tenemos finalmente:

$$p = c^2 \rho \tag{2.1.7}$$

### 2.1.4. Obtención de la ecuación de ondas

Partimos de la ecuación de continuidad 2.1.3. Derivando respecto al tiempo a ambos lados de esta ecuación obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial^2 t} = -\rho_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)$$

De la ecuación de Euler, ecuación 2.1.6, concluimos que:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-\nabla p}{\rho_0}$$

que sustituyendo en la primera ecuación obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial^2 t} = -\vec{\nabla} \cdot (-\nabla p) = \nabla^2 p$$

Finalmente, aplicando la relación entre presión y densidad, ecuación 2.1.7, llegamos a la ecuación de ondas:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \nabla^2 p = 0$$

## 2.2. Propagación de ondas: principio de Huygens

El principio de Huygens fue formulado por primera vez en el año 1678 por el científico danés Christiaan Huygens. Este principio afirmaba básicamente lo siguiente [Goo05]:

*Cada punto de un frente de ondas puede ser considerado como una fuente secundaria de ondas esféricas. La envolvente de dichas ondas esféricas secundarias constituirá el frente de ondas en instantes sucesivos.*

De esta manera, la onda total para instantes posteriores y para puntos por los que aún no haya pasado el frente de onda será la envolvente de todas las ondas generadas por esas fuentes secundarias, que según el principio son todos los puntos del actual frente de onda.

Esta premisa es la manera más básica y más popular de formular el principio de Huygens, y nos puede dar una idea aproximada sobre cómo se propagan las ondas. Sin embargo no daba explicación a todos los puntos del fenómeno, como por qué los efectos de esas nuevas fuentes parecían ser nulos en la dirección opuesta al avance de la onda, por no hablar de que ignoraba la existencia de la fase en las ondas.

Más tarde, en 1818, el francés Augustin-Jean Fresnel realizó una importante contribución a la comprensión del principio en cuestión. En su *Memoire in Diffraction* explicó cómo la luz puede reforzarse en algunos puntos y cancelarse en otros (fenómeno característico de las ondas ignorado previamente por Huygens). A pesar de ello su teoría, aunque consistente, aún fallaba al dar explicación a algunos fenómenos y hacía suposiciones que no se basaban en los principios físicos del sonido. Desafortunadamente, Fresnel falleció antes de concluir su trabajo [BC39].

Por este motivo es necesario recurrir a una versión más avanzada del mismo principio, que tenga en cuenta todos los detalles que atañen a las ondas y que pueda explicar cualquier cuestión que pueda presentarse sobre ellas. Posteriormente a la formulación original del principio por Huygens, varios científicos lo fueron perfeccionando y

desarrollando, hasta finalmente lograr un modelo matemático capaz de explicar todos los interrogantes a los que Huygens no había podido responder.

## 2.3. Fórmula de Helmholtz

La ecuación que explica completamente el fenómeno físico esbozado por el original principio de Huygens se conoce como *fórmula de Helmholtz*. Dada la gran importancia de esta fórmula, su demostración se expone a continuación[BC39]:

Partimos de la ecuación de ondas, cuya formulación es la siguiente:

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Si  $\psi$  es una función de la forma  $\psi(\vec{r}, t) = v(r)e^{-ikct}$ , típica función que representa ondas monocromáticas, entonces la ecuación de ondas se transforma en:

$$(\nabla^2 + k^2)v(\vec{r}) = 0 \tag{2.3.8}$$

Donde  $v$  es un fesor, que solo guarda dependencia con la posición. En el razonamiento utilizaremos fesoires, pues son el único factor de las soluciones buscadas que aún desconocemos.

Sean  $v$  y  $w$  dos funciones que son solución de la ecuación 2.3.8. Apliquemos sobre estas dos funciones la identidad de Green:

$$\iiint_V (v \nabla^2 w - w \nabla^2 v) dx dy dz = \iint_S \left( v \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS \tag{2.3.9}$$

Donde  $S$  es la superficie que encierra al volumen  $V$  y  $\frac{\partial}{\partial n}$  denota diferenciación respecto a la normal exterior a  $S$ . Asumimos también que tanto  $v$  y  $w$  como sus derivadas primera y segunda son continuas en  $V$  y en  $S$ , lo cual modela el hecho de que sus singularidades se encuentran fuera del volumen  $V$ . Observemos que si

efectivamente  $v$  y  $w$  cumplen la ecuación de ondas, podemos sustituir los laplacianos por:

$$\nabla^2 v = -k^2 v \quad (2.3.10)$$

con lo cual el integrando del lado izquierdo de la identidad de Green, ecuación 2.3.10, queda:

$$-kvw + kvw = 0$$

ergo dicho lado izquierdo de 2.3.10 es nulo, y por lo tanto concluimos que:

$$\iint_S \left( v \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (2.3.11)$$

A continuación hemos de particularizar la función  $w$  como  $w = e^{ikr}/r$  (respuesta al impulso del sistema o función de Green), siendo  $r$  la distancia a un arbitrario punto del espacio P (que no coincide con la posición de la fuente, sería el punto de observación). Entonces la igualdad anterior toma la siguiente forma:

$$\iint_S \left[ v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} \right] dS = 0$$

En caso de que P esté fuera del volumen V. Sin embargo, si P está contenido en V, entonces el razonamiento anterior dejaría de ser válido, pues  $w$  presentaría una singularidad en el volumen V y no se darían las condiciones necesarias para aplicar la identidad de Green 2.3.9. Para sortear este obstáculo, aplicaremos la identidad de Green sobre el volumen limitado externamente por la superficie S e internamente por una esfera  $\sigma$ , centrada en P y de radio  $\epsilon$ . Si hacemos ésto, la identidad 2.3.11 queda:

$$\iint_S \left[ v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} \right] dS = - \iint_{\sigma} \left[ v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} \right] dS =$$

$$- \iint_{\sigma} \left[ v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = - \iint_{\sigma} \left[ v(ikr - 1)e^{ikr} - e^{ikr} r \frac{\partial v}{\partial r} \right] \sin(\theta) d\theta d\phi$$

Finalmente, sabiendo que en el lado derecho de la igualdad  $r$  es constante e igual a  $\epsilon$ , tomamos el límite cuando  $\epsilon$  tiende a 0:

$$\begin{aligned} \iint_S \left[ v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} \right] dS &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\sigma} \left[ v(ik\epsilon - 1)e^{ik\epsilon} - e^{ik\epsilon} \epsilon \frac{\partial v}{\partial r} \right] \sin(\theta) d\theta d\phi = \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{\sigma} v \sin(\theta) d\theta d\phi = -4\pi v(P) \end{aligned}$$

Se ha demostrado pues el siguiente teorema:

Sea  $v$  una solución de la ecuación de ondas cuyas derivadas primera y segunda son continuas dentro y en una superficie cerrada  $S$ , sea  $r$  la distancia a un punto  $P$  en el interior de  $S$ , y  $\frac{\partial}{\partial n}$  la derivada respecto a la normal exterior a  $S$ . Entonces, el valor de la integral:

$$\iint_S \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS$$

es  $-4\pi v(P)$  o 0 dependiendo de si  $P$  es interior o exterior a  $S$ .

A partir de este resultado podemos concluir que el valor de la perturbación en el interior de la superficie  $S$  está totalmente determinado por la perturbación en la superficie cerrada  $S$  (por los valores de la propia perturbación y de su derivada respecto a la dirección normal). Este valor de la perturbación interior vendrá dado por la siguiente fórmula:

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS \quad (2.3.12)$$

Conocida como *fórmula de Helmholtz*.

Observemos también que esta fórmula modela el hecho de que, en el exterior de la superficie elegida, el efecto de las fuentes secundarias es nulo. Este fue uno de los principales obstáculos que Huygens no fue capaz de resolver en su día con la primera versión de su principio, el hecho de que las fuentes secundarias formadas por los puntos del frente de onda no tuvieran efecto en puntos por los que ya había pasado ese frente de onda.

Es interesante mencionar también que la fórmula de Helmholtz está sujeta a ciertas restricciones. Podría pensarse viendo la expresión de la fórmula que el valor de  $v(P)$  en el interior de la superficie  $S$  tiene dependencia en los valores que toman  $v$  y  $\frac{\partial v}{\partial n}$  en la superficie  $S$ , siendo estos independientes entre sí. Sin embargo es posible demostrar que ambas funciones están relacionadas, y que el conocimiento de las condiciones de contorno de  $v$  en  $S$  determina por sí solo el valor de  $v$  en el interior de  $S$ . De modo que el valor de la condición de contorno  $\frac{\partial v}{\partial n}$  viene determinado también por el valor de  $v$ . Por tanto, ambas condiciones de contorno no pueden elegirse arbitrariamente[BC39].

La fórmula de Helmholtz es de suma importancia para el problema que deseamos resolver en el presente trabajo. Sin embargo, precisamente cuando tenemos que  $S$  es una frontera rígida, entonces el valor de  $v$  no condiciona el de  $\frac{\partial v}{\partial n}$ . En general, observamos que esta fórmula nos permite conocer cuál será la perturbación en cualquier punto del espacio conociendo única y previamente la perturbación en una determinada región (concretamente, en su frontera). Además, es el pilar sobre el que se asienta la teoría de la difracción de ondas, ya que ésta trata el estudio de la propagación de ondas en presencia de objetos que crean zonas de "sombra". Es por esta razón por la cual se ha incluido su demostración detallada en este documento.

Esta fórmula es perfectamente aplicable a nuestro experimento, ya que nuestro objetivo final es determinar el valor de la perturbación acústica en el interior de una cavidad conociendo la dirección de la fuente, que a su vez determina la distribución de amplitudes y fases en la apertura de la cavidad. Las magnitudes típicas de las ondas sonoras, como las variaciones de presión, densidad o el potencial de la velocidad cumplirían la fórmula de Helmholtz. A pesar de ello no nos es suficiente, debido a que hemos de tomar también en cuenta las reflexiones de las ondas ocurridas en las paredes de la cavidad.

## 2.4. Significado físico de la fórmula de Helmholtz

En la sección previa se ha proporcionado una demostración matemática de la fórmula de Helmholtz, basada en la identidad de Green. A pesar de que esta demostración es más formal y rigurosa, es importante también saber interpretar su significado físico y las leyes físicas de las cuales procede, pues no olvidemos que aunque el fenómeno que estamos tratando sea abstracto y algo alejado de la realidad cotidiana, ha de tener algún origen material. Por ello es de interés conocer la siguiente breve demostración[BC39].

Comenzamos introduciendo el concepto de potencial de velocidad. Se puede demostrar que si la velocidad cumple la ecuación del movimiento de Euler linealizada, ecuación 2.1.6, entonces la velocidad se puede expresar como el gradiente de un potencial[AS]:

$$v = -\nabla\psi$$

En tal caso, la presión se puede expresar como:

$$p = -\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Sea

$$\psi = ue^{ikct}$$

el potencial de la velocidades complejo. Sea  $r$  la distancia desde un punto genérico del espacio  $P$  (que es el punto en el cual queremos calcular el potencial de velocidades, al igual que en la sección anterior),  $S$  una superficie cerrada, y  $n$  el vector normal a dicha superficie. Las magnitudes físicas siguen la misma notación que la indicada en la sección primera de este capítulo. En un punto determinado de dicha superficie, la componente normal del vector velocidad será:

$$\frac{\partial u}{\partial n} e^{ikct}$$

Ergo es evidente que el flujo de fluido a través de un elemento diferencial de superficie  $dS$  debe ser:

$$\frac{\partial u}{\partial n} e^{ikct} dS$$

Además de un flujo de materia, también aparece en el mismo punto de la superficie  $S$  una variación de presión debida a la onda acústica, que vendrá dada por:

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\rho_0 i k c \psi = -\rho_0 i k c u e^{i k c t}$$

Este gradiente de presión originará una fuerza de superficie sobre la partícula de fluido situada en el punto en cuestión. Al estar ytratando con elementos infinitesimales, el diferencial de fuerza será:

$$dF = -\rho_0 i k c u e^{i k c t} dS$$

Ahora supongamos que todo el aire interior a la superficie  $S$  es destruido. Para que exista el mismo efecto en el exterior de la misma, es necesario introducir fuentes sobre  $S$  que cumplan las siguientes propiedades:

- a) El aire es creado en cada elemento diferencial  $dS$  a una tasa

$$\frac{\partial u}{\partial n} e^{i k c t} dS$$

- b) Una fuerza

$$dF = -\rho_0 i k c u e^{i k c t} dS$$

perpendicular a  $dS$  es ejercida sobre el fluido en contacto con  $dS$ .

La creación de aire en  $dS$  equivale a una fuente de valor

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n} e^{i k c t} dS$$

ergo el potencial de velocidad propagado hasta el punto  $P$  será:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n} e^{i k(r-ct)} dS$$

Una fuerza monocromática  $F$  crea una onda de sonido, que origina en  $P$  un potencial de velocidades de valor:

$$-\frac{iF}{4\pi\rho_0kc} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i k(r-ct)}}{r} \right)$$

Sustituyendo en esta ecuación la fuerza indicada en (b), el potencial obtenido en  $P$  es:

$$-\frac{u}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ik(r-ct)}}{r} \right) dS$$

Sumando los efectos de ambas contribuciones e integrando sobre toda la superficie  $S$ , obtenemos el potencial total en  $P$ :

$$\psi(P, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{e^{ik(r-ct)}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ik(r-ct)}}{r} \right) \right] dS$$

Que no es mas que la fórmula de Helmholtz.

## 2.5. Teoría de la difracción

Se conoce como difracción a la trayectoria no rectilínea que toman los "rayos" de una onda cuando un frente de ondas entra en contacto con algún objeto que impide su paso. Esta es la explicación intuitiva del fenómeno basada en la sencilla teoría de rayos. Su origen está, como no podía ser de otra manera, en el principio de Huygens: los puntos de un frente de onda se comportan como focos secundarios, de forma que las ondas que son originadas por estos se propagan hacia puntos espaciales que los rayos primarios (rectilíneos) no conseguirían alcanzar.

La resolución de los problemas de difracción está basada en la fórmula de Helmholtz, pues no olvidemos que esta nos permite hallar las perturbaciones a partir de unas condiciones de contorno impuestas. Uno de los problemas de difracción más típicos, y que es de hecho el problema que presenta el experimento de esta investigación, es el de la propagación de una onda tras atravesar una rendija o apertura practicadas en una pantalla opaca. En este trabajo se van a analizar tres de las soluciones propuestas para este problema: la solución de Kirchhoff y las dos soluciones de Rayleigh-Sommerfeld[Goo05].

### 2.5.1. Formulación de Kirchhoff de la difracción debida a una pantalla plana

Sabemos que utilizando la ecuación de Helmholtz, ec. 2.3.12, podemos calcular los campos en la región del espacio en la cual los desconocemos. Por tanto, lo único que debemos hacer es buscar una superficie de integración adecuada para poder aplicar dicha ecuación. Llamando P al punto en el cual deseamos calcular el valor de la perturbación, tomaremos una superficie que estará delimitada a su vez por dos superficies, las cuales serán:

- a)  $S_2$ , que será la porción de una esfera centrada en el punto P y cuyo radio es R, de forma que dicha porción sea la parte de la esfera que se encuentra en el lado de la pantalla en el cual se encuentra el punto P.
- b)  $S_1$ , que será la intersección entre la esfera centrada en el punto P y cuyo radio es R, y la pantalla.

de forma que la integral de Helmholtz que nos daría las perturbaciones buscadas es:

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left[ G \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS \quad (2.5.13)$$

El siguiente paso es hacer el radio R de  $S_2$  a infinito, de forma que la integral de Helmholtz en la superficie  $S_2$  se anule. Para demostrar que esto ocurre así, observemos que la función de Green del problema es:

$$G = \frac{e^{ikr}}{r}$$

y su derivada cuando R tiende a infinito es:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} = \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \approx ikG$$

Bajo estas condiciones, la integral de Helmholtz para la superficie  $S_2$  se transforma en:

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_2} \left( G \frac{\partial v}{\partial n} - v(ikG) \right) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} G \left( \frac{\partial v}{\partial n} - ikv \right) R^2 d\omega$$

Donde  $\Omega$  es el ángulo sólido abarcado por  $S_2$  desde el punto P.

Observemos que la integral anterior se hará nula si se cumple el siguiente límite:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial v}{\partial n} - ikv \right) = 0$$

Requerimiento conocido como condición de Sommerfeld. Observemos que si  $v$  es una onda esférica divergente, entonces será proporcional a:

$$v \propto \frac{e^{ikr}}{r}$$

y su derivada respecto a la normal es:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = \left( ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right)$$

entonces el límite impuesto por la condición de Sommerfeld queda:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} - ik \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{ikr}}{r} = 0$$

Con lo cual nuestro problema sí cumple la condición de Sommerfeld, y por lo tanto la integral de Helmholtz sobre  $S_2$  tiende a 0 cuando R tiene a infinito.

Una vez sabiendo lo anterior, la integral de Helmholtz que resolvería las perturbaciones queda:

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS$$

Donde  $S_1$  es ahora el plano que se encuentra inmediatamente tras la pantalla. De partida desconocemos cuál es exactamente el valor de los campos en toda la superficie  $S_1$ . Sin embargo, se pueden realizar las siguientes simplificaciones razonables:

- a) En la superficie que cubre la apertura, a la cual denotaremos  $\Sigma$ , las perturbaciones serán iguales a las que habría en ausencia de pantalla opaca.
- b) En el resto de la superficie, que no cubre la apertura, tanto las perturbaciones  $v$  como sus derivadas respecto a la normal  $\frac{\partial v}{\partial n}$  son nulas.

Con lo cual la integral de Helmholtz quedaría:

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS$$

integral que en general es posible resolver, pues las perturbaciones en la apertura suelen ser conocidas.

### 2.5.2. Primera solución de Rayleigh-Sommerfeld al problema de la difracción debida a una pantalla plana

La teoría de Kirchhoff sobre la difracción ha demostrado experimentalmente tener gran precisión. Sin embargo, presenta inconsistencias matemáticas. Estas inconsistencias consisten en que bajo la hipótesis de Kirchhoff se han de imponer condiciones de contorno sobre los dos campos, es decir, sobre  $v$  y su derivada  $\frac{\partial v}{\partial n}$  para hacerlas nulas en los puntos de la pantalla. Sin embargo, existe un teorema de la teoría de potenciales que afirma que, en el caso de que tanto un potencial como su derivada respecto a la normal sean nulas en una superficie finita, entonces ese potencial ha de ser nulo en todo el espacio. En nuestro caso, al estar tratando ondas de sonido, podría considerarse al potencial en cuestión como el potencial del vector velocidad.

Para sortear este obstáculo Sommerfeld ideó dos soluciones alternativas, la primera de las cuales se expone en esta sección.

Las soluciones propuestas por Sommerfeld se basan en escoger funciones de Green alternativas. Recordemos que la función de Green buscada deberá cumplir las siguientes condiciones:

- Que siga los requisitos impuestos por la teoría de potenciales.
- Que tanto  $v$  como  $G$  satisfagan la ecuación de ondas.
- Que cumpla la condición de Sommerfeld.

Para esta primera solución, la función de Green escogida es :

$$G_- = \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr_2}}{r_2}$$

Donde  $r$  es la distancia desde el punto  $P$ , y  $r_2$  es la distancia desde la imagen del punto  $P$  respecto al plano de la apertura, al cual llamaremos  $P_2$ . Al haberse definido de esta manera, es evidente que  $r = r_2$  para cualquier punto del plano de la apertura, y por lo tanto la función de Green se hace nula para esos puntos, es decir,  $G = 0$  es la condición de contorno impuesta sobre la el plano de la apertura. Así, la integral de Helmholtz escrita en forma general queda:

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} [G \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial G}{\partial n}] dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} v \frac{\partial G_-}{\partial n} dS$$

Esta es la primera solución de Rayleigh-Sommerfeld.

Podemos profundizar más en ella de la siguiente manera: observemos que la derivada de la función de Green,  $\frac{\partial G_-}{\partial n}$ , para un punto de la apertura  $P_{ap}$ , es:

$$\frac{\partial G_-}{\partial n}(P_{ap}) = \cos(\vec{n}, \vec{r}) \left( jk - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{jkr}}{r} - \cos(\vec{n}, \vec{r}_2) \left( jk - \frac{1}{r_2} \right) \frac{e^{jkr_2}}{r_2}$$

Donde  $\cos(\vec{n}, \vec{r})$  y  $\cos(\vec{n}, \vec{r}_2)$  son los cosenos de los ángulos que forman los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}_2$  con la normal exterior  $\vec{n}$  (la normal apunta hacia el lado de la apertura en el que está P2).

Al tratarse  $P_{ap}$  de un punto situado en la apertura:

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}) = -\cos(\vec{n}, \vec{r}_2)$$

Ergo podemos reducir la expresión anterior a:

$$\frac{\partial G_-}{\partial n}(P_{ap}) = 2 \cos(\vec{n}, \vec{r}) \left( jk - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{jkr}}{r}$$

Es interesante ver que si se diese la condición de campo lejano, entonces:

$$\frac{\partial G_-}{\partial n}(P_{ap}) = 2 jk \cos(\vec{n}, \vec{r}) \frac{e^{jkr}}{r}$$

que es el doble de la solución empleada por Kirchhoff:

$$\frac{\partial G_-}{\partial n}(P_{ap}) = 2 \frac{\partial G}{\partial n}$$

y por tanto la solución conseguida puede ser expresada a partir de la más simple función de Green utilizada por Kirchhoff:

$$v(P) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} v \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

### 2.5.3. Segunda solución de Rayleigh-Sommerfeld al problema de la difracción debida a una pantalla plana

Para esta segunda solución, la función de Green elegida es:

$$G_+ = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2}$$

Y su derivada respecto a la normal exterior es:

$$\frac{\partial G_+}{\partial n} = \frac{\partial G_+}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \left( jk \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{jkr}}{r^2} \right) \cos(\vec{n}, \vec{r}) + \left( jk \frac{e^{ikr_2}}{r_2} - \frac{e^{jkr_2}}{r_2^2} \right) \cos(\vec{n}, \vec{r}_2)$$

Recordemos que en la apertura se dan las condiciones:

$$r = r_2$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}) = -\cos(\vec{n}, \vec{r}_2)$$

Ergo la derivada  $\frac{\partial G_+}{\partial n}$  en la apertura queda:

$$\frac{\partial G_+}{\partial n} = \frac{\partial G_+}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = 2 \left( jk \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{jkr}}{r^2} \right) [\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_2)] = 0$$

Por tanto en este caso estamos imponiendo la condición de contorno  $\frac{\partial G_+}{\partial n} = 0$  sobre la superficie de la apertura.

Teniendo en cuenta esto, la integral de Helmholtz escrita en forma general queda:

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left[ G \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} G_+ \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

Viendo que la función de Green escogida en este caso se puede expresar como el doble de la función de Green utilizada por Kirchhoff:

$$G_+ = 2G$$

La expresión de la perturbación  $v(P)$  puede expresarse de nuevo utilizando la función de Green empleada por Kirchhoff:

$$v(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} G \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

#### 2.5.4. Comparación de las soluciones de Kirchhoff y de Rayleigh-Sommerfeld

Recordemos que la solución dada por el sistema de Kirchhoff era:

$$v(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[ G \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS$$

La primera solución de Rayleigh-Sommerfeld es:

$$v(P) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} v \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

Y la segunda solución de Rayleigh-Sommerfeld es:

$$v(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} G \frac{\partial v}{\partial n} dS$$

Por tanto, la solución dada por Kirchhoff es la media aritmética de las dos soluciones de Rayleigh y Sommerfeld.

# Capítulo 3.

## Experimento desarrollado

El objetivo del presente trabajo es definir en qué forma afectan la humedad y la temperatura a las medidas de intensidad acústica tomadas en el interior de una cavidad resonante aproximadamente cúbica de dimensiones arbitrarias mediante un micrófono ECM8000. Para ello necesitamos una fuente empírica de datos sobre la que sacar conclusiones y comparar resultados. Esta fuente de datos empíricos se ha materializado en un experimento que simula la situación investigada, y que consiste en enviar ondas de sonido sobre la apertura practicada en una cavidad resonante de paredes reflectantes y medir con un micrófono la amplitud del sonido en el mayor número de puntos posible, estando estos puntos distribuidos homogéneamente en un plano bidimensional.

El experimento realizado es complejo, pues necesita unos mecanismos de automatización para desplazar el micrófono de medida, desplazar la fuente, medir la amplitud del sonido en cada coordenada prevista, etc. Para ello ha sido necesario utilizar sistemas electrónicos basados en placas Arduino.

Debido a la complejidad del mismo, se procederá en las sucesivas secciones de este capítulo a explicar detalladamente cada una de las partes que componen el experimento, con el objetivo de proporcionar la comprensión necesaria sobre de qué manera y en qué condiciones se ha simulado la situación estudiada en el mundo físico.

### Contenido

---

<b>3.1. Cavidad resonante</b> . . . . .	28
<b>3.2. Micrófono y carrito internos</b> . . . . .	28
<b>3.3. Micrófono externo</b> . . . . .	31

---

<b>3.4. Generador de señales y bocina</b> . . . . .	33
<b>3.5. Carrito externo</b> . . . . .	35
<b>3.6. Analizador dinámico de señal</b> . . . . .	35

---

### 3.1. Cavidad resonante

La cavidad resonante utilizada en el experimento tiene básicamente forma de cubo, pero con paredes ligeramente inclinadas. Las paredes tienen lados hechos con perfiles de aluminio que tensan una malla metálica que da consistencia a un plano de cemento muy cargado, en resumen las paredes son de fibrocemento. Se supone un alto coeficiente de reflexión, logrando así una cavidad resonante.

