



Universidad de Valladolid



PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL:

**Foliaciones de codimensión uno
Newton no degeneradas**

Presentada por Beatriz Molina Samper para optar al
grado de
Doctora por la Universidad de Valladolid

Dirigida por:

Felipe Cano Torres (UVa)
Clementa Alonso González (UA)



Universidad de Valladolid



Impreso 1T

AUTORIZACIÓN DEL DIRECTOR/A DE TESIS

(Art. 7.2 de la Normativa para la presentación y defensa de la Tesis Doctoral en la UVA)

D./D^o: FELIPE CANO TORRES, con D.N.I./Pasaporte 12234226C
Profesor/a del departamento de: ÁLGEBRA, ANÁLISIS MATEMÁTICO, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
Centro: FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
Dirección a efecto de notificaciones: SECRETARÍA DEL DEPARTAMENTO
e-mail: fcano@agt.uva.es
como Director(a) de la Tesis Doctoral titulada: "FOLIACIONES DE CODIMENSIÓN UNO NEWTON NO DEGENERADAS"
realizada por D^o: BEATRIZ MOLINA SAMPER
alumna del Programa de Doctorado EN MATEMÁTICAS.

autoriza su presentación, considerando que: SE HAN CUMPLIDO LOS REQUISITOS, UN ARTÍCULO EN UNA REVISTA DE IMPACTO, Y EN MI OPINIÓN, LA DOCTORANDO HA ADQUIRIDO EL NIVEL DE LA FORMACIÓN EXIGIBLE A UN DOCTOR EN MATEMÁTICAS POR LA UVA, ASÍ COMO HA CONTRIBUIDO CON RESULTADOS IMPORTANTES Y ORIGINALES A LAS MATEMÁTICAS, EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE FOLIACIONES HOLOMORFAS.

Valladolid, 10 de JUNIO de 2019

El/La Director/a de la Tesis,

Fdo.: FELIPE CANO TORRES

SR/SRA. PRESIDENTE/A DE LA COMISIÓN DE DOCTORADO



Secretaría Administrativa. Escuela de Doctorado. Casa del Estudiante. C/ Real de Burgos s/n. 47011-Valladolid. ESPAÑA
Tfno.: + 34 983 184343; + 34 983 423908; + 34 983 186471 - Fax 983 186397 - E-mail: negociado.escola.doctorado@uva.es



Universidad de Valladolid



Impreso 1T

AUTORIZACIÓN DEL DIRECTOR/A DE TESIS

(Art. 7.2 de la Normativa para la presentación y defensa de la Tesis Doctoral en la UVa)

D./D^a Clementa Alonso González, con D.N.I./Pasaporte 09346811W
Profesor/a del departamento de Matemáticas
Centro Facultad de Ciencias, Universidad de Alicante
Dirección a efecto de notificaciones Facultad de Ciencias, Universidad de Alicante 03690 San
Vicent del Raspeig, Alicante
e-mail clementa.alonso@ua.es
como Director(a) de la Tesis Doctoral titulada Foliaciones de codimensión uno Newton no
degeneradas
realizada por D./D^a Beatriz Molina Samper
alumno/a del Programa de Doctorado en Matemáticas

autoriza su presentación, considerando que Reúne los requisitos de originalidad, interés científico, corrección formal y conocimiento del tema necesarios para la defensa de una tesis doctoral en Matemáticas

Valladolid 6 de junio de 2019

El/La Director/a de la Tesis,

Fdo.:

SR/SRA. PRESIDENTE/A DE LA COMISIÓN DE DOCTORADO



Secretaría Administrativa. Escuela de Doctorado. Casa del Estudiante. C/ Real de Burgos s/n. 47011-Valladolid. ESPAÑA
Tfno.: + 34 983 184343; + 34 983 423908; + 34 983 186471 - Fax 983 186397 - E-mail: negociado.escola.doctorado@uva.es

Agradecimientos

Todos aquellos que me conocéis sabéis que la expresión de los sentimientos más profundos no es algo que me caracterice. No obstante, tras estos cuatro años (o veintiocho en algún caso), creo que es momento y ocasión de emplear unas líneas para expresar mi más sincero agradecimiento a todos aquellos que, de un modo u otro, me habéis acompañado en esta etapa. El desarrollo de esta tesis no lo puedo catalogar como algo fácil, y desde luego un pedacito de ella es de cada uno de vosotros.

En primer lugar, quiero mencionar a las instituciones de este país por la labor que realizan en la formación de jóvenes investigadores; deseo de todo corazón que algún día se nos permita devolver toda la confianza que éstas han depositado en nosotros. En particular, quiero expresar mi agradecimiento a aquellas que han financiado esta investigación: El Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte mediante la ayuda predoctoral FPU14/025653, el Ministerio de Economía y Competitividad mediante el proyecto MTM2016-77642-C2-1-P y la Universidad de Valladolid a través de las ayudas para asistencia a cursos, congresos y jornadas relevantes para el desarrollo de tesis doctorales (convocatorias 2017 a 2019). Todo esto, junto con el soporte recibido por algunas instituciones extranjeras en lugares como México, Brasil, Rusia, Italia, Francia o Alemania, me ha permitido aprender de matemáticos muy reconocidos a nivel internacional.

No puedo dejar de mencionar a los integrantes del grupo de investigación ECSING: José Manuel, Fernando, José, Jorge, Nuria, Lorena, Javier, Laura, Mark,... Vosotros me habéis acogido desde el primer momento como una más del equipo, y sois más que compañeros de trabajo, amigos. Gracias por todo lo aprendido con vosotros, pues sois unos matemáticos excelentes, pero sobre todo, gracias por vuestra calidad humana.

A las que comenzasteis siendo solamente compañeras de carrera y rápidamente os convertisteis en las mejores amigas que alguien pueda tener: Pily, Rocío, María Pilar y Ana. Gracias por continuar ahí, por seguir viéndonos siempre que la ocasión lo permite y por no tener demasiado en cuenta mis momentos de desapego. En los cinco años que pasé en la Universidad de Alicante pude descubrir mi pasión por las matemáticas, pero sin duda lo mejor que me pudo ocurrir fue cruzarme con vosotras.

Qué decir de los que habéis sido mi pequeña gran familia pucelana... Creo que no tengo palabras para expresar lo que ha sido compartir mi vida con vosotros, ni lo que os echo de menos; el mero hecho de haberos conocido es suficiente para que haber llegado hasta aquí merezca la pena. Ir de tapas, salir por cantarranas, los millones de risas y las infinitas horas de cervezas en el peni son sólo una pequeña parte de los recuerdos que construimos juntos. Azucena, gracias por los dos años que coincidimos en Valladolid, por ser una compañera de piso intachable y mejor amiga. Marina, gracias por estar ahí siempre, sin excepción, eres la definición perfecta de la palabra amistad. No me olvido del pack Oziel-Jesús (aunque ya habéis cobrado entidad propia), gracias por ser mis hermanitos pequeños, con vosotros he compartido lloros, alegrías, desesperación, frustración, satisfacción, pánico, es decir, todo aquello en lo que se puede resumir una tesis. Oso, a ti gracias simplemente por ser tú y por enseñarme que hay hilos que se pueden estirar sin romperse y cruzar océanos. Miguel, mi hermano mayor, gracias por todos los consejos que me has dado a lo largo de estos años, por ir siempre un paso por delante. Javi, gracias por contagiarnos un poco de tu locura, tan necesaria para sobrevivir en este mundo. Sergio, Mari Ángeles, Hernán, Rodrigo, Lucio, gracias también a vosotros por formar parte de esta historia.

Siempre se habla de que hay profesores que dejan huella, que ayudan a marcar el camino profesional; en mi caso ésta eres tú, Clemen. Recuerdo la pasión por las matemáticas que me contagiaste en tus clases, por primera vez conocía a alguien que las miraba con el alma y que además tenía la capacidad de transmitir la belleza que encierran. A mí, por mí misma, jamás se me hubiese pasado por la cabeza ir a vivir a la fría meseta castellana, así que gracias por meter en mi cabeza el runrún de venir a estudiar a Valladolid. Gracias también por encontrar siempre tiempo para hablar de matemáticas y por aconsejarme, tanto en el terreno profesional como en el personal.

Cuando comencé el doctorado yo no era consciente de que estaba teniendo el privilegio de trabajar con uno de los mejores matemáticos de este país. Felipe, me honra que hayas sido director de esta tesis y que hayas trabajado conmigo codo con codo. Gracias por cómo te has volcado en este proyecto, por la confianza depositada en él y en mí, por tu generosidad, paciencia y dedicación, y cómo no, por no tomar en consideración mi mal genio, mis cambios de humor y mis malos momentos. Aunque más que mi director de tesis eres un amigo inestimable, contigo he podido intercambiar conversaciones e inquietudes de todos los ámbitos de la vida, y deseo profundamente seguir haciéndolo siempre.

Finalment i de forma més especial a vosaltres, la meua família, gràcies per mantindre la il·lusió per aquest projecte intacta, pel vostre recolzament diari, constant i incondicional, per escoltar-me i aconsellar-me fins i tot sense saber ben bé com funciona aquest món de les matemàtiques, per acceptar-me i voler-me així tal com sóc i per cuidar de mi sempre. Tia i tio, Asunció i Vicente, gràcies per l'entusiasme amb el qual viviu aquest moment tan important per a mi. Papa i mama, Pepe i Ángela, em sent molt orgullosa de vosaltres, perquè us dec la vida, aplegar fins on he aplegat i ser qui sóc i qualsevol agraïment sempre serà escàs. Gràcies per ensenyar-me a perseguir els somnis i per recordar-me sempre que mai s'ha de deixar de somiar. Tete, Fran, gràcies per ser sempre un referent per a la vida, perquè mai oblidaré que tú em vas donar l'espentó necessari per a començar esta carrera. I a la meua nebodeta, Carmen, gràcies per vindre al món amb una força i ganes de viure increïbles, eixes que moltes vegades els adults oblidem que tenim. Encara que no ho dic molt, ja sabeu que us estime.

Índice general

English Introduction	1
Introducción	9
1. Preliminares	17
1.1. Haces de \mathcal{A} -módulos	17
1.2. Geometría analítica compleja	20
1.3. Foliaciones holomorfas singulares	23
1.4. Morfismos de explosión en \mathbb{C}^n	24
1.5. Singularidades presimples y simples en \mathbb{C}^2	25
1.6. Espacios foliados	26
1.7. Puntos presimples y vectores residuales	30
1.8. Puntos Simples. Marco hiperbólico-complejo.	32
1.9. Foliaciones dicríticas	36
1.10. Reducción y pre-reducción de singularidades	37
1.11. Foliaciones de tipo tórico	38
1.12. Superficies tóricas. Foliaciones en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$	39
1.13. Ramas invariantes aisladas	41
2. Sistemas de poliedros. Reducción combinatoria de singularidades	43
2.1. Tejido soporte	43
2.2. Sistemas de poliedros	45
2.3. Reducción de Singularidades	48
2.4. Caso Hironaka casi-ordinario	50
2.5. Sistemas de poliedros especiales	50
2.6. Sistemas de poliedros generales	53
2.7. Ejemplos	54
2.7.1. Sistema de poliedros asociado a una hipersuperficie	55
2.7.2. Sistema de poliedros asociado a un espacio foliado	58
2.7.3. Otros ejemplos	60
3. Graduaciones y formas iniciales pesadas	61
3.1. Vectores de pesos	61
3.2. Módulos ρ -graduados de r -formas diferenciales	62
3.3. La ρ -forma inicial de una foliación	70
3.4. Producto y diferencial exteriores	72
4. Foliaciones Newton no degeneradas	75
4.1. Ceros de uno-formas diferenciales pesadas	75
4.2. Espacios foliados Newton no degenerados	78
4.3. Teorema de equivalencia	79
4.4. Ejemplos	84

5. Globalización de ramas aisladas de foliaciones no degeneradas	87
5.1. Foliaciones no degeneradas en el plano proyectivo	87
5.2. Naturaleza global de las ramas invariantes aisladas	89
5.3. Existencia de ramas invariantes aisladas	91
5.4. Integrales primeras racionales y curvas invariantes	92
6. Existencia de superficie invariante para foliaciones torificables	95
6.1. Superficies invariantes y separatrices parciales extendidas	95
6.2. Búsqueda de singularidades traza.	99
6.3. Prolongación de ramas aisladas en foliaciones de tipo tórico	100
Conclusiones y trabajo futuro	101
Conclusions and future work	107
Anexos	113
Anexo I: Combinatorial Aspects of Classical Resolution of Singularities	113
Anexo II: Global Invariant Branches of Non-degenerate Foliations on Toric Projective Surfaces	133
Anexo III: Invariant Surfaces for Toric Type Foliations in Dimension Three	159
Bibliografía	175
Lista de figuras	179

English Introduction

It was Paul Painlevé who, at the end of the 19th century, saw the need to create a geometric theory in order to understand better the problems in the study of solutions of holomorphic differential equations. This point of view began with the works of Henri Poincaré and Ivar Otto Bendixson and took its own entity as “theory of foliations” with the work of Charles Ehresmann and Georges Reeb in the 1940s. A foliation always appears as the family of solutions of some system of differential equations and to study the behavior of the foliation is to study the global behavior of the solutions of this system.

From the local point of view, foliations always offer the same picture, the one of a foliated chart, with plaques that will be extended later on the leaves. Complexity appears when there are considered global situations, or singular points, also called equilibrium points in the case of vector fields. In fact the geometric complexity of the leaves around a singular point is compared to the global situation, representing the singularity a “zone of the infinity inaccessible by the dynamic system”. Singularities are nevertheless conditioned to the fact that we consider holomorphic differential equations themselves. Specifically, a foliation of codimension one is represented by the equation $\omega = 0$, where ω is a holomorphic one-form satisfying the integrability condition of Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$; the singular points are those where ω is zero. In the 80's the study of the singularities of holomorphic foliations was accelerated, starting from the foundational works of Robert Moussu, Jean-Pierre Ramis, Jean Martinet, Bernard Malgrange, Jean-François Mattei, Dominique Cerveau and others, study that has continued to the present, in some aspects in parallel to the theory of singularities of varieties. This is the framework in which this thesis is framed.

One of the ways of dealing with the study of holomorphic singular foliations is to look for a model with “simpler” singularities, coinciding with the original outside its singular points; this is, to achieve a reduction of singularities by means of a finite sequence of blowing-ups, in the same spirit as the resolution of singularities of varieties. The problem of reduction of singularities for holomorphic foliations of codimension one was solved by Abraham Seidenberg in 1968, for the case of dimension two, in his well-known article [40]. In ambient dimension three there is a positive answer firstly, for the non-dicritical case in the article [11] of Felipe Cano and Dominique Cerveau in 1992 and later, in 2004, for the general three-dimensional case in the article [10] of F. Cano. However, this remains being an open problem in higher dimension, although some very substantial progress has been made in the direction of local uniformization in the preprint [13] of F. Cano and Miguel Fernández-Duque. This point of view of the reduction of singularities is the one that we adopt in this work.

The main topic of my research, presented in this document in order to obtain a “PhD degree in Mathematics by the University of Valladolid”, is the study of “Newton non-degenerate codimension one foliations”.

The non-degenerate singularities for hypersurfaces have been described classically by A. Kouchnirenko in [35]; let us give a quick description of them. We consider a germ of hypersurface in $(\mathbb{C}^n, 0)$, defined locally by a reduced equation $f = 0$ in local coordinates $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. We take the Taylor's expansion of f , we consider the convex hull of the $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ such that $\lambda_\sigma \neq 0$ and we add to it the first orthant $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. In this way it is obtained the Newton polyhedron

of f . We consider its compact boundary Δ and we say that a singularity is “non-degenerate” if the coefficients are “generic” in a sense that we will define later. This class of singularities is open and dense in the space of coefficients when Δ is fixed. Also M. Oka does a study in [36] of the non-degenerate singularities for the case of complete intersections.

Taking a logarithmic point of view, we can define a Newton polyhedron associated to a germ of differential form or vector field, once we fix a system of coordinates. From a more geometrical approach, the fact of considering a normal crossings divisor in the ambient space determines the coordinates we are going to consider. On this way, we can define not just a single polyhedron, but a whole polyhedra system, each one associated to one of the strata naturally given by the divisor as we will see in Chapter 2.

A foliated space consists of a codimension one foliation \mathcal{F} in a complex analytic space M , together with a normal crossings divisor $E \subset M$. Most of the definitions, properties and results we present in this work concerns the foliated space (M, E, \mathcal{F}) and not just to the foliation \mathcal{F} . In the general theory established in Chapter 4, we introduce the concept of “Newton non-degenerate foliated space” which, of course, coincides with the classical one for germs of hypersurfaces, when we consider germs of foliations having a holomorphic first integral. On the other hand, once we have a normal crossings divisor in the ambient space, we can talk about “combinatorial blowing-ups”. They are blowing-ups centered at the closure of one of the strata determined by the divisor. We extend the definition introduced by M.I.T. Camacho and F. Cano in [9] and we say that a codimension one foliation is of “toric type” if we obtain only “simple points” after a combinatorial sequence of blowing-ups, that is, if it has a “combinatorial desingularization”. When we ask to reach only “presimple points”, we say that the foliation is of “weak toric type”.

One result that we prove in this work is the “equivalence theorem” which says that Newton non-degenerate foliations are exactly those that are of weak toric type, under the hypothesis that the foliations has not saddle-nodes, that is, it is complex hyperbolic.

Let us mention that the class of Newton non-degenerate foliations contains dicritical foliations, that is, after a finite sequence of blowing-ups performed in invariant centers, we can find components of the exceptional divisor generically transversal. This fact opens in a natural way the question if these foliations admit invariant hypersurface. The existence of invariant hypersurface is a general problem proposed by René Thom, whose solution is positive in the non-dicritical case (results of C. Camacho, P. Sad, D. Cerveau, F. Cano and J.F. Mattei), and negative in the general dicritical situations. For this reason it is interesting to detect families of dicritical foliations in which the existence of invariant hypersurface is assured.

On this line, another of the theorems that we present in the document assures the existence of an invariant surface for toric type foliations in dimension three. In order to establish it, we have needed a deep study of Newton non-degenerate foliations defined on projective surfaces with toric structure. In this context we present a collection of results that classify these foliations and, in particular, highlight the fundamental property of prolongation of isolated invariant curves for Newton non-degenerate foliations on toric surfaces.

The content of the chapters that make up this thesis is set out below, with express mention of the most outstanding results obtained.

Chapter 1. Preliminaries Here we recall and introduce basic concepts concerning the general theory of codimension one holomorphic singular foliations. An ambient space $\mathcal{M} = (M, E)$ consists of a nonsingular complex analytic space M accompanied by a normal crossings divisor E . The local coordinate systems $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ are always taken adapted to E , that is, satisfying the property $E \subset (x_1 x_2 \cdots x_n = 0)$. Given a foliation \mathcal{F} on M , we consider local generators with a logarithmic writing with respect to the divisor, which we will write in local coordinates adapted to $E = (\prod_{j \in A} x_j = 0)$ as:

$$\omega = \sum_{j \in A} a_j \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{j \in B} a_j dx_j, \quad a_j \in \mathcal{O}_{M,p},$$

A holomorphic generator $\eta = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$ is obtained from ω by multiplying by a reduced equation of the invariant part of the divisor E . With this writing, we recall that the singular locus $\text{Sing}(\mathcal{F})$ is given locally by the common zeros of the coefficients f_i . When we add to it the points where the foliation and the divisor have not normal crossings, that is, the tangency points, we obtain the adapted singular locus $\text{Sing}(\mathcal{F}, E)$.

Let us recall that classically, in the bidimensional case, a singularity is called presimple if there is a vector field defining the foliation with non-nilpotent linear part. When, in addition, the ratio of the eigenvalues of the linear part is not a positive rational, the singularity is called simple. In the particular case where one of the eigenvalues is zero, we say that it is a saddle-node. The classical example of saddle-node is given by the Euler equation

$$(y - x)dx - x^2 dy.$$

These concepts are slightly modified to make them fit into a definition adapted to the divisor, that is generalized to higher dimension. In this adapted context presimple points satisfies that the number of invariant components of the divisor passing through them is either the dimensional type of the foliation or one less, where we remember that the dimensional type is the minimum number of variables in which a holomorphic generator can be written. In the first case we will say that they are points of corner type and in the second case points of trace type.

Admissible blowing-ups are those whose centers have normal crossings with the divisor and they are invariant for the foliation, that is to say, they are contained either in a leaf or in the singular locus. A reduction of singularities is a finite sequence of admissible blowing-ups such that in the final space all points are simple. When we only reach presimple points we talk about pre-reduction.

Almost all the results we provide in this memory, are done under the complex hyperbolic hypothesis, which imposes that can not appear bidimensional saddle-nodes in the foliation. In a more precisely way, for each point $p \in M$, there is no generically transversal morphism $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, p)$ satisfying that the origin is a saddle-node for the foliation $\phi^{-1}\mathcal{F}$. This kind of foliations is also known in the case of dimension two as “generalized curve” (see [8]). On the other hand, on many occasions we are going to emphasize the fact that we are considering dicritical foliations (as in Chapter 6). A foliation is called non-dicritical if for any composition of a finite sequence of admissible blowing-ups, the exceptional divisor is non-dicritical (in the document this definition is precised a little more).

Finally, we recall the concept of isolated invariant branch in ambient dimension two, suggested by C. Camacho, A. Lins Neto and P. Sad in [8]. They are the ones that always go through non-dicritical components of the exceptional divisor, after any reduction of singularities.

Chapter 2. Polyhedra Systems. Combinatorial Reduction of Singularities In this chapter we explain the content of a paper accepted for publication which is attached as an annex.

We change the ambient spaces for their combinatorial structure, what we call “support fabric”. This concepts is strongly related with the idea in dimension two of dual graph of a exceptional divisor and in higher dimension with the one of dual simplicial complex. More specifically, given an ambient space (M, E) with $E = \cup_{i \in I} E_i$, its associated support fabric is a pair consisting of the index set I and a set of strata $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(I)$ in such a way that $J \in \mathcal{H}$ if and only if the intersection $E_J = \cap_{j \in J} E_j$ is not empty. What we propose is a structure of characteristic polyhedra systems \mathcal{D} defined over support fabrics which is transformed in a natural way following the rules provided by the blowing-up morphisms. Hironaka’s characteristic polyhedra represent the combinatorial steps in almost any procedure of reduction of singularities. This is implicit in the formulation of the polyhedra game [33], solved by Spivakovsky [41], and in many other papers about characteristic polyhedra. The combinatorial features concerning the problems of reduction of singularities are reflected in polyhedra systems without loosing the global aspects as we can appreciate in the prove we give about the following result, central in this chapter:

Theorem 2.2 Given a polyhedra system \mathcal{D} , there is a finite sequence of characteristic transforms

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{D}_k,$$

such that $Sing(\mathcal{D}_k) = \emptyset$.

The dimension of a support fabric is the maximum number of elements in its strata. Note that, when it is associated to an ambient space M , its dimension can be smaller than the ambient one. The proof of the previous result is done by induction in the dimension and we distinguish three types of polyhedra systems:

1. The ‘‘Hironaka quasi-ordinary’’, for these ones the prove is done directly.
2. The ‘‘specials’’, for which a combinatorial version of the maximal contact is given.
3. The ‘‘generals’’, where Spivakovsky polyhedra control is used.

When we consider special systems under the induction hypothesis, we define the maximal contact in this context. Although it is not evident that it exists in a global way, we prove that it does, since it is precisely the induction hypothesis which allows to eliminate the possible ‘‘global incoherence’’. Now, we project over a ‘‘maximal contact support fabric’’, that plays the role of a maximal contact variety [3] and we use again the induction hypothesis to conclude the prove in this case. For the general systems, we define the ‘‘Spivakovsky invariant’’ and the ‘‘Spivakovsky projection’’, which allow us to control our original system by means of a special one, until we reduce it to the Hironaka quasi-ordinary case.

Finally, we give several examples of polyhedra systems associated with geometrical objects such as hypersurfaces, codimension one foliations or vector fields. These examples are the necessary starting point to provide a global combinatorial support for Newton non-degenerate hypersurfaces and foliations.

Chapter 3. Graduations and Weighted Initial Forms. This is a technical chapter, devoted to justify language in terms of sheaves theory, filtrations and weighted graduations of rings and modules.

Once is fixed a stratum J of the stratification induced by the divisor, a weight vector is an element ρ in the dual vector space $(\mathbb{R}^J)^*$ with all its entries positive (when we identify it with the space \mathbb{R}^J). If we have a Newton polyhedron N_J associated to our stratum J , these weight vectors point out compact faces of the polyhedron.

Given an open set $U \subset M$ and a function $f \in \mathcal{O}_M(U)$, if we try to define the weighted initial form or ρ -initial form as an element of the ring of polynomials in $\mathbf{T} = (T_j)_{j \in J}$ and with coefficients in $\mathcal{O}_{S_J}(U \cap S_J)$, we find two problems. The first one and most relevant is that we need to do it in a coordinate system defined in the whole open set U . In second place we see that, although the first difficulty is overcome, we also find the fact that the definition depends on the chosen coordinates. Therefore, in order to define the concept of ρ -initial form of f intrinsically and globally, we are going to build the sheaf of graduated algebras $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_M$. In a more general way, they are defined the sheafs of graduated modules $\Omega_{S_J}^r(\log T, R)$ and $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$, based in the geometrical stratum S_J . While the first of them is constructed directly taking the coefficients in the sheaf \mathcal{O}_{S_J} , as in the case of functions, the second is built at each fiber from the germs of logarithmic differential r -forms in M and we prove that they are locally isomorphic. Hence, the weighted initial forms will be defined as sections of the sheaf $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$, where are ‘‘codified’’ the changes of coordinates by the local isomorphisms with the sheaf of modules $\Omega_{S_J}^r(\log T, R)$.

On this way, we introduce the ρ -initial form $L_\rho \mathcal{F}$ of a foliation \mathcal{F} as a submodule of the sheaf $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$. The non-degeneracy conditions that are presented in Chapter 4 are given in this language, from the local identification with the sections of $\Omega_{S_J}^r(\log T, R)$, once the coordinates are fixed.

Chapter 4. Newton Non-degenerate Foliations. We use the constructions of weighted initial forms made in the previous chapter, to give the definition of Newton non-degenerate foliated space. This is a local but open definition, which we give following the classical ideas for hypersurfaces and complete intersections. We look at a point and at the stratum of the natural stratification given by the divisor to which it belongs, say J . We fix a weight $\rho \in (\mathbb{R}^J)^*$ with positive entries and say that the foliated space (M, \mathcal{F}) is “ (ρ, J) -non degenerate at p ” if the weighted initial form $L_\rho \mathcal{F}_p$ has not zeros in the complex torus $(\mathbb{C}^*)^J$. As we already know, the weights points out faces of the polyhedron and when we read the weighted initial form through a coordinate system for two different weights associated with the same face of the polyhedron, we realize that they are essentially the same. As a consequence, it is enough to consider one weight for each compact face of the polyhedron. When the condition J -no degenerate holds for all points $p \in M$ we say that the foliated space is “Newton no degenerate”. An interesting result is that the restriction to a dicritical component of a Newton non-degenerate foliated space is also Newton non-degenerate.

The main goal of this chapter is to prove the following equivalence theorem:

Theorem 4.1 A complex hyperbolic foliated space is Newton non-degenerate if and only if it is of weak toric type.

The proof is done in two steps. Firstly we see that being Newton non-degenerate is stable by combinatorial blowing-ups and blowing-downs, without the need of the complex hyperbolic hypothesis. In order to do it, we made a combinatorial game that points out which strata and weight are related to which ones before and after blowing-up. Once this is known, stability is a direct proof that we do in Lemma 4.1. In the second place we see what happens in the “final stage”, that is when we work with a desingularized polyhedron, or what is the same, when the stratum is already generically presimple. What we see here, now using the complex hyperbolic hypothesis is that, in this case, a foliated space is Newton non-degenerate at a point if and only if the point is presimple. To conclude the equivalence it is essential to note that a desingularization of the associated polyhedra system (which we know that exists because of Theorem 2.2), gives rise to a sequence of combinatorial admissible blowing-ups. Combining this with stability and the final stage we get the proof of the result.

In the last section of this chapter we observe that the concept of Newton non-degenerate foliated space naturally extends the classical concept for hypersurfaces, when we are considering foliations with holomorphic first integral. Likewise, it is not difficult to find dicritical examples from foliations with rational or multivalued first integral. Finally we conclude observing that the condition of being Newton non-degenerate for a fixed polyhedron is open in the closed set defined by the Frobenius integrability conditions, and in the end, we are talking about Zariski non empty open sets in spaces of foliations.

Chapter 5. Globalization of Isolated Branches of Non-degenerate Foliations. In this chapter we describe local-global aspects concerning the invariant curves of complex hyperbolic Newton non-degenerate foliations defined on projective toric surfaces. The main result that we present is the following:

Theorem 5.1. The isolated invariant branches of a Newton non-degenerate foliation defined on a projective toric surface extend to algebraic curves.

Let us recall that a nonsingular projective toric surface is naturally endowed with a normal crossings divisor given by the union of the non-dense orbits of the torus action. Moreover, these surfaces are obtained from the projective plane with the “standard” toric structure by combinatorial blowing-ups and blowing-downs. Since the properties we consider are stable under these transformations, it is enough to prove our results for the case of the projective plane.

The homogeneous polygon of a foliation on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ is a global version of the Newton polygon. In the Newton non-degenerate context, we show that it is necessarily either a single vertex

or a segment. The key argument in this proof is the deep and original study of the Russian researchers A.G. Khovanskii, A.G. Kouchnirenko and D.N. Bernstein (see [5, 34]), where they obtain the following result (BKK): “The number of roots of a Laurent polynomial system in general position is the mixed volume of the associated polyhedra”. The knowledge of the shape of the homogeneous polygon allows us to give a complete classification of the Newton non-degenerate foliations on the projective plane. In a more precise way, we distinguish the following three cases:

Case a) When the homogeneous polygon is a single vertex, there are not isolated invariant branches.

Case b) When it is the segment joining the points $(0, d, 0)$ and $(0, 0, d)$: the isolated invariant branches are in a family of lines of the type $\ell_\lambda = (X_2 - \lambda X_1 = 0)$.

Case c) When it is the segment joining the points $(d, 0, 0)$ and $(0, a, d-a)$: the isolated invariant branches are in a family of curves of the type $\mathcal{C}_\lambda = (X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}} - \lambda X_0^{\tilde{d}} = 0)$, that is, they are locally cusps.

As a consequence of this description, we obtain the globalization result stated in Theorem 5.1.

For the existence of isolated invariant branches in the Newton non-degenerate context, we see in Lemma 5.4 that there is at least one for each λ in the family above. In case b), it is enough to perform a blowing-up in the common point of all the lines ℓ_λ . Each transformed line cuts to the new divisor in two points p_λ and q_λ , and what we observe is that the “ratios of the eigenvalues” of the singularities of the foliations at that points are opposite one of the other. Hence, at least one of them is a simple point and we find an isolated invariant branch. In case c), we find a similar argument after a reduction of singularities of the cuspidal family \mathcal{C}_λ .

When we have the strongest property of being of toric type, we have the following dichotomy:

- The foliation has rational first integral, but it does not have isolated invariant branches.
- The foliation has finitely many global invariant curves outside of the exceptional divisor. Moreover, each one defines isolated invariant branches in the points of intersection with the divisor.

In addition, we deduce of this result that there is always a global invariant curve for a toric type foliation on a projective toric surface. This does not hold for general complex hyperbolic foliations on the projective plane as Jouanolou’s classical example, given by the differential form

$$(X_0^2 X_1 - X_2^3) dX_0 + (X_1^2 X_2 - X_0^3) dX_1 + (X_2^2 X_0 - X_1^3) dX_2,$$

shows in [24]. This foliation does not have algebraic invariant curves, but it has seven singularities and two isolated invariant branches at each one. It has to be said that this example does not fit in the context of toric type foliated spaces.

Jouanolou’s example is classically used to construct germs of codimension one foliations in dimension three without invariant surface. In contrast, the results presented here for toric type foliations on projective toric surfaces are the starting point for the proof of the existence of invariant surface for germs of toric type foliations in dimension three, that we discuss in Chapter 6.

Chapter 6. Existence of invariant surface for torifiable foliations. The problem of existence of invariant hypersurfaces for a holomorphic codimension one foliation is a leitmotif in the theory of holomorphic singular foliations, coming from an initial question of René Thom. The main result in this chapter is a contribution to this problem, that we state as follows:

Theorem 6.1 Every torifiable complex hyperbolic foliation in $(\mathbb{C}^3, 0)$ has an invariant surface.

We have already mentioned that the foliations in this family can be dicritical, which explains the relevance of the result. Indeed, as we have already commented, the existence of invariant hypersurface in any ambient dimension has a positive answer for any non-dicritical foliation (see [7, 11, 14]).

In order to prove the existence of invariant surface in a dicritical foliation in $(\mathbb{C}^3, 0)$, it is essential to have “good properties” for the restriction of the foliation to compact dicritical components after reduction of singularities. More precisely, the prolongation property that we need is expressed as follows:

Definition 6.1: A foliated surface (S, D, \mathcal{G}) has the *prolongation property for isolated branches* if, for every isolated invariant branch (Γ, p) , the next conditions follows:

1. There is a curve $Y \subset S$ extending (Γ, p) , that is, such that $(\Gamma, p) \subset (Y, p)$.
2. If $Y \subset S$ is the curve extending (Γ, p) and $q \in Y \cap D$, each branch $(\Upsilon, q) \subset (Y, q)$ is isolated.

If we have this “prolongation property” in the restriction to the compact dicritical components of a reduction of singularities, we can extend the argument of Cano-Cerveau in [11] to prove the existence of invariant surface, provided we have at least a trace type simple singular point.

In the frame of toric type foliations we see that the compact components of the exceptional divisor are projective toric surfaces. On the other hand, the restriction of the foliation to a compact dicritical component is of toric type. Using the results of the previous chapter, we conclude that the property of prolongation is given for the restriction to each one of the dicritical components.

Now, it would be enough to find a trace type singular point after reduction of singularities, in the toric type context. Such a point appears if and only if there is at least one invariant component in the exceptional divisor, as we show in Section 6.2. In the proof of this result, the key argument is a refined version of Camacho-Sad’s theorem proved by Ortiz-Rosales-Voronin in [37]. The remaining case corresponds to toric type foliations admitting reduction of singularities without invariant components. In this situation only blowing-ups centered in curves are allowed, in an étale way over an initial one, and the existence of invariant surface follows straightforward.

Introducción

Fue Paul Painlevé quien, a finales del siglo XIX, vio la necesidad de crear una teoría geométrica con el fin de comprender mejor los problemas en el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales holomorfas. Este punto de vista se inició con los trabajos de Henri Poincaré e Ivar Otto Bendixson y tomo entidad propia como “teoría de foliaciones” a raíz de la obra de Charles Ehresmann y Georges Reeb en el entorno de 1940. Una foliación siempre aparece como la familia de soluciones de algún sistema de ecuaciones diferenciales y estudiar el comportamiento de la foliación es estudiar el comportamiento global de las soluciones de éste.

Desde el punto de vista local, las foliaciones siempre ofrecen la misma figura, la de una carta foliada, con placas que después se prolongarán en las hojas. La complejidad aparece al considerar situaciones globales, o bien puntos singulares, también llamados puntos de equilibrio en el caso de campos de vectores. De hecho, la complejidad geométrica de las hojas alrededor de un punto singular se equipara a la situación global, representando la singularidad una “zona del infinito inalcanzable por el sistema dinámico”. Las singularidades están no obstante condicionadas al hecho de que consideramos ecuaciones diferenciales holomorfas ellas mismas. Concretamente, una foliación de codimensión uno está representada por la ecuación $\omega = 0$, donde ω es una forma holomorfa con la condición de integrabilidad de Frobenius $\omega \wedge d\omega = 0$; los puntos singulares son aquellos donde ω se anula. En los años 80 se aceleró el estudio de las singularidades de foliaciones holomorfas, a partir de los trabajos fundacionales de Robert Moussu, Jean-Pierre Ramis, Jean Martinet, Bernard Malgrange, Jean-François Mattei, Dominique Cerveau y otros, estudio que ha continuado hasta nuestros días, en algunos aspectos de modo paralelo al de la teoría de singularidades de variedades. Éste es el marco en el que se encuadra esta memoria.

Una de las maneras de abordar el estudio de las foliaciones singulares holomorfas es buscar un modelo con singularidades “más sencillas”, que coincida con el original fuera de los puntos singulares de éste; esto es, conseguir una reducción de singularidades por medio de una sucesión finita de explosiones, en el mismo espíritu que la resolución de singularidades de variedades. El problema de reducción de singularidades para foliaciones holomorfas de codimensión uno fue resuelto por Abraham Seidenberg en 1968, para el caso de dimensión dos, en su conocido artículo [40]. En dimensión ambiente tres se tiene una respuesta positiva en primer lugar, en el caso no dicrítico en el artículo [11] de Felipe Cano y Dominique Cerveau de 1992 y posteriormente, en 2004, para el caso general tridimensional en el artículo [10] de F. Cano. En cambio, éste sigue siendo un problema abierto en dimensión superior, aunque se han hecho algunos avances muy significativos en la dirección de la uniformización local en el preprint [13] de F. Cano y Miguel Fernández-Duque. Este punto de vista de la reducción de singularidades es el que adoptamos en este trabajo.

El objeto principal de mi investigación, presentado en esta memoria con la que opto a obtener el grado de “Doctora en Matemáticas por la Universidad de Valladolid”, es el estudio de las foliaciones holomorfas de codimensión uno “Newton no-degeneradas”.

Las singularidades no degeneradas para hipersuperficies han sido descritas clásicamente por A. Kouchnirenko en [35]; vamos a dar una descripción rápida de éstas. Consideramos un germen de hipersuperficie en $(\mathbb{C}^n, 0)$, definido localmente por una ecuación reducida $f = 0$ en coordenadas locales $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Tomamos el desarrollo de Taylor de f dado por

$f = \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma} \mathbf{z}^{\sigma}$, consideramos la envolvente convexa de los $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ tales que $\lambda_{\sigma} \neq 0$ y a ésta le sumamos el primer ortante $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Así se obtiene el poliedro de Newton de f . Consideramos su frontera compacta Δ y decimos que la singularidad es no degenerada si los coeficientes son “genéricos” en un sentido que definiremos más adelante. Esta clase de singularidades es abierta y densa en el espacio de coeficientes cuando Δ está fijo. También M. Oka hace un estudio en [36] de las singularidades no degeneradas para el caso de intersecciones completas.

Tomando un punto de vista logarítmico, podemos definir un poliedro de Newton asociado a un germen de forma diferencial o campo de vectores, una vez fijemos un sistema de coordenadas. Desde una aproximación más geométrica, considerar un divisor con cruzamientos normales en el espacio ambiente, determina las coordenadas que vamos a utilizar. De este modo, podemos definir no un solo poliedro, sino un sistema de poliedros completo, cada uno de ellos asociado a uno de los estratos dados de forma natural por el divisor, como veremos en el Capítulo 2.

Un espacio foliado se define como el formado por una foliación de codimensión uno \mathcal{F} en un espacio analítico complejo M , junto con un divisor con cruzamientos normales $E \subset M$. La mayoría de las definiciones, propiedades y resultados que presentamos en este trabajo conciernen al espacio foliado (M, E, \mathcal{F}) y no sólo a la foliación \mathcal{F} . En la teoría general establecida en el Capítulo 4, introducimos el concepto de “espacio foliado Newton no degenerado” que, por supuesto, coincide con el clásico para gérmenes de hipersuperficies, cuando consideramos gérmenes de foliaciones con integral primera holomorfa. Por otro lado, una vez que tenemos un divisor con cruzamientos normales en el espacio ambiente, podemos hablar de “explosiones combinatorias”. Éstas son explosiones centradas en la clausura de alguno de los estratos determinados por el divisor. Extendemos la definición dada por M.I.T. Camacho y F. Cano en [9] y decimos que una foliación de codimensión uno es de “tipo tórico” si obtenemos solamente “puntos simples” después de una sucesión de explosiones combinatoria, esto es, si tiene una “desingularización combinatoria”. Cuando pedimos llegar sólo hasta “puntos presimples”, decimos que la foliación es de “tipo tórico débil”.

Uno de los resultados que demostramos en esta memoria es el “teorema de equivalencia” que dice que las foliaciones Newton no degeneradas son exactamente aquellas de tipo tórico débil, bajo la hipótesis de que la foliación no tiene sillan-nodo, es decir, es hiperbólico-compleja.

Señalemos que la clase de foliaciones Newton no degeneradas contiene foliaciones dicríticas, esto es, después de una sucesión finita de explosiones con centros invariantes, podemos encontrar componentes del divisor excepcional genéricamente transversales. Este hecho abre de manera natural la pregunta de si tales foliaciones admiten hipersuperficie invariante. La existencia de hipersuperficie invariante es un problema general planteado por René Thom, cuya solución es afirmativa en el caso no dicrítico (resultados de C. Camacho, P. Sad, D. Cerveau, F. Cano y J.F. Mattei), y negativa en el caso general dicrítico. Por eso es interesante detectar clases de foliaciones dicríticas en las que esté asegurada la existencia de hipersuperficie invariante.

Otro de los teoremas que presentamos en la memoria asegura la existencia de superficie invariante para las foliaciones de tipo tórico en dimensión tres. Para establecerlo, hemos necesitado un estudio profundo de las foliaciones Newton no degeneradas definidas en superficies proyectivas con estructura tórica. En este contexto presentamos una batería de resultados que clasifican dichas foliaciones y, en particular, ponen en evidencia la propiedad fundamental de prolongación de curvas invariantes aisladas para foliaciones Newton no degeneradas en superficies tóricas.

A continuación, pasamos a exponer el contenido de los capítulos que componen esta tesis, con mención expresa de los resultados más destacados obtenidos.

Capítulo 1. Preliminares En este capítulo se recuerdan e introducen definiciones básicas que conciernen a la teoría general de foliaciones holomorfas de codimensión uno. Un espacio ambiente $\mathcal{M} = (M, E)$ consiste en un espacio analítico complejo no singular M acompañado de un divisor con cruzamientos normales E . Los sistemas locales de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, siempre los tomamos adaptados a E , esto es cumpliendo la propiedad $E \subset (x_1 x_2 \cdots x_n = 0)$. Dada una foliación \mathcal{F} en M , consideraremos generadores locales con una escritura logarítmica

respecto al divisor, que escribiremos en coordenadas adaptadas a $E = (\prod_{j \in A} x_j = 0)$ como:

$$\omega = \sum_{j \in A} a_j \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{j \in B} a_j dx_j, \quad a_j \in \mathcal{O}_{M,p},$$

Un generador holomorfo $\eta = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ se obtiene de ω multiplicando éste por una ecuación reducida de la parte invariante del divisor E . Con esta escritura, el lugar singular $\text{Sing}(\mathcal{F})$ viene dado localmente por los ceros comunes de los coeficientes f_i . Cuando a éste se le añaden los puntos donde la foliación y el divisor no tienen cruzamientos normales, los puntos de tangencia, obtenemos el lugar singular adaptado $\text{Sing}(\mathcal{F}, E)$.

Recordemos que clásicamente, en el caso bidimensional, una singularidad es presimple si existe un campo de vectores definiendo la foliación con parte lineal no nilpotente. Cuando además la razón de los autovalores de la parte lineal no es un racional positivo, decimos que la singularidad es simple. En el caso particular en el que uno de los autovalores es cero, decimos que es una silla-nodo. El ejemplo clásico de silla-nodo es el dado por la ecuación de Euler

$$(y - x)dx - x^2 dy.$$

Estos conceptos se modifican ligeramente para hacerlos encajar en una definición adaptada al divisor que se generaliza a dimensión superior. En este contexto adaptado, los puntos presimples cumplen que el número de componentes invariantes del divisor pasando por ellos es o bien el tipo dimensional de la foliación o bien uno menos, donde recordamos que el tipo dimensional es el menor número de variables en el que se puede escribir un generador holomorfo. En el primer caso diremos que son puntos de tipo esquina y en el segundo caso puntos de tipo traza.

Las explosiones admisibles son aquellas cuyos centros tienen cruzamientos normales con el divisor y son invariantes para la foliación, es decir, están contenidos o bien en una hoja o bien en el lugar singular. Una reducción de singularidades es una sucesión finita de explosiones admisibles de modo que en el espacio final todos los puntos son simples. Cuando solamente llegamos hasta puntos presimples hablamos de pre-reducción.

Prácticamente todos los resultados que proporcionamos en esta memoria, se hacen bajo la hipótesis hiperbólico-compleja. Ésta impone que no aparezcan sillas-nodo bidimensionales en la foliación, o de manera más precisa, que para cada punto $p \in M$, no exista ningún morfismo genéricamente transversal $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, p)$ cumpliendo que el origen sea una silla-nodo para la foliación $\phi^{-1}\mathcal{F}$. Esta clase de foliaciones también se conoce en el caso de dimensión dos como “curva generalizada” (véase [8]). Por otro lado, en muchas ocasiones vamos a hacer hincapié en el hecho de estar considerando foliaciones dicríticas (como en el Capítulo 6). Una foliación \mathcal{F} se dice no dicrítica si para cualquier composición de una sucesión finita de explosiones admisibles se tiene que el divisor excepcional es no dicrítico (en la memoria se precisa un poco más esta definición).

Por último, destacamos el concepto de rama invariante aislada en dimensión ambiente dos, sugerido por C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad en [8]. Éstas son las que siempre pasan por componentes no dicríticas del divisor excepcional, después de cualquier reducción de singularidades.

Capítulo 2. Sistemas de poliedros. Reducción combinatoria de Singularidades. En este capítulo se explica el contenido de un artículo ya aceptado para su publicación, que se adjunta como anexo.

Cambiamos los espacios ambiente por su estructura combinatoria, aquello que llamamos “tejido soporte” (en inglés “support fabric”). El concepto tiene mucho que ver con la idea en dimensión dos de grafo dual de un divisor excepcional y en dimensión cualquiera con la de complejo simplicial dual. De manera más concreta, dado un espacio ambiente (M, E) con $E = \cup_{i \in I} E_i$, su tejido soporte asociado es un par formado por los índices I y un conjunto de estratos $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(I)$ de manera que $J \in \mathcal{H}$ siempre y cuando la intersección $E_J = \cap_{j \in J} E_j$ sea no vacía. Lo que proponemos es una estructura de sistemas de poliedros característicos \mathcal{D}

definida sobre tejidos soporte y que se transforma de manera natural siguiendo las reglas dadas por los morfismos de explosión. Los poliedros característicos de Hironaka representan los pasos combinatorios en casi cualquier proceso de reducción de singularidades. Esto está implícito en la formulación del “juego de los poliedros” en [33], resuelto por Spivakovsky en [41], y en otros artículos sobre poliedros característicos. Los aspectos combinatorios que conciernen a los problemas de reducción de singularidades se reflejan en los sistemas de poliedros sin perder los aspectos globales como podemos apreciar en la prueba que damos sobre el siguiente resultado, central en este capítulo:

Teorema 2.2 Dado un sistema de poliedros \mathcal{D} , hay una sucesión finita de transformados característicos

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{D}_k,$$

de modo que $Sing(\mathcal{D}_k) = \emptyset$.

La dimensión de un tejido soporte viene dada por el número de elementos máximo en sus estratos. Nótese que, cuando éste viene asociado a un espacio ambiente M , su dimensión puede ser más pequeña que la del ambiente. La demostración del resultado anterior se realiza por inducción en la dimensión y distinguiremos tres tipos de sistemas de poliedros:

1. Los “Hironaka casi-ordinarios”, para los que la prueba se hace de manera directa.
2. Los “especiales”, para los que damos una versión combinatoria del contacto maximal.
3. Los “generales”, donde se usa el control de los poliedros de Spivakovsky.

Cuando consideramos sistemas especiales bajo la hipótesis de inducción, definimos el contacto maximal en este contexto. Pese a que no es evidente que éste exista de forma global, probamos que sí ocurre, ya que es precisamente la hipótesis de inducción la que permite eliminar la posible “incoherencia global”. Ahora, proyectamos sobre un “tejido soporte de contacto maximal”, que juega el papel de variedad de contacto maximal (véase [3]) y de nuevo usamos la hipótesis de inducción para concluir la prueba en este caso. Para los sistemas generales definimos el “invariante de Spivakovsky” y la “proyección de Spivakovsky”, que nos permiten controlar nuestro sistema original por medio de uno especial, hasta reducirlo al caso Hironaka casi-ordinario.

Finalmente, damos una serie de ejemplos de sistemas de poliedros asociados a objetos geométricos como son las hipersuperficies, las foliaciones de codimensión uno o los campos de vectores. Estos ejemplos son el punto de partida necesario para proveer un soporte combinatorio global para las hipersuperficies y foliaciones Newton no degeneradas.

Capítulo 3. Graduaciones y formas iniciales pesadas. Éste es un capítulo de orden técnico, destinado a justificar el lenguaje en términos de la teoría de haces, filtraciones y graduaciones pesadas de anillos y módulos.

Fijado un estrato J de la estratificación inducida por el divisor, un vector de pesos es un elemento ρ en el espacio vectorial dual $(\mathbb{R}^J)^*$ con todas sus entradas positivas (cuando identificamos éste con el espacio \mathbb{R}^J). Si tenemos un poliedro de Newton definido N_J asociado al estrato J , estos vectores de pesos marcan caras compacta del poliedro.

Dado un abierto $U \subset M$ y una función $f \in \mathcal{O}_M(U)$, si tratamos de definir su forma inicial pesada o ρ -forma inicial como un elemento del anillo de polinomios en $\mathbf{T} = (T_j)_{j \in J}$ y con coeficientes en $\mathcal{O}_{S_J}(U \cap S_J)$, encontramos dos problemas. El primero y más relevante es que necesitamos para hacerlo un sistema de coordenadas definido en todo el abierto U . En segundo lugar vemos que, pese a que la primera dificultad esté superada, nos encontramos también con el hecho de que la definición depende de las coordenadas escogidas. Por tanto, en pos de definir el concepto de ρ -forma inicial de f de forma intrínseca y global, vamos a construir un haz intrínseco de álgebras graduadas $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_M$. De manera más general, se definen los haces de módulos graduados $\Omega_{S_J}^r(\log T, R)$ y $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$ con base en el estrato geométrico S_J .

Mientras que el primero de ellos se fabrica de forma directa tomando los coeficientes en el haz \mathcal{O}_{S_J} , como para el caso de funciones, el segundo se construye fibra a fibra a partir de los gérmenes de r -formas diferenciales logarítmicas en M y se prueba que son localmente isomorfos. Es decir, las formas iniciales pesadas las definiremos como secciones del haz $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$, donde quedan “codificados” los cambios de coordenadas por los isomorfismos locales con el haz de módulos $\Omega_{S_J}^r(\log T, R)$.

De esta manera, introducimos la ρ -forma inicial $L_\rho \mathcal{F}$ de una foliacion \mathcal{F} como un submódulo del haz $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$. Las condiciones de no degeneración que se presentan en el Capítulo 4 se dan en este lenguaje, a partir de la identificación local, una vez fijadas coordenadas, con las secciones de $\Omega_{S_J}^r(\log T, R)$.

Capítulo 4. Foliaciones Newton no degeneradas. Usamos las construcciones de formas iniciales pesadas hechas en el capítulo anterior, para dar la definición de espacio foliado Newton no degenerado. Ésta es una definición local aunque abierta, que damos siguiendo las ideas clásicas para hipersuperficies e intersecciones completas. Nos fijamos en un punto y en el estrato de la estratificación natural dada por el divisor al que éste pertenece, digamos J . Fijamos un peso $\rho \in (\mathbb{R}^J)^*$ con entradas positivas y decimos que el espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es “ (ρ, J) -no degenerado en p ” si la forma inicial pesada $L_\rho \mathcal{F}_p$ no se anula en el toro complejo $(\mathbb{C}^*)^J$. Como ya sabemos, los pesos marcan caras del poliedro y además cuando leemos las formas iniciales pesada a través de un sistema de coordenadas para dos pesos distintos asociados a la misma cara del poliedro, nos damos cuenta de que son esencialmente la misma. Como consecuencia, basta considerar un peso por cada cara compacta del poliedro. Cuando la condición J -no degenerado se cumple para todos los puntos $p \in M$ decimos que el espacio foliado es “Newton no degenerado”. Un resultado interesante es que la restricción a una componente dicrítica de un espacio foliado Newton no degenerado también es Newton no degenerada.

El objetivo principal de este capítulo es probar el siguiente teorema de equivalencia

Teorema 4.1 Un espacio foliado hiperbólico-complejo es Newton no degenerado si y solamente si es de tipo tórico débil.

La demostración se realiza en dos etapas. En primer lugar vemos que ser Newton no degenerado es estable por explosiones e implosiones combinatorias, sin necesidad de la hipótesis hiperbólico-compleja. Para ello, hacemos un juego combinatorio que marca qué estratos y pesos se relacionan con cuáles antes y después de explosión. Una vez se sabe esto la estabilidad es una comprobación directa que hacemos en el Lema 4.1. En segundo lugar vemos que ocurre en la “etapa final”, esto es cuando trabajamos con un poliedro desingularizado, o lo que es lo mismo cuando el estrato ya es de partida genéricamente presimple. Lo que vemos aquí, ahora sí, bajo la hipótesis hiperbólico-compleja, es que, en este caso, un espacio foliado es Newton no degenerado en un punto si y solamente si el punto es presimple. Para concluir la equivalencia es clave observar que una desingularización del sistema de poliedros asociado (que sabemos que existe por el Teorema 2.2), da lugar a una sucesión de explosiones combinatorias admisibles. Juntando esto con la estabilidad y la etapa final obtenemos la prueba del resultado.

En la última sección de este capítulo observamos que el concepto de espacio foliado Newton no degenerado extiende de manera natural el concepto clásico para hipersuperficies, cuando consideramos foliaciones con integral primera holomorfa. Asimismo, no es difícil encontrar ejemplos dicríticos a partir de foliaciones con integral primera racional o multivalorada. Finalmente concluimos observando que la condición de ser Newton no degenerada para un poliedro fijado es abierta dentro del cerrado definido por la condición de integrabilidad de Frobenius y, en definitiva, estamos hablando de abiertos de Zariski no vacíos en espacios de foliaciones.

Capítulo 5. Globalización de ramas aisladas de foliaciones no degeneradas. En este capítulo describimos aspectos locales-globales relativos a las curvas invariantes de foliaciones hiperbólico-complejas Newton no degeneradas definidas en superficies tóricas proyectivas. El resultado principal que presentamos es el siguiente:

Teorema 5.1. Las ramas invariantes aisladas de una foliación hiperbólico-compleja Newton no degenerada definida sobre una superficie tórica proyectiva se extienden a curvas algebraicas.

Recordemos que a una superficie tórica no singular se le asocia de manera natural un divisor con cruzamientos normales, dado por la unión de las órbitas no densas de la acción del toro. Además, en el caso proyectivo, estas superficies se obtienen, por medio de explosiones e implosiones combinatorias, desde el plano proyectivo con la estructura tórica “estándar”. Puesto que las propiedades que consideramos son estables por estas transformaciones, es suficiente probar nuestros resultados para el caso del plano proyectivo.

El polígono homogéneo de una foliación de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es una versión global del polígono de Newton y en el contexto Newton no degenerado, mostramos que éste es necesariamente un segmento o un solo vértice. El argumento clave para esta prueba es el profundo y original estudio debido a los investigadores rusos A.G. Khovanskii, A.G. Kouchnirenko y D.N. Bernstein (véase [5, 34]), donde obtienen el siguiente resultado (BKK): “El número de raíces de un sistema de polinomios de Laurent en posición general es el volumen mixto de los poliedros asociados”. El conocimiento de la forma del polígono homogéneo nos permite dar una clasificación completa de las foliaciones Newton no degeneradas en el plano proyectivo. De forma más precisa, distinguimos los siguientes casos:

Caso a) Cuando el polígono homogéneo es un solo vértice, no hay ramas invariantes aisladas.

Caso b) Cuando el polígono homogéneo es el segmento que une los puntos $(0, d, 0)$ y $(0, 0, d)$: las ramas invariantes aisladas están en una familia de rectas del tipo $\ell_{\lambda} = (X_2 - \lambda X_1 = 0)$.

Caso c) Cuando éste es el segmento que une los puntos $(d, 0, 0)$ y $(0, a, d - a)$: las ramas invariantes aisladas están en una familia de curvas, que son localmente cúspides, esto es, del tipo $\mathcal{C}_{\lambda} = (X_1^{\bar{d}-\bar{a}} X_2^{\bar{a}} - \lambda X_0^{\bar{d}} = 0)$.

Como consecuencia de esta descripción, obtenemos el resultado de globalización enunciado en el Teorema 5.1.

En lo que se refiere a la existencia de ramas invariantes aisladas en el contexto Newton no degenerado, vemos en el Lema 5.4 que hay efectivamente al menos una para cada λ en la familia anterior. En el caso b), basta hacer explosión en el punto común de todas las rectas ℓ_{λ} . Cada una de las líneas transformadas corta al nuevo divisor en dos puntos p_{λ} y q_{λ} , y lo que observamos es que las “razones de los autovalores” de las singularidades de la foliación en esos puntos son opuestas una de la otra; por tanto, por lo menos uno de ellos es un punto simple y encontramos una rama invariante aislada pasando por él. En el caso c) encontramos un argumento similar después de la reducción de singularidades de la familia cuspidal \mathcal{C}_{λ} .