Las vistas de sus caras son las siguientes:

- Alzado. Se muestra una imagen en la figura 3.1.
- Perfil derecho. Se muestra una imagen en la figura 3.2.
- Perfil Izquierdo. Se muestra una imagen en la figura 3.3.
- Alzado Posterior. Se muestra una imagen en la figura 3.4.
- Vista cenital. Se muestra una imagen en la figura 3.5.
- Planta inferior. La conforma el suelo de la habitación.

Las dimensiones de la cavidad corresponden aproximadamente a un cubo de 1 m de lado. A pesar de que las paredes están ligeramente inclinadas a propósito para reducir la influencia de los modos, estas variaciones respecto al cubo perfecto son complicadas de medir en la práctica porque las paredes están inclinadas.

### 3.2. Micrófono y carrito internos

Para medir las perturbaciones en el interior de la cavidad se ha utilizado un carrito móvil automático, controlado por una placa Arduino, sobre el cual se ha montado un micrófono. El carrito es capaz de moverse en un plano bidimensional, paralelo al suelo, de forma que se va deteniendo sucesivamente en los puntos en que se le indiquen y

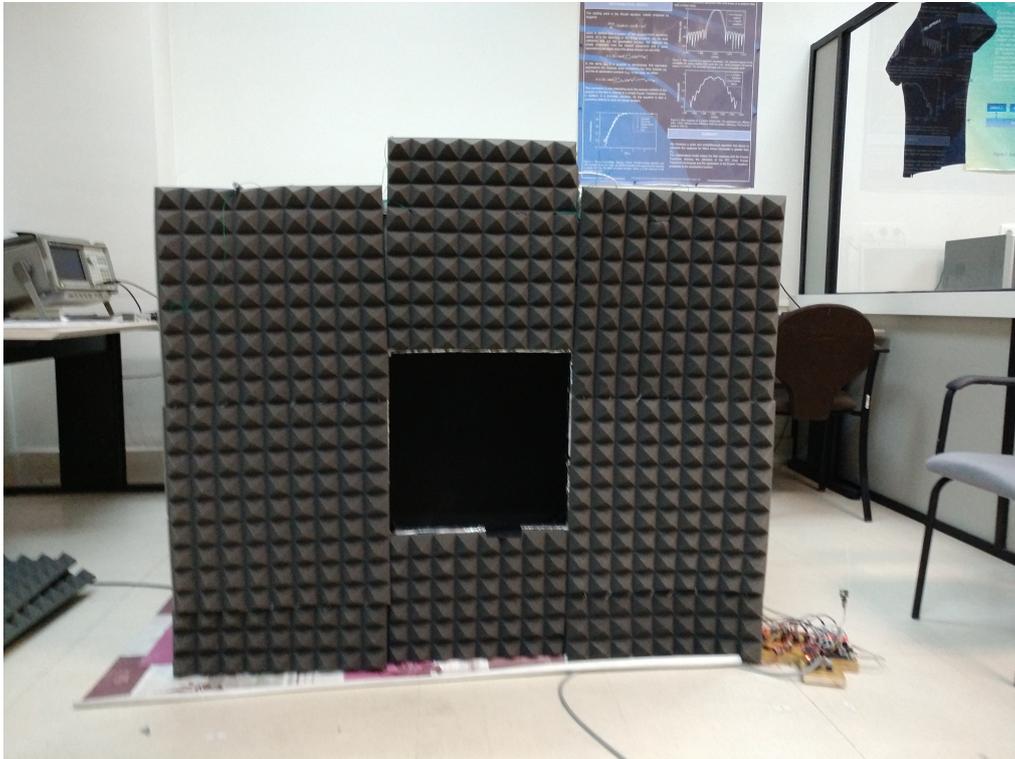


Figura 3.1.: Alzado de la cavidad resonante.



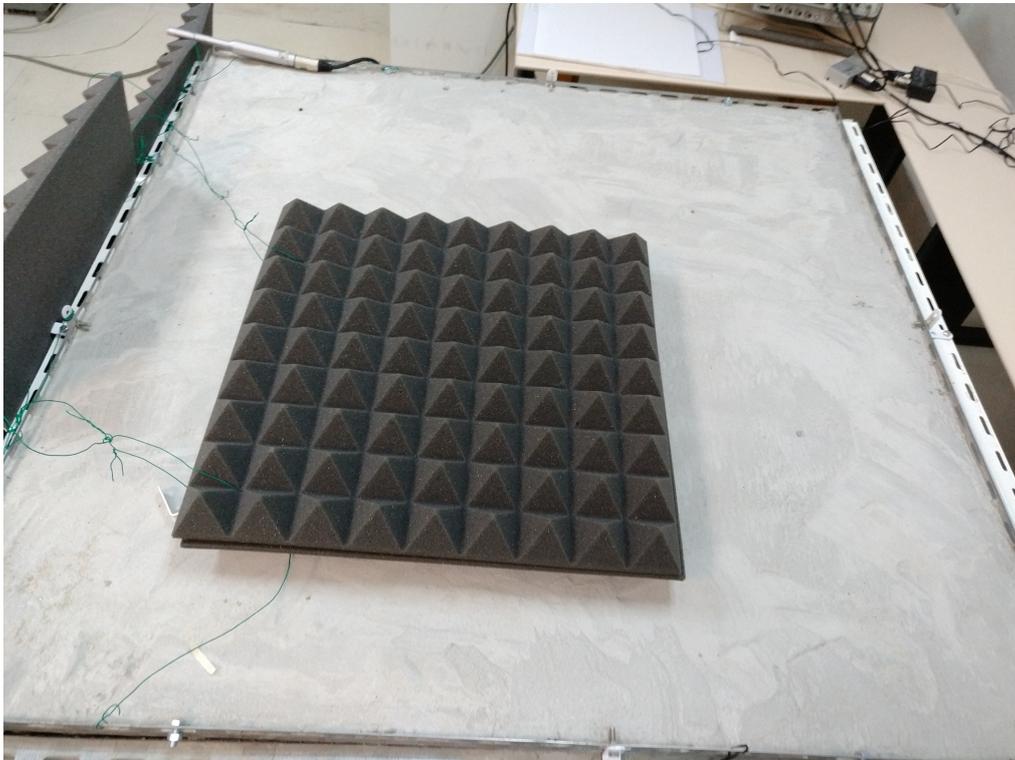
Figura 3.2.: Perfil derecho de la cavidad resonante



**Figura 3.3.:** Perfil izquierdo de la cavidad resonante.



**Figura 3.4.:** Alzado posterior de la cavidad resonante.



**Figura 3.5.:** Techo de la cavidad resonante.

durante el tiempo que se desee. Así es posible muestrear la perturbación sonora en el interior de la cavidad en un plano bidimensional. Desgraciadamente no es posible hacerlo en un espacio tridimensional debido a que no se ha equipado al sistema con un mecanismo que pueda variar la altura a la que se encuentra el micrófono.

En la figura 3.6 se muestra el micrófono interno montado sobre el carrito y en la figura 3.7 se muestra la estructura de la red de muestreo interna.

### 3.3. Micrófono externo

Para hacer más fiables las medidas tomadas respecto al ruido, se ha colocado un segundo micrófono en el exterior de la cavidad, concretamente sobre su lado superior. Si hacemos la razonable suposición de que el ruido en el exterior de la cavidad está fuertemente correlacionado con el ruido en el exterior, entonces restando la medida tomada por el micrófono externo a la medida tomada por el micrófono interno podemos eliminar gran parte del ruido presente en la medida, y asegurarnos de que el valor recogido en dicha medida se debe únicamente al patrón de ondas que



Figura 3.6.: Micrófono interno.



Figura 3.7.: Red de muestreo interna.

define la cavidad. Esto es especialmente útil si, por ejemplo, se produce en el exterior algún estruendo que llega a percibirse desde el interior de la habitación.

En la figura ?? se muestra el micrófono externo y su ubicación sobre la cavidad.

### 3.4. Generador de señales y bocina

Para generar la onda monocromática que posteriormente se enviará hacia la cavidad, se ha utilizado un generador de señales usual cuya salida está conectada a una bocina direccional. La bocina es capaz de transformar la señal eléctrica que recibe en una señal acústica y de enfocarla hacia la apertura de la cavidad.

En las figuras 3.8 y 3.9 se muestran el generador y la bocina utilizados, respectivamente.



Figura 3.8.: Generador de señales.



Figura 3.9.: Bocina

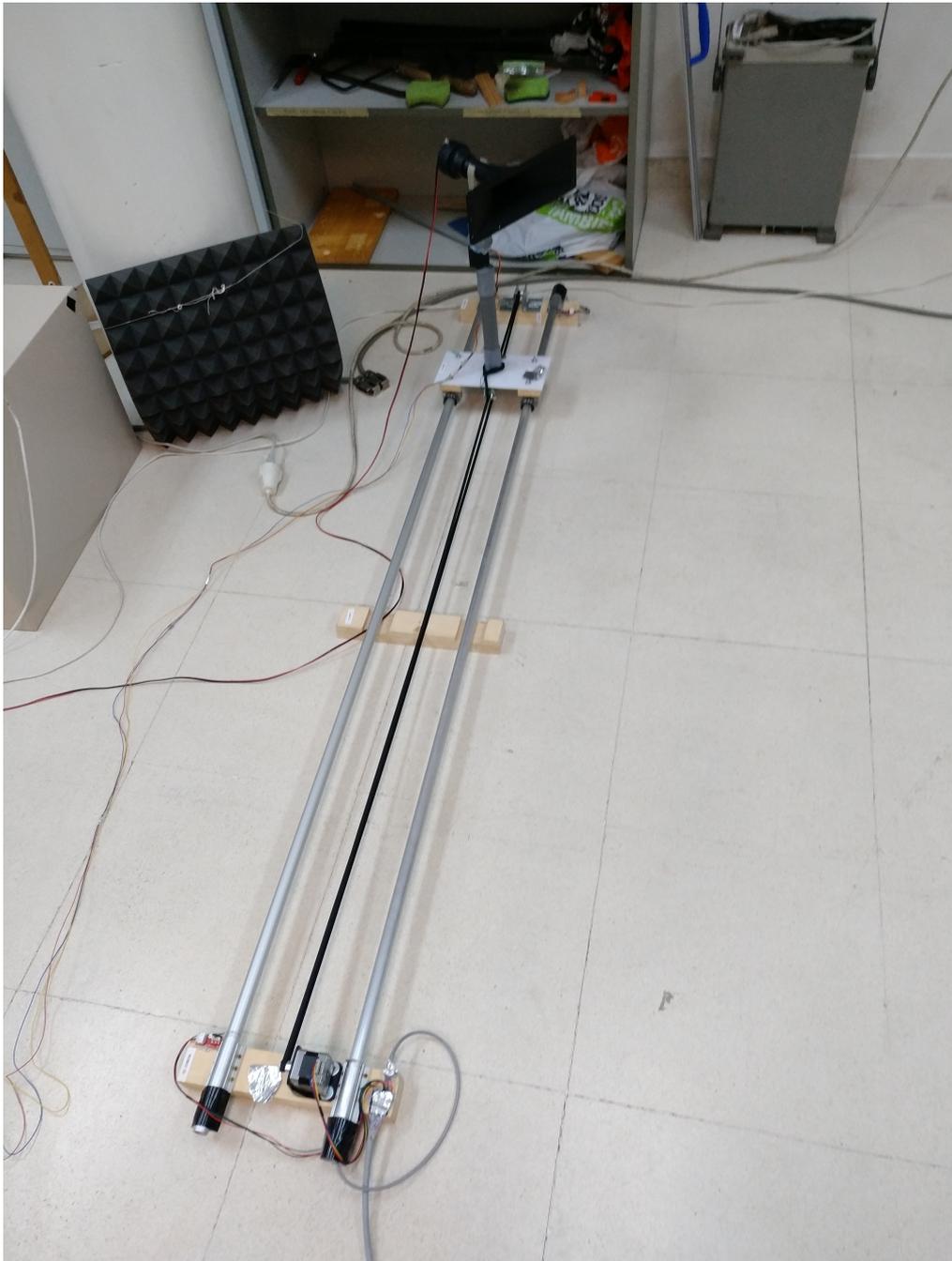
### 3.5. Carrito externo

Para agilizar la toma de medidas se ha colocado la bocina emisora sobre un carrito móvil y automático, controlado por una placa Arduino, que es capaz de moverse en un espacio unidimensional. Así se consigue tomar varias medidas completas del interior de la cavidad para distintas posiciones de la fuente de forma progresiva, haciendo avanzar al carrito externo un determinado número de milímetros tras cada medida. Esto consigue reducir enormemente el tiempo necesario para tomar las medidas, pues es durante las noches y los fines de semana cuando se han de realizar debido a que el sonido generado por la bocina podría molestar a otras personas.

En la figura 3.10 se muestra una imagen del carrito externo.

### 3.6. Analizador dinámico de señal

Para restar la medida tomada por el micrófono externo a la medida tomada por el micrófono interno se ha utilizado un analizador dinámico de señal, el cual se muestra en la figura 3.11.



**Figura 3.10.:** Red de muestreo externa. Sirve para desplazar la fuente automáticamente.



Figura 3.11.: Analizador dinámico de señal.



# Capítulo 4.

## Resultados y conclusiones extraídas

En el presente capítulo se van a exponer ciertas conclusiones apoyadas sobre una serie de medidas tomadas por el experimento. Estas medidas han sido tomadas principalmente durante la noche, debido a factores relacionados con la humedad y la temperatura que se explicarán detenidamente más adelante. Para procesar las medidas se ha hecho uso de programas informáticos escritos en los lenguajes de programación Python y MATLAB. La frecuencia de trabajo utilizada ha sido de 5kHz, con lo que la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340}{5000} = 6,8\text{cm}$$

Pequeña en relación a las dimensiones de la cavidad, con lo que dificultamos la aparición de modos predominantes claros, entrando en régimen de frecuencia intermedia.

### Contenido

---

<b>4.1. Distribución estadística de los valores de la perturbación en el interior de la cavidad.</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>4.2. Rectas de humedad y temperatura</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>4.3. Efecto de la humedad y de la temperatura en la correlación de las medidas.</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4.4. Variación de la forma de onda debida a la humedad y a la temperatura.</b> . . . . .	<b>56</b>

<b>4.5. Efecto de la frecuencia: análisis para una longitud de onda comparable a las dimensiones de la cavidad.</b> . . . . .	73
<b>4.6. Variación de la forma de onda debida a la humedad y a la temperatura para baja frecuencia.</b> . . . . .	76
<b>4.7. Conclusiones y líneas futuras.</b> . . . . .	91

## 4.1. Distribución estadística de los valores de la perturbación en el interior de la cavidad.

Una pregunta lógica que debemos hacernos antes de comenzar a buscar relaciones entre los distintos parámetros involucrados en el problema es qué tipo de variable aleatoria genera las muestras tomadas en las mediciones, y cuál es el motivo de que su distribución estadística sea como es. Conocer las características estadísticas de la señal en el interior de la cavidad puede ser interesante y útil a la hora de aclarar la influencia que factores externos como la humedad y la temperatura pueden tener sobre los resultados.

Es conocido que en una situación de múltiples reflexiones, la distribución de la amplitud de la onda resultante sigue una distribución de Rayleigh o de Rice dependiendo de si la línea de visión directa está obstaculizada o si no lo está, respectivamente. El origen de este hecho es sencillo y se explica brevemente como sigue.

Comencemos con el caso más sencillo, en el cual no existe visión directa entre el emisor y el punto en el cual se desea conocer la distribución de la señal. Se sabe que una posible base generadora del conjunto de funciones sinusoidales que comparten una misma frecuencia puede estar formada por dos sinusoidales que oscilen a dicha frecuencia, desfasadas  $90^\circ$  entre sí. Analicemos pues por separado cada una de las dos coordenadas en dicha base para la perturbación en los puntos del interior de la cavidad, y dividamos entonces la señal sinusoidal existente en un punto cualquiera en sus dos coordenadas ortogonales, la coordenada en fase, con un desfase nulo respecto a la referencia tomada, y la coordenada en cuadratura, con un desfase de  $90^\circ$  respecto a la referencia. Ambas componentes son algebraicamente ortogonales y por tanto hemos de considerarlas por separado.

Cada una de las componentes proviene de la suma de las múltiples reflexiones que convergen en el punto espacial en cuestión. Por tanto, las variables aleatorias

que generan las componentes en fase y cuadratura se podrán expresar, de un modo informal, de la siguiente manera:

$$I = \sum_{i=1}^N r_i \cos(\Phi_i)$$

$$Q = \sum_{i=1}^N r_i \sin(\Phi_i)$$

Donde  $I$  y  $Q$  son las componentes en fase y cuadratura, respectivamente,  $r_i$  es una variable aleatoria que modela la amplitud de la reflexión  $i$ -ésima, y  $\Phi_i$  son variables aleatorias uniformes en el intervalo  $[0, 2\pi]$  e independientes entre sí que modelan el desfase debido tanto al paso del tiempo como al camino recorrido por cada rayo. Es claro entonces que ambas componentes son suma de un gran número de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, por lo que se dan las condiciones para aplicar el teorema del límite central, y en consecuencia dichas componentes se comportarán como variables normales:

$$I \sim \mathcal{N}(\mu_I, \sigma_I^2)$$

$$Q \sim \mathcal{N}(\mu_Q, \sigma_Q^2)$$

Donde se dará además la condición de que la media sea para ambas nula, y las varianzas sean idénticas:

$$I \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

$$Q \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Y por lo tanto su función de distribución de probabilidad conjunta será:

$$f_{IQ}(I, Q) = f_I f_Q = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{I^2 + Q^2}{2\sigma^2}\right)$$

Para pasar de coordenadas en fase y cuadratura a componentes de amplitud y de desfase, se debe realizar una transformación a coordenadas polares. La componente de amplitud (el radio en coordenadas polares) es en la que nosotros estamos interesados. Dicha transformación será:

$$r = \sqrt{I^2 + Q^2}$$

$$\theta = \text{ang}(I, Q)$$

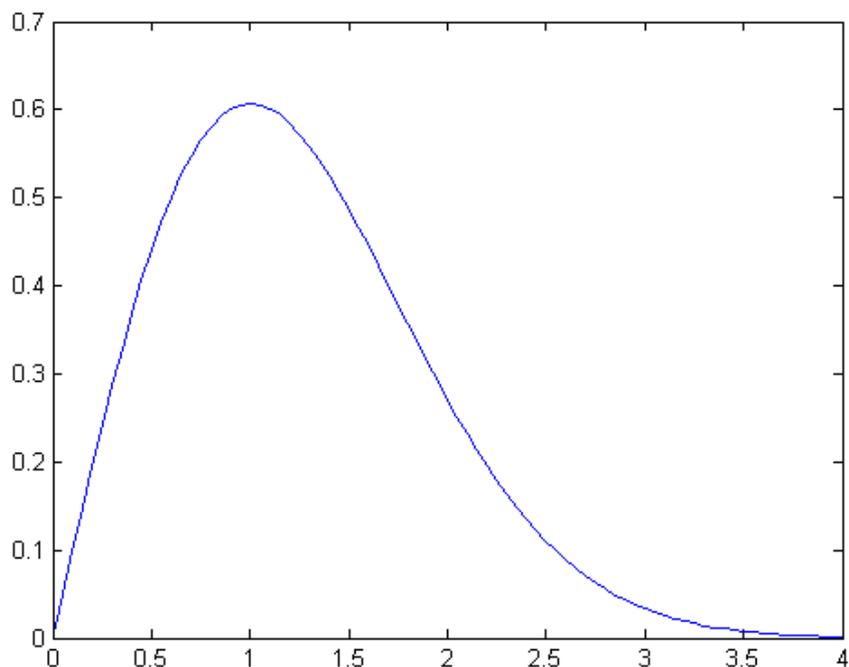
Donde  $\text{ang}(I, Q)$  es la función que retorna el ángulo definido por los valores  $I$  y  $Q$ . Aplicando el teorema del cambio de variable aleatoria, se tiene que la función de distribución de probabilidad conjunta de  $r$  y  $\theta$ ,  $f_{r\theta}$  es:

$$f_{r\theta}(r, \theta) = f_{IQ}(r, \theta) \cdot r = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

Finalmente, en la expresión anterior la variable  $\theta$  representa el valor de una fase, por lo que la función  $f_{r\theta}(r, \theta)$  únicamente será no nula en el intervalo  $0 < \theta < 2\pi$ . Por tanto, la función de distribución marginal de  $r$  será:

$$f_r(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) d\theta = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

Distribución que se conoce como *distribución de Rayleigh*. El aspecto de esta función para un valor de  $\sigma = 1$  se muestra en la figura 4.1.



**Figura 4.1.:** Distribución de Rayleigh

Para el caso de que exista visión directa, es necesario añadir la señal original a los términos estocásticos de fase y cuadratura explicados en el caso de la distribución de Rayleigh. Si suponemos que la señal que llega por visión directa, a cuya amplitud denotaremos por  $A$ , sólo tiene componente en fase, entonces la componente en fase total seguiría ahora una distribución normal centrada en  $A$ . Así pues, la función de distribución conjunta para las componentes en fase y cuadratura de la señal quedaría:

$$f_{IQ}(I, Q) = f_I f_Q = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(I - A)^2 + Q^2}{2\sigma^2}\right)$$

Tal y como se procedió en el caso anterior, debemos a continuación ejecutar un cambio a coordenadas polares, y tras ello hemos de marginalizar la función de distribución conjunta  $f_{r\theta}(r, \theta)$  para obtener la función de distribución de probabilidad marginal de la amplitud  $f_r(r)$ . La explicación detallada de tales pasos se omitirá debido a que son ciertamente laboriosos y poco clarificantes, por ser similares a los seguidos en el caso previo. Tras realizar estas operaciones, la función  $f_r(r)$  obtenida es:

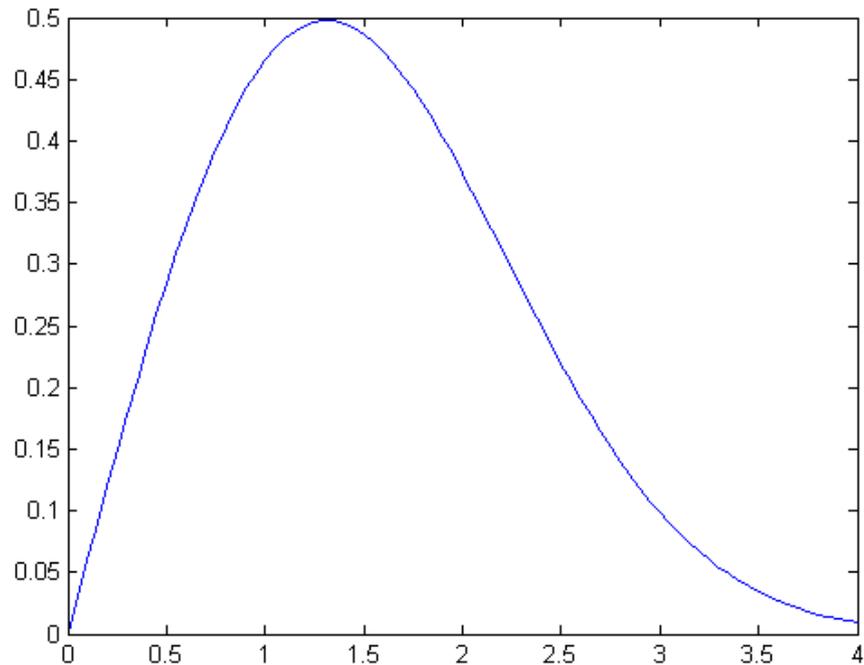


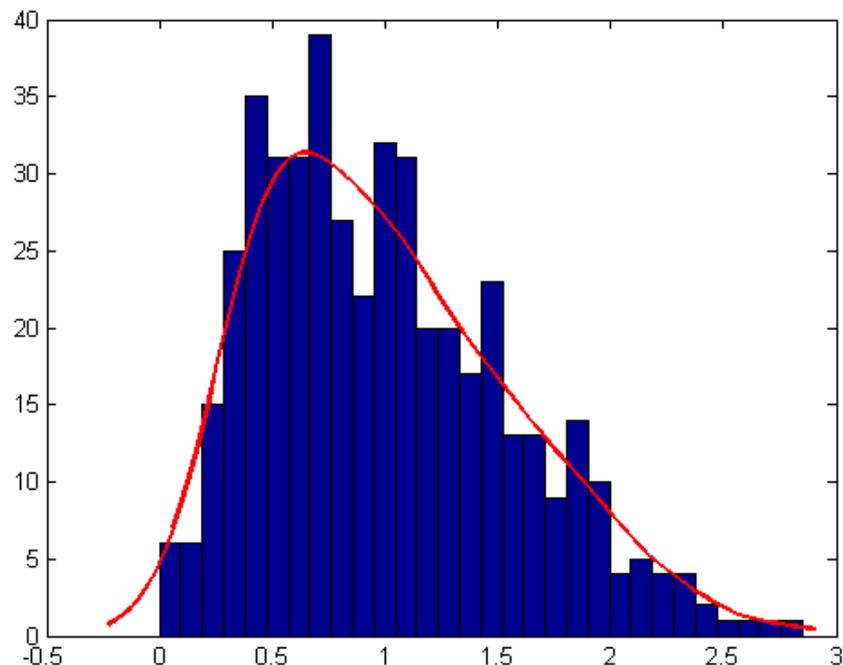
Figura 4.2.: Distribución de Rice

$$f_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{rA}{\sigma^2}\right)$$

Donde  $I_0(x)$  es la función de Bessel modificada de primera especie y orden 0. Esta distribución es la conocida como *distribución de Rice*. El aspecto de la distribución de Rice con  $A = 1$  y  $\sigma = 1$  se muestra en la 4.2.

Para las medidas tomadas en el experimento, un histograma típico podría ser el que aparece en la figura 4.3.