Cuando trabajamos con la propiedad más fuerte de ser de tipo tórico, tenemos además la siguiente dicotomía:

- La foliación tiene integral primera racional, pero no tiene ramas invariantes aisladas.
- La foliación tiene una cantidad finita de curvas globales invariantes no contenidas en el divisor. Además, todas ellas definen ramas invariantes aisladas en los puntos de intersección con el divisor.

Asimismo, de estos resultados deducimos que siempre hay curva global invariante para una foliación de tipo tórico en una superficie tórica proyectiva. Esto no sucede en general para foliaciones hiperbólico-complejas en el plano proyectivo, como muestra en [24] el clásico ejemplo de Jouanolou dado por la forma diferencial

$$(X_0^2 X_1 - X_2^3) dX_0 + (X_1^2 X_2 - X_0^3) dX_1 + (X_2^2 X_0 - X_1^3) dX_2.$$

Esta foliación no tiene curvas algebraicas invariantes, pero en cambio tiene siete singularidades y dos ramas invariantes aisladas en cada una de ellas. Cabe decir que este ejemplo no encaja dentro del contexto de espacios foliados de tipo tórico.

El ejemplo de Jouanolou se usa de forma clásica para construir gérmenes de foliaciones de codimensión uno en dimensión tres sin superficie invariante. En cambio, los resultados que presentamos aquí para foliaciones de tipo tórico en superficies tóricas proyectivas, son el punto de partida para la prueba de la existencia de superficie invariante para gérmenes de foliaciones de tipo tórico en dimensión tres que abordamos en el Capítulo 6.

Capítulo 6. Existencia de superficie invariante para foliaciones torificables. El problema de existencia de hipersuperficies invariantes para una foliación holomorfa de codimensión uno es “leitmotiv” en la teoría de foliaciones holomorfas singulares, viniendo de una pregunta inicial de René Thom. El resultado principal en este capítulo es una contribución a este problema, que establecemos como sigue:

Teorema 6.1 Toda foliación torificable hiperbólico-compleja en $(\mathbb{C}^3, 0)$ tiene una superficie invariante.

Ya hemos mencionado que las foliaciones en esta familia pueden ser dicríticas, lo que explica la relevancia del resultado. En efecto, como ya hemos comentado, la existencia de hipersuperficie invariante en cualquier dimensión ambiente tiene una respuesta positiva para foliaciones no dicríticas cualesquiera (véase [7, 11, 14]).

Para probar la existencia de superficie invariante en una foliación dicrítica en $(\mathbb{C}^3, 0)$ es esencial tener “buenas propiedades” para la restricción de la foliación a las componentes dicríticas compactas después de reducción de singularidades. Más precisamente, la propiedad de prolongación que necesitamos se expresa como sigue:

Definición 6.1: Una superficie foliada (S, D, \mathcal{G}) tiene la *propiedad de prolongación para ramas aisladas* si para cada rama invariante aislada (Γ, p) , las siguientes condiciones se siguen:

1. Hay una curva $Y \subset S$ extendiendo (Γ, p) , esto es, tal que $(\Gamma, p) \subset (Y, p)$.
2. Si $Y \subset S$ es la curva que extiende (Γ, p) y $q \in Y \cap D$, cada rama $(\Upsilon, q) \subset (Y, q)$ es aislada.

Si tenemos esta “propiedad de prolongación” en la restricción a las componentes dicríticas compactas de una reducción de singularidades, podemos extender el argumento de Cano-Cerveau en [11] para construir superficies invariantes, si partimos del hecho de que existe al menos un punto singular simple de tipo traza.

En el marco de foliaciones de tipo tórico vemos que las componentes del divisor excepcional son superficies tóricas proyectivas. Por otro lado, la restricción de la foliación a una componente dicrítica compacta es de tipo tórico. Utilizando los resultados del capítulo precedente, concluimos que se da la propiedad de prolongación para la restricción a cada una de las componentes dicríticas.

Ahora, sería suficiente encontrar un punto singular de tipo traza después de reducción de singularidades, en el contexto de tipo tórico. Tal punto aparece si y solamente si existe al menos una componente invariante en el divisor excepcional, como mostramos en la sección 6.2. Para la prueba de este resultado invocamos una versión refinada del Teorema de Camacho-Sad, probada por Ortiz-Rosales-Voronin en [37]. El caso restante se corresponde con foliaciones de tipo tórico que admiten una reducción de singularidades sin componentes invariantes. En esta situación, solo se permiten explosiones centradas en curvas, de forma étale sobre una inicial, y la existencia de superficie invariante se sigue de manera directa.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos los conceptos necesarios de teoría de haces y teoría de foliaciones holomorfas singulares que utilizaremos como lenguaje básico en el resto de la memoria. Destacaremos los conceptos de lugar singular adaptado, foliación hiperbólico-compleja, foliación dicrítica, puntos simples y presimples, desingularización, foliación de tipo tórico y de tipo tórico débil y finalmente el concepto de rama invariante aislada en dimensión dos.

Referencias básicas para este capítulo son [12, 21, 23].

1.1. Haces de \mathcal{A} -módulos

Una *categoría* es una colección \mathcal{C} de *objetos* de modo que para todo par de ellos $X, Y \in \mathcal{C}$ hay un conjunto $\text{Hom}(X, Y)$, cuyos elementos se llaman *morfismos de X en Y* y dados tres de ellos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, hay una aplicación de *composición*

$$\circ : \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

cumpliendo los siguientes axiomas:

- Dados $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow T$ se tiene la relación $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Para todo $X \in \mathcal{C}$, existe un morfismo *identidad* $e_X : X \rightarrow X$ tal que $e_X \circ f = f$ para todo $f : Y \rightarrow X$ y $f \circ e_X = f$ para todo $f : X \rightarrow Y$.

Ejemplos de categorías son la de conjuntos, espacios topológicos, grupos, anillos conmutativos con unidad, etc. A un espacio topológico X le podemos asociar un categoría $\text{Top}(X)$ donde los objetos son los abiertos de X y dados dos objetos $U, V \in \text{Top}(X)$, el conjunto de morfismos $\text{Hom}(U, V)$ se reduce a un elemento si $U \subset V$ y al vacío en otro caso.

Dada una categoría \mathcal{C} y un espacio topológico X , llamamos *prehaz \mathcal{P} de base X con valores en \mathcal{C}* a todo funtor contravariante de la categoría $\text{Top}(X)$ en la categoría \mathcal{C} . Esto es, a cada abierto $U \subset X$ le asociamos un objeto $\mathcal{P}(U) \in \mathcal{C}$ y se da un morfismo de *restricción*

$$\rho_U^V : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(U)$$

cada vez que $U \subset V$, de modo que si $U \subset V \subset W$, entonces $\rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W$. Dado $s \in \mathcal{P}(V)$, escribiremos frecuentemente $s|_U$ para hacer referencia a la restricción $\rho_U^V(s)$. Dado un punto $x \in X$, el conjunto de abiertos $U \in \text{Top}(X)$ conteniendo x es un conjunto dirigido, tomando como orden parcial la inclusión de conjuntos. Esta razón, junto con la transitividad de los morfismos de restricción nos permite definir el límite inductivo

$$\mathcal{P}_x = \lim_{\rightarrow x \in U} \mathcal{P}(U) \in \mathcal{C}.$$

que llamaremos *germen de \mathcal{P} en x* . Sean \mathcal{P} y \mathcal{P}' dos prehaces de base X con valores en \mathcal{C} ; se puede definir la noción de morfismo de prehaces $\theta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ como una colección de morfismos $\theta(U) : \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}'(U)$ para cada $U \in \text{Top}(X)$, de manera que siempre que $U \subset V$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\theta(V)} & \mathcal{P}'(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P}(U) & \xrightarrow{\theta(U)} & \mathcal{P}'(U) \end{array}$$

conmuta, donde las flechas verticales indican los morfismos de restricción correspondientes. Así se define el conjunto $\text{Hom}(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ y definiendo de forma natural la composición de los morfismos, se puede hablar de la *categoría de prehaces de base X con valores en \mathcal{C}* .

Decimos que un prehaz \mathcal{P} de base X con valores en \mathcal{C} es *completo* si para cada abierto $U \subset X$ y cada recubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de U , se satisfacen las siguientes condiciones:

- Dados $s, s' \in \mathcal{P}(U)$, si se cumple que $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ para todo $i \in I$, entonces $s = s'$.
- Dados $s_i \in \mathcal{P}(U_i)$ para todo $i \in I$, si se tiene que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo $i, j \in I$, entonces existe $s \in \mathcal{P}(U)$ tal que la restricción $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$.

Consideramos la subcategoría plena de la categoría de prehaces de base X con valores en \mathcal{C} cuyos objetos son prehaces completos y la llamamos *categoría de prehaces completos de base X con valores en \mathcal{C}* .

Un *espacio étalé o haz de conjuntos \mathfrak{E} de base X* es un espacio topológico E junto con una aplicación continua y sobreyectiva $\pi : E \rightarrow X$ que es homeomorfismo local; esto es, todo $e \in E$ posee un entorno abierto que se aplica de forma homeomorfa en un entorno abierto de $\pi(e)$. Llamamos *fibra de \mathfrak{E} en $x \in X$* al conjunto $\mathfrak{E}_x = \pi^{-1}(x) \subset E$. Dado otro espacio étalé $\mathfrak{E}' = \pi' : E' \rightarrow X$, un morfismo entre \mathfrak{E} y \mathfrak{E}' es una aplicación continua que respeta las fibras, esto es,

$$\Theta : E \rightarrow E', \quad \Theta(\mathfrak{E}_x) \subset \mathfrak{E}'_x, \quad x \in X.$$

Una *sección $s : U \rightarrow E$* de \mathfrak{E} definida en un abierto $U \subset X$ es una aplicación cumpliendo que $\pi(s(x)) = x$ para todo $x \in U$. Denotamos por $\Gamma(U, \mathfrak{E})$ el conjunto de secciones continuas de \mathfrak{E} definidas en un abierto U .

Decimos que \mathfrak{E} es un *haz de grupos (abelianos)* si para todo $x \in X$ se tiene una operación de *suma* $+_x : E_x \times E_x \rightarrow E_x$ de modo que $(\mathfrak{E}_x, +_x)$ tiene estructura de grupo (abeliano) y dadas secciones continuas $s, s' \in \Gamma(U, \mathfrak{E})$ se tiene que la siguiente sección es continua:

$$s - s' : U \rightarrow E, \quad x \mapsto s(x) -_x s'(x).$$

Para nosotros un anillo siempre hará referencia a un anillo conmutativo con unidad. Se dice que \mathfrak{E} es un *haz de anillos* si es un haz de grupos abelianos, para todo $x \in X$ se tiene una operación *producto* $\bullet_x : E_x \times E_x \rightarrow E_x$, de modo que $(\mathfrak{E}_x, +_x, \bullet_x)$ tiene estructura de anillo y dadas secciones continuas $s, s' \in \Gamma(U, \mathfrak{E})$ se tiene que

$$ss' : U \rightarrow E, \quad x \mapsto s(x) \bullet_x s'(x), \quad 1_U : U \rightarrow E, \quad x \mapsto 1_x$$

son secciones continuas, donde 1_x es el elemento unidad de \mathfrak{E}_x . Si cada \mathfrak{E}_x es además un anillo local, decimos que \mathfrak{E} es un *haz de anillos locales*.

Dado un anillo A , se tiene que \mathfrak{E} es un *haz de A -módulos* si es un haz de grupos abelianos, para todo $x \in X$ se tiene una operación *producto por escalares* $\cdot_x : A \times E_x \rightarrow E_x$, de modo que $(\mathfrak{E}_x, +_x, \cdot_x)$ tiene estructura de A -módulo y dada una sección continua $s \in \Gamma(U, \mathfrak{E})$ y un elemento $a \in A$, se tiene que la siguiente sección es continua:

$$as : U \rightarrow E, \quad x \mapsto a \cdot_x s(x).$$

Sea \mathcal{C} una categoría de entre la de grupos (abelianos), anillos (locales) o A -módulos. Sean \mathfrak{E} y \mathfrak{E}' dos haces de base X con valores en dicha categoría. Un morfismo entre \mathfrak{E} y \mathfrak{E}' es un morfismo $\Theta : E' \rightarrow E$ de haces de conjuntos al que además se le pide que para todo $x \in X$, el morfismo inducido $\Theta_x : E'_x \rightarrow E_x$ sea un morfismo dentro de \mathcal{C} .

Si \mathfrak{E} es un espacio étalé de base X con valores en la categoría \mathcal{C} , el conjunto de secciones continuas $\Gamma(U, \mathfrak{E})$, con U abierto de X , es un objeto de dicha categoría; obtenemos de este modo un prehaz $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}$ que además es completo y lo llamamos *prehaz completo asociado al espacio étalé* \mathfrak{E} . Recíprocamente, dado un prehaz \mathcal{P} de base X en la categoría \mathcal{C} , se puede definir un espacio étalé $\mathfrak{E}_{\mathcal{P}}$ asociado a \mathcal{P} . Se tiene que $\mathfrak{E}_{\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}} = \mathfrak{E}$ y $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}_{\mathcal{P}}} = \mathcal{P}$ cuando \mathcal{P} es un prehaz completo. Existe también una relación biunívoca entre morfismos de espacios étalé y morfismos de prehaces completos y se obtiene de este modo una equivalencia entre la “categoría de haces o espacios étalé de base X con valores en \mathcal{C} ” y la “categoría de prehaces completos de base X con valores en \mathcal{C} ”. Siempre que no haya confusión, utilizaremos indistintamente la notación de haz o de prehaz completo.

Ejemplo 1.1. El haz de gérmenes de funciones holomorfas \mathcal{O}_M sobre un espacio analítico complejo M es un haz de \mathbb{C} -álgebras locales (véase Sección 1.2).

Del mismo modo que hemos introducido la categoría de haces de A -módulos cuando A es un anillo, vamos a introducir la categoría de \mathcal{A} -módulos cuando \mathcal{A} es un haz de anillos.

Un \mathcal{A} -módulo $\mathcal{M} = \pi : M \rightarrow X$ es un haz de base X en la categoría de grupos abelianos, tal que para cada fibra \mathcal{M}_x se tiene una operación de producto por escalares $\cdot_x : A_x \times M_x \rightarrow M_x$, de modo que $(\mathcal{M}_x, +_x, \cdot_x)$ tiene estructura de A_x -módulo y dadas secciones continuas $a \in \Gamma(U, \mathcal{A})$ y $m \in \Gamma(U, \mathcal{M})$, se tiene que la sección

$$am : U \rightarrow M, \quad x \mapsto a(x) \cdot_x m(x)$$

es continua. Un morfismo entre dos \mathcal{A} -módulos $\mathcal{M} = \pi : M \rightarrow X$ y $\mathcal{M}' = \pi' : M' \rightarrow X$, es un morfismo de haces de conjuntos $\Theta : M' \rightarrow M$ al que además se le pide que para todo $x \in X$, el morfismo inducido $\Theta_x : M'_x \rightarrow M_x$ sea un morfismo de A_x -módulos.

Ejemplo 1.2. Dado un espacio analítico complejo M , el haz de gérmenes de uno-formas diferenciales Ω_M^1 es un haz de \mathcal{O}_M -módulos (véase Sección 1.2).

En esta categoría, así como en las descritas anteriormente, se definen los conceptos de módulo cociente por un submódulo, producto directo, suma directa, producto tensorial, producto exterior, etc. Estos conceptos no los vamos a desarrollar en este trabajo y los podemos encontrar con detalle en [21].

Estamos especialmente interesados en haces de anillos graduados y en módulos graduados sobre dichos haces. Vamos a describir brevemente estas categorías.

Sea X un espacio topológico. Un *haz de anillos graduados de base X* es un haz de anillos \mathcal{A} junto con una familia de subhaces de grupos $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$ tales que

$$\mathcal{A} = \bigoplus \mathcal{A}_n \text{ y } \mathcal{A}_n \mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_{n+m}, \quad n, m \geq 0.$$

La condición $\mathcal{A}_n \mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}_{n+m}$ es equivalente a que $\mathcal{A}_{n,x} \mathcal{A}_{m,x} \subset \mathcal{A}_{n+m,x}$ para todo $x \in X$. En particular, cada fibra $\mathcal{A}_x = \bigoplus \mathcal{A}_{n,x}$ es un anillo graduado. Tenemos además que \mathcal{A}_0 es un subhaz de anillos y cada \mathcal{A}_n es un \mathcal{A}_0 -módulo. Dados dos haces de anillos graduados y un homomorfismo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ en la categoría de haces de anillos, decimos que f es un *homomorfismo de haces de anillos graduados* si además $f(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{B}_n$ para todo $n \geq 0$. Nótese que, en particular, cada $f_x : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{B}_x$ es un homomorfismo de anillos graduados.

Dado un haz de anillos \mathcal{B} de base X , una *\mathcal{B} -álgebra graduada \mathcal{A} de base X* es un haz de anillos graduados que también tiene estructura de \mathcal{B} -módulo.

Un \mathcal{A} -módulo graduado \mathcal{M} de base X sobre un haz de anillos graduados \mathcal{A} es un \mathcal{A} -módulo junto con una familia de subhaces de grupos $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 0}$ tales que

$$\mathcal{M} = \bigoplus \mathcal{M}_n \text{ y } \mathcal{A}_n \mathcal{M}_m \subset \mathcal{M}_{n+m}, \quad n, m \geq 0$$

De nuevo, la condición $\mathcal{A}_n \mathcal{M}_m \subset \mathcal{M}_{n+m}$ es equivalente a que $\mathcal{A}_{n,x} \mathcal{M}_{m,x} \subset \mathcal{M}_{n+m,x}$ para todo $x \in X$. En particular, cada fibra $\mathcal{M}_x = \bigoplus \mathcal{M}_{n,x}$ es un \mathcal{A}_x -módulo graduado y tenemos además que cada \mathcal{M}_n es un \mathcal{A}_0 -módulo.

Espacios anillados. Los espacios anillados proporcionan un ejemplo muy geométrico de categoría en la cual están involucrados los haces y donde se sumergen prácticamente todos los tipos de objetos geométricos: espacios topológicos, variedades diferenciables, variedades analíticas reales y complejas, variedades algebraicas, esquemas y otro. No entraremos en detalles sobre su definición y propiedades, que pueden ser consultados en [32]. Someramente, un *espacio anillado en anillos locales* es un par (X, \mathcal{O}_X) , donde \mathcal{O}_X es un haz de base el espacio topológico X , llamado *haz estructural*. Generalmente el haz estructural se puede asimilar a un subhaz del anillo de funciones continuas en el cuerpo base, aunque no siempre es así. Cuando así sucede, los morfismos son aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ que inducen morfismos de haces $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ por composición con f .

1.2. Geometría analítica compleja

Consideremos el espacio \mathbb{C}^n dotado de coordenadas $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Dada una n -upla $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \in \mathbb{R}_{>0}^n$ y un punto $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{C}^n$, se llama *polidisco* $\Delta(\mathbf{m}; \boldsymbol{\rho})$ de radio $\boldsymbol{\rho}$ centrado en \mathbf{m} al conjunto

$$\Delta(\mathbf{m}; \boldsymbol{\rho}) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n; |a_j - m_j| < \rho_j; j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Notación 1.1. Para todo $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, consideramos las notaciones clásicas:

- $\mathbf{z}^\boldsymbol{\sigma} = z_1^{\sigma_1} z_2^{\sigma_2} \dots z_n^{\sigma_n}$.
- $|\boldsymbol{\sigma}| = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$.
- $\boldsymbol{\sigma}! = \sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_n!$.

Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, se dice que una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es *holomorfa* si para cada punto $\mathbf{m} \in U$, existe un polidisco $\Delta(\mathbf{m}; \boldsymbol{\rho}) \subset U$ tal que la restricción de f a $\Delta(\mathbf{m}; \boldsymbol{\rho})$ coincide con una serie convergente

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{z} - \mathbf{m})^{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{z} \in \Delta(\mathbf{m}; \boldsymbol{\rho})$$

Los coeficientes $a_{\boldsymbol{\sigma}}$ se obtienen de la fórmula integral de Cauchy

$$a_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\sigma}|} f}{\partial \mathbf{z}^{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{m}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - m_1| = r_1} \int_{|\xi_2 - m_2| = r_2} \dots \int_{|\xi_n - m_n| = r_n} \frac{f(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n}{\prod_{i=1}^n (\xi_i - m_i)^{\sigma_i + 1}},$$

donde $0 < r_j < \rho_j$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Resultará más adelante de nuestro interés descomponer \mathbf{z} en dos paquetes de coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, tales que

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \text{ e } \mathbf{y} = (y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n).$$

Escribamos análogamente $\mathbf{m} = (\mathbf{m}^x, \mathbf{m}^y)$, $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^x, \boldsymbol{\sigma}^y)$ y $\boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}^x, \boldsymbol{\rho}^y)$. Puesto que $f(\mathbf{z})$ tiene una expansión de Taylor en todo el polidisco $\Delta(\mathbf{m}; \boldsymbol{\rho})$, tenemos que, para todo $\boldsymbol{\sigma}^x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ existe una función holomorfa $a_{\boldsymbol{\sigma}^x}$ definida en el polidisco $\Delta(\mathbf{m}^y; \boldsymbol{\rho}^y)$ dada por la serie convergente

$$a_{\boldsymbol{\sigma}^x} = \sum_{\boldsymbol{\sigma}^y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-k}} a_{(\boldsymbol{\sigma}^x, \boldsymbol{\sigma}^y)} (\mathbf{y} - \mathbf{m}^y)^{\boldsymbol{\sigma}^y}, \quad \mathbf{y} \in \Delta(\mathbf{m}^y; \boldsymbol{\rho}^y)$$

Tomando \mathbf{y} como “constante” y considerando la función holomorfa en k variables definida por $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, tenemos que

$$a_{\boldsymbol{\sigma}^x} = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^x!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\sigma}^x|} g}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\sigma}^x}}(\mathbf{m}^x) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^x!} \frac{\partial^{|\boldsymbol{\sigma}^x|} f}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\sigma}^x}}(\mathbf{m}^x, \mathbf{y}).$$

Muchas veces escribiremos con el fin de clarificar $a_{\boldsymbol{\sigma}^x}(\mathbf{y})$. Dado un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, denotemos por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$ el anillo de las funciones holomorfas en el abierto U , con las leyes de multiplicación y suma de funciones. Fijado un polidisco $\Delta(\mathbf{m}; \boldsymbol{\rho})$, identificaremos el anillo $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\Delta(\mathbf{m}; \boldsymbol{\rho}))$ con el anillo de series de potencias con radio de convergencia $\boldsymbol{\rho}'$ “mayor” que $\boldsymbol{\rho}$, esto es, tal que

$$\rho'_j \geq \rho_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Tenemos de esta manera un espacio anillado $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$.

Si U y V son dos abiertos de \mathbb{C}^n y \mathbb{C}^p respectivamente, decimos que la aplicación

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_p) : U \rightarrow V$$

es *holomorfa* si cada componente f_j lo es. En este contexto, tenemos los teoremas clásicos de “la función inversa” y “la función implícita”. De esta manera, si $\Phi : U_1 \rightarrow U_2$ es una aplicación holomorfa entre dos abiertos de \mathbb{C}^n y si la matriz Jacobiana

$$\mathcal{J}_{\Phi} = \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial z_\ell} \right)_{1 \leq k, \ell \leq n}$$

es invertible en un punto $\mathbf{m}_1 \in U_1$, decimos que Φ es un *difeomorfismo local en \mathbf{m}_1* . Dicho de otro modo, existen dos abiertos $V_1 \subset U_1$ y $V_2 \subset U_2$ tales que $\mathbf{m}_1 \in V_1$ y $\mathbf{m}_2 = \Phi(\mathbf{m}_1) \in V_2$ y una aplicación holomorfa $\Psi : V_2 \rightarrow V_1$ tal que, ajustando los dominios de definición, se tiene

$$\Psi \circ \Phi = id_{V_1}, \quad \Phi \circ \Psi = id_{V_2}.$$

Sea $|M|$ una variedad topológica de dimensión $2n$. Un *espacio analítico complejo no singular* $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ de dimensión n es un \mathbb{C} -espacio anillado en \mathbb{C} -álgebras locales de funciones, recubierto por abiertos isomorfos a abiertos de $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Siempre y cuando no haya confusión escribiremos M para hacer referencia también al espacio topológico subyacente $|M|$.

En términos de cartas, un espacio analítico complejo no singular M está dado por dos cosas:

- Un recubrimiento $\{U_j\}_{j \in J}$ formado por abiertos U_j de $|M|$.
- Homeomorfismos $\Phi_j : U_j \rightarrow V_j$, con V_j abiertos de \mathbb{C}^n , que cumplen que las aplicaciones

$$\Phi_j \circ \Phi_\ell^{-1} : \Phi_\ell(U_j \cap U_\ell) \rightarrow \Phi_j(U_j \cap U_\ell)$$

de *cambio de carta*, son holomorfas.

Los U_j son los *dominios de las cartas*, los pares (U_j, Φ_j) las *cartas* y el conjunto $\{(U_j, \Phi_j)\}_{j \in J}$ es un *atlas de cartas*. A veces decimos que el abierto U_j está provisto de coordenadas: esto es, podemos leer con Φ_j las coordenadas del abierto V_j de \mathbb{C}^n . Los espacios analíticos complejos

no singulares más clásicos, y con los que esencialmente trabajaremos en esta memoria, son los abiertos de \mathbb{C}^n y los espacios proyectivos complejos

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia $\mathbf{m} \sim \mathbf{m}'$ si y sólo si existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbf{m}' = \lambda \mathbf{m}$.

Una aplicación $F : M \rightarrow N$ entre dos espacios analíticos complejos M y N se dice que es *holomorfa* (un morfismo dentro de la categoría de espacios analíticos) si para todo par de cartas $(U_j, \Phi_j), (V_k, \Psi_k)$ de M y N respectivamente, la aplicación $\Psi_k \circ F \circ \Phi_j^{-1}$ es holomorfa allá donde esté definida. Si existe la aplicación F^{-1} y también es holomorfa, decimos que F es un *biholomorfismo* (isomorfismo entre espacios analíticos complejos). En la Sección 1.4 hablaremos, en particular, de los morfismos de explosión.

Sea M un espacio analítico complejo. Consideremos un punto $p \in M$ y sea (U, Φ) una carta centrada en el punto p . Una curva parametrizada $c : D(0, \varepsilon) \rightarrow M$ con $c(0) = p$, define un *vector v_c tangente a M en p* (que no depende de la carta elegida) dado por

$$v_c = \frac{d(\Phi \circ c)}{dt}(0),$$

donde t es el parámetro tiempo con el que se define c . Denotamos por $T_p M$ al \mathbb{C} -espacio vectorial n -dimensional definido por todos los vectores tangentes a M en p . Escribimos $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ para denotar las funciones coordenadas definidas por Φ . Una base de $T_p M$ está dada por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial z_2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \Big|_p \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_p = v_{\xi_j},$$

donde $\xi_j : \lambda \mapsto \Phi^{-1}(0, 0, \dots, 0, \lambda, 0, \dots, 0)$ (con λ en la j -ésima posición). El *fibrado tangente* TM es la unión disjunta de los espacios tangentes en cada punto, esto es

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

Se dota a TM de una topología que convierte la proyección $\text{pr} : TM \rightarrow M$ en un fibrado vectorial. Sus secciones locales se llaman *campos de vectores*. Los gérmenes de campos de vectores se pueden organizar como fibras de un espacio étalé Θ_M , que llamaremos el *haz de gérmenes de campos de vectores holomorfos en M* . En términos de coordenadas locales, una base del $\mathcal{O}_{M,p}$ -módulo libre $\Theta_{M,p}$ de gérmenes de campos de vectores en p está dada por

$$\mathfrak{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}, \quad \frac{\partial}{\partial z_j} : p \mapsto \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_p.$$

Del mismo modo definimos el *fibrado cotangente* T^*M por

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M,$$

donde T_p^*M es el espacio vectorial dual de $T_p M$, esto es, las formas lineales $T_p M \rightarrow \mathbb{C}$. Las secciones locales del fibrado cotangente son las *uno-formas diferenciales* y construimos el *haz Ω_M^1 de gérmenes de uno-formas diferenciales holomorfas en M* de manera similar al caso anterior. En términos de coordenadas locales, una base del $\mathcal{O}_{M,p}$ -módulo libre $\Omega_{M,p}^1$ está dada por la base dual \mathfrak{B}^* de \mathfrak{B} que denotamos

$$\mathfrak{B}^* = \{dz_1, dz_2, \dots, dz_n\}.$$

Tomando los productos exteriores $\Lambda^r T_p^* M$ como modelos para las fibras, se introduce el haz Ω_M^r de gérmenes de r -formas diferenciales holomorfas sobre M . Si U es un abierto donde se tienen coordenadas $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, un elemento $\alpha \in \Omega_M^r(U)$ se escribe como

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n} a_{j_1 j_2 \dots j_r} dz_{j_1} \wedge dz_{j_2} \wedge \dots \wedge dz_{j_r}, \quad a_{j_1 j_2 \dots j_r} \in \mathcal{O}_M(U).$$

Consideremos el subespacio $E = (z_1 z_2 \dots z_k = 0)$ con $1 \leq k \leq n$. De modo similar al caso holomorfo se introducen los haces $\Omega_M^r(\log E)$ de gérmenes de r -formas diferenciales sobre M logarítmicas en E , donde una base viene dada por

$$\left\{ \frac{dz_{j_1}}{z_{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dz_{j_t}}{z_{j_t}} \wedge dz_{j_{t+1}} \wedge \dots \wedge dz_{j_r} \right\},$$

con $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq k$ y $k+1 \leq j_{t+1} < j_{t+2} < \dots < j_r \leq n$.

1.3. Foliaciones holomorfas singulares

Sea Ω_M^1 el haz de gérmenes de uno-formas holomorfas en M . Una *foliación singular holomorfa de codimensión uno* \mathcal{F} en M (para simplificar, una *foliación* en M) es un \mathcal{O}_M -submódulo coherente $\mathcal{F} \subset \Omega_M^1$ integrable e invertible y tal que el cociente Ω_M^1/\mathcal{F} es un \mathcal{O}_M -módulo libre de torsión. Dado un punto $p \in M$, la foliación \mathcal{F} está localmente generada por una uno-forma holomorfa $\eta \in \Omega_{M,p}^1$ que satisface la condición de integrabilidad de Frobenius dada por $\eta \wedge d\eta = 0$ y que escribimos en coordenadas locales (x_1, x_2, \dots, x_n) como

$$\eta = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n, \quad f_i \in \mathcal{O}_{M,p},$$

donde los f_i no tienen factores comunes. El orden $\nu_p(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} en el punto p se define por

$$\nu_p(\mathcal{F}) = \nu_p(f_1, f_2, \dots, f_n) = \min\{\nu_p(f_i); i = 1, 2, \dots, n\},$$

donde $\nu_p(f_i)$ es el orden en el punto p de los coeficientes f_i . El *lugar singular* $\text{Sing}(\mathcal{F})$ es el subconjunto analítico cerrado de M definido localmente por

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = (f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0).$$

Obsérvese que:

1. El punto $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ si y solamente si $\nu_p(\mathcal{F}) > 0$.
2. La codimensión en M del lugar singular $\text{Sing}(\mathcal{F})$ es como mínimo dos. Esto es consecuencia del hecho de que los coeficientes de η no tienen factores comunes.

En el entorno de un punto no singular, el teorema de Frobenius clásico, que enunciamos a continuación para una forma diferencial, permite comprender la estructura foliada del espacio definida por la forma diferencial.

Teorema 1.1 (Frobenius). Sea $\eta \in \Omega_{M,p}^1$ un germen de uno-forma diferencial integrable tal que $\eta(p) \neq 0$. Existen coordenadas locales (x_1, x_2, \dots, x_n) y una unidad $u \in \mathcal{O}_{M,p}$ tales que $\eta = u dz_n$ (localmente las placas de la foliación están dadas por $z_n = \text{cte}$).

Denotemos por Θ_M el haz de gérmenes de campos de vectores holomorfos en M . Recordemos que el teorema de rectificación de campos de vectores establece que:

Teorema 1.2. Consideremos un espacio analítico complejo no singular M y un germen de campo de vectores $\xi \in \Theta_{M,p}$ con $\xi(p) \neq 0$. Existen coordenadas locales (x_1, x_2, \dots, x_n) tales que $\xi = \partial/\partial z_1$.

Un germen $\xi \in \Theta_{M,p}$ se dice *tangente a una foliación \mathcal{F} en un punto $p \in M$* cuando $\eta(\xi) = 0$, donde η es un generador local de \mathcal{F} en el punto p . Sea k la dimensión del \mathbb{C} -espacio vectorial generado por los vectores $\xi(p)$, con ξ un germen de campo de vectores tangente a \mathcal{F} en p . El *tipo dimensional* $\tau_p(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} en p está dado por

$$\tau_p(\mathcal{F}) = n - k \geq 1.$$

Como consecuencia del teorema de rectificación y de la condición de integrabilidad, existen coordenadas locales (x_1, x_2, \dots, x_n) tales que \mathcal{F} está localmente generada por una uno-forma η del tipo

$$\eta = \sum_{i=1}^{\tau} f_i(x_1, x_2, \dots, x_{\tau}) dx_{\tau}, \quad \tau = \tau_p(\mathcal{F}). \quad (1.1)$$

Esto es, la foliación \mathcal{F} es localmente un cilindro analítico sobre una foliación de codimensión uno en un espacio de dimensión τ . Tales sistemas de coordenadas se llama *minimales*. Nótese que, en particular $\tau = 1$ si y solamente si $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Consideremos un morfismo $\phi : N \rightarrow M$, donde N es un espacio analítico complejo conexo no singular. Distinguiamos dos posibilidades:

- a) El morfismo ϕ es invariante para \mathcal{F} : El pull-back $\phi^*\eta$ es idénticamente cero para un generador dado η de \mathcal{F} en un punto dado $p \in M$. Equivalentemente, el pull-back $\phi^*\eta$ es idénticamente cero para cualquier generador η de \mathcal{F} en cualquier punto $p \in M$.
- b) El morfismo ϕ es genéricamente transversal a \mathcal{F} : El pull-back $\phi^*\eta$ define una uno-forma holomorfa no nula en N , para cualquier generador local η de \mathcal{F} en un punto dado $p \in M$. Definimos $\phi^*\mathcal{F}$ como la foliación en N dada localmente por los pull-backs $\phi^*\eta$, después de dividir por los factores comunes de los coeficientes.

Un subconjunto analítico cerrado $Y \subset M$ se dice *invariante para \mathcal{F} en $p \in Y$* si cada morfismo $\phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (M, p)$ que factoriza a través de (Y, p) es invariante. Decimos que Y es *invariante para \mathcal{F}* cuando lo es en cada punto $p \in Y$. La propiedad de ser invariante en un punto es cerrada y abierta en Y . Como consecuencia, un subespacio irreducible e invariante para \mathcal{F} en un punto es todo él invariante.

Recordemos ahora que una hipersuperficie H de M está dada localmente en un punto $p \in M$ por una ecuación reducida $f = 0$, donde $f \in \mathcal{O}_{M,p}$. Se dice que un subespacio analítico $Y \subset M$ de dimensión k es una intersección completa si está dado por la intersección de $n - k$ hipersuperficies $H_i \subset M$. Podemos comprobar que una intersección completa (y en particular una hipersuperficie) Y es invariante para \mathcal{F} en un punto $p \in Y$ si y solamente si existe un generador local η de \mathcal{F} tal que

$$\eta \wedge df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_k|_Y = 0,$$

donde $f_i = 0$ son ecuaciones locales reducidas de H_i , para $i = 1, 2, \dots, n - k$.

Observación 1.1. Todo subespacio $Y \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$ es invariante para \mathcal{F} , por definición.

Observación 1.2. El teorema de Fobrenius implica, en particular, que hay un único germen de hipersuperficie invariante para \mathcal{F} pasando por cada punto no singular.

1.4. Morfismos de explosión en \mathbb{C}^n

En esta sección recordamos brevemente la definición de explosión de un punto y de un subespacio analítico conexo no singular de \mathbb{C}^n , sin entrar en detalles como la propiedad universal de la explosión, el hecho de que son morfismos propios u otras propiedades intrínsecas.

Dados dos enteros positivos $k, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ con $n \geq k$, consideramos coordenadas

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ en } \mathbb{C}^n, \quad \mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_k] \text{ en } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{k-1}.$$

Sea $\phi : \mathbb{C}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{k-1}$ la aplicación natural dada por

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k) \mapsto \mathbb{P}(\mathbf{a}) = [a_1, a_2, \dots, a_k]$$

y tomemos el conjunto Σ dado por la clausura del grafo de ϕ , considerando la topología inducida por el producto $\mathbb{C}^k \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{k-1}$. Esto es

$$\Sigma = \text{cl}(\text{gr}(\phi)) = \{(a, \mathbb{P}(a)) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{k-1}; a \in \mathbb{C}^k \setminus \{0\}\} \cup \Sigma_0, \quad \Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{k-1}.$$

La aplicación $\pi : \Sigma \times \mathbb{C}^{n-k} \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ definida por

$$((\mathbf{a}, \mathbb{P}(\mathbf{a})), \mathbf{b}) \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k), \quad \mathbf{b} = (b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n)$$

se llama *explosión de \mathbb{C}^n con centro Y* , donde Y es el subconjunto de \mathbb{C}^n dado por

$$Y = (x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0).$$

Tenemos que π es sobreyectiva y además

$$\pi : (\Sigma \setminus \Sigma_0) \times \mathbb{C}^{n-k} \rightarrow (\mathbb{C}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{n-k}$$

es un isomorfismo. Llamamos *divisor excepcional* al subespacio E de Σ definido por

$$E = \pi^{-1}(0) = \Sigma_0 \times \mathbb{C}^{n-k} \subset \Sigma$$

Cuando $n = k$, recuperamos exactamente la explosión del origen de \mathbb{C}^n .

Nos interesa especialmente manejar la lectura en cartas afines del morfismo de explosión π . Llamamos *j -ésima carta de la explosión* al par $(\Sigma_j \times \mathbb{C}^{n-k}, \phi_j)$ donde $\Sigma_j = \Sigma \cap (X_j \neq 0)$ y

$$\phi_j : \Sigma_j \times \mathbb{C}^{n-k} \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$$

es la aplicación definida como sigue:

$$((\mathbf{a}, \mathbb{P}(\mathbf{a})), \mathbf{b}) \mapsto ((a_1/a_j, a_2/a_j, \dots, a_{j-1}/a_j, 1, a_{j+1}/a_j, \dots, a_n/a_j), \mathbf{b})$$

La composición $\pi \circ \phi_j^{-1}$ proporciona una lectura de la explosión en la j -ésima carta y se ve así:

$$\pi \circ \phi_j^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_j, x_2 x_j, \dots, x_{j-1} x_j, x_j, x_{j+1} x_j, \dots, x_k x_j, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

1.5. Singularidades presimples y simples en \mathbb{C}^2

En esta sección recordamos brevemente las definiciones clásicas de singularidades simples y presimples en el caso bidimensional y su comportamiento por explosión. Todos los detalles se pueden encontrar en [12].

Sea \mathcal{G} un germen de foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$ generado por una uno-forma holomorfa η dada en coordenadas por $\eta = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ y supongamos que el origen es una singularidad de \mathcal{G} , esto es $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Sea ξ el germen de campo de vectores tangente a \mathcal{G} dado por

$$\xi = f_2 \partial / \partial x_1 - f_1 \partial / \partial x_2.$$

y denotemos por L_ξ su parte lineal. Decimos que el origen es una *singularidad presimple para \mathcal{G}* si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, donde λ y μ son los autovalores de L_ξ . Esto es λ y μ son los autovalores de la matriz Jacobiana

$$\mathcal{J}_\xi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0) & -\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0) \end{pmatrix}.$$

El origen es una *singularidad simple para \mathcal{G}* si además el cociente de los autovalores cumple que $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}_{>0}$. Una singularidad simple para la cual $\lambda\mu = 0$ se llama una *silla-nodo*.

Observación 1.3. En una singularidad simple que no es una silla-nodo los ratios α y $1/\alpha$ de los autovalores de la matriz Jacobiana se corresponden con los índices de Camacho-Sad con respecto a la ramas invariantes (véase [7]).

Consideramos ahora la explosión

$$\pi : \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

centrada en el origen de \mathbb{C}^2 . Sea \mathcal{G}' el transformado de \mathcal{G} por π y denotemos $D = \pi^{-1}(0)$ el divisor excepcional. Si el origen es un punto regular o una singularidad presimple para \mathcal{G} , tenemos que todo punto $p' \in D$ es también regular o presimple para \mathcal{G}' . Más específicamente, distinguimos los siguiente casos:

1. El origen es un punto regular. En este caso D es invariante y hay solamente un punto $p' \in \text{Sing}(\mathcal{G}')$ que además es una singularidad simple para \mathcal{G}' (marca la tangente en el punto p de la única rama invariante de \mathcal{G} pasando por él).
2. El origen es una singularidad simple para \mathcal{G} . En este caso D es invariante y hay exactamente dos puntos $p'_1, p'_2 \in \text{Sing}(\mathcal{G}')$ que además son singularidades simples para \mathcal{G}' .
3. El origen es una singularidad presimple para \mathcal{G} pero no simple. Tomemos un germen de campo de vectores ξ con parte lineal L_ξ no nilpotente y separemos las siguientes tres posibilidades:
 - a) La parte lineal L_ξ es la identidad salvo un factor. En este caso D es dicrítico y no hay punto singulares para \mathcal{G}' (tipo campo radial).
 - b) La parte lineal L_ξ no es diagonalizable. El divisor excepcional D es invariante y hay solo un punto $p' \in \text{Sing}(\mathcal{G}')$ que además es una singularidad simple para \mathcal{G}' de tipo silla-nodo.
 - c) La parte lineal L_ξ tiene dos autovalores diferentes λ, μ con cociente $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}_{>1}$. En esta situación el divisor excepcional D es invariante y hay exactamente dos puntos $p', q' \in \text{Sing}(\mathcal{G}')$. Uno de ellos es una singularidad simple para \mathcal{G}' y el otro es presimple para \mathcal{G}' , pero todavía no es simple, con autovalores asociados $\lambda - \mu, \mu$.

1.6. Espacios foliados

En esta sección y en las próximas vamos a considerar no solamente una foliación, sino también un divisor con cruzamientos normales que la acompaña. Vamos, por tanto, a dar definiciones relativas al par formado por estos dos objetos.

Sea M un espacio analítico complejo no singular de dimensión n y sea $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia finita de hipersuperficies conexas no singulares. La unión $E = \cup_{i \in I} E_i$ se denomina un *divisor con cruzamientos normales de M* si para cada punto $p \in M$ existe un sistema local de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que, localmente, se tiene:

$$E \subset (x_1 x_2 \cdots x_n = 0). \quad (1.2)$$

Los sistemas de coordenadas que satisfacen esta propiedad se llaman *adaptados a E* . Dado un subespacio analítico irreducible $Y \subset M$, denotamos por $e_Y(E)$ el número de componentes irreducibles de E que contienen Y . Definimos el *tejido soporte combinatorio $\mathcal{H}_{M,E}$ de $E \subset M$* (en inglés “combinatorial support fabric”) por

$$\mathcal{H}_{M,E} = \{J \subset I; E_J \neq \emptyset\}, \quad E_J = \bigcap_{j \in J} E_j \quad (1.3)$$

Si cada E_J es conexo, decimos que E tiene *cruzamientos normales fuertes*. Cuando E cumple tal propiedad, el tejido soporte combinatorio $\mathcal{H}_{M,E}$ proporciona de forma natural una estratificación $\mathcal{S}_{M,E}$ del espacio M dada por

$$\mathcal{S}_{M,E} = \{S_J \subset M; J \in \mathcal{H}_{M,E}\}, \quad S_J = E_J \setminus \bigcup_{j \notin J} E_j \quad (1.4)$$

Esta condición de cruzamientos normales fuertes y la estratificación presentada serán de especial interés en las construcciones, definiciones y resultados de los Capítulos 3 y 4.

Consideremos ahora una foliación \mathcal{F} en M y un divisor con cruzamientos normales $E \subset M$. A las componentes irreducibles de E que no son invariantes para \mathcal{F} se les llama frecuentemente *componentes dicríticas*. Así, dividimos el conjunto de índices I en dos partes $I = I_{\text{inv}} \cup I_{\text{dic}}$, donde I_{inv} corresponde a las componentes invariantes e I_{dic} a las dicríticas. Igualmente, denotamos

$$E_{\text{inv}} = \bigcup_{i \in I_{\text{inv}}} E_i, \quad E_{\text{dic}} = \bigcup_{i \in I_{\text{dic}}} E_i.$$

Observación 1.4. Para cada punto $p \in M$, nótese las siguientes propiedades:

- a) $e_p(E_{\text{inv}}) \leq \tau_p(\mathcal{F})$
- b) $e_p(E_{\text{inv}}) \leq \nu_p(\mathcal{F}) + 1$

Decimos que \mathcal{F} y E tienen *cruzamientos normales en un punto* $p \in M$ cuando p es no singular, esto es $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$ y además se tiene que la unión $E \cup H$ es, de manera local, un divisor con cruzamientos normales, donde (H, p) es el único germen de hipersuperficie invariante pasando por el punto p . El *lugar singular adaptado* $\text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ se define por

$$\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \{p \in M; \mathcal{F} \text{ y } E \text{ no tienen cruzamientos normales en el punto } p\}.$$

Observación 1.5. Se tiene que $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$, pero la igualdad no se da necesariamente: Por ejemplo, consideremos la foliación en $(\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $d(x + y^2) = 0$ y consideremos el divisor con cruzamientos normales $E = (x = 0)$. Tenemos que, pese a que el origen es no singular, no es un punto de cruzamientos normales del divisor con la foliación, puesto que

$$(x = 0) \cup (x + y^2 = 0)$$

no es un divisor con cruzamientos normales, ya que $(x = 0)$ y $(x + y = 0)$ son curvas tangentes. Por tanto $0 \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E) \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Lema 1.1. El lugar singular adaptado $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) \subset M$ es un subconjunto analítico cerrado de M de codimensión mayor o igual que dos.

Demostración. Trabajamos localmente en un punto $p \in M$. Si $e_p(E_{\text{dic}}) = 0$, se tiene que $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \text{Sing}(\mathcal{F})$ y en este caso sabemos que es cierto. De un modo más general, consideramos un sistema local de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de manera que

$$E_{\text{dic}} = \bigcup_{j \in A_{\text{dic}}} (x_j = 0),$$

donde $A_{\text{dic}} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $\eta = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ un generador local de \mathcal{F} . Consideramos los subconjuntos analíticos cerrados dados por

$$Z_J = (x_j = 0; j \in J) \cap (f_j = 0; j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus J), \quad J \subset A_{\text{dic}}.$$

No es difícil de probar que $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \cup_J Z_J$, localmente en el punto p . Por tanto, si demostramos que $\text{codim}(Z_J) \geq 2$ para todo $J \subset A_{\text{dic}}$, hemos terminado.

Nótese que $Z_\emptyset = \text{Sing}(\mathcal{F})$ y como consecuencia $\text{codim}(Z_\emptyset) \geq 2$. Por otro lado, dado que $Z_J \subset (x_j = 0; j \in J)$, también se cumple que $\text{codim}(Z_J) \geq 2$ cuando $\#J \geq 2$. Supongamos ahora por reducción al absurdo, que hay un índice $j \in A_{\text{dic}}$ cumpliendo que $\text{codim}(Z_{\{j\}}) = 1$. Esto significa que $Z_{\{j\}} = (x_j = 0)$, por lo tanto se tiene

$$f_k = x_j \tilde{f}_k, \quad \tilde{f}_k \in \mathcal{O}_{M,p}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$$

y se concluye que $(x_j = 0)$ es invariante, lo cual da una contradicción. \blacksquare

Lema 1.2. Si $E_J \subset \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$, entonces E_J es invariante.

Demostración. Tomamos un sistema local de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ adaptado a E tal que $E_{J,\text{dic}} = (x_1 = \dots = x_r = 0) \subset E_{\text{dic}}$, $E_{J,\text{inv}} = (x_{r+1} = \dots = x_t = 0) \subset E_{\text{inv}}$ con $E_J = E_{J,\text{dic}} \cup E_{J,\text{inv}}$. Sea η un generador de \mathcal{F} en punto p . Tomando las notaciones como en el lema anterior, lo que queremos ver es que

$$\sum_{s=r+1}^n f_s dx_s \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_t|_{E_J} = 0,$$

Nótese que $f_s = x_i \tilde{f}_s$ con $\tilde{f}_s \in \mathcal{O}_{M,p}$ para todo $i = r+1, \dots, t$, pues $x_i = 0$ es una componente invariante de E . Por otro lado, con la descripción que hemos dado del lugar singular adaptado, tenemos que $E_J \subset \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ si y solo si

$$E_{J,\text{dic}} \subset (f_s = 0; s \in \{r+1, r+2, \dots, n\}).$$

Juntando estas dos cosas tenemos que $E_J \subset (f_s = 0; s \in \{t, t+1, \dots, n\})$ como queríamos. \blacksquare

Para hablar de propiedades relativas al par (\mathcal{F}, E) es útil introducir el concepto logarítmico de E -foliación. Cabe decir que éste es de orden técnico. Sea $\Omega_M^1(\log E)$ el haz de gérmenes de uno-formas logarítmicas a lo largo del divisor E . Una E -foliación \mathcal{L} en M es un \mathcal{O}_M -submódulo coherente $\mathcal{L} \subset \Omega_M^1(\log E)$ integrable e invertible y tal que el cociente $\Omega_M^1(\log E)/\mathcal{L}$ es un \mathcal{O}_M -módulo libre de torsión. Dado un punto $p \in M$, la E -foliación \mathcal{L} está localmente generada por una uno-forma logarítmica $\omega \in \Omega_{M,p}^1(\log E)$ que satisface la condición de integrabilidad de Frobenius dada por $\omega \wedge d\omega = 0$ y que escribimos en coordenadas locales (x_1, x_2, \dots, x_n) adaptadas a E como

$$\omega = \sum_{j \in A} a_j \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{j \in B} a_j dx_j, \quad a_j \in \mathcal{O}_{M,p}; \quad A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.5)$$

donde $E = \cup_{j \in A} (x_j = 0)$ y los coeficientes a_j no tienen factores comunes. Con esta escritura, el orden $\nu_p(\mathcal{L}, E)$ de \mathcal{L} en el punto p con respecto a E está dado por

$$\nu_p(\mathcal{L}, E) = \nu_p(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Definimos el lugar singular logarítmico $\log\text{-Sing}(\mathcal{L}, E)$ de \mathcal{L} con respecto a E como el subconjunto analítico cerrado de M definido localmente por

$$\log\text{-Sing}(\mathcal{L}, E) = (a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0).$$

Sean $\text{Fol}(M, E)$ y $\text{Fol}(M)$ los conjuntos de E -foliaciones y foliaciones en M , respectivamente. Nótese que $\text{Fol}(M) = \text{Fol}(M, \emptyset)$ y que hay una biyección

$$\text{Fol}(M) \rightarrow \text{Fol}(M, E), \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{L}_{\mathcal{F}},$$

donde $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ es tal que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}|_{M \setminus E} = \mathcal{F}|_{M \setminus E}$ y está definida en términos de generadores locales en un punto $p \in M$ por la relación

$$\eta = \left(\prod_{j \in A_{\text{inv}}} x_j \right) \omega,$$

donde $E_{\text{inv}} = \cup_{j \in A_{\text{inv}}} (x_j = 0)$ es la parte invariante del divisor E respecto a la foliación \mathcal{F} . A un generador local ω de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ lo llamamos también *generador local de \mathcal{F} adaptado a E* . Definimos el orden $\nu_p(\mathcal{F}, E)$ de \mathcal{F} adaptado a E y el lugar singular logarítmico $\log\text{-Sing}(\mathcal{F}, E)$ de \mathcal{F} adaptado a E por las igualdades:

$$\nu_p(\mathcal{F}, E) = \nu_p(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}, E), \quad \log\text{-Sing}(\mathcal{F}, E) = \log\text{-Sing}(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}, E).$$

Nótese que se tiene la relación $\nu_p(\mathcal{F}) = \nu_p(\mathcal{F}, E) + e_p(E_{\text{inv}}) - 1$.

Observación 1.6. Una componente irreducible $x_j = 0$ de E es dicrítica para \mathcal{F} si y solamente si existe un germe de función $\tilde{a}_j \in \mathcal{O}_{M,p}$ tal que $a_j = x_j \tilde{a}_j$, en la escritura de la Ecuación 1.5.

Definición 1.1. Un *espacio ambiente* $\mathcal{M} = (M, E)$ es un par que consiste en un espacio analítico complejo no singular M y un divisor con cruzamientos normales $E \subset M$. Un *espacio foliado* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es el dato de un espacio ambiente junto con una foliación \mathcal{F} en M .

Observación 1.7. Estamos interesados también en espacios ambiente donde se sustituye el espacio analítico complejo no singular M por un germe $\mathbf{M} = (M, K)$ de espacio analítico complejo no singular alrededor de un subconjunto analítico compacto K . Podemos transferir a este caso prácticamente todas las definiciones de este texto tomando representantes M del germe \mathbf{M} en un abierto suficientemente pequeño alrededor del compacto K . Por ello, a lo largo de esta memoria estamos considerando también, de modo implícito, este tipo de espacios ambiente, especificando cuando sea necesario cuándo hacemos referencia solamente a ellos.

Observación 1.8. En algunas situaciones requeriremos que el divisor que conforma nuestros espacios ambiente tenga la propiedad de cruzamientos normales fuertes. Como veremos más adelante, esto siempre ocurrirá en la situación combinatoria cuando partamos de $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Observación 1.9. La terminología “espacio foliado” está inspirada en el concepto “foliated manifold” introducido por A. Belotto en [4].

Hablamos ahora brevemente de los morfismos de explosión entre espacios foliados.

Consideremos $\mathcal{M} = (M, E)$ un espacio ambiente n -dimensional y sea $Y \subset M$ un subespacio analítico conexo no singular. Decimos que Y tiene *cruzamientos normales* con el divisor E si, para cada punto $p \in M$, existe un sistema local de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ adaptado a E y un subconjunto $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$ cumpliendo que

$$Y = \bigcap_{i \in B} (x_i = 0), \quad \text{localmente en } p.$$

Generalizando los morfismos de explosión, introducidos en la Sección 1.4, a espacios analíticos complejos cualesquiera, podemos considerar la explosión $\pi : M' \rightarrow M$ centrada en el subespacio $Y \subset M$. Ésta da un nuevo divisor con cruzamientos normales

$$E' = \pi^{-1}(E \cup Y)$$

y obtenemos así un nuevo espacio ambiente $\mathcal{M}' = (M', E')$. Cuando estamos bajo la hipótesis adicional de “cruzamientos normales fuertes”, debemos pedir al centro de explosión Y que cumpla además que la intersección $Y \cap E_J \subset M$ sea conexa para todo $J \in \mathcal{H}_{M,E}$. De este modo se garantiza que E' es nuevamente un divisor con cruzamientos normales fuertes.

Dada una foliación \mathcal{F} en M , decimos que el subespacio Y es un *centro admisible de explosión para el espacio foliado* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ si además de tener cruzamientos normales, es invariante para \mathcal{F} . Escribiremos, para sintetizar

$$\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F}),$$

donde \mathcal{F}' es el transformado de \mathcal{F} por la explosión π . En este caso, decimos también que π es una *explosión admisible de espacios foliados*. Si el divisor excepcional $\pi^{-1}(Y)$ es una componente dicrítica de E' , diremos que π es *dicrítica*.

1.7. Puntos presimples y vectores residuales

En esta sección modificamos ligeramente las definiciones de singularidad presimple y singularidad simple dadas para la dimensión dos en la Sección 1.5, tomando en cuenta no solo la foliación, sino también el divisor con cruzamientos normales. Además, extendemos el concepto a dimensión superior.

Consideremos un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, un punto $p \in M$ y un generador ω de \mathcal{F} adaptado a E , que recordamos que se escribe como en la Ecuación 1.5

$$\omega = \sum_{j \in A} a_j dx_j / x_j + \sum_{j \in B} a_j dx_j.$$

Escribimos $E_{\text{inv}} = \cup_{j \in A_{\text{inv}}} (x_j = 0)$ y $E_{\text{dic}} = \cup_{j \in A_{\text{dic}}} (x_j = 0)$, donde se tiene $A = A_{\text{inv}} \cup A_{\text{dic}}$.

Definición 1.2 (Véase [10, 19]). El punto p es *presimple para* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ si se cumple una de las siguientes propiedades:

1. El orden adaptado $\nu_p(\mathcal{F}, E) = 0$, esto es, alguno de los coeficientes de ω es una unidad.
2. Existe un par $(j, k) \in A \times B$ para el que se cumple $\partial a_j / \partial x_k(p) \neq 0$.

Observación 1.10. Recordemos que dado $j \in A_{\text{dic}}$ se cumple que $a_j = x_j \tilde{a}_j$. Como consecuencia se tiene que $\nu_p(a_j) > 0$ y también que $\partial a_j / \partial x_k(p) = 0$ para cualquier $k \in B$.

Definición 1.3. Decimos que un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ está *pre-desingularizado* cuando todo punto $p \in M$ es un punto presimple.

Observación 1.11. Para un espacio foliado pre-desingularizado se tiene la igualdad

$$\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \text{Sing}(\mathcal{F}).$$

Proposición 1.1. Si p es un punto presimple para el espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, entonces se satisface que $e_p(E_{\text{inv}}) \leq \tau_p(\mathcal{F}) \leq e_p(E_{\text{inv}}) + 1$.