Visualmente se aprecia con facilidad un cierto parecido entre los histogramas obtenidos y las distribuciones de Rayleigh y de Rice. Sin embargo, al analizar dicha suposición haciendo uso de herramientas de contraste de hipótesis, el resultado es negativo. Se ha hecho uso del test de Kolmogorov-Smirnov, una herramienta estadística que permite conocer la probabilidad de que el histograma empírico obtenido sea fruto del azar o, por el contrario, que provenga de una variable aleatoria diferente. Este método estadístico rechaza con rotundidad la hipótesis de que las distribuciones



**Figura 4.3.:** Histograma típico para una medida

obtenidas en las mediciones hayan sido generadas por una variable aleatoria de tipo Rayleigh o de tipo Rice.

Sin embargo, la hipótesis de que la amplitud en un entorno de múltiples reflexiones siga una distribución de Rayleigh o de Rice tiene una sólida base teórica y es asumida frecuentemente en la literatura científica. Cabe preguntarse entonces cuál es el motivo de que no se de el caso, más aún viendo que los histogramas obtenidos guardan cierta similitud con las distribuciones.

La explicación más clara a esta situación es el hecho de que en el interior de la cavidad haya ciertos puntos que tienen visión directa con la fuente y otros que no la tengan. De esta manera, algunas de las medidas tomadas serían realizaciones de una variable aleatoria de tipo Rice, mientras que otras serían realizaciones de una variable aleatoria de tipo Rayleigh, y al analizarlas en conjunto ninguna de las dos distribuciones aportaría una explicación satisfactoria a todas las medidas.

De ser cierto esto, se podría interpretar la cavidad como dividida en dos zonas: una de ellas iluminada por visión directa y cuyas medidas siguen una distribución de Rice;

la segunda ocultada de la visión directa y cuyas medidas seguirían una distribución de Rayleigh.

Otro posible factor que contribuya a rechazar la hipótesis es que el ruido presente en la medidas, originado por el ambiente exterior y por el micrófono de medida, y las oscilaciones térmicas que apareciesen durante el transcurso de la medición, sean demasiado contaminantes y enmascaren el verdadero comportamiento estadístico del fenómeno de estudio.

Por último, también podría influir el hecho de que la colección de puntos recogida para cada medida no sea lo suficientemente grande como para aclarar la naturaleza de la variable aleatoria que genera las muestras.

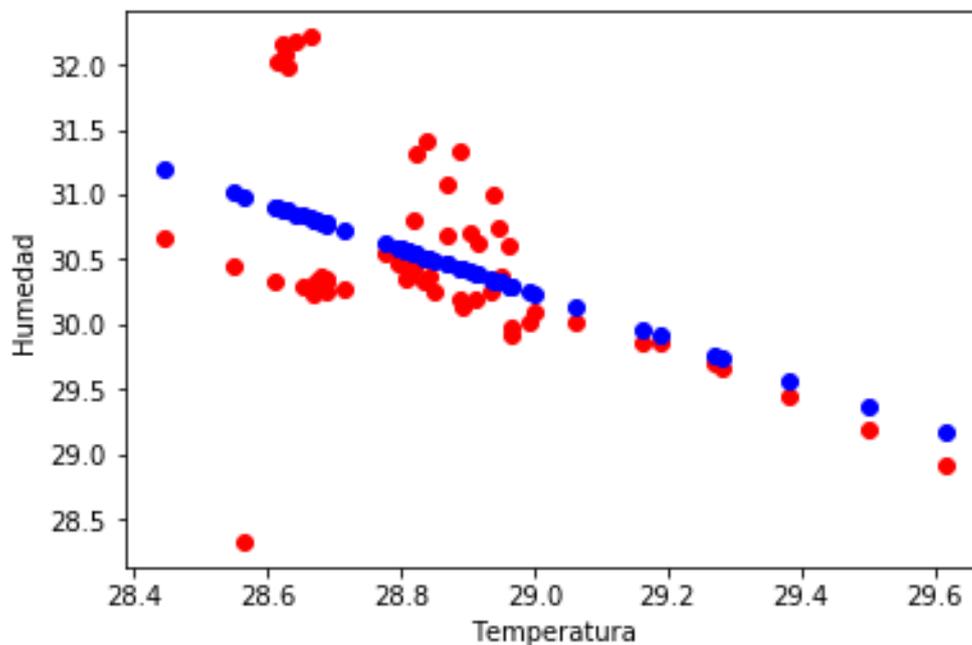
## 4.2. Rectas de humedad y temperatura

Durante el transcurso de las mediciones se ha comprobado que la influencia de la humedad y de la temperatura sobre las mediciones es elevada, y que para comparar medidas en igualdad de condiciones estos dos factores han de guardar entre sí una cierta relación.

Para encontrar la influencia de la humedad y de la temperatura se realizaron numerosas medidas de prueba para una misma posición de fuente. Al tratarse de medidas tomadas desde la misma posición, es de esperar que las mediciones obtenidas guarden entre sí unas relaciones estadísticas muy elevadas. Sin embargo los resultados empíricos desmintieron parcialmente esta hipótesis. Algunas de las medidas tomadas presentaban una relación estadística alta, mientras que otras no cumplían este requisito. Es lógico pues pensar que los responsables de que así ocurriera hayan sido factores ambientales externos, y los factores más presentes y más variables en las condiciones de laboratorio son la temperatura y la humedad.

En la figura 4.4 se muestra una gráfica en la cual se ha representado la humedad media y la temperatura media de varias medidas tomadas en el mes de septiembre de 2018. Los puntos rojos representan las medidas empíricas, y los puntos azules representan la recta obtenida mediante interpolación por mínimos cuadrados.

Se observa claramente que las humedades y las temperaturas no están distribuidas de forma aleatoria, sino que parecen seguir aproximadamente una recta. Esta aprecia-



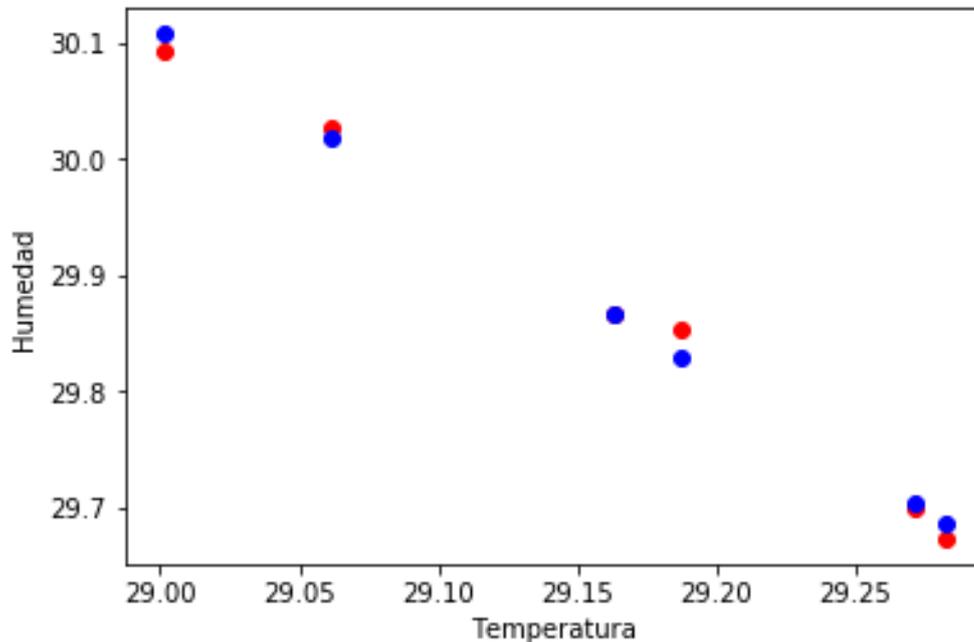
**Figura 4.4.:** Temperaturas y humedades medias para una colección de medidas tomada durante septiembre de 2018.

ción se puede definir aún mas si filtramos los resultados. Este filtrado se ha realizado mediante dos métodos similares.

En el primero de ellos, se han subdividido las medidas por fechas, y se ha comparado cada medida con las que se tomaron en la misma noche. Esta comparación se ha realizado a su vez empleando dos herramientas estadísticas: el test de Kolgomorov-Smirnov y el coeficiente de correlación. Para el test de Kolgomorov-Smirnov, se han seleccionado únicamente las medidas que pasan el test un mínimo número de veces. Para el coeficiente de correlación, nos hemos quedado con las medidas que obtenían un coeficiente de correlación superior a 0.98 respecto al resto de medidas de la misma noche un determinado número de veces.

Los resultados se muestran en la figura 4.5 para el test de Kolgomorov-Smirnov. En ella se muestra además la recta que interpola los puntos mediante el método de mínimos cuadrados. Se puede apreciar con claridad que las medidas filtradas se encuentran cercanas a la recta, al contrario que las medidas que fueron deshechadas en el proceso de filtrado, que se hayaban más dispersas. La recta de interpolación obtenida viene dada por la ecuación:

$$H = 73,5 - 1,49T$$



**Figura 4.5.:** Temperaturas y humedades medias filtradas mediante el test de Kolgomorov-Smirnov comparándolas únicamente con medidas tomadas en la misma noche.

En la figura 4.6 se muestran los valores de humedad y temperatura de las medidas filtradas mediante el método del coeficiente de correlación. En este caso la recta de interpolación obtenida está dada por la ecuación:

$$H = 73 - 1,49T$$

En el segundo método se ha obviado la importancia de la fecha en la que se tomó la medida, y se han comparado entre sí todas las medidas para las que la fuente se encontraba en una misma posición. Este método es menos selectivo que el anterior, pues las diferencias entre unas noches y otras pueden ser grandes.

La gráfica de resultados filtrados para el método del test de Kolgomorov-Smirnov aparece en la figura 4.7. Y la recta de interpolación obtenida de los mismos sigue la ecuación:

$$H = 77 - 1,63T$$

Por otro lado la gráfica de resultados filtrados para el método del coeficiente de correlación se muestra en la figura 4.8. Y la recta de interpolación encontrada sigue la ecuación:

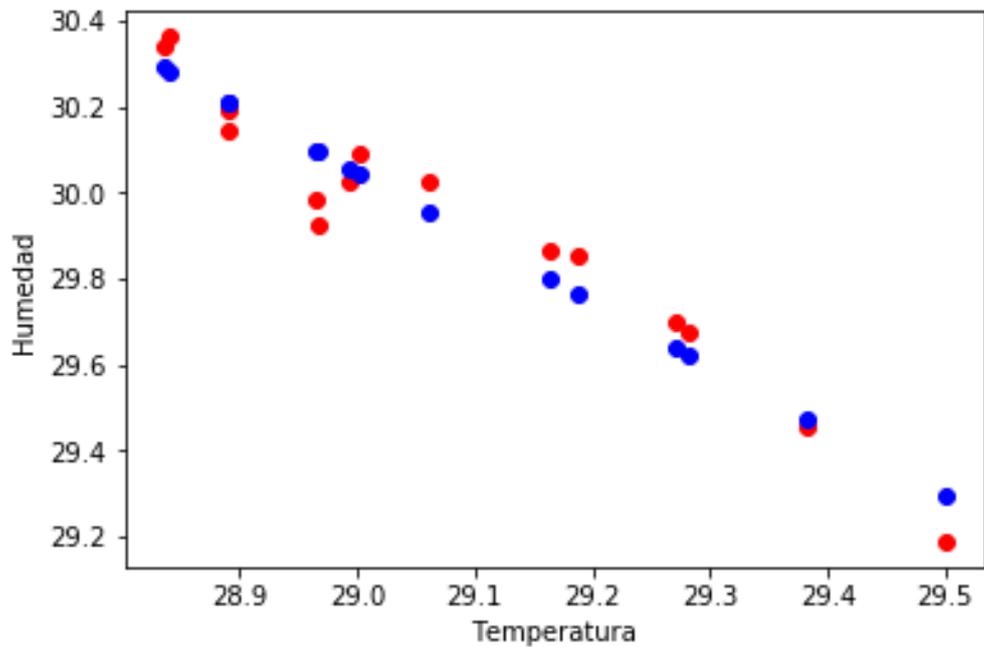


Figura 4.6.: Temperaturas y humedades medias filtradas mediante el coeficiente de correlación comparándolas únicamente con medidas tomadas en la misma noche.

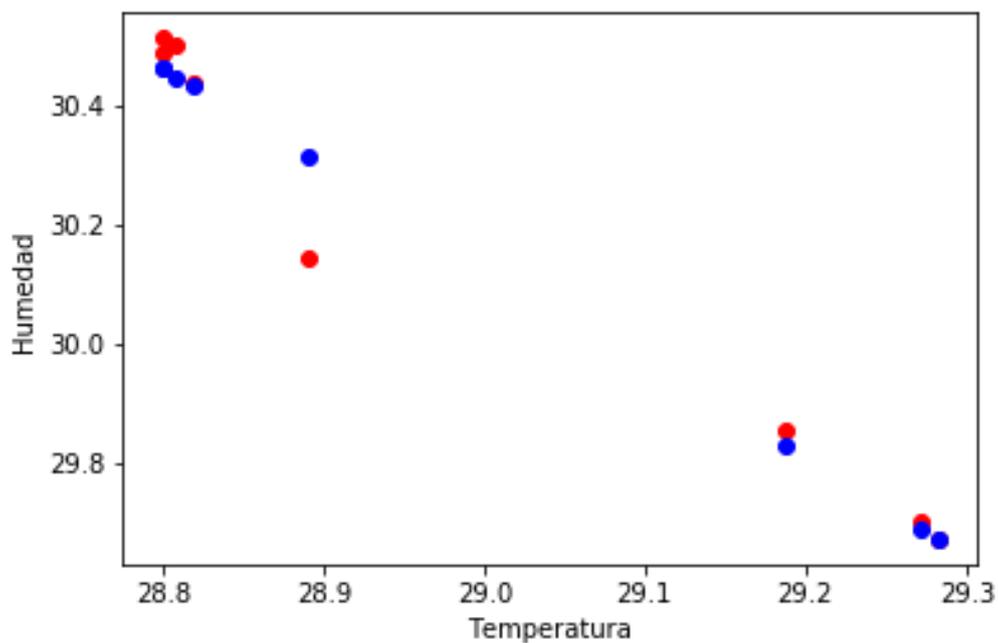
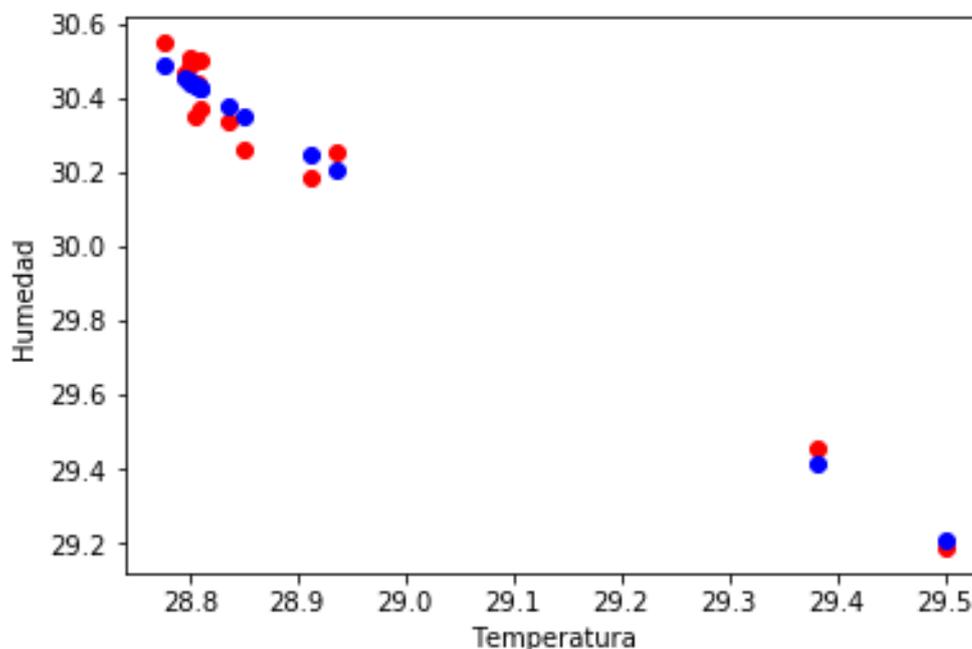


Figura 4.7.: Temperaturas y humedades medias filtradas mediante el test de Kolgomorov-Smirnov comparándolas con todas las medidas tomadas desde la misma posición de fuente.



**Figura 4.8.:** Temperaturas y humedades medias filtradas mediante el coeficiente de correlación comparándolas con todas las medidas tomadas desde la misma posición de fuente.

$$H = 81 - 1,76T$$

Vemos claramente que las rectas de interpolación obtenidas son muy similares, por lo que cabe sacar la conclusión de que esta recta define el conjunto de valores Humedad-Temperatura para los cuales el efecto de la variación de la temperatura es compensado con el efecto de la variación de la humedad, de forma que se puede considerar que dos medidas cuyos valores medios de humedad y temperatura se hallen en la recta han sido tomadas en igualdad de condiciones.

Este hecho puede intuirse a partir del concepto de temperatura de bochorno. Esta se puede definir como la temperatura efectiva procedente de la temperatura real y de los efectos de la humedad. La temperatura de bochorno y la humedad guardan entre sí una relación inversamente proporcional, tal y como es nuestro caso. Aunque este concepto haya diseñado para evaluar la sensación térmica que sienten los seres humanos, no es descabellado pensar que la impedancia acústica del cemento de las paredes de la cavidad pueda presentar un comportamiento similar.

En el caso que fue explicado previamente en esta sección solo se hayó una recta de humedad-temperatura para un conjunto dado de medidas. Sin embargo, esta recta puede variar dependiendo de las condiciones atmosféricas puntuales. Las medidas

expuestas anteriormente fueron tomadas en el mes de septiembre en condiciones de tiempo cálido. Si intentamos analizar la relación entre la humedad y la temperatura tomadas en momentos de tiempo más frío, las rectas encontradas tienen aproximadamente la misma pendiente que en el caso de tiempo cálido, pero nos encontramos con que la recta se ha desplazado hacia abajo.

En la figura 4.9 se ve claramente este efecto. En la gráfica se distinguen claramente que los puntos se concentran en cuatro regiones particulares. Cada región corresponde a:

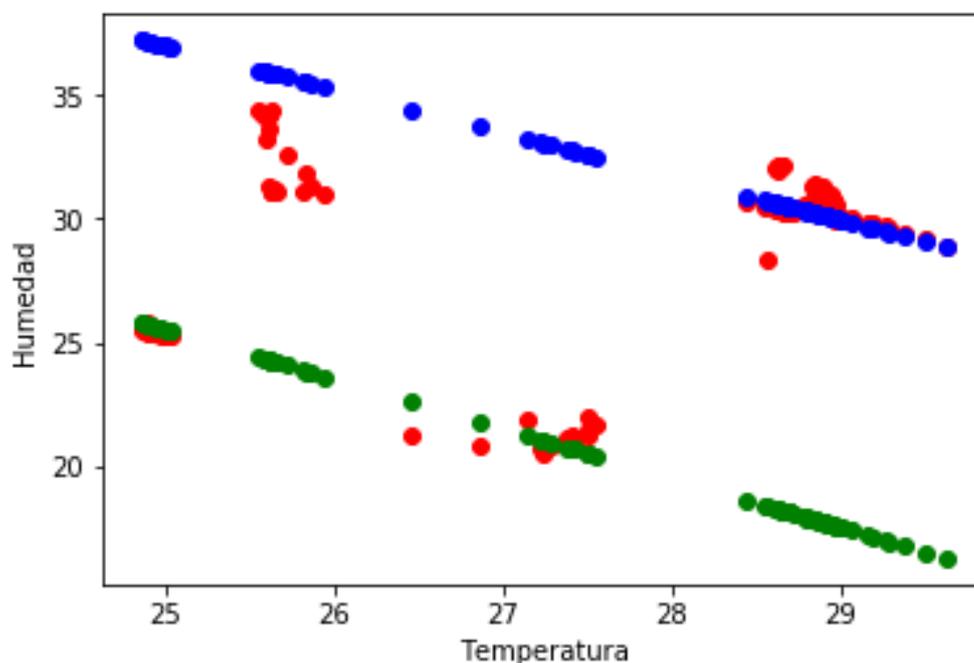
- Medidas tomadas en el mes de septiembre de 2018. Son las que están más al lado derecho de la gráfica (presentan las mayores temperaturas medias). La posición de la fuente permaneció estática durante las mediciones.
- Medidas tomadas en la noche del 4 al 5 de octubre de 2018. Son las que están en la parte más baja de la gráfica (presentan las menores humedades medias). La fuente permaneció estática durante las medidas.
- Medidas tomadas en la noche del 9 al 10 de octubre. Son las que están más a la izquierda de la gráfica (presentan las menores temperaturas medias), con humedad aproximadamente constante e igual a 25.5 %. La fuente se desplazó progresivamente en el eje Y para cada medida.
- Medidas tomadas durante el día y la noche del 12 de octubre de 2018. Son las que se encuentran cercanas a la esquina superior izquierda de la gráfica. De nuevo, La fuente se desplazó progresivamente en el eje Y para cada medida.

Los puntos rojos representan las medidas empíricas. La recta de puntos verdes representa la recta de Humedad y temperatura obtenida anteriormente para el caso de tiempo cálido, cuya ecuación es :

$$H = 81 - 1,76T$$

Mientras que la recta de puntos verdes es la recta de interpolación de los puntos que se encuentran en las dos regiones inferiores. Se ve claramente como la recta azul es aproximadamente la recta verde desplazada hacia abajo.

Por esta razón es lógico pensar que la teoría de la recta de humedad y temperatura sólo es válida para un entorno limitado de valores. A medida que nos alejamos de ese entorno la recta supuesta primeramente dejaría de ser válida.



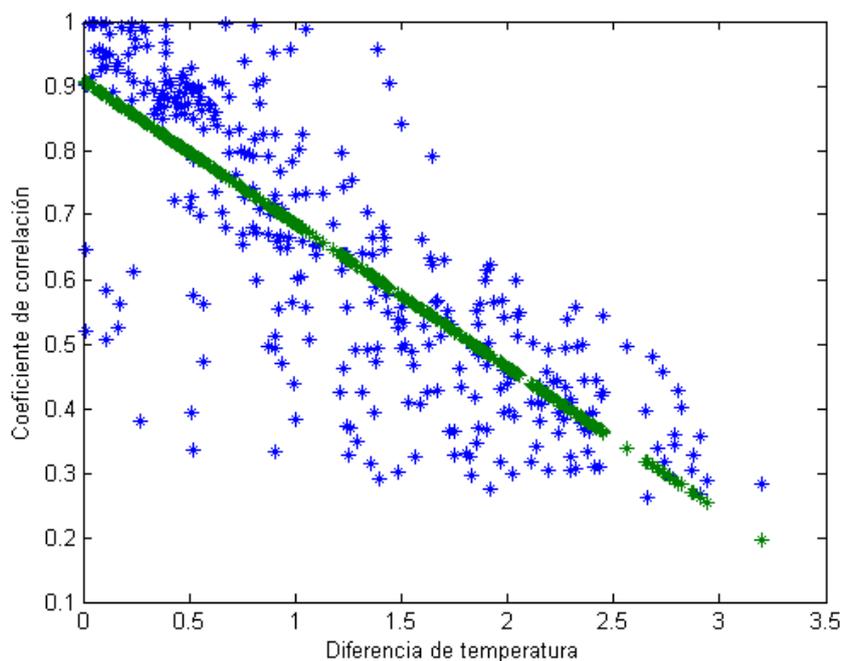
**Figura 4.9.:** Comparación entre la recta de Humedad-Temperatura obtenida previamente y la obtenida para nuevas medidas tomadas en un ambiente más frío y menos húmedo. Se observa que la segunda es el resultado de desplazar la primera hacia abajo.

### 4.3. Efecto de la humedad y de la temperatura en la correlación de las medidas.

Dados los resultados planteados en secciones previas, de los cuales se infirió que la humedad y la temperatura generan una gran variación en los resultados, cabe pensar en la relación que podrían guardar estas magnitudes con el coeficiente de correlación entre dos medidas. Es decir, si tenemos dos medidas que fueron tomadas en distintas condiciones de humedad y de temperatura para una misma posición de fuente, cuál es la correlación que presentarán dichas medidas.

Para buscar respuesta a esta cuestión se han analizado, para cada pareja de medidas, la relación que guardan las diferencias absolutas de temperatura y humedad con su coeficiente de correlación.

En la figura 4.10 se muestra la relación que guardan las diferencias de temperatura con el coeficiente de correlación.



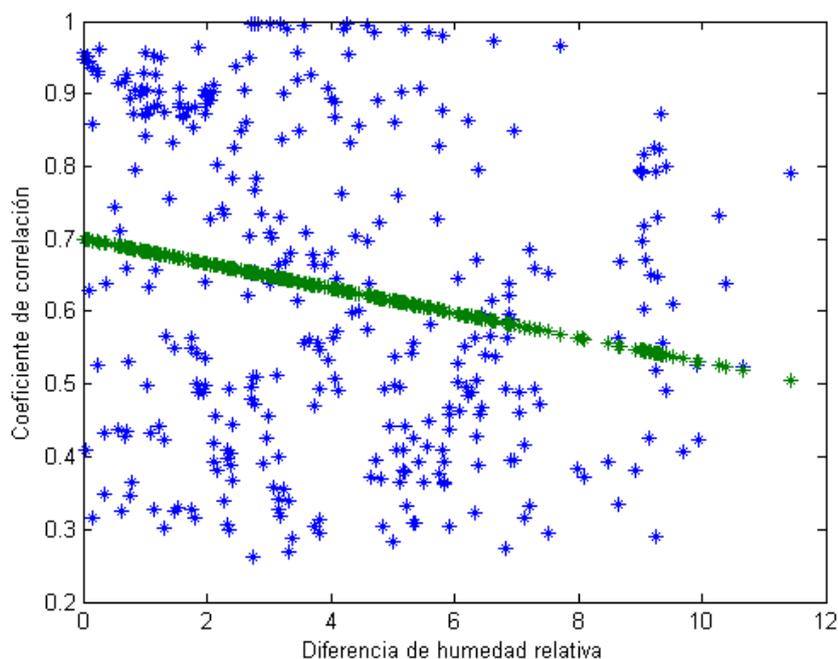
**Figura 4.10.:** Comparación entre diferencias absolutas de temperatura y coeficiente de correlación.

Se puede apreciar a simple vista que la relación es definitivamente lineal inversa. Ajustando estos valores por mínimos cuadrados, se llega a que la recta de interpolación es:

$$\rho = 0,9 - 0,22T$$

Para el caso de la humedad, la relación entre diferencias de humedades relativas y coeficientes de correlación aparece en la figura 4.11.

En este caso se observa que la humedad posee una menor influencia en el resultado de las mediciones que la temperatura. Sin embargo, se vió en secciones previas que dos medidas eran comparables si se encontraban aproximadamente dentro de la misma recta de humedad-temperatura. De esto concluimos que, aparte de estar aproximadamente en la misma recta de humedad-temperatura, las medidas han de guardar una baja diferencia de temperatura para que sean comparables. Ergo cada pareja de medidas a comparar debe guardar una diferencia de temperatura pequeña, y además sus humedades relativas han de variar según la recta de humedad-temperatura correspondiente.

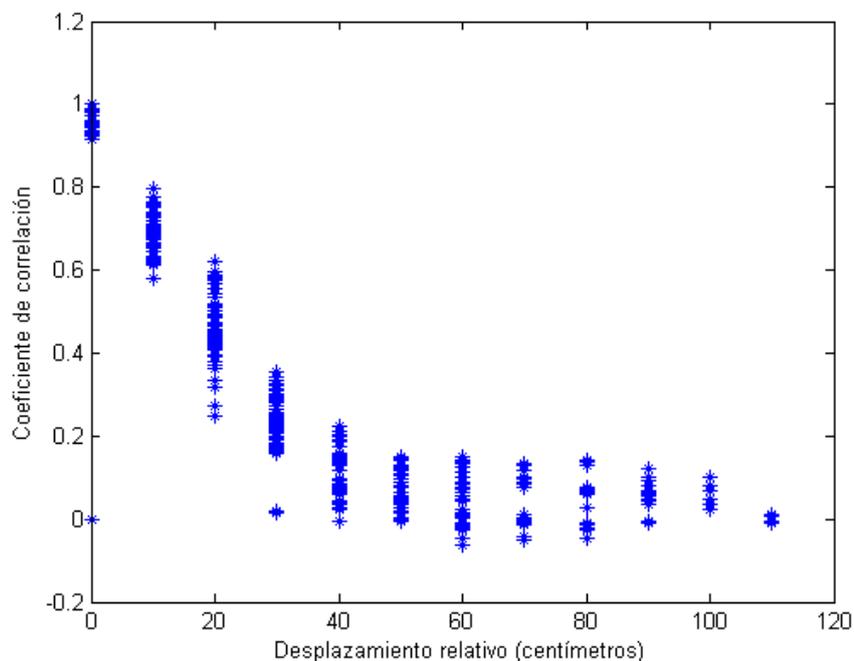


**Figura 4.11.:** Comparación entre diferencias absolutas de humedad relativa y coeficiente de correlación.

A partir de todas estas pruebas, se puede concluir claramente que las diferencias de temperatura afectan de manera muy significativa a la correlación entre medidas. Observemos que la variación de un solo grado provoca una bajada esperable del 22 % en el coeficiente de correlación.

Una vez sabido esto, el siguiente paso obligatorio es comparar la influencia que tienen la temperatura y la humedad con la influencia que tiene un desplazamiento de la fuente. Es de esperar que dicho desplazamiento provoque un cambio en el patrón de onda interno habido en la cavidad, y como consecuencia dos medidas para las cuales la fuente se colocó en diferente lugar presentarán un coeficiente de correlación inversamente proporcional al desplazamiento relativo de la fuente de una medida respecto a la otra.

Para comparar ambos efectos necesitamos saber de qué manera cambia el coeficiente de correlación en función del desplazamiento relativo. En la figura 4.12 se muestra la relación entre, para cada pareja posible de medidas, la distancia que guardaron las fuentes medida en centímetros y el coeficiente de correlación.



**Figura 4.12.:** Comparación entre diferencias desplazamiento relativo (en centímetros) y coeficiente de correlación.

Donde de nuevo se aprecia claramente una tendencia lineal muy marcada hasta un desplazamiento de fuente de 40 cm, a partir del cual el coeficiente de correlación se hace prácticamente nulo. Interpolando los puntos de la zona lineal mediante mínimos cuadrados utilizando un polinomio de primer grado, se llega a que la relación entre el coeficiente de correlación y la temperatura es:

$$\rho = 0,97 - 0,022d \quad 0 < d < 40$$

A partir de este resultado, podemos extraer la variación de temperatura que equivaldría a un desplazamiento de fuente sin más que calcular la relación entre las pendientes de las rectas de interpolación:

$$\frac{0,22}{0,022} = 10 \text{ cm}/^{\circ}\text{C}$$

Para hacernos una idea del orden de la variación que inducen los factores ambientales, observemos que la variación de un grado provoca aproximadamente el mismo descenso en el coeficiente de correlación que un desplazamiento de fuente de 10 cm. Es una variación muy grande para lo ligero de la variación de la temperatura, por lo tanto hemos de concluir que el experimento es muy sensible a factores ambientales y

es necesario ser muy selectivo en lo relativo a las condiciones ambientales a la hora de comparar medidas.

#### 4.4. Variación de la forma de onda debida a la humedad y a la temperatura.

Se ha visto en secciones anteriores, y se ha cuantificado numéricamente, la variación introducida en el patrón de onda interno por la humedad y la temperatura. El objetivo de esta sección es mostrar una serie de medidas para comprobar visualmente dicha influencia.

A continuación se mostrará una serie típica de medidas correspondientes cada una a una fecha diferente, de forma que existirán variaciones de factores ambientales entre ellas. Todas ellas han sido tomadas estando la fuente en la posición  $(x, y, z) = (545, -1100, -2000)$  mm. El origen de coordenadas se sitúa en la esquina inferior de la pared que contiene la apertura, a mano izquierda según nos asomamos dentro de la cavidad. El eje  $x$  es vertical y el  $z$  indica la profundidad en la cavidad. Por tanto coordenadas con  $z < 0$  están fuera de la cavidad. En la parte de arriba de las imágenes aparecen la fecha, la frecuencia que se utilizó para la onda sonora, la posición de la fuente y la temperatura y humedad medias habidas durante la medición. Además, las imágenes conformadas por las medidas han sido interpoladas por un factor de 5 para así facilitar el reconocimiento visual de las formas de onda. Se muestran en las figuras [4.13](#), [4.14](#), [4.15](#), [4.16](#), [4.17](#), [4.18](#), [4.19](#), [4.20](#).

En las imágenes se puede apreciar que entre algunas medidas existen ciertas diferencias, al menos a simple vista. Sin embargo, vemos cómo en la región superior derecha de las imágenes existe una zona de máximos que se mantiene en el mismo lugar durante todas las medidas. Esto nos puede dar una idea de cómo abordar el problema.

Siguiendo este hilo, se han analizado las medidas centrándose únicamente en puntos o regiones de cierta importancia. Seguidamente, a todas las medidas anteriores se les ha aplicado un filtro, de forma que a los puntos que presenten valores entre el 15 % y el 50 % de la amplitud máxima se les ha asignado a propósito el valor del 50 % de la amplitud máxima. De esta forma en la imagen los valores intermedios aparecen todos del mismo color azul claro, y los puntos máximos y mínimos así como

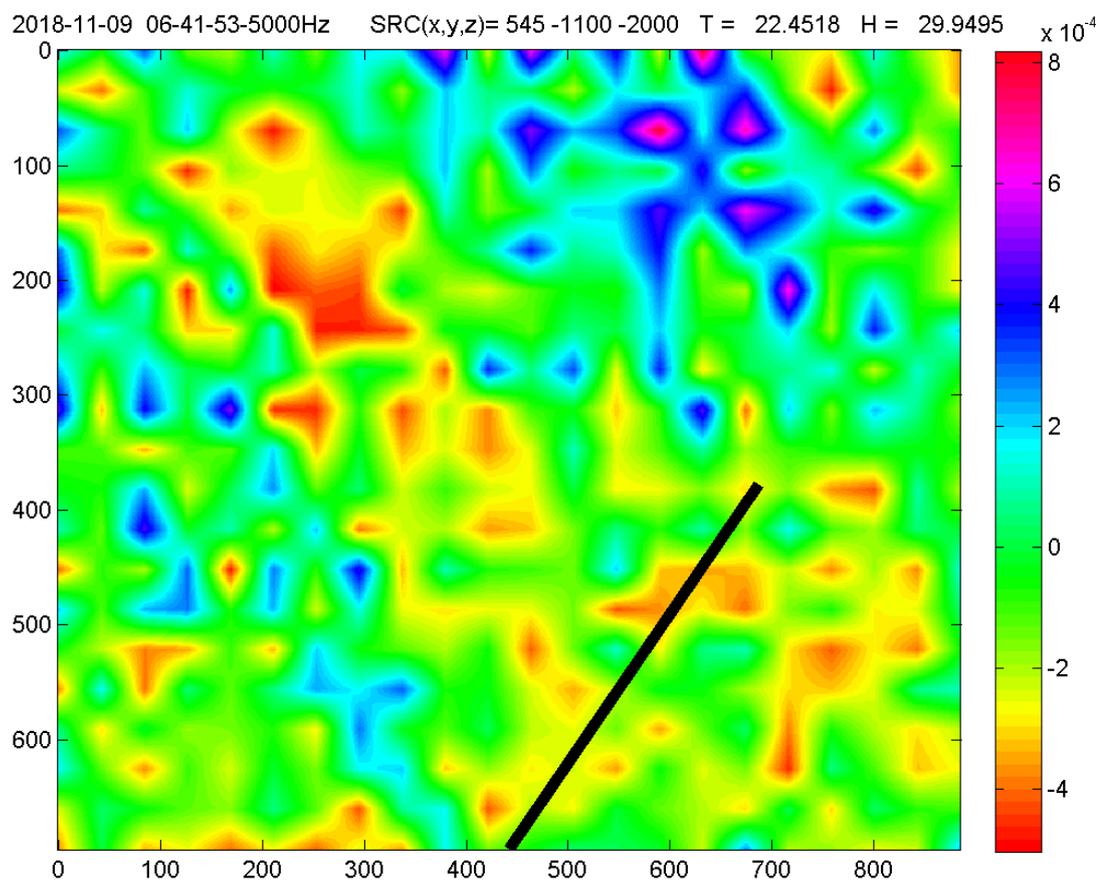


Figura 4.13.: Medida 1 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

sus entornos son fáciles de distinguir visualmente. Las imágenes resultado de este tratamiento se muestran en las figuras [4.21](#), [4.22](#), [4.23](#), [4.24](#), [4.25](#), [4.26](#), [4.27](#), [4.28](#).

En las sucesivas imágenes se aprecia que algunos de los máximos aparecen y desaparecen según cada situación, pero otros muchos permanecen en el mismo lugar. Aunque se hagan más o menos intensos, o sufran pequeñas deformaciones, la región en la que se ubican tiende a ser constante. Por tanto, la huella que la dirección de entrada de la onda imprime en la cavidad podría estar fijada en los máximos y en los mínimos del patrón, lo cual facilitaría la identificación de la dirección de la fuente a pesar de las variaciones ambientales.

Un ejemplo claro de la conservación de la ubicación de los máximos lo podemos ver en el grupo de máximos habidos en la región superior derecha de las imágenes.