Demostración. Cuando $\nu_p(\mathcal{F}, E) = 0$ se distinguen dos casos:

- Hay un índice $j \in A_{\text{inv}}$ tal que a_j es una unidad. Los gérmenes de campos de vectores

$$\xi_s = \partial / \partial x_s - (a_s / a_j) x_j \partial / \partial x_j, \quad s \in B; \quad \xi_\ell = \partial / \partial x_\ell - (\tilde{a}_\ell / a_j) x_j \partial / \partial x_j, \quad \ell \in A_{\text{dic}},$$

son tangentes a \mathcal{F} en p y el tipo dimensional es $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}})$, ya que no hay más campos de vectores independientes que trivialicen la foliación en dicho punto.

- Para todo $\ell \in A_{\text{inv}}$ y por tanto para todo $\ell \in A$, tenemos $\nu_p(a_\ell) > 0$ y hay un índice $k \in B$ tal que a_k es una unidad. Los gérmenes de campos de vectores

$$\xi_s = \partial / \partial x_s - (a_s / a_k) \partial / \partial x_k, \quad s \in B \setminus \{k\}; \quad \xi_\ell = \partial / \partial x_\ell - (\tilde{a}_\ell / a_k) \partial / \partial x_k, \quad \ell \in A_{\text{dic}},$$

son tangentes a \mathcal{F} en p y el tipo dimensional es $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}}) + 1$.

Supongamos ahora que $\nu_p(\mathcal{F}, E) > 0$, pero existe un par de índices $(j, k) \in A \times B$ tal que $\partial a_j / \partial x_k(p) \neq 0$. Los gérmenes de campos de vectores

$$\xi_s = \partial / \partial x_s + (\alpha_j / \alpha_s) x_j \partial / \partial x_j + (\alpha_k / \alpha_s) \partial / \partial x_k, \quad s \in B;$$

$$\xi_\ell = \partial / \partial x_\ell + (\tilde{\beta}_j / \beta_\ell) x_j \partial / \partial x_j + (\tilde{\beta}_k / \beta_\ell) \partial / \partial x_k, \quad \ell \in A_{\text{dic}},$$

donde

$$\alpha_j = \partial a_k / \partial x_s - \partial a_s / \partial x_k, \quad \beta_j = \partial a_\ell / \partial x_k - x_\ell \partial a_k / \partial x_\ell, \quad \beta_j = x_\ell \tilde{\beta}_j,$$

$$\alpha_k = x_j \partial a_s / \partial x_j - \partial a_j / \partial x_s, \quad y \quad \beta_k = x_\ell \partial a_j / \partial x_\ell - x_j \partial a_\ell / \partial x_j, \quad \beta_k = x_\ell \tilde{\beta}_k,$$

$$\alpha_s = \partial a_j / \partial x_k - x_j \partial a_k / \partial x_j \quad \beta_\ell = x_j \partial a_k / \partial x_j - \partial a_j / \partial x_k,$$

son tangentes a \mathcal{F} en el punto p gracias a la condición de integrabilidad. El tipo dimensional en este caso también es $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}}) + 1$. ■

Observación 1.12. En un punto presimple $p \in M$ se tiene que $e_p(E_{\text{dic}}) \leq n - \tau_p(\mathcal{F})$.

Clasificamos los puntos presimples en “trazas” y “esquinas” dependiendo de si se alcanza la cota inferior o la superior en la proposición anterior. De manera más precisa:

Definición 1.4. Dado un punto presimple $p \in M$ para el espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, decimos que:

- El punto p es de *tipo esquina* cuando $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}})$.
- El punto p es de *tipo traza* cuando $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}}) + 1$.

Observación 1.13. En vista de la prueba de la Proposición 1.1, el punto p es presimple de tipo esquina si y solamente si $\nu_p(a_j) = 0$ para algún $j \in A_{\text{inv}}$.

Denotemos $\tau = \tau_p(\mathcal{F})$ el tipo dimensional de \mathcal{F} en p . Sabemos que existe un sistema minimal de coordenadas locales $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y un generador local η de \mathcal{F} con

$$\eta(\partial/\partial x_j) = 0 \text{ y } \partial/\partial x_j(\eta(\partial/\partial x_\ell)) = 0,$$

para todo índice $j > \tau$ y todo $\ell \leq \tau$. Esto es, podemos escribir η como en la Ecuación 1.1. Decimos que \mathbf{x} es un *sistema minimal de coordenadas adaptado a E* cuando además se tiene:

$$E_{\text{inv}} = \bigcup_{j=1}^e (x_j = 0) \text{ y } E_{\text{dic}} \subset \bigcup_{j=\tau+1}^n (x_j = 0).$$

El generador de \mathcal{F} adaptado a E definido por

$$\omega = (1/\prod_{j=1}^e x_j)\eta$$

se puede escribir como sigue:

$$\omega = \sum_{j=1}^e a_j(x_1, x_2, \dots, x_\tau) \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{j=e+1}^\tau a_j(x_1, x_2, \dots, x_\tau) dx_j \quad (1.6)$$

La expresión de los campos de vectores ξ_s y ξ_ℓ en la prueba de la Proposición 1.1 junto con el conocimiento de la existencia de un sistema minimal de coordenadas locales en un punto dado, nos permiten probar el siguiente resultado:

Proposición 1.2. Existe un sistema minimal de coordenadas locales adaptado a E en un punto presimple $p \in M$ dado.

Supongamos ahora que p es un punto presimple para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, tomemos un sistema minimal de coordenadas \mathbf{x} adaptado a E y un generador adaptado ω como en la Ecuación 1.6. Recordemos que se cumple $e \leq \tau \leq e + 1$. Definimos el *vector residual* $\lambda_{\omega, \mathbf{x}} \in \mathbb{C}^\tau$ como

$$\lambda_{\omega, \mathbf{x}} = \begin{cases} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau) & \text{con } \lambda_i = a_i(p) & \text{si } \tau = e \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\tau-1}, \mu) & \text{con } \lambda_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_\tau}(p), \mu = a_\tau(p) & \text{si } \tau = e + 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Observación 1.14. Puesto que p es un punto presimple, tenemos que $\lambda_{\omega, \mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$.

Lema 1.3. Sea p un punto presimple para el espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Considérense dos sistemas minimales de coordenadas locales adaptados a E

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ y } \mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

tales que $(x_j = 0) = (x'_j = 0)$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, e\}$. Dados ω y ω' dos generadores de \mathcal{F} adaptados a E como en la Ecuación 1.6, existe una constante $c \in \mathbb{C}^*$ de modo que se satisface la igualdad

$$\lambda_{\omega, \mathbf{x}} = c \lambda_{\omega', \mathbf{x}'}$$

Demostración. Sabemos que hay unidades $u, u_j \in \mathcal{O}_{M,p}$ con $\partial/\partial x_k(u) = \partial/\partial x_k(u_j) = 0$ para todo $k > \tau$, que cumplen

$$\omega' = u\omega \text{ y } x'_j = u_j x_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, e\}$$

Además, cuando $\tau = e + 1$, tenemos que

$$x'_\tau = \alpha x_\tau + \phi(x_1, x_2, \dots, x_{\tau-1}) + x_\tau \psi(x_1, x_2, \dots, x_\tau),$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}^*$ y $\phi(p) = \psi(p) = 0$.

Si consideramos el sistema de coordenadas fijo, esto es $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ y cambiamos de generador, tenemos la igualdad $\lambda_{\omega', \mathbf{x}} = c\lambda_{\omega, \mathbf{x}}$, donde $c = u(p)$. Para verlo nótese que:

- En el caso de tipo equina se tiene que $a'_j = ua_j$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, e\}$.
- En el caso de tipo traza se cumple $a'_\tau = ua_\tau$ y además, se satisface la igualdad

$$\partial a'_j / \partial x_\tau = u \partial a_j / \partial x_\tau + a_j \partial u / \partial x_\tau, \quad j \in \{1, 2, \dots, e\}.$$

Tenemos que $\partial a'_j / \partial x_\tau(p) = c \partial a_j / \partial x_\tau(p)$, pues $a_j(p) = 0$ (sino estaríamos con una singularidad de tipo esquina y por tanto, la escritura considerada no sería minimal).

Supongamos ahora que tenemos un único generador $\omega = \omega'$ y aquello que variamos es el sistema de coordenadas. Vamos a escribir de forma condensada los casos traza y esquina como sigue:

$$\begin{aligned} \omega &= a_1 dx_1 / x_1 + \dots + a_{\tau-1} dx_{\tau-1} / x_{\tau-1} + x_\tau^\varepsilon a_\tau dx_\tau / x_\tau = \\ &= a'_1 dx'_1 / x'_1 + \dots + a'_{\tau-1} dx'_{\tau-1} / x'_{\tau-1} + x'^\varepsilon a'_\tau dx'_\tau / x'_\tau, \end{aligned}$$

donde $\varepsilon = \tau - e$. Si $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, evidentemente hemos terminado. Vamos a suponer en primer lugar que existe un índice $j \in \{1, 2, \dots, e\}$ para el cual $u_j \neq 1$ y además que $x'_i = x_i$ para cualquier otro índice $i \neq j$. Se tiene que:

- $a'_j = a_j(1 + x_j h_j)$ y
- $a'_i = a_i + x_i h_i a_j$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, \tau\} \setminus \{j\}$.

donde los gérmenes de funciones h_j se obtienen de la expresión

$$du_j / u_j = x_1 h_1 dx_1 / x_1 + x_2 h_2 dx_2 / x_2 + \dots + x_\tau h_\tau dx_\tau / x_\tau.$$

Como consecuencia, en este caso $\lambda_{\omega, \mathbf{x}} = \lambda_{\omega, \mathbf{x}'}$. Nos queda comprobar qué sucede en la situación de tipo traza cuando $x'_i = x_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, e\}$ y $x'_\tau \neq x_\tau$. Obtenemos las relaciones:

- $a'_\tau = ca_\tau(1 - \psi - x_\tau \partial \psi / \partial x_\tau)$ y
- $a'_i = a_i - cx_i a_\tau (\partial \phi / \partial x_i + x_\tau \partial \psi / \partial x_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, e\}$

donde $c = 1/\alpha$. Por tanto se cumple la igualdad $\lambda_{\omega, \mathbf{x}} = c\lambda_{\omega, \mathbf{x}'}$. ■

1.8. Puntos Simples. Marco hiperbólico-complejo.

Prácticamente todos los resultados en esta memoria se dan bajo la hipótesis hiperbólico-compleja que introducimos a continuación. En este marco vamos a dar caracterizaciones de las singularidades presimples y a introducir la definición de singularidad simple.

Las siguiente definición se puede encontrar en [15]:

Definición 1.5. Una foliación \mathcal{F} de un espacio analítico complejo M es *hiperbólico-compleja* en un punto $p \in M$ (en inglés “complex hyperbolic”) si no existe ningún morfismo genéricamente transversal

$$\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, p)$$

cumpliendo que el origen sea una silla-nodo para la foliación bidimensional $\phi^{-1}\mathcal{F}$. Se dice que la foliación \mathcal{F} es *hiperbólico-compleja* si la propiedad se da en cada punto $p \in M$. Finalmente, un espacio foliado (M, \mathcal{F}) es *hiperbólico-complejo* cuando la correspondiente foliación lo es.

Para dimensión dos y en el sentido clásico (no adaptado al divisor), tenemos que

1. Una singularidad simple para una foliación es hiperbólico-compleja si y solamente si no es una silla-nodo.
2. Las singularidad presimples pero no simples que no son hiperbólico-complejas son las presentadas en el apartado 3b) de la Sección 1.5.

Para el caso general, si $\pi : M' \rightarrow M$ es una explosión tenemos la siguiente propiedad de estabilidad: Si la foliación \mathcal{F} es hiperbólico-compleja, entonces su transformado \mathcal{F}' también es hiperbólico-complejo.

Consideremos un espacio foliado (M, \mathcal{F}) hiperbólico-complejo en un punto $p \in M$. Sea ω un generador local de \mathcal{F} adaptado a E , que recordamos se escribe como en la Ecuación 1.5

$$\omega = \sum_{\ell \in A} a_\ell dx_\ell / x_\ell + \sum_{\ell \in B} a_\ell x_\ell.$$

De nuevo, escribimos $A = A_{\text{inv}} \cup A_{\text{dic}}$, para separar las componentes invariantes de E de las dicríticas.

Proposición 1.3. Tenemos que p es presimple para (M, \mathcal{F}) si y solamente si $\nu_p(\mathcal{F}, E) = 0$. Como consecuencia tenemos la igualdad

$$\log\text{-Sing}(\mathcal{F}, E) = \left\{ \begin{array}{l} \text{puntos no presimples} \\ \text{para } (M, \mathcal{F}) \end{array} \right\}. \quad (1.8)$$

Demostración. Si $\nu_p(\mathcal{F}, E) = 0$ el punto p es presimple por definición. Vamos a suponer ahora, por reducción al absurdo, que p es un punto presimple cumpliendo que $\nu_p(\mathcal{F}, E) > 0$. Existen índices $(j, k) \in A \times B$ para los que se cumple $\partial a_j / \partial x_k(p) \neq 0$. De hecho $j \in A_{\text{inv}}$, en vista de la observación 1.10. Consideramos $n - 1$ enteros positivos $q_\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ con $\ell \neq k$ tales que

$$\sum_{\ell \in A} q_\ell \frac{\partial a_\ell}{\partial x_k}(p) = \sum_{\ell \in A_{\text{inv}}} q_\ell \frac{\partial a_\ell}{\partial x_k}(p) = \alpha \neq 0.$$

Estos enteros siempre existen, puesto que por lo menos se tiene que $\partial a_j / \partial x_k(p) \neq 0$. Tomamos el morfismo $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, p)$ dado por las relaciones

$$x_i = u^{q_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\} \quad \text{y} \quad x_k = v.$$

Sea η el generador holomorfo de \mathcal{F} asociado a ω . El pull-back $\phi^*\eta$ está dado por $u^Q \bar{\eta}$, donde

$$\bar{\eta} = \left(\sum_{\ell \in A} q_\ell \bar{a}_\ell + \sum_{\ell \in B \setminus \{k\}} q_\ell u^{q_\ell} \bar{a}_\ell \right) du + u \bar{a}_k dv, \quad \text{con}$$

$$\bar{a}_k = \phi^* a_k \quad \text{y} \quad Q = \sum_{k \in A_{\text{inv}}} q_k - 1$$

El germen de foliación bidimensional $\phi^{-1}\mathcal{F}$ está generado por $\bar{\eta}$. Nótese que

$$\partial \bar{a}_\ell / \partial v(0) = \partial a_\ell / \partial x_k(p),$$

para todo índice $\ell \in A$ y por tanto α y 0 son los autovalores de la parte lineal de un germen de campo de vectores tangente a $\phi^{-1}\mathcal{F}$, es decir el origen es una silla-nodo, lo cual nos proporciona la contradicción deseada. ■

Proposición 1.4. Supongamos que $e_p(E_{\text{inv}}) \geq 1$. Tenemos que p es un punto presimple de tipo esquina para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ si y solamente si $\nu_p(a_j) = 0$, para todo $j \in A_{\text{inv}}$.

Demostración. En vista de la Observación 1.13, el punto p es presimple de tipo esquina si y solamente si $A_{\text{inv}} \neq \emptyset$ y además existe un índice $j \in A_{\text{inv}}$ tal que $\nu_p(a_j) = 0$. Por tanto, asumiendo que el punto p es presimple de tipo esquina, vamos a suponer por reducción al absurdo que existe un índice $\ell \in A_{\text{inv}} \setminus \{j\}$ con $\nu_p(a_\ell) > 0$ y vamos a encontrar una contradicción con la hipótesis hiperbólica-compleja.

Consideramos $n - 1$ enteros positivos $q_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ con $i \neq \ell$ tales que

$$\sum_{k \in A \setminus \{\ell\}} q_k a_k(p) = \sum_{k \in A_{\text{inv}} \setminus \{\ell\}} q_k a_k(p) = \alpha \neq 0.$$

Estos enteros siempre existen, puesto que por lo menos se tiene $a_j(p) \neq 0$. Tomamos el morfismo $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, p)$ dado por las relaciones

$$x_i = u^{q_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{\ell\} \quad \text{y} \quad x_\ell = v.$$

Sea η el generador holomorfo de \mathcal{F} asociado a ω . El pull-back $\phi^*\eta$ está dado por $u^Q \bar{\eta}$, donde

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \left(\sum_{k \in A \setminus \{\ell\}} q_k \bar{a}_k + \sum_{k \in B} q_k u^{q_k} \bar{a}_k \right) v du + \bar{a}_\ell u dv, \quad \text{con} \\ \bar{a}_k &= \phi^* a_k \quad \text{y} \quad Q = \sum_{k \in A_{\text{inv}} \setminus \{\ell\}} q_k - 1 \end{aligned}$$

El germen de foliación bidimensional $\phi^{-1}\mathcal{F}$ está generado por $\bar{\eta}$. Nótese que $\bar{a}_k(0) = a_k(p)$ para todo índice k y por tanto α y 0 son los autovalores de la parte lineal de un germen de campo de vectores tangente a $\phi^{-1}\mathcal{F}$, es decir el origen es una silla-nodo, lo cual nos proporciona la contradicción deseada. \blacksquare

Lema 1.4. Si p es un punto presimple para el espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, el vector residual $\lambda_{\omega, \mathbf{x}}$ pertenece al toro complejo $(\mathbb{C}^*)^\tau$.

Demostración. Sea ω un generador minimal adaptado como en la Ecuación 1.6. Si p es de tipo esquina, tenemos que hay por lo menos una componente del divisor E invariante y como consecuencia de la Proposición 1.4 concluimos. Supongamos ahora que p es un punto presimple de tipo traza. Tenemos que $\omega = \sum_{j=1}^e a_j dx_j/x_j + a_\tau dx_\tau$ y escribimos

$$\lambda_{\omega, \mathbf{x}} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e, \mu)$$

como en la Ecuación 1.7. En vista de la Proposición 1.3 y la Observación 1.13, tenemos que $\mu \neq 0$ y podemos tomar $a_\tau = \mu = 1$. Asumamos, por reducción al absurdo, que $\lambda_1 = \partial a_1 / \partial x_\tau(p) = 0$ y busquemos una contradicción. Consideramos τ enteros positivos $q_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que

$$q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + \dots + q_e \lambda_e + q_\tau = \alpha \neq 0 \quad \text{y} \quad q_i > q_\tau, \quad i = 1, 2, \dots, e.$$

Tomamos el morfismo $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, p)$ dado por las relaciones

$$x_1 = u^{q_1} v; \quad x_\ell = u^{q_\ell}, \quad \ell \in \{2, 3, \dots, \tau\} \quad \text{y} \quad x_j = 0, \quad j \in \{\tau + 1, \dots, n\}.$$

El germen de foliación bidimensional $\phi^{-1}\mathcal{F}$ está dado por la ecuación $\bar{\eta} = 0$, donde

$$\bar{\eta} = v(q_1 \bar{a}_1 + q_2 \bar{a}_2 + \dots + q_e \bar{a}_e + q_\tau) du + u q_1 \bar{a}_1 dv, \quad u^p \bar{a}_\ell = \phi^* a_\ell.$$

Obsérvese que $\bar{a}_\ell(0) = \partial a_\ell / \partial x_\tau(p) = \lambda_\ell$ para todo índice $\ell \in \{1, 2, \dots, e\}$ y por tanto α y 0 son los autovalores de la parte lineal de un germen de campo de vectores tangente a $\phi^{-1}\mathcal{F}$, es decir el origen es una silla-nodo, lo cual nos proporciona la contradicción deseada. \blacksquare

Introducimos ahora la definición de punto simple dentro del contexto hiperbólico-complejo. Dados un entero positivo $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ y un vector $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \in \mathbb{C}^s$, decimos que una s -upla $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ de enteros no negativos es una *resonancia para β* si se cumple:

$$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \dots + r_s\beta_s = 0.$$

Decimos que β es *no resonante* si no tiene resonancias distintas de $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Observación 1.15. Nótese que solamente hemos considerado resonancias no negativas. En cambio, las resonancias de Martinet-Ramis en [25] permiten también entradas negativas en \mathbf{r} .

Definición 1.6. Un punto $p \in M$ es *simple para un espacio foliado hiperbólico-complejo* (M, \mathcal{F}) si es presimple y además los vectores residuales $\lambda_{\omega, \mathbf{x}}$ son no resonantes (esta propiedad no depende de la elección particular de \mathbf{x} y ω , en vista del Lema 1.3).

Definición 1.7. Decimos que un espacio foliado (M, \mathcal{F}) está *desingularizado* si todo punto $p \in M$ es un punto simple.

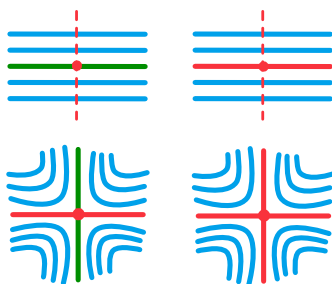


Figura 1.1: Singularidades simples hiperbólico-complejas en dimensión dos.

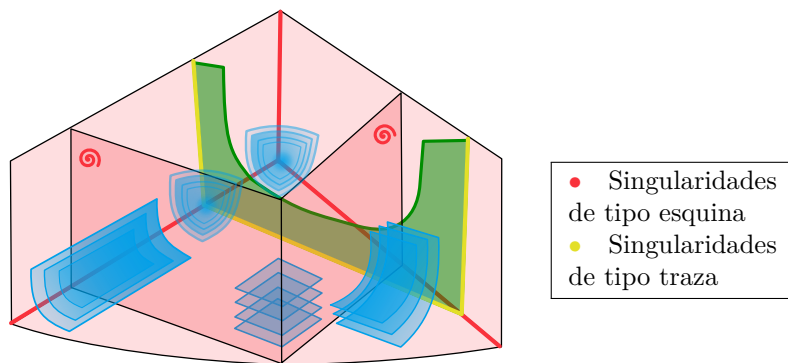


Figura 1.2: Figura final: Singularidades simples en dimensión tres.

La definición de punto simple que acabamos de introducir coincide con la dada en [10, 11] en el contexto general no hiperbólico-complejo y que, pese a que no la vamos a necesitar, enunciamos a continuación en aras de completitud.

Definición 1.8. Un punto $p \in M$ es *simple para un espacio foliado* (M, \mathcal{F}) si existe un sistema local de coordenadas formales $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_\tau, x_{\tau+1}, \dots, x_n)$, donde $\tau = \tau_p(\mathcal{F})$ es el tipo dimensional de la foliación \mathcal{F} en el punto p , tal que:

$$\bigcup_{i=2}^{\tau} (\hat{x}_i = 0) \subset E_{\text{inv}} \subset \bigcup_{i=1}^{\tau} (\hat{x}_i = 0), \quad E_{\text{dic}} \subset \bigcup_{i=\tau+1}^n (x_i = 0)$$

y además la foliación \mathcal{F} está definida localmente por una ecuación formal $\hat{\omega} = 0$, donde $\hat{\omega}$ es una uno-forma logarítmica formal de los tipos descritos a continuación:

I. Existe un vector no resonante $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau) \in (\mathbb{C}^*)^\tau$ tal que

$$\hat{\omega} = \lambda_1 d\hat{z}_1/\hat{z}_1 + \lambda_2 d\hat{z}_2/\hat{z}_2 + \dots + \lambda_\tau d\hat{z}_\tau/\hat{z}_\tau.$$

Obsérvese que si p es de tipo esquina $\hat{\omega}$ es un generador formal de \mathcal{F} adaptado a E en p es. Si en cambio p es de tipo traza, un generador adaptado a E está dado por $\hat{z}_1\hat{\omega}$.

II. Hay un entero $k \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq k \leq \tau$, una serie formal $\Psi \in \mathbb{C}[[t]]$, con $\Psi(0) = 0$, una k -upla $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k) \in \mathbb{Z}_{>0}^k$ y dos vectores

$$\alpha_{\mathbf{a}} = (\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^{k-1} \text{ y } \alpha_{\mathbf{b}} = (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_\tau) \in (\mathbb{C}^*)^{\tau-k},$$

con $\alpha_{\mathbf{b}}$ no resonante, de modo que

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^k p_i \frac{d\hat{z}_i}{\hat{z}_i} + \Psi(\hat{z}_1^{p_1} \hat{z}_2^{p_2} \dots \hat{z}_k^{p_k}) \sum_{i=2}^{\tau} \alpha_i \frac{d\hat{z}_i}{\hat{z}_i}$$

Si p es de tipo esquina, un generador formal de \mathcal{F} adaptado a E en p es $\hat{\omega}$. Si p es de tipo traza, un generador adaptado a E es $\hat{z}_1\hat{\omega}$.

Observación 1.16. Ser simple es una propiedad abierta en M . Esto es, si $p \in M$ es un punto simple para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, hay un abierto $U \subset M$ suficientemente pequeño que contiene p y es tal que cada punto $q \in U$ es a su vez simple para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Consideramos un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ hiperbólico-complejo en un punto simple $p \in M$ con tipo dimensional $\tau = \tau_p(\mathcal{F})$. Damos una descripción local alrededor de p del lugar singular, las hipersuperficies invariantes y el conjunto $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}$ de singularidades de tipo traza para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

- Si p es de tipo esquina, entonces $E_{\text{inv}} = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_\tau$ y las únicas hipersuperficies invariantes para \mathcal{F} pasando por el punto p están contenidas en E . En este caso además tenemos que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} = \emptyset$, localmente en p .
- Si p es de tipo traza, entonces $E_{\text{inv}} = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{\tau-1}$ y hay exactamente un germen de hipersuperficie invariante H no contenido en E (para el caso general no hiperbólico-complejo, véase [11]). En esta situación tenemos que

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} = (E_1 \cap H) \cup (E_2 \cap H) \cup \dots \cup (E_{\tau-1} \cap H). \quad (1.9)$$

En ambos casos el lugar singular $\text{Sing}(\mathcal{F})$ viene dado, localmente en el punto p , por

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq \tau} E_i \cap E_j,$$

escribiendo $E_\tau = H$ cuando p es de tipo traza.

1.9. Foliaciones dicríticas

En muchos de los resultados que vamos a tratar en los sucesivos capítulos, las componentes dicríticas que puedan aparecer en el divisor juegan un papel fundamental. Es por ello que vamos a dedicar una breve sección a la siguiente definición, que se puede encontrar en [?, 15]:

Definición 1.9. Una foliación \mathcal{F} es *dicrítica en un punto* $p \in M$ cuando hay un morfismo genéricamente transversal $\phi: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, p)$, tal que

$$\phi^{-1}\mathcal{F} = (dx = 0)$$

y $\phi(y = 0)$ es invariante para \mathcal{F} , donde (x, y) son coordenadas en $(\mathbb{C}^2, 0)$. La foliación \mathcal{F} se dice *no dicrítica* si es no dicrítica en cada punto $p \in M$. Un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ se dice *no dicrítico* si \mathcal{F} es no dicrítica y $E_{\text{dic}} = \emptyset$.

Observación 1.17. Nótese que en la definición previa $y = 0$ es una curva, por tanto $\phi(y = 0)$ es o bien el punto p o un germen en p de curva analítica, y por tanto tiene sentido preguntarse si es invariante o no.

La siguiente propiedad de estabilidad por una explosión admisible $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ entre espacios foliados se satisface: Si \mathcal{F} es una foliación no dicrítica, entonces tanto su transformado \mathcal{F}' como la explosión π son no dicríticos. Nótese que, para que la segunda parte sea cierta (π es no dicrítica), es imprescindible la condición exigida al centro de explosión de ser invariante para la foliación.

En vista de esta propiedad, otra definición alternativa de foliación dicrítica que se puede encontrar en la literatura es la que damos a continuación.

Definición 1.9. Una foliación \mathcal{F} se dice *no dicrítica* si para cualquier composición

$$\sigma : (\mathcal{M} = (M, \emptyset), \mathcal{F}) \leftarrow (\mathcal{M}^1, \mathcal{F}^1) \leftarrow \dots \leftarrow (\mathcal{M}^N = (M^N, E^N), \mathcal{F}^N)$$

de una sucesión finita de explosiones admisibles se tiene que $E_{\text{dic}}^N = \emptyset$.

1.10. Reducción y pre-reducción de singularidades

En esta sección recordamos los principales resultados sobre el problema de reducción de singularidades de espacios foliados.

Consideremos un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ y sea $\sigma : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ un morfismo obtenido, salvo isomorfismo, por composición de una sucesión finita de explosiones admisibles. Esto es

$$\sigma : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') = (\mathcal{M}^r, \mathcal{F}^r) \xrightarrow{\pi_r} (\mathcal{M}^{r-1}, \mathcal{F}^{r-1}) \xrightarrow{\pi_{r-1}} \dots \xrightarrow{\pi_1} (\mathcal{M}^0, \mathcal{F}^0) = (\mathcal{M}, \mathcal{F}),$$

donde cada π_i es una explosión admisible de espacios foliados.

- Si el espacio foliado $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ está pre-desingularizado, decimos que el morfismo σ es una *pre-reducción de singularidades* de $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.
- Análogamente, si el espacio foliado $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ está desingularizado, se dice que σ es una *reducción de singularidades* de $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

En la situación bidimensional se puede hablar de la minimalidad de estos procesos de desingularización. Una reducción de singularidades $\sigma : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ se denomina *minimal* si para cualquier otro morfismo de reducción de singularidades $\bar{\sigma} : (\mathcal{M}'', \mathcal{F}'') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$, hay una única factorización $\bar{\sigma} = \sigma \circ f$, donde

$$f : (\mathcal{M}'', \mathcal{F}'') \rightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{F}')$$

es la composición de una sucesión finita de explosiones (salvo isomorfismo). Nótese que una reducción de singularidades es minimal si y solamente si todos los centros de explosión son puntos no simples. Del mismo modo, definimos y caracterizamos el proceso de *pre-reducción minimal de singularidades*. Estos conceptos de minimalidad no existen, en general, en dimensión superior.

La existencia de reducción de singularidades de un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ de dimensión n (siendo M es un germen alrededor de un compacto) se conoce en las siguiente situaciones:

- Cuando $n = 2$. La prueba es consecuencia del clásico teorema de A. Seidenberg en [40], completando la reducción de singularidades para ajustarla al caso adaptado.
- Cuando $n = 3$. El resultado está probado por F. Cano y D. Cerveau en el caso no dicrítico (véase [11]) y por F. Cano en el caso general (véase [10]).

- Siempre existe reducción de singularidades si $\mathcal{M} = ((\mathbb{C}^n, 0), \emptyset)$ y \mathcal{F} es una foliación hiperbólico-compleja no dicrítica. De hecho, ésta viene dada por la desingularización de las hipersuperficies invariantes de \mathcal{F} . La prueba para el caso $n = 2$ se encuentra en [8], para $n = 3$ en [20] y para $n \geq 4$ se deduce también de [20]. Es por esta razón que estas foliaciones son llamadas en la literatura “hipersuperfices generalizadas”.
- Si el espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ está pre-desingularizado, se trata de un resultado probado por M. Fernández-Duque en [19].

Para $n \geq 4$ la existencia de reducción de singularidades es un problema abierto, incluso en el caso hiperbólico-complejo dicrítico.

1.11. Foliosiones de tipo tórico

El concepto de foliación de tipo tórico fue introducido por M.I.T. Camacho y F. Cano en [9] para el caso bidimensional. Aquí lo adaptamos al contexto de espacios foliados y lo generalizamos a dimensión ambiente superior. En el Capítulo 4 de este texto daremos una caracterización de los espacio foliados de tipo tórico (débil) en términos de condiciones de no-degeneración sobre sus “formas iniciales pesadas”.

Consideremos un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Una explosión admisible $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es *combinatoria* si su centro de explosión es una componente conexa del subespacio $E_J \subset M$, para algún $J \in \mathcal{H}_{M,E}$. La composición de una sucesión finita de explosiones admisibles se dice *combinatoria* si cada una de ellas lo es.

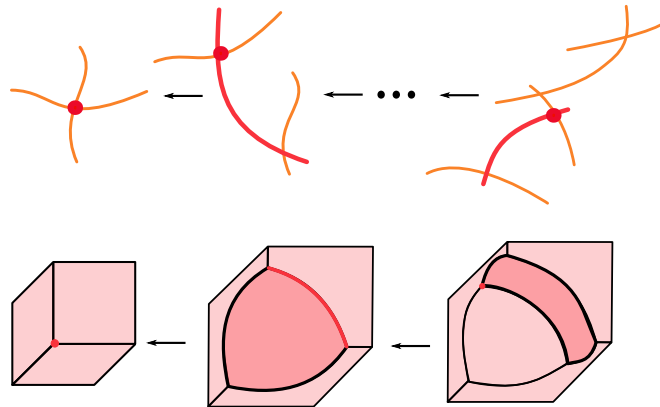


Figura 1.3: Sucesiones de explosiones combinatorias.

Definición 1.10. Introducimos los siguientes conceptos:

- Un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es de *tipo tórico* si admite una reducción de singularidades combinatoria.
- Análogamente, un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es de *tipo tórico débil* si admite una pre-reducción de singularidades combinatoria.
- Una foliación \mathcal{F} en un espacio analítico complejo M se dice *torificable* si existe un divisor con cruzamientos normales E en M tal que el espacio foliado $((M, E), \mathcal{F})$ es de tipo tórico.

Observación 1.18. Dado un punto p con $e_p(E) \leq 1$, tenemos que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})_p$ es de tipo tórico (tipo tórico débil) si y solamente si p es un punto simple (presimple) para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Observación 1.19. Si p es una singularidad presimple de tipo esquina para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, el germen $(\mathcal{M}, \mathcal{F})_p$ es de tipo tórico y basta hacer explosión en centros de codimensión dos (véase [19]).

1.12. Superficies tóricas. Foliaciones en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

Una *variedad tórica* (véase [18]) es una variedad irreducible compleja S que contiene un toro complejo bidimensional $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ como subconjunto abierto de Zariski, tal que la acción de T sobre él mismo, se extiende a una acción algebraica en S . Las explosiones naturales dentro de la categoría de variedades tóricas se llaman *equivariantes* y son aquellas compatibles con la acción de toro; esto es, las explosiones cuyo centro es la adherencia de una órbita.

Los siguientes son ejemplos básicos de superficies y variedades tóricas.

Espacio Afín. El ejemplo estándar afín de variedad tórica no singular es \mathbb{C}^n . La acción del toro está dada en coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) por

$$((t_1, t_2, \dots, t_n), (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \mapsto (t_1 \alpha_1, t_2 \alpha_2, \dots, t_n \alpha_n).$$

Las únicas órbita cerrada es $O = (0, 0, \dots, 0)$. Las clausuras del resto de órbitas no densas son los subespacios coordenados ℓ_A definidos por $\ell_A = \cap_{j \in A} (x_j = 0)$, donde $A \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}$. Finalmente, la órbita densa es

$$(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n \setminus \left(\bigcup_A \ell_A \cup \{O\} \right).$$

Espacio proyectivo. Un primer ejemplo de variedad tórica proyectiva es el espacio proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. La acción del toro viene dada en coordenadas homogéneas $[X_0, X_1, X_2, \dots, X_n]$ por

$$((t_1, t_2, \dots, t_n), [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]) \mapsto [\alpha_0, t_1 \alpha_1, t_2 \alpha_2, \dots, t_n \alpha_n].$$

Las órbitas cerradas son los $n+1$ puntos $O_i = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$, donde el uno aparece en la posición i -ésima. Las clausuras de las otras órbitas no densas son los subespacios coordenados L_A dados por $L_A = \cap_{j \in A} (X_j = 0)$, con $A \subsetneq \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Por último, la órbita densa es

$$(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \setminus \left(\bigcup_A L_A \cup \bigcup_{i=0}^n \{O_i\} \right).$$

Superficies de Hirzebruch. Dado un entero $k \neq 0$, consideremos el producto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ dado con coordenadas homogéneas $([X_0, X_1], [Y_0, Y_1, Y_2])$. La *superficie de Hirzebruch* \mathcal{H}_k se define como la subvariedad cerrada dada por

$$\mathcal{H}_k = \begin{cases} X_0^k Y_0 - X_1^k Y_1 = 0 & k > 0 \\ X_1^{-k} Y_0 - X_0^{-k} Y_1 = 0 & k < 0. \end{cases}$$

Existe una acción de toro en estas superficies, de modo que las órbitas cerradas son los puntos

$$Q_0^0 = ([1, 0], [0, 1, 0]), \quad Q_0^1 = ([1, 0], [0, 0, 1]), \quad Q_1^0 = ([0, 1], [1, 0, 0]), \quad Q_1^1 = ([0, 1], [0, 0, 1]).$$

Las clausuras de las otras órbitas no densas son las cuatro curvas racionales

$$L_0^0 = [1, 0] \times (Y_0 = 0), \quad L_0^1 = [0, 1] \times (Y_1 = 0), \quad L_1^1 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \{[0, 0, 1]\} \text{ y}$$

$$L_1^0 = \{([\lambda, \mu], [a, b, 0]); \lambda^k a = \mu^k b, [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1\}.$$

La órbita densa es $(\mathbb{C}^*)^2 = \mathcal{H}_k \setminus L_0^0 \cup L_0^1 \cup L_1^0 \cup L_1^1$.

Cuando $k = 0$, la superficie de Hirzebruch \mathcal{H}_0 es $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, donde tomamos coordenadas homogéneas $([X_0, X_1], [Y_0, Y_1])$. Las órbitas cerradas para la acción del toro son los puntos

$$Q_0^0 = ([1, 0], [1, 0]), \quad Q_0^1 = ([1, 0], [0, 1]), \quad Q_1^0 = ([0, 1], [1, 0]), \quad Q_1^1 = ([0, 1], [0, 1]).$$

Las clausuras de las otras órbitas no densas son las cuatro rectas

$$L_0^0 = [1, 0] \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, L_0^1 = [0, 1] \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, L_1^0 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \{[1, 0]\}, L_1^1 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \{[0, 1]\}.$$

La órbita densa es $(\mathbb{C}^*)^2 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus L_0^0 \cup L_0^1 \cup L_1^0 \cup L_1^1$.

Cuando hagamos referencia a \mathbb{C}^n , $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ o a las superficies de Hirzebruch \mathcal{H}_k como variedades tóricas, implícitamente asumiremos las acciones y coordenadas anteriores.

La unión de las órbitas no densas de la acción del toro en las variedades tóricas \mathbb{C}^n y $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ es, de manera natural, un divisor con cruzamientos normales fuertes dado respectivamente por

$$E_{\mathbb{C}^n} = (x_1 x_2 \cdots x_n = 0) \text{ y } E_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n} = (X_0 X_1 X_2 \cdots X_n = 0).$$

En general, en una superficie tórica no singular S , la unión de las órbitas no densas de la acción del toro da lugar a un divisor con cruzamientos normales fuertes E_S . Decimos que el par (S, E_S) es una *superficie tórica ambiente*. Los puntos $p \in S$ con $e_p(E_S) = 2$ son exactamente las órbitas cerradas de la acción del toro. Como consecuencia, en la categoría de superficies tóricas, las explosiones equivariantes son exactamente las combinatorias.

Observación 1.20. En vista del hecho de que una superficie tórica no singular S proporciona de manera natural una superficie tórica ambiente (S, E_S) , usamos la expresión *foliación \mathcal{F} en S* para hacer referencia también a la superficie foliada $((S, E_S), \mathcal{F})$.

El siguiente resultado se refiere a la geometría biracional de las superficies tóricas proyectivas.

Teorema 1.3 (Véase [18]). Dadas dos superficies tóricas proyectivas S y S' , existe una superficie tórica proyectiva no singular S'' y dos sucesiones finitas de explosiones equivariantes

$$\pi : S'' \rightarrow S, \quad \pi' : S'' \rightarrow S'.$$

Corolario 1.1. Cualquier superficie tórica proyectiva no singular S se obtiene desde $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ con una sucesión finita $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow S$ de explosiones e implosiones equivariantes (combinatorias).

Recordemos ahora brevemente como son las foliaciones sobre el plano proyectivo (véase [12]). Una foliación \mathcal{G} en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ está dada por una forma diferencial logarítmica homogénea

$$W = A_0 dX_0/X_0 + A_1 dX_1/X_1 + A_2 dX_2/X_2, \quad A_i \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2], \quad i = 0, 1, 2, \quad (1.10)$$

donde los coeficientes A_i son polinomios homogéneos del mismo grado $d_{\mathcal{G}}$, sin factores comunes y tales que $A_0 + A_1 + A_2 = 0$. Decimos que W es un *generador homogéneo de \mathcal{G}* . Si W' es otro generador homogéneo de \mathcal{G} , entonces $W' = kW$ con $k \in \mathbb{C}^*$ y recíprocamente.

Observación 1.21. El número $d_{\mathcal{G}}$ no coincide con el llamado grado de la foliación. Por ejemplo, si el divisor $E_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}$ no tiene componentes dicríticas, la foliación está dada por la forma holomorfa

$$X_0 X_1 X_2 W = X_1 X_2 A_0 dX_0 + X_0 X_2 A_1 dX_1 + X_0 X_1 A_2 dX_2,$$

sin factores comunes en sus coeficientes. Por tanto, el grado de la foliación es igual a $d_{\mathcal{G}} + 1$. De manera general, el grado es $d_{\mathcal{G}} + 1 - \epsilon$, donde ϵ es el número de componentes dicríticas de $E_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}$.

Vamos a describir una foliación \mathcal{G} de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ en términos de cartas afines. Leemos el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ en cartas afines $A_i = (X_i \neq 0) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, para $i = 0, 1, 2$. Identificamos cada A_i con la superficie tórica afín \mathbb{C}^2 a través de las coordenadas (x_j^i, x_k^i) dadas por

$$x_j^i = X_j/X_i, \quad x_k^i = X_k/X_i, \quad \text{donde } j, k \neq i$$

Tenemos que O_i es el origen de A_i , donde $O_0 = [1, 0, 0]$, $O_1 = [0, 1, 0]$ y $O_2 = [0, 0, 1]$. Denotamos por D_i el divisor $E_{A_i} = (x_j^i x_k^i = 0)$ y llamamos *i -carta afín \mathcal{G}_i de \mathcal{G}* a la restricción $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}|_{A_i}$. Un generador de \mathcal{G}_i adaptado al divisor D_i está dado por

$$\omega_i = a_j^i dx_j^i/x_j^i + a_k^i dx_k^i/x_k^i, \quad \text{for } \{i, j, k\} = \{0, 1, 2\},$$

donde $a_\ell^i = A_\ell(X_0/X_i, X_1/X_i, X_2/X_i) \in \mathbb{C}[x_j^i, x_k^i]$, para $\ell \in \{j, k\}$.

1.13. Ramas invariantes aisladas

El concepto de rama invariante aislada es útil para elegir una cantidad finita y representativa de ramas invariantes en el caso de que aparezcan componentes dicríticas después de reducción de singularidades. Damos a continuación la definición precisa:

Definición 1.11. Consideremos una rama invariante (Γ, p) de una superficie foliada $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$. Decimos que (Γ, p) es *aislada para* $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ si se cumplen las siguientes propiedades:

- $(\Gamma, p) \not\subset (E, p)$.
- Para toda composición $\sigma : (\mathcal{S}', \mathcal{G}') \rightarrow (\mathcal{S}, \mathcal{G})$ de una sucesión finita de explosiones, tenemos que $p' \in \text{Sing}(\mathcal{G}', D')$, donde (Γ', p') es el transformado estricto de (Γ, p) por σ .

Observación 1.22. Nótese que $p \in \text{Sing}(\mathcal{G}, D)$, tomando σ el morfismo identidad. Además, es suficiente considerar explosiones centradas en los puntos infinitamente próximos de (Γ, p) .

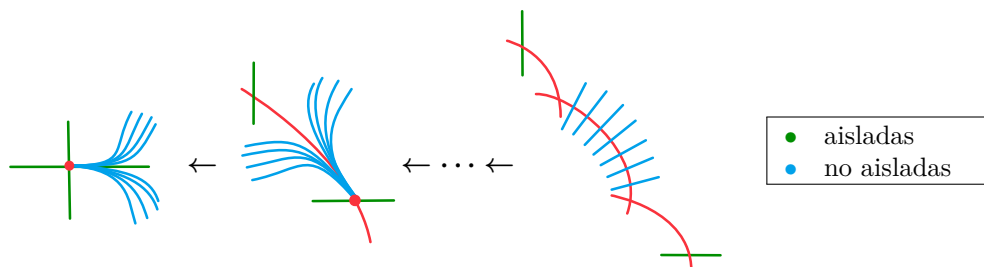


Figura 1.4: Ramas invariantes aisladas y no aisladas.

La propiedad de ser aislada es estable por explosiones. En el siguiente enunciado mostramos que también es estable por implosiones combinatorias.

Proposición 1.5. Consideremos una explosión combinatoria $\pi : (\mathcal{S}', \mathcal{G}') \rightarrow (\mathcal{S}, \mathcal{G})$ entre superficies foliadas. Sea (Γ', p') una rama invariante para \mathcal{G}' y denotemos por (Γ, p) su imagen por π . Si (Γ', p') es aislada para $(\mathcal{S}', \mathcal{G}')$ entonces (Γ, p) es también aislada para $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$.

Demostración. Supongamos que p es el centro de la explosión, pues en otro caso hemos terminado. Si (Γ', p') es aislada, en particular $(\Gamma', p') \not\subset (D', p')$ y por tanto, también se tiene $(\Gamma, p) \not\subset (D, p)$. Nos queda ver que $p \in \text{Sing}(\mathcal{G}, D)$ necesariamente. Para ello, supongamos por reducción al absurdo, que no es así, es decir, que p es un punto regular en el cual \mathcal{G} y D tienen cruzamientos normales. Puesto que la explosión se ha realizado en el punto p y es combinatoria, tenemos que $e_p(D) = 2$ y por tanto, la única rama invariante que pasa por él está contenida en D y esto contradice la existencia de (Γ, p) . ■

La siguiente afirmación muestra donde aparecen las ramas invariantes aisladas al final del proceso de reducción de singularidades.

Lema 1.5. Sea (Γ, p) una rama invariante aislada para una superficie foliada desingularizada $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$. Tenemos que p es una singularidad simple de tipo traza.

Demostración. Por definición $p \in \text{Sing}(\mathcal{G}, D)$ y $(\Gamma, p) \not\subset (D, p)$. En vista de la Observación 1.11, tenemos que $\text{Sing}(\mathcal{G}, D) = \text{Sing}(\mathcal{G})$. Ahora, si p es de tipo esquina, las únicas ramas invariantes a través de él están contenidas en D , por tanto p es una singularidad simple de tipo traza. ■

Damos ahora una descripción de las ramas invariantes aisladas en puntos presimples.

Lema 1.6. Consideremos una singularidad presimple $p \in \text{Sing}(\mathcal{G})$ de una superficie foliada $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$. Si el punto p es de tipo esquina no hay ramas invariantes aisladas pasando por él. Por el contrario, si p es de tipo traza hay como mucho una rama invariante aislada a través de él; cuando existe es no singular, transversal al divisor y además se cumple que cualquier otra rama invariante no singular es tangente al divisor.

Demostración. Supongamos primero que p es una singularidad de tipo esquina y encontremos una contradicción con la existencia de una rama invariante aislada (Γ, p) . Por la Observación 1.19, sabemos que una reducción minimal de singularidades del germen $(\mathcal{S}, \mathcal{G})_p$ produce solamente singularidades de tipo esquina. En vista del Lema 1.5 el transformado estricto de (Γ, p) pasa por una singularidad simple de tipo traza, lo cual no es posible.

Asumamos ahora que p es una singularidad presimple de tipo traza y que hay una rama invariante (Γ, p) que es aislada para $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$. Recordemos que

$$e_p(E) = e_p(E_{\text{inv}}) = 1.$$

Consideremos la explosión $\pi : (\mathcal{S}', \mathcal{G}') \rightarrow (\mathcal{S}, \mathcal{G})$ centrada en p y denotemos por (Γ', p') el transformado estricto de (Γ, p) por π . Sabemos que $p' \in \text{Sing}(\mathcal{G}', D') = \text{Sing}(\mathcal{G}')$ y puesto que (Γ', p') es una rama invariante aislada, obtenemos que p' no es un punto de tipo esquina, es decir, p' es una singularidad presimple de tipo traza para $(\mathcal{S}', \mathcal{G}')$. En particular, tenemos que

$$e_{p'}(E') = e_{p'}(E'_{\text{inv}}) = 1$$

y que $E' = \pi^{-1}(p)$, localmente en p' . Con estos argumentos, vemos que (Γ, p) es no singular y transversal a D . En efecto, esto es una consecuencia del hecho de que los puntos infinitamente próximos de (Γ, p) nunca están sobre el transformado estricto del divisor excepcional precedente.

Veamos ahora que cualquier otra rama invariante no singular es tangente al divisor D . De manera equivalente, veamos que dada una rama invariante (Γ_1, p) no singular transversal a D , tenemos que

$$(\Gamma_1, p) = (\Gamma, p).$$

Denotemos por (Γ'_1, p'_1) el transformado estricto de (Γ_1, p) por π . Es suficiente ver que $p'_1 = p'$; en este caso la situación se repite en p' , concluimos que (Γ_1, p) y (Γ, p) tienen los mismos puntos infinitamente próximos y como consecuencia, son la misma rama. Puesto que (Γ_1, p) es transversal a D , tenemos que p'_1 no pertenece al transformado estricto de D . Además p'_1 es una singularidad para \mathcal{G}' , puesto que tanto (Γ'_1, p'_1) como $\pi^{-1}(p)$ definen ramas invariantes de \mathcal{G}' en el punto p'_1 . Por tanto, la única singularidad de tipo traza para $(\mathcal{S}', \mathcal{G}')$ en $\pi^{-1}(p)$ (véase la Sección 1.5 para concluirlo) es p'_1 ; esto significa que $p'_1 = p'$.

Solo queda ver que (Γ, p) es la única rama invariante aislada: Cualquier rama invariante aislada debe ser no singular y transversal al divisor, por tanto es necesariamente (Γ, p) . ■

Corolario 1.2. Sea (Γ, p) una rama invariante no singular transversal a D pasando por una singularidad simple de tipo traza. Si hay una rama invariante aislada para $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ pasando por el punto p , ésta es necesariamente (Γ, p) .

Observación 1.23. Consideremos una superficie foliada $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ y un punto $p \in \text{Sing}(\mathcal{G}, D)$. Si hay solo una cantidad finita de ramas invariantes pasando por el punto p (o de modo equivalente, la foliación \mathcal{G} es no dicrítica), entonces cada rama invariante $(\Gamma, p) \not\subset (D, p)$ es aislada.

Capítulo 2

Sistemas de poliedros. Reducción combinatoria de singularidades

En este capítulo hablamos de un resultado publicado en [29]. Aquí expondremos las definiciones, enunciaremos los resultados y daremos el hilo conductor de sus pruebas, dejando los detalles de éstas que se podrán consultar en el Anexo I.

Este resultado consiste en una formulación combinatoria para el procedimiento de reducción de singularidades en términos de poliedros. Obtenemos una estructura combinatoria libre de restricciones en la característica del cuerpo base y que da lugar a un soporte combinatorio para la reducción de singularidades de variedades, foliaciones, campos de vectores y formas diferenciales entre otros posibles objetos.

La utilización de sistemas de poliedros y su correspondiente reducción de singularidades es una herramienta clave para la demostración del “teorema de equivalencia” que se presenta en el Capítulo 4.

2.1. Tejido soporte

Los tejidos soporte juegan el papel del espacio ambiente en el que se apoyan los sistemas de poliedros y expresan la estructura estratificada del espacio.

Sea I un conjunto finito no vacío y denotemos por $\mathcal{P}(I)$ el conjunto de subconjuntos de I . Consideramos la *topología de Zariski en $\mathcal{P}(I)$* cuyos cerrados son los conjuntos $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(I)$ que tienen la propiedad:

$$\text{Si } J_1 \in \mathcal{K} \text{ y } J_2 \supset J_1 \text{ entonces } J_2 \in \mathcal{K}.$$

Un subconjunto $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(I)$ es abierto si y solamente si para cada $J \in \mathcal{H}$ se tiene que $\mathcal{P}(J) \subset \mathcal{H}$. La clausura de un conjunto unipuntual $\{J\} \subset \mathcal{P}(I)$ es el conjunto

$$\overline{\{J\}} = \{J' \subset I; J' \supset J\}.$$

Definición 2.1. Un *tejido soporte* (en inglés *support fabric*) es un par $\mathcal{T} = (I, \mathcal{H})$, donde I es un conjunto finito y \mathcal{H} es un abierto para la topología de Zariski en $\mathcal{P}(I)$. Los elementos de \mathcal{H} se llaman *estratos* e I se llama el *conjunto de índices*. La *dimensión* $\dim(\mathcal{T})$ se define por

$$\dim(\mathcal{T}) = \max\{\#J; J \in \mathcal{H}\},$$

donde $\#J$ denota el número de elementos de J .

Observación 2.1. Los estratos $J \in \mathcal{H}$ donde se alcanza la dimensión son puntos cerrados en \mathcal{H} .

El primer ejemplo es el *tejido soporte local* $\mathcal{L}\mathcal{T}_I$ asociado a I y definido por

$$\mathcal{L}\mathcal{T}_I = (I, \mathcal{P}(I)).$$

Dado un tejido soporte $\mathcal{T} = (I, \mathcal{H})$, podemos obtener otros como sigue:

- La *restricción* $\mathcal{T}|_{\mathcal{U}}$ a un abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$. Viene dada por $\mathcal{T}|_{\mathcal{U}} = (I, \mathcal{U})$. Nótese que

$$\mathcal{T} = \mathcal{L}\mathcal{T}_I|_{\mathcal{H}}.$$

- La *reducción* $\text{Red}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T})$ a un cerrado \mathcal{K} de \mathcal{H} . Tenemos que \mathcal{K} es la intersección de un subconjunto cerrado de $\mathcal{P}(I)$ con \mathcal{H} , tomamos $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ el abierto más pequeño conteniendo \mathcal{K} y definimos

$$\text{Red}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}|_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}, \quad \mathcal{H}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{J \in \mathcal{K}} \mathcal{P}(J).$$

- La *proyección* \mathcal{T}^T desde un estrato no vacío $T \in \mathcal{H}$. Consideramos el conjunto de índices $I^T = I \setminus T$ y el abierto \mathcal{H}^T en $\mathcal{P}(I^T)$ dado por

$$\mathcal{H}^T = \{J \setminus T; T \subset J \text{ y } J \in \mathcal{H}\}$$

Definimos $\mathcal{T}^T = (I^T, \mathcal{H}^T)$. Es notable observar que $\dim(\mathcal{T}^T) < \dim(\mathcal{T})$.

Definición 2.2. Sea $\mathcal{T} = (I, \mathcal{H})$ un tejido soporte. Consideremos un nuevo conjunto de índices $I' = I \cup \{\infty\}$, donde $\infty \notin I$. Dado un estrato no vacío $J \in \mathcal{H}$ tomemos \mathcal{H}' el abierto para la topología de Zariski de $\mathcal{P}(I')$ dado por

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}_s \cup \mathcal{H}'_{\infty}, \quad \text{con } \mathcal{H}_s = \mathcal{H} \setminus \mathcal{K}_J \text{ y } \mathcal{H}'_{\infty} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}_J} \mathcal{H}'_{\infty}^K, \text{ donde}$$

$$\mathcal{H}'_{\infty}^K = \{(K \setminus J) \cup A \cup \{\infty\}; A \subsetneq J\} \text{ y } \mathcal{K}_J = \overline{\{J\}} \cap \mathcal{H}$$

La *explosión* $\pi_J \mathcal{T}$ de \mathcal{T} con centro J es el tejido soporte definido por $\pi_J \mathcal{T} = (I', \mathcal{H}')$.

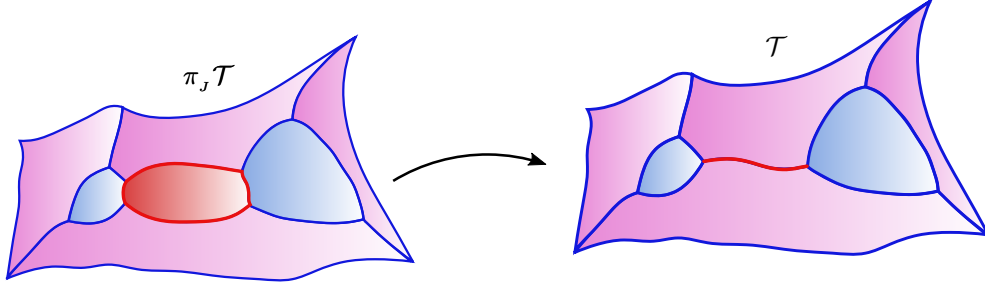


Figura 2.1: Explosión del tejido soporte \mathcal{T} .

Nótese que para cada estrato $K \in \mathcal{K}_J$, hay una biyección $\mathcal{H}'_{\infty}^K \rightarrow \mathcal{P}(J) \setminus \{J\}$ dada por $J' \mapsto A_{J'}$, donde $A_{J'}$ es el único subconjunto de J tal que

$$J' = (K \setminus J) \cup A_{J'} \cup \{\infty\}.$$

Observación 2.2. La dimensión del tejido soporte \mathcal{T} es invariante por explosiones.

Hay una aplicación sobreyectiva $\pi_J^{\#} : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ entre los estratos de $\pi_J(\mathcal{T})$ y \mathcal{T} , dada por

$$\pi_J^{\#}(\mathcal{H}'_{\infty}^K) = \{K\}, \quad K \in \mathcal{K}_J \text{ y } \pi_J^{\#}(J') = J', \quad J' \in \mathcal{H}_s$$

Proposición 2.1. La aplicación $\pi_J^\# : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ es continua. En particular, dado un abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$, tenemos que $\pi_J(\mathcal{T}|_{\mathcal{U}}) = (\pi_J \mathcal{T})|_{\mathcal{U}'}$, donde $\mathcal{U}' = (\pi_J^\#)^{-1}(\mathcal{U})$.