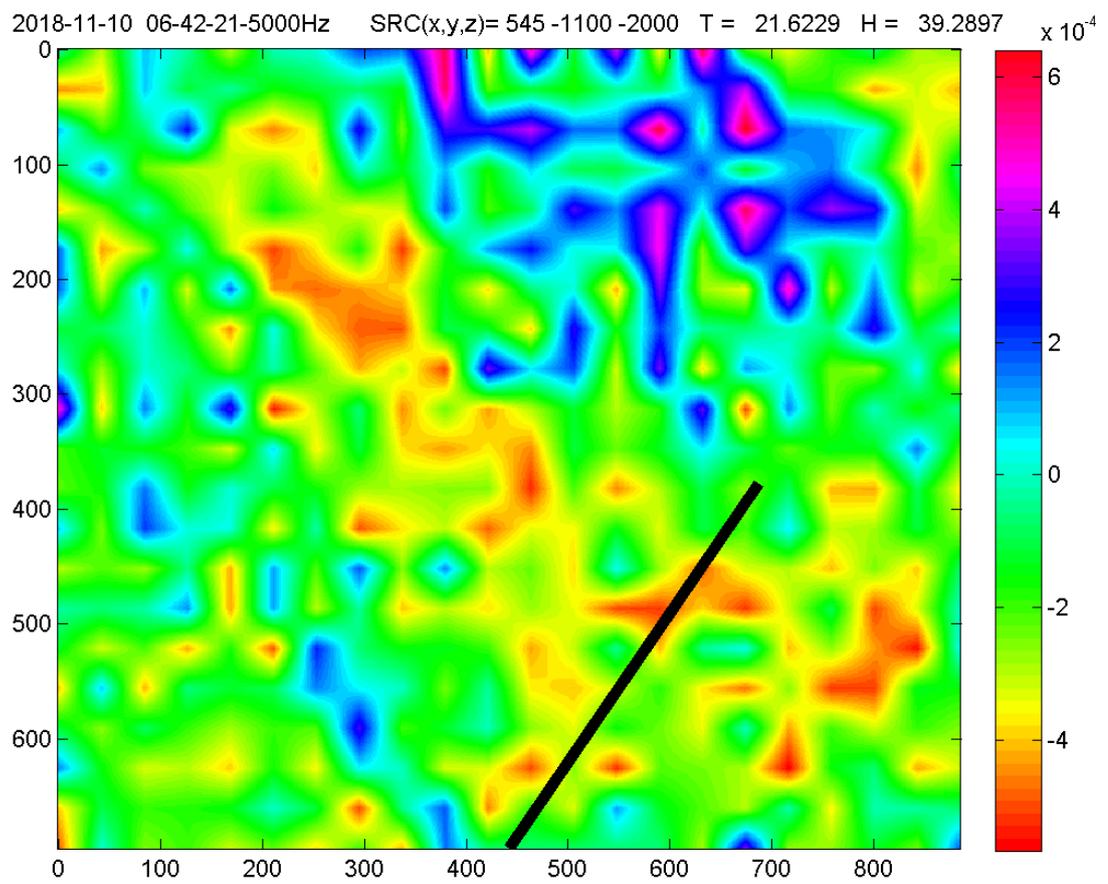


Figura 4.14.: Medida 2 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

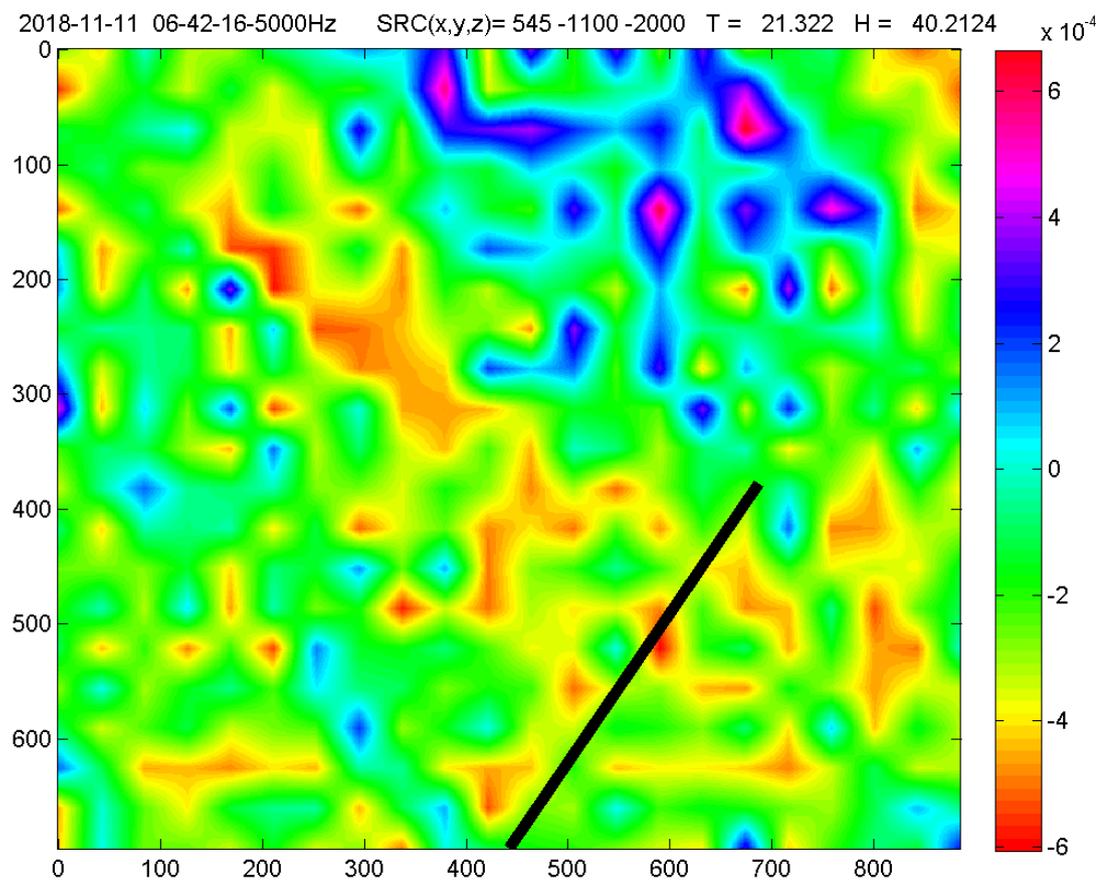


Figura 4.15.: Medida 3 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

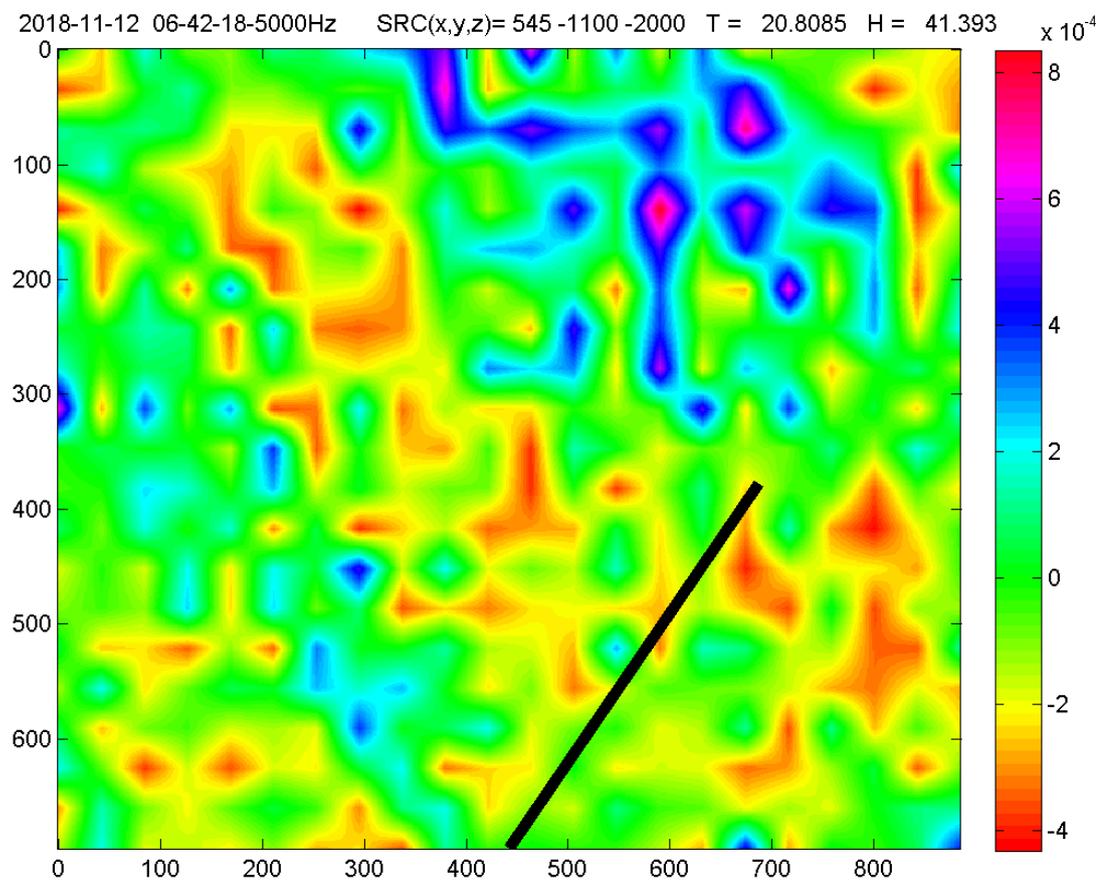


Figura 4.16.: Medida 4 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

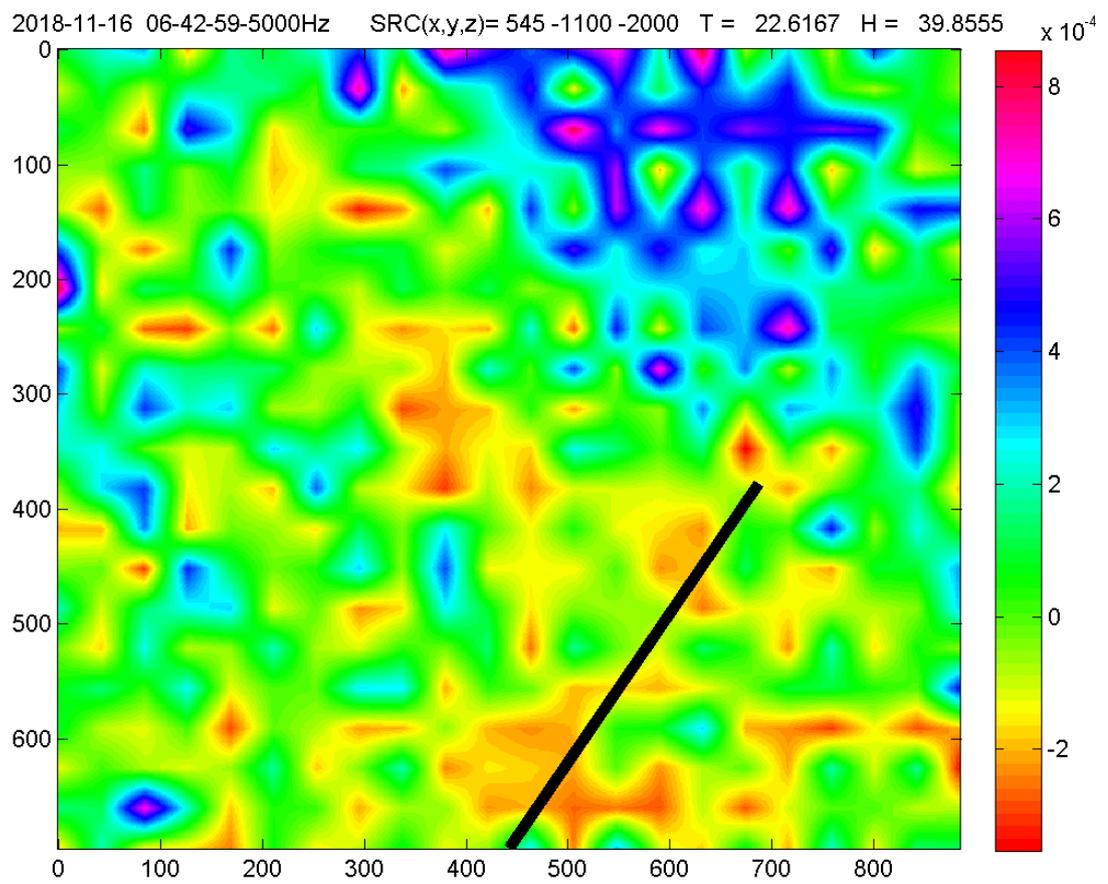


Figura 4.17.: Medida 5 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

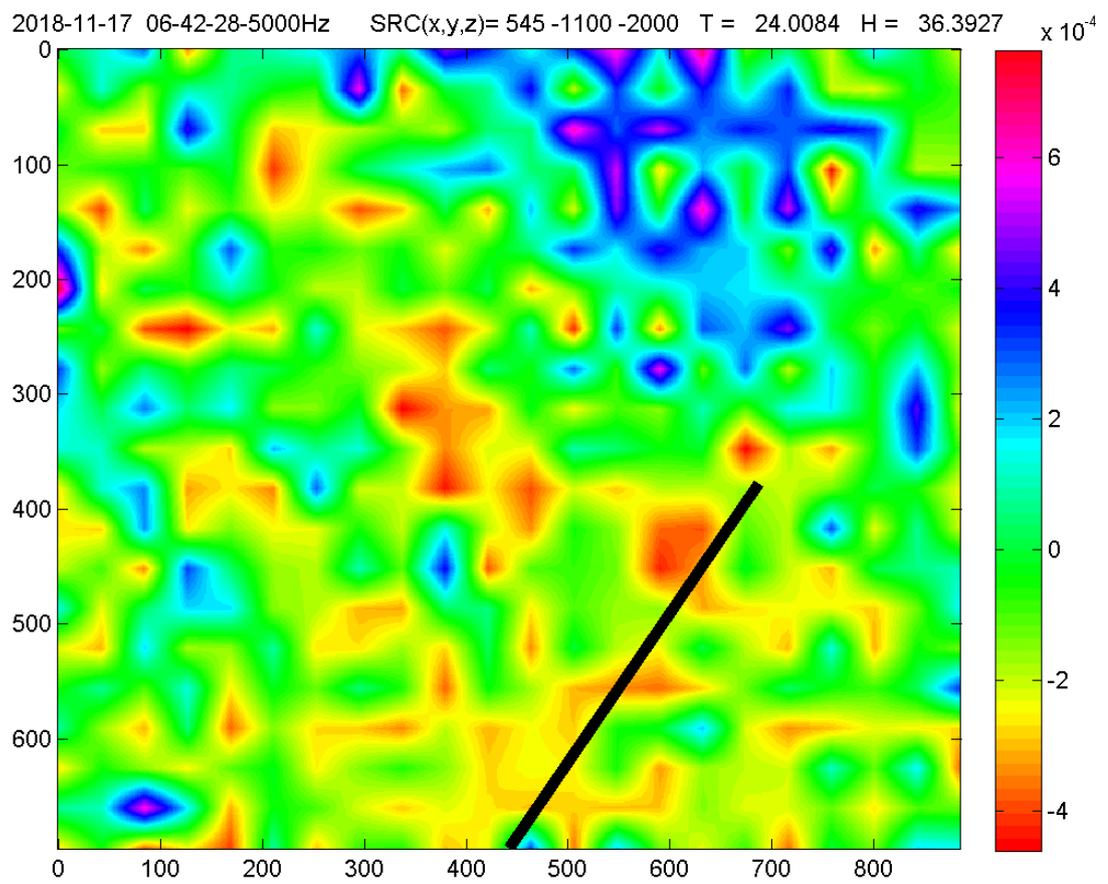


Figura 4.18.: Medida 6 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

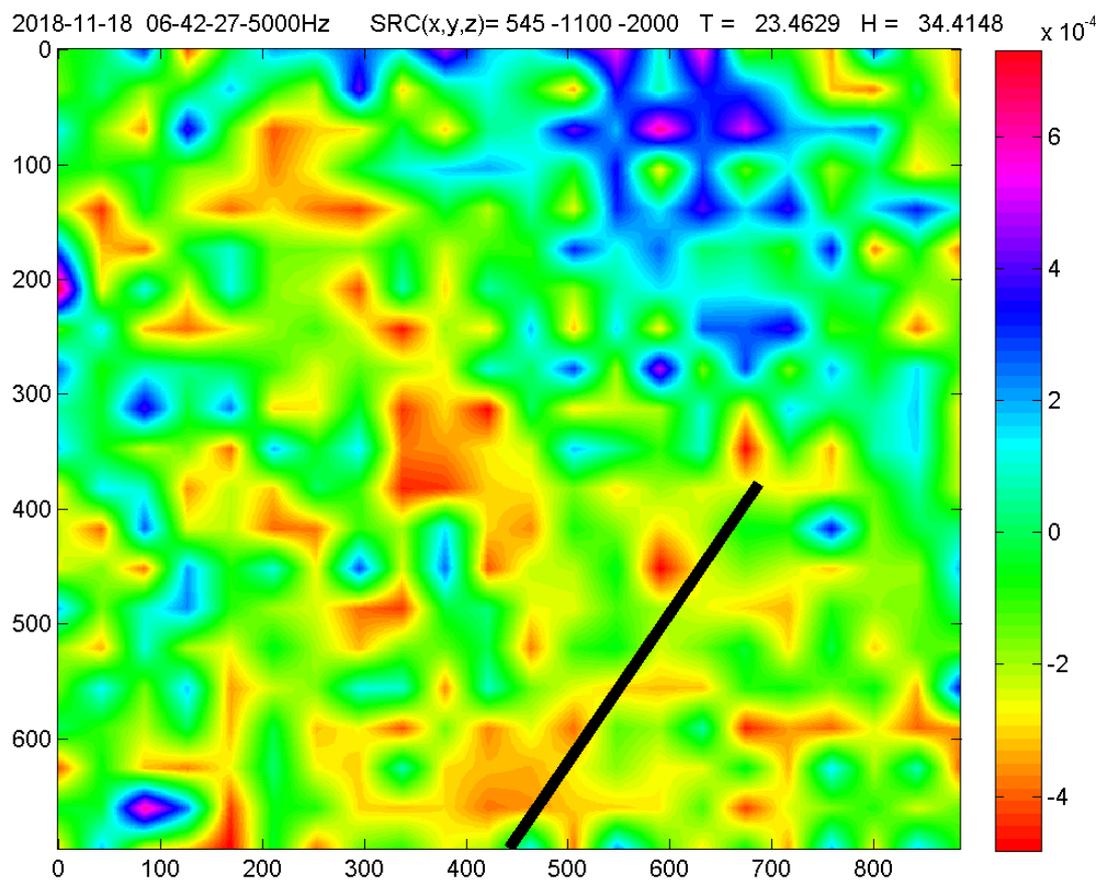


Figura 4.19.: Medida 7 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

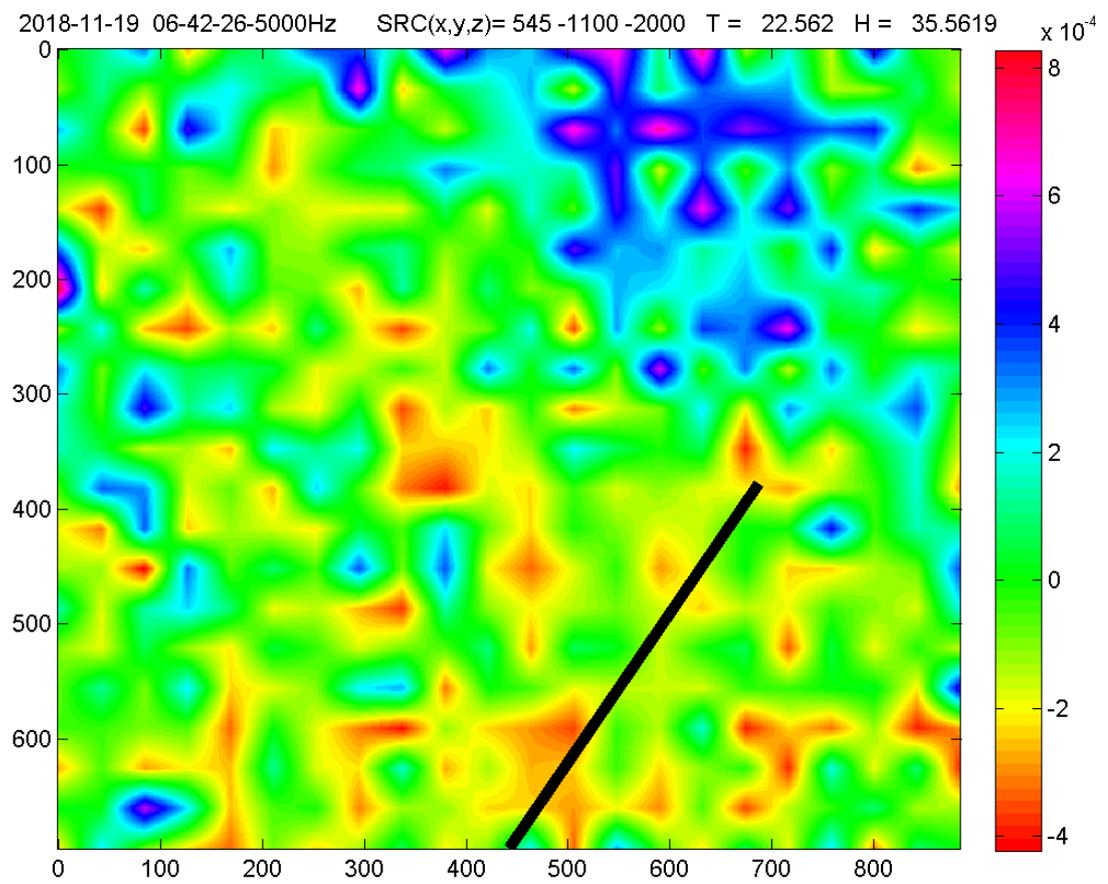


Figura 4.20.: Medida 8 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

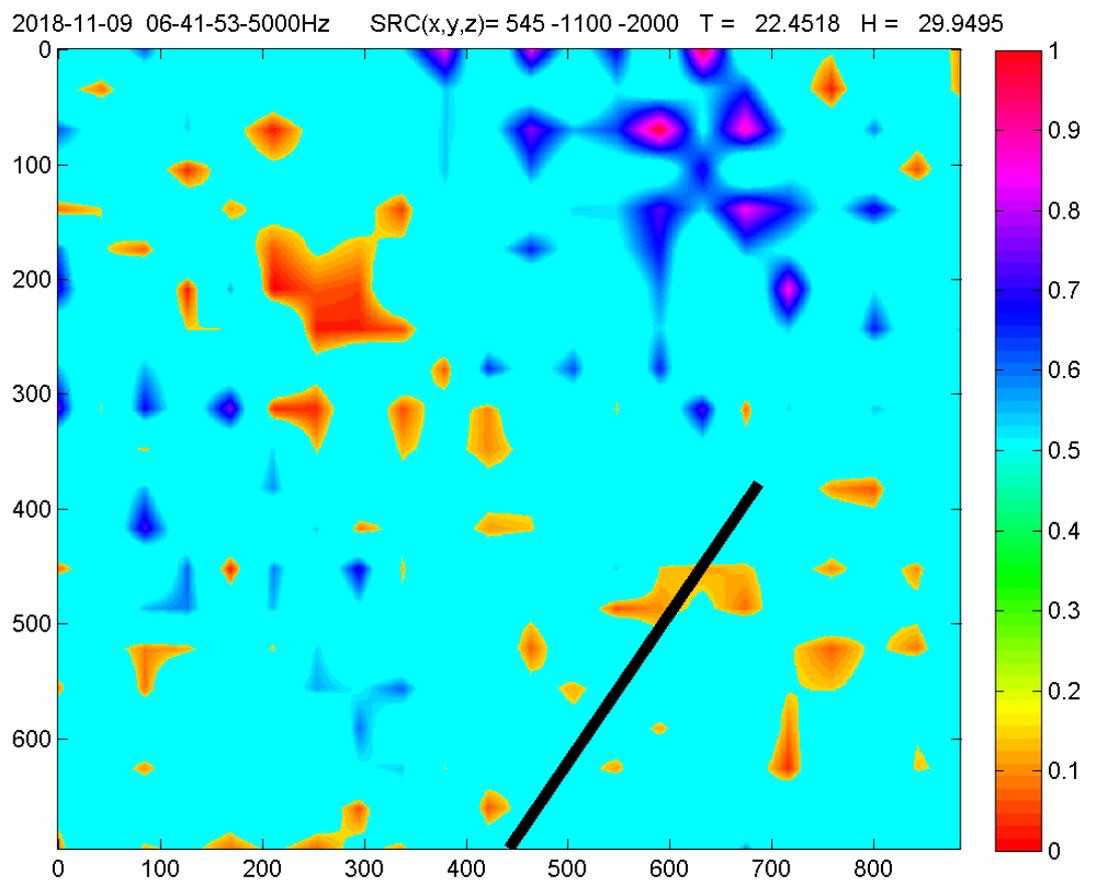


Figura 4.21.: Medida 1 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

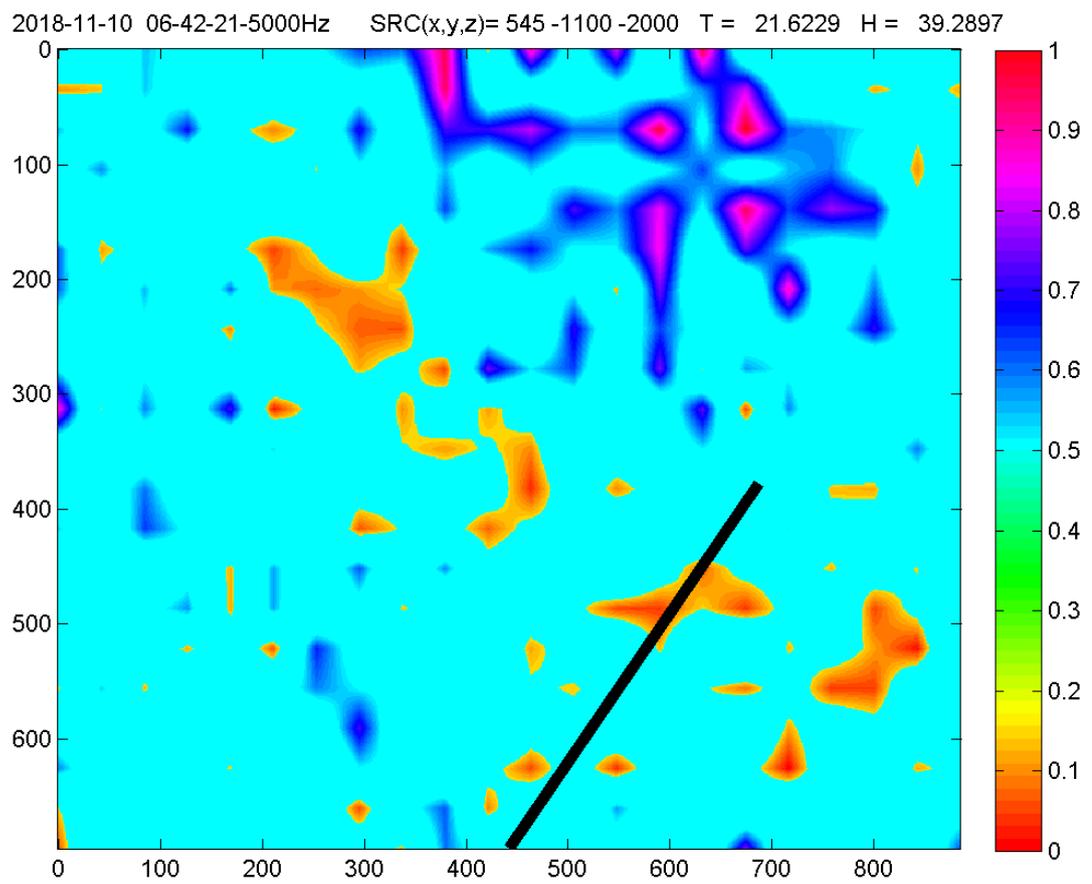


Figura 4.22.: Medida 2 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

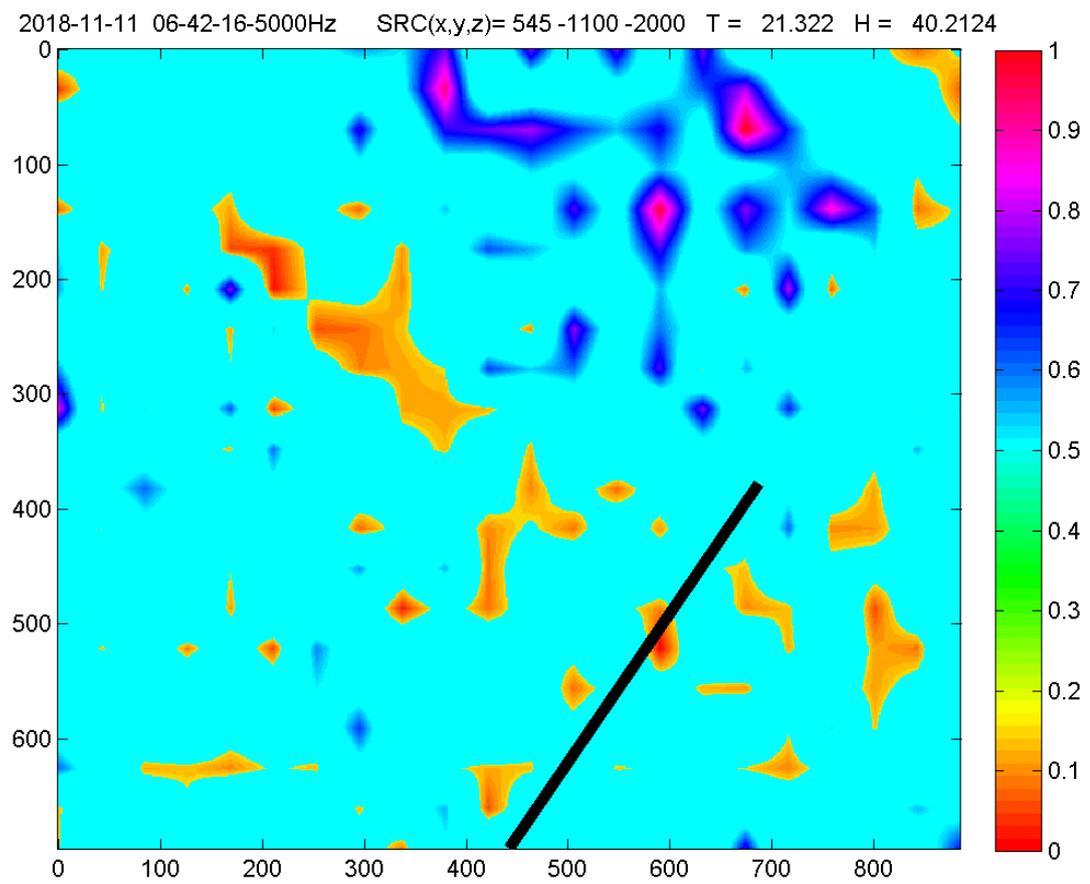


Figura 4.23.: Medida 3 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

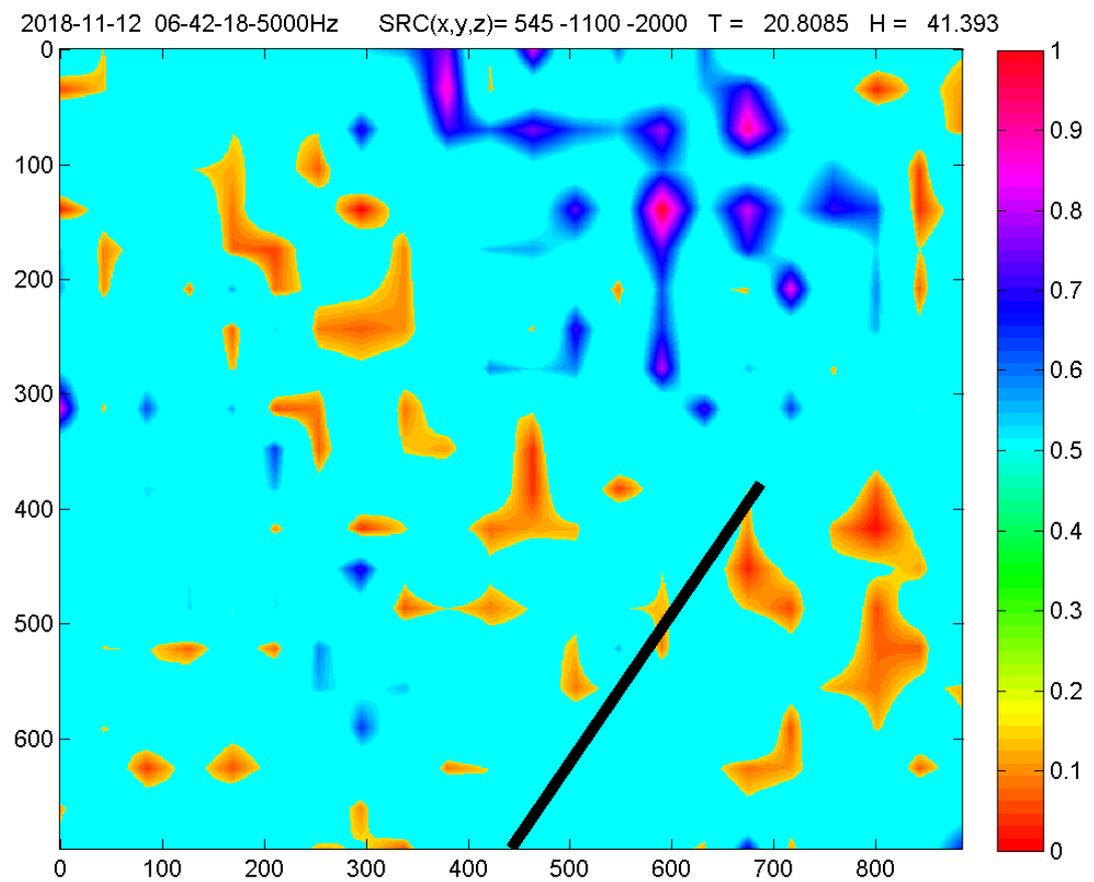


Figura 4.24.: Medida 4 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

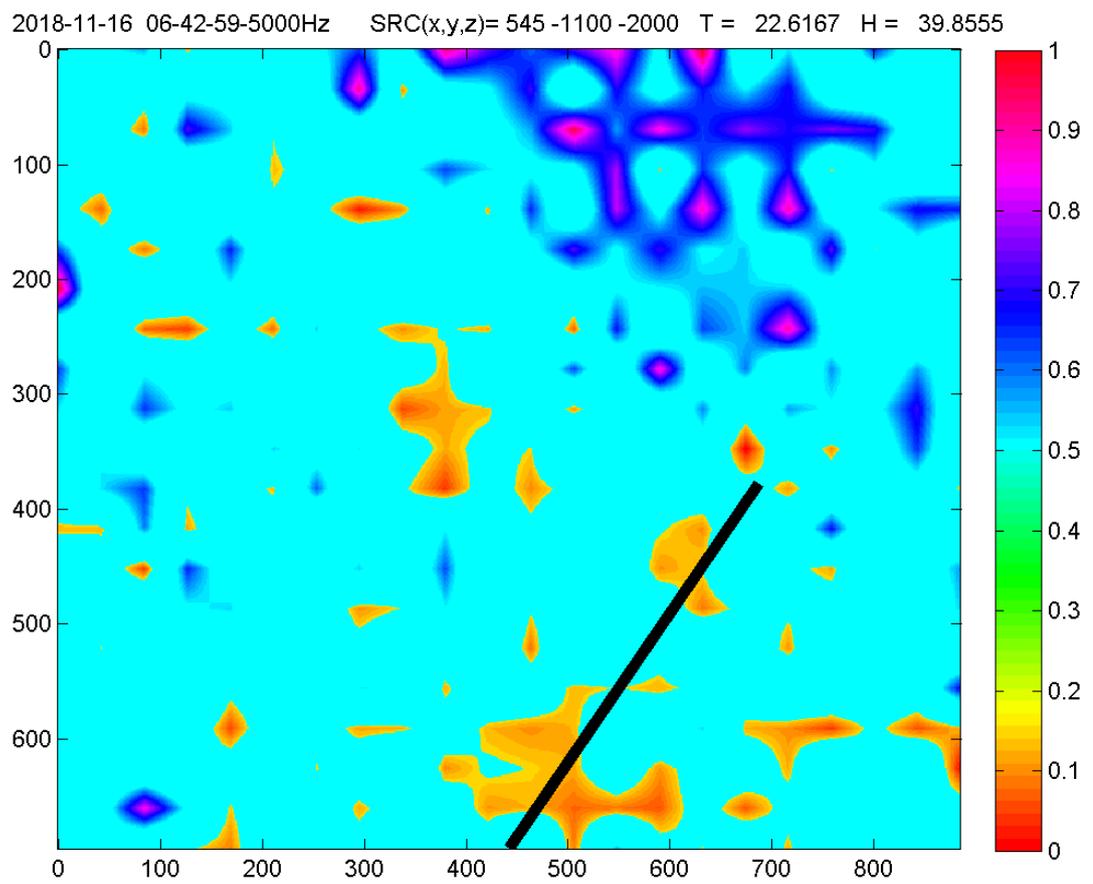


Figura 4.25.: Medida 5 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

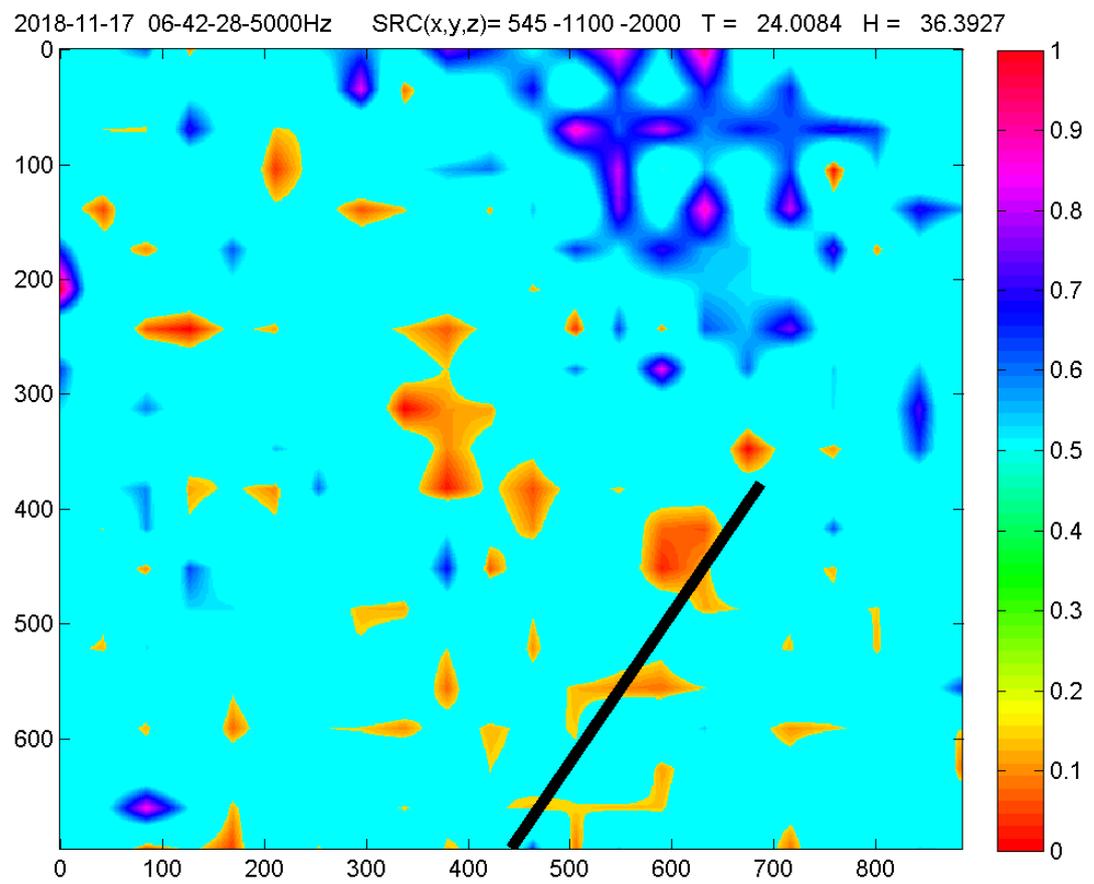


Figura 4.26.: Medida 6 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

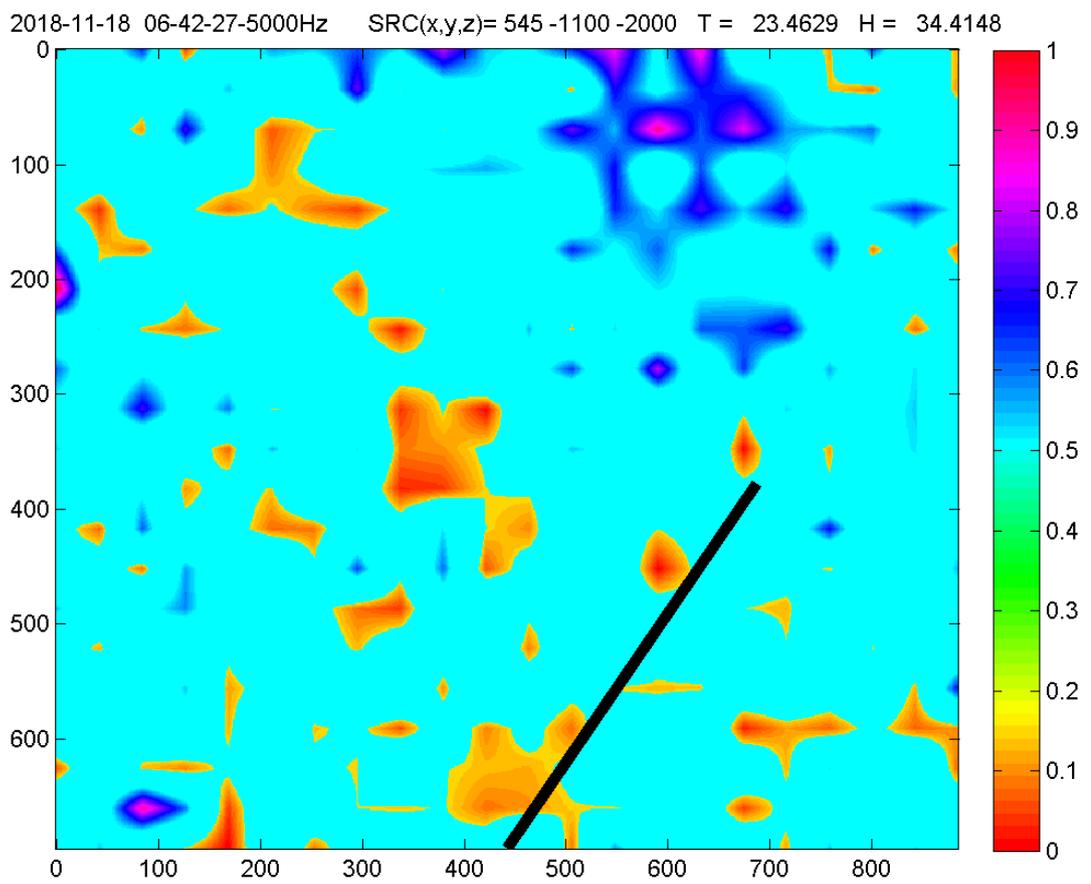


Figura 4.27.: Medida 7 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

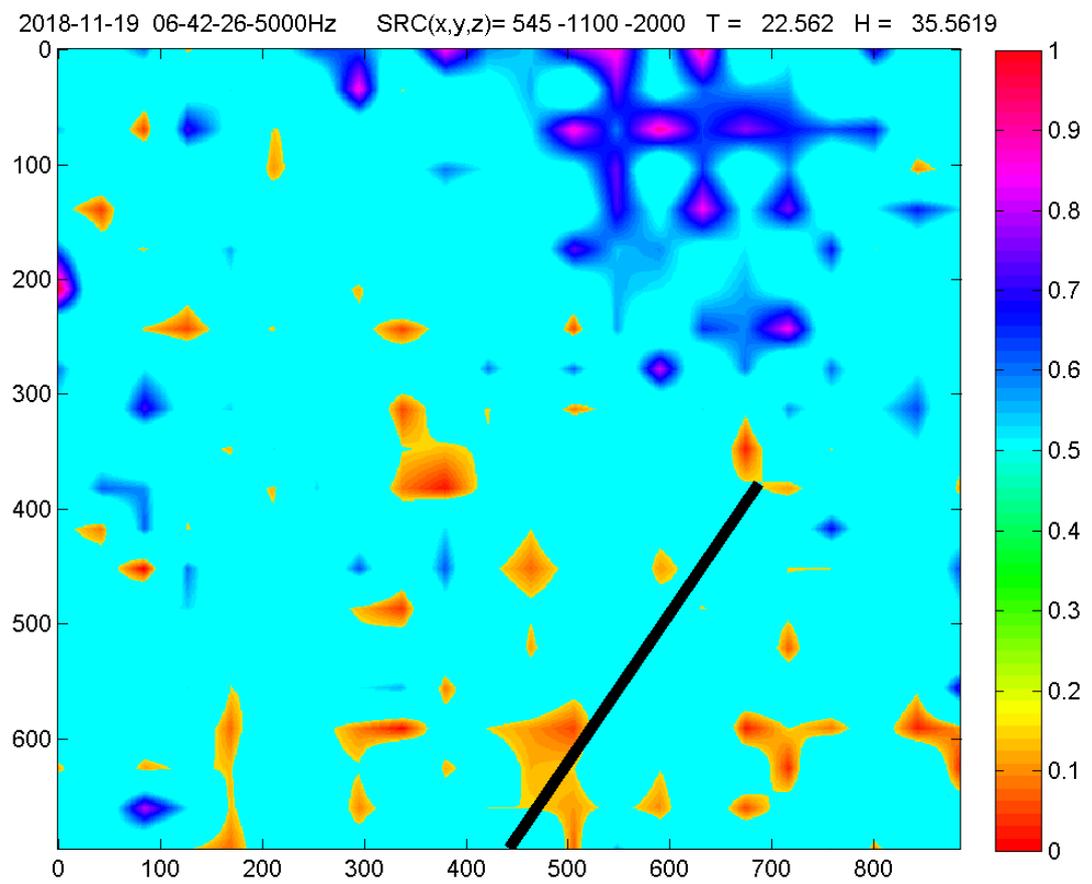


Figura 4.28.: Medida 8 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.

## 4.5. Efecto de la frecuencia: análisis para una longitud de onda comparable a las dimensiones de la cavidad.

En los casos anteriores la frecuencia de la onda de sonido emitida hacia la cavidad era de  $f = 5$  kHz. En este caso se va a analizar cómo se comporta la cavidad cambiando la frecuencia a  $f = 1$  kHz. La longitud de onda para esta frecuencia será de:

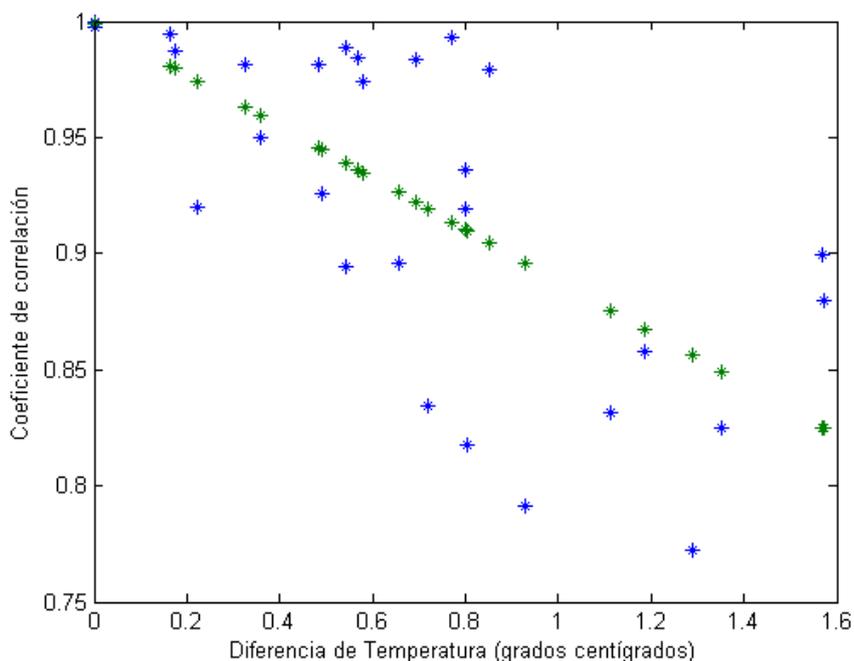
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340}{1000} = 34 \text{ cm}$$

Que no es pequeña respecto a las dimensiones de la cavidad (1 m aproximadamente).

Analicemos primero el efecto de la temperatura. Al igual que en la sección 4.3 hemos recopilado datos sobre la diferencia de temperatura y el coeficiente de correlación para cada una de las posibles parejas de medidas de una colección. En la figura 4.29 se muestra la relación que guardan las diferencias absolutas de temperatura y los coeficientes de correlación para cada par de medidas, así como la recta de regresión de los datos. En ella se puede ver como existe una tendencia decreciente. La recta de interpolación sigue en este caso la forma:

$$\rho = 1 - 0,11T$$

Observemos que en este caso la pendiente de la recta es de  $-0,11 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , mientras que para el caso en que la frecuencia era de  $f = 1$  kHz esta pendiente era de  $-0,22 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , justo el doble. Por tanto al disminuir la frecuencia a 1 kHz se ha logrado reducir la dependencia del resultado del experimento con la temperatura. Esto puede deberse a que al aumentar la longitud de onda, y hacerla por tanto más cercana a las dimensiones de la cavidad, aumentamos la probabilidad de que se lleguen a formarse modos estables. También es posible que al disminuir la frecuencia de oscilación de las partículas el coeficiente de reflexión de las paredes de cemento sea más estable respecto a las condiciones ambientales.



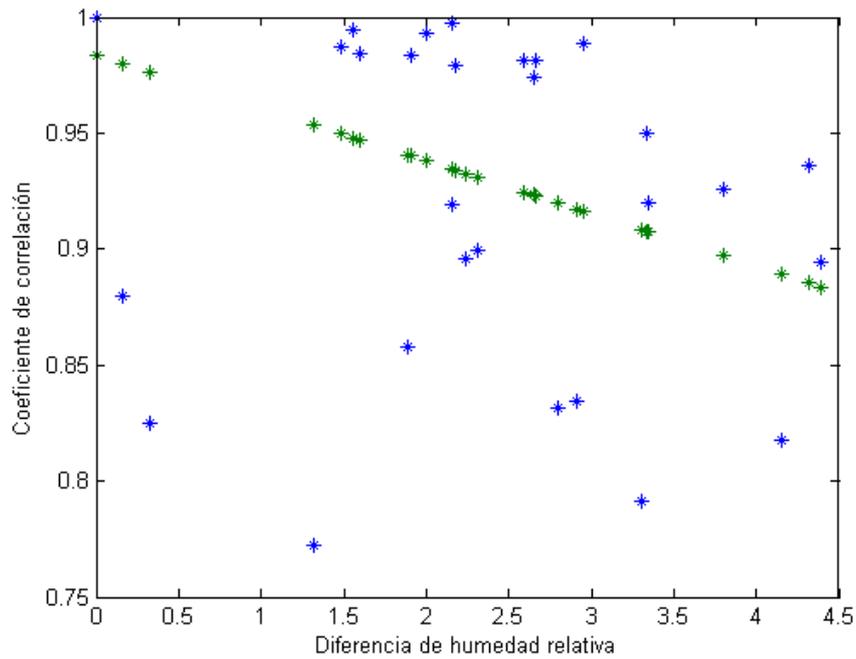
**Figura 4.29.:** Comparación entre diferencias absolutas de temperatura y coeficiente de correlación para  $f=1$  kHz.

A continuación analicemos el efecto de la humedad relativa en los patrones formados en la cavidad. Al igual que se hizo antes, se han contrastado las diferencias absolutas de humedad relativa con los coeficientes de correlación, y se han representado en la figura 4.30 junto con su correspondiente recta de interpolación.

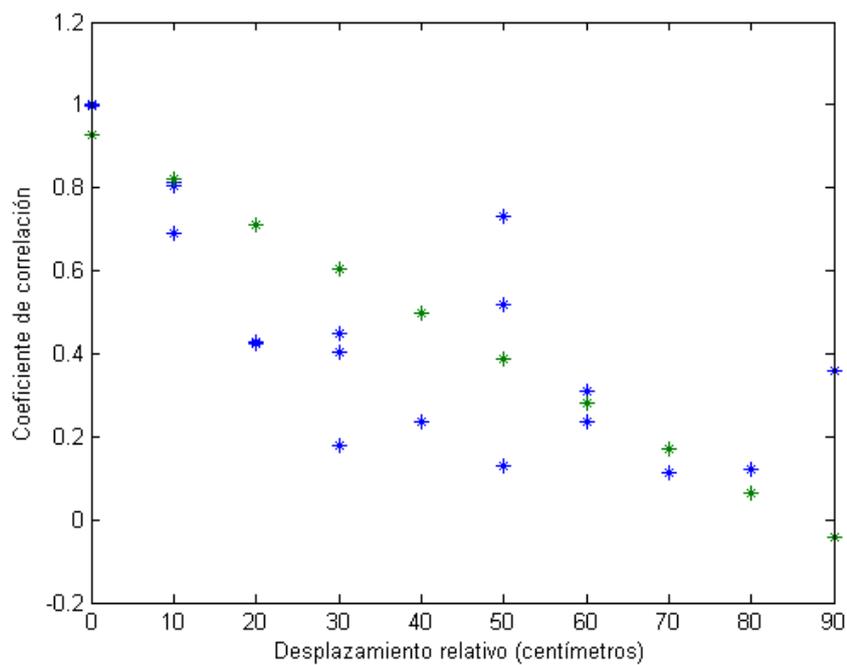
En la gráfica se ve claramente que la dependencia del coeficiente de correlación con la diferencia de humedad relativa es muy vaga, al igual que en el caso de  $f = 5$  kHz.

Para terminar, estudiemos cómo influye el desplazamiento relativo de la fuente en la medida obtenida del interior de la cavidad. En la figura 4.31 se muestra la relación entre el desplazamiento relativo de fuente y el coeficiente de correlación para varias parejas de medidas, siempre que la diferencia de temperatura entre las medidas que componen el par no supere los  $0,05$  °C.

En ella se aprecia una tendencia aproximadamente lineal, aunque no tan marcada como en el caso de  $f = 5$  kHz. La recta que interpola los datos sigue en este caso la expresión:



**Figura 4.30.:** Comparación entre diferencias absolutas de humedad relativa y coeficiente de correlación para  $f=1$  kHz.



**Figura 4.31.:** Comparación entre desplazamiento relativo de fuente y coeficiente de correlación para  $f=1$  kHz.

$$\rho = 0,92 - 0,011d$$

Donde  $d$  es el desplazamiento relativo de fuente tomado en valor absoluto. Observemos que la pendiente de la recta es de  $-0,011 \text{ cm}^{-1}$ , mientras que para  $f = 5 \text{ kHz}$  esta pendiente tenía un valor de  $-0,022 \text{ cm}^{-1}$ . De nuevo, hemos obtenido una pendiente que es exactamente la mitad de la que obtuvimos para una frecuencia de  $5 \text{ kHz}$ . Esto significa que el desplazamiento de fuente induce una variación menor en el patrón de onda formado en la cavidad, con lo cual perdemos capacidad de discriminación. Esto puede deberse tanto a la mayor probabilidad de formación de modos como a que ahora el desplazamiento de fuente es menor respecto a la longitud de onda de trabajo.

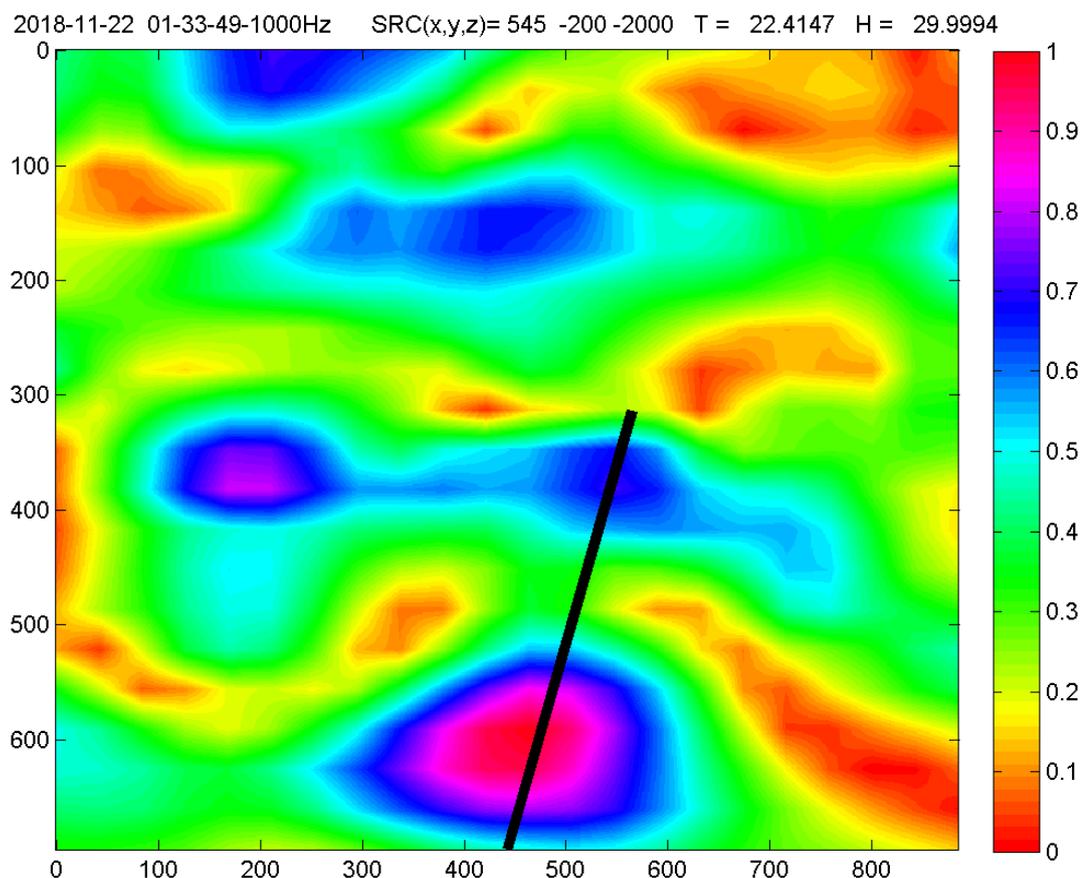
A partir de estos datos, podemos calcular el desplazamiento de fuente que equivaldría a la variación de  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  en términos de coeficiente de correlación. Esto se puede obtener sin más que calcular el cociente entre las pendientes de las dos rectas obtenidas:

$$\frac{0,11}{0,011} = 10 \text{ cm}/^\circ\text{C}$$

Resultado idéntico al obtenido para  $f = 5 \text{ kHz}$ . Parece ser pues que la variación que induce la temperatura es relativamente similar a la inducida por el desplazamiento de fuente, manteniéndose estable esta relación respecto a la frecuencia.

#### **4.6. Variación de la forma de onda debida a la humedad y a la temperatura para baja frecuencia.**

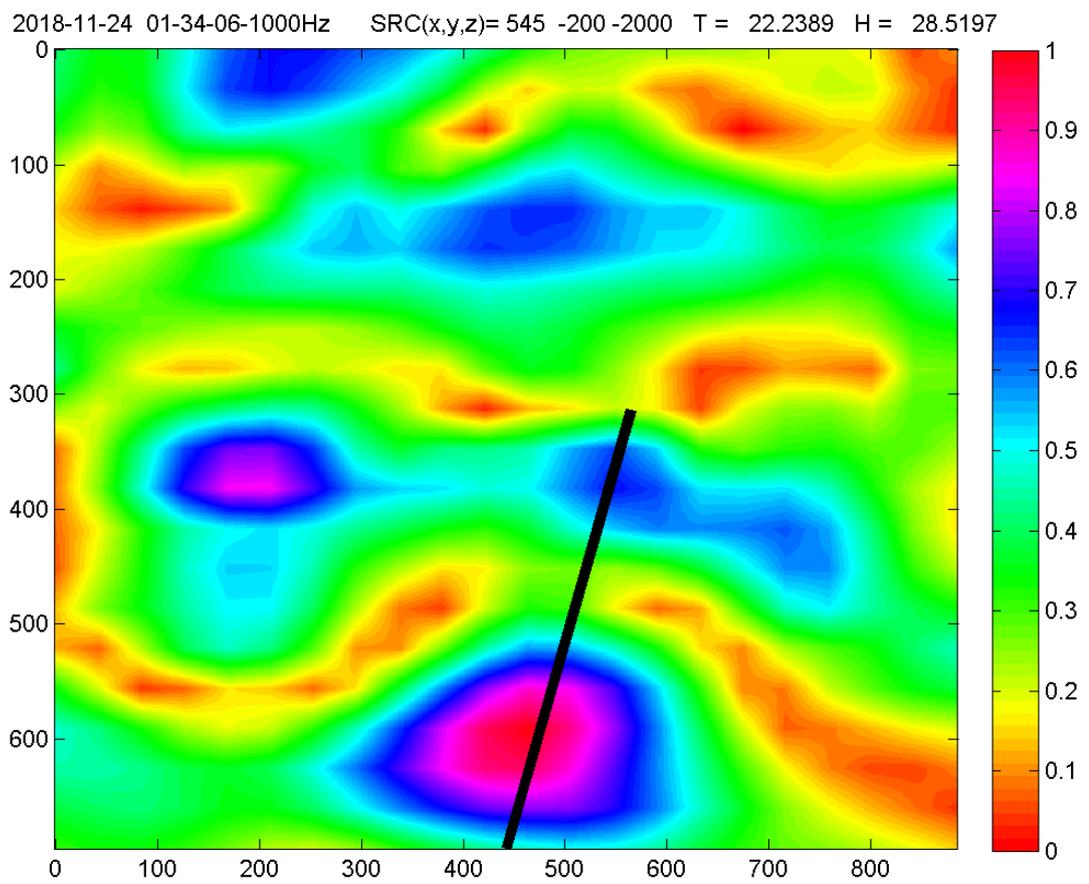
Se mostrarán a continuación, para la frecuencia de  $f = 1 \text{ kHz}$ , los patrones obtenidos del interior de la cavidad para una posición de fuente de  $(x, y, z) = (545, -200, -2000) \text{ mm}$ . Recordamos que el origen de coordenadas se sitúa en la esquina inferior de la pared que contiene la apertura, a mano izquierda según nos asomamos dentro de la cavidad. El eje  $x$  es vertical y el  $z$  indica la profundidad en la cavidad. Por tanto coordenadas con  $z < 0$  están fuera de la cavidad. Cada una de las medidas mostradas fue tomada en una fecha diferente, por lo que existirán variaciones de temperatura. En la parte de arriba de las imágenes aparecen la fecha, la frecuencia que se utilizó para la onda sonora, la posición de la fuente y la temperatura y humedad



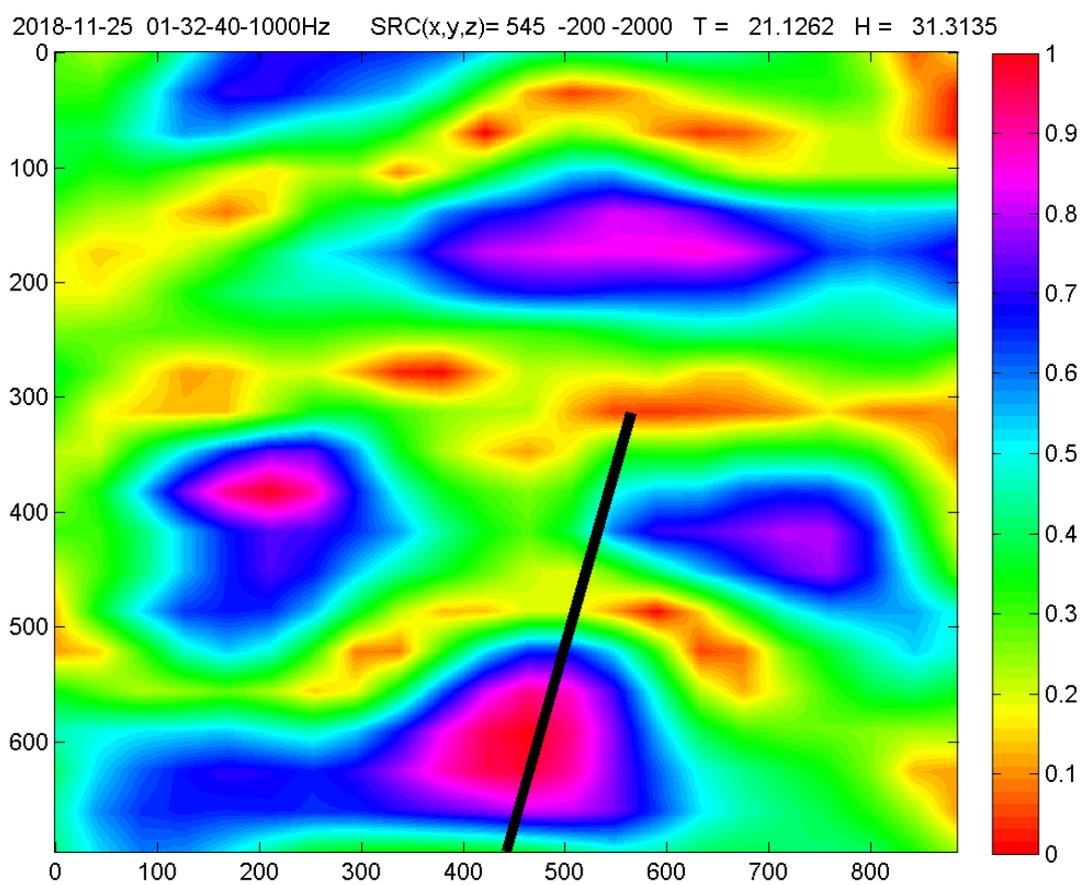
**Figura 4.32.:** Medida 1 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.

medias habidas durante la medición. Además, las imágenes conformadas por las medidas han sido interpoladas por un factor de 5 para así facilitar el reconocimiento visual de las formas de onda. Se muestran en las figuras [4.32](#), [4.33](#), [4.34](#), [4.35](#), [4.36](#), [4.37](#), [4.38](#).