El conjunto de índices relevantes $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ de un tejido soporte $\mathcal{T} = (I, \mathcal{H})$ viene dado por la igualdad $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = \cup_{J \in \mathcal{H}} J$. Dos tejidos soporte $\mathcal{T}_1 = (I_1, \mathcal{H}_1)$ y $\mathcal{T}_2 = (I_2, \mathcal{H}_2)$ son *equivalentes* si hay una biyección

$$\phi : \mathcal{I}_{\mathcal{T}_1} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{T}_2}$$

tal que $\mathcal{H}_2 = \{\phi(J); J \in \mathcal{H}_1\}$. En este caso, decimos que ϕ es una *equivalencia entre \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2* .

Observación 2.3. El conjunto de índices relevantes después de la explosión $\pi_J(\mathcal{T})$ está dado por

$$\mathcal{I}_{\pi_J(\mathcal{T})} = \begin{cases} \mathcal{I}_{\mathcal{T}} \cup \{\infty\}, & \text{si } \#J \geq 2; \\ \mathcal{I}_{\mathcal{T}} \setminus \{j\} \cup \{\infty\}, & \text{si } J = \{j\}. \end{cases}$$

Además, si hay una equivalencia ϕ entre dos tejidos soporte \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 , se tiene que para cualquier estrato $J \in \mathcal{H}_1$, las explosiones $\pi_J \mathcal{T}_1$ y $\pi_{\phi(J)} \mathcal{T}_2$ son también equivalentes.

Ejemplo 2.1. Sea $\mathcal{M} = (M, E)$ un espacio ambiente donde el divisor $E = \cup_{i \in I} E_i$ tiene la propiedad de cruzamientos normales fuertes. El tejido soporte combinatorio $\mathcal{H}_{M,E}$ definido en la Ecuación 1.3 es un abierto para la topología de Zariski en $\mathcal{P}(I)$ y obtenemos de este modo un tejido soporte

$$\mathcal{T}_{M,E} = (I, \mathcal{H}_{M,E})$$

Obsérvese que la dimensión de $\mathcal{T}_{M,E}$ no es necesariamente la dimensión de M . Finalmente, dado un estrato $J \in \mathcal{H}_{M,E}$ podemos realizar la explosión combinatoria

$$\pi : \mathcal{M}' = (M', E') \rightarrow \mathcal{M} = (M, E)$$

centrada en E_J . En esta situación, tenemos que $\pi_J \mathcal{T}_{M,E} = \mathcal{T}_{M',E'}$.

2.2. Sistemas de poliedros

Cuando realizamos una explosión, el nuevo espacio ambiente adquiere una naturaleza global. Los sistemas de poliedros proporcionan una forma de dar poliedros de Newton y característicos de una manera coherente en espacios ambiente globales, representados en nuestro caso por tejidos soporte.

Definiciones

Dado un conjunto finito totalmente ordenado J , recordamos que \mathbb{R}^J denota el conjunto de aplicaciones $\sigma : J \rightarrow \mathbb{R}$. Si $J_1 \subset J_2$, hay un proyección canónica

$$\begin{aligned} \text{pr}_{J_2, J_1} : \mathbb{R}^{J_2} &\rightarrow \mathbb{R}^{J_1} \\ \sigma &\mapsto \sigma|_{J_1} \end{aligned}$$

Para un subconjunto $A \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J$, definimos la *envolvente positivamente convexa* $[[A]]$ como

$$[[A]] = \text{Conv}\left(A + \mathbb{R}_{\geq 0}^J\right) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J,$$

donde $\text{Conv}(\cdot)$ denota la envolvente convexa. Sea $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ un entero positivo. Decimos que un subconjunto $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J$ es un *poliedro característico con denominador d* si existe un conjunto $A \subset (1/d)\mathbb{Z}_{\geq 0}^J$ tal que $\Delta = [[A]]$.

Definición 2.3. Un *sistema de poliedros* \mathcal{D} (en inglés *polyhedra system*) sobre un tejido soporte $\mathcal{T} = (I, \mathcal{H})$ con denominador d es un triple

$$\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d),$$

donde cada $\Delta_J \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J$ es un poliedro característico con denominador d , de modo que para cada par de estratos $J_1, J_2 \in \mathcal{H}$ tales que $J_1 \subset J_2$, se tiene la igualdad

$$\Delta_{J_1} = \text{pr}_{J_2, J_1}(\Delta_{J_2}).$$

Si $d = 1$, decimos que \mathcal{D} es un *sistema de poliedros de Newton sobre* \mathcal{T} . Cuando sea necesario, denotaremos por $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$ el tejido soporte de \mathcal{D} . Definimos la *dimensión* de \mathcal{D} como la de $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$.

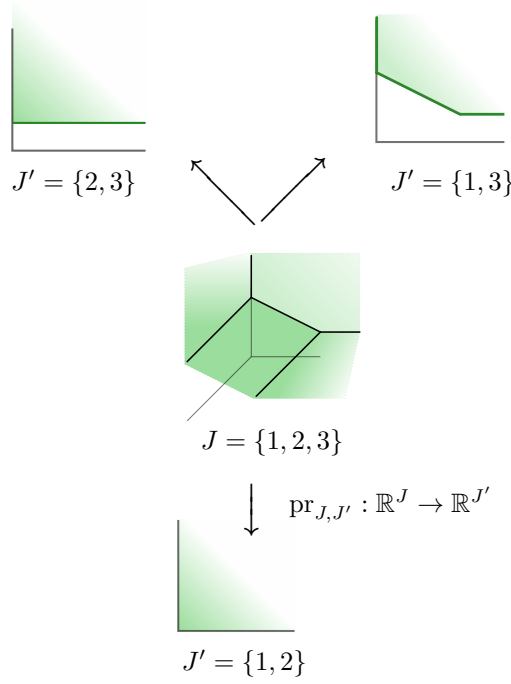


Figura 2.2: Compatibilidad con las proyecciones.

Observación 2.4. Obsérvese que en un sistema de poliedros o bien todos los poliedros son vacíos o ninguno de ellos lo es. A partir de ahora, siempre y cuando no se diga lo contrario, supondremos que todos los poliedros con los que trabajamos son no vacíos.

Dos sistemas de poliedros $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{T}_1, \{\Delta_J^1\}_{J \in \mathcal{H}_1}, d)$ y $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{T}_2, \{\Delta_J^2\}_{J \in \mathcal{H}_2}, d)$ son *equivalentes* si hay una equivalencia $\phi : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ de modo que

$$\Delta_{\phi(J)}^2 = \Delta_J^1,$$

para todo estrato $J \in \mathcal{H}_1$. También decimos que ϕ es una *equivalencia entre* \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 .

Un sistema de poliedros $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ tiene asociado de manera natural un sistema de poliedros de Newton $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ definido por

$$\mathcal{N}(\mathcal{D}) = (\mathcal{T}, \{d\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, 1).$$

Recíprocamente, dado $d' \in \mathbb{Z}_{>0}$, podemos obtener otro sistema de poliedros \mathcal{D}/d' dado por

$$\mathcal{D}/d' = (\mathcal{T}, \{(1/d')\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, dd').$$

En particular, tenemos que $\mathcal{N}(\mathcal{D})/d = \mathcal{D}$. Veamos ejemplos básicos de sistemas de poliedros:

- Dado un poliedro característico $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^I$ con denominador d , definimos el *sistema de poliedros local* $\mathcal{L}(\Delta, d)$ por

$$\mathcal{L}(\Delta, d) = (\mathcal{L}\mathcal{T}_I, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{P}(I)}, d), \text{ donde } \Delta_J = pr_{IJ}(\Delta).$$

- La *restricción* $\mathcal{D}|_{\mathcal{U}}$ de \mathcal{D} a un abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ se define por

$$\mathcal{D}|_{\mathcal{U}} = (\mathcal{T}|_{\mathcal{U}}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{U}}, d).$$

- La *reducción* $\text{Red}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})$ de \mathcal{D} a un cerrado \mathcal{K} de \mathcal{H} es $\text{Red}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}|_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}$.
- El *ajuste* (en inglés *fitting*) $\tilde{\mathcal{D}}$ del sistema de poliedros \mathcal{D} se define como sigue: Para un subconjunto $A \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^I$ se considera el *vector de ajuste* $w_A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^I$ dado por $w_A(j) = \min\{\sigma(j); \sigma \in A\}$ para cada $j \in I$ y escribimos $\tilde{A} = A - w_A$. Definimos

$$\tilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{T}, \{\tilde{\Delta}_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d).$$

Proyección de Hironaka

El siguiente ejemplo juega un papel muy importante en la Sección 2.5.

Sea $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ un sistema de poliedros y $T \in \mathcal{H}$ un estrato no vacío. Consideramos el tejido soporte $\mathcal{T}^T = (I^T, \mathcal{H}^T)$ dado por la proyección de \mathcal{T} desde T . Para cada estrato $J^* \in \mathcal{H}^T$, sea J el estrato de \mathcal{H} definido por $J = J^* \cup T$. Tomamos el subconjunto M_J^T de \mathbb{R}^J dado por

$$M_J^T = \{\sigma \in \mathbb{R}^J; \sum_{j \in T} \sigma(j) < 1\}$$

y definimos la *proyección de Hironaka* $\nabla_J^T : M_J^T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{J^*}$ como

$$\nabla_J^T(\sigma) = \frac{1}{1 - \sum_{j \in T} \sigma(j)} \sigma|_{J \setminus T}, \quad \sigma \in M_J^T$$

Escribimos $\Delta_{J^*}^T = \nabla_J^T(\Delta_J \cap M_J^T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{J^*}$ y consideramos el sistema de poliedros

$$\mathcal{D}^T = (\mathcal{T}^T, \{\Delta_{J^*}^T\}_{J^* \in \mathcal{H}^T}, d!d), \quad (2.1)$$

Es notable remarcar que el denominador de \mathcal{D}^T es $d!d$ en lugar de d .

Nótese que $\Delta_{J^*}^T = \emptyset$ si $\Delta_J = \emptyset$ o si se cumple que $\sum_{j \in T} \sigma(j) \geq 1$, para todo $\sigma \in \Delta_J$.

Lugar Singular de un Sistema de Poliedros

Dado un conjunto finito $J \neq \emptyset$ y un poliedro característico $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J$, definimos el *exponente de contacto* $\delta(\Delta)$ de Δ como el entero que cumple la igualdad

$$\delta(\Delta) = \min\{|\sigma|; \sigma \in \Delta\}, \text{ donde } |\sigma| = \sum_{j \in J} \sigma(j).$$

Si $J = \emptyset$, hay un único posible poliedro $\Delta = \{\bullet\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{\emptyset}$. Por convenio asumiremos $\delta(\{\bullet\}) = -1$. El *exponente de contacto* $\delta(\mathcal{D})$ de un sistema de poliedros $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ se define por

$$\delta(\mathcal{D}) = \max\{\delta(\Delta_J); J \in \mathcal{H}\}.$$

Observación 2.5. Cuando $\Delta = [[A]]$ con $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (es un poliedro de Newton), el exponente de contacto se corresponde con la idea clásica de multiplicidad.

Definición 2.4. El lugar singular $\text{Sing}(\mathcal{D})$ de un sistema de poliedros $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ es el subconjunto de \mathcal{H} dado por

$$\text{Sing}(\mathcal{D}) = \{J \in \mathcal{H}; \delta(\Delta_J) \geq 1\} \subset \mathcal{H}.$$

Decimos que \mathcal{D} es *singular* si $\text{Sing}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$, en otro caso, decimos que es *no singular* o *regular*.

Obsérvese que $\text{Sing}(\mathcal{D})$ es un conjunto cerrado, ya que el exponente de contacto da lugar a una función semicontinua superior en \mathcal{H} .

Transformado de un sistema de poliedros por explosiones

Sea $\mathcal{T} = (I, \mathcal{H})$ un tejido soporte y $J \in \mathcal{H}$ un estrato no vacío. Consideremos la explosión $\pi_J \mathcal{T} = (I', \mathcal{H}')$, donde recordamos que $I' = I \cup \{\infty\}$ y $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_s \cup \mathcal{H}'_\infty$. Dado un estrato $J' \in \mathcal{H}'_\infty$ y su imagen $K = \pi_J^\#(J')$, definimos la aplicación $\lambda_{J'} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{J'}$ dada por

$$\lambda_{J'}(\sigma)(j) = \sigma(j), \quad j \neq \infty; \quad \lambda_{J'}(\sigma)(\infty) = |\sigma|_J. \quad (2.2)$$

Sea $\{e_{I,i}\}_{i \in I}$ la base estandar de \mathbb{R}^I , esto es $e_{I,i}(i') = \delta_{i,i'}$ (delta de Kronecker). Dado un subconjunto $J \subset I$ y un índice $i \in I$, consideramos el vector $e_{J,i} \in \mathbb{R}^J$ dado por la igualdad

$$e_{J,i} = \text{pr}_{I,J}(e_{I,i}).$$

Definición 2.5. Sea $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ un sistema de poliedros y $J \in \mathcal{H}$ un estrato no vacío.

- El transformado total $\Lambda_J^0(\mathcal{D})$ de \mathcal{D} centrado en J es el sistema de poliedros dado por

$$\Lambda_J^0(\mathcal{D}) = (\pi_J \mathcal{T}, \{\Delta_{J'}^0\}_{J' \in \mathcal{H}'}, d), \quad \text{donde } \Delta_{J'}^0 = \Delta_{J'} \text{ para } J' \in \mathcal{H}_s \text{ y}$$

$$\Delta_{J'}^0 = [[\lambda_{J'}(\Delta_K)]] \text{ para } J' \in \mathcal{H}'_\infty, \quad K = \pi_J^\#(J').$$

- Cuando $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$, definimos también el transformado característico $\Lambda_J(\mathcal{D})$ de \mathcal{D} centrado en J como el sistema de poliedros

$$\Lambda_J(\mathcal{D}) = (\pi_J \mathcal{T}, \{\Delta_{J'}'\}_{J' \in \mathcal{H}'}, d),$$

donde $\Delta_{J'}' = \Delta_{J'}^0 - e_{J',\infty}$ para cada $J' \in \mathcal{H}'$. Nótese que la condición $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$ es fundamental para que $\Lambda_J(\mathcal{D})$ sea un sistema de poliedros, pues solo entonces se tiene que $\delta(\Delta_{\{\infty\}}^0) \geq 1$.

Consideremos un sistema de poliedros de Newton \mathcal{N} , un entero $d \geq 1$ y un estrato $J \in \mathcal{H}$ tal que $\delta(N_J) \geq d$. El transformado d -moderado $\Theta_J^d(\mathcal{N})$ de \mathcal{N} centrado en J se define por

$$\Theta_J^d(\mathcal{N}) = \mathcal{N}(\Lambda_J(\mathcal{D})),$$

donde $\mathcal{D} = \mathcal{N}/d$. Nótese que $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$ es equivalente a $\delta(N_J) \geq d$.

Observación 2.6. Sean \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 sistemas de poliedros equivalentes por una equivalencia ϕ . Para todo estrato $J \in \text{Sing}(\mathcal{D}_1)$ se tiene que los transformados característicos $\Lambda_J(\mathcal{D}_1)$ y $\Lambda_{\phi(J)}(\mathcal{D}_2)$ son también sistemas equivalentes.

2.3. Reducción de Singularidades

Enunciados

Decimos que un sistema de poliedros de Newton $\mathcal{N} = (\mathcal{T}, \{N_J\}_{J \in \mathcal{H}}, 1)$ tiene *cruzamientos normales* si el poliedro N_J tiene un único vértice para cada estrato $J \in \mathcal{H}$. Esta propiedad es estable por explosiones y un primer objetivo de reducción de singularidades es alcanzarla.

Teorema 2.1 (Reducción combinatoria a cruzamientos normales). Dado un sistema de poliedros de Newton \mathcal{N} , hay una sucesión finita de transformados totales

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{N}_k,$$

de modo que \mathcal{N}_k tiene cruzamientos normales.

Pruebas de este resultado se pueden encontrar, en otros contextos, en [19] y [22].

Teorema 2.2 (Reducción combinatoria de singularidades). Dado un sistema de poliedros \mathcal{D} , hay una sucesión finita de transformados característicos

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{D}_k,$$

de modo que $Sing(\mathcal{D}_k) = \emptyset$. Llamamos a una sucesión tal *reducción de singularidades de \mathcal{D}* .

Corolario 2.1. Sea \mathcal{N} un sistema de poliedros de Newton y $d \geq 1$ un número entero. Hay una sucesión finita de transformaciones d -moderadas

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{N}_k,$$

de modo que $\delta(\mathcal{N}_k) < d$.

El Corolario 2.1 implica el Teorema 2.1, tomando $d = 1$.

Observación 2.7. El Teorema 2.2 sería falso si hubiésemos tomado la condición $\delta(\Delta_J) > 1$, en lugar de $\delta(\Delta_J) \geq 1$, para los centros de explosión. Por ejemplo, consideremos el sistema de poliedros de Newton local $\mathcal{L}(\Delta, 1)$, donde

$$\Delta = [[(1, 1)]] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{\{1, 2\}}.$$

El único centro que se podría utilizar sería $\{1, 2\}$ y la situación se repetiría en cada estrato cerrado de la explosión.

El objetivo de este capítulo es, por tanto, dar una prueba del Teorema 2.2. Cabe decir que este resultado se sigue de la reducción de singularidades general de Hironaka. Pese a ello, hemos querido dar una demostración completa haciendo énfasis en las ideas del contacto maximal desarrolladas por H. Hironaka, J.M. Aroca y J.L. Vicente en [3] así como el control de los poliedros sugerido por M. Spivakovsky en [41].

Proceso de inducción

La prueba del Teorema 2.2 se sigue por inducción en la dimensión del sistema de poliedros considerado. De manera más precisa, consideremos el siguiente enunciado:

CRS(n): Si $\dim(\mathcal{D}) \leq n$, entonces \mathcal{D} tiene reducción de singularidades.

El punto de partida es la siguiente proposición:

Proposición 2.2. CRS(1) se cumple.

Distinguimos ahora tres tipos de sistemas de poliedros singulares \mathcal{D} :

1. Es *Hironaka casi-ordinario* si cada poliedro sobre un estrato singular tiene un solo vértice, esto es $\Delta_J = [[\{\sigma_J\}]]$ para todo $J \in Sing(\mathcal{D})$.
2. Es *especial* si $\delta(\mathcal{D}) = 1$.
3. Es *general* si $\delta(\mathcal{D}) > 1$.

El estudio de los sistemas Hironaka casi-ordinarios no requiere la hipótesis de inducción como vemos en la Sección 2.4.

Consideramos sistemas especiales bajo la hipótesis de inducción $\text{CRS}(n-1)$. En este caso reducimos el problema a dimensión menor proyectando sobre un “tejido soporte de contacto maximal” cuya existencia funciona como sigue:

1. Resolvemos el problema local por medio de propiedades para un “estrato directriz”.
2. Eliminamos la posible “incoherencia global” invocando la hipótesis de inducción.

Los detalles se dan en la Sección 2.5.

Finalmente, para sistemas generales, definimos el “invariante de Spivakovsky”, que mide (en cierto modo) cómo de lejos está nuestro sistema del caso Hironaka casi-ordinario. Controlamos el comportamiento de este invariante por medio de un sistema especial. Los detalles se dan en la sección 2.6.

2.4. Caso Hironaka casi-ordinario

En esta sección se prueba el Teorema 2.2 para sistemas de poliedros Hironaka casi-ordinarios.

Proposición 2.3. Cualquier sistema de poliedros Hironaka casi-ordinario se desingulariza.

La demostración se sigue de los siguientes enunciados:

Lema 2.1. Dado un sistema de poliedros Hironaka casi-ordinario \mathcal{D} y un estrato singular $J \in \mathcal{H}$, el transformado característico $\Lambda_J(\mathcal{D})$ es también Hironaka casi-ordinario .

Lema 2.2. El conjunto \mathcal{A} de sucesiones decrecientes de números naturales está bien ordenado para el orden lexicográfico.

2.5. Sistemas de poliedros especiales

En esta sección probamos el teorema 2.2 para el caso de sistemas de poliedros especiales.

Estabilidad por explosión de sistemas especiales. Un sistema de poliedros especial se convierte por explosiones o bien en uno del mismo tipo o bien en uno no singular. Esto es,

Proposición 2.4. Dado un sistema de poliedros especial \mathcal{D} y un estrato singular $J \in \mathcal{H}$, tenemos que $\delta(\Lambda_J(\mathcal{D})) \leq 1$.

Estrato directriz de los poliedros. Consideremos un poliedro característico $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^I$ cumpliendo que $\delta(\Delta) = 1$. El *estrato directriz* $T(\Delta)$ de Δ se define por

$$T(\Delta) = \{j \in I; \exists \sigma \in \Delta, |\sigma| = 1, \text{ y } \sigma(j) \neq 0\} \subset I. \quad (\text{véase [41]}).$$

Dado un sistema de poliedros especial $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$, presentamos resultados de estabilidad que conciernen al comportamiento del estrato directriz de manera “horizontal” y “vertical”.

Proposición 2.5. Para cada par de estratos $J_1, J_2 \in \text{Sing}(\mathcal{D})$ con $J_1 \subset J_2$, se tiene la relación

$$T(\Delta_{J_2}) \subset T(\Delta_{J_1}) \subset J_1.$$

Observación 2.8. En la situación de la Proposición 2.5 se puede tener que $T(\Delta_{J_2}) \neq T(\Delta_{J_1})$. Por ejemplo, consideremos el poliedro $\Delta = [[(0, 0, 1), (1, 1, 0)]] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^I$ con $I = \{1, 2, 3\}$. Obtenemos

$$\{3\} = T(\Delta) \neq T(\Delta_{\{2,3\}}) = \{2, 3\}.$$

Dado un estrato singular $J \in \mathcal{H}$, consideremos el transformado característico $\mathcal{D}' = \Lambda_J(\mathcal{D})$.

Proposición 2.6. Sea $J' = (K \setminus J) \cup A_{J'} \cup \{\infty\} \in \mathcal{H}'_\infty$ un estrato singular, donde $K = \pi_J^\#(J')$. Se cumplen las siguientes propiedades:

- $T(\Delta_K) \subset A_{J'} \subset J$.
- $T(\Delta_K) \subset T(\Delta'_{J'}) \subset J'$.

Observación 2.9. En el problema de reducción de singularidades en característica cero hay un rasgo similar a la propiedad $T(\Delta_K) \subset A_{J'}$; es una propiedad clásica que el espacio tangente estricto de Hironaka, en característica cero, marque los posibles “nuevos puntos malos” después de explosión.

Reducción de singularidades vía el contacto maximal. En esta sección obtenemos reducción de singularidades para un sistema de poliedros especial bajo la hipótesis de existencia de contacto maximal con un estrato dado.

Definición 2.6. Consideremos un sistema de poliedros especial \mathcal{D} y un estrato $T \in \mathcal{H}$. Decimos que T tiene *contacto maximal con \mathcal{D}* si se cumple que $T \subset T(\Delta_J)$ para todo estrato singular $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$. Decimos también que \mathcal{T}^T es un *tejido soporte de contacto maximal de \mathcal{D}* .

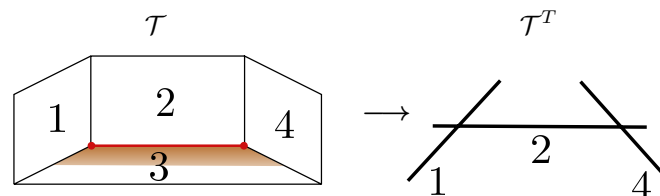


Figura 2.3: Tejido soporte de contacto maximal.

Observación 2.10. Para un sistema de poliedros local $\mathcal{D} = \mathcal{L}(\Delta, d)$, se tiene que cada estrato no vacío $T \subset T(\Delta) = T(\Delta_I)$ tiene contacto maximal con \mathcal{D} . Esto ocurre como consecuencia de la estabilidad horizontal del estrato directriz establecida en la Proposición 2.5.

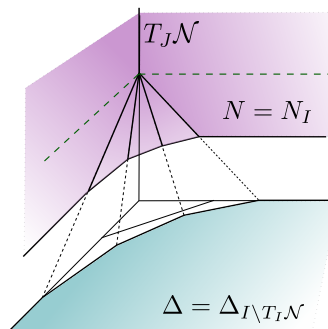


Figura 2.4: Proyección de Hironaka local.

La siguiente propiedad es consecuencia de la estabilidad vertical del estrato directriz:

Lema 2.3. Consideremos el transformado característico $\Lambda_J(\mathcal{D})$ de un sistema de poliedros \mathcal{D} centrado en un estrato $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$. Si T es un estrato que tiene contacto maximal con \mathcal{D} , entonces $T \in \mathcal{H}_s$ y también tiene contacto maximal con $\Lambda_J(\mathcal{D})$.

Proposición 2.7. Consideremos un estrato no singular $T \in \mathcal{H}$ que tiene contacto maximal con el sistema de poliedros \mathcal{D} y la proyección de Hironaka \mathcal{D}^T de \mathcal{D} desde T . Si existe reducción de singularidades para \mathcal{D}^T , entonces \mathcal{D} tiene también reducción de singularidades.

La prueba se realiza en dos etapas:

1. Hay una correspondencia uno-uno entre $\text{Sing}(\mathcal{D})$ y $\text{Sing}(\mathcal{D}^T)$.
2. Conmutatividad de las proyecciones de Hironaka con las explosiones: Se tiene que

$$(\Lambda_J(\mathcal{D}))^T = \Lambda_{J \setminus T}(\mathcal{D}^T), \quad J \in \text{Sing}(\mathcal{D}).$$

- a) Conmutatividad para los tejidos soporte: $(\pi_J \mathcal{T})^T = \pi_{J \setminus T}(\mathcal{T}^T)$.
- b) Conmutatividad para los poliedros: $(\Delta'_{J'})^T = (\Delta^T)_{J' \setminus T}$, para todo $J' \in \mathcal{H}'$.

Descomposición en componentes conexas de la desingularización. El problema de reducción de singularidades se puede resolver considerando, una por una, cada componente conexas del lugar singular. Esto es:

Proposición 2.8. Sea \mathcal{D} un sistema de poliedros y escribamos $\text{Sing}(\mathcal{D}) = \bigcup \mathcal{C}_\alpha$ la descomposición del lugar singular en componentes conexas. Si hay una reducción de singularidades para cada $\text{Red}_{\mathcal{C}_\alpha}(\mathcal{D})$, entonces hay una reducción de singularidades para \mathcal{D} .

Existencia de contacto maximal. Finalmente, vemos la existencia de contacto maximal.

Definición 2.7. Sea \mathcal{D} un sistema de poliedros especial y sea $\text{Sing}(\mathcal{D}) = \bigcup \mathcal{C}_\alpha$ la descomposición del lugar singular en componentes conexas. Decimos que \mathcal{D} es *consistente* si para cada componente conexas \mathcal{C}_α , existe un estrato T_α que tiene contacto maximal con $\text{Red}_{\mathcal{C}_\alpha}(\mathcal{D})$. Por convenio, los sistemas de poliedros no singulares son consistentes.

Observación 2.11. Existen sistemas de poliedros no consistentes. Por ejemplo, considérese el tejido soporte $\mathcal{T} = (I, \mathcal{H})$ dado por $I = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}(I) \setminus \{\{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, I\}.$$

Tomemos sobre él, el sistema de poliedros $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, 2)$, definido por

$$\Delta_{\{1,2,3\}} = [[(0, 0, 1), (1/2, 1, 0)]], \quad \Delta_{\{2,3,4\}} = [[(1, 0, 0), (0, 1, 1/2)]]$$

y todas sus proyecciones. Obsérvese que $\text{Sing}(\mathcal{D}) = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$ es un conexo. Por otro lado, se tiene que $T(\Delta_{\{1,2,3\}}) = \{3\}$ y $T(\Delta_{\{2,3,4\}}) = \{2\}$, por tanto no hay ningún estrato con contacto maximal.

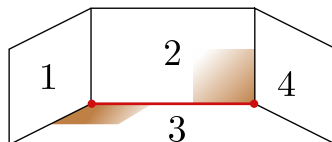


Figura 2.5: Caso no consistente.

Proposición 2.9. Bajo la hipótesis de inducción $\text{CRS}(n-1)$, todo sistema de poliedros consistente n -dimensional tiene reducción de singularidades.

La siguiente afirmación asegura que todo sistema de poliedros especial no consistente de dimensión n se puede transformar en un número finito de pasos en uno consistente.

Proposición 2.10. Bajo la hipótesis de inducción $\text{CRS}(n-1)$, para cada sistema de poliedros especial n -dimensional \mathcal{D} hay una sucesión finita de transformaciones características $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ de modo que \mathcal{D}' es consistente.

Finalmente, juntando ambas cosas, concluimos que

Corolario 2.2. Bajo la hipótesis de inducción $\text{CRS}(n-1)$, existe una reducción de singularidades para cada sistema de poliedros especial de dimensión n .

2.6. Sistemas de poliedros generales

En esta sección consideramos el caso de sistemas de poliedros generales de dimensión n . Para probar el Teorema 2.2, asumimos la hipótesis

$\text{CRS}^{\text{sp}}(n)$: Los sistemas de poliedros especiales n -dimensionales se desingularizan.

La idea principal es transformar un sistema de poliedros general en uno Hironaka casi-ordinario usando la hipótesis $\text{CRS}^{\text{sp}}(n)$ y muchas de las ideas en el trabajo de Spivakovskiy en [41]. Si conseguimos esto hemos terminado, en vista de la Proposición 2.3.

Invariante de Spivakovskiy. Dado un sistema de poliedros $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$, recordemos que su ajuste de está dado por $\widetilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{T}, \{\widetilde{\Delta}_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$, donde $\widetilde{\Delta}_J = \Delta_J - w_{\Delta_J}$. Definimos el *invariante de Spivakovskiy* $\text{Spi}_{\mathcal{D}}$ por

$$\text{Spi}_{\mathcal{D}} = \max \left\{ \delta(\widetilde{\Delta}_J); J \in \text{Sing}(\mathcal{D}) \right\}.$$

Obsérvese que $\text{Spi}_{\mathcal{D}} = 0$ si y solamente si \mathcal{D} es un sistema de poliedros Hironaka casi-ordinario. Consideramos el conjunto $S(\mathcal{D})$ definido por

$$S(\mathcal{D}) = \left\{ J \in \text{Sing}(\mathcal{D}); \delta(\widetilde{\Delta}_J) = \text{Spi}_{\mathcal{D}} \right\}.$$

Tenemos el siguiente resultado de estabilidad

Lema 2.4. Para cada estrato $J \in S(\mathcal{D})$, se cumple que $\text{Spi}_{\Lambda_J(\mathcal{D})} \leq \text{Spi}_{\mathcal{D}}$.

Resolución de sistemas generales Probamos aquí que el invariante de Spivakovskiy decrece después de una sucesión finita de explosiones “bien elegida”. Lo hacemos con la proyección de Spivakovskiy que introducimos a continuación y mediante la hipótesis $\text{CRS}^{\text{sp}}(n)$.

Consideremos un sistema de poliedros singular $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ para el cual $\text{Spi}_{\mathcal{D}} \neq 0$. Definimos la *proyección de Spivakovskiy* \mathcal{D}^{sp} de \mathcal{D} como

$$\mathcal{D}^{\text{sp}} = (\mathcal{T}, \{\Delta_J^{\text{sp}}\}_{J \in \mathcal{H}}, d^2), \text{ donde } \Delta_J^{\text{sp}} = \left[\left[\widetilde{\Delta}_J / \text{Spi}_{\mathcal{D}} \cup \Delta_J \right] \right].$$

Tenemos que \mathcal{D}^{sp} es un sistema de poliedros especial y además $\text{Sing}(\mathcal{D}^{\text{sp}}) = S(\mathcal{D})$, ya que

$$\delta(\Delta_J^{\text{sp}}) = \min \left\{ \delta \left(\widetilde{\Delta}_J / \text{Spi}_{\mathcal{D}} \right), \delta(\Delta_J) \right\} \leq 1.$$

Proposición 2.11. Bajo la hipótesis $\text{CRS}^{\text{sp}}(n)$, existe una sucesión finita de transformaciones características

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}^k.$$

donde $\mathcal{D}^{i+1} = \Lambda_{J^i}(\mathcal{D}^i)$ con $J^i \in S(\mathcal{D}^i)$ para cada $i = 0, 1, \dots, k-1$, cumpliendo que

$$\text{Spi}_{\mathcal{D}^k} < \text{Spi}_{\mathcal{D}}.$$

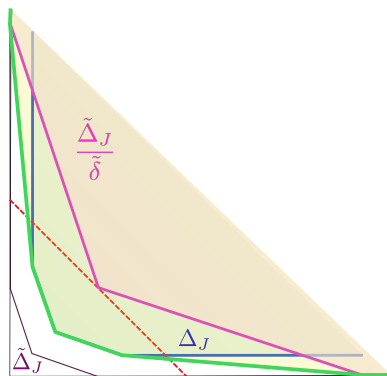


Figura 2.6: Proyección de Spivakovsky.

Ahora, la prueba del Teorema 2.2 está completa.

2.7. Ejemplos

Finalmente, dedicamos una sección a dar una serie de ejemplos que motivan nuestras definiciones, viendo cómo se puede utilizar este lenguaje de poliedros como soporte combinatorio para algunas teorías geométricas. Consideramos un espacio ambiente $\mathcal{M} = (M, E)$, donde el divisor $E = \cup_{i \in I} E_i$ tiene la propiedad de cruzamientos normales fuertes. Recordemos que tenemos el tejido soporte $\mathcal{T}_{M,E} = (I, \mathcal{H}_{M,E})$ asociado a \mathcal{M} , definido en el Ejemplo 2.1, y la estratificación

$$\mathcal{S}_{M,E} = \{S_J \subset M; J \in \mathcal{H}_{M,E}\}$$

dada por el divisor E , introducida en la Ecuación 1.4.

Notación-Definición 2.1. Para fines prácticos, vamos a suponer que tenemos un orden fijo ($<$) en el conjunto de índices I . Cuando hagamos una explosión siempre colocaremos el índice ∞ como el más grande, esto es $i < \infty$ para todo $i \in I$. Dado $J \subset I$ decimos que $c(J)$ es un n -complementario de J si $c(J) \cap J = \emptyset$ y tiene $n - \#J$ elementos. Consideramos un $c(J)$ para cada J y asumiremos también que tenemos en él un orden fijado. Además, supondremos que $j < s$ para todo $j \in J$ y $s \in c(J)$. Si tenemos dos estratos $J, J' \in \mathcal{H}_{M,E}$ tales que $J' = J \cup A$, identificaremos $c(J') \cup A$ con $c(J)$ cuando sea necesario y en esta situación los elementos en A siempre los consideraremos más grandes que los elementos en J . Este orden es útil para la construcción de producto exterior dada en la Sección 3.4.

Definición 2.8. Fijemos un estrato combinatorio $J \in \mathcal{H}_{M,E}$. Dado un punto p del estrato geométrico asociado S_J , definimos una *carta coordenada* C_p adaptada a E en p como un homeomorfismo

$$C_p = \phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}^n$$

cumpliendo las siguientes propiedades:

1. El punto p pertenece al abierto U y V es un polidisco en \mathbb{C}^n .
2. Existe una inclusión $\lambda : J \hookrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ tal que para todo $j \in J$, la coordenada

$$\phi_{\lambda(j)} = \text{pr}_{\lambda(j)} \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{C}$$

cumple que $U \cap E_j = (\phi_{\lambda(j)} = 0)$.

Observación 2.12. Nótese que, como V es un polidisco, se tiene que el abierto U es conexo en M y los abiertos $U \cap S_{J'}$ son conexos en $S_{J'}$ para cualquier $J' \subset J$.

Notación 2.1. Escribiremos $\mathbf{x} = (x_j)_{j \in J}$ e $\mathbf{y} = (y_s)_{s \in c(J)}$, con

$$x_j = \phi_{\lambda(j)}, \quad j \in J \quad \text{e} \quad y_s = \phi_{\lambda(s)}, \quad s \in c(J).$$

Obsérvese que el sistema local de coordenadas dado por $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ está adaptado al divisor E , según la Ecuación 1.2. En los siguientes capítulos, siempre que se hable de coordenadas adaptadas al divisor en un punto p , estaremos suponiendo directamente que éstas vienen de una carta coordenada C_p como en la Definición 2.8.

2.7.1. Sistema de poliedros asociado a una hipersuperficie

Sea $H \subset M$ una hipersuperficie cerrada tal que $E_i \not\subset H$ para ningún $i \in I$. Dado un estrato combinatorio $J \in \mathcal{H}_{M,E}$, consideremos un punto $p \in S_J$ y una carta coordenada adaptada al divisor E dada por $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Sea $f \in \mathcal{O}_{M,p}$ un generador local reducido de H , donde reducido significa que $f = f_1 f_2 \cdots f_k$ con $f_i \neq f_j$ para todo $i \neq j$. Desarrollando f en serie, se tiene

$$f = \sum a_\sigma(\mathbf{y}) \mathbf{x}^\sigma, \quad \text{con } \sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J,$$

donde recordamos, siguiendo las notaciones en la Sección 1.2, que

$$p = (\mathbf{0}^x, \mathbf{0}^y), \quad a_\sigma = \left. \frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial \mathbf{x}^\sigma} \right|_{U \cap S_J} = \frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial \mathbf{x}^\sigma}(\mathbf{0}^x, \mathbf{y}).$$

Tomando un representante del germen, podemos decir que f es una función holomorfa definida en un entorno abierto de p , que además podemos pensar que es el mismo abierto U donde están definidas las coordenadas, haciendo éste lo pequeño que sea necesario. Tenemos las siguientes propiedades para el poliedro

$$N_J(f; p, \mathbf{z}) = [\{\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J; a_\sigma(\mathbf{y}) \neq 0\}].$$

Proposición 2.12. Sean $\mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ coordenadas centradas en el punto p asociadas a otra carta adaptada a E . Se satisface la igualdad $N_J(f; p, \mathbf{z}) = N_J(f; p, \mathbf{z}')$.

Demostración. Si $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, por definición de a_σ tenemos la igualdad deseada. Es suficiente ahora hacer la prueba para el caso en el que $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$ y existe un índice $j \in J$ cumpliendo:

$$x'_k = x_k, \quad k \in J^j = J \setminus \{j\} \quad \text{y} \quad x_j = \mathbf{u} x'_j, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{O}_{M,p}^* = \mathcal{O}_{M,p} \setminus \mathfrak{M}_{M,p}, \quad \mathbf{u} \neq 1.$$

Definimos $\mathbf{u} = (x_k)_{k \in J^j}$, $v = x_j$ y $v' = x'_j$ y escribimos, haciendo un pequeño abuso de notación,

$$\sigma = (\sigma^j, \sigma(j)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J \setminus \{j\}} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \text{para cada } \sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J.$$

Tenemos para f dos desarrollos en serie, dependiendo de las coordenadas utilizadas:

$$f = \sum a_\sigma(\mathbf{y}) \mathbf{x}^\sigma = \sum a_\sigma(\mathbf{y}) \mathbf{u}^{\sigma^j} v^{\sigma(j)} = \sum a'_\sigma(\mathbf{y}) \mathbf{u}^{\sigma^j} v'^{\sigma(j)} = \sum a'_\sigma(\mathbf{y}) \mathbf{x}'^\sigma,$$

donde σ varía en $\mathbb{Z}_{\geq 0}^J$. Dado $\sigma^j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J \setminus \{j\}}$, sea $G_{\sigma^j} = \frac{\partial^{|\sigma^j|} f}{\partial \mathbf{u}^{\sigma^j}}$. Tenemos las siguientes igualdades:

$$G_{\sigma^j}|_{\mathbf{u}=0} = \sum_{m \geq 0} a_{(\sigma^j, m)} v^m = \sum_{m \geq 0} a'_{(\sigma^j, m)} v'^m.$$

La fórmula de Faà di Bruno para la derivada i -ésima bajo un cambio de variable, asegura que

$$\frac{\partial^m G_{\sigma^j}}{\partial v'^m} = \sum_{\mathbf{k} \in [m]} N_{\mathbf{k}} \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} G_{\sigma^j}}{\partial v^{|\mathbf{k}|}} \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{\ell!} \left(\frac{\partial^\ell v}{\partial v'^\ell} \right)^{k_\ell}, \quad \text{donde}$$

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m \\ [m] = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m; k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m\} \quad \text{y} \quad N_{\mathbf{k}} = \frac{n!}{k_1!k_2! \dots k_m!}$$

Por otro lado, nótese que

$$\frac{\partial^\ell v}{\partial v'^\ell} = \ell \frac{\partial^{\ell-1} \mathbf{u}}{\partial v'^{\ell-1}} + v' \frac{\partial^\ell \mathbf{u}}{\partial v'^\ell}, \quad \frac{\partial^0 \mathbf{u}}{\partial v'^0} = \mathbf{u},$$

obteniendo así la igualdad

$$a'_{(\sigma^j, m)} = \left. \frac{\partial^m G_{\sigma^j}}{\partial v'^m} \right|_{\substack{\mathbf{u} = 0 \\ v' = 0}} = \sum_{\mathbf{k} \in [m]} N_{\mathbf{k}} a_{(\sigma^j, |\mathbf{k}|)} \prod_{\ell=1}^m \frac{1}{(\ell-1)!} \left(\frac{\partial^{(\ell-1)} \mathbf{u}}{\partial v'^{(\ell-1)}} \right)^{k_\ell}.$$

Escribamos $N_J = N_J(f; p, \mathbf{z})$ y $N'_J = N_J(f; p, \mathbf{z}')$. Si el punto $(\sigma^j, m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J$ pertenece a la frontera topológica de N_J , tenemos que $a_{(\sigma^j, \ell)} = 0$ para todo $\ell < m$. Por tanto obtenemos:

$$a'_{(\sigma^j, m)} = N_{(m, 0, \dots, 0)} a_{(\sigma^j, m)} \mathbf{u}^m = a_{(\sigma^j, m)} \mathbf{u}^m.$$

Si además (σ^j, m) es un vértice de N_J , tenemos garantizado que $a_{(\sigma^j, m)} \neq 0$ y como consecuencia también $a'_{(\sigma^j, m)} \neq 0$. De esta manera, todos los vértices de N_J pertenecen a N'_J y como un poliedro queda determinado por sus vértices se concluye que $N_J \subset N'_J$. Repitiendo el mismo argumento intercambiando los papeles de v y v' , concluimos la igualdad buscada $N_J = N'_J$. ■

De este modo, tiene sentido definir $N_J(f; p) = N_J(f; p, \mathbf{z})$.

Lema 2.5. Sea $f' \in \mathcal{O}_{M,p}$ otro generador local (reducido) de H en el punto p . Se tiene la igualdad $N_J(f; p) = N_J(f'; p)$ y se define $N_J(p) = N_J(f; p)$.

Demostración. Escribimos $f' = \mathbf{u}f$ con $\mathbf{u} \in \mathcal{O}_{M,p}^*$. Por las propiedades de los poliedros tenemos:

$$N_J(\mathbf{u}f) = N_J(\mathbf{u}) + N_J(f) \quad \text{y} \quad N_J(\mathbf{u}) = \mathbb{R}_{\geq 0}^J,$$

donde $+$ denota la suma de Minkowski. Como consecuencia se tiene la igualdad deseada. ■

Lema 2.6. Dado otro punto $p' \in S_J$, se cumple la igualdad $N_J(p) = N_J(p')$.

Demostración. Tomemos en primer lugar $p' \in U \cap S_J$. De este modo, tanto f como las coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ están definidas en el punto p' . Dado que $U \cap S_J$ es un conexo de $S_J \simeq (\mathbb{C}^*)^J$, tenemos que también lo es de \mathbb{C}^J y por tanto $a_{\sigma, p} \in \mathcal{O}_{S_J, p}$ es cero si y solamente si $a_{\sigma, p'} \in \mathcal{O}_{S_J, p'}$ lo es (principio de identidad). Como consecuencia las nubes de puntos en ambos casos son iguales y por tanto, también los poliedros de Newton considerados.

Dado ahora un punto $p' \in S_J$ arbitrario, tenemos que existe un camino que une p con p' , por ser el estrato S_J un conexo. Esto es, existe una aplicación

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow S_J, \quad \gamma(0) = p \quad \text{y} \quad \gamma(1) = p'.$$

Tomemos un recubrimiento \mathcal{A} por abiertos de $K = \gamma([0, 1])$ de manera que cada abierto sirva para dar una carta coordenada donde además se tenga definido un generador f de H . Por la compacidad de K existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{A}$. Como consecuencia, el resultado deseado es cierto, pues se tiene en cada uno de los abiertos en \mathcal{A}_F y basta iterar el proceso una cantidad finita de veces. ■

Tenemos de esta manera un poliedro bien definido $N_J(\mathcal{M}, H) = N_J(p)$ que solamente depende del par (\mathcal{M}, H) y del estrato fijado $J \in \mathcal{H}_{M,E}$ (junto con el orden).

Observación 2.13. Nótese que $E_J \not\subset H$ si y solamente si el poliedro $N_J(\mathcal{M}, H)$ tiene un solo vértice en el origen de \mathbb{R}^J , esto es $\delta(N_J(\mathcal{M}, H)) = 0$.

Veamos ahora que la construcción de poliedros hecha es compatible con las proyecciones

$$\text{pr}_{J_2 J_1} : \mathbb{R}^{J_2} \rightarrow \mathbb{R}^{J_1}$$

para cada par de estratos $J_1, J_2 \in \mathcal{H}_{M,E}$ con $J_1 \subset J_2$.

Proposición 2.13. Dados $J_1, J_2 \in \mathcal{H}_{M,E}$ con $J_1 \subset J_2$, se tiene que

$$N_{J_1}(\mathcal{M}, H) = \text{pr}_{J_2 J_1}(N_{J_2}(\mathcal{M}, H)).$$

Demostración. Escribamos $N_{J_1} = N_{J_1}(\mathcal{M}, H)$ y $N_{J_2} = N_{J_2}(\mathcal{M}, H)$. Veamos que $\sigma^1 \in N_{J_1}$ si y solamente si existe $\sigma \in N_{J_2}$ tal que $\text{pr}_{J_2 J_1}(\sigma) = \sigma^1$.

Para cada elemento $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_2}$, tomamos la descomposición $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_1} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_2 \setminus J_1}$. Sea

$$f = \sum_{\sigma^1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_1}} A_{\sigma^1} \mathbf{u}^{\sigma^1}, \quad A_{\sigma^1} = \left. \frac{\partial^{|\sigma^1|} f}{\partial \mathbf{u}^{\sigma^1}} \right|_{\mathbf{u}=0} = \sum_{\sigma^2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_2 \setminus J_1}} a_{(\sigma^1, \sigma^2)} \mathbf{z}^{\sigma^2}, \quad \begin{array}{l} \mathbf{u} = (x_j)_{j \in J_1} \\ \mathbf{z} = (x_j)_{j \in J_2 \setminus J_1} \end{array}$$

Es claro que $A_{\sigma^1}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \neq 0$ siempre y cuando exista $\sigma^2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_2 \setminus J_1}$ tal que $a_{(\sigma^1, \sigma^2)}(\mathbf{y}) \neq 0$. ■

Definición 2.9. El sistema de poliedros $\mathcal{N}_{\mathcal{M}, H}$ asociado al par (\mathcal{M}, H) , viene dado por

$$\mathcal{N}_{\mathcal{M}, H} = (\mathcal{T}_{M,E}, \{N_J(\mathcal{M}, H)\}_{J \in \mathcal{H}_{M,E}}, 1)$$

Definición 2.10. La hipersuperficie H se dice *combinatoriamente regular* para \mathcal{M} si para todo estrato $J \in \mathcal{H}_{M,E}$ se cumple que $E_J \not\subset H$.

En vista de la observación 2.13, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La hipersuperficie H es combinatoriamente regular para \mathcal{M} .
2. El sistema de poliedros es no singular, esto es $\delta(N_J(\mathcal{M}, H)) = 0$ para todo $J \in \mathcal{H}_{M,E}$.

La *multiplicidad genérica* $\nu_J(H)$ de H a lo largo de E_J se define por

$$\nu_J(H) = \max\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; f \in (\mathbf{x})^i\}, \quad (\mathbf{x}) = \sum_{j \in J} x_j \mathcal{O}_{M,p}.$$

Decimos que E_J es *combinatoriamente equimúltiple* para H si $\nu_J(H) = \nu_K(H)$ para cada estrato combinatorio $K \in \mathcal{H}_{M,E}$ tal que $J \subset K$. Considerando el desarrollo en serie de f , nótese que

$$\nu_J(H) = \min\{|\sigma|; a_{\sigma}(\mathbf{y}) \neq 0\} = \delta(N_J(\mathcal{M}, H)).$$

Consideremos ahora un estrato $J \in \mathcal{H}_{M,E}$ tal que $m = \delta(N_J(\mathcal{M}, H))$ es maximal; en particular, tenemos que H es combinatoriamente equimúltiple a lo largo de E_J . Sea

$$\pi : (\mathcal{M}', H') \rightarrow (\mathcal{M}, H)$$

la explosión geométrica usual centrada en E_J . El sistema de poliedros de Newton asociado al par (\mathcal{M}', H') viene dado por el transformado m -moderado de $\mathcal{N}_{\mathcal{M}, H}$. Esto es fácil de comprobar, pues el transformado total de un poliedro describe el “movimiento de los monomios” por los morfismos de explosión y el transformado m -moderado agrega la operación de dividir por la potencia del divisor excepcional adecuada.

Aplicando de manera reiterada el Corolario 2.1, obtenemos una sucesión finita de explosiones centradas en estratos combinatoriamente equimúltiples

$$(\mathcal{M}, H) = (\mathcal{M}^0, H^0) \leftarrow (\mathcal{M}^1, H^1) \leftarrow \cdots \leftarrow (\mathcal{M}^n, H^n) = (\mathcal{M}', H')$$

de manera que H' es combinatoriamente regular para \mathcal{M}' .

Como veremos más adelante, esta construcción de sistema de poliedros es particularmente útil cuando consideramos hipersuperficies Newton no degeneradas como en [35, 36].

2.7.2. Sistema de poliedros asociado a un espacio foliado

Esta construcción nos va a interesar especialmente, ya que será esencial en el Capítulo 4 de esta memoria para probar el “teorema de equivalencia” que allí se establece.

Consideremos una foliación \mathcal{F} en M . Fijado un estrato combinatorio $J \in \mathcal{H}_{M,E}$, tomemos un punto $p \in S_J$ y una carta coordenada adaptada a E dada por $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Sea $\eta \in \Omega_{M,p}^1(\log E)$ un generador local de \mathcal{F} adaptado a E que escribimos en coordenadas como en la Ecuación 1.5:

$$\omega = \sum_{j \in J} a_j \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{s \in A} b_s dy_s, \quad a_j, b_s \in \mathcal{O}_{M,p}.$$

Tomando notaciones como en la subsección anterior, tenemos los desarrollos en serie dados por:

$$a_j = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J} a_{\sigma,j}(\mathbf{y}) \mathbf{x}^\sigma, \quad b_s = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J} b_{\sigma,s}(\mathbf{y}) \mathbf{x}^\sigma,$$

Esto nos permite reescribir $\omega = \sum \omega_\sigma \mathbf{x}^\sigma$, donde $\omega_\sigma = \sum_{j \in J} a_{\sigma,j}(\mathbf{y}) \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{s \in A} b_{\sigma,s}(\mathbf{y}) dy_s$.

Consideramos el poliedro

$$N_J(\omega; p, \mathbf{z}) = [[\{\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J; \omega_\sigma \neq 0\}]] = \text{Conv} \left(\bigcup_{j \in J} N_J(a_j; p) \cup \bigcup_{s \in A} N_J(b_s; p) \right).$$

Proposición 2.14. Dado $p' \in S_J$ un punto cualquiera, consideremos una carta coordenada adaptada a E en p' dada por $\mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ y sea $\omega' \in \Omega_{M,p'}(\log E)$ un generador local de \mathcal{F} adaptado a E . Se tiene la igualdad:

$$N_J(\omega; p, \mathbf{z}) = N_J(\omega'; p', \mathbf{z}').$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $p' = p$ y $\omega' = \omega$. Tenemos para ω dos desarrollos en serie, dependiendo de las coordenadas utilizadas:

$$\omega = \sum_{j \in J} a_j \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{s \in A} b_s dy_s = \sum_{j \in J} a'_j \frac{dx'_j}{x'_j} + \sum_{s \in A} b'_s dy'_s$$

Escribimos

$$N_J = \text{Conv} \left(\bigcup_{j \in J} N_J(a_j; p) \cup \bigcup_{s \in A} N_J(b_s; p) \right) \quad \text{y} \quad N'_J = \text{Conv} \left(\bigcup_{j \in J} N_J(a'_j; p) \cup \bigcup_{s \in A} N_J(b'_s; p) \right).$$

En vista de la Proposición 2.12, es suficiente probar que $N_J = N'_J$, independientemente de las coordenadas en las que se trabaje. A partir de ahora escribiremos todo en función de $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

1. Asumamos en primer lugar que $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$ y que existe un índice $j \in J$ cumpliendo que $x'_j = ux_j$, donde $u \in \mathcal{O}_{M,p}^*$ es una unidad con $u \neq 1$ y $x'_k = x_k$ para todo $k \in J^j = J \setminus \{j\}$. Se tienen las relaciones $a'_k = a_k + x_k h_k a_j$ para $k \in J$ y $b'_s = b_s + h_s a_j$ para $s \in A$, donde

$$\frac{du}{u} = \sum_{j \in J} x_j h_j \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{s \in S} h_s dy_s.$$

Por tanto, para cada $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J$, tenemos que

$$a'_{\sigma,k} = a_{\sigma,k} + x_k \sum_{\tau} \frac{\partial^{|\tau|} h_k}{\partial \mathbf{x}^\tau} a_{\sigma,\tau,j}, \quad k \in J, \quad \sigma_\tau = \sigma - \tau - \sigma_k, \quad \sigma_k(k) = 1, \sigma_k(\ell) = 0, \ell \neq k.$$

$$b'_{\sigma,s} = b_{\sigma,s} + \sum_{\tau} \frac{\partial^{|\tau|} h_s}{\partial \mathbf{x}^\tau} a_{\sigma,\tau,j}, \quad s \in A, \quad \sigma_\tau = \sigma - \tau.$$

Cuando σ pertenece a la frontera topológica de N_J , concluimos en particular que

$$a'_{\sigma,k} = a_{\sigma,k}, \quad b'_{\sigma,s} = b_{\sigma,s} + a_{\sigma,j}.$$

Si además σ es un vértice de N_J , sabemos también que la lista $((a_{\sigma,k})_{k \in J}, (b_{\sigma,s})_{s \in A})$ no se anula y como consecuencia, tampoco lo hace la lista

$$((a'_{\sigma,k})_{k \in J}, (b'_{\sigma,s})_{s \in A}) = ((a_{\sigma,k})_{k \in J}, (b_{\sigma,s} + a_{\sigma,j})_{s \in A}).$$

Es decir, que $\sigma \in N'_J$ y por tanto tenemos el contenido $N_J \subset N'_J$. Razonando ahora en la otra dirección, concluimos la igualdad buscada.

2. Asumamos ahora que $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, que existe un índice $s \in A$ cumpliendo $y'_s = \alpha y_s + \phi + y_s \psi$, donde $\phi(p) = \psi(p) = 0$ y $\partial\phi/\partial y_s \equiv 0$ y que $y'_r = y_r$ para todo $r \in A^r = A \setminus \{s\}$. Se tienen las siguientes relaciones:

$$b'_s = b_s(\alpha + \psi + y_s \partial\psi/\partial y_s); \quad b'_r = b_r + b_s(\partial\phi/\partial y_r + y_s \partial\psi/\partial y_r), \quad r \in A^s \text{ y}$$

$$a'_j = a_j + x_j b_s(\partial\phi/\partial x_j + y_s \partial\psi/\partial x_j), \quad j \in J.$$

De nuevo, tomando un elemento σ de la frontera topológica de N_J , tenemos que

$$b'_{\sigma,s} = \alpha b_{\sigma,s}, \quad a'_{\sigma,j} = a_{\sigma,j} \text{ y } b'_{\sigma,r} = b_{\sigma,r} + (\partial\phi/\partial y_s)(p) b_{\sigma,s}$$

Cuando además σ es un vértice de N_J , concluimos igual que antes que $\sigma \in N'_J$ y por tanto tenemos el contenido $N_J \subset N'_J$. Razonando en la otra dirección, concluimos la igualdad.

El argumento para probar la independencia del generador y del punto de S_J escogido es el mismo que en los Lemas 2.5 y 2.6, respectivamente. \blacksquare

De este modo, definimos $N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = N_J(\omega; p, \mathbf{z})$.

Observación 2.14. Nótese que $E_J \not\subset \log\text{-Sing}(\mathcal{F}, E)$ si y solamente si el poliedro $N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ tiene un solo vértice, esto es $\delta(N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F})) = 0$.

Adaptando a la situación de foliaciones la prueba en la Proposición 2.13 para la compatibilidad de las proyecciones, introducimos el siguiente concepto.

Definición 2.11. El sistema de poliedros $\mathcal{N}_{\mathcal{M}, \mathcal{F}}$ asociado al espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es

$$\mathcal{N}_{\mathcal{M}, \mathcal{F}} = (\mathcal{T}_{M,E}, \{N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F})\}_{J \in \mathcal{H}_{M,E}}, 1)$$

Definición 2.12. Una foliación \mathcal{F} se dice *combinatoriamente regular* para \mathcal{M} si para todo estrato $J \in \mathcal{H}_{M,E}$ se cumple que $E_J \not\subset \log\text{-Sing}(\mathcal{F}, E)$.

En vista de la observación 2.14, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La foliación \mathcal{F} es combinatoriamente regular para \mathcal{M} .
2. El sistema de poliedros es no singular, esto es $\delta(N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F})) = 0$ para todo $J \in \mathcal{H}_{M,E}$.

El orden adaptado $\nu_J(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} a lo largo de E_J (véase [10]) se define por

$$\nu_J(\mathcal{F}) = \max\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; \omega \in (\mathbf{x})^i\}. \quad (2.3)$$

Decimos que E_J es *combinatoriamente equimúltiple* para \mathcal{F} si $\nu_J(\mathcal{F}) = \nu_K(\mathcal{F})$ para cada estrato combinatorio $K \in \mathcal{H}_{M,E}$ con $J \subset K$. Tomando la expresión en coordenadas de ω , nótese que

$$\nu_J(\mathcal{F}) = \min\{\nu_J(a_j), \nu_J(b_s)\}_{j \in J, s \in A} = \min\{|\sigma|; \sigma \in N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F})\} = \delta(N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F})).$$

Consideremos ahora un estrato $J \in \mathcal{H}_{M,E}$ tal que $m = \delta(N_J)$ es maximal; en particular, tenemos que H es combinatoriamente equimúltiple a lo largo de E_J . Sea

$$\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$$

la explosión geométrica usual centrada en E_J . El sistema de poliedros de Newton asociado al par $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ viene dado por el transformado m -moderado de $\mathcal{N}_{\mathcal{M}, \mathcal{F}}$. De nuevo, aplicando de manera reiterada el Corolario 2.1, obtenemos una sucesión finita de explosiones centradas en estratos combinatoriamente equimúltiples

$$(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = (\mathcal{M}^0, \mathcal{F}^0) \leftarrow (\mathcal{M}^1, \mathcal{F}^1) \leftarrow \cdots \leftarrow (\mathcal{M}^n, \mathcal{F}^n) = (\mathcal{M}', \mathcal{F}')$$

de manera que \mathcal{F}' es combinatoriamente regular para \mathcal{M}' .

2.7.3. Otros ejemplos

Campos de vectores. De manera similar, obtenemos un sistema de poliedros de Newton $\mathcal{N}_{\mathcal{M}, \mathcal{L}}$ asociado a una foliación uno-dimensional \mathcal{L} . Para hacerlo, escribimos los campos de vectores correspondientes en coordenadas como sigue:

$$\xi = \sum \xi_\sigma \mathbf{x}^\sigma, \text{ con } \xi_\sigma = \sum_{j \in J} a_{\sigma, j}(\mathbf{y}) x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum b_{\sigma, s}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_s}. \quad (2.4)$$

Ideales monomiales. Sea \mathcal{I} un ideal monomial de \mathcal{O}_M adaptado al divisor E . Siguiendo [22], definimos \mathcal{I} como el dato de una colección finita de divisores efectivos $\{D_s\}_{s \in S}$ de la forma

$$D_s = \sum_{i \in I} n_i^s E_i.$$

Sea $\sigma^s : I \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ la aplicación dada por $\sigma^s(i) = n_i^s$. Para cada $J \in \mathcal{H}_{M,E}$, consideramos

$$N_J(\mathcal{M}, \mathcal{I}) = [[\{\sigma^s|_J; s \in S\}]].$$

De este modo asociamos al par $(\mathcal{M}, \mathcal{I})$ el sistema de poliedros

$$\mathcal{N}_{\mathcal{M}, \mathcal{I}} = (\mathcal{T}_{M,E}, \{N_J(\mathcal{M}, \mathcal{I})\}_{J \in \mathcal{H}_{M,E}}, 1).$$

Nótese que $\mathcal{N}_{\mathcal{M}, \mathcal{I}}$ es no singular si y solamente si \mathcal{I} es un ideal principal. Dado $J \in \mathcal{H}_{M,E}$, podemos hacer la explosión geométrica usual $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{I}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{I})$ centrada en E_J . El sistema de poliedros de Newton asociado al transformado total \mathcal{I}' de \mathcal{I} , viene dado por el transformado total de $\mathcal{N}_{\mathcal{M}, \mathcal{I}}$. Ahora, aplicamos el Teorema 2.1 y, como en [22], obtenemos una sucesión finita de explosiones $(\mathcal{M}', \mathcal{I}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{I})$ tal que \mathcal{I}' es un ideal principal.

Capítulo 3

Graduaciones y formas iniciales pesadas

En este capítulo vamos a introducir el concepto de forma inicial pesada de una foliación, que será esencial para dar la definición de foliación Newton no degenerada que se proporciona en el Capítulo 4. Consideremos un espacio ambiente $\mathcal{M} = (M, E)$ donde el divisor E tiene la propiedad de cruzamientos normales fuertes y vamos a fijar un estrato $J \in \mathcal{H}_{M,E}$ del tejido soporte combinatorio asociado. Fijado un peso ρ para J , vamos a construir dos haces de módulos graduados localmente isomorfos.

3.1. Vectores de pesos

Definición 3.1. Un *peso para J* es un elemento $\rho \in (\mathbb{R}^J)^*$ tal que $\rho(\sigma) \geq 0$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}^J$ y la desigualdad es estricta cuando $\sigma \neq 0$. Es decir, ρ es una aplicación dada de la forma

$$(\sigma : J \mapsto \mathbb{R}) \mapsto \sum_{j \in J} \rho_j \sigma(j),$$

con $\rho_j \in \mathbb{R}_{>0}$ para todo $j \in J$ y escribimos $\rho = (\rho_j)_{j \in J}$ en la base dual de la base estándar de $\mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R}$. Denotamos por \mathcal{W}_J el conjunto de todos los pesos para J . Para el caso especial $J = \emptyset$ denotaremos por convenio $\rho = 0$ al único peso posible.

Fijado un peso $\rho \in \mathcal{W}_J$, para cada real no negativo $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ consideramos los semiespacios de \mathbb{R}^J dados por:

$$H_\rho^{v,+} = \{\sigma \in \mathbb{R}^J; \rho(\sigma) \geq v\}, \quad H_\rho^{v,-} = \{\sigma \in \mathbb{R}^J; \rho(\sigma) \leq v\}.$$

Escribimos H_ρ^v para denotar el hiperplano definido por la intersección $H_\rho^v = H_\rho^{v,+} \cap H_\rho^{v,-}$. Para el caso especial de $J = \emptyset$, asumiremos $H_\rho^0 = \{\bullet\}$ y $H_\rho^v = \emptyset$ para cualquier $v > 0$; los resultados en este capítulo son triviales para éste. Escribamos

$$\Delta_\rho^{v,+} = H_\rho^{v,+} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^J, \quad \Delta_\rho^{v,-} = H_\rho^{v,-} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^J, \quad \Delta_\rho^v = H_\rho^v \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^J. \quad (3.1)$$

Recordemos que un *politopo convexo* $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ se define como la envolvente convexa de una cantidad finita de puntos de \mathbb{R}^n . Nótese que Δ_ρ^v lo es, pues viene dado por

$$\Delta_\rho^v = \text{Conv}(\{\sigma^j; j \in J\}),$$

donde $\sigma^j : J \rightarrow \mathbb{R}$ es el elemento de \mathbb{R}^J definido por $\sigma^j(j) = v/\rho_j$ y $\sigma^j(k) = 0$ para todo $k \neq j$. En efecto, cada $\sigma \in \mathbb{R}^J$ lo podemos escribir como

$$\sigma = 1/v \sum_{j \in J} \rho_j \sigma(j) \sigma^j.$$

3.2. MÓDULOS ρ -GRADUADOS DE r -FORMAS DIFERENCIALES

Observación 3.1. Esto es falso si permitimos que $\rho_j = 0$ para algún $j \in J$. Por ejemplo, consideremos $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dado por $(\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \sigma_1$, tenemos que

$$\Delta_\rho^v = \{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2; \sigma_1 = v\},$$

que es toda una semirecta del espacio afín \mathbb{R}^2 .

Observación 3.2. Dado $v \in \mathbb{R}_{> 0}$, el conjunto $\Delta_\rho^{v,-} \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^J$ es finito, pues su cardinal está acotado por el volumen de un cubo de arista $K > v$. Como consecuencia

$$\mathcal{V}_\rho^v = \{b \leq v; b = \rho(\sigma) \text{ con } \sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J\}$$

es un conjunto finito. En efecto, hay una aplicación sobreyectiva $Z_\rho^v \rightarrow \mathcal{V}_\rho^v$ definida por $\sigma \mapsto \rho(\sigma)$.

Definición 3.2. El conjunto \mathcal{V}_ρ de valores asociados a ρ es el subconjunto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dado por

$$\mathcal{V}_\rho = \{b \in \mathbb{R}; b = \rho(\sigma) \text{ con } \sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Nótese que el valor $v = 0$ está asociado a cualquier peso.

Lema 3.1. El conjunto de valores \mathcal{V}_ρ está bien ordenado con respecto al orden usual. Además hay un isomorfismo al conjunto de los números naturales \mathbb{N} como conjuntos ordenados, considerado este último también con el orden usual.

Demostración. En primer lugar, veamos que \mathcal{V}_ρ está bien ordenado con respecto al orden usual. Para ello, tomemos un subconjunto no vacío $A \subset \mathcal{V}_\rho$ y veamos que tiene primer elemento. Dado un elemento $a \in A$, tenemos que $a < a'$ para todo $a' \notin \mathcal{V}_\rho^a \cap A$. Por otro lado, el conjunto $\mathcal{V}_\rho^a \cap A$ es finito y no vacío, puesto que contiene a , y por ello tiene elemento mínimo que llamamos a_0 . De esta manera, tenemos que $a_0 \leq a'$ para todo $a' \in A$.

Para ver que el conjunto \mathcal{V}_ρ es isomorfo a \mathbb{N} , veamos que todo valor no nulo tiene elemento anterior y que todo valor tiene elemento posterior; en particular, no hay último elemento.

- Sea $v \in \mathcal{V}_\rho$ un valor no nulo. El conjunto $\mathcal{V}_\rho^v \setminus \{v\}$ es finito y no vacío, dado que contiene $v_0 = 0$. Existe el elemento anterior $v^- = \max(\mathcal{V}_\rho^v \setminus \{v\})$.
- Consideremos un valor $v \in \mathcal{V}_\rho$ y un punto $\sigma \in \Delta_\rho^v$. Sea $\tilde{\sigma} = \sigma + \tau$ para algún $\tau \in \mathbb{Z}_{> 0}^J$ y denotemos $b = \rho(\tilde{\sigma}) = \rho(\sigma) + \rho(\tau)$. Hay un elemento más grande que v dado por $v^+ = \min(\mathcal{V}_\rho^b \setminus \mathcal{V}_\rho^v)$. ■

Llamamos a v^- el *antecesor de v* y a v^+ su *sucesor*, siendo v^- y v^+ los definidos en la prueba del Lema 3.1.

Observación 3.3. Para $\rho = (1, 1, \dots, 1)$ tenemos que $\mathcal{V}_\rho = \mathbb{N}$.

3.2. Módulos ρ -graduados de r -formas diferenciales

Los conceptos que vamos a desarrollar son todos ellos relativos a un peso $\rho \in S_J$, que consideramos fijo a lo largo de la sección. Obsérvese que, cuando el estrato geométrico S_J consta de un solo punto $S_J = \{p\}$, tenemos que $\mathcal{O}_{S_J} = \mathcal{O}_{S_J, p} \simeq \mathbb{C}$.

Módulos $\Omega_{S_J}^r(\log \mathbf{T}, \mathbf{R})$. Definámoslos desde el punto de vista de los prehaces completos.

Consideremos indeterminadas $\mathbf{T} = (T_j)_{j \in J}$ y para cada abierto $U_J \subset S_J$ tomamos el anillo de polinomios $\mathcal{O}_{S_J}(U_J)[\mathbf{T}]$ en las variables \mathbf{T} con coeficientes en el anillo $\mathcal{O}_{S_J}(U_J)$. Por el hecho de ser \mathcal{O}_{S_J} un prehaz completo de base S_J , tenemos que

$$\mathcal{O}_{S_J}[\mathbf{T}] : U_J \subset S_J \mapsto \mathcal{O}_{S_J}(U_J)[\mathbf{T}]$$

es un prehaz completo de \mathcal{O}_{S_J} -álgebras, donde el morfismo restricción viene dado de forma natural por el morfismo restricción en \mathcal{O}_{S_J} . Definimos el ρ -grado $\partial^\rho(F\mathbf{T}^\sigma)$ de un monomio

$$F\mathbf{T}^\sigma \in \mathcal{O}_{S_J}(U_J)[\mathbf{T}]$$

por $\partial^\rho(F\mathbf{T}^\sigma) = \rho(\sigma) \in \mathcal{V}_\rho$. En particular, tenemos que $\partial^\rho(T_j) = \rho_j$ para todo $j \in J$. El ρ -grado de un polinomio es el mínimo de los ρ -grados de sus monomios. Un polinomio es *homogéneo* si todos sus monomios tienen el mismo ρ -grado y convenimos que el polinomio 0 es homogéneo de cualquier ρ -grado. Nótese que, dados dos monomios $F\mathbf{T}^\sigma, F'\mathbf{T}^{\sigma'} \in \mathcal{O}_{S_J}(U_J)[\mathbf{T}]$, se tiene que

$$\partial^\rho(F\mathbf{T}^\sigma F'\mathbf{T}^{\sigma'}) = \partial^\rho(FF'\mathbf{T}^{\sigma+\sigma'}) = \rho(\sigma) + \rho(\sigma'),$$

pues ρ es lineal. Cuando $\rho = (1, 1, \dots, 1)$, recuperamos la graduación habitual.

Dado un valor $v \in \mathcal{V}_\rho$, consideremos el $\mathcal{O}_{S_J}(U_J)$ -módulo

$$\mathfrak{P}_v^\rho(U_J) \subset \mathcal{O}_{S_J}(U_J)[\mathbf{T}]$$

formado por todos los polinomios homogéneos con coeficientes en $\mathcal{O}_{S_J}(U_J)$ cuyo ρ -grado es v y sea $\mathfrak{P}_v \subset \mathcal{O}_{S_J}[T]$ el prehaz completo de \mathcal{O}_{S_J} -módulos dado por

$$\mathfrak{P}_v^\rho : U_J \subset S_J \mapsto \mathfrak{P}_v^\rho(U_J).$$

En particular, se tiene que $\mathfrak{P}_0^\rho = \mathcal{O}_{S_J}$ y además dados dos valores $v, v' \in \mathcal{V}_\rho$, se cumple que $\mathfrak{P}_v^\rho \mathfrak{P}_{v'}^\rho \subset \mathfrak{P}_{v+v'}^\rho$. Por tanto, concluimos que $\mathcal{O}_{S_J}[\mathbf{T}] = \bigoplus_{v \in \mathcal{V}_\rho} \mathfrak{P}_v^\rho$ es un prehaz completo de \mathcal{O}_{S_J} -álgebras graduadas.

Dado un entero no negativo $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, denotemos por $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_r(J \cup c(J))$ el conjunto cuyos elementos son subconjuntos de $J \cup c(J)$ con exactamente r elementos. Denotemos por N_r el número de elementos de \mathcal{P}_r , esto es

$$N_r = \begin{cases} \binom{n}{r} & 0 \leq r \leq n \\ 0 & r > n. \end{cases}$$

Dado $K \in \mathcal{P}_r$, escribimos $K = K_J \cup K_{c(J)}$, donde $K_J \subset J$ y $K_{c(J)} \subset c(J)$. Tomemos indeterminadas $\mathbf{R} = (R_s)_{s \in c(J)}$ y consideremos la suma directa

$$\Omega_{S_J}^r(\log T, R) = \bigoplus_{v \in \mathcal{V}_\rho} \Omega_v^{r,\rho}, \quad \Omega_v^r = \bigoplus_{K \in \mathcal{P}_r} \mathfrak{P}_v^\rho \cdot \bar{\Lambda}_K \simeq (\mathfrak{P}_v^\rho)^{N_r}, \quad \text{donde}$$

$$\bar{\Lambda}_K = \bar{\Lambda}_{j \in K_J} dT_j / T_j \bar{\Lambda}_{s \in K_{c(J)}} dR_s.$$

Cada $\Omega_v^{r,\rho}$ es un prehaz completo de \mathcal{O}_{S_J} -módulos y además, dados dos valores $v, v' \in \mathcal{V}_\rho$, se tiene que $\mathfrak{P}_v^\rho \Omega_{v'}^{r,\rho} \subset \Omega_{v+v'}^{r,\rho}$. De esta manera, se tiene el $\mathcal{O}_{S_J}^\rho[\mathbf{T}]$ -módulo graduado

$$\Omega_{S_J,p}^r(\log T, R) \simeq (\mathcal{O}_{S_J}[\mathbf{T}])^{N_r}.$$

Módulos $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$. Esta construcción la hacemos desde el punto de vista de los haces, es decir, construyendo primero las fibras y pegándolas después formando un espacio étalé.

Fijemos un punto $p \in S_J$ y sea (\mathbf{x}, \mathbf{y}) un sistema local de coordenadas adaptado a E . Para cada $v \in \mathcal{V}_\rho$ consideramos el conjunto $Z_v = H_\rho^{v,+} \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^J$ y los $\mathcal{O}_{M,p}$ -submódulos I_v^r dados por

$$I_v = I_v^0 = \sum_{\sigma \in Z_v} \mathbf{x}^\sigma \mathcal{O}_{M,p} \subset \mathcal{O}_{M,p} \quad \text{e}$$

$$I_v^r = I_v \Omega_{M,p}^r(\log E) \subset \Omega_{M,p}^r(\log E).$$

Dados dos valores $v, v' \in \mathcal{V}_\rho$ con $v \leq v'$, nótese que $Z_{v'} \subset Z_v$ y por tanto $I_{v'}^r \subset I_v^r$. Recuérdese que, para cualquier otro sistema local de coordenadas $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ adaptado a E , se tiene que $x_j = u_j x'_j$ donde $u_j \in \mathcal{O}_{M,p}^*$ es una unidad. Por tanto I_v^r no depende de las coordenadas escogidas, puesto que $\mathbf{x}'^\sigma \mathcal{O}_{M,p} = \mathbf{x}^\sigma \mathcal{O}_{M,p}$ para todo $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J$.

Dado un valor $v \in \mathcal{V}_\rho$, consideremos el $\mathcal{O}_{M,p}$ -módulo $\mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho} = I_v^r / I_{v+}^r$. La *forma inicial a nivel v* es la aplicación natural de paso al cociente

$$\text{In}_v^r : I_v^r \rightarrow \mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho}.$$

3.2. MÓDULOS ρ -GRADUADOS DE r -FORMAS DIFERENCIALES

Definición 3.3. El ρ -valor $\nu_\rho(\omega)$ de un germe de r -forma diferencial $\omega \in \Omega_{M,p}^r(\log E)$ se define como el valor $\nu_\rho(\omega) = \max\{v \in \mathcal{V}_\rho; \omega \in I_v^r\} \in \mathcal{V}_\rho \cup \{\infty\}$.

Nótese que dado $v \in \mathcal{V}_\rho$, se tiene que $I_v^r = \{\omega \in \Omega_{M,p}^r(\log E); \nu_\rho(\omega) \geq v\}$. Por otro lado, obsérvese que $\ker(\text{In}_v^r) = I_{v^+}^r$ y como consecuencia se tiene que $\text{In}_v^r(\omega) \neq 0 + I_{v^+}^r$ si y solamente si $v = \nu_\rho(\omega)$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.4. Se llama ρ -forma inicial $L_\rho\omega$ de un germe de r -forma diferencial logarítmica $\omega \in \Omega_{M,p}^r(\log E)$ a la forma inicial a nivel de su ρ -valor, esto es

$$L_\rho\omega = \text{In}_v^r(\omega), \quad \nu = \nu_\rho(\omega).$$

Observación 3.4. El $(1, 1, \dots, 1)$ -valor es el orden habitual para un germe de función o r -forma diferencial logarítmica.

Tenemos las siguientes propiedades inmediatas para el ρ -valor:

1. Dadas dos r -formas diferenciales logarítmicas $\omega, \omega' \in \Omega_{M,p}^r(\log E)$ se cumple que

$$\nu_\rho(\omega + \omega') \geq \min\{\nu_\rho(\omega), \nu_\rho(\omega')\}.$$

La desigualdad estricta se da sólo si $\nu_\rho(\omega) = \nu_\rho(\omega')$.

2. Dadas $f \in \mathcal{O}_{M,p}$ y $\omega \in \Omega_{M,p}^r(\log E)$, se tiene que $\nu_\rho(f\omega') = \nu_\rho(f) + \nu_\rho(\omega)$.

Esto significa, en particular, que la aplicación $\nu_\rho : \mathcal{O}_{M,p} \rightarrow \mathcal{V}_\rho$ que a cada germe de función $f \in \mathcal{O}_{M,p}$ le asocia su ρ -valor $\nu_\rho(f)$, induce una valoración en el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_{M,p}$. Dados dos valores $v, v' \in \mathcal{V}_\rho$, se define el producto

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{v,p}^{0,\rho} \times \mathfrak{G}_{v',p}^{r,\rho} &\rightarrow \mathfrak{G}_{v+v',p}^{r,\rho} \\ (\text{In}_v^0(f), \text{In}_{v'}^r(\omega)) &\mapsto \text{In}_{v+v'}^r(f\omega). \end{aligned}$$

Se cumplen las siguientes propiedades inmediatas para la ρ -forma inicial.

1. Dado un valor $v \in \mathcal{V}_\rho$ se tiene que $\text{In}_v^r(\omega) + \text{In}_v^r(\omega') = \text{In}_v^r(\omega + \omega')$. Además, nótese que $L_\rho\omega + L_\rho\omega' = 0$ si y solo si $\nu = \nu_\rho(\omega) = \nu_\rho(\omega')$ y $\nu_\rho(\omega + \omega') > \nu$.
2. Se tiene que $L_\rho f \cdot L_\rho\omega = L_\rho(f\omega)$.

Dado que $\mathfrak{G}_{0,p}^0 = \mathcal{O}_{S_j,p}$, se tiene que $\mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho}$ tiene estructura de $\mathcal{O}_{S_j,p}$ -módulo con el producto arriba definido.

Veamos ahora como se leen el ρ -valor y la ρ -forma inicial una vez se fijan coordenadas. Para ello, consideramos un sistema local de coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ adaptado a E . Recordemos que $\mathcal{O}_{M,p} \simeq \mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ y una base del módulo $\Omega_{M,p}^r(\log E)$ viene dada por

$$\{\Lambda_K = \wedge_{j \in K} dx_j/x_j \wedge \wedge_{s \in K_c(j)} dy_s\}_{K \in \mathcal{P}_r}$$

Por definición del ρ -valor se tiene que $\nu_\rho(\Lambda_K) = 0$ para todo $K \in \mathcal{P}_r$ y además

$$\mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho} \simeq (\mathfrak{G}_{v,p}^{0,\rho})^{N_r} = \sum_{K \in \mathcal{P}_r} \mathfrak{G}_{v,p}^{0,\rho} \Lambda_K.$$

Dada $\omega \in \Omega_{M,p}^r(\log E)$, su ρ -valor viene dado por

$$\nu_\rho(\omega) = \min\{\nu_\rho(f_K); K \in \mathcal{P}_r\}, \quad \omega = \sum_{K \in \mathcal{P}_r} f_K \Lambda_K$$

Para un germen de función holomorfa $f \in \mathcal{O}_{M,p}$, consideremos la siguiente escritura de su desarrollo en serie de potencias:

$$f = \sum_{v \in \mathcal{V}_\rho} f^v, \quad f^v = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} f_\sigma^v \mathbf{x}^\sigma, \quad f_\sigma^v \in \mathbb{C}\{y\}, \quad (3.2)$$

El ρ -valor de f es $\nu_\rho(f) = \min\{v \in \mathcal{V}_\rho; f^v \neq 0\}$. En particular $\nu_\rho(x_j) = \rho_j$ para todo $j \in J$ y $\nu_\rho(y_s) = 0$ para todo $s \in c(J)$, es decir, se tiene que $I_{0+} = (\mathbf{x})$. Tomando notaciones como en la Ecuación 3.2, escribimos también

$$\omega = \sum_{K \in \mathcal{P}_r} f_K \Lambda_K = \sum_{K \in \mathcal{P}_r} \left(\sum_{v \in \mathcal{V}_\rho} f_K^v \right) \Lambda_K = \sum_{v \in \mathcal{V}_\rho} \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_r} f_K^v \Lambda_K \right) = \sum_{v \in \mathcal{V}_\rho} \omega^v. \quad (3.3)$$

De esta manera, se da la igualdad $\nu_\rho(\omega) = \min\{v \in \mathcal{V}_\rho; \omega^v \neq 0\}$.

Definición 3.5. Para cada elemento $W \in \mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho}$, definimos su *representante estándar* $\omega_{W,\mathbf{z}}$ asociado al sistema local de coordenadas \mathbf{z} como el único elemento del $\mathbb{C}\{\mathbf{z}\}$ -módulo libre $\bigoplus_{K \in \mathcal{P}_r} \mathbb{C}\{\mathbf{z}\} \Lambda_K$ que se escribe de la forma

$$\omega_{W,\mathbf{z}} = \sum_{K \in \mathcal{P}_r} f_K^v \Lambda_K, \quad f_K^v = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} f_{K,\sigma}^v \mathbf{x}^\sigma \text{ y cumple } L_\rho(\omega_{W,\mathbf{z}}) = W. \quad (3.4)$$

El representante estándar de $L_\rho \omega$ viene dado por ω^ν con $\nu = \nu_\rho(\omega)$, tomando las notaciones de la Ecuación 3.3. Dadas dos r -formas $\omega, \omega' \in \Omega_{M,p}^r(\log E)$ tales que $\nu = \nu_\rho(\omega) = \nu_\rho(\omega')$, nótese que $L_\rho \omega + L_\rho \omega' = 0$ si y solamente si

$$\omega^\nu = \omega_{L_\rho \omega, \mathbf{z}} = -\omega_{L_\rho \omega', \mathbf{z}} = -\omega'^\nu.$$

Esto a su vez, sucede siempre y cuando se tenga que $f_{K,\sigma}^\nu = -f_{K,\sigma}'^\nu$ para todo $K \in \mathcal{P}_r$ y para todo $\sigma \in \Delta_\rho^\nu$, tomando notaciones como en la Ecuación 3.4.

El siguiente enunciado muestra como se puede leer en términos de $\Omega_{v,p}^{r,\rho}$ el módulo $\mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho}$.

Proposición 3.1. Consideremos un sistema local de coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ adaptado a E . La aplicación $\Psi_{p,v,\mathbf{z}}^{r,\rho} : \Omega_{v,p}^{r,\rho} \rightarrow \mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho}$ dada por

$$F \in \mathcal{O}_{S_J,p} \mapsto F, \quad T_j \mapsto L_\rho x_j = \text{In}_{\rho_j}^0(x_j), \quad \bar{\Lambda}_K \mapsto \Lambda_K \quad (3.5)$$

es un isomorfismo de $\mathcal{O}_{S_J,p}$ -módulos.

Demostración. En vista de las definiciones de ρ -valor y ρ -grado, tenemos que la aplicación está bien definida. Además, gracias a la descripción de la forma inicial en términos de coordenadas y sus propiedades, es claro que $\Psi_{p,v,\mathbf{z}}^{r,\rho}$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_{S_J,p}$ -módulos. Resta probar que es además biyectivo. Puesto que se tiene que

$$\Omega_{v,p}^{r,\rho} \simeq (\mathfrak{R}_{v,p}^\rho)^{N_r} \text{ y } \mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho} \simeq (\mathfrak{G}_{v,p}^{0,\rho})^{N_r},$$

es suficiente hacer la prueba para el caso $r = 0$. Denotemos $\Psi = \Psi_{p,v,\mathbf{z}}^{0,\rho}$, $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{v,p}^\rho$ y $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{v,p}^{0,\rho}$.

1. Veamos en primer lugar que $\Psi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{G}$ es sobreyectiva. Dado un elemento $G \in \mathfrak{G}$, sea $f = f_{G,\mathbf{z}} = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} f_\sigma \mathbf{x}^\sigma$ su representante estándar asociado a \mathbf{z} . Se tiene que

$$L_\rho f = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} L_\rho(f_\sigma \mathbf{x}^\sigma) = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} \Psi(F_\sigma \mathbf{T}^\sigma), \quad F_\sigma = L_\rho f_\sigma = \text{In}_\rho^0(f_\sigma), \quad (3.6)$$

por tanto $G = L_\rho f = \Psi(P)$, donde $P = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} F_\sigma \mathbf{T}^\sigma \in \mathfrak{R}$.

2. Para ver que Ψ es inyectiva, consideremos un polinomio homogéneo

$$P = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} F_\sigma \mathbf{T}^\sigma \in \mathfrak{P}.$$

Para cada $\sigma \in \Delta_\rho^v$, denotemos por $f_\sigma \in \mathbb{C}\{\mathbf{y}\}$ el representante estándar de F_σ asociado al sistema local de coordenadas \mathbf{z} y sea $f = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} f_\sigma \mathbf{x}^\sigma$. Por definición f es el representante estándar de $L_\rho f$ y en vista de la Ecuación 3.6 tenemos que $L_\rho f = \Psi(P)$. Como consecuencia $\Psi(P) = 0$ si y solamente si $f_\sigma = 0$ para todo $\sigma \in \Delta_\rho^v$. Esto es, siempre y cuando $L_\rho f_\sigma = F_\sigma = 0$ para todo $\sigma \in \Delta_\rho^v$. Es decir, si y solamente si $P = 0$. ■

Consideremos ahora el conjunto \mathfrak{U}_v^r cuyos elementos son pares (C, Ω) formados por una carta coordenada C adaptada a E (véase Definición 2.8) y una sección $\Omega \in \mathfrak{N}_v^{r,\rho}(U_J)$. Recordemos que C está definida en un abierto conexo $U \subset M$ tal que la intersección $U_J = U \cap S_J \subset S_J$ es también conexa. Además, ésta define un sistema de coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ adaptado a E , convergentes en todo el abierto U . Para cada elemento $(C, \Omega) \in \mathfrak{U}_v^r$, definimos

$$\mathcal{U}(C, \Omega) = \{(p, \Psi_{p,v,\mathbf{z}}^{r,\rho}(\Omega_p)) \in \xi_v^r; p \in U_J\}, \text{ donde } \xi_v^r = \bigcup_{p \in S_J} \{p\} \times \mathfrak{G}_{v,p}^r. \quad (3.7)$$

Lema 3.2. Sean $(C, \Omega), (C', \Omega) \in \mathfrak{U}_v^r$, dos elementos de modo que el abierto U de definición de las cartas C y C' es el mismo. Se tiene la siguiente dicotomía:

- o bien $\mathcal{U}(C, \Omega) = \mathcal{U}(C', \Omega)$,
- o bien $\mathcal{U}(C, \Omega) \cap \mathcal{U}(C', \Omega) = \emptyset$.

Demostración. Denotamos $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a las coordenadas definidas por C y $\mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ a las definidas por C' . Existen unidades $\mathbf{u}_j \in \mathcal{O}_M(U)$ tales que $x'_j = \mathbf{u}_j x_j$ para cada $j \in J$ y escribimos de forma condensada $\mathbf{x}' = \mathbf{u}\mathbf{x}$. Recuérdese que Ω es de la forma

$$\Omega = \sum_{K \in \mathcal{P}_r} P_K \bar{\Lambda}_K, \quad P_K = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} F_{K,\sigma} \mathbf{T}^\sigma, \quad F_{K,\sigma} \in \mathcal{O}_{S_J}(U_J).$$

Por tanto, la prueba se sigue del caso $r = 0$. Escribiremos $P = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} F_\sigma \mathbf{T}^\sigma$ en el lugar de Ω .

Para cada $p \in U_J$, nótese que los gérmenes $F_{\sigma,p}$ y $L_\rho \mathbf{u}_{j,p}$ son elementos del anillo $\mathcal{O}_{S_J,p}$ para todo $\sigma \in \Delta_\rho^v$ y $j \in J$. Denotemos por $f_{\sigma \sim}(\mathbf{y}_p)$ y $\tilde{\mathbf{u}}_{j \sim}(\mathbf{y}_p)$ sus representantes estándar en \mathbf{z}_p , respectivamente. Como las coordenadas \mathbf{z}_p vienen de coordenadas globales \mathbf{z} definidas en todo U , se tiene que de hecho existen funciones $f_{\sigma,p}, \tilde{\mathbf{u}}_j \in \mathcal{O}_M(U)$ tales que

$$f_{\sigma,p} = f_{\sigma \sim} \text{ y } \tilde{\mathbf{u}}_{j,p} = \tilde{\mathbf{u}}_{j \sim}.$$

Denotando $\Psi_{\mathbf{z}_p} = \Psi_{p,v,\mathbf{z}_p}^{0,\rho}$ y $\Psi_{\mathbf{z}'_p} = \Psi_{p,v,\mathbf{z}'_p}^{0,\rho}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathbf{z}_p}(P_p) &= \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} L_\rho(f_{\sigma,p} \mathbf{x}_p^\sigma) \quad \text{y} \quad \Psi_{\mathbf{z}'_p}(P_p) = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} L_\rho(f_{\sigma,p} \mathbf{x}'_p^\sigma) = \\ &= \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} L_\rho(f_{\sigma,p} (\mathbf{u}_p \mathbf{x}_p)^\sigma) = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} L_\rho(f_{\sigma,p} \mathbf{u}_p^\sigma) L_\rho \mathbf{x}_p^\sigma = \sum_{\sigma \in \Delta_\rho^v} L_\rho(f_{\sigma,p} \tilde{\mathbf{u}}_p^\sigma) L_\rho \mathbf{x}_p^\sigma. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{U}(C, \Omega) \cap \mathcal{U}(C', \Omega) \neq \emptyset$, hay un punto $p \in U_J$ con $\Psi_{\mathbf{z}_p}(P_p) = \Psi_{\mathbf{z}'_p}(P_p)$. Es decir, tal que

$$f_{\sigma,p} = f_{\sigma,p} \tilde{\mathbf{u}}_p^\sigma, \quad \text{para todo } \sigma \in \Delta_\rho^v.$$

Puesto que U es conexo, tenemos necesariamente que $f_\sigma = f_\sigma \tilde{\mathbf{u}}^\sigma$. En particular tenemos que $f_{\sigma,q} = f_{\sigma,q} \tilde{\mathbf{u}}_q^\sigma$ para todo $\sigma \in \Delta_\rho^v$ y para todo $q \in U_J$. Como consecuencia $\mathcal{U}(C, \Omega) = \mathcal{U}(C', \Omega)$. ■

Lema 3.3. El conjunto

$$\mathfrak{B}_{\xi_v^r} = \{\mathcal{U}(C, \Omega); (C, \Omega) \in \mathcal{U}_v^r\} \quad (3.8)$$

es una base de abiertos para una topología en ξ_v^r .

Demostración. Escribimos $\xi = \xi_v^r$ y hacemos la prueba en dos partes:

1. Veamos primero que para cada $(p, W) \in \xi$, existe un elemento $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}_{\xi}$ tal que $(p, W) \in \mathcal{U}$.
Sea $C = C(U, \mathbf{z})$ una carta coordenada adaptada a E con $p \in U$ y consideramos un germen $\Omega_{\sim} \in \Omega_{v,p}^{r,\rho}$ cumpliendo que

$$W = \Psi_{\mathbf{z}_p}(\Omega_{\sim}), \quad \Psi_{\mathbf{z}_p} = \Psi_{p,v,\mathbf{z}_p}^{r,\rho}.$$

Puesto que $\Omega_{v,p}^{r,\rho}$ es un prehaz completo, sabemos que existen un abierto $U'_J \subset S_J$ y una sección $\Omega \in \Omega_{v,p}^{r,\rho}(U'_J)$ con $\Omega_p = \Omega_{\sim}$. Sea ahora $U' \subset M$ un abierto de M cumpliendo que $U'_J = U' \cap S_J$ y tomemos un entorno abierto de p suficientemente pequeño $V \subset U \cap U'$ tal que $C|_V$ sea una carta coordenada adaptada a E . Tenemos que $(p, W) \in \mathcal{U}$, donde

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(C|_V, \Omega|_V) \in \mathfrak{B}_{\xi}.$$

2. Dados dos elementos $\mathcal{U} = \mathcal{U}(C, \Omega)$, $\mathcal{U}' = \mathcal{U}(C', \Omega') \in \mathfrak{B}_{\xi}$, veamos que existe $\mathcal{V} \in \mathfrak{B}_{\xi}$ cumpliendo que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$. Supongamos que la intersección de \mathcal{U} con \mathcal{U}' es no vacía y tomemos un elemento $(p, W) \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$. Esto es, se tiene que

$$W = \Psi_{\mathbf{z}_p}(\Omega_p) = \Psi_{\mathbf{z}_p}(\Omega'_p)$$

Sea $V \subset U \cap U'$ un entorno abierto de p , conexo y tal que $V \cap S_J$ es conexo. En vista del Lema 3.2, sabemos que

$$\mathcal{U}(C|_V, \Omega|_{V \cap S_J}) = \mathcal{U}(C'|_V, \Omega'|_{V \cap S_J}).$$

Como consecuencia $\Psi_{\mathbf{z}'_p}(\Omega'_p) = \Psi_{\mathbf{z}_p}(\Omega'_p)$ y por tanto $W = \Psi_{\mathbf{z}_p}(\Omega'_p) = \Psi_{\mathbf{z}_p}(\Omega_p)$. Ahora bien, como $\Psi_{\mathbf{z}_p}$ es un isomorfismo, esta igualdad ocurre si y solamente si $\Omega_p = \Omega'_p$. En estas condiciones, existe un abierto $V' \subset V$ tal que $\Omega|_{V' \cap S_J} = \Omega'|_{V' \cap S_J}$. Tomando V' suficientemente pequeño, tenemos que

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}(C|_{V'}, \Omega|_{V' \cap S_J}) = \mathcal{U}(C'|_{V'}, \Omega'|_{V' \cap S_J}) \in \mathfrak{B}_{\xi},$$

cumple que $(p, W) \in \mathcal{V}$ y además $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$. ■

Proposición 3.2. La proyección $\pi : \xi_v^r \rightarrow S_J$ que a cada par (p, W) lo envía en p es un homeomorfismo local cuando se considera ξ_v^r con la topología definida por la base $\mathfrak{B}_{\xi_v^r}$. Es decir, la proyección

$$\mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho} = \pi : \xi_v^r \rightarrow S_J$$

es un espacio étalé de conjuntos de base S_J .

Demostración. En primera instancia, veamos que la aplicación π es continua. Para ello, probemos que dado un abierto $U_J \subset S_J$, se tiene que el conjunto

$$\pi^{-1}(U_J) = \bigcup_{p \in U_J} \{p\} \times \mathfrak{G}_{v,p}^{r,\rho}$$

es un abierto en ξ_v^r . Esto es, dado un elemento $(p, W) \in \pi^{-1}(U_J)$, veamos que existe un abierto básico $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}_{\xi_v^r}$ de modo que

$$(p, W) \in \mathcal{U} \text{ y } \mathcal{U} \subset \pi^{-1}(U_J). \quad (3.9)$$

Repitiendo el argumento hecho en la primera parte de la demostración del Lema 3.3 y tomando las mismas notaciones, tenemos que $(p, W) \in \mathcal{U}(C|_V, \Omega|_V)$. Sea ahora $V' \subset V \cap U$ un entorno abierto de p lo suficientemente pequeño y considérese el abierto básico

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(C|_{V'}, \Omega|_{V'}) \in \mathfrak{B}_{\xi_v^r}$$

Dado un elemento $(p', W') \in \mathcal{U}$, tenemos, por definición, que $p' \in V' \cap S_J \subset U_J$ y también que $W' = \Psi_{p', v, \mathbf{z}'_p}^{r, \rho}(\Omega_{p'}) \in \mathfrak{G}_{v, p'}^{r, \rho}$. Por tanto, el abierto \mathcal{U} cumple las condiciones de la Ecuación 3.9.

La aplicación π es abierta, puesto que se tiene la igualdad

$$\pi(\mathcal{U}(C, \Omega)) = U \cap S_J, \quad C = C(U, \mathbf{z}).$$

para cualquier abierto básico $\mathcal{U}(C, \Omega) \in \mathfrak{B}_{\xi_v^r}$.

Para probar que π es un homeomorfismo local, basta hacerlo en los abiertos de la base $\mathfrak{B}_{\xi_v^r}$. Esto es, queremos ver que dado un abierto básico $\mathcal{U}(C, \Omega) \in \mathfrak{B}_{\xi_v^r}$, la aplicación restringida

$$\pi|_{\mathcal{U}(C, \Omega)} : \mathcal{U}(C, \Omega) \rightarrow U \cap S_J$$

es un homeomorfismo. Una aplicación entre espacios topológicos continua y biyectiva tiene inversa, si además la aplicación de partida es abierta, se tiene que es un homeomorfismo. Sabemos que $\pi|_{\mathcal{U}}$ es abierta y continua por serlo π y es sobreyectiva por definición, por tanto solo resta probar que también es inyectiva. Esto es claro, puesto que dado un punto $p \in U \cap S_J$ se tiene

$$\{(p, W); W \in \mathfrak{G}_{v, p}^{r, \rho}\} \cap \mathcal{U}(C, \Omega) = \{(p, \Psi_{p, v, \mathbf{z}_p}^{r, \rho}(\Omega_p))\},$$

por tanto puntos distintos de $\mathcal{U}(C, \Omega)$ se proyectan en puntos distintos de S_J . \blacksquare

El espacio étalé $\mathfrak{G}_v^{r, \rho}$ tiene estructura algebraica de módulo sobre un haz. Más precisamente:

Proposición 3.3. Tenemos que $\mathfrak{G}_v^{r, \rho} = \pi : \xi_v^r \rightarrow S_J$ es un haz de \mathcal{O}_{S_J} -módulos.

Demostración. Veamos primero que, dadas dos secciones continuas $s, s' \in \Gamma(U_J, \mathfrak{G}_v^{r, \rho})$, la sección

$$\begin{aligned} s - s' : U_J &\rightarrow \xi_v^r \\ p &\mapsto s(p) - s'(p) \end{aligned}$$

es continua. Dado un abierto básico $\mathcal{U} = \mathcal{U}(C, \Omega) \in \mathfrak{B}_{\xi_v^r}$, donde $C = C(U', \mathbf{z})$, queremos probar que su preimagen $B = (s - s')^{-1}(\mathcal{U}) \subset U_J \cap U'$ es un abierto de U_J . Tomemos para ello un punto $p \in B$ y veamos que existe un abierto $V'_J \subset B$ con $p \in V'_J$. Denotemos $\Psi_{\mathbf{z}_p} = \Psi_{p, v, \mathbf{z}_p}^{r, \rho}$. Se tiene que

$$(p, \Psi_{\mathbf{z}_p}(\Omega_p)) = (s - s')(p) = s(p) - s'(p) = (p, W') - (p, W''), \quad W', W'' \in \mathfrak{G}_{v, p}^{r, \rho}.$$

Por ser $\Psi_{\mathbf{z}_p}$ un isomorfismo, existen gérmenes $\Omega'_\sim, \Omega''_\sim \in \mathfrak{G}_{v, p}^{r, \rho}$ tales que

$$W' = \Psi_{\mathbf{z}_p}(\Omega'_\sim) \text{ y } W'' = \Psi_{\mathbf{z}_p}(\Omega''_\sim)$$

y por tanto $\Omega_p = \Omega'_\sim - \Omega''_\sim$. Por otro lado, como $\mathfrak{G}_v^{r, \rho}$ es un prehaz completo, existe un abierto $V'_J \subset U_J \cap U'$ y elementos $\Omega', \Omega'' \in \mathfrak{G}_v^{r, \rho}(V'_J)$ cumpliendo que $\Omega'_p = \Omega'_\sim$ y $\Omega''_p = \Omega''_\sim$. Haciendo V'_J más pequeño si es necesario, podemos asumir también que

$$\Omega|_{V'_J} = \Omega'|_{V'_J} - \Omega''|_{V'_J}.$$

Por construcción $p \in V'_J$ y para todo punto $q \in V'_J$, tenemos que

$$(s - s')(q) = (q, \Psi_{\mathbf{z}_q}(\Omega'_q)) - (q, \Psi_{\mathbf{z}_q}(\Omega''_q)) = (q, \Psi_{\mathbf{z}_q}(\Omega'_q - \Omega''_q)) = (q, \Psi_{\mathbf{z}_q}(\Omega_q))$$

y por tanto, concluimos que $q \in A$.

Con argumentos similares demostramos que dadas dos secciones continuas $a \in \mathcal{O}_{S_J}(U_J)$ y $s \in \Gamma(U_J, \mathfrak{G}_v^{r, \rho})$, la sección $as : U_J \rightarrow \xi_v^r$ definida por $p \mapsto a(p)s(p)$ es una aplicación continua. \blacksquare

Dado que sabemos, en vista del Lema 3.1, que el conjunto de valores \mathcal{V}_ρ tiene un buen orden y que éste además es isomorfo al conjunto de los números naturales con su orden usual, tenemos que la familia de ideales $\{I_v\}_{v \in \mathcal{V}_\rho}$ define una filtración del anillo $\mathcal{O}_{M,p}$. Así, podemos considerar el \mathcal{O}_{S_J} -módulo dado por la suma directa $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$ de los \mathcal{O}_{S_J} -módulos $\mathfrak{G}_v^{r,\rho}$, esto es

$$\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E) = \bigoplus_{v \in \mathcal{V}_\rho} \mathfrak{G}_v^{r,\rho}.$$

Para hacer referencia al caso especial $r = 0$, usamos la notación $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_M = \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^0(\log E)$.

Observación 3.5. Con esta construcción $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$ es el espacio étalé definido por la proyección

$$\pi : \xi^r \rightarrow S_J, \quad \xi^r = \bigcup_{p \in S_J} \{p\} \times \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^r(\log E),$$

donde en ξ^r se toma la base \mathfrak{B}_{ξ^r} construida de manera análoga a \mathfrak{B}_{ξ^r} en la Ecuación 3.8. Ésta se define a partir de homomorfismos

$$\Psi_{p,\mathbf{z}}^{r,\rho} : \Omega_{S_J,p}^r(\log T, R) \rightarrow \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^r(\log E)$$

del mismo modo que en la Ecuación 3.6. Obsérvese también que $\mathfrak{B}_{\xi^r} \subset \mathfrak{B}_{\xi^r}$ para todo valor $v \in \mathcal{V}_\rho$. En vista de las propiedades de la forma inicial, se deduce que para cada par de valores $v, v' \in \mathcal{V}_\rho$ se tiene que

$$\mathfrak{G}_{v,p}^{0,\rho} \mathfrak{G}_{v',p}^{r,\rho} \subset \mathfrak{G}_{v+v',p}^{r,\rho}. \quad (3.10)$$

Esto, junto con la Proposición 3.1, permiten concluir que los $\Psi_{p,\mathbf{z}}^{r,\rho}$ son isomorfismos de módulos graduados.

Proposición 3.4. Se tiene que $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_M$ es una \mathcal{O}_{S_J} -álgebra graduada de base S_J .

Demostración. Para ver que es un haz de anillos, probemos que las secciones “producto” y “unidad” son continuas. En vista de la Ecuación 3.10, para ver que el producto de dos secciones continuas es continuo, basta hacerlo en cada componente homogénea. Esto es, dada una pareja de valores $v, v' \in \mathcal{V}_\rho$ y dos secciones continuas $s \in \Gamma(U_J, \mathfrak{G}_v^{0,\rho})$ y $s' \in \Gamma(U_J, \mathfrak{G}_{v'}^{0,\rho})$, debemos probar que la sección

$$ss' : \begin{array}{ccc} U_J & \rightarrow & \xi_{v+v'}^0 \\ p & \mapsto & s(p)s'(p) \end{array}$$

es una aplicación continua. La prueba es una adaptación de la hecha para la diferencia en la Proposición 3.3, teniendo en cuenta además la compatibilidad con la ρ -graduación para el prehaz completo $\mathcal{O}_{S_J}[T]$, esto es, que también se cumple que $\mathfrak{P}_v^\rho \mathfrak{P}_{v'}^\rho \subset \mathfrak{P}_{v+v'}^\rho$.

Recuérdese que $\mathfrak{G}_{0,p}^{0,\rho} = \mathcal{O}_{S_J,p}$ y por tanto ξ_0^0 es el haz de anillos \mathcal{O}_{S_J} . Consideremos la sección $1 \in \mathcal{O}_{S_J}(S_J)$ definida en todo S_J . Si vemos que 1_p es el elemento unidad en $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_{M,p}$, hemos terminado. Tenemos que $1_p = L_\rho \mathbf{1}_p$ con $\mathbf{1}_p$ la unidad en $\mathcal{O}_{M,p}$. Dado un elemento

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_k = L_\rho f_1 + L_\rho f_2 + \cdots + L_\rho f_k \in \mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_M$$

se tiene que $1_p F = (L_\rho \mathbf{1}_p) L_\rho f = L_\rho(\mathbf{1}_p f) = L_\rho(f) = F$, donde $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$.

Así y en virtud de la Ecuación 3.10, tenemos que $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_M$ es una \mathcal{O}_{S_J} -álgebra graduada. ■

Proposición 3.5. Se tiene que $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$ es un $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_M$ -módulo graduado.

Demostración. En vista de la Ecuación 3.10, para ver que el producto escalar entre secciones continuas es continuo, basta hacerlo en cada componente homogénea. Dada una pareja de valores $v, v' \in \mathcal{V}_\rho$ y dos secciones continuas $a \in \Gamma(U_J, \mathfrak{G}_v^{0,\rho})$ y $s \in \Gamma(U_J, \mathfrak{G}_{v'}^{r,\rho})$, adaptando la prueba hecha para la diferencia en la Proposición 3.3, concluimos que

$$as : \begin{array}{ccc} U_J & \rightarrow & \xi_{v+v'}^r \\ p & \mapsto & a(p)s(p) \end{array}$$

es una sección continua. De esta manera, se concluye el enunciado. ■

Observación 3.6. Con todas estas construcciones, dada una carta coordenada C adaptada al divisor E con un abierto de definición U y representada en coordenadas por \mathbf{z} , tenemos que

$$\Psi_{U,\mathbf{z}}^{r,\rho} : \Omega_{S_J}^r(U_J)(\log T, R) \rightarrow \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(U_J)(\log E) \quad (3.11)$$

definida como en la Ecuación 3.6, es un isomorfismo de módulos graduados. Es decir, los módulos $\Omega_{S_J}^r(\log T, R)$ y $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(\log E)$ son localmente isomorfos.

3.3. La ρ -forma inicial de una foliación

Proposición 3.6. Dada una r -forma diferencial $\omega \in \Omega_M^r(U)(\log E)$, existe una única sección

$$L_\rho \omega \in \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^r(U_J)(\log E),$$

tal que se tiene $(L_\rho \omega)_p = L_\rho \omega_p$ para todo $p \in U_J$, donde $U_J = U \cap S_J$.

Demostración. Si la sección existe es única, y viene dada por

$$\begin{aligned} L_\rho \omega : U_J &\rightarrow \xi^r \\ p &\mapsto (p, L_\rho \omega_p) \end{aligned}$$

Veamos que es una sección continua. El caso de r -formas se sigue del mismo modo que el de funciones; haremos la prueba solamente en este último, por comodidad en las notaciones.

Tomemos un abierto básico $\mathcal{U} = \mathcal{U}(C, P) \in \mathcal{B}_{\xi^0}$, donde $C = C(U', \mathbf{z})$. Queremos probar que

$$B = (L_\rho f)^{-1}(\mathcal{U}) \subset U_J \cap U'$$

es un abierto de U_J . Supongamos entonces que existe un punto $p \in B$ y veamos que hay un abierto $V'_J \subset B$ con $p \in V'_J$. Escribiendo $\Psi_{\mathbf{z}_p} = \Psi_{p,\mathbf{z}_p}^{0,\rho}$, tenemos que $L_\rho f_p = \Psi_{\mathbf{z}_p}(P_p)$. Por definición de la forma inicial y de la aplicación $\Psi_{\mathbf{z}_p}$, tenemos que

$$L_\rho f_p = \Psi_{\mathbf{z}_p}(Q_p), \quad Q_p = \sum_{\sigma \in \Delta_p^\nu} L_\rho f_{\sigma,p}^\nu T^\sigma, \quad f_p^\nu = \sum_{\sigma \in \Delta_p^\nu} f_{\sigma,p}^\nu \mathbf{x}_p^\sigma,$$

donde f_p^ν es el representante estándar de f_p en las coordenadas \mathbf{z}_p . Por ser $\Psi_{\mathbf{z}_p}$ un isomorfismo, tenemos que $P_p = Q_p$. Existe un abierto $V' \subset U \cap U'$ suficientemente pequeño donde tiene sentido la siguiente igualdad

$$P|_{V'_J} = Q|_{V'_J} = \sum_{\sigma \in \Delta_p^\nu} L_\rho f_{\sigma|_{V'}}^\nu T^\sigma$$

Entonces para todo $q \in V'_J$ tenemos $L_\rho f_q = \Psi_{\mathbf{z}_q}(Q_q) = \Psi_{\mathbf{z}_q}(P_q)$ y como consecuencia $q \in B$. ■

Nótese que tenemos un ρ -valor asociado a toda la forma inicial global $L_\rho \omega$ en cada componente conexa de U_J .

Ejemplo 3.1. Sea U un abierto de \mathbb{C}^2 donde suponemos definidas coordenadas (z_1, z_2) centradas en el origen, tomamos $E = (z_1 z_2 = 0)$ y sea

$$f = z_1^3 + z_1 z_2 + z_2 \phi(z_2) z_1^7, \quad \phi(0) \neq 0.$$

La estratificación $\mathcal{S}_{M,E}$ inducida por el divisor, es la que sigue:

$$\begin{aligned} S_{\{1,2\}} &= E_{\{1,2\}} = \{(0, 0)\}, & S_{\{1\}} &= ((z_1 = 0) \cap U) \setminus S_{\{1,2\}} \simeq \mathbb{C}^* \cap U, \\ S_{\{2\}} &= ((z_2 = 0) \cap U) \setminus S_{\{1,2\}} \simeq \mathbb{C}^* \cap U, & S_\emptyset &= (\mathbb{C}^*)^2 \cap U = U \setminus (S_{\{1,2\}} \cup S_{\{1\}} \cup S_{\{2\}}). \end{aligned}$$

Puesto que no hay confusión, denotaremos Ψ los distintos isomorfismos de la Ecuación 3.11, definidos para el peso correspondiente en cada caso. Tenemos las siguientes formas iniciales:

1. Estrato S_\emptyset . Escribimos $(z_1, z_2) = (y_1, y_2)$. La forma inicial asociada al único peso $\rho = 0$ es $L_0 f = \Psi(F)$, donde F tiene a

$$f_F = f(y_1, y_2) = y_1^3 + y_1 y_2 + y_2 \phi(y_2) y_1^7$$

como representante estándar en las coordenadas (y_1, y_2) .

2. Estrato $S_{\{1\}}$. Escribimos $z_1 = x$ y $z_2 = y$. La forma inicial asociada al peso $\rho = (1)$ es $L_{(1)} f = \Psi(F.T)$, donde

$$g_F = g(y) = y$$

es el representante estándar de F en coordenadas (x, y) . Nótese que la forma inicial no cambia cuando nos movemos en el estrato $S_{\{1\}}$, pues “estamos moviéndonos en la coordenada y ”. Por otro lado, la forma inicial asociada a cualquier otro peso $\rho = (p)$ es en esencia la misma, solo que asocia a f un ρ -valor distinto. En el primer caso el valor uno y en el segundo el valor p .

3. Estrato $S_{\{2\}}$. Escribimos $z_2 = x$ y $z_1 = y$. La forma inicial asociada al “único peso significativo” $\rho = (1)$ es $L_{(1)} f = \Psi(F.T)$, donde F tiene a

$$g_F = g(y) = y + \phi(0) y^7$$

como representante estándar.

4. Estrato $S_{\{1,2\}}$. Escribimos $(z_1, z_2) = (y_1, y_2)$. La forma inicial asociada al peso $\rho = (1, 1)$ es $L_\rho f = \Psi(F.T_1 T_2)$, donde F tiene asociado como representante estándar la constante $c_F = 1$. La forma inicial para el peso $\rho = (1, 2)$ es

$$L_\rho f = \Psi(F.T_1^3 + G.T_1 T_2),$$

donde $c_F = 1$ y $c_G = 1$ son los representantes estándar de F y G respectivamente. Finalmente asociada al peso $\rho = (1, 3)$, tenemos $L_\rho f = \Psi(F.T_1^3)$, con $c_F = 1$. Éstos tres son las “únicas” formas iniciales de f en este estrato.

A continuación explicaremos y detallaremos algunas de las observaciones en este ejemplo.