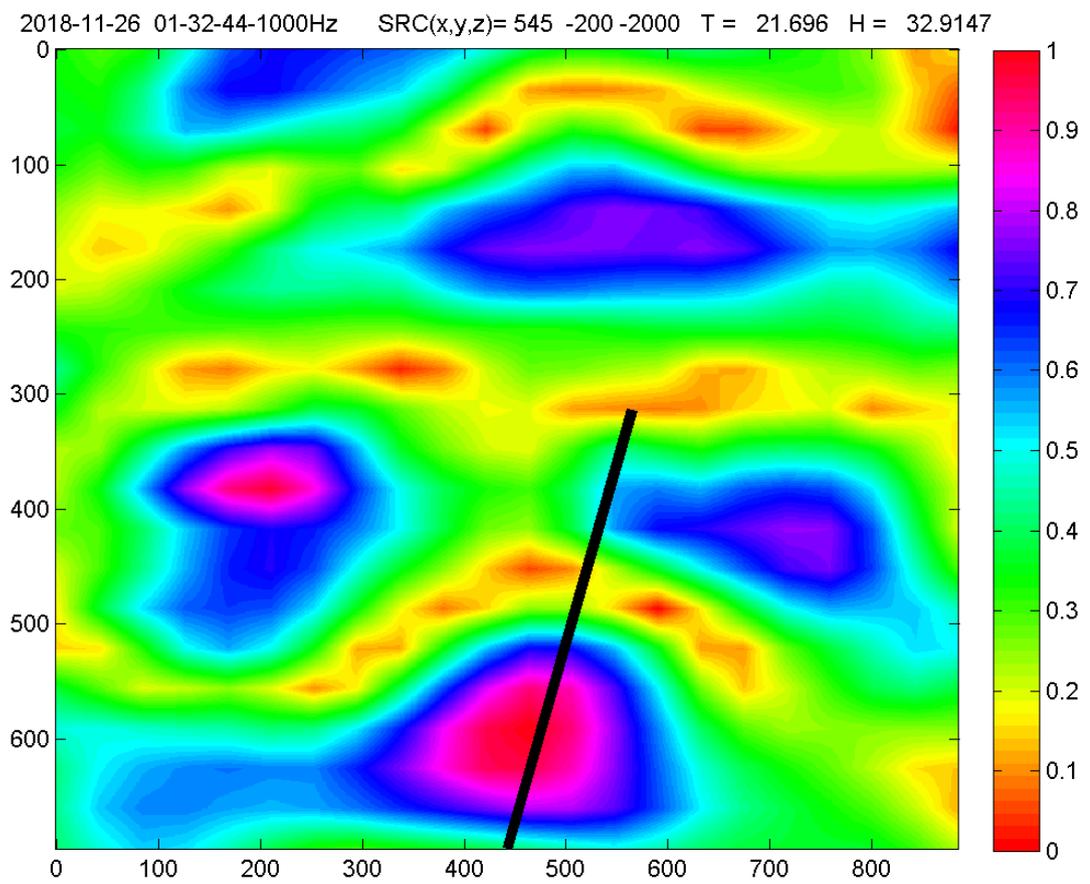
En las imágenes se puede apreciar lo mismo que en el caso anterior: los máximos y los mínimos se mantienen aproximadamente en la misma región a pesar de que su forma o intensidad varíen considerablemente. Esto se puede apreciar más claramente si, al igual que se hizo en la sección [4.4](#), se muestran del mismo color todos los valores de intensidad intermedia. Se ha escogido arbitrariamente fijar el valor de los puntos cuya amplitud original estuviese entre el 15 % y el 50 % del valor máximo. Las imágenes resultado de este tratamiento se muestran en las figuras [4.39](#), [4.40](#), [4.41](#), [4.42](#), [4.43](#), [4.44](#), [4.45](#).



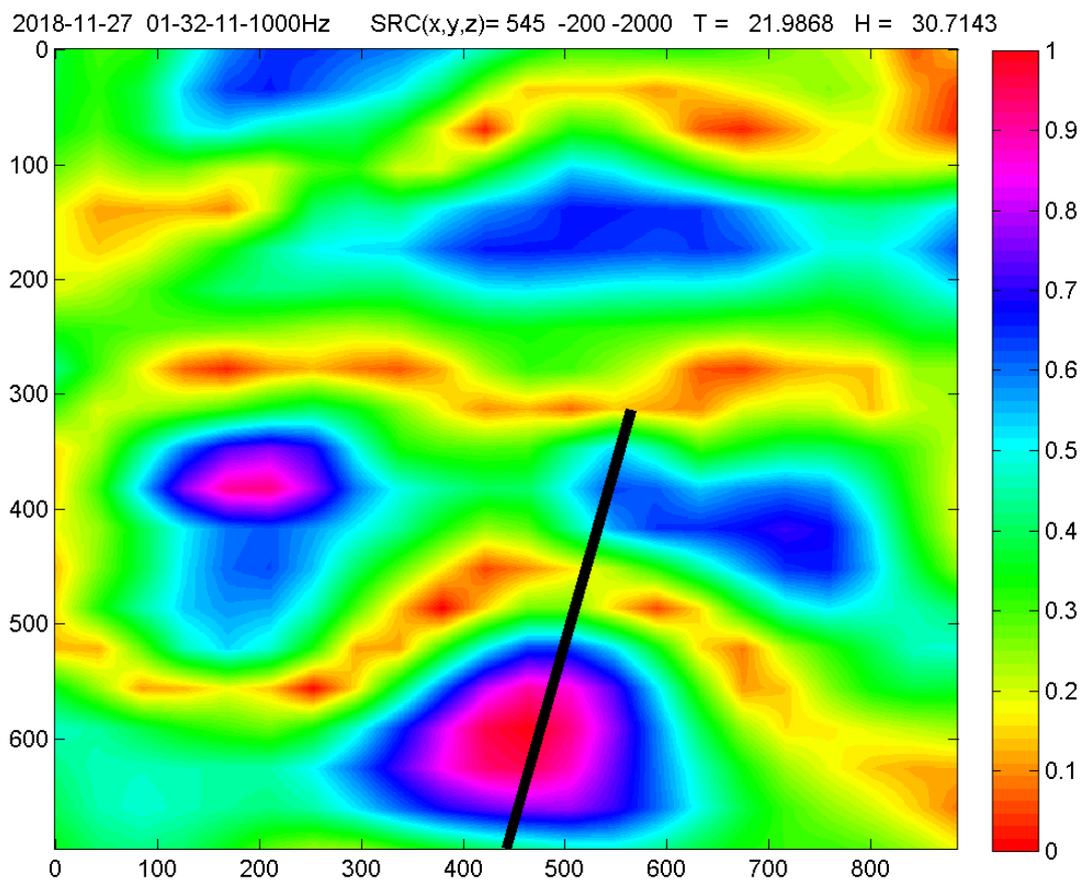
**Figura 4.33.:** Medida 2 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.



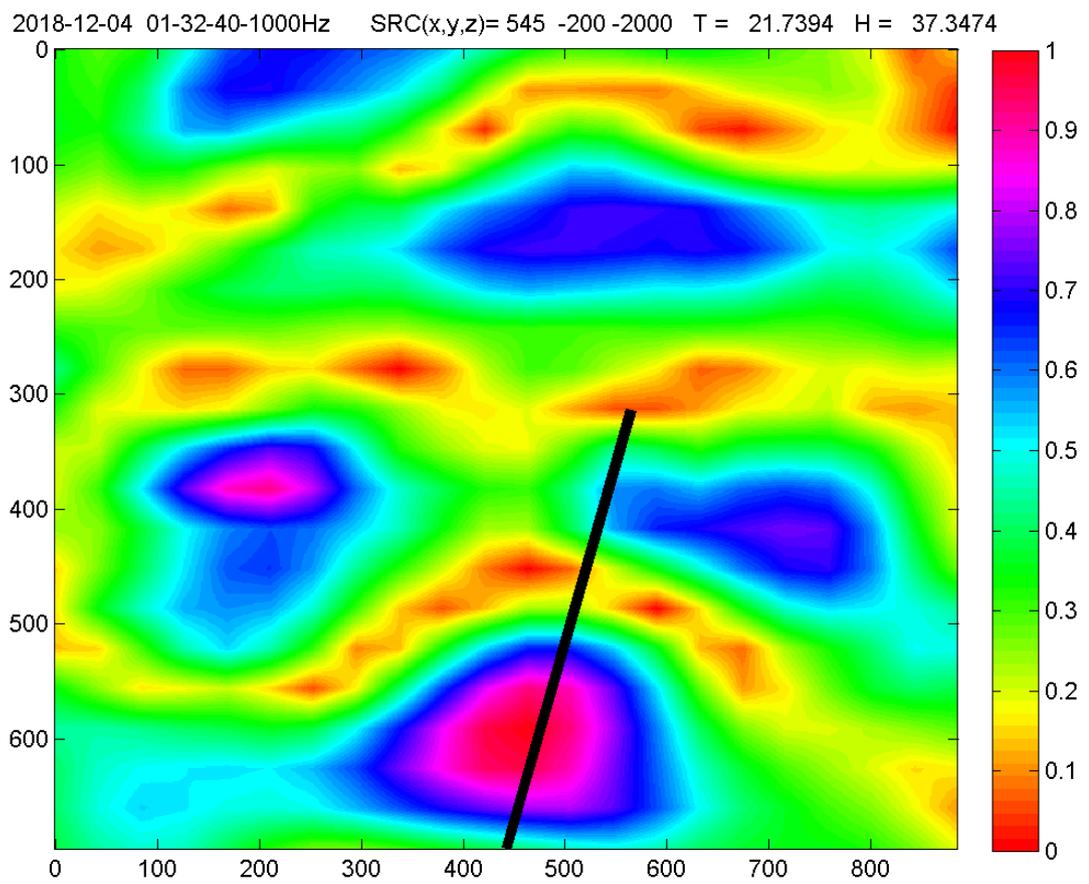
**Figura 4.34.:** Medida 3 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.



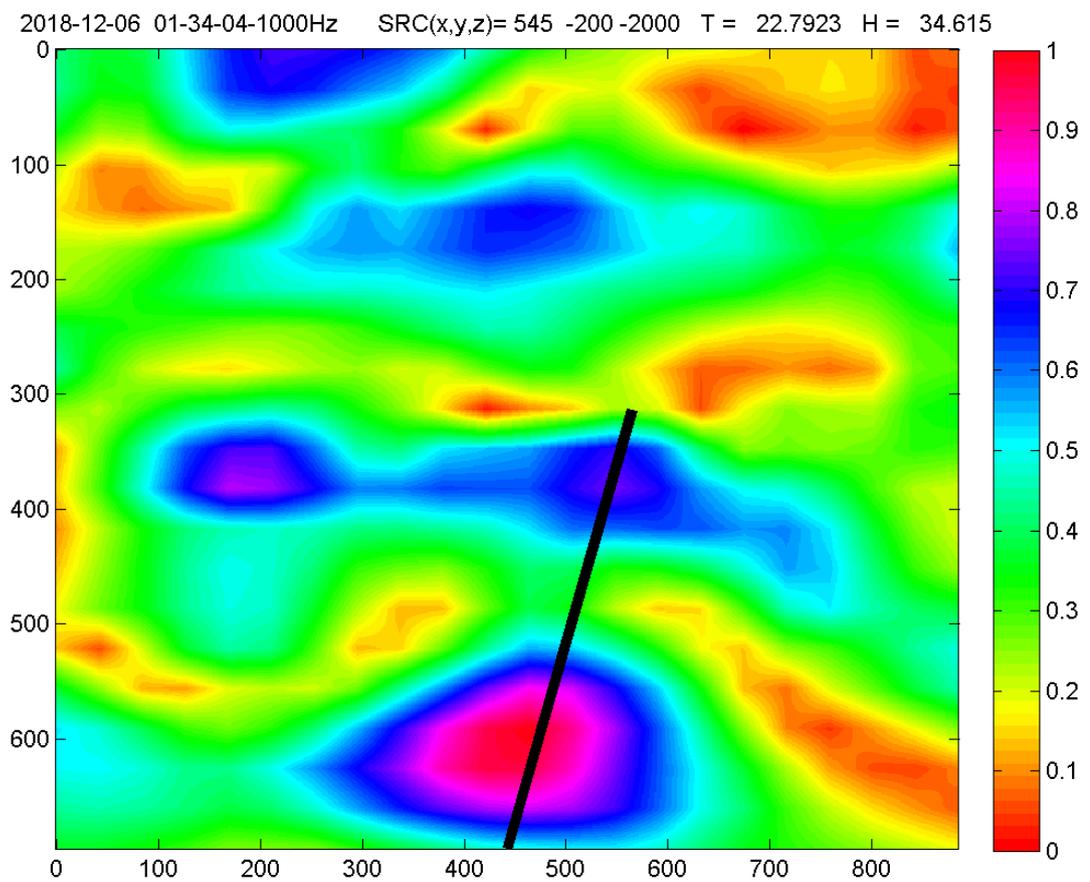
**Figura 4.35.:** Medida 4 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.



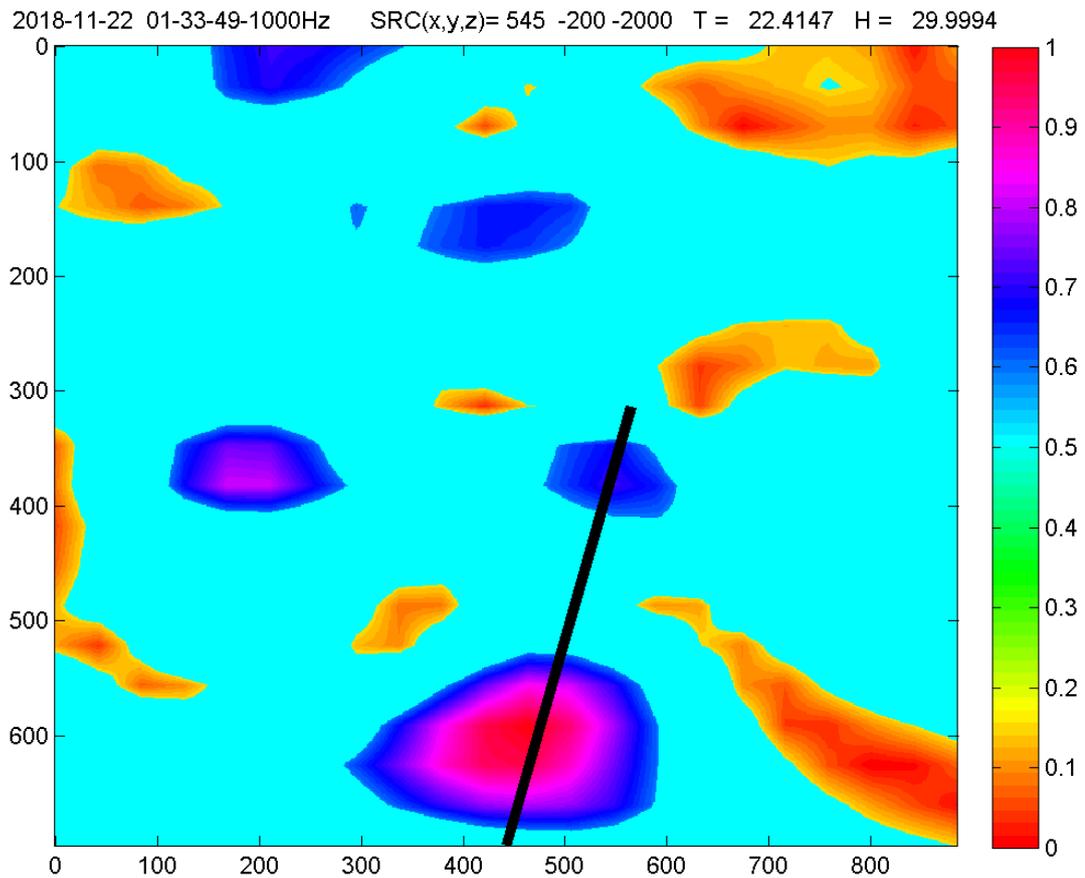
**Figura 4.36.:** Medida 5 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.



**Figura 4.37.:** Medida 6 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.

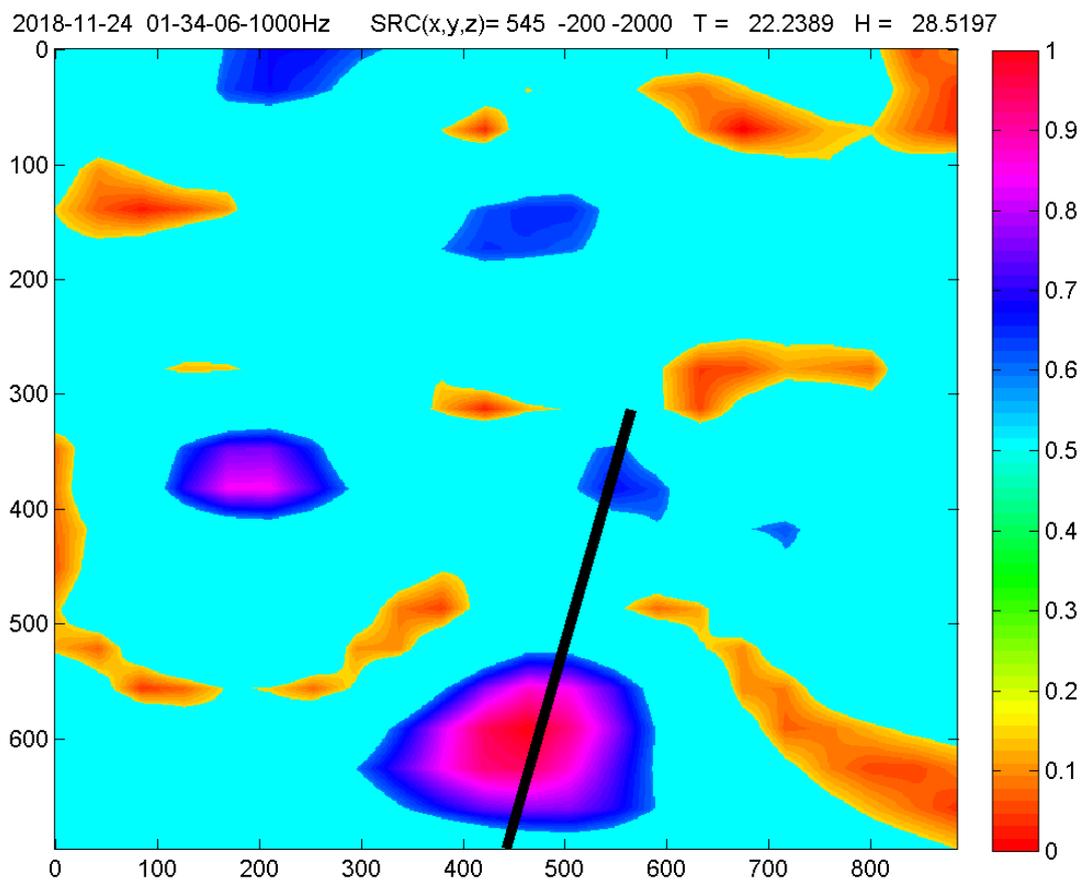


**Figura 4.38.:** Medida 7 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.

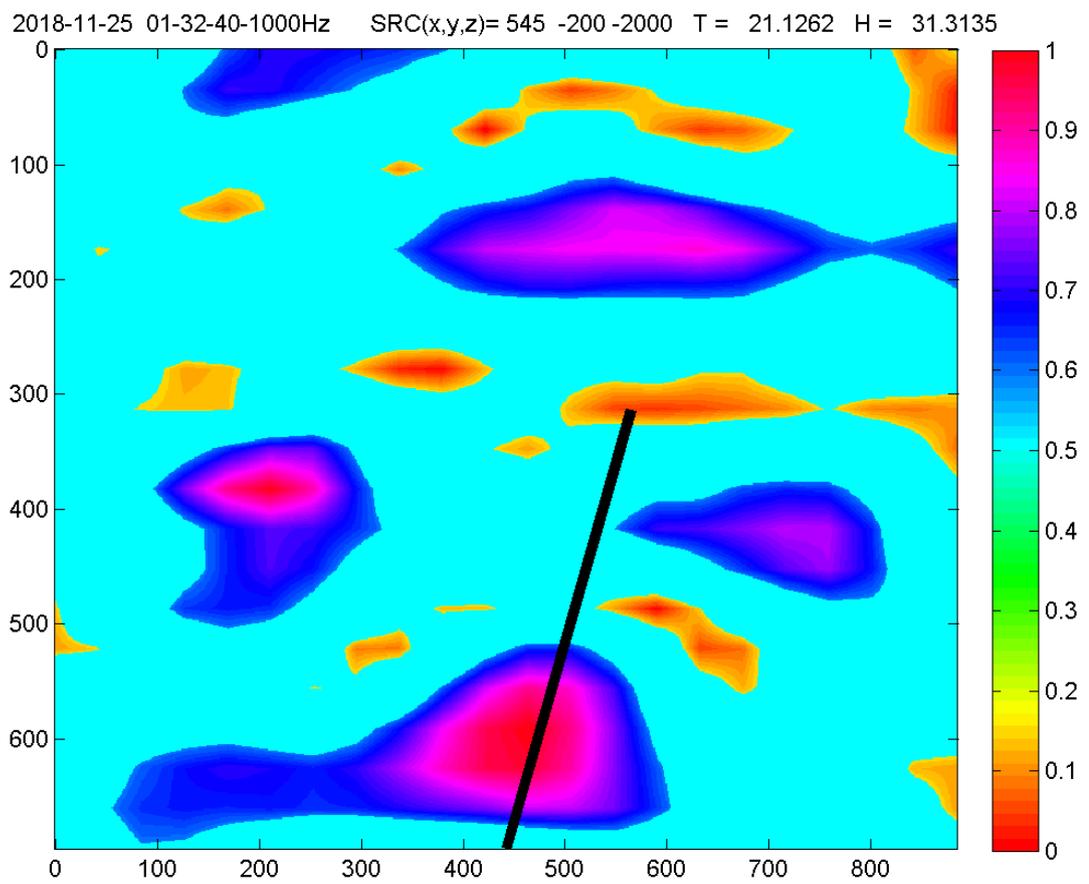


**Figura 4.39.:** Medida 1 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.

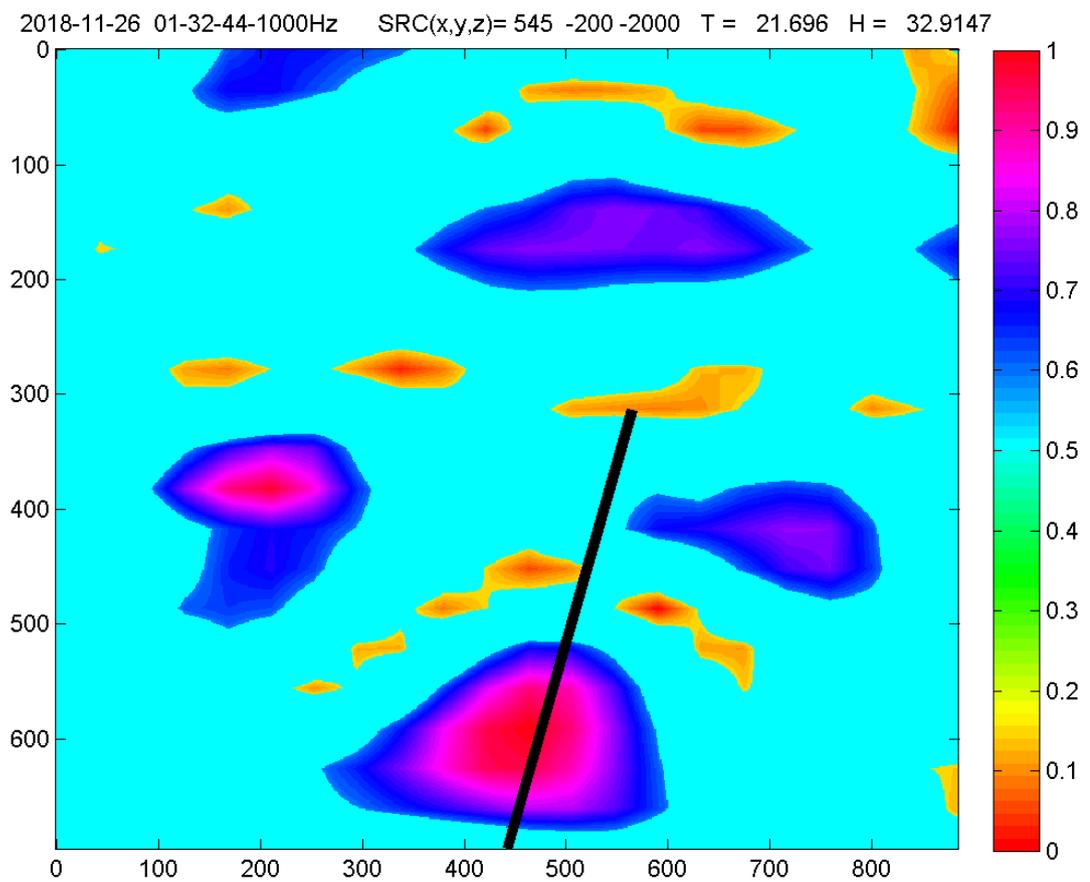
Se puede observar claramente el efecto de la conservación de la ubicación de los máximos en estas imágenes, fijándose en el máximo situado en la parte superior central de las imágenes. Este máximo cambia su tamaño durante las sucesivas mediciones, pero su ubicación permanece fijada en el mismo lugar.



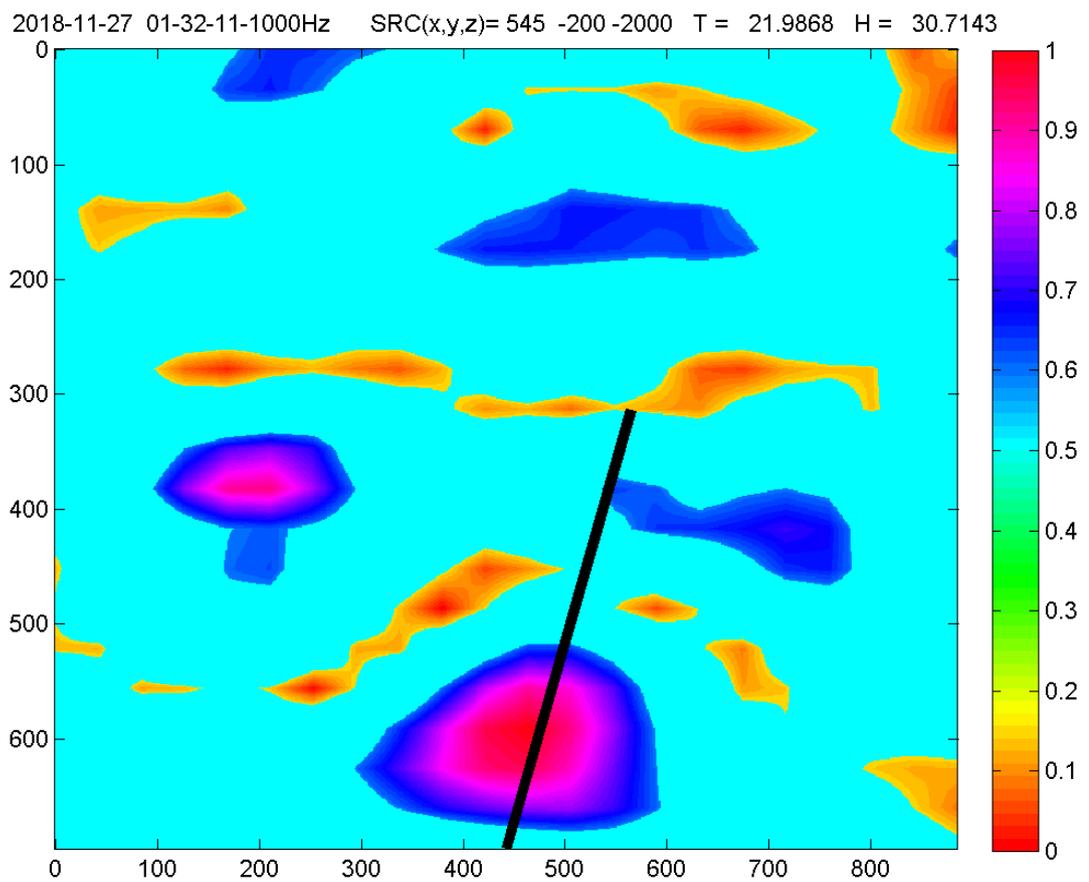
**Figura 4.40.:** Medida 2 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.



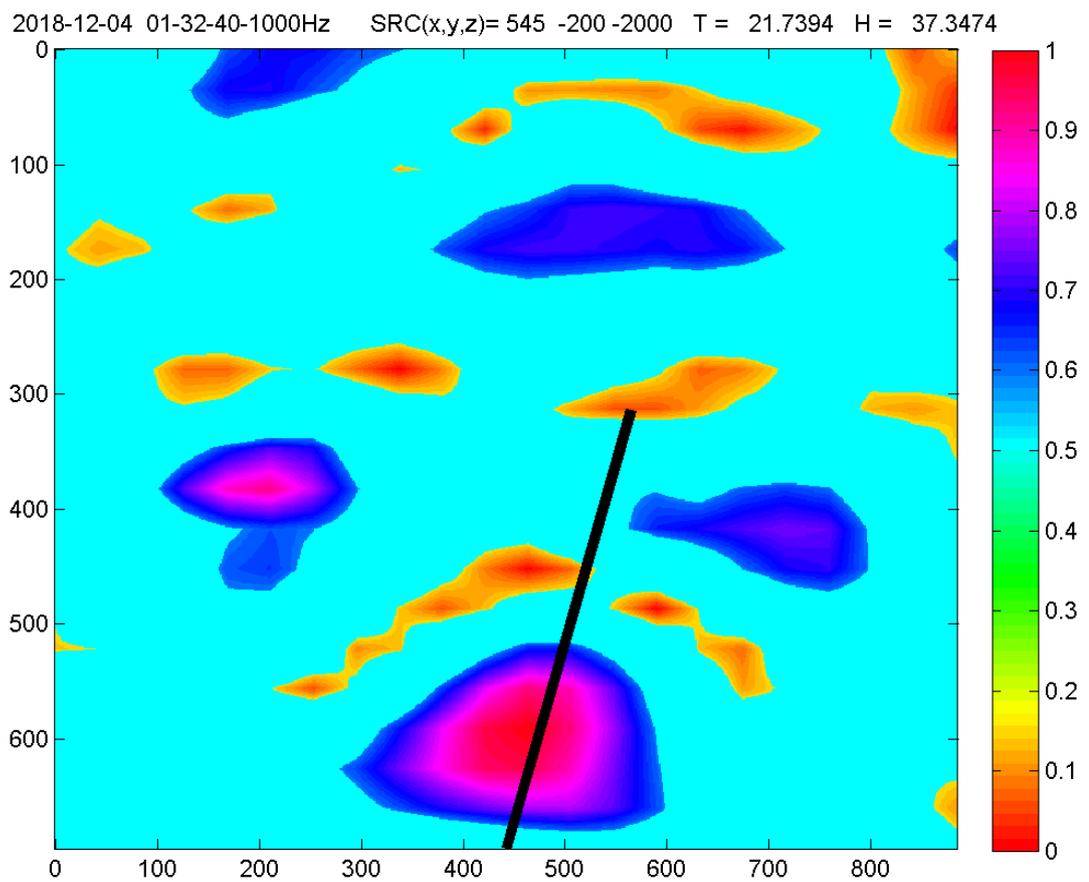
**Figura 4.41.:** Medida 3 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.



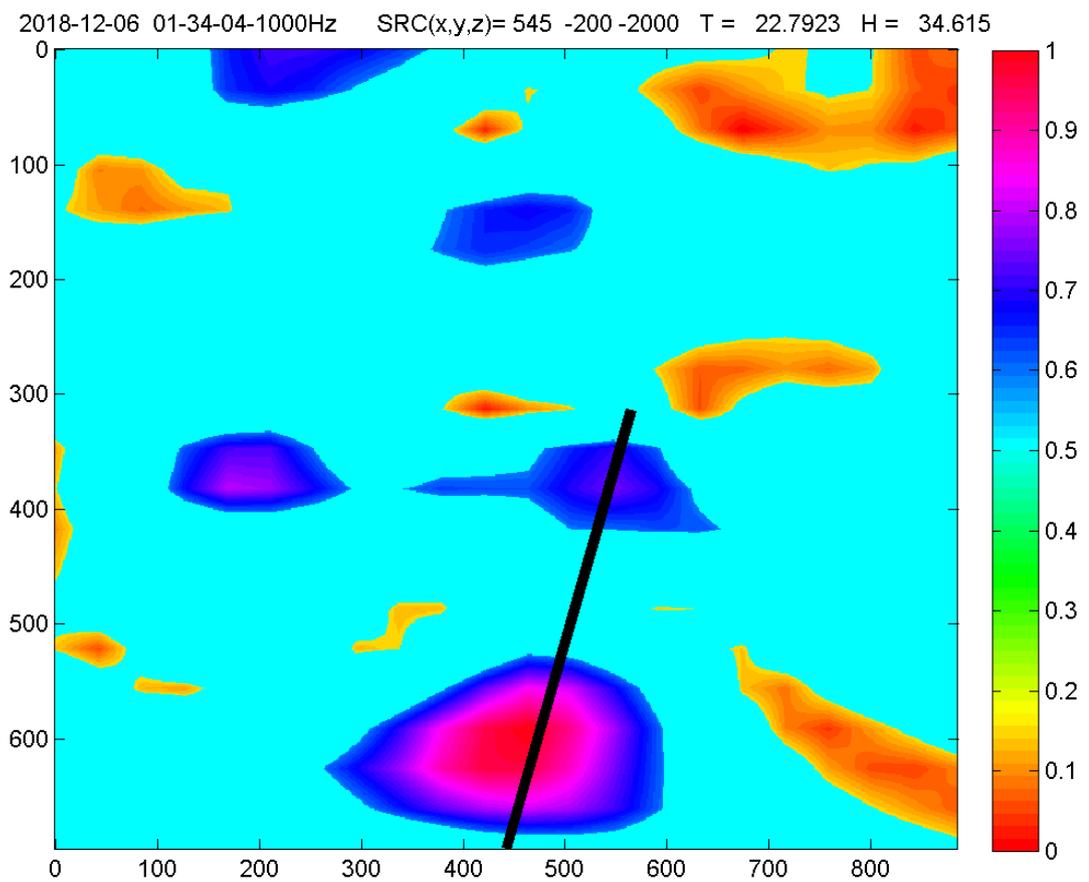
**Figura 4.42.:** Medida 4 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.



**Figura 4.43.:** Medida 5 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.



**Figura 4.44.:** Medida 6 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.



**Figura 4.45.:** Medida 7 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz.

## 4.7. Conclusiones y líneas futuras.

En vista a los resultados mostrados en secciones previas la conclusión directa que se debe sacar es que, a pesar de que algunos máximos y mínimos mantienen estática su posición, las variaciones de temperatura y humedad ensucian enormemente las medidas tomadas. Es posible que gran parte de la responsabilidad de este inconveniente la tenga el micrófono de medida utilizado, pues es un micrófono modesto y puede que su sensibilidad se vea afectada notoriamente por los factores ambientales. En consecuencia, la línea futura más clara a seguir sería sustituir el micrófono por uno de mayor calidad y comprobar si así las variaciones observadas en las medidas desaparecen.

En cualquier caso, una vez se hubiere solventado el obstáculo que suponen los factores ambientales podría avanzarse en el desarrollo de un modelo matemático que explique el fenómeno en su totalidad.



# Apéndice A.

## Anexo: Código de ficheros utilizados

### A.1. Fichero imagenes-patrones.m

```
nombres=dir('./results/2018_10*');
for i=1:length(nombres)

    file=nombres(i).name;
    [M,delimiterOut]=importdata(['./results/',file]);

    fid = fopen(['./results/',file]);
    tline = fgetl(fid);
    pos = regexp(tline,'[+-]\d*[.]\d*|\d*[.]\d*|[+-]\d*|\d*','Match');
    pos=str2double(pos);
    if length(pos)>3
        pos=pos(1:3);
    end
    fclose(fid);

    Mref=10.^(M.data(:,4)/20);
    Msam=10.^(M.data(:,5)/20);
    z=M.data(:,3);
    y=M.data(:,2);
    w=find(z==z(1));
    lim=w(end);
```

```

suma=Msam-Mref;
suma=fliplr(reshape(suma',lim,[]));
y=fliplr(reshape(y',lim,[]));
z=fliplr(reshape(z',lim,[]));

%suma=suma/max(max(abs(suma)));
suma=interp2(suma,3);

% suma=suma-min(min(suma));
% suma=suma/max(max(suma));
% suma(suma<0.75 & suma>0.2)=0.5;

figure(1)
ax=image([0,885],[695,0],suma,'CDataMapping','scaled');
R=400;
theta=angle((442.5-pos(2))-1i*pos(3));
x = [442.5 442.5+R*cos(theta)];
y = [695 695-R*sin(theta)];
pl = line(x,y,'LineWidth',5,'color','black');
colormap hsv;
colorbar;
%caxis([-25 25])
titulo = strrep(file(1:end-4),'-',' ');
titulo = strrep(titulo,'_','-');
titulo=[titulo,' SRC(x,y,z)= ',num2str(pos)];

title(titulo)

imname=strcat('imagenes 2m/',file(1:end-4),'.png');
saveas(ax,imname)
%delete(gca)

end

```

## A.2. Fichero corrTemp.m

```
nombres=dir('./medidas con paso 2 cm/2*');
Pm=zeros(size(nombres));
Tm=zeros(size(nombres));
Hm=zeros(size(nombres));
diasHoras=zeros(size(nombres));
horas=zeros(size(nombres));
longs=zeros(size(nombres));
for i=1:length(nombres)

    file=nombres(i).name;

    [M,delimiterOut]=importdata(['./medidas con paso 2 cm/',file]);

    Mref=10.^(M.data(:,4)/20);
    Msam=10.^(M.data(:,5)/20);
    Tem=M.data(:,6);
    Hum=M.data(:,7);
    PotDif=Msam-Mref;
    longs(i)=length(Hum);

    Pm(i)=mean(PotDif);
    Tm(i)=mean(Tem);
    Hm(i)=mean(Hum);
    diasHoras(i)=str2double(strcat(file(9:10),
                                   ' ',file(12:13),file(15:16),file(18:19)));
    horas(i)=str2double(strcat(file(12:13),' ',
                               file(15:16),file(18:19)));

end

% plot(horas,Pm,'*')
% xlabel('Dias y horas')
```

```

% ylabel('Temperatura promedio')
%
% figure(2)
% plot(horas,Tm,'*')
% xlabel('Horas')
% ylabel('Temperatura promedio')
A=[ones(size(Hm)),Hm,Tm,Tm.*Hm,Hm.*Hm,Tm.*Tm];
c=pinv(A)*Pm;

t=linspace(min(Tm),max(Tm),50);
h=linspace(min(Hm),max(Hm),50);
%[T,H]=meshgrid(t,h);

nlins=30;
H=zeros(nlins,length(nombres));
a=polyfit(Tm,Hm,1);
T= repmat(linspace(28.4,29.8,length(nombres)),[nlins,1]);

for i=1:100
    lm=T(1,i)*a(1)+a(2)+1;
    Lm=T(1,i)*a(1)+a(2)-1;
    H(:,i)=linspace(lm,Lm,nlins)';
end

P=c(1)+c(2)*H+c(3)*T+c(4)*T.*H+c(5)*H.*H+c(6).*T.*T;

surf(T,H,P)
xlabel('temperatura')
ylabel('humedad')
zlabel('potencia')
hold on

C=zeros([size(H),3]);
C(:,:,2)=1;

```

```
for i=1:length(nombres)

    [x,y,z] = cylinder(0.03);
    C=zeros(size(z));
    C(:,:)=0.1;
    surf(x+Tm(i),y+Hm(i),Pm(i)*z,C)
    hold on

end

figure(1)
scatter3(Tm,Hm,Pm,'green','filled')

figure(2)
plot(Tm,Hm,'*')
```

### A.3. Fichero rectaT-H.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import pandas as pd
import os
import re
from scipy import stats
import datetime

patron = re.compile('2018.*5000Hz.csv')
direc=os.getcwd() + '/results'
```

```
fs=os.listdir(direc)

directorio='results/'

pm=[]
mt=[]
mh=[]
fvalidos=[]

for fi in fs:
    if re.match(patron,fi):
        m=0
        ni=datetime.datetime(
            int(fi[0:4]),int(fi[5:7]),int(fi[8:10]),
            hour=int(fi[11:13]),minute=int(fi[14:16])
        )
        dfi=pd.read_csv(directorio+fi,"\t",skiprows=1,encoding='utf-8')
        for fj in fs:
            if re.match(patron,fj):
                nj=datetime.datetime(int(fj[0:4]),int(fj[5:7]),int(fj[8:10]),
                    hour=int(fj[11:13]),minute=int(fj[14:16])
                )
                tdelta=datetime.timedelta(hours=9)
                if abs(ni-nj)<tdelta:
                    dfj=pd.read_csv(directorio+fj,"\t",skiprows=1,encoding='utf-8')
                    pi=dfi["SAMPLING_MIC[dBVrms]"]-dfi["REFERENCE_MIC[dBVrms]"]
                    pj=dfj["SAMPLING_MIC[dBVrms]"]-dfj["REFERENCE_MIC[dBVrms]"]
                    #ks=stats.ks_2samp(pi,pj)
                    #if ks[0] > ks[1]:
                    slope,intercept,r_value,p_value,std_err=stats.linregress(pi, pj)
                    if r_value<=0.98:
                        m=m+1

print(m)
if m<=100:
    fvalidos.append(fi)
```

```
for f in fvalidos:

    df=pd.read_csv(directorio+f,"\t",skiprows=1,encoding='utf-8')
    t=df["TEMPERATURE[°C]"]
    h=df["HUMIDITY[%]"]
    # if(np.mean(h)<31.5 and np.mean(h)>29):
    mt.append(np.mean(t))
    mh.append(np.mean(h))
    sm=df["SAMPLING_MIC[dBVrms]"]-df["REFERENCE_MIC[dBVrms]"]

    pm.append(np.mean(sm))

pm=np.array(pm)
mt=np.array(mt)
mh=np.array(mh)

g=1
x=np.zeros((g+1,1))

A=np.zeros((mt.size,g+1))

for i in range(0,g+1):
    for j in range(mt.size):
        A[j,i]=mt[j]**i

pinvA = np.linalg.pinv(A)
#pm=np.flip(pm,0)

for i in range (0,g+1):
    for j in range (mt.size):
        x[i]=x[i]+pinvA[i,j]*mh[j]
```

```
aj=np.zeros((mt.size,1))

for i in range (mt.size):
    for j in range (0,g+1):
        aj[i]=aj[i]+x[j]*(mt[i]**j)

rectaAnt=81-1.76*mt;
rectaAct=75.5 -2*mt;

plt.plot(mt,mh,'ro',mt,rectaAnt,'bo',mt,rectaAct,'go')
plt.xlabel("Temperatura") # Establece el título del eje x
plt.ylabel("Humedad") # Establece el título del eje y
plt.show()
print(x)
```

#### A.4. Fichero rectaT-Hv2.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import pandas as pd
import os
import re
from scipy import stats
import math

directorio='medidasComprobacionSeptiembre/'

def posFuente(f):
    with open(directorio+f) as csvfile:
        pos = csvfile.readline()
```

```
xyz=np.arange(0,3)
igual=0
cor=0
for i in range(0,3):
    igual=pos.find('=',igual+1)
    cor=pos.find('[',cor+1)
    xyz[i]=math.floor(float(pos[igual+1:cor]))

csvfile.close()
return xyz
```

```
patron = re.compile('2018.*5000Hz.csv')
direc=os.getcwd() + '/medidasComprobacionSeptiembre'
fs=os.listdir(direc)
```

```
pm=[]
mt=[]
mh=[]
fvalidos=[]
```

```
for fi in fs:
    if re.match(patron,fi):
        m=0
        cont=0
        srci=posFuente(fi)
        dfi=pd.read_csv(directorio+fi,"\t",skiprows=1,encoding='utf-8')
        for fj in fs:
            if re.match(patron,fj):
                srcj=posFuente(fj)
                if not (srci-srcj).any():
                    cont=cont+1;
                    dfj=pd.read_csv(directorio+fj,"\t",skiprows=1,encoding='utf-8')
```

```
pi=dfi["SAMPLING_MIC[dBVrms]"]-dfi["REFERENCE_MIC[dBVrms]"]
pj=dfj["SAMPLING_MIC[dBVrms]"]-dfj["REFERENCE_MIC[dBVrms]"]
ks=stats.ks_2samp(pi,pj)
if ks[0] > ks[1]:
#slope,intercept,r_value,p_value,std_err=stats.linregress(pi,pj)
#if r_value<=0.98:
    m=m+1

print(m)
if m<=28:
    fvalidos.append(fi)

for f in fvalidos:

    df=pd.read_csv(directorio+f,"\t",skiprows=1,encoding='utf-8')
    t=df["TEMPERATURE[°C]"]
    h=df["HUMIDITY[%]"]
    mt.append(np.mean(t))
    mh.append(np.mean(h))
    sm=df["SAMPLING_MIC[dBVrms]"]-df["REFERENCE_MIC[dBVrms]"]

    pm.append(np.mean(sm))

pm=np.array(pm)
mt=np.array(mt)
mh=np.array(mh)

g=1
x=np.zeros((g+1,1))

A=np.zeros((mt.size,g+1))
```

```
for i in range(0,g+1):
    for j in range(mt.size):
        A[j,i]=mt[j]**i

pinvA = np.linalg.pinv(A)
#pm=np.flip(pm,0)

for i in range (0,g+1):
    for j in range (mt.size):
        x[i]=x[i]+pinvA[i,j]*mh[j]

aj=np.zeros((mt.size,1))

for i in range (mt.size):
    for j in range (0,g+1):
        aj[i]=aj[i]+x[j]*(mt[i]**j)

rectaAnt=82-1.8*mt;
rectaAct=75.5 -2*mt;

plt.plot(mt,mh,'ro',mt,aj,'bo')
plt.xlabel("Temperatura") # Establece el título del eje x
plt.ylabel("Humedad") # Establece el título del eje y
plt.show()

print(x)
```



# Índice de figuras

3.1. Alzado de la cavidad resonante. . . . .	29
3.2. Perfil derecho de la cavidad resonante . . . . .	29
3.3. Perfil izquierdo de la cavidad resonante. . . . .	30
3.4. Alzado posterior de la cavidad resonante. . . . .	30
3.5. Techo de la cavidad resonante. . . . .	31
3.6. Micrófono interno. . . . .	32
3.7. Red de muestreo interna. . . . .	33
3.8. Generador de señales. . . . .	34
3.9. Bocina . . . . .	34
3.10. Red de muestreo externa. Sirve para desplazar la fuente automáticamente.	36
3.11. Analizador dinámico de señal. . . . .	37
4.1. Distribución de Rayleigh . . . . .	43
4.2. Distribución de Rice . . . . .	44
4.3. Histograma típico para una medida . . . . .	45
4.4. Temperaturas y humedades medias para una colección de medidas tomada durante septiembre de 2018. . . . .	47
4.5. Temperaturas y humedades medias filtradas mediante el test de Kolgomorov- Smirnov comparándolas únicamente con medidas tomadas en la misma noche. . . . .	48

4.6. Temperaturas y humedades medias filtradas mediante el coeficiente de correlación comparándolas únicamente con medidas tomadas en la misma noche. . . . .	49
4.7. Temperaturas y humedades medias filtradas mediante el test de Kolgomorov-Smirnov comparándolas con todas las medidas tomadas desde la misma posición de fuente. . . . .	49
4.8. Temperaturas y humedades medias filtradas mediante el coeficiente de correlación comparándolas con todas las medidas tomadas desde la misma posición de fuente. . . . .	50
4.9. Comparación entre la recta de Humedad-Temperatura obtenida previamente y la obtenida para nuevas medidas tomadas en un ambiente más frío y menos húmedo. Se observa que la segunda es el resultado de desplazar la primera hacia abajo. . . . .	52
4.10. Comparación entre diferencias absolutas de temperatura y coeficiente de correlación. . . . .	53
4.11. Comparación entre diferencias absolutas de humedad relativa y coeficiente de correlación. . . . .	54
4.12. Comparación entre diferencias desplazamiento relativo (en centímetros) y coeficiente de correlación. . . . .	55
4.13. Medida 1 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	57
4.14. Medida 2 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	58
4.15. Medida 3 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	59
4.16. Medida 4 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	60
4.17. Medida 5 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	61
4.18. Medida 6 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	62
4.19. Medida 7 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	63
4.20. Medida 8 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	64
4.21. Medida 1 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	65

4.22. Medida 2 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	66
4.23. Medida 3 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	67
4.24. Medida 4 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	68
4.25. Medida 5 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	69
4.26. Medida 6 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	70
4.27. Medida 7 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	71
4.28. Medida 8 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura.	72
4.29. Comparación entre diferencias absolutas de temperatura y coeficiente de correlación para $f=1$ kHz. . . . .	74
4.30. Comparación entre diferencias absolutas de humedad relativa y coeficiente de correlación para $f=1$ kHz. . . . .	75
4.31. Comparación entre desplazamiento relativo de fuente y coeficiente de correlación para $f=1$ kHz. . . . .	75
4.32. Medida 1 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	77
4.33. Medida 2 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	78
4.34. Medida 3 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	79
4.35. Medida 4 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	80
4.36. Medida 5 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	81
4.37. Medida 6 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	82
4.38. Medida 7 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	83

---

4.39. Medida 1 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	84
4.40. Medida 2 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	85
4.41. Medida 3 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	86
4.42. Medida 4 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	87
4.43. Medida 5 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	88
4.44. Medida 6 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	89
4.45. Medida 7 para analizar los efectos de la humedad y de la temperatura para una frecuencia de 1 kHz. . . . .	90

# Bibliografía

- [AS] Arribas Sánchez, J.I.: *La teoría ondulatoria del sonido*. Transparencias de la asignatura *Fundamentos de sonido e imagen*, del Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación.
- [BC39] Baker, B.B. y E.T. Copson: *Mathematical theory of Huygens' principle*. Oxford, 1939.
- [Goo05] Goodman, J.W.: *Introduction to Fourier Optics*. Stanford, 2005.