Dados dos pesos ρ y ρ' , tenemos un isomorfismo $\Phi_{\rho, \rho'} : \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^r(\log E) \rightarrow \mathfrak{G}_J^{\rho'} \Omega_{M,p}^r(\log E)$ dado de manera natural por $L_\rho x_i \rightarrow L_{\rho'} x_i$. Esto es la composición

$$\Psi_{p,\mathbf{z}}^{r,\rho} \circ \Phi \circ (\Psi_{p,\mathbf{z}}^{r,\rho'})^{-1}$$

es la identidad en $\Omega_{S_J,p}^r(\log T, R)$. De esta manera, decimos que dos pesos $\rho, \rho' \in \mathcal{W}_J$ están ω -asociados para una r -forma diferencial $\omega \in \Omega_{M,p}^r(\log E)$ si $\Phi(L_\rho \omega) = L_{\rho'} \omega$, esto es si

$$(\Psi_{p,\mathbf{z}}^{r,\rho})^{-1}(L_\rho \omega) = (\Psi_{p,\mathbf{z}}^{r,\rho'})^{-1}(L_{\rho'} \omega) \in \Omega_{S_J}^r(\log T, R) \quad (3.12)$$

una vez se fija un sistema de coordenadas \mathbf{z} . Esta condición se lee para funciones y uno-formas en términos del poliedro de Newton definido sobre el estrato combinatorio J . Así, tendremos una “única” forma inicial asociada a cada cara compacta del poliedro. Volveremos sobre esto en el Capítulo 4.

Definición 3.6. Dado un punto $p \in S_J$ y germen de foliación $\mathcal{F}_p \subset \Omega_{M,p}^1$, definimos su ρ -forma inicial $L_\rho(\mathcal{F}_p)$ como el $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_{M,p}$ -submódulo

$$L_\rho(\mathcal{F}_p) = L_\rho(\omega_p) \cdot \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^1(\log E),$$

donde ω_p es un generador de \mathcal{F}_p adaptado al divisor E . Dada una foliación $\mathcal{F} \subset \Omega_M^1$ definimos su ρ -forma inicial $L_\rho \mathcal{F}$ como el $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_M$ -submódulo de $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_M^1(\log E)$ definido localmente por

$$(L_\rho \mathcal{F})_p = L_\rho(\mathcal{F}_p).$$

Definimos el ρ -valor $\nu_\rho(\mathcal{F})$ como el ρ -valor de un generador local de \mathcal{F} adaptado a E en un punto $p \in S_J$.

Observación 3.7. Estos conceptos son compatibles con las construcciones. Además, el último no depende ni del generador escogido ni del punto $p \in S_J$. En efecto, si tomamos dos generadores, nos encontramos con que sus ρ -valores distan el ρ -valor de una unidad, esto es, cero; la independencia del punto la podemos ver con un argumento similar al hecho en el Lema 2.6.

Cuando $\rho = (1, 1, \dots, 1)$, recuperamos el orden adaptado de \mathcal{F} a lo largo de E_J (véase la Ecuación 2.3), esto es, tenemos la igualdad $\nu_\rho(\mathcal{F}) = \nu_J(\mathcal{F})$.

Lema 3.4. Dada una foliación \mathcal{F} y dos pesos $\rho, \rho' \in \mathcal{W}_J$, son equivalentes:

- Los pesos están ω -asociados para un generador local ω adaptado a E en un punto p .
- Los pesos están ω -asociados para cualquier generador local ω adaptado a E en un punto cualquiera p .

Demostración. La prueba se sigue adaptando las demostraciones hechas en la Proposición 2.12 y los Lemas 2.5 y 2.6, así como de la definición de ρ -forma inicial. ■

Esto motiva la siguiente definición:

Definición 3.7. Dada una foliación $\mathcal{F} \subset \Omega_M^1$ y dos pesos $\rho, \rho' \in \mathcal{W}_J$, diremos que los pesos están \mathcal{F} -asociados si lo están para un generador local ω de \mathcal{F} adaptado a E en un punto $p \in S_J$.

Para un haz inversible de ideales $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_M$, podemos definir de manera análoga la ρ -forma inicial $L_\rho \mathcal{I}$ y la condición relativa a dos pesos de estar \mathcal{I} -asociados.

3.4. Producto y diferencial exteriores

Vamos a presentar someramente las operaciones de producto y diferencial exteriores en los haces anteriormente construidos. Lo haremos de manera local en cada fibra. Éstas son construcciones similares a las que ya hemos realizado. Por otro lado, son definiciones que cumplen las propiedades naturales exigidas a este tipo de operaciones, lo que justifica su nombre. Fijemos a partir de ahora un punto $p \in S_J$.

Basta definir el producto exterior para los elementos de las respectivas bases. Tomamos $\bar{\Lambda}_K$ con $K \in \mathcal{P}_r$ y $\bar{\Lambda}_L$, con $L \in \mathcal{P}_s$ tales que $K = (K_J, K_{c(J)})$ y $L = (L_J, L_{c(J)})$ y tomamos la permutación $\sigma : K \cup L \rightarrow K \cup L$ que reordena $(K_J, K_{c(J)}, L_J, L_{c(J)})$. Se define:

$$\begin{aligned} \bar{\wedge} : \Omega_{S_J, p}^r(\log T, R) \times \Omega_{S_J, p}^s(\log T, R) &\rightarrow \Omega_{S_J, p}^{r+s}(\log T, R) \\ (\bar{\Lambda}_K, \bar{\Lambda}_L) &\mapsto \begin{cases} 0 & K \cap L \neq \emptyset \\ (-1)^{\text{sg}(\sigma)} \bar{\Lambda}_{K \cup L} & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definimos la diferencial exterior

$$\begin{aligned} \bar{d} : \mathcal{O}_{S_J, p}[\mathbf{T}] &\rightarrow \Omega_{S_J, p}^1(\log T, R) \\ \sum F_\sigma \mathbf{T}^\sigma &\mapsto \sum_{j \in J} (\sum \sigma(j) F_\sigma \mathbf{T}^\sigma) \frac{\bar{d}T_j}{T_j} + \sum_{s \in c(J)} (\sum \frac{\partial F_\sigma}{\partial y_s} \mathbf{T}^\sigma) \bar{d}R_s. \end{aligned}$$

y de esta manera tenemos también

$$\begin{aligned} \bar{d} : \Omega_{S_J, p}^r(\log T, R) &\rightarrow \Omega_{S_J, p}^{r+1}(\log T, R) \\ \sum P_K \bar{\Lambda}_K &\mapsto \sum \bar{d}P_K \bar{\wedge} \bar{\Lambda}_K \end{aligned}$$

Por otro lado definimos

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^r(\log E) \times \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^s(\log E) &\rightarrow \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^{r+s}(\log E) \\ \left(\sum_{v \in \mathcal{V}_\rho} \text{In}_\rho^v(\omega_v), \sum_{v \in \mathcal{V}_\rho} \text{In}_\rho^v(\omega'_v) \right) &\mapsto \sum_{v \in \mathcal{V}_\rho} \left(\sum_{v' \in \mathcal{V}_\rho} \text{In}_\rho^{v+v'}(\omega_v \wedge \omega'_{v'}) \right). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D : \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^r(\log E) &\rightarrow \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^{r+1}(\log E) \\ \sum_{v \in \mathcal{V}_\rho} \text{In}_\rho^v(\omega_v) &\mapsto \sum_{v \in \mathcal{V}_\rho} \text{In}_\rho^v(d\omega_v). \end{aligned}$$

Estas construcciones son compatibles por la diferencial y el producto exterior en las gérmenes de r -formas logarítmicas sobre M por como se han dado. Además, son compatibles también con los isomorfismos locales $\Psi_{p,\mathbf{z}}^{r,\rho}$ y las construcciones hechas para el módulo $\Omega_{S_J}^r(\log T, R)$.

Capítulo 4

Foliaciones Newton no degeneradas

A continuación presentamos el capítulo central de esta memoria. En él introducimos el concepto de espacio foliado Newton no degenerado, siguiendo las ideas clásicas para hipersuperficies e intersecciones completas de Kouchnirenko y Oka (véase [35, 36]). Además probamos, dentro del marco hiperbólico-complejo, la equivalencia con tener una predesingularización combinatoria, esto es, con ser de tipo tórico débil. Finalmente, damos una lista de ejemplos representativa para esta familia de espacios foliados.

Fijamos un espacio ambiente $\mathcal{M} = (M, E)$ con la propiedad de cruzamientos normales fuertes para el divisor E y recordamos que tenemos el tejido soporte combinatorio $\mathcal{H}_{M,E}$ y la estratificación asociada $\mathcal{S}_{M,E}$.

4.1. Ceros de uno-formas diferenciales pesadas

Fijamos, a lo largo de esta sección, un estrato combinatorio $J \in \mathcal{H}_{M,E}$ y un peso $\rho \in \mathcal{W}_J$. Sea $p \in S_J$ un punto, escribimos $A_p = \mathcal{O}_{S_J,p}$ y consideramos la función $e_p : A_p \rightarrow \mathbb{C}$ que a cada $F \in A_p$ le asocia su valor en el punto p , esto es $e_p(F) = F(p)$. Tomamos el \mathbb{C} -módulo $\Omega_{\mathbb{C}[\mathbf{T}]}^r(\log T, R)$ dado por el producto tensorial

$$\Omega_{\mathbb{C}[\mathbf{T}]}^r(\log T, R) = \Omega_{S_J,p}^r(\log T, R) \otimes_{A_p} \mathbb{C}$$

y consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{e}_p : \quad \Omega_{S_J,p}^r(\log T, R) &\rightarrow \Omega_{\mathbb{C}[\mathbf{T}]}^r(\log \mathbf{T}, \mathbf{R}) \\ \sum_{K \in \mathcal{P}_r} (\sum F_{K,\sigma} \mathbf{T}^\sigma) \bar{\Lambda}_K &\mapsto \sum_{K \in \mathcal{P}_r} (\sum e_p(F_{K,\sigma}) \mathbf{T}^\sigma) \bar{\Lambda}_K. \end{aligned}$$

De esta manera, cada polinomio $P \in A_p[\mathbf{T}]$, tiene asociada una función “evaluación”

$$\begin{aligned} f_P : (S_J, p) \times \mathbb{C}^J &\rightarrow \mathbb{C} \\ (q, \mathbf{t}) &\mapsto f_{\tilde{e}_q(P)}(\mathbf{t}), \end{aligned}$$

donde $f_{\tilde{e}_q(P)}$ es la función polinómica definida por $\tilde{e}_q(P) \in \mathbb{C}[\mathbf{T}]$. Como consecuencia, dado un germen de r -forma diferencial $\Omega \in \Omega_{S_J,p}^r(\log T, R)$, tiene sentido la expresión

$$(\Omega = 0) = \bigcap_{K \in \mathcal{P}_r} (F_K = 0) \subset (S_J, p) \times \mathbb{C}^J, \quad \text{donde } \Omega = \sum_{K \in \mathcal{P}_r} F_K \bar{\Lambda}_K$$

Nos va a interesar más adelante trabajar con formas diferenciales que cumplan la condición:

$$(\Omega = 0) \cap (S_J, p) \times (\mathbb{C}^*)^J = \emptyset \quad (\text{ND})$$

que tomando la evaluación en el punto p es equivalente a:

$$(\Omega|_p = 0) \cap \{p\} \times (\mathbb{C}^*)^J = \emptyset, \quad \Omega|_p = \tilde{e}_p(\Omega).$$

Nótese que $\mathbb{C}^J \setminus (\mathbb{C}^*)^J = (\prod T_j = 0)$ y por tanto la condición anterior se da siempre y cuando $(\Omega|_p = 0) \subset (\prod T_j = 0)$. Gracias al teorema de los ceros de Hilbert, esto significa tener la siguiente relación entre ideales del anillo $\mathbb{C}[T]$

$$\prod T_j \cdot \mathbb{C}[T] \subset \sqrt{(F_K|_p)_{K \in \mathcal{P}_r} \cdot \mathbb{C}[T]}$$

que a su vez es equivalente a tener la siguiente inclusión de ideales en $A_p[T]$:

$$\prod T_j \cdot A_p[T] \subset \sqrt{(F_K)_{K \in \mathcal{P}_r} \cdot A_p[T]} \quad (\text{ND}')$$

Es claro que si $\mathfrak{U} \in \mathcal{O}_{S_J, p}^*$ es una unidad, entonces Ω cumple la condición (ND) si y solamente si $\mathfrak{U}\Omega$ la cumple.

Como veremos ahora, también tiene sentido definir la condición (ND) para r -formas pesadas en el haz $\mathfrak{G}_J^{\rho} \Omega_{M, p}^r(\log E)$, es decir, que ésta no depende de la lectura en coordenadas de las formas iniciales. Haremos la prueba detallada para el caso $r = 1$, que es el que nos interesa de manera especial. Más precisamente, tenemos el siguiente enunciado:

Proposición 4.1. Dada una uno-forma $W \in \mathfrak{G}_J^{\rho} \Omega_{M, p}^1(\log E)$ y dos sistemas locales de coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ adaptados a E , se tiene que

$$(\Omega = 0) \cap (S_J, p) \times (\mathbb{C}^*)^J = \emptyset \quad \text{si y sólo si} \quad (\Omega' = 0) \cap (S_J, p) \times (\mathbb{C}^*)^J = \emptyset,$$

$$\text{donde } W = \Psi_{p, \mathbf{z}}^{1, \rho}(\Omega) = \Psi_{p, \mathbf{z}'}^{1, \rho}(\Omega').$$

Demostración. Denotemos $\mathfrak{G}^r = \mathfrak{G}_J^{\rho} \Omega_{M, p}^r(\log E)$, para $r = 0, 1$. Recordemos que $x_j = u_j x'_j$ con u_j una unidad en $\mathcal{O}_{M, p}$ y que una vez fijadas coordenadas, \mathfrak{G}^1 es un \mathfrak{G}^0 -módulo libre. Consideramos las bases

$$\beta = \left(\text{In}^0 \left(\frac{dx_j}{x_j} \right), \text{In}^0(dy_s) \right), \quad \beta' = \left(\text{In}^0 \left(\frac{dx'_j}{x'_j} \right), \text{In}^0(dy'_s) \right).$$

Nótese que

$$dy'_s = \sum_{j \in J} x_j \frac{\partial y'_s}{\partial x_j} \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{r \in A} \frac{\partial y'_s}{\partial y_r} dy_r,$$

$$\frac{dx'_j}{x'_j} = \frac{du_j}{u_j} + \frac{dx_j}{x_j}, \quad \text{con } \frac{du_j}{u_j} = \sum_{\ell \in J} x_{\ell} h_{j\ell} \frac{dx_{\ell}}{x_{\ell}} + \sum_{s \in A} g_{js} dy_s$$

y por tanto se tienen las siguientes relaciones entre β y β' :

$$\text{In}^0(dy'_s) = \sum_{r \in A} \text{In}^0 \left(\frac{\partial y'_s}{\partial y_r} \right) \text{In}^0(dy_r),$$

$$\text{In}^0 \left(\frac{dx'_j}{x'_j} \right) = \text{In}^0 \left(\frac{dx_j}{x_j} \right) + \sum_{r \in A} \text{In}^0(g_{jr}) \text{In}^0(dy_r).$$

Estas relaciones dan lugar a los isomorfismos

$$\begin{aligned} \Phi_0 : A_p[T] &\rightarrow A_p[T] & \Phi_1 : \Omega_{J,p}^1(\log T, R) &\rightarrow \Omega_{J,p}^1(\log T, R) \\ T_j &\mapsto \text{In}^0(\mathbf{u}_j)T_j & \frac{dT_j}{T_j} &\mapsto \frac{dT_j}{T_j} + \sum_{r \in A} \text{In}^0(g_{jr})dR_r \\ & & dR_s &\mapsto \sum_{r \in A} \text{In}^0\left(\frac{\partial y'_s}{\partial y_r}\right)dR_r \\ F \in A_p[T] &\mapsto \Phi_0(F) \in A_p[T]. \end{aligned}$$

Escribamos

$$\begin{aligned} \Omega &= \Psi_{p,\mathbf{z}}^{1,\rho}(W) = \sum_{j \in J} H_j \frac{dT_j}{T_j} + \sum_{s \in A} F_s dR_s, \\ \Phi_1(\Omega) &= \Omega' = \Psi_{p,\mathbf{z}'}^{1,\rho}(W) = \sum_{j \in J} H'_j \frac{dT_j}{T_j} + \sum_{s \in A} F'_s dR_s \end{aligned}$$

y denotemos $I = (H_j, F_s)A_p[T]$, $I' = (H'_j, F'_s)A_p[T]$. Debemos probar que

$$\prod T_j \in \sqrt{I|_p \mathbb{C}[T]} \text{ si y sólo si } \prod T_j \in \sqrt{I'|_p \mathbb{C}[T]}.$$

Por simplicidad en el desarrollo de los cálculos, hacemos la prueba en dos etapas:

1. Supongamos que $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Tenemos las relaciones:

$$H'_j = H_j, \quad j \in J \quad \text{y} \quad \mathbf{F}' = \mathbf{J}_0 \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = (F_s)_{s \in A}, \quad \mathbf{F}' = (F'_s)_{s \in A}, \quad \mathbf{J}_0 = \left(\frac{\partial y'_s}{\partial y_r} \right)_{r,s \in A}.$$

La matriz \mathbf{J}_0 es invertible en $A_p[T]$, como consecuencia tenemos la igualdad $I = I'$ y por tanto se cumple la propiedad que buscábamos.

2. Supongamos que $\mathbf{y}' = \mathbf{y}$. Tenemos las relaciones:

$$H'_j = \Phi_0(H_j), \quad j \in J \quad \text{y} \quad F'_s = \Phi_0(F_s) + \sum_{j \in J} \Phi_0(H_j) \text{In}^0(g_{js}),$$

por tanto, se da la igualdad $I' = \Phi_0(I)$. Consideremos el isomorfismo $\tilde{\Phi}_0 : \mathbb{C}[T] \rightarrow \mathbb{C}[T]$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_p[T] & \xrightarrow{\Phi_0} & A_p[T] \\ \downarrow \tilde{e}_p & & \downarrow \tilde{e}_p \\ \mathbb{C}[T] & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_0} & \mathbb{C}[T] \end{array}$$

En particular tenemos que $\tilde{\Phi}_0(T_j) = \mathbf{u}_j(p)T_j$ y por tanto $\tilde{\Phi}_0(\prod T_j) = \prod \mathbf{u}_j(p)T_j = \lambda \prod T_j$, con $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Por otro lado, tenemos que $\Phi_0(I)|_p = \tilde{\Phi}_0(I|_p)$ y como consecuencia

$$\sqrt{\Phi_0(I)|_p} = \sqrt{\tilde{\Phi}_0(I|_p)} = \tilde{\Phi}_0\left(\sqrt{I|_p}\right),$$

pues los isomorfismos respetan el radical. De esta manera

$$\prod T_j \in \sqrt{I|_p} \Leftrightarrow \lambda \prod T_j \in \tilde{\Phi}_0\left(\sqrt{I|_p}\right) \Leftrightarrow \prod T_j \in \tilde{\Phi}_0\left(\sqrt{I|_p}\right) \Leftrightarrow \prod T_j \in \sqrt{\Phi_0(I)|_p}$$

y concluimos la prueba. ■

Con todo esto, tiene sentido introducir la siguiente definición:

Definición 4.1. Sea $\langle W \rangle = W \cdot \mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^1(\log E)$ un $\mathfrak{G}_J^\rho \mathcal{O}_{M,p}$ -submódulo de $\mathfrak{G}_J^\rho \Omega_{M,p}^1(\log E)$. Decimos que $\langle W \rangle$ *satisface la condición (ND)* si existe un sistema de coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tal que $(\Psi_{p,\mathbf{z}}^{1,\rho})^{-1}(W)$ satisface la condición (ND).

4.2. Espacios foliados Newton no degenerados

Introducimos los siguientes conceptos:

Definición 4.2. Consideremos un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$:

1. Fijemos un punto $p \in S_J$ para algún estrato combinatorio $J \in \mathcal{H}_{M,E}$.
 - a) Dado un peso $\rho \in \mathcal{W}_J$, se dice que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es (ρ, J) -no degenerado en p si $(L_\rho \mathcal{F})_p$ satisface la condición (ND).
 - b) Se dice que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es *Newton no degenerado en p* si es (ρ, J) -no degenerado en p para cualquier peso $\rho \in \mathcal{W}_J$.
2. Decimos que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es *Newton no degenerado* si lo es en cada punto $p \in M$.

Se puede probar que ser Newton no degenerado en un punto $p \in M$ es una propiedad abierta, esto es, existe un entorno $U \subset M$ de p tal que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_U$ es Newton no degenerado.

Observación 4.1. En este momento, vamos a explicar mejor la Observación 3.7 en lo referente a poliedros de Newton. Escribamos, por comodidad en la notación $N_J = N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ y $\nu = \nu_\rho(\mathcal{F})$. Sabemos que a cada peso $\rho \in \mathcal{W}_J$ se le puede asociar la familia de hiperplanos $\{H_\rho^v\}_{v \in \mathbb{R}}$, donde recordemos que $H_\rho^v = \{\sigma \in \mathbb{R}^J; \rho(\sigma) = v\}$. Además se tiene que la intersección

$$C_\rho = H_\rho^\nu \cap N_J \subset \Delta_\rho^\nu$$

es una cara compacta de la frontera topológica de N_J . Recíprocamente, fijada una cara compacta c -dimensional C del poliedro de Newton N_J , existe un subespacio afín de dimensión $\#J - c$ formado por hiperplanos $H \subset \mathbb{R}^J$ tales que $H \cap N_J = C$. Éste se identifica con un subespacio de $(\mathbb{R}^J)^*$ de dimensión $\#J - c - 1$ y así asociamos a C un subconjunto $\mathcal{W}_{J,C} \subset \mathcal{W}_J$ del conjunto de pesos para J . Es claro además, que los subconjuntos $\mathcal{W}_{J,C}$ definen una partición de \mathcal{W}_J . De la Ecuación 3.12 y la definición de N_J se sigue de forma directa que:

- Dos pesos $\rho, \rho' \in \mathcal{W}_J$ están \mathcal{F} -asociados si y solamente si existe una cara compacta C del poliedro N_J tal que $\rho, \rho' \in \mathcal{W}_{J,C}$.
- Si ρ y ρ' son dos pesos \mathcal{F} -asociados, se tiene que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es (ρ, J) -no degenerado en un punto $p \in S_J$ si y solamente si es (ρ', J) -no degenerado en p .

Por tanto para ver si un espacio foliado es Newton no degenerado en un punto $p \in S_J$, basta comprobar que lo es para una cantidad finita de pesos ρ , asociados cada uno a distintas caras del poliedro N_J . En particular, se pueden seleccionar pesos con entradas racionales.

Observación 4.2. Consideremos un peso $\rho \in \mathcal{W}_J$ y coordenadas locales (\mathbf{x}, \mathbf{y}) adaptadas a E en un punto $p \in S_J$. Sea ω un generador local de \mathcal{F} y sea $\Omega = (\Psi_{p,\mathbf{z}}^{1,\rho})^{-1}(L_\rho \omega)$. Consideremos ahora $\omega' = \mathbf{x}^\sigma \omega$. Se tiene que $\Omega' = (\Psi_{p,\mathbf{z}}^{1,\rho})^{-1}(L_\rho \omega') = \mathbf{T}^\sigma \Omega$, y por tanto Ω cumple la condición (ND) si y sólo si Ω' la cumple.

Restricción a una componente dicrítica. Consideremos un espacio ambiente $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{M} = (M, E)$ y sea $E_k \subset E_{\text{dic}}$ una componente dicrítica del divisor. El *espacio ambiente restricción* $\mathcal{M}|_{E_k}$ se define por

$$\mathcal{M}|_{E_k} = (E_k, E|_{E_k}), \quad E|_{E_k} = \overline{E \setminus E_k} \cap E_k.$$

De esta manera, obtenemos el *espacio foliado restricción* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ dado por

$$(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k} = (\mathcal{M}|_{E_k}, \mathcal{F}|_{E_k}),$$

donde $\mathcal{F}|_{E_k}$ es la foliación que define \mathcal{F} sobre E_k . Veamos que

Proposición 4.2. Si $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerado, entonces $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ también lo es.

Demostración. Hay una biyección entre el tejido soporte combinatorio $\mathcal{H}_{E_k, E|_{E_k}}$ y el conjunto de los estratos $\{J \in \mathcal{H}_{M, E}; k \in J\}$ que viene dada por

$$\bar{J} \in \mathcal{H}_{E_k, E|_{E_k}} \mapsto \bar{J} \cup \{k\} \in \mathcal{H}_{M, E}.$$

Dado un estrato combinatorio $\bar{J} \in \mathcal{H}_{E_k, E|_{E_k}}$, escribamos $J = \bar{J} \cup \{k\}$. Consideremos los estratos geométricos asociados

$$\bar{S}_{\bar{J}} \in \mathcal{S}_{E_k, E|_{E_k}} \quad \text{y} \quad S_J \in \mathcal{S}_{M, E}.$$

Nótese que son iguales y fijemos un punto $p \in S_J$. Tomamos coordenadas (\mathbf{x}, \mathbf{y}) adaptadas a E en p y un sea ω un generador local de \mathcal{F} adaptado a E . Denotemos $\mathbf{u} = \{x_j\}_{j \in \bar{J}}$. Tenemos que

$$\omega = \sum_{j \in J} (A_j + x_k a_j) \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{s \in c(J)} (B_s + x_k b_s) dy_s, \quad A_j, B_s \in \mathbb{C}\{\mathbf{u}, \mathbf{y}\}$$

Un generador local de la foliación \mathcal{F}_{E_k} adaptado a $E|_{E_k}$ en el punto p viene dado por

$$\bar{\omega} = \sum_{j \in \bar{J}} A_j \frac{du_j}{u_j} + \sum_{s \in c(J)} B_s dy_s.$$

Escribamos $N = N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ y $\bar{N} = N_{\bar{J}}((\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k})$ y tomemos la sección $s : \mathbb{R}^{\bar{J}} \rightarrow \mathbb{R}^J$ dada por $\tau \mapsto (\tau, 0)$. Obsérvese que si \bar{C} es una cara compacta de \bar{N} , entonces $C = s(\bar{C})$ es una cara compacta de N . Sean $\bar{\rho} \in \mathcal{W}_{\bar{C}}$ y $\rho \in \mathcal{W}_C$ dos pesos en $\bar{S}_{\bar{J}}$ y S_J , respectivamente. Se tiene que

$$(\Psi_{p, \mathbf{z}}^{1, \rho})^{-1}(L_\rho \omega) = \left(\Psi_{p, (\mathbf{u}, \mathbf{y})}^{1, \bar{\rho}} \right)^{-1}(L_{\bar{\rho}} \bar{\omega}).$$

Por tanto $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es (ρ, J) -no degenerado en p si y solamente si $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ es $(\bar{\rho}, \bar{J})$ -no degenerado en p . Haciendo esto para toda cara compacta \bar{C} del poliedro \bar{N} , para todo estrato $\bar{J} \in \mathcal{H}_{E_k, E|_{E_k}}$ y para todo punto $p \in E_k$, y en vista de la Observación 4.1, concluimos el resultado. \blacksquare

4.3. Teorema de equivalencia

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado

Teorema 4.1. Un espacio foliado hiperbólico-complejo es Newton no degenerado si y solamente si es de tipo tórico débil.

Primero veamos como se relacionan pesos y estratos por explosiones combinatorias.

Relación entre los pesos y estratos por explosión. Sea \mathcal{T} un tejido soporte y denotemos por $\mathcal{T}' = \pi_J \mathcal{T} = (I', \mathcal{H}')$ su explosión centrada en un estrato J . Siguiendo las notaciones de la Definición 2.2, recordemos que podemos dividir \mathcal{H} y \mathcal{H}' como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_s \cup \mathcal{K}_J, \quad \text{donde } \mathcal{K}_J = \overline{\{J\}} \cap \mathcal{H} = \{K \in \mathcal{H}; J \subset K\} \quad \text{y} \\ \mathcal{H}' &= \mathcal{H}_s \cup \left(\bigcup_{K \in \mathcal{K}_J} \mathcal{H}'^K \right), \quad \text{donde } \mathcal{H}'^K = \{(K \setminus J) \cup A \cup \{\infty\}; A \subsetneq J\}. \end{aligned}$$

Para cada $K \in \mathcal{K}_J$ y $A \subsetneq J$, definimos el subconjunto $\mathcal{W}_K^A \subset \mathcal{W}_K$ como:

$$\mathcal{W}_K^A = \left\{ \rho \in \mathcal{W}_K; \quad \begin{array}{ll} \rho_j = \rho_{j'} = r, & \text{para todo } j, j' \in J \setminus A \\ \rho(j) > r, & \text{para todo } j \in A. \end{array} \right\}$$

Obtenemos de esta manera una partición $\{\mathcal{W}_K^A\}_{A \subseteq J}$ del espacio de pesos \mathcal{W}_K .

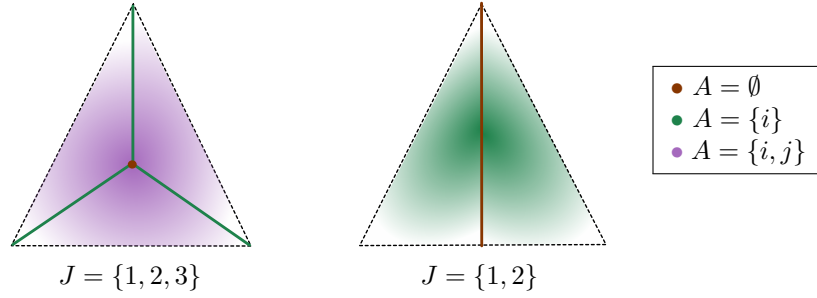


Figura 4.1: Representación baricéntrica de $\mathcal{W}_{\{1,2,3\}}$ y sus particiones.

Además, tenemos una biyección $\phi_K^A : \mathcal{W}_K^A \rightarrow \mathcal{W}_{K'}$ entre un elemento \mathcal{W}_K^A de la partición y el conjunto de pesos $\mathcal{W}_{K'}$, donde $K' = (K \setminus J) \cup A \cup \{\infty\}$. Ésta viene dada como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_K^A : \quad \mathcal{W}_K^A &\rightarrow \mathcal{W}_{K'} \\ \rho \in \mathcal{W}_K^A &\mapsto \begin{cases} \rho'_j = \rho_j, & j \in K \setminus J \\ \rho'_\infty = r \\ \rho'_j = \rho_j - r, & j \in A \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \rho_j = \rho'_j, & j \in K \setminus J \\ \rho_j = \rho'_\infty, & j \in J \setminus A \\ \rho_j = \rho'_j + \rho'_\infty & j \in A \end{cases} \leftarrow \rho' \in \mathbb{R}_{>0}^{K'}$$

Observación 4.3. Considérese $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K$ y $\sigma' = \lambda_{K'}(\sigma) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{K'}$, donde $\sigma'(j) = \sigma(j)$ para todo $j \in K' \setminus \{\infty\}$ y $\sigma'(\infty) = \sum_{j \in J} \sigma(j)$ (véase la Ecuación 2.2). Se tiene la igualdad $\rho(\sigma) = \rho'(\sigma')$, donde $\rho' = \phi_A^K(\rho)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \rho'(\sigma') &= \sum_{j \in K \setminus J} \rho_j \sigma(j) + \sum_{j \in A} (\rho_j - r) \sigma(j) + r \sum_{j \in J} \sigma(j) = \\ &= \sum_{j \in K \setminus J} \rho_j \sigma(j) + \sum_{j \in A} \rho_j \sigma(j) + r \sum_{j \in J \setminus A} \sigma(j) = \rho(\sigma). \end{aligned}$$

En particular, se tiene que $\lambda_{K'}(\Delta_\rho^v) = \Delta_{\rho'}^v$ para todo $v \in \mathcal{V}_\rho$. Fijemos ahora un sistema de poliedros $\{\mathcal{T}, \{N_J\}_{J \in \mathcal{H}}, 1\}$ sobre el tejido soporte \mathcal{T} . La igualdad anterior significa que, si C es la cara del poliedro N_K asociada al peso ρ , tenemos que $C' = \lambda_{K'}(C)$ es la cara del poliedro $N_{K'}$ asociada al peso ρ' , donde $N_{K'}$ denota el transformado total de N_K .

Estabilidad de ser Newton no degenerada. Queremos probar que la propiedad de ser Newton no degenerado para un espacio foliado es estable por explosiones e implosiones combinatorias. Esto es, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.3. Sea $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ una explosión combinatoria permitida entre espacios foliados. Tenemos que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerado si y solo si $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ lo es.

Vamos a considerar un espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ y $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ una explosión combinatoria permitida centrada en E_J . Tomamos un estrato combinatorio $K \in \mathcal{H}_{M,E}$ tal que $J \subset K$ y otro $K' \in \mathcal{H}_\infty^K \subset \mathcal{H}_{M',E'}$ en su transformado y escribimos $K' = (K \setminus J) \cup A \cup \{\infty\}$. Fijamos un peso $\rho \in \mathcal{W}_K^A$ y consideramos su correspondiente $\rho' = \phi_K^A(\rho) \in \mathcal{W}_{K'}$. Finalmente, marcamos también un punto $p \in S_K$. Tenemos el siguiente resultado:

Lema 4.1. El espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es (ρ, K) -no degenerado en p si y solamente si $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ es (ρ', K') -no degenerado en todo punto $q \in \pi^{-1}(p) \cap S_{K'}$.

Demostración. Tomamos coordenadas $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ adaptadas a E en el punto p y un generador

$$\omega = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K} \omega_\sigma \mathbf{x}^\sigma, \quad \text{donde } \omega_\sigma = \sum_{j \in K} a_{\sigma,j}(\mathbf{y}) \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{s \in c(K)} b_{\sigma,s}(\mathbf{y}) dy_s.$$

Fijado un punto $q \in \pi^{-1}(p) \cap S_{K'}$ y un índice $j_0 \in J \setminus A$, el morfismo de explosión π centrado en E_J , viene dado en coordenadas $\mathbf{z}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ adaptadas a E' y centradas en q como sigue:

$$\begin{aligned} x_{j_0} &= x'_\infty; & x_j &= x'_j x'_\infty, \quad j \in A; & x_j &= x'_j, \quad j \in K \setminus J \\ x_j &= x'_\infty (y'_r + \lambda_r), \quad r \in J_A; & y_s &= y'_s, \quad s \in c(K), \end{aligned}$$

donde $J_A = J \setminus (A \cup \{j_0\})$. Consideremos los vectores $e_r \in \mathbb{R}^{J_A}$ dados por $e_r(j) = \delta_{r,j}$, con $j, r \in J_A$ (delta de Kronecker) y escribamos \mathbf{u}'^r para denotar el producto $\prod_{r \in J_A} (y'_r + \lambda_r)^{\tau(r)}$, donde $\tau \in \mathbb{Z}^{J_A}$. Dado $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K$, denotemos $\sigma' = \lambda_{K'}(\sigma)$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi^* \mathbf{x}^\sigma &= (\mathbf{x}')^{\tilde{\sigma}} \mathbf{u}'^{\sigma|_{J_A}} \quad \text{y} \quad \pi^* \omega_\sigma = \sum_{j \in K' \setminus \{\infty\}} a_{\sigma,j}(\mathbf{y}') \frac{dx'_j}{x'_j} \\ &+ \left(\sum_{j \in J} a_{\sigma,j}(\mathbf{y}') \frac{dx'_\infty}{x'_\infty} + \sum_{r \in J_A} \mathbf{u}'^{-e_r} a_{\sigma,r}(\mathbf{y}') dy'_r + \sum_{s \in c(K)} b_{\sigma,s}(\mathbf{y}') dy'_s \right). \end{aligned}$$

En vista de la Observación 4.2, para saber si $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ es (ρ', K') -no degenerado en el punto q , basta trabajar con $\omega' = \pi^* \omega$. Consideramos la escritura de ω' adaptada a E' , esto es:

$$\omega' = \sum_{\sigma' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{K'}} \omega_{\sigma'} \mathbf{x}'^{\sigma'}; \quad \omega_{\sigma'} = \sum_{j \in K'} a'_{\sigma',j}(\mathbf{y}') \frac{dx'_j}{x'_j} + \sum_{s \in c(K')} b'_{\sigma',s}(\mathbf{y}') dy'_s,$$

identificando $c(K')$ con $c(K) \cup J_A$. Dado $\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^K$ tenemos que

$$a'_{\sigma',j}(\mathbf{y}') = a_{\sigma,j}(\mathbf{y}') \mathbf{u}'^{\sigma|_{J_A}}, \quad j \in K' \setminus \{\infty\}; \quad a'_{\sigma',\infty}(\mathbf{y}') = \sum_{j \in J} a_{\sigma,j}(\mathbf{y}') \mathbf{u}'^{\sigma|_{J_A}},$$

$$b'_{\sigma',r}(\mathbf{y}') = a_{\sigma,j}(\mathbf{y}') \mathbf{u}'^{\sigma|_{J_A} - e_r}, \quad r \in J_A; \quad b'_{\sigma',s}(\mathbf{y}') = b_{\sigma,s}(\mathbf{y}') \mathbf{u}'^{\sigma|_{J_A}}, \quad s \in c(K).$$

Denotemos $\Delta = \Delta_\rho^{\nu_\rho(\omega)}$, $\Omega = \Psi_{p,\mathbf{z}}^{1,\rho}(L_\rho \omega)$ y $\Omega' = \Psi_{q,\mathbf{z}'}^{1,\rho'}(L_{\rho'} \omega')$. Recordemos, en vista de la observación 4.3 que $\nu_{\rho'}(\omega') = \nu_\rho(\omega) = \mathbf{y}$ y que $\Delta_{\rho'}^{\nu_{\rho'}(\omega')} = \lambda_{K'}(\Delta)$. De esta manera, tenemos que

$$\Omega = \sum_{j \in K} A_j \frac{dT_j}{T_j} + \sum_{s \in c(K)} B_s dR_s, \quad \Omega' = \sum_{j \in K'} A'_j \frac{dT'_j}{T'_j} + \sum_{s \in c(K')} B'_s dR'_s, \quad \text{donde}$$

$$A_j = \sum_{\sigma \in \Delta} a_{\sigma,j} \mathbf{T}^\sigma; \quad B_s = \sum_{\sigma \in \Delta} b_{\sigma,s} \mathbf{T}^\sigma \quad \text{y}$$

$$A'_j = \sum_{\sigma \in \Delta} a_{\sigma,j}(\mathbf{y}') \mathbf{u}'^{\sigma|_{J_A}} \mathbf{T}'^{\lambda_{K'}(\sigma)}, \quad j \in K' \setminus \{\infty\};$$

$$A'_\infty = \sum_{\sigma \in \Delta} \left(\sum_{j \in J} a_{\sigma,j}(\mathbf{y}') \right) \mathbf{u}'^{\sigma|_{J_A}} \mathbf{T}'^{\lambda_{K'}(\sigma)};$$

$$B'_r = \sum_{\sigma \in \Delta} a_{\sigma,r}(\mathbf{y}') \mathbf{u}'^{\sigma|_{J_A} - e_r} \mathbf{T}'^{\lambda_{K'}(\sigma)}, \quad r \in J_A;$$

$$B'_s = \sum_{\sigma \in \Delta} b_{\sigma,s}(\mathbf{y}') \mathbf{u}'^{\sigma|_{J_A}} \mathbf{T}'^{\lambda_{K'}(\sigma)}, \quad s \in c(K).$$

- Si $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ no es (ρ, K) -no degenerado en p , existe $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{C}^*)^K$ tal que

$$A_j|_p(\boldsymbol{\mu}) = B_s|_p(\boldsymbol{\mu}) = 0, \quad j \in K, s \in c(K)$$

Tomando el punto $q \in \pi^{-1}(p) \cap S_{K'}$ definido por $\lambda_r = \mu_r / \mu_{j_0} \in \mathbb{C}^*$ para $r \in J_A$ y el vector $\boldsymbol{\mu}' \in (\mathbb{C}^*)^{K'}$ dado por $\mu'_j = \mu_j / \mu_{j_0}$ para $j \in A$, $\mu'_j = \mu_j$ para $j \in K \setminus J$ y $\mu'_\infty = \mu_{j_0}$, tenemos que

$$A'_j|_q(\boldsymbol{\mu}') = A_j|_p(\boldsymbol{\mu}) = 0, \quad j \in K' \setminus \{\infty\}; \quad A'_\infty|_q(\boldsymbol{\mu}') = \sum_{j \in J} A_j|_p(\boldsymbol{\mu}) = 0$$

$$B'_r|_q(\boldsymbol{\mu}') = A_r|_p(\boldsymbol{\mu}) \frac{\mu_{j_0}}{\mu_j} = 0, \quad j \in r \in J_A; \quad B'_s|_q(\boldsymbol{\mu}') = B_s|_p(\boldsymbol{\mu}) = 0, \quad s \in c(K).$$

y como consecuencia $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ no es (ρ', K') -no degenerado en q .

- Recíprocamente, supongamos que existe un punto $q \in \pi^{-1}(p) \cap S_{K'}$ de manera que $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ no es (ρ', K') -no degenerado en q . Esto es, hay un vector $\boldsymbol{\mu}' \in (\mathbb{C}^*)^{K'}$ tal que

$$A'_j|_q(\boldsymbol{\mu}') = B'_s|_q(\boldsymbol{\mu}') = 0, \quad j \in K', s \in c(K')$$

Tomamos el vector $\boldsymbol{\mu} \in (\mathbb{C}^*)^K$ dado por

$$\mu_{j_0} = \mu'_\infty; \quad \mu_j = \mu'_j \mu'_\infty, \quad j \in A; \quad \mu_j = \mu'_j, \quad j \in K \setminus J \quad \text{y} \quad \mu_j = \lambda_j \mu'_\infty, \quad j \in J_A,$$

que está bien definido, porque $\lambda_r \in \mathbb{C}^*$ para todo $r \in J_A$, ya que $q \in S_{K'}$. Tenemos así

$$A_j|_p(\boldsymbol{\mu}) = B_s|_p(\boldsymbol{\mu}) = 0, \quad j \in K, s \in c(K)$$

y como consecuencia $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ no es (ρ, K) -no degenerado en p . ■

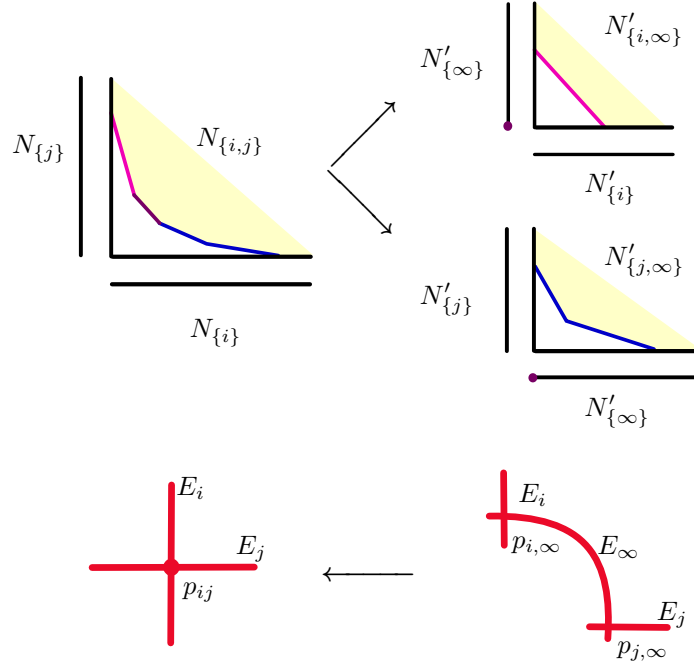


Figura 4.2: Movimiento del poliedro y estabilidad.

Demostración de la Proposición 4.3. Concluimos como sigue:

- Fijado $A \subsetneq J$ y por la biyección ϕ_K^A definida en la Ecuación 4.1, tenemos que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es (ρ, K) -no degenerado en $p \in S_K$ para todo peso $\rho \in \mathcal{W}_K^A$ si y solamente si $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ es Newton no degenerado para todo punto $q \in \pi^{-1}(p) \cap S_{K'}$.
- Tomando todos los subconjuntos $A \subsetneq J$, tenemos que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerado en el punto $p \in S_K$ si y solamente si $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ es Newton no degenerado para todo punto $q \in \pi^{-1}(p)$.
- Moviéndonos a lo largo de S_K , obtenemos que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerado para todo $p \in S_K$ si y solamente si $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ es Newton no degenerado para todo $q \in \cup_{\mathcal{H}_K^\infty} S_{K'}$.
- Finalmente, consideramos todos los $K \in \mathcal{K}_J$ y obtenemos que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerado si y solamente si $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ es Newton no degenerado. ■

Etapa final. Consideremos un espacio foliado hiperbólico-complejo $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Recordemos, por la Proposición 1.3, que en esta situación se tiene la igualdad

$$\text{log-Sing}(\mathcal{F}, E) = \left\{ \begin{array}{l} \text{puntos no presimples} \\ \text{para } (\mathcal{M}, \mathcal{F}) \end{array} \right\}.$$

y como consecuencia tenemos que $\text{log-Sing}(\mathcal{F}, E) \subset \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$.

Dado un estrato $J \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}, E}$, supongamos que $N_J = N_J(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ tiene un solo vértice, esto es que $N_J = \mathbb{R}_{\geq 0}^J$ o equivalentemente que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es combinatoriamente regular en S_J (véase la Definición 2.12). Tenemos que

Lema 4.2. El espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerado en un punto $p \in S_J$ si y solamente si p es un punto presimple para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Demostración. Un generador de \mathcal{F} está dado en coordenadas (\mathbf{x}, \mathbf{y}) adaptadas a E en p por

$$\omega = \sum_{j \in J} (a_{j,0} + \tilde{a}_j) \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{s \in c(J)} (b_{s,0} + \tilde{b}_s) dy_s, \quad \tilde{a}_j, \tilde{b}_s \in (\mathbf{x})$$

Nótese que $a_j(p) = a_{j,0}(p)$ y $b_s(p) = b_{s,0}(p)$. Puesto que hay una única cara compacta del poliedro, ser J -no degenerado en p es equivalente a que haya una unidad entre los $a_{j,0}$ y los $b_{s,0}$, que a su vez equivale a que haya una unidad entre los a_j y los b_s , esto es a que $p \notin \text{log-Sing}(\mathcal{F}, E)$ y por tanto, a que sea un punto presimple para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. ■

Observación 4.4. Para los estratos con $\#J \leq 1$, cuyo poliedro siempre tiene un solo vértice, tenemos que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerada solamente si todo punto $p \in S_J$ es presimple para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. En particular, los puntos singulares de \mathcal{F} tienen que estar todos contenidos en E .

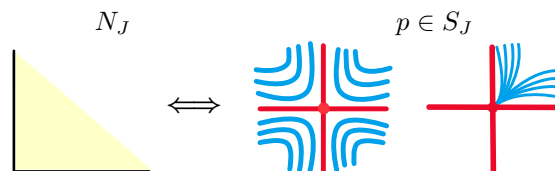


Figura 4.3: Situación final en un punto $p \in S_J$.

Observación 4.5. Sea $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ un espacio foliado, consideremos $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{M}, \mathcal{F}}$ su tejido soporte combinatorio y $\mathcal{N}_{\mathcal{M}, \mathcal{F}}$ su sistema de poliedros de Newton asociado. Nótese que $J \in \text{Sing}(\mathcal{N})$ si y solamente si N_J no tiene un solo vértice. Esto es equivalente a que $E_J \subset \text{log-Sing}(\mathcal{F}, E) \subset \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$. Como consecuencia, si $J \in \text{Sing}(\mathcal{N})$ entonces E_J es invariante. Por tanto la explosión $\pi_J \mathcal{T}$ del tejido soporte \mathcal{T} centrada en el estrato J induce una explosión combinatoria admisible de $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Demostración del Teorema 4.1. Probaremos las dos implicaciones:

1. Supongamos que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es de tipo tórico débil y fijemos una pre-reducción de singularidades combinatoria $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Como $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ está predesingularizado, esto es $\text{log-Sing}(\mathcal{F}', E') = \emptyset$, en particular es un espacio foliado combinatoriamente regular y como consecuencia $\mathcal{N}_{\mathcal{M}', \mathcal{F}'}$ es un sistema de poliedros donde cada $N_{J'}$ tiene un solo vértice en el origen de $\mathbb{R}^{J'}$. Por tanto, podemos usar el Lema 4.2 para concluir que $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ es Newton no degenerado. Ahora, en vista de la estabilidad dada en la Proposición 4.3, obtenemos que el espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerado.
2. Supongamos ahora que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerado. En vista del Teorema 2.2, sabemos que existe una reducción de singularidades para $\mathcal{N}_{\mathcal{M}, \mathcal{F}}$ y por la Observación 4.5, ésta induce una sucesión de explosiones combinatorias admisibles

$$\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$$

En vista de la estabilidad dada en la Proposición 4.3, tenemos que $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ es un espacio foliado Newton no degenerado. Estamos en las hipótesis del Lema 4.2 y concluimos que todo punto $q \in M'$ es presimple para $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$, es decir, que $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ es un espacio foliado predesingularizado. De esta manera, π es una predesingularización combinatoria de $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ y por tanto éste es un espacio foliado de tipo tórico débil. ■

De manera inmediata tenemos que:

Corolario 4.1. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un espacio foliado:

1. Es de tipo tórico débil
2. Hay una desingularización del sistema de poliedros que predesingulariza el espacio foliado.
3. Toda desingularización del sistema de poliedros predesingulariza el espacio foliado.
4. Es Newton no degenerado.

4.4. Ejemplos

La primera familia de ejemplos que tenemos son las foliaciones dadas por $df = 0$, donde $f = 0$ es un germen de hipersuperficie Newton no degenerado, en el sentido de la teoría clásica. Recordemos brevemente estos conceptos conocidos que se pueden encontrar en [36].

Situación global: El toro complejo. El anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{C}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]$, donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, es el anillo de funciones regulares definidas en el toro complejo n -dimensional. Dado un polinomio de Laurent $f = \sum f_\sigma \mathbf{u}^\sigma$, la *restricción-soporte* f_C a un subconjunto $C \subset \mathbb{Z}^n$ se define como $f_C = \sum_{\sigma \in C} f_\sigma \mathbf{u}^\sigma$ y el *politopo convexo* $\Delta(f)$ de f se viene dado por

$$\Delta(f) = \text{Conv}(\{\sigma \in \mathbb{Z}^n; f_\sigma \neq 0\}).$$

En este contexto, cuando hablemos de pesos, permitiremos a sus entradas tomar valores negativos, esto es, un vector de pesos es un elemento $\rho \in \mathcal{W}^-$, donde $\mathcal{W}^- = (\mathbb{R}^n)^*$. Un polinomio de Laurent $F \in \mathbb{C}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]$ decimos que es ρ -homogéneo si es de la forma

$$F = \sum_{\sigma \in H_\rho^v} \lambda_\sigma \mathbf{u}^\sigma, \quad \lambda_\sigma \in \mathbb{C}^*, \quad \text{para algún } v \in \mathbb{R}.$$

De igual manera que en el caso local, tenemos una partición $\{\mathcal{W}_C^-\}$ del espacio de pesos \mathcal{W}^- asociada a las caras C del politopo homogéneo $\Delta(f)$. De esta manera la restricción-soporte f_C es también la ρ -forma inicial de f para los pesos $\rho \in \mathcal{W}_C^-$. Tomamos la subvariedad de $(\mathbb{C}^*)^n$ definida por $H = (f = 0)$. Se dice que H es *no degenerada para* $\rho \in \mathcal{W}_C^-$ (véase [36]) si la subvariedad definida por

$$H_C = \{\mathbf{t} \in (\mathbb{C}^*)^n; f_C(\mathbf{t}) = 0\}$$

es una superficie lisa reducida, esto es si la foliación dada por $(df_C = 0)$ no tiene singularidades en H_C . Se dice que H es *no degenerada* si la condición se da para cada cara del politopo $\Delta(f)$.

Antes de continuar, vamos a hablar de un resultado que relaciona el número de soluciones de un sistema de n polinomios de Laurent en n variables con el volumen mixto de los politopos convexos asociados a él y que será de gran utilidad en el Capítulo 5 (véase [5, 35]).

Definición 4.3. Una n -upla $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ de polinomios de Laurent ρ -homogéneos es *no degenerada* si $(F_1 = F_2 = \dots = F_n = 0)$ no tiene soluciones en el toro complejo $(\mathbb{C}^*)^n$. En otro caso, decimos que es *degenerada*.

Definición 4.4. Una n -upla $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ de polinomios de Laurent arbitrarios está en *posición general*, si las restricciones $\mathbf{f}_C = (f_{1C}, f_{2C}, \dots, f_{nC})$ son no degeneradas para cada cara compacta C del politopo convexo $\Delta(\mathbf{f}) = \text{Conv}(\Delta(f_1), \Delta(f_2), \dots, \Delta(f_n))$.

Observación 4.6. Fijada una lista $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ de politopos convexos en \mathbb{R}^n , consideramos todas las posibles n -uplas $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ tales que $\Delta(f_i) \subset \Delta_i$ y consideramos el espacio de los coeficientes

$$\mathbb{V} \simeq \mathbb{C}^{N_1} \times \mathbb{C}^{N_2} \times \dots \times \mathbb{C}^{N_n}.$$

Existe un abierto de Zariski $U \subset \mathbb{V}$ tal que todo sistema de polinomios de Laurent con coeficientes en U está en posición general (véase [5]).

Sea $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ una lista de n politopos convexos $\Delta_i \subset \mathbb{R}^n$. El *volumen mixto* $\text{MV}(\Delta)$ viene dado por la suma alternada

$$\text{MV}(\Delta) = \sum_{h=1}^n \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_h \leq n} (-1)^{n-h} V_n(\Delta_{i_1} + \Delta_{i_2} + \dots + \Delta_{i_h}) \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

donde $\Delta_{i_1} + \Delta_{i_2} + \dots + \Delta_{i_h}$ es la suma de Minkowski y $V_n(\cdot)$ denota el volumen Euclídeo n -dimensional.

Teorema 4.2 (BKK). Si $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ es una n -upla de polinomios de Laurent en posición general, entonces

$$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{soluciones de } (f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0) \\ \text{en el toro } (\mathbb{C}^*)^n \end{array} \right\} = \text{MV}(\Delta(\mathbf{f})),$$

En el Capítulo 5 usaremos el resultado BKK para dar una clasificación de las foliaciones Newton no degeneradas sobre el plano proyectivo visto como variedad tórica.

Situación local: Gérmenes de hipersuperficies. Consideramos el espacio ambiente \mathcal{M}_0 y un germen de hipersuperficie H dado por una ecuación reducida $H = (f = 0)$. Tomamos coordenadas \mathbf{x} adaptadas a E . Nótese que, en este caso $\mathcal{O}_{S_I} = \mathcal{O}_{S_I,0} \simeq \mathbb{C}$. Dado un peso $\rho \in \mathcal{W}_I$, sea

$$P_\rho = (\Psi_{p,\mathbf{x}}^{0,\rho})^{-1}(L_\rho f) \in \mathbb{C}[T].$$

Decimos que H es *Newton no degenerada para ρ* (véase [35, 36]) si la variedad

$$V_\rho = \{\mathbf{t} \in (\mathbb{C}^*)^n; P_\rho(\mathbf{t}) = 0\}$$

es una superficie lisa reducida en el toro complejo $(\mathbb{C}^*)^n$, o de manera equivalente, si se tiene que $(\bar{d}P_\rho = 0) \cap (\mathbb{C}^*)^I = \emptyset$. Decimos que H es *Newton no degenerada* si lo es para todo peso $\rho \in \mathcal{W}_I$. Denotemos \mathcal{F} el germen de foliación definido por $(df = 0)$. Recordando que

$$\Psi_{p,\mathbf{x}}^{1,\rho}(\bar{d}P_\rho) = D(L_\rho f) = L_\rho(df),$$

tenemos que H es Newton no degenerada para ρ si y solo si el espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es (ρ, I) -no degenerado. Haciendo esto para todo peso, tenemos que H es Newton no degenerada si y solo si el espacio foliado $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es Newton no degenerado.

Espacios foliados para un poliedro de Newton fijo. Vamos a ver como se puede dar una colección de ejemplos significativa de espacios foliados Newton no degenerados cuando el espacio ambiente es $\mathcal{M}_0 = ((\mathbb{C}^n, 0), E)$ con $E = \cup_{i \in I} E_i$, donde $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Sabemos que se puede construir una foliación Newton no degenerada con poliedro de Newton igual a N . En efecto, es suficiente un germen de hipersuperficie $f = 0$ con estas propiedades, que sabemos se pueden encontrar dentro de un abierto de Zariski; la foliación $df = 0$ cumple nuestros requisitos. Por otro lado, la condición de ser no degenerado, al margen de la condición cerrada de integrabilidad de Frobenius, es una condición Zariski-abierto. Esto nos garantiza la existencia de un abierto de Zariski no vacío dentro del espacio de foliaciones con poliedro N dado, que cumplen la condición de ser Newton no degeneradas.

Capítulo 5

Globalización de ramas aisladas de foliaciones no degeneradas

En este capítulo damos una clasificación de las foliaciones hiperbólico-complejas Newton no degeneradas definidas en superficies tóricas proyectivas no singulares. Como consecuencia, probamos que las ramas invariantes aisladas están todas ellas contenidas en curvas globales. En particular, para estas foliaciones existe al menos una curva global invariante. Estos resultados de clasificación y prolongación global serán además de utilidad clave en el teorema de existencia de superficie invariante del Capítulo 6.

Los resultados que se exponen aquí están íntegramente contenidos en la pre-publicación [30] que se incorpora como anexo. Como ya hemos hecho anteriormente para el Capítulo 2, expondremos las definiciones, enunciaremos los resultados y daremos el hilo conductor de sus pruebas, dejando los detalles de éstas para ser consultado en el Anexo II.

5.1. Foliaciones no degeneradas en el plano proyectivo

Consideremos en primer lugar una foliación algebraica \mathcal{G}_0 en la superficie tórica afín \mathbb{C}^2 y un generador ω adaptado a $E_{\mathbb{C}^2}$, que describimos en coordenadas como

$$\omega = a_1 \frac{dx_1}{x_1} + a_2 \frac{dx_2}{x_2}, \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2].$$

Decimos que \mathcal{G}_0 está en *posición general* si lo está el par (a_1, a_2) y llamamos *polígono afín* $\Delta(\mathcal{G}_0)$ de \mathcal{G}_0 al politopo convexo $\Delta(\mathcal{G}_0) = \Delta(a_1, a_2)$. Si denotamos por N el polígono de Newton

$$N = N_{\{1,2\}}((\mathbb{C}^2, E_{\mathbb{C}^2}), \mathcal{G}_0),$$

tenemos la relación $N = \text{Conv}(\Delta(\mathcal{G}_0) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2)$. Por tanto, los lados compactos de N son todos ellos lados del polígono afín $\Delta(\mathcal{G}_0)$. Además, se tiene que un lado L_0 de $\Delta(\mathcal{G}_0)$ satisface la condición $L_0 \subset \{\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2; \tau(i) = 0\}$ para algún $i \in \{1, 2\}$ si y solamente si L_0 está contenido en un lado no compacto de N .

Observación 5.1. En estos términos, podemos también describir la condición de ser Newton no degenerada. Especifiquemos:

- La superficie foliada $((\mathbb{C}^2, E_{\mathbb{C}^2}), \mathcal{G}_0)$ es $\{1, 2\}$ -no degenerada si y solamente si los pares $(a_1|_{L_0}, a_2|_{L_0})$ son no degenerados para todo L_0 lado compacto de N .
- La superficie foliada $((\mathbb{C}^2, E_{\mathbb{C}^2}), \mathcal{G}_0)$ es $\{i\}$ -no degenerada si y solamente si el par $(a_1|_{L_0}, a_2|_{L_0})$ es no degenerado para el lado L_0 (o vértice) de $\Delta(\mathcal{G}_0)$ que satisface

$$L_0 \subset \{\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2; \tau(i) = 0\}.$$

- Las condiciones de no degeneración sobre la restricción al resto de lados del polígono afín se leen en los estratos que se obtienen al completar la foliación a $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Esto lo vemos con más detalle a continuación.

Sea ahora \mathcal{G} una foliación en la superficie tórica $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y tomemos las notaciones como en la Sección 1.12. Tomemos un generador homogéneo W de \mathcal{G} como en la Ecuación 1.10 dado por

$$W = A_0 \frac{dX_0}{X_0} + A_1 \frac{dX_1}{X_1} + A_2 \frac{dX_2}{X_2},$$

con $A_0 + A_1 + A_2 = 0$ y denotemos $d = d_{\mathcal{G}}$. Definimos el *polígono homogéneo* $\Delta_h(\mathcal{G})$ de \mathcal{G} por

$$\Delta_h(\mathcal{G}) = \text{Conv}(\Delta(A_0) \cup \Delta(A_1) \cup \Delta(A_2)) \subset \mathbb{R}^3.$$

El nombre “polígono homogéneo” se debe a que $\Delta_h(\mathcal{G}) \subset \Delta^d$, con $\Delta^d = \Delta_{(1,1,1)}^d$ (véase la Ecuación 3.1). Vamos a trabajar con las i -cartas afines \mathcal{G}_i de \mathcal{G} . Consideremos las proyecciones

$$\begin{aligned} \Phi_i^d : \quad \Delta_{(1,1,1)}^d &\rightarrow \Delta_{(1,1)}^d, & \text{donde } j, k \neq i. \\ \sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) &\mapsto (\sigma_j, \sigma_k), \end{aligned}$$

Se tiene la relación $\Delta(\mathcal{G}_i) = \Phi_i^d(\Delta_h(\mathcal{G}))$ y a cada $\Delta(\mathcal{G}_i)$ lo llamamos la i -carta de $\Delta_h(\mathcal{G})$. Del mismo modo, para cada lado L de $\Delta_h(\mathcal{G})$, definimos la i -carta L_i de L como $L_i = \Phi_i^d(L)$. Denotemos N_i el polígono de Newton

$$N_i = N_{\{j,k\}}((A_i, D_i), \mathcal{G}_i).$$

Sabemos que un lado L de $\Delta_h(\mathcal{G})$ satisface la condición $L \subset \{\sigma \in \Delta_{(1,1,1)}^d; \sigma_i = 0\}$ si y sólo si L_ℓ está contenido en un lado no compacto de N_ℓ para $\ell = j, k$. En otro caso, tenemos el siguiente enunciado, que asegura que todos los lados se ven reflejados en alguna carta afín.

Lema 5.1. Dado un lado L de $\Delta_h(\mathcal{G})$ tal que $L \not\subset \{\sigma \in \Delta_{(1,1,1)}^d; \sigma_i = 0\}$ para ningún $\ell = 0, 1, 2$, existe una única carta afín A_i tal que L_i es un lado compacto de N_i .

El objetivo en esta sección es probar el siguiente resultado para el polígono homogéneo:

Proposición 5.1. El polígono homogéneo $\Delta_h(\mathcal{G})$ de una foliación Newton no degenerada \mathcal{G} en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ es o bien un segmento o bien un solo punto.

Dado un lado L de $\Delta_h(\mathcal{G})$, damos una descripción de las restricciones-soporte A_{jL} :

1. Cuando $L \subset \{\sigma \in \Delta_{(1,1,1)}^d; \sigma_i = c\}$ para algún $i \in \{0, 1, 2\}$ y $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Detallamos el caso $i = 0$ y los demás se hacen de forma similar. Los A_{jL} son polinomios homogéneos de grado d de la forma $A_{jL} = X_0^c \tilde{A}_{jL}$, con $\tilde{A}_{jL} \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$, para $j = 0, 1, 2$. Esto es

$$\tilde{A}_{jL} = X_1^{\sigma_1^j} X_2^{\sigma_2^j} \prod_{\ell=1}^{d_j} (X_2 - \alpha_{\ell j} X_1), \quad \sigma_1^j + \sigma_2^j + d_j = d - c. \quad (5.1)$$

2. En otro caso, salvo reordenar las variables, existe un monomio X^σ tal que $A_{jL} = X^\sigma \tilde{A}_{jL}$, para cada $j = 0, 1, 2$, donde $\tilde{A}_{jL} \in \mathbb{C}[U, V]$ son polinomios homogéneos de grado n con $U = X_0^{\tilde{d}}$, $V = X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}}$, $\tilde{d}n = d - |\sigma|$ y $0 < \tilde{a} < \tilde{d}$. Esto es,

$$\tilde{A}_{jL} = (X_0^{\tilde{d}})^{u_j} (X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}})^{v_j} \prod_{\ell=1}^{n_j} (X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}} - \alpha_{\ell j} X_0^{\tilde{d}}); \quad u_j + v_j + n_j = n. \quad (5.2)$$

Observación 5.2. Los casos anteriores se pueden considerar de forma unificada escribiendo $U = X_1, V = X_2$, cuando estamos en el primero de ellos.

El siguiente resultado asegura que si la restricción a un lado es no degenerada en una carta, también lo será en las demás. Esto es:

Lema 5.2. Sea L un lado de $\Delta_h(\mathcal{G})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe un índice $i \in \{0, 1, 2\}$ tal que (\mathcal{G}_i, L_i) es no degenerado.
2. Para cada índice $i \in \{0, 1, 2\}$, tenemos que (\mathcal{G}_i, L_i) es no degenerado.

Este Lema 5.2 junto con la Observación 5.1 no permite concluir que:

Lema 5.3. Si \mathcal{G} es una foliación Newton no degenerada en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, entonces cada i -carta afín \mathcal{G}_i está en posición general, para $i = 0, 1, 2$.

La carta \mathcal{G}_0 está generada por la forma $\omega_0 = a_1^0 dx_1^0/x_1^0 + a_2^0 dx_2^0/x_2^0$. Éste último lema nos permitirá aplicar el Teorema 4.2 para concluir que

$$\text{MA}(\Delta(a_1^0), \Delta(a_2^0)) = 0.$$

Como además, la restricción a cada lado de $\Delta(\mathcal{G}_0)$ es no degenerada, podemos concluir que $\Delta(\mathcal{G}_0)$ es o bien un solo punto o un segmento y, como consecuencia, también $\Delta_h(\mathcal{G})$. Con la escritura en las Ecuaciones 5.1 y 5.2 tenemos, salvo reordenación, tres casos para el polígono homogéneo $\Delta_h(\mathcal{G})$ que mostramos en la siguientes figuras:



Figura 5.1: Caso a) Un solo vértice.

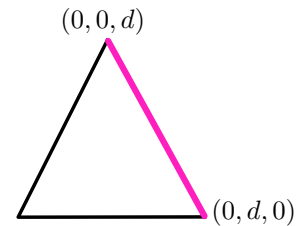


Figura 5.2: Caso b) Segmento que une $(0, d, 0)$ y $(0, 0, d)$.

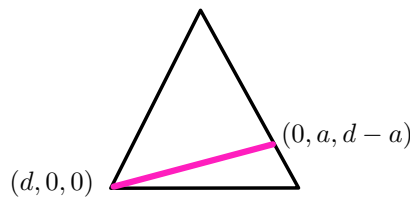


Figura 5.3: Caso c) Segmento que une $(d, 0, 0)$ y $(0, a, d-a)$.

5.2. Naturaleza global de las ramas invariantes aisladas

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado:

Teorema 5.1. Las ramas invariantes aisladas de foliaciones hiperbólico-complejas Newton no degeneradas definidas en superficies tóricas proyectivas, se extienden a curvas globales.

En el Teorema 4.1 hemos visto que ser Newton no degenerado es equivalente a ser de tipo tórico débil en el marco hiperbólico-complejo. El Teorema 5.1 se puede establecer como sigue:

Teorema 5.1. Las ramas invariantes aisladas de foliaciones hiperbólico-complejas de tipo tórico débil definidas en superficies tóricas proyectivas, se extienden a curvas globales.

Basta probarlo para foliaciones en el plano proyectivo gracias a las siguientes propiedades:

- La geometría biracional de las superficies tóricas no singulares descrita en el Teorema 1.3.
- La estabilidad por explosiones e implosiones combinatorias de la propiedad de ser Newton no degenerado dada en el Teorema 4.3.
- Las propiedades de estabilidad por explosiones e implosiones combinatorias de las ramas invariantes aisladas vistas en la Proposición 1.5.

Tomemos una foliación \mathcal{G} del plano proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ y distinguimos las tres opciones a), b) y c) para el polígono homogéneo. Escribamos $D = E_{\mathbb{P}^2}$.

a) Un generador homogéneo W de \mathcal{G} está dado por

$$W = \lambda_0 dX_0/X_0 + \lambda_1 dX_1/X_1 + \lambda_2 dX_2/X_2,$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 0, 1, 2.$$

- Si $\lambda_0 = 0$, entonces $\text{Sing}(\mathcal{G}, D) = \text{Sing}(\mathcal{G}) = \{O_0\}$ y O_0 es una singularidad presimple de tipo esquina.
- Si $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, entonces $\text{Sing}(\mathcal{G}, D) = \text{Sing}(\mathcal{G}) = \{O_0, O_1, O_2\}$ todas las singularidades son presimples de tipo esquina.

Por tanto no hay ramas invariantes aisladas.

b) Un generador homogéneo W de \mathcal{G} está dado por

$$W = A_0(X_1, X_2) \frac{dX_0}{X_0} + A_1(X_1, X_2) \frac{dX_1}{X_1} + A_2(X_1, X_2) \frac{dX_2}{X_2}, \quad \text{donde}$$

$$A_0 + A_1 + A_2 = 0, \quad A_i \in \mathbb{C}[X_1, X_2] \text{ son homogéneos de grado } d.$$

Se tiene que las únicas ramas invariantes aisladas son del tipo

$$(\ell_\lambda, P_\lambda) \text{ y } (\ell_\lambda, O_0), \quad \text{donde } \ell_\lambda = (X_2 - \lambda X_1 = 0) \text{ y } P_\lambda = [0, 1, \lambda], \quad \text{con}$$

$$\lambda \in \Lambda_{\mathcal{G}} \text{ y } \Lambda_{\mathcal{G}} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; A_0(1, \lambda) = 0\}.$$

Es decir, las únicas ramas invariantes aisladas están contenidas en una familia de rectas pasando por $O_0 = [1, 0, 0]$. Además, como estamos en el marco hiperbólico-complejo, podemos garantizar que esta familia tiene d elementos.

c) Un generador homogéneo W de \mathcal{G} está dado por

$$W = A_0(U, V) \frac{dX_0}{X_0} + A_1(U, V) \frac{dX_1}{X_1} + A_2(U, V) \frac{dX_2}{X_2}, \quad \text{donde}$$

$$A_0 + A_1 + A_2 = 0, \quad A_i \in \mathbb{C}[U, V] \text{ son homogéneos de grado } n, \quad \text{con}$$

$$U = X_0^{\tilde{d}}, \quad V = X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}}, \quad d = \tilde{d}n, \quad a = \tilde{a}n \text{ y } n = \text{gcd}(d, a),$$

Se tiene que las únicas ramas invariantes aisladas son del tipo

$$(\mathcal{C}_\lambda, O_1) \text{ y } (\mathcal{C}_\lambda, O_2), \quad \text{donde } \mathcal{C}_\lambda = (X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}} - \lambda X_0^{\tilde{d}} = 0) \text{ con}$$

$$\lambda \in \Lambda_{\mathcal{G}} \text{ y } \Lambda_{\mathcal{G}} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; (\tilde{a}A_0 + \tilde{d}A_2)(1, \lambda) = 0\}.$$

Es decir, las únicas ramas invariantes aisladas están contenidas en una familia de curvas que son localmente cúspides en los puntos O_1 y O_2 . Además, como estamos en el marco hiperbólico-complejo, podemos garantizar que esta familia tiene n elementos.

En ambos casos b) y c) la prueba se hace mirando al final de la pre-reducción minimal de singularidades, observando que las únicas ramas invariantes aisladas en esta etapa final son gérmenes de los transformados estrictos de las curvas ℓ_λ y \mathcal{C}_λ que nos interesan.

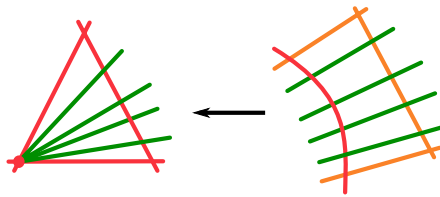


Figura 5.4: Predesingularización minimal en el caso b).

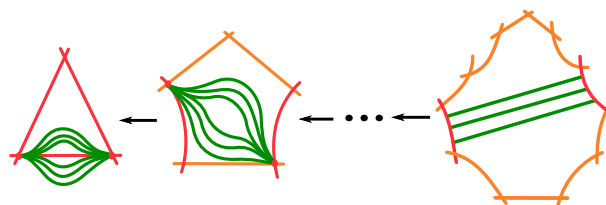


Figura 5.5: Predesingularización minimal en el caso c).

5.3. Existencia de ramas invariantes aisladas

Damos resultados locales y globales sobre la existencia de ramas invariantes aisladas en los contextos de tipo tórico y tipo tórico débil, exhibiendo las diferencias que surgen al considerar la propiedad más débil o la más fuerte.

Proposición 5.2. Supongamos que $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ es hiperbólico-compleja de tipo tórico en un punto p perteneciente al lugar singular adaptado $\text{Sing}(\mathcal{G}, D)$. Si p no es presimple de tipo esquina, entonces existe una rama invariante aislada (Γ, p) pasando por él.

Observación 5.3. Este resultado es falso si asumimos que $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ es solamente de tipo tórico débil en p : por ejemplo, cuando $e_p(D) = 1$ y la foliación está definida localmente por el campo de vectores radial. Sin embargo, cuando trabajamos de forma global con foliaciones de tipo tórico débil en superficies tóricas proyectivas, sí tenemos un resultado de existencia de ramas invariantes aisladas como aseguramos en la Proposición 5.3.

Sea \mathcal{G} una foliación de tipo tórico débil hiperbólico-compleja en el plano proyectivo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Tomamos notaciones como en la Sección 5.2 y recordamos la existencia de los tres casos a), b) y c) para el polígono homogéneo $\Delta_h(\mathcal{G})$. Supongamos que $\Delta_h(\mathcal{G})$ no es un solo punto, es decir, que estamos en el caso b) o c), consideremos $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{G}}$ y denotamos:

$$\begin{aligned} Y &= \ell_\lambda, P_1 = P_\lambda \text{ y } P_2 = O_0, \text{ si } \Delta_h(\mathcal{G}) \text{ está en el caso b).} \\ Y &= \mathcal{C}_\lambda, P_1 = O_1 \text{ y } P_2 = O_2, \text{ si } \Delta_h(\mathcal{G}) \text{ está en el caso c).} \end{aligned}$$

Tenemos que $Y \cap D = \{P_1, P_2\}$ y los puntos P_1 y P_2 no son puntos presimples de tipo esquina de $\text{Sing}(\mathcal{G}, D)$. Además, los gérmenes (Y, P_1) e (Y, P_2) son ramas irreducibles: en el caso b) rectas y en el caso c) cúspides de tipo $(\tilde{d}, \tilde{d} - \tilde{a})$ y (\tilde{d}, \tilde{a}) , respectivamente. Sea

$$\pi : ((S', D'), \mathcal{G}') \rightarrow ((\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, D), \mathcal{G})$$

una pre-reducción de singularidades combinatoria y denotemos por Y' el transformado estricto de Y por π . Tenemos que

$$Y' \cap D' = \{p'_1, p'_2\},$$

donde cada $p'_i \in \pi^{-1}(P_i)$ es una singularidad presimple de tipo traza para $i = 1, 2$. Sea ξ_i un germen de campo de vectores tangente a \mathcal{G}' en el punto p'_i y con parte lineal L_{ξ_i} no nilpotente. Denotando por $r(L_{\xi_i}) = \{\alpha_i, 1/\alpha_i\}$ el ratio de sus autovalores, tenemos el siguiente resultado:

Lema 5.4. Se cumple que $r(L_{\xi_1}) = -r(L_{\xi_2})$. En particular, se concluye que hay una singularidad simple entre p'_1 y p'_2 .

Observación 5.4. Cuando \mathcal{G} es además de tipo tórico, tenemos que p'_1 y p'_2 son ambas singularidades simples de tipo traza y por tanto (Y, P_1) e (Y, P_2) son ramas invariantes aisladas.

Proposición 5.3. Sea \mathcal{G} una foliación hiperbólico-compleja de tipo tórico débil en una superficie tórica proyectiva S y supongamos que existe un punto $p \in \text{Sing}(\mathcal{G}, E_S)$ que no es presimple de tipo esquina. Podemos garantizar entonces, que existe una rama invariante aislada (Γ, q) pasando por algún punto $q \in \text{Sing}(\mathcal{G}, E_S)$.

Cuando estamos en el caso de tipo tórico, podemos decir todavía más. Este enunciado será clave para la prueba del resultado de existencia de superficie invariante para foliaciones torificables en $(\mathbb{C}^3, 0)$, que presentamos en el capítulo 6 de la memoria.

Proposición 5.4. Consideremos una foliación hiperbólico-compleja de tipo tórico \mathcal{G} en una superficie tórica proyectiva S y una rama invariante aislada (Γ, p) . Sea Y la curva algebraica proyectiva que extiende (Γ, p) . Tenemos que cualquier rama $(\Upsilon, q) \subset (Y, q)$ con $q \in Y \cap E_S$ es una rama invariante aislada.

5.4. Integrales primeras racionales y curvas invariantes

En esta sección probamos la siguiente propiedad para las foliaciones hiperbólico-complejas de tipo tórico definidas en superficies tóricas proyectivas:

“O bien hay una cantidad finita de curvas globales invariantes diferentes del divisor, todas ellas extendiendo ramas invariantes aisladas; o bien hay una integral primera racional, pero no hay cabida para las ramas invariantes aisladas”.

Una rama invariante (Γ, p) de una superficie foliada $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ se dice *propia para $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$* cuando cumple que $p \in D$ y además $(\Gamma, p) \not\subset (D, p)$. Esta propiedad es estable por explosiones e implosiones combinatorias. Cuando $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ es de tipo tórico débil, todas las ramas invariantes aisladas son propias, puesto que cualquier singularidad está en el divisor.

Teorema 5.2. Tenemos la siguiente dicotomía para una foliación de tipo tórico \mathcal{G} en una superficie tórica proyectiva S :

- I) Existe una integral primera racional y no hay ramas invariantes aisladas.
- II) No existe integral primera racional y toda rama invariante propia que se extiende a una curva algebraica proyectiva es una rama invariante aislada.

De nuevo, es suficiente hacer la prueba para el caso $S = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. En efecto, tener integral primera racional, ser un curva algebraica proyectiva, ser invariante, propia y aislada, son todo propiedades con un buen comportamiento bajo explosiones e implosiones combinatorias. Distinguimos entre los casos a), b) y c) para el polígono homogéneo $\Delta_h(\mathcal{G})$ y tomamos la notaciones como en la Sección 5.2.

- a) Sabemos que no hay ramas invariantes aisladas para \mathcal{G} . Tenemos dos opciones:

- Los puntos O_0, O_1, O_2 son todos esquinas simples. En este caso, las componentes del divisor $X_i = 0$ son las únicas curvas globales invariantes y tenemos la situación II).
- Uno de los O_i es un punto presimple pero no simples, digamos que O_0 . Tenemos que:

$$\lambda_0 = p - q, \lambda_1 = q, \lambda_2 = -p, p, q \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

por tanto $d(X_0^{p-q} X_1^q X_2^{-p})$ es una integral primera racional y se da la situación I).

- b) En este caso, sabemos que hay ramas invariantes aisladas, es más, en vista de la Observación 5.4, tenemos que (ℓ_λ, O_0) y $(\ell_\lambda, P_\lambda)$ son ambas ramas invariantes aisladas para cualquier $\lambda \in \Lambda_G$; además, no hay más que éstas. Debemos ver por tanto que se da la situación II), esto es que cualquier curva global invariante es o bien una componente del divisor o bien una de las rectas ℓ_λ . Por reducción al absurdo suponemos que existe una curva global Y diferente de éstas y encontramos al final de la reducción de singularidades un punto simple por el que pasan dos ramas que no están contenidas en el divisor, lo cual nos proporciona la contradicción deseada.
- c) En este caso, de nuevo sabemos que hay ramas invariantes aisladas y cuales son y por tanto queremos ver que la situación II) se da, probando que cualquier curva global invariante es o bien una componente del divisor o bien una de las curvas \mathcal{C}_λ con $\lambda \in \Lambda_G$.

Escribamos $\mathcal{C}_\lambda^{\mathcal{G}} = \mathcal{C}_\lambda$ y consideremos la aplicación racional

$$\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus [0, 0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2,$$

dada en coordenadas por

$$Y_0 = X_0^{\bar{d}}, Y_1 = X_1^{\bar{d}-\bar{a}} X_2^{\bar{a}}, Y_2 = X_2^{\bar{d}}$$

Esta aplicación es compatible con la acción del toro y nos permite reducirnos al Caso b).

Capítulo 6

Existencia de superficie invariante para foliaciones torificables

El resultado principal de este capítulo asegura que, en el contexto hiperbólico-complejo, toda foliación de tipo tórico en $(\mathbb{C}^3, 0)$ tiene superficie invariante. Las foliaciones en esta familia pueden ser dicríticas o no y de hecho la dificultad se concentra cuando aparecen componentes dicríticas compactas del divisor excepcional tras una reducción de singularidades combinatoria. Vemos que estas componentes están dotadas de forma natural de una estructura de superficie tórica proyectiva y, de esta manera, usamos los resultados de prolongación global del Capítulo 5 para finalmente obtener superficies invariantes.

Los resultados que se exponen aquí están íntegramente contenidos en la pre-publicación [31] que se incorpora como anexo. De nuevo, expondremos las definiciones, enunciaremos los resultados y daremos el hilo conductor de sus pruebas, dejando los detalles de éstas para ser consultado en el Anexo III.

6.1. Superficies invariantes y separatrices parciales extendidas

Las separatrices parciales se han introducido en el artículo [15] en vista de formalizar los argumentos para la construcción de superficies invariantes de foliaciones no dicríticas en dimensión ambiente tres dados en el artículo [11]. Extendemos el concepto al caso dicrítico y damos propiedades que aseguran la existencia de superficies invariantes que se apoyan en ellas.

La propiedad de prolongación. Consideramos una superficie foliada $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ con $\mathcal{S} = (S, D)$. En dimensión dos solamente hacemos explosiones centradas en puntos y por tanto todas son admisibles automáticamente. A partir de ahora, y con intención de simplificar la exposición, cada vez que digamos “una curva Y en S ” haremos referencia a “una curva analítica cerrada irreducible Y en S ”.

Definición 6.1. Una superficie foliada $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ tiene la *propiedad de prolongación para ramas aisladas* si para cada rama invariante aislada (Γ, p) , las siguientes condiciones se siguen:

1. Hay una curva $Y \subset S$ extendiendo (Γ, p) , esto es, tal que $(\Gamma, p) \subset (Y, p)$. (Nótese que Y es única).
2. Si $Y \subset S$ es la curva que extiende (Γ, p) y $q \in Y \cap D$, cada rama $(\Upsilon, q) \subset (Y, q)$ es aislada.

Observación 6.1. La segunda condición implica que $Y \cap D \subset \text{Sing}(\mathcal{G}, D)$.

Lema 6.1. Una superficie foliada desingularizada $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ tiene la propiedad de prolongación para ramas aisladas si y solamente si para cada singularidad de tipo traza $p \in \text{Sing}(\mathcal{G})$, las siguientes condiciones se dan para la única rama invariante $(\Gamma, p) \not\subset (D, p)$ que pasa por ella:

1. Hay una curva $Y \subset S$ que extiende (Γ, p) .
2. Si $Y \subset S$ es la curva que extiende (Γ, p) , entonces $Y \cap D_{\text{dic}} = \emptyset$.

El Teorema 5.1 junto con la Proposición 5.4 nos permiten concluir el siguiente enunciado:

Proposición 6.1. La propiedad de prolongación para ramas aisladas se cumple para cualquier foliación de tipo tórico sobre una superficie ambiente tórica proyectiva no singular.

Observación 6.2. La foliación dada por el clásico ejemplo de Jouanolou

$$W = (X_0^2 X_1 - X_2^3) dX_0 + (X_1^2 X_2 - X_0^3) dX_1 + (X_2^2 X_0 - X_1^3) dX_2, \quad (\text{véase [24]}),$$

no cumple la propiedad de prolongación para ramas aisladas. Nótese que, esta foliación de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ no es de tipo tórico, pues tiene siete singularidades (no simples), por tanto no se puede elegir un divisor con cruzamientos normales tal que la desingularización sea combinatoria.

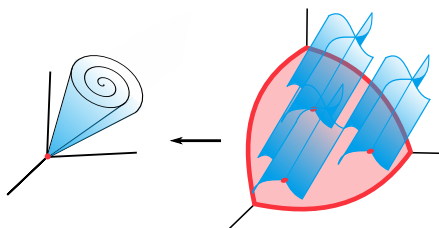


Figura 6.1: Ejemplo de Jouanolou en $(\mathbb{C}^3, 0)$.

Separatrices parciales extendidas. Sea $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ un espacio foliado desingularizado en dimensión tres, donde $\mathcal{M} = (M, E)$ y M es un germe de espacio analítico complejo alrededor de un subconjunto analítico compacto. En vista de la Observación 1.16, el conjunto de singularidades simples de tipo traza $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}$ es un subespacio analítico cerrado de M , esto es, es la unión de curvas no singulares $Y \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$ cumpliendo que $e_Y(E) = e_Y(E_{\text{inv}}) = 1$.

Una componente conexa \mathcal{C} de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}$ se llama *separatriz parcial de $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$* . Dado un punto $q \in \mathcal{C}$, existe un abierto $U \subset M$ que contiene q y una superficie irreducible S_q en U , tal que el germe de S_q en cada $q' \in \mathcal{C} \cap U$ es la única superficie invariante que pasa por q' y es diferente de E . Además se tiene que

$$S_q \cap E_{\text{inv}} = \mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}, \quad \text{localmente en } U.$$

Cuando la separatriz parcial \mathcal{C} no interseca al divisor dicrítico E_{dic} , la superficie S_q se extiende a una superficie cerrada irreducible $S_{\mathcal{C}} \subset M$ invariante para \mathcal{F} . De hecho, este “argumento de Cano-Cerveau” llega más lejos y asegura que esta superficie cerrada $S_{\mathcal{C}} \subset M$ también existe cuando \mathcal{C} no corta componentes dicríticas compactas del divisor E . Como consecuencia, y como se hará notar más adelante, la dificultad del problema se concentra en el caso en que aparecen componentes dicríticas compactas.

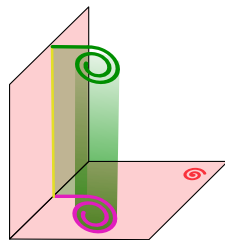


Figura 6.2: Componente dicrítica compacta en la cual no se cierra S_C .

Estamos interesados en conectar separatrices parciales de $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ a través de curvas invariantes contenidas en las componentes dicríticas de E . Para ello, consideremos el conjunto

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{ll} Z \subset E_{\text{dic}} & \begin{array}{l} \text{a) } Z \text{ curva} \\ \text{b) } e_Z(E) = 1 \\ \text{c) } \text{invariantes para } \mathcal{F} \\ \text{d) } Z \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset \end{array} \end{array} \right\}$$

Obsérvese que Σ es un conjunto finito; en efecto, hay sólo una cantidad finita de componentes dicríticas $E_k \subset E_{\text{dic}}$. Además $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap E_k$ es finito y por cada punto $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap E_k$ hay como mucho una rama invariante contenida en E_k que no lo está en E_{inv} . Denotemos $\mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$ el subespacio analítico cerrado de M dado por

$$\mathcal{U}_{\mathcal{F}, E} = \mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} \cup (\cup_{Z \in \Sigma} Z).$$

Nótese que cada $q \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$ es un punto simple de tipo traza y en particular $e_q(E) \leq 2$.

Definición 6.2. Una *separatriz parcial extendida* es una componente conexa de $\mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$.

El siguiente resultado se sigue de la estructura del lugar singular descrita en la Sección 1.7:

Lema 6.2. Consideremos una separatriz parcial extendida $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$. Para cada punto $q \in \mathcal{E}$, existe un entorno abierto $U_q \subset M$ de q y una superficie irreducible S_q definida en U_q , tal que

$$\mathcal{E} \cap U_q \subset S_q.$$

Además, el germen de S_q en cada punto $q' \in \mathcal{E} \cap U_q$ es la única superficie invariante pasando por q' que no está contenida en E .

Definición 6.3. Una separatriz parcial extendida $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$ es *completa* cuando

$$(S_q, q) \cap E = (\mathcal{E}, q), \quad \text{para cada } q \in \mathcal{E},$$

donde S_q es el único germen de superficie invariante para \mathcal{F} pasando por q no contenido en E .

Corolario 6.1. Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$ es una separatriz parcial extendida completa, existe una única superficie cerrada irreducible $S_{\mathcal{E}} \subset M$ invariante para \mathcal{F} , tal que $S_{\mathcal{E}} \cap E = \mathcal{E}$.

Dado que $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es un espacio foliado desingularizado, la restricción $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ a una componente dicrítica E_k de E también está desingularizada y además tenemos que

$$(E|_{E_k})_{\text{inv}} = E_{\text{inv}}|_{E_k} \quad \text{y} \quad (E|_{E_k})_{\text{dic}} = E_{\text{dic}}|_{E_k}.$$

Concluimos esta parte con el siguiente resultado:

Proposición 6.2. Sea $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ un espacio foliado desingularizado y supongamos que la superficie foliada $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ tiene la propiedad de prolongación para ramas aisladas en cada componente dicrítica E_k de E . Entonces tenemos que toda separatriz parcial extendida de $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es completa.

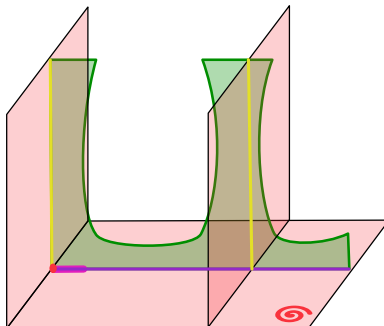


Figura 6.3: Propiedad de prolongación a lo largo de una componente dicrítica.

Superficies invariantes para foliaciones torificables. El resultado central en este capítulo es el que sigue:

Teorema 6.1. Toda foliación torificable hiperbólico-compleja en $(\mathbb{C}^3, 0)$ tiene por lo menos una superficie invariante.

Consideremos un germe de foliación hiperbólico-compleja \mathcal{F}_0 y un divisor con cruzamientos normales E^0 en $(\mathbb{C}^3, 0)$ y denotemos

$$\mathcal{M}_0 = ((\mathbb{C}^3, 0), E^0)$$

Supongamos que $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)$ es un espacio foliado de tipo tórico y fijemos una reducción de singularidades combinatoria

$$\sigma : (\mathcal{M}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0).$$

Tenemos las siguientes afirmaciones:

Proposición 6.3. Si $E_{\text{inv}} = \emptyset$, entonces existe una superficie cerrada S de M que es invariante para \mathcal{F} y cumple que $S \not\subset E$.

Proposición 6.4. Si $E_{\text{inv}} \neq \emptyset$ y $E^0 = E_{\text{dic}}^0$, existe una separatriz parcial extendida de $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Proposición 6.5. Toda separatriz parcial extendida de $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ es completa.

Veamos como se deduce el Teorema 6.1 de estos enunciados:

- Si $E_{\text{inv}}^0 \neq \emptyset$, existe una superficie invariante para \mathcal{F}_0 contenida en E^0 y hemos terminado.
- Asumamos por tanto que $E^0 = E_{\text{dic}}^0$.
 - Si $E_{\text{inv}} = \emptyset$, la Proposición 6.3 asegura la existencia de una superficie cerrada $S \subset M$ invariante para \mathcal{F} , con $S \not\subset E$.
 - Si $E_{\text{inv}} \neq \emptyset$, existe una separatriz parcial extendida \mathcal{E} en vista de la Proposición 6.4, que es completa por la Proposición 6.5; como consecuencia del Corolario 6.1, existe una superficie cerrada $S = S_{\mathcal{E}} \subset M$ invariante para \mathcal{F} , con $S \not\subset E$.

En ambos casos, gracias al Teorema de la imagen directa de Grauert, obtenemos una superficie $S_0 = \sigma(S)$ de $(\mathbb{C}^3, 0)$ invariante para \mathcal{F}_0 , con $S_0 \not\subset E^0$.

Las Proposiciones 6.3 y 6.4 se prueban en la Sección 6.2 y la Proposición 6.5 en la Sección 6.3.

6.2. Búsqueda de singularidades traza.

El objetivo de esta sección es probar las Proposiciones 6.3 y 6.4. Recordemos que tenemos el espacio foliado $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)$ hiperbólico-complejo y de tipo tórico, donde

$$\mathcal{M}_0 = ((\mathbb{C}^3, 0), E^0), \quad E^0 = E_{\text{dic}}^0.$$

Además, tenemos fijada una reducción de singularidades $\sigma : (\mathcal{M}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)$.

Observación 6.3. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Si $E_{\text{inv}} = \emptyset$, entonces $e_0(E^0) \leq 2$. En efecto, si $e_0(E^0) = 3$, siempre encontraremos, después de reducción de singularidades, puntos $p \in M$ con $e_p(E) = 3$; dado que estos son simples, tenemos necesariamente que $E_{\text{inv}} \neq \emptyset$.
2. Si $E_{\text{inv}} \neq \emptyset$, entonces $e_0(E^0) \geq 2$. En efecto, si $e_0(E^0) \in \{0, 1\}$, la reducción de singularidades σ es el morfismo identidad, puesto que por definición es combinatoria. Por tanto, se cumple que $E = E^0$ y $E_{\text{inv}} = \emptyset$.

Demostración de la Proposición 6.3. Distinguiamos dos casos:

- Cuando σ es el morfismo identidad, la foliación \mathcal{F}_0 es regular y tiene cruzamientos normales con E^0 . Por el Teorema de Frobenius, existe un único germen de superficie S_0 en $(\mathbb{C}^3, 0)$ invariante para \mathcal{F}_0 , con $S_0 \not\subset E^0$.
- Cuando σ no es la identidad, tenemos que $e_0(E^0) = 2$ y es una composición de explosiones con centros de dimensión uno. Escribamos $K = \sigma^{-1}(0)$. Cada punto $p \in K$ es no singular y por tanto existe un único germen de superficie invariante para $(S_p, p) \not\subset (E, p)$. Distinguiamos dos situaciones:
 - Si K no es subespacio analítico cerrado invariante para \mathcal{F} , existe un punto regular $p \in K$ tal que $S_p \cap K = \{p\}$. Por tanto $S = (S_p, p)$ define una superficie cerrada en M , ya que M es un germen alrededor de K .
 - Si K es invariante para \mathcal{F} , tenemos que $(K, p) \subset (S_p, p)$ para cada $p \in K$, como consecuencia, el germen de superficie (S_p, p) se extiende a una superficie cerrada S definida en M e invariante para \mathcal{F} , con $K \subset S$. ■

Demostración de la Proposición 6.4. Es suficiente probar que el conjunto de singularidades de tipo traza $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}$ es no vacío. En efecto, en este caso encontramos por lo menos una separatriz parcial para $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ que está contenida de manera natural en una separatriz parcial extendida. Dividimos la prueba en dos etapas:

1. Sea $\Gamma^0 = E_1^0 \cap E_2^0$, donde E_1^0 y E_2^0 son dos componentes irreducibles de E^0 y asumamos que Γ^0 ha sido usada como centro de explosión en σ y que por tanto

$$D = \overline{\sigma^{-1}(\Gamma \setminus \{0\})}$$

es un divisor con cruzamientos normales. Si $D_{\text{inv}} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} \neq \emptyset$.

2. Si $e_0(E^0) = 3$, entonces $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} \neq \emptyset$.

Obsérvese que la primera etapa proporciona una prueba completa cuando $e_0(E^0) = 2$, ya que en este caso se tiene que $E = D \cup E_1 \cup E_2$, donde E_i es el transformado estricto de E_i^0 por σ , para $i = 1, 2$.

En ambas etapas la clave de la demostración es el uso del “teorema de Camacho-Sad refinado” en [37]. ■

6.3. Prolongación de ramas aisladas en foliaciones de tipo tórico

En esta sección demostramos la Proposición 6.5 que, en vista de la Proposición 6.2, es consecuencia del siguiente enunciado:

Proposición 6.6. Para cada componente dicrítica E_k de E , la superficie foliada $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ tiene la propiedad de prolongación para ramas aisladas.

Cuando E_k es una componente dicrítica no compacta de E , la superficie foliada $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ tiene, de manera automática, la propiedad de prolongación para ramas aisladas. En otro caso, en vista de la Proposición 6.1, la prueba se sigue de la siguiente afirmación:

Lema 6.3. Toda componente compacta E_k de E tiene estructura de superficie tórica proyectiva, donde $E|_{E_k}$ es el divisor dado de manera natural por la acción del toro. Esto es $(E_k, E|_{E_k})$ es una superficie tórica proyectiva ambiente.

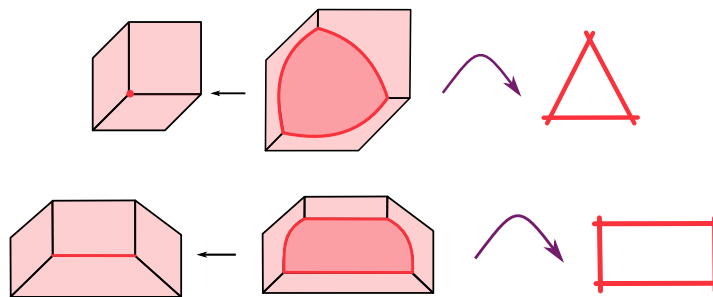


Figura 6.4: Divisores compactos obtenidos por explosiones combinatorias.

Una componente irreducible E_k de E es compacta si y solamente si $\sigma(E_k) = \{0\}$. Dado que estamos en la situación combinatoria, tenemos permiso de explotar el origen solo si $e_0(E^0) = 3$. Por tanto, asumiremos que E^0 consta de tres componentes irreducibles. Fijamos un sistema local de coordenadas (x_1, x_2, x_3) en el origen de \mathbb{C}^3 cumpliendo que $E^0 = (x_1 x_2 x_3 = 0)$, que nos permite dar una inmersión de $(\mathbb{C}^3, 0)$ en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ como sigue:

$$(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3 \mapsto [1, a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3.$$

Denotamos H la unión de los planos coordenados de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ que, como sabemos, define un divisor con cruzamientos normales de forma natural. Tenemos que la sucesión de explosiones combinatoria $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_0$ se levanta a una sucesión de explosiones combinatoria

$$\tilde{\sigma} : (\tilde{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^3, \tilde{H}) \rightarrow (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, H)$$

y cada componente compacta irreducible E_k de E es también una componente irreducible de \tilde{H} . Además, se cumple que $E|_{E_k} = \tilde{H}|_{E_k}$ y por tanto $(E_k, E|_{E_k})$ es una superficie tórica ambiente.

De esta manera, se concluye la prueba del Teorema 6.1.

Conclusiones y proyectos

Los problemas o líneas de trabajo que se presentan en este capítulo, son una continuación natural del trabajo realizado durante el periodo doctoral y contemplado en esta memoria. Esto es, se propone seguir con el estudio de los campos de vectores y las foliaciones de codimensión uno a través de propiedades combinatorias en su resolución de singularidades.

Distribución de hipersuperficies invariantes y hojas. Siguiendo a R. Thom, la existencia de hipersuperficies invariantes para una foliación de codimensión uno es muy útil para entender la dinámica de las hojas. Además, cuando el espacio de hojas está separado de forma natural en regiones, sería deseable tener por lo menos una hipersuperficie invariante en cada una de ellas.

En el caso bidimensional, podemos detectar regiones en el espacio de hojas separadas por componentes dicríticas y esquinas nodales, una vez que hemos realizado una reducción de singularidades adecuada. Recordemos que una singularidad nodal es un germen de foliación dado por $d(y/x^\lambda) = 0$, donde λ es un número real positivo no racional; aquí, la hipersuperficie real $|y| = |x|^\lambda$ proporciona una separación local del espacio de hojas. Esta propiedad ha sido señalada por J.F. Mattei y D. Marín [26, 27] en su estudio de la topología del espacio de hojas. La existencia de ramas invariantes en cada una de las regiones obtenidas de esta manera ha sido probada por L. Ortiz-Bobadilla, E. Rosales y S. Voronin en [37]. Este resultado se interpreta como una “versión refinada del Teorema de Camacho-Sad”.

En dimensión superior y en el caso hiperbólico-complejo no dicrítico, hay un manuscrito de F. Cano, J.F. Mattei y M. Ravara-Vago, donde detectan las regiones naturales en el espacio de hojas como el complementario en el divisor excepcional de los “bloques nodales”, donde estos son los equivalentes en dimensión superior a las esquinas nodales. Además, ellos prueban la existencia de hipersuperficie invariante en cada una de esas regiones.

En dimensión tres hay ejemplos de foliaciones sin superficie invariante; esto se debe a la presencia de componentes dicríticas tras la reducción de singularidades. Sin embargo, en el caso hiperbólico-complejo de tipo tórico, ya sabemos que sí existen superficies invariantes. Como hemos visto, este resultado se ha obtenido gracias a la particular estructura de la foliación restringida a las componentes dicríticas. Podemos esperar que el comportamiento combinatorio en estas componentes nos permita construir “separadores naturales” del espacio de hojas. Una vez que hayamos alcanzado este objetivo, proponemos investigar la existencia de superficies invariantes soportadas por cada una de las regiones determinadas por estos separadores.

Reducción de singularidades y superficies invariantes. En un artículo clásico de C. Camacho, A. Lins-Neto y P. Sad (véase [8]), ellos prueban que un germen de foliación en dimensión dos sin sillan-nodo tiene la misma reducción de singularidades que su conjunto de ramas invariantes. Esto funciona incluso en el caso dicrítico, pero es más claro y preciso en la situación no dicrítica, donde ellos prueban que la multiplicidad algebraica de la foliación (más uno) y el número de Milnor son los mismos que para la unión de sus ramas invariantes. La coincidencia de la reducción de singularidades es un poco más general, como muestran J. F. Mattei y E. Salem en [28] en su estudio de foliaciones de “segunda especie”. Algunas veces el término “curva generalizada” se usa para hacer referencia a gérmenes de foliaciones bidimensionales sin sillan-nodo.

Debido al ejemplo de Jouanolou, en dimensión superior no tiene sentido preguntarse si una foliación de codimensión uno se desingulariza siguiendo la reducción de singularidades de sus hipersuperficies invariantes, incluso si estamos en el caso hiperbólico-complejo. Cuando la foliación es no dicrítica y sin sillar nodo, se sabe que toda reducción de singularidades de las hipersuperficies invariantes induce automáticamente una reducción de singularidades de la foliación (véase [20]). Esto justifica la terminología “curva generalizada” para denotar foliaciones no dicríticas hiperbólico-complejas.

Nuestro trabajo acerca de las foliaciones de tipo tórico, nos hace sospechar que hay dos tipos de situaciones: foliaciones con una cantidad infinita de superficies invariantes o aquellas que solo tienen una cantidad finita y todas ellas determinadas por las “separatrices parciales extendidas”. Las primeras recuerdan el caso de foliaciones dicríticas en dimensión dos; por ejemplo, la foliación “libro abierto”. La segunda situación podría también ser relativa a foliaciones dicríticas, pero pensamos que aún así, en este caso las superficies invariantes estructuran la foliación, en el sentido de que su desingularización implicaría una desingularización de la foliación como en el caso de hipersuperficies generalizadas. En esta dirección, pensamos que se pueden esclarecer estos hechos.

Foliaciones de tipo tórico en variedades proyectivas tóricas. En el capítulo 5, probamos la “prolongación global para ramas invariantes aisladas” para foliaciones de tipo tórico en superficies tóricas proyectivas. Recordemos que una rama invariante de una foliación en una superficie se dice aislada si todos sus puntos infinitamente próximos son singularidades (en el sentido adaptado) de la foliación transformada; esto es, bajo cualquier reducción de singularidades de la foliación, el transformado estricto de la rama corta un componente invariante del divisor.

La generalización a dimensión tres de la idea de rama invariante aislada, válida para foliaciones de tipo tórico, puede ser un germen de superficie soportado por una separatriz parcial extendida. En el contexto de tipo tórico, la “propiedad de prolongación global para ramas invariantes aisladas” en dimensión dos, se podría generalizar a dimensión superior con la siguiente afirmación:

“Toda separatriz parcial extendida soporta una superficie global invariante.”

Nos gustaría probar esto para foliaciones de tipo tórico en la variedad tórica $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, dotada con el divisor con cruzamientos normales dado por los cuatro plano coordenados, así como en espacios ambiente obtenidos desde ésta por una sucesión combinatoria (equivariante) de explosiones. En una segunda etapa, también para variedades tóricas proyectivas tales que la unión de las órbitas no densas de la acción del toro es un divisor con cruzamientos normales.

De cualquier manera, sería interesante tener una buena definición de “superficie invariante aislada” en espacios ambiente más generales.

La pregunta de Thom para dimensión superior en el contexto tórico dicrítico. Nos preguntamos si toda foliación de codimensión uno de tipo tórico en $(\mathbb{C}^n, 0)$ tiene una hipersuperficie invariante, para $n \geq 4$. Tenemos dos vías para afrontar esta pregunta:

- a) Explorar la posibilidad de una extensión del argumento de Cano-Mattei en. Este argumento se basa en hacer una sección tridimensional con un “agujero cohomológicamente pequeño”, en la existencia de reducción de singularidades en dimensión tres y en el concepto de equidesingularización genérica. La dificultad de esta aproximación sería el uso de una sección tridimensional adecuada que respetase las propiedades de la clase de foliaciones de tipo tórico.
- b) Para el caso $n = 4$, sería posible aplicar la propiedad de extensión global de dimensión tres a componentes dicríticas compactas de una reducción de singularidades combinatoria (véase el párrafo anterior) del mismo modo que hemos hecho para el caso $n = 3$.

Campos de vectores Newton no degenerados. Las foliaciones de dimensión uno están dadas localmente por un campo de vectores. Escribiendo el campo de vectores de manera logarítmica como en la Ecuación 2.4, podemos describir la clase de foliaciones Newton no degeneradas de dimensión uno en términos de sistemas de poliedros de Newton. Del mismo modo que para la clase de foliaciones de codimensión uno, esto debería corresponder con aquellas que tienen reducción de singularidades combinatoria. Estos campos de vectores se pueden manejar mejor que los más generales y nos preguntamos acerca de propiedades como la equivalencia topológica, la distribución de las cuencas de atracción, la comparación con la parte principal (dada por la frontera del poliedro de Newton). Varias de estas propiedades han sido exploradas por C. Alonso, M.I.T. Camacho y F. Cano sobre los números reales, para otras clases de campos de vectores en [1, 2].

Es interesante señalar el papel de las resonancias aritméticas en las singularidades elementales. Pensamos que la propiedad de no resonancia es opuesta a la existencia de integrales primeras racionales. Por tanto, asumiríamos esa condición en nuestro estudio. Por otro lado, hay trabajos de S. Pinheiro y H. Reis [39] que sugieren la presencia de partes “dicríticas” cuando se tienen suficientes integrales primeras; estas propiedades están siendo estudiadas también por J. Ribón, F. Cano, R. Rosas, M. Ravara-Vago y otros. En este espíritu, nos gustaría también describir completamente los campos de vectores Newton no degenerados integrables.

Valoraciones divisoriales dicríticas. Las componentes dicríticas para una foliación de codimensión uno son componentes irreducibles genericamente transversales del divisor excepcional, después de una sucesión finita de explosiones con centros invariantes. Tomando el lenguaje de la geometría algebraica, podemos decir que las componentes dicríticas son algunas valoraciones divisoriales del cuerpo de funciones racionales. Cuando consideramos el caso de una foliación con una integral primera racional, podemos interpretar estas valoraciones dicríticas como el espectro de los puntos de indeterminación.

Es una cuestión general describir propiedades de este espectro dicrítico. Desearíamos hacerlo principalmente en el caso de foliaciones Newton no degeneradas o de tipo tórico. De manera más precisa, nos gustaría dar una idea sobre los siguientes asuntos:

- En dimensión dos el grafo dual de la reducción minimal de singularidades (hasta puntos presimples) es una cadena. Algunos de los divisores no pueden ser dicríticos de entrada por la forma del polígono de Newton (en el caso no degenerado). Pensamos que podemos usar esta propiedad para describir completamente la distribución de valoraciones dicríticas para una fracción racional en dimensión dos. Sabemos por trabajos de S.S. Abhyankar e I. Luengo, que este conocimiento tiene su importancia en el problema de la Conjetura Jacobiana.
- En dimensión superior, nos gustaría también describir las potenciales componentes dicríticas en términos del poliedro de Newton. En particular, estamos interesados en como podemos obtener una eliminación de indeterminaciones con propiedades minimales.

La existencia de una cantidad finita de componentes dicríticas en el contexto de tipo tórico tiene una respuesta positiva, ya que por definición disponemos de una reducción de singularidades. En dimensión superior a tres, no se conoce reducción de singularidades para foliaciones de codimensión uno generales. De todos modos, sería posible mostrar esta propiedad de finitud por argumentos indirectos que pueden utilizar situaciones combinatorias. En particular, la aproximación a través de la uniformización local de F. Cano y M. Fernández-Duque en [13], usa bloques combinatorios muy cercanos a la idea de objetos de tipo tórico.

Variedades polares de foliaciones de tipo tórico y clasificación analítica. Sabemos que el tipo de equisingularidad de la polar genérica de una curva plana proporciona información analítica de la curva y no meramente topológica. Las curvas y variedades polares (o jacobianas) están definidas de manera naturales como el lugar de tangencia de un par de foliaciones.

Tomando estas ideas, es posible controlar en ciertos casos el clásico invariantes de Zariski de curvas planas cuspidales cuando están integradas como curvas invariantes llegando a la última componente dicrítica de una foliación de tipo tórico (este problema está siendo desarrollado ahora mismo por O. Gómez). Por otro lado, los trabajos de N. Corral dan un teorema de descomposición clásico para la curva polar genérica de una foliación sin sillan-nodo.

En esta dirección, pretendemos en primer lugar describir completamente la curva polar genérica de foliaciones de tipo tórico bidimensionales y en segundo lugar explicar como se distribuyen las variedades polares en dimensión superior.

Alternativa local de Brunella en el contexto Newton no degenerado. M. Brunella preguntó si para una foliación de codimensión uno en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, una de las siguientes propiedades tenía lugar:

- a) Hay una superficie invariante global.
- b) Hay una foliación uno-dimensional por curvas algebraicas en $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ que es tangente a la de codimensión uno dada.

Ésta es la así llamada “alternativa de Brunella”, que se conoce en algunos casos (véase [17]). Desde el punto de vista local, una versión de esta pregunta es la siguiente: “Dado un germen de foliación de codimensión uno en $(\mathbb{C}^3, 0)$ sin superficie invariante, cada hoja contiene una rama analítica en el origen”. La alternativa local de Brunella se satisface para la clase de foliaciones hiperbólico-complejas relativamente aisladas (RICH), como se muestra en [16], pero es un problema abierto para el caso general dicrítico.

En esta dirección se puede tratar con la alternativa local de Brunella para la clase de foliaciones hiperbólico-complejas Newton no degeneradas. La diferencia entre ser de tipo tórico y ser Newton no degenerado es relativamente pequeña y se concentra en la diferencia entre singularidades presimples y simples de una foliación, esto es, es una cuestión de resonancias aritméticas. Ya conocemos la existencia de superficie invariante para el caso de tipo tórico, lo que proporciona una respuesta positiva trivial a la alternativa para este caso. En cambio, esto no se extiende necesariamente a la situación Newton no degenerada. Esperamos que las propiedades combinatorias de las foliaciones Newton no degeneradas nos permites seguir las líneas en la prueba de los casos RICH. De manera más precisa, queremos probar que cada “bloque separador nodal” interseca por lo menos una componente dicrítica compacta de la reducción de singularidades.

Preparación de Hironaka para sistemas de poliedros de foliaciones. El problema de reducción de singularidades para foliaciones de codimensión uno está resuelto en dimensión ambiente menor o iguales que tres (véase [10, 40]). En dimensión ambiente superior la existencia de desingularización solo se conoce para el caso hiperbólico-complejo no dicrítico, eso es para las “hipersuperficies generalizadas”, como hemos mencionado anteriormente. Incluso el caso hiperbólico-complejo dicrítico está ampliamente abierto, así como la situación más general.

El objetivo en esta dirección de investigación es el desarrollo de herramientas útiles en el estudio del problema de reducción de singularidades para el foliaciones de codimensión uno generales.

El alto impacto del poliedro característico de Hironaka y las variedades de contacto maximal en algunas de las pruebas de reducción de singularidades de variedades sobre cuerpos base de característica cero, es la razón por la que pensamos que es posible contribuir a este problema. En efecto, el algoritmo usual intenta concentrar un “comportamiento combinatorio máximo” por una elección adecuada de coordenadas. Como consecuencia, una primera etapa sería desarrollar un procedimiento de preparación general con el fin de obtener coordenadas que nos proporcionen el “mejor sistema de poliedros”. Después de desingularizar este sistema de poliedros, obtenemos un objeto “combinatoriamente regular”. Ahora, debemos considerar

un nuevo sistema de coordenadas y volver a comenzar el procedimiento. Esto sugiere una forma global de tomar en cuenta paquetes de Puiseux como en los problemas de uniformización local.

La teoría del contacto maximal proporciona una hipersuperficie de contacto maximal donde las singularidades malas se sitúan, y esta propiedad es estable bajo explosiones sucesivas. Para las foliaciones de codimensión uno no hay una teoría de contacto maximal con ese buen comportamiento. En primer lugar, no está claro qué es el análogo a la función de Hilbert-Samuel. En segundo lugar, cuando consideramos ciertos tipos de foliaciones, encontramos comportamientos mixtos: por un lado hay un “contacto maximal parcial”; por otro lado, encontramos situaciones controladas por resonancias y, en algún aspecto, por sistemas de poliedros. Estas ideas aparecen en la prueba tridimensional dada por F. Cano en [10], pero no han sido desarrolladas para la dimensión superior.

Foliaciones de tipo tórico con sillas-nodo. Las foliaciones de tipo tórico son, por definición, aquellas que tiene una desingularización combinatoria, sin importar para esta definición si aparecen sillas nodo o no. Sin embargo, para obtener el “Teorema de equivalencia” del Capítulo 4 (4.1), hemos trabajado todo el tiempo en el contexto hiperbólico-complejo, es decir, bajo la hipótesis de que no aparecen sillas-nodo. Esta hipótesis es también bastante simplificadora en la prueba del “Teorema de Camacho-Sad refinado”.

En este aspecto, proponemos extender la mayoría de resultados obtenidos bajo la hipótesis de ser hiperbólico-complejo, al caso más general. Por ejemplo, en dimensión dos, hay un artículo notable de C. Camacho y R. Rosas en [6], donde ellos generalizan los resultados en [37] para el caso en el que aparecen sillas-nodo.

Conclusions and future work

The problems or research lines that we present here are a natural continuation of the work that I have done during my doctoral period which is presented in this document. That is, I propose to continue the study of codimension one foliations and vector fields through combinatorial properties in their reduction of singularities.

Distribution of Invariant Hypersurfaces and Leaves. Following R. Thom, the existence of invariant hypersurfaces for a codimension one foliation is very useful to understand the dynamics of the leaves. Moreover, when the space of leaves is naturally separated in regions, it would be desirable to have at least one invariant hypersurface at each one.

In the bidimensional case, we can detect regions in the space of leaves, separated by dicritical components and nodal corners, once we have performed a suitable reduction of singularities. We recall that a nodal singularity is a germ of foliation given by $d(y/x^\lambda) = 0$, where λ is a non-rational positive real number; here, the real hypersurface $|y| = |x|^\lambda$ gives a local separation of the space of leaves. This property has been pointed out by J.F. Mattei and D. Marín [26, 27] in their study of the topology of the space of leaves. The existence of invariant branches at each of the regions obtained in this way, has been proved by L. Ortiz-Bobadilla, E. Rosales and S. Voronin in [37]. This result is interpreted as a “refined version of Camacho-Sad Theorem”.

In higher dimension and in the non-dicritical complex hyperbolic case, there is a manuscript by F. Cano, J.F. Mattei and M. Ravara-Vago where they detect the natural regions in the space of leaves as the complementary in the exceptional divisor of the “nodal blocks”, where these are the high-dimensional equivalent to the nodal corners. In addition, they prove the existence of invariant hypersurface at each one of these regions.

In dimension three there are examples of foliations without invariant surface; this is due to the presence of dicritical components after reduction of singularities. However, in the complex hyperbolic toric type case, we already know about the existence of invariant surfaces. As we have previously pointed out, this result has been obtained thanks to the particular structure of the foliation restricted to the dicritical components. We can expect that the combinatorial behavior in these components will allow us to construct “natural separators” of the space of leaves. Once we have reached this objective, we propose to investigate the existence of invariant surfaces supported by each of the regions determined by these separators.

Reduction of Singularities and Invariant Surfaces. In a classical paper of C. Camacho, A. Lins-Neto and P. Sad (see [8]) they prove that a germ of foliation in dimension two without saddle-nodes has the same reduction of singularities than its set of invariant branches. This works even in the dicritical case, but the result is more clear and accurate in the non-dicritical situation, where they prove that the algebraic multiplicity of the foliation (plus one) and the Milnor number are the same ones as for the union of the invariant branches. The coincidence of the reduction of singularities is a little bit more general, as it is shown by J. F. Mattei and E. Salem in [28] in their study of foliations of the “second type”. Sometimes the term “generalized curve” is used to refer to germs of bidimensional foliations without saddle-nodes.

Due to Jouanolou example, in higher dimension it does not make sense to ask if a codimension one foliation is desingularized following the reduction of singularities of its invariant

hypersurfaces, even if there are no saddle-nodes (complex hyperbolic case). When the foliation is non-dicritical and without saddle-nodes, it is known that every reduction of singularities of the invariant hypersurfaces automatically induces a reduction of singularities of the foliation (see [20]). This justifies the terminology “generalized hypersurface” to denote non-dicritical complex hyperbolic foliations.

Our work about toric type foliations makes us suspect that there are two types of situations: foliations with infinitely many invariant surfaces and those having only a finite number determined by the “extended partial separatrices”. The former ones recall closely the case of dicritical foliations in dimension two; for instance, the “open book” foliations. The second situation may also correspond to a dicritical foliation, but we think that in this case the invariant surfaces structure the foliation, in the sense that their desingularization will imply a desingularization of the foliation as in the case of generalized hypersurfaces. In this research line, we want to enlighten these facts.

Toric Type Foliation on Projective Toric Varieties. In our second manuscript, we prove the “global prolongation property for isolated invariant branches” for toric type foliations on projective toric surfaces. Let us recall that an invariant branch of a foliation on a surface is called isolated if all its infinitely near points are singularities (in an adapted sense) of the transformed foliation; that is, under any reduction of singularities of the foliation, the strict transform of the branch meets an invariant component.

The generalization to dimension three of the idea of isolated invariant branch, valid for toric type foliations, may be a germ surface supported by an extended partial separatrix. In the toric type context the two dimensional “global prolongation property for isolated invariant branches” could be generalized to dimension three by the following statement:

“Every extended partial separatrix supports a global invariant surface.”

We would like to prove it for toric type foliations on the toric variety $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, endowed with the divisor given by the four coordinate planes, as well as on ambient spaces obtained by combinatorial (equivariant) blowing-ups of this one. In a second step, also for projective toric varieties such that the union of non-dense orbits of the torus action is a normal crossings divisor.

Anyway, it would be interesting to have a good definition of “isolated invariant surface” in more general ambient spaces.

Thom’s Question in Higher Dimension in the Dicritical Toric Context. We wonder if every toric type codimension one foliation on $(\mathbb{C}^n, 0)$ has an invariant hypersurface, for $n \geq 4$. We have two ways to face this question:

- a) To explore the possibility of an extension of Cano-Mattei argument in [14]. This argument is based in doing a three-dimensional section with a “cohomologically small hole”, in the existence of three-dimensional reduction of singularities and in the concept of generic equidesingularization. The difficulty of this approach will be the use of a suitable three-dimensional section, respecting the toric type properties.
- b) For the case $n = 4$, it will be possible to apply the global extension property of the dimension three to the compact dicritical components of a combinatorial reduction of singularities (see the previous problem) in the same way that we have done for the case of dimension three.

Newton Non-degenerate Vector Fields. The one-dimensional foliations are locally given by a vector field. Writing the vector field in a logarithmic way, we can describe the class of Newton non-degenerate one-dimensional foliations in terms of the Newton polyhedra system. In the same way as for the case of codimension one foliations, this class should correspond to foliations having a combinatorial reduction of singularities. These vector fields can be managed

better than the general ones and we can ask about properties as the topological equivalence, the distribution of the attraction basins, the comparison with the main part (given by the frontier of the Newton polyhedron). Several of these properties have been explored by C. Alonso, M.I.T. Camacho and F. Cano over the real numbers for other classes of vector fields in [1, 2].

It is interesting to point out the role of the arithmetic resonances in elementary singularities. We think that the non-resonance property is opposite to the existence of local rational first integrals. So, we will take this assumption in our study. On the other hand, there are works by S. Pinheiro and H. Reis [39] that suggest the presence of “dicritical” parts when we have enough first integrals; these properties are being also studied by J. Ribon, F. Cano, R. Rosas, M. Ravara-Vago and others. In this spirit, we would like to describe completely integrable Newton non-degenerate vector fields.

Dicritical Divisorial Valuations. The dicritical components for a codimension one foliation are generically transversal irreducible components of the exceptional divisor after a finite sequence of blowing-ups with invariant centers. Taking the language of Algebraic Geometry, we can say that the dicritical components are some divisorial valuations of the field of rational functions. When we consider the case of a foliation with a rational first integral, we can interpret these dicritical valuations as the spectrum of indeterminacy points.

It is a general question to describe properties of this dicritical spectrum. We wish to do it mainly in the case of toric type and/or Newton non-degenerate foliations. More precisely, we would like to give an idea about the following questions:

- In dimension two the dual graph of the minimal reduction of singularities (to presimple points) is a chain. Some of the divisors can not be dicritical in view of the Newton polygon. We think that we can use this property in order to completely describe the distribution of the dicritical valuations for a rational fraction in dimension two. We know by works of S.S. Abhyankar and I. Luengo that this knowledge is of importance in the problem of the Jacobian Conjecture.
- In higher dimension we would also like to describe the potential dicritical components in terms of the Newton polyhedron. In particular, we are interested into describe how we can obtain an elimination of indeterminacies with minimal properties.

The question about the existence of only finitely many dicritical components has a positive answer in the toric type foliations since, by definition, we dispose of a reduction of singularities. In dimension greater than three, no reduction of singularities is known for general codimension one foliations. Anyway, it should be possible to show the finiteness property by indirect arguments that could use combinatorial situations. In particular, the local uniformization approach of F. Cano and M. Fernández-Duque in [13] uses combinatorial blocks very close to the idea of toric type objects.

Polar Varieties of Toric Type Foliations and Analytic Classification Problems. We know that the equisingularity type of the generic polar of a plane curve is an analytic characteristic of the curve and not merely a topological feature. Polar curves and varieties are naturally defined as the tangency locus of a pair of foliations. Taking these ideas, it is possible to control in certain cases the classical Zariski’s invariant of cuspidal plane curves when they are integrated as invariant curves arriving to the last dicritical component of a foliation of toric type (this problem is now being developed by O. Gómez). On the other hand, the works of N. Corral give a classical decomposition theorem for the generic polar curve of a foliation without saddle-nodes.

In this line, we intend firstly to completely describe the generic polar curves of two-dimensional toric type foliations, and secondly to explain how are distributed the polar varieties in higher dimension.

Local Brunella’s Alternative in the Newton Non-degenerate Context. M. Brunella asked if given a codimension one foliation on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, one of the following properties was held:

- a) There is a global invariant surface.
- b) There is a line foliation on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ by algebraic curves that is tangent to the given one.

This is the so-called “Brunella’s alternative”, that is known in some cases (see [17]). From the local point of view, a version of this question is the following: “Given a germ of codimension one foliation on $(\mathbb{C}^3, 0)$ without invariant surface, each leaf contains an analytic branch at the origin”. Local Brunella’s alternative holds for the class of Relatively Isolated Complex Hyperbolic (RICH) foliations as it is shown in [16], but it is an unsolved problem in the general dicritical case.

Our objective in this line of work is to deal with local Brunella’s alternative for the class of Newton non-degenerate complex hyperbolic foliations. The difference between toric type and Newton non-degenerate is relatively small and concentrates on the difference between presimple and simple singularities of a foliation, that is, a question of arithmetic resonances. We already know the existence of invariant surface for the toric type case, which provides a positive trivial answer for this case, but does not necessarily extend to the non-degenerate Newton situation. We hope that the combinatorial properties of Newton non-degenerate foliations will allow us to follow the lines in the proof of RICH cases. More precisely, we want to prove that each “nodal separating block” intersects at least one compact dicritical component of the reduction of singularities.

Hironaka’s Preparation for Polyhedra Systems of Foliations. The problem of reduction of singularities for codimension one foliations is solved in ambient dimension lower or equal than three (see [10, 40]). In higher ambient dimension the existence of desingularization is known for non-dicritical complex hyperbolic foliations, these are the “generalized hypersurfaces” that we have mentioned before. Even in the case of complex hyperbolic but dicritical foliations the problem is wide open, as well as in the general case.

The objective in this line of research is the development of useful tools in the study of the problem of reduction of singularities for general codimension one foliations. If we are slightly optimistic, we of course intend to solve it.

The high impact of the characteristic Hironaka polyhedron and the maximal contact varieties, in some of the proofs for the reduction of singularities of varieties over characteristic zero fields, is the reason why we think that it is possible to give a contribution to this problem. Indeed, the usual algorithms try to concentrate a “maximum combinatorial behaviour” by a suitable choice of coordinates. Hence, a first step is to develop a general preparation procedure in order to obtain coordinates giving to us the “best polyhedra system”. After desingularizing this polyhedra system, we obtain a “combinatorially regular” object. Now, we should consider new coordinate systems and restart the procedure. This suggest a global way of taking account Puiseux’s packages as in the local uniformization problems.

Maximal contact theory provides a maximal contact hypersurface, where the bad singularities are placed and this property is stable under further blowing-ups. In the case of codimension one foliations, there is not a theory of maximal contact with such a good behaviour. First of all, it is not clear what is the analogue of the Hilbert-Samuel function. Secondly, when we consider certain types of foliations, we find a mixed behaviour: on the one hand there is a “partial maximal contact”; on the other hand, we find situations controlled by resonances and, in some sense, by polyhedra systems. These ideas appear in the three-dimensional proof due to F. Cano in [10], but they have not been developed for higher dimension.

Toric Type foliations with saddle-nodes. Toric type foliations are, by definition, those having a combinatorial desingularization, it does not matter if they appear or not saddle-nodes. However, in order to obtain the “equivalence result” with Newton non-degenerate foliations,

CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

we have worked all the time in the complex hyperbolic context, that is, under the assumption that there are not saddle-nodes. This hypothesis is also quite simplifier in the statement of the “Refined Camacho-Sad’s Theorem”.

In this line of research, we propose to extend most of the results obtained under the complex hyperbolicity assumption, to the general case. For instance, in dimension two, there is a notable paper of C. Camacho and R. Rosas in [6], where they generalize the results in [37] in the case where saddle-nodes appear.

Anexos

Anexo I: Combinatorial Aspects of Classical Resolution of Singularities.

- Aceptado para su publicación en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (RACSAM). Serie A. Matemáticas. Springer.
ISSN 1578-7303 (versión impresa).
ISSN 1579-1505 (versión electrónica).
- Primera aparición on-line: 09 de Octubre de 2018.
- <https://doi.org/10.1007/s13398-018-0583-z>.



Combinatorial aspects of classical resolution of singularities

Beatriz Molina-Samper¹

Received: 29 November 2017 / Accepted: 27 September 2018
© Springer-Verlag Italia S.r.l., part of Springer Nature 2018

Abstract

We describe combinatorial aspects of classical resolution of singularities that are free of characteristic and can be applied to singular foliations and vector fields as well as to functions and varieties. In particular, we give a combinatorial version of Hironaka's maximal contact theory in terms of characteristic polyhedra systems and we show the global existence of maximal contact in this context.

Keywords Polyhedra systems · Maximal contact · Reduction of singularities

Mathematics Subject Classification 14E15 · 14B05 · 32S65 · 32S45

1 Introduction

We present here a combinatorial formulation for the procedure of reduction of singularities in terms of polyhedra systems. This combinatorial structure is free of restrictions on the characteristic and provides a combinatorial support for the reduction of singularities of varieties, foliations, vector fields and differential forms, among other possible objects.

Hironaka's characteristic polyhedra represent the combinatorial steps in almost any procedure of reduction of singularities. This is implicit in the formulation of the polyhedra game [12], solved by Spivakovsky [20], and in many other papers about characteristic polyhedra [5,6,19–21].

The combinatorial features concerning the problems of reduction of singularities are reflected in polyhedra systems without losing the global aspects. In particular, we need to project the problem over a “Maximal Contact Support Fabric”, that plays the role of a maximal contact variety [1]. The proof of global existence of combinatorial maximal contact is also a problem of the same nature as the reduction of singularities. We present here a proof and it is solved thanks to the induction hypothesis on the dimension.

To Professor Felipe Cano on the occasion of his 60th birthday.

✉ Beatriz Molina-Samper
beatriz.molina@uva.es

¹ Dpto. Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, Campus Miguel Delibes, Paseo de Belén, 7, 47011 Valladolid, Spain

Let us remark that in the general problem of reduction of singularities in positive characteristic, maximal contact does not necessarily exist [7–9,16]. Nevertheless, when we consider the combinatorial structure of polyhedra systems, we find a phenomenon that keeps an analogy with the idea of maximal contact (maximal contact support fabric), that works also in the cases when the polyhedra system has been produced from functions in zero or positive characteristic.

The polyhedra systems have evident links with toric varieties and they also provide a combinatorial global support for the so-called Newton non-degenerate varieties [17]. In a forthcoming paper we plan to develop these last two aspects also for codimension one singular foliations.

2 Support fabrics for polyhedra systems

The support fabrics play the role of ambient spaces for supporting polyhedra systems. They express the stratified structure of the space.

Let I be a non-empty finite set and denote by $\mathcal{P}(I)$ the set of subsets of I . We consider the Zariski topology on $\mathcal{P}(I)$ whose closed sets are the sets $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(I)$ having the property:

$$\text{If } J_1 \in \mathcal{K} \text{ and } J_2 \supset J_1 \Rightarrow J_2 \in \mathcal{K}.$$

A subset $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(I)$ is open if and only if for every $J \in \mathcal{H}$ we have $\mathcal{P}(J) \subset \mathcal{H}$. The closure of $\{J\} \subset \mathcal{P}(I)$ is the set $\overline{\{J\}} = \{J' \subset I; J' \supset J\}$.

A *support fabric* is a pair $\mathcal{F} = (I, \mathcal{H})$ where I is a finite set and \mathcal{H} is an open set for the Zariski topology on $\mathcal{P}(I)$. The elements of \mathcal{H} are called *strata* and I is called the *index set*. The *dimension* $\dim(\mathcal{F})$ is defined by $\dim(\mathcal{F}) = \max\{\#J; J \in \mathcal{H}\}$, where $\#J$ denotes the number of elements of J . Note that the strata $J \in \mathcal{H}$ where the dimension is reached are closed points in \mathcal{H} .

The first example is the *local support fabric* \mathcal{L}_I associated to the index set I , defined by $\mathcal{L}_I = (I, \mathcal{P}(I))$. We can obtain other ones as follows:

- The *restriction* $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ of the support fabric \mathcal{F} to an open set $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$. It is given by $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} = (I, \mathcal{U})$. Note that we always have $\mathcal{F} = \mathcal{L}_I|_{\mathcal{H}}$.
- The *reduction* $\text{Red}_{\mathcal{K}}(\mathcal{F})$ of the support fabric \mathcal{F} to a closed subset \mathcal{K} of \mathcal{H} , that is \mathcal{K} is the intersection with \mathcal{H} of a closed set of $\mathcal{P}(I)$. We consider the smallest open set $\mathcal{H}_{\mathcal{K}}$ that contains \mathcal{K} . That is $\mathcal{H}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{J \in \mathcal{K}} \mathcal{P}(J)$. Then, we define $\text{Red}_{\mathcal{K}}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}|_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}$.
- The *projection* \mathcal{F}^T from a non-empty stratum $T \in \mathcal{H}$. The set

$$\mathcal{H}^T = \{J \setminus T; T \subset J, J \in \mathcal{H}\}$$

is open in $\mathcal{P}(I^T)$, where $I^T = I \setminus T$. We define $\mathcal{F}^T = (I^T, \mathcal{H}^T)$. Note that $\dim(\mathcal{F}^T) < \dim(\mathcal{F})$.

Given a support fabric $\mathcal{F} = (I, \mathcal{H})$, the *relevant index set* $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ of \mathcal{F} is defined by $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \bigcup_{J \in \mathcal{H}} J$. We say that two support fabrics $\mathcal{F}_1 = (I_1, \mathcal{H}_1)$ and $\mathcal{F}_2 = (I_2, \mathcal{H}_2)$ are *equivalent* if there is a bijection $\phi : \mathcal{I}_{\mathcal{F}_1} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{F}_2}$ such that $\mathcal{H}_2 = \{\phi(J); J \in \mathcal{H}_1\}$. In this case we say that ϕ is an *equivalence between \mathcal{F}_1 and \mathcal{F}_2* .

Let us define the *blow-up* $\pi_J(\mathcal{F})$ of \mathcal{F} centered in a non-empty stratum $J \in \mathcal{H}$. Take $I' = I \cup \{\infty\}$ where $\infty \notin I$. Define $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'_s \cup \mathcal{H}'_{\infty}$ where $\mathcal{H}'_s = \mathcal{H} \setminus \overline{\{J\}}$ and

$$\mathcal{H}'_{\infty} = \bigcup_{K \in \{J\} \cap \mathcal{H}} \mathcal{H}'_{\infty}{}^K; \text{ where } \mathcal{H}'_{\infty}{}^K = \{(K \setminus J) \cup A \cup \{\infty\}; A \subsetneq J\}.$$

We have that \mathcal{H}' is open in $\mathcal{P}(I')$ and we define $\pi_J(\mathcal{F}) = (I', \mathcal{H}')$. Note that for every $K \in \overline{\{J\}} \cap \mathcal{H}$, there is a bijection $\mathcal{H}'_K \rightarrow \mathcal{P}(J) \setminus \{J\}$ given by $J' \mapsto A_{J'}$, where $A_{J'}$ is the unique subset of J such that

$$J' = (K \setminus J) \cup A_{J'} \cup \{\infty\}.$$

Remark 1 The dimension of a support fabric \mathcal{F} is invariant by blow-ups.

Remark 2 The relevant index sets after the blow-up $\pi_J(\mathcal{F})$ are given by

$$\mathcal{I}_{\pi_J(\mathcal{F})} = \begin{cases} \mathcal{I}_{\mathcal{F}} \cup \{\infty\}, & \text{if } \#J \geq 2; \\ \mathcal{I}_{\mathcal{F}} \setminus \{j\} \cup \{\infty\}, & \text{if } J = \{j\}. \end{cases}$$

Moreover, if there is an equivalence ϕ between two support fabrics \mathcal{F}_1 and \mathcal{F}_2 , then for every $J \in \mathcal{H}_1$, the blow-ups $\pi_J(\mathcal{F}_1)$ and $\pi_{\phi(J)}(\mathcal{F}_2)$ are also equivalent.

There is a surjective map $\pi_J^\# : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ between the strata sets of $\pi_J(\mathcal{F})$ and \mathcal{F} respectively, given by $\pi_J^\#(\mathcal{H}'_K) = \{K\}$, for each $K \in \overline{\{J\}} \cap \mathcal{H}$ and by $\pi_J^\#(J') = J$, if $J' \in \mathcal{H}'_s = \mathcal{H} \setminus \overline{\{J\}}$.

Proposition 1 The map $\pi_J^\# : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ is continuous.

Proof Remark that for every $J' \in \mathcal{H}'$, we have $\pi_J^\#(\mathcal{P}(J')) \subset \mathcal{P}(\pi_J^\#(J'))$. \square

Corollary 1 Given an open set $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$, we have $\pi_J(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}) = \pi_J(\mathcal{F})|_{\mathcal{U}'}$, where $\mathcal{U}' = (\pi_J^\#)^{-1}(\mathcal{U})$.

Example 1 Consider a pair (M, E) , where M is a complex analytic variety and E is a strong normal crossings divisor of M . That is, E is the union of a finite family $\{E_i\}_{i \in I}$ of irreducible smooth hypersurfaces E_i , where we fix an order in the index set I and the next properties hold:

1. Given a point $p \in M$ and the subset $I_p = \{i \in I; p \in E_i\}$, there is part of a local coordinate system in p of the form $\{x_i\}_{i \in I_p}$ in such a way that $E_i = (x_i = 0)$ locally in p for each $i \in I_p$ (such coordinate systems are called *adapted to E*).
2. The non-singular closed analytic set $E_J = \bigcap_{j \in J} E_j$ is connected for each $J \subset I$.

The pair $\mathcal{F}_{M,E} = (I, \mathcal{H})$ is a support fabric, where $\mathcal{H} = \{J \subset I; E_J \neq \emptyset\}$. Note that the dimension of $\mathcal{F}_{M,E}$ is not necessarily the dimension of M . Given $J \in \mathcal{H}$, we can perform the usual blow-up

$$\pi : (M', E') \rightarrow (M, E)$$

centered in E_J , where E' is the total transform of E , that is, $E' = \pi^{-1}(E)$. In this situation we have $\pi_J(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{M',E'}$.

3 Polyhedra systems

When we perform a blow-up of the ambient space, it becomes of global nature. Polyhedra systems provide a way of giving Newton or characteristic polyhedra in a coherent way along global ambient spaces, represented in our case by the support fabric.

3.1 Definitions

Given a totally ordered finite set J , we recall that \mathbb{R}^J denotes the set of maps $\sigma : J \rightarrow \mathbb{R}$. If $J_1 \subset J_2$, there is a canonical projection $\text{pr}_{J_2, J_1} : \mathbb{R}^{J_2} \rightarrow \mathbb{R}^{J_1}$ given by $\sigma \mapsto \sigma|_{J_1}$. For a subset $A \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J$, we define the *positive convex hull* $[[A]]$ by

$$[[A]] = \text{Convex hull}\left(A + \mathbb{R}_{\geq 0}^J\right) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J.$$

Let $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ be a positive integer. We say that a subset $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J$ is a *characteristic polyhedron with denominator d* if there is $A \subset (1/d)\mathbb{Z}_{\geq 0}^J$ such that $\Delta = [[A]]$.

Definition 1 A polyhedra system \mathcal{D} over a support fabric $\mathcal{F} = (I, \mathcal{H})$ with denominator d , is a triple $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$, where each $\Delta_J \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J$ is a characteristic polyhedron with denominator d , in such a way that for every $J_1, J_2 \in \mathcal{H}$ where $J_1 \subset J_2$, we have $\Delta_{J_1} = \text{pr}_{J_2, J_1}(\Delta_{J_2})$. When $d = 1$, we say that \mathcal{D} is a *Newton polyhedra system* over \mathcal{F} . If it is necessary, we denote by $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ the support fabric of \mathcal{D} . We define the *dimension* of \mathcal{D} as the dimension of $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

We say that two polyhedra systems \mathcal{D}_1 and \mathcal{D}_2 are *equivalent* if there is an equivalence ϕ between \mathcal{F}_1 and \mathcal{F}_2 such that $\Delta_{\phi(J)}^2 = \Delta_J^1$ for all $J \in \mathcal{H}_1$, where $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{F}_1, \{\Delta_J^1\}_{J \in \mathcal{H}_1}, d)$ and $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{F}_2, \{\Delta_J^2\}_{J \in \mathcal{H}_2}, d)$. We also say that ϕ is an *equivalence between \mathcal{D}_1 and \mathcal{D}_2* .

Given a polyhedra system $\mathcal{D} = (\mathcal{F}, \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$, there is a *Newton polyhedra system $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ associated to \mathcal{D}* , defined by

$$\mathcal{N}(\mathcal{D}) = (\mathcal{F}; \{d\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, 1).$$

Conversely, given another positive integer number d' , we can obtain a new polyhedra system \mathcal{D}/d' given by $\mathcal{D}/d' = (\mathcal{F}; \{(1/d')\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, dd')$. In particular, we have $\mathcal{N}(\mathcal{D})/d = \mathcal{D}$.

Let us see some examples of polyhedra systems:

- Given a characteristic polyhedron $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^I$ with denominator d , we define the *local polyhedra system $\mathcal{L}(\Delta, d)$* by

$$\mathcal{L}(\Delta, d) = (\mathcal{L}_I; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{P}(I)}, d), \quad \text{where } \Delta_J = \text{pr}_{IJ}(\Delta).$$

- The *restriction $\mathcal{D}|_{\mathcal{U}}$* of \mathcal{D} to an open set $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ is defined by

$$\mathcal{D}|_{\mathcal{U}} = (\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{U}}, d).$$

- The *reduction $\text{Red}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D})$* of \mathcal{D} to a closed set \mathcal{K} of \mathcal{H} is $\text{Red}_{\mathcal{K}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}|_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}$.
- The *fitting $\tilde{\mathcal{D}}$* of \mathcal{D} is given as follows. For a subset $A \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^I$, we consider the *fitting vector $w_A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^I$* defined by $w_A(j) = \min\{\sigma(j); \sigma \in A\}$ for each $j \in I$. We write $\tilde{A} = A - w_A$ and we define $\tilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{F}; \{\tilde{\Delta}_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$.

Let us consider a polyhedra system $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ and a stratum $T \in \mathcal{H}$. We introduce now a new polyhedra system \mathcal{D}^T , using *Hironaka's projection of \mathcal{D} from T* , that plays an important role in Sect. 7.3.

Let $\mathcal{F}^T = (I^T, \mathcal{H}^T)$ be the support fabric obtained by projection of \mathcal{F} from T . Given $J^* \in \mathcal{H}^T$, let us take the stratum $J = J^* \cup T \in \mathcal{H}$ and let us consider the subset $M_J^T \subset \mathbb{R}^J$ given by $M_J^T = \{\sigma \in \mathbb{R}^J; \sum_{j \in T} \sigma(j) < 1\}$. *Hironaka's projection $\nabla_J^T : M_J^T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{J^*}$* is defined by

$$\nabla_J^T(\sigma) = \frac{1}{1 - \sum_{j \in T} \sigma(j)} \sigma|_{J^*}.$$

for every $\sigma \in M_J^T$. We define $\Delta_{J^*}^T$ by $\Delta_{J^*}^T = \nabla_J^T(\Delta_J \cap M_J^T) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{J^*}$. The reader can verify that

$$\mathcal{D}^T = \left(\mathcal{F}^T; \left\{ \Delta_{J^*}^T \right\}_{J^* \in \mathcal{H}^T}, d!d \right), \tag{1}$$

is a polyhedra system in lower dimension. It is important to remark that the denominator of \mathcal{D}^T is $d!d$ instead of d .

Note that $\Delta_{J^*}^T = \emptyset$ if $\Delta_J = \emptyset$ or $\sum_{j \in T} \sigma(j) \geq 1$ for all $\sigma \in \Delta_J$. Note also that in a polyhedra system either all the polyhedra are the empty set or none of them is empty. From now, we suppose (unless otherwise stated) that all the polyhedra Δ we are working with, are such that $\Delta \neq \emptyset$.

3.2 Singular locus of polyhedra systems

Let $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^J$ be a characteristic polyhedron with $J \neq \emptyset$. The *contact exponent* $\delta(\Delta)$ is defined by

$$\delta(\Delta) = \min \{ |\sigma|; \sigma \in \Delta \}, \quad \text{where } |\sigma| = \sum_{j \in J} \sigma(j).$$

When $J = \emptyset$, there is only one possible polyhedron $\Delta = \{\bullet\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^\emptyset$. By convention, we assume $\delta(\{\bullet\}) = -1$.

Remark 3 If $\Delta = [[A]]$ with $A \subset \mathbb{Z}_{>0}$ (Newton polyhedron), the contact exponent corresponds to the classical idea of multiplicity.

Now, let $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ be a polyhedra system. The *contact exponent* $\delta(\mathcal{D})$ is defined by $\delta(\mathcal{D}) = \max\{\delta(\Delta_J); J \in \mathcal{H}\}$. The *singular locus* $\text{Sing}(\mathcal{D})$ is the subset

$$\text{Sing}(\mathcal{D}) = \{J \in \mathcal{H}; \delta(\Delta_J) \geq 1\} \subset \mathcal{H}.$$

We have $\text{Sing}(\mathcal{D})$ is a closed set, since the contact exponent gives an upper semicontinuous function in \mathcal{H} . We say that \mathcal{D} is *singular* if $\text{Sing}(\mathcal{D}) \neq \emptyset$, otherwise it is *non-singular*.

3.3 Transforms of polyhedra systems under blow-ups

Let us consider the blow-up $\pi_J(\mathcal{F}) = (I' = I \cup \{\infty\}, \mathcal{H}' = \mathcal{H}'_s \cup \mathcal{H}'_\infty)$ of a support fabric $\mathcal{F} = (I, \mathcal{H})$ centered in a non-empty stratum $J \in \mathcal{H}$. Given $J' \in \mathcal{H}'_\infty$ and $K = \pi_J^\#(J')$, we define $\lambda_{J'} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^{J'}$ by

$$\lambda_{J'}(\sigma)(j) = \sigma(j), \quad j \neq \infty; \quad \lambda_{J'}(\sigma)(\infty) = |\sigma|_J = \sum_{j \in J} \sigma(j).$$

Let us denote by $\{e_{I,i}\}_{i \in I}$ the standard basis of \mathbb{R}^I , that is $e_{I,i}(i') = \delta_{i,i'}$ (Kronecker). If $J \subset I$ and $i \in I$ we define $e_{J,i} \in \mathbb{R}^J$ by $e_{J,i} = \text{pr}_{I,J}(e_{I,i})$.

Definition 2 The *total transform* $\Delta_J^0(\mathcal{D})$ of a polyhedra system $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ centered in a stratum $J \in \mathcal{H}$ is the polyhedra system $\Delta_J^0(\mathcal{D}) = (\pi_J(\mathcal{F}); \{\Delta_{J'}^0\}_{J' \in \mathcal{H}'}, d)$, where

$$\Delta_{J'}^0 = \Delta_{J'}, \quad J' \in \mathcal{H}'_s; \quad \Delta_{J'}^0 = [[\lambda_{J'}(\Delta_K)]], \quad J' \in \mathcal{H}'_\infty, \quad K = \pi_J^\#(J').$$

If $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$, the *characteristic transform* $\Lambda_J(\mathcal{D})$ of \mathcal{D} centered in J is defined by the polyhedra system $\Lambda_J(\mathcal{D}) = (\pi_J(\mathcal{F}); \{\Delta'_{J'}\}_{J' \in \mathcal{H}'}, d)$, where $\Delta'_{J'} = \Delta_{J'}^0 - e_{J',\infty}$ for each $J' \in \mathcal{H}'$.

The characteristic transform $\Lambda_J(\mathcal{D})$ is a polyhedra system again, because the center of the blow-up is singular and then $\delta(\Delta_{\{\infty\}}^0) \geq 1$.

Let $\mathcal{N} = (\mathcal{F}; \{N_J\}_{J \in \mathcal{H}}, 1)$ be a Newton polyhedra system and take an integer number $d \geq 1$. Consider the polyhedra system $\mathcal{D} = \mathcal{N}/d$ and a singular stratum $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$. The d -moderated transform $\Theta_J^d(\mathcal{N})$ of \mathcal{N} centered in J is defined by $\Theta_J^d(\mathcal{N}) = \mathcal{N}(\Lambda_J(\mathcal{D}))$. Note that $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$ if and only if $\delta(N_J) \geq d$.

Remark 4 If there is an equivalence ϕ between two polyhedra systems \mathcal{D}_1 and \mathcal{D}_2 , then for all $J \in \text{Sing}(\mathcal{D}_1)$, the characteristic transforms $\Lambda_J(\mathcal{D}_1)$ and $\Lambda_{\phi(J)}(\mathcal{D}_2)$ are also equivalent.

4 Reduction of singularities

4.1 Statements

We say that a Newton polyhedra system $\mathcal{N} = (\mathcal{F}; \{N_J\}_{J \in \mathcal{H}}, 1)$ has *normal crossings* if the polyhedron N_J has a single vertex for each $J \in \mathcal{H}$.

The property of having normal crossings is stable under blow-ups. A first objective of reduction of singularities is to get this property.

Theorem 1 (Combinatorial Reduction to Normal Crossings) *Given a Newton polyhedra system \mathcal{N} , there is a finite sequence of total transforms*

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{N}_k$$

such that \mathcal{N}_k has normal crossings.

We can find proofs of this result in another contexts in [10] and [11]. Anyway, we provide a complete proof next.

Theorem 2 (Combinatorial Reduction of Singularities) *Given a polyhedra system \mathcal{D} , there is a finite sequence of characteristic transforms*

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_k$$

such that $\text{Sing}(\mathcal{D}_k) = \emptyset$. We call such a sequence a reduction of singularities of \mathcal{D} .

Remark 5 Theorem 2 would be false if we had taken the condition $\delta(\Delta_J) > 1$, instead of $\delta(\Delta_J) \geq 1$, for the centers of blow-up. For instance, consider the local polyhedra system $\mathcal{L}(\Delta, 1)$ where $\Delta = [[(1, 1)]] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{\{1, 2\}}$. The only possible center would be $\{1, 2\}$ and the situation is repeated in each closed strata of the characteristic transform.

Corollary 2 *Let \mathcal{N} be a Newton polyhedra system and d a positive integer number. There is a finite sequence of d -moderated transforms*

$$\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{N}_k$$

such that $\delta(\mathcal{N}_k) < d$.

Taking $d = 1$, the reader can see that Corollary 2 implies Theorem 1.

The objective now is to provide a proof of Theorem 2. Although this result follows from general Hironaka’s reduction of singularities, we give a complete combinatorial proof here, emphasizing the ideas of maximal contact developed by Hironaka, Aroca and Vicente in [1] as well as the polyhedra control suggested by Spivakovsky in [20].

4.2 Induction procedure

The proof of Theorem 2 runs essentially by induction on the dimension $\dim(\mathcal{F}_{\mathcal{D}})$ of \mathcal{D} . More precisely, let us consider the following statement.

CRS(n): If $\dim(\mathcal{F}_{\mathcal{D}}) \leq n$, then \mathcal{D} has a reduction of singularities.

The starting step of the induction is given by

Proposition 2 *CRS(1) holds.*

Proof Choose the invariant $I(\mathcal{D})$ given by $I(\mathcal{D}) = \sum_{J \in \mathcal{H}} \delta(\Delta_J)$. We have $I(\mathcal{D}) \geq -1$ and after a single characteristic transform drops exactly a unit. Thus, in a certain point of the process, we can no more perform a transform. We are done, since then the singular locus is empty. \square

We distinguish three types of singular polyhedra systems \mathcal{D} :

1. We say that \mathcal{D} is *Hironaka quasi-ordinary* if each polyhedron over a singular stratum has a single vertex, that is, $\Delta_J = [\{\sigma_J\}]$ for all $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$.
2. We say that \mathcal{D} is *special* if $\delta(\mathcal{D}) = 1$.
3. We say that \mathcal{D} is *general* if $\delta(\mathcal{D}) > 1$.

The study of Hironaka quasi-ordinary systems does not require the induction hypothesis as we see in Sect. 6.

We consider special systems under the induction hypothesis CRS($n - 1$). In this case we reduce the problem to lower dimension projecting over a *maximal contact support fabric*. The existence of maximal contact goes as follows:

1. We solve the local problem by considering directrix stratum properties.
2. We eliminate the possible “global incoherence” by invoking the induction hypothesis.

Details are given in Sect. 7.

Finally, for general systems, we define Spivakovsky’s invariant, that “measures” how far is the system from the quasi-ordinary case. We control the behaviour of this invariant by means of a special system. Details are given in Sect. 8.

5 Examples

Along this section, we take a pair (M, E) , where M is a complex analytic variety and E is a strong normal crossings divisor. We also consider the support fabric $\mathcal{F}_{M,E} = (I, \mathcal{H})$ associated to (M, E) , as in Example 1. Remark that there is a stratification of M with strata S_J given by

$$S_J = E_J \setminus \bigcup_{i \notin J} E_i,$$

where $E_J = \bigcap_{j \in J} E_j \neq \emptyset$, for each $J \in \mathcal{H}$.

The followings are examples of polyhedra systems that motivate our definitions.

5.1 Hypersurfaces

Let $H \subset M$ be a closed hypersurface of (M, \mathcal{O}_M) given by an invertible coherent ideal sheaf $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_M$ and let us suppose that $E_i \not\subset H$ for all $i \in I$. We say that H is *combinatorially regular for (M, E)* if we have the property $E_J \not\subset H$, for all $J \in \mathcal{H}$.

We can attach a polyhedra system $\mathcal{N}_{M,E;H}$ to H as follows. Given $J \in \mathcal{H}$, we consider a point $p \in S_J$ and a generator F of \mathcal{I}_p . Let us write F in local adapted coordinates at p as

$$F = \sum a_\sigma(\underline{y}) \underline{x}^\sigma; \quad \text{with } \sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J.$$

where the coefficients $a_\sigma(\underline{y})$ are germs of functions in p defined in an open set of S_J . We define N_J by

$$N_J = \left[\left[\{ \sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J; a_\sigma(\underline{y}) \neq 0 \} \right] \right].$$

The polyhedron N_J is independent of p , the generator F and the chosen local adapted coordinates. The independence of the local adapted coordinates and of the generator is straightforward. Once fixed a local coordinate system, we can move to points p' close to p in the same stratum and we obtain the same polyhedron in the translated coordinates. Finally, thanks to the connectedness of the stratum, we can join two points by a compact path and repeat finitely many times the above procedure.

This construction is compatible with the projections $p_{J_2 J_1} : \mathbb{R}^{J_2} \rightarrow \mathbb{R}^{J_1}$, then we obtain the Newton polyhedra system $\mathcal{N}_{M,E;H}$.

The following statements are equivalent:

1. The hypersurface H is combinatorially regular for (M, E) .
2. The Newton polyhedra system is non-singular, that is $\delta(N_J) = 0$ for all $J \in \mathcal{H}$.

Let $v_J(H)$ be the generic multiplicity of H along E_J . Note that $v_J(H) = \delta(N_J)$. We say that H is *combinatorially equimultiple along E_J* if $v_J(H) = v_K(H)$ for every $K \in \mathcal{H}$ such that $E_K \subset E_J$. Now, let us consider $J \in \mathcal{H}$ such that $m = \delta(N_J)$ is maximal. In particular, we have H is combinatorially equimultiple along E_J . We can perform the usual blow-up $\pi : (M', E') \rightarrow (M, E)$ centered in E_J . The Newton polyhedra system attached to the strict transform H' of H is given by the m -moderated transform of $\mathcal{N}_{M,E;H}$. Then, applying repeatedly Corollary 2 we obtain a finite sequence of blow-ups centered in combinatorially equimultiple strata.

$$(M, E; H) = (M^0, E^0; H^0) \leftarrow (M^1, E^1; H^1) \leftarrow \dots \leftarrow (M^n, E^n; H^n) = (M', E'; H')$$

so that H' is combinatorially regular for (M', E') .

The polyhedra system of this example is particularly useful when we consider Newton non-degenerate functions as in [14,17].

5.2 Codimension one singular foliations

Let us consider now a singular foliation \mathcal{L} of codimension one over M . We know that \mathcal{L} is given by an integrable and invertible coherent \mathcal{O}_M -submodule of $\Omega_M^1[E]$, where $\Omega_M^1[E]$ denotes the sheaf of meromorphic one-forms having at most simple poles along E (see [3,4]). Given a point $p \in S_J \subset M$, the stalk \mathcal{L}_p is generated by a meromorphic differential one-form $\omega \in \Omega_M^1[E]$, satisfying the Frobenius integrability condition $\omega \wedge d\omega = 0$. Let us write ω in local adapted coordinates at p as

$$\omega = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J} \omega_\sigma \underline{x}^\sigma, \quad \text{with } \omega_\sigma = \sum_{i \in J} a_{\sigma,i}(\underline{y}) \frac{dx_i}{x_i} + \sum b_{\sigma,s}(\underline{y}) dy_s$$

where the coefficients $a_\sigma(\underline{y}), b_\sigma(\underline{y})$ are germs of functions at p , without common factor, defined in an open set of S_J . We have that E_J is contained in the adapted singular locus $\text{Sing}(\mathcal{L}, E)$ of \mathcal{L} when $\omega_0 \equiv 0$. On the other hand, we say that \mathcal{L} is *combinatorially regular for* (M, E) if $E_J \not\subset \text{Sing}(\mathcal{L}, E)$ for every $J \in \mathcal{H}$.

We attach a polyhedra system $\mathcal{N}_{M,E;\mathcal{L}}$ to \mathcal{L} as follows. Given $J \in \mathcal{H}$, take a point $p \in S_J$ and a generator ω of \mathcal{L}_p as before. We define N_J by

$$N_J = \left[\left[\left\{ \sigma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^J; \omega_\sigma \neq 0 \right\} \right] \right].$$

The polyhedra N_J only depend on \mathcal{L} and S_J , moreover, they are compatible with the projections $p_{J_2 J_1}$. We obtain in this way the Newton polyhedra system $\mathcal{N}_{M,E;\mathcal{L}}$.

The following statements are equivalent:

1. The foliation \mathcal{L} is combinatorially regular for (M, E) .
2. The Newton polyhedra system is non-singular, that is $\delta(N_J) = 0$ for all $J \in \mathcal{H}$.

Let $v_J(\mathcal{L})$ be the adapted order of \mathcal{L} along E_J (see [3]). Note that

$$\begin{aligned} v_J(\mathcal{L}) &= \min \left\{ v_{\underline{x}} \left(\sum x^\sigma a_{\sigma,i}(\underline{y}) \right), v_{\underline{x}} \left(\sum x^\sigma b_{\sigma,s}(\underline{y}) \right) \right\}_{i,s} \\ &= \min \{ |\sigma|; \sigma \in N_J \} = \delta(N_J). \end{aligned}$$

As before, we say that \mathcal{L} is *combinatorially equimultiple along* E_J if $v_J(\mathcal{L}) = v_K(\mathcal{L})$ for every $K \in \mathcal{H}$ such that $E_K \subset E_J$. Considering $J \in \mathcal{H}$ such that $m = \delta(N_J)$ is maximal, we perform the usual blow-up $\pi : (M', E') \rightarrow (M, E)$ centered in E_J and the Newton polyhedra system attached to the strict transform \mathcal{L}' of \mathcal{L} is given by the m -moderated transform $\Theta^m(\mathcal{N}_{M,E;\mathcal{L}})$. As in the preceding example, we obtain a finite sequence of blow-ups centered in combinatorially equimultiple strata $(M', E'; \mathcal{L}') \rightarrow (M, E; \mathcal{L})$ such that \mathcal{L}' is combinatorially regular for (M', E') .

Remark 6 Polyhedra systems are a bridge to show that codimension one singular holomorphic foliations with combinatorial desingularization are characterized as the ones satisfying *Newton non-degeneracy* conditions. These conditions are similar to the ones of Kouchnirenko and Oka, in the case of functions and complete intersections. In addition, any desingularization of the polyhedra system associated to a *Newton non-degenerate* foliation gives rise to a desingularization of the foliation (in the usual geometrical sense).

We can obtain an example similar to the preceding one in the case of one-dimensional singular foliations (see [2,15,18]) that are locally generated by vector fields of the form

$$\chi = \sum \chi_\sigma \underline{x}^\sigma, \quad \text{with } \chi_\sigma = \sum_{i \in J} a_{\sigma,i}(\underline{y}) x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum b_{\sigma,s}(\underline{y}) \frac{\partial}{\partial y_s}.$$

5.3 Monomial ideals

Let \mathcal{I} be a monomial ideal of \mathcal{O}_M adapted to E . Following [11], we define \mathcal{I} to be the data of a finite collection of effective divisors $\{D_s\}_{s \in S}$ of the form

$$D_s = \sum_{i \in I} n_i^s E_i.$$

We attach a Newton polyhedra system $\mathcal{N}_{M,E;\mathcal{I}}$ to \mathcal{I} as follows. Let $\sigma^s : I \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ be the map given by $\sigma^s(i) = n_i^s$. For each $J \in \mathcal{H}$, we define N_J by

$$N_J = [\{\sigma^s|_J; s \in S\}].$$

Note that $\mathcal{N}_{M,E;\mathcal{I}}$ is non-singular if and only if \mathcal{I} is a principal ideal. Given $J \in \mathcal{H}$, we can perform the usual blow-up $\pi : (M', E') \rightarrow (M, E)$ centered in E_J . The Newton polyhedra system attached to the total transform \mathcal{I}' of \mathcal{I} is given by the total transform of $\mathcal{N}_{M,E;\mathcal{I}}$. Now, we apply Theorem 1 and, as in [11], we obtain a finite sequence of blow-ups $(M', E'; \mathcal{I}') \rightarrow (M, E; \mathcal{I})$ such that \mathcal{I}' is a principal ideal.

6 Hironaka quasi-ordinary polyhedra systems

In this section we prove Theorem 2 for Hironaka quasi-ordinary polyhedra systems.

Given a Hironaka quasi-ordinary system $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ and a singular stratum J , the transform $\Lambda_J(\mathcal{D}) = (\pi_J(\mathcal{F}); \{\Delta_{J'}\}_{J' \in \mathcal{H}'}, d)$ is also Hironaka quasi-ordinary. Indeed, for every $J' \in \mathcal{H}'_\infty$ and $K = \pi_J^\#(J')$, we have $\Delta_{J'} = [\{\sigma_{J'}\}]$, with $\sigma_{J'} = \lambda_{J'}(\sigma_K) - e_{J',\infty}$.

Lemma 1 *The set \mathcal{A} of decreasing sequences of natural numbers is well-ordered for the lexicographical order.*

Proof Given a decreasing sequence $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \dots \geq \varphi_k \geq \dots$ in \mathcal{A} , we take $k_0 = 0$ and $k_i = \min\{j \geq k_{i-1}; \varphi_{j'}(i) = \varphi_j(i), j' \geq j\} < \infty$, for each $i \geq 1$. Let us consider the decreasing sequence $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ given by $\varphi(n) = \varphi_{k_n}(n)$. There is a positive number $l \in \mathbb{N}$ such that $\varphi(n) = \varphi(l)$, for all $n \geq l$. As a consequence we have $\varphi_j = \varphi_{k_l}$, for all $j \geq k_l$. \square

Proposition 3 *Every Hironaka quasi-ordinary polyhedra system has reduction of singularities.*

Proof Choose a bijective map $s_{\mathcal{D}} : \{1, 2, \dots, \#\mathcal{H}\} \rightarrow \mathcal{H}$ such that

$$\delta(\Delta_{s_{\mathcal{D}}(j)}) \geq \delta(\Delta_{s_{\mathcal{D}}(j+1)}); j \geq 1.$$

Take the decreasing sequence $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ given by $\varphi(j) = d\delta(\Delta_{s_{\mathcal{D}}(j)})$ if $j \leq \#\mathcal{H}$ and $\varphi(j) = 0$ if $j > \#\mathcal{H}$. We choose φ as lexicographical invariant. Let us see that after an appropriate single blow-up the invariant φ drops and then we are done by Lemma 1. We select as center a singular stratum J with the minimum number of elements. Given $J' \in \mathcal{H}'_\infty$ and $K = \pi_J^\#(J')$, we have

$$\delta(\Delta_{J'}) = |\sigma_{J'}| = |\lambda_{J'}(\sigma_K)| - 1 = |\sigma_K| + |\sigma_{A_{J'}}| - 1 < \delta(\Delta_K)$$

and then we obtain $\varphi' < \varphi$. \square

7 Special polyhedra systems

In this section we prove Theorem 2 for the case of special polyhedra systems. More precisely we prove $\text{CRS}(n)$ for special polyhedra systems under the induction hypothesis $\text{CRS}(n - 1)$.

7.1 Stability of special systems

A special polyhedra system is either non-singular or special under blow-up. Precisely, we have

Proposition 4 *Let \mathcal{D} be a special polyhedra system. Given a singular stratum J , we have $\delta(\Lambda_J(\mathcal{D})) \leq 1$.*

Proof Let us denote $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ and $\Lambda_J(\mathcal{D}) = (\pi_J(\mathcal{F}); \{\Delta'_{J'}\}_{J' \in \mathcal{H}'}, d)$. Take $J' \in \mathcal{H}'_\infty$ and $K = \pi_J^\#(J')$. We have to see that $\delta(\Delta'_{J'}) \leq \delta(\Delta_K) = 1$. Given $\sigma \in \Delta_K$ with $|\sigma| = 1$, we have $\delta(\Delta'_{J'}) \leq |\lambda_{J'}(\sigma) - e_{J', \infty}| = |\sigma| - 1 + |\sigma_{|A_{J'}}| \leq 1$. \square

Remark 7 Let us consider a Newton polyhedra system \mathcal{N} and an integer $d \geq 1$. A stratum $J \in \mathcal{H}$ is *d-equimultiple* if the polyhedra system $\text{Red}_{\overline{\{J\}} \cap \mathcal{H}}(\mathcal{N}/d)$ is special. Proposition 4 means in this context that the multiplicity is stable under *d*-moderated transforms when we perform blow-ups centered in *d*-equimultiple strata.

7.2 Directrix strata of polyhedra

Given a characteristic polyhedron $\Delta \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^I$, with $\delta(\Delta) = 1$, the *directrix stratum* $T(\Delta)$ of Δ , is defined by

$$T(\Delta) = \{j \in I; \exists \sigma \in \Delta, |\sigma| = 1, \sigma(j) \neq 0\} \subset I.$$

See [20]. In this section we present stability results concerning the behaviour of the directrix stratum of a polyhedron in a “horizontal” and a “vertical” way.

Let us consider a special polyhedra system $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$.

Proposition 5 *We have $T(\Delta_{J_2}) \subset T(\Delta_{J_1}) \subset J_1$, for every $J_1, J_2 \in \text{Sing}(\mathcal{D})$ with $J_1 \subset J_2$.*

Proof Given $\sigma \in \Delta_{J_2}$ such that $|\sigma| = 1$, the restriction $\sigma_{|J_1} \in \Delta_{J_1}$ also satisfies $|\sigma_{|J_1}| = 1$ because $\delta(\Delta_{J_1}) = 1$. Then $\sigma(j) = 0$ for all $j \in J_2 \setminus J_1$. Thus, we have both $T(\Delta_{J_2}) \subset J_1$ and $T(\Delta_{J_2}) \subset T(\Delta_{J_1})$. \square

Remark 8 In the situation of Proposition 5, we can have $T(\Delta_{J_2}) \neq T(\Delta_{J_1})$. For instance, let us consider $\Delta = [(0, 0, 1), (1, 1, 0)] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^{\{1,2,3\}}$. In this case, we obtain

$$\{3\} = T(\Delta) \neq T(\Delta_{\{2,3\}}) = \{2, 3\}.$$

Consider a singular stratum $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$ and let us perform the characteristic transform $\mathcal{D}' = \Lambda_J(\mathcal{D}) = (\pi_J(\mathcal{F}); \{\Delta'_{J'}\}_{J' \in \mathcal{H}'}, d)$ of \mathcal{D} centered in J . By Proposition 4, we know that \mathcal{D}' is either non-singular or a special system.

Proposition 6 *Consider a singular stratum $J' = (K \setminus J) \cup A_{J'} \cup \{\infty\} \in \mathcal{H}'_\infty$ where $K = \pi_J^\#(J')$. We have $T(\Delta_K) \subset A_{J'} \subset J$. Moreover, $T(\Delta_K) \subset T(\Delta'_{J'}) \subset J'$.*

Proof Given $\sigma \in \Delta_K$ with $|\sigma| = 1$, we have $\delta(\Delta'_{J'}) \leq |\lambda_{J'}(\sigma) - e_{J', \infty}| = |\sigma_{|A_{J'}}| \leq 1$. As a consequence $|\sigma_{|A_{J'}}| = 1$ or equivalently $T(\Delta_K) \subset A_{J'}$. Now, given $j \in T(\Delta_K)$ we have $j \in A_{J'}$. As $|\sigma'| = 1$ and $\sigma'(j) = \sigma(j) \neq 0$, then $j \in T(\Delta'_{J'})$. \square

Remark 9 In the problem of reduction of singularities in zero characteristic, there is a feature that is similar to the property $T(\Delta_K) \subset A_{J'}$. It is a classical property that Hironaka’s strict tangent space, in zero characteristic, points out the possible new bad points after blow-ups.

Corollary 3 *Given $J' \in \mathcal{H}'_\infty$ and $K = \pi_J^\#(J')$, if $T(\Delta_K) = J$ then $J' \notin \text{Sing}(\mathcal{D}')$.*

Proof If $J' \in \text{Sing}(\mathcal{D}')$ by Proposition 6, we have $T(\Delta_K) \subset A_{J'}$, but $A_{J'} \subsetneq J$. \square

7.3 Reduction of singularities via maximal contact

In this section we obtain reduction of singularities for special polyhedra systems under the assumption that there is maximal contact with a given stratum.

Let us consider a special polyhedra system $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ and a stratum $T \in \mathcal{H}$. We say that T has *maximal contact with \mathcal{D}* if $T \subset T(\Delta_J)$, for all $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$. We say also that \mathcal{F}^T is a *maximal contact support fabric of \mathcal{D}* .

Remark 10 Let $T \in \mathcal{H}$ be a stratum that has maximal contact with \mathcal{D} . Recall that Hironaka’s projection of \mathcal{D} over T is given by $\mathcal{D}^T = (\mathcal{F}^T; \{\Delta_{J^*}^T\}_{J^* \in \mathcal{H}^T}, d|_d)$. Since we are assuming that the polyhedra of \mathcal{D} are non-empty, we have $\Delta_{J^*}^T = \emptyset$ for all $J \in \mathcal{H}^T$ if and only if $T \in \text{Sing}(\mathcal{D})$. Note that in this case $\Lambda_T(\mathcal{D})$ is non-singular as a consequence of Corollary 3.

Remark 11 For every local polyhedra system $\mathcal{D} = \mathcal{L}(\Delta, d)$, each non-empty stratum $T \subset T(\Delta) = T(\Delta_I)$ has maximal contact with \mathcal{D} . That happens because of the horizontal stability of the directrix stratum stated in Proposition 5. Indeed, for every singular stratum $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$, we have $J \subset I$ and hence $T(\Delta_I) \subset T(\Delta_J)$.

Lemma 2 *Let us consider the transform $\Lambda_J(\mathcal{D})$ where $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$. If T has maximal contact with \mathcal{D} , then T also has maximal contact with $\Lambda_J(\mathcal{D})$.*

Proof Recall that $\pi_J(\mathcal{F}) = (I', \mathcal{H}' = \mathcal{H}'_s \cup \mathcal{H}'_\infty)$. Note that $T \subset J$ with $T \neq J$ and then $T \in \mathcal{H}'_s$. The maximal contact of T with $\Lambda_J(\mathcal{D})$ is assured by the property of vertical stability for the directrix stratum given in Proposition 6. □

Proposition 7 *Let $T \notin \text{Sing}(\mathcal{D})$ be a stratum that has maximal contact with \mathcal{D} and let us consider Hironaka’s projection \mathcal{D}^T of \mathcal{D} from T . If there is a reduction of singularities for \mathcal{D}^T , then \mathcal{D} also has a reduction of singularities.*

Recall that $\mathcal{D}^T = (\mathcal{F}^T; \{\Delta_{J^*}^T\}_{J^* \in \mathcal{H}^T}, d|_d)$ has been introduced in Eq. (1). We prove of the proposition in three steps.

Step 1: There is a one-to-one correspondence between $\text{Sing}(\mathcal{D})$ and $\text{Sing}(\mathcal{D}^T)$. Let us denote by \mathcal{H}_T the set $\mathcal{H}_T = \{J \in \mathcal{H}; T \subset J\}$. Note that \mathcal{H}_T is an open set of \mathcal{H} . In fact, is the smallest one containing $\overline{\{T\}} \cap \mathcal{H}$. There is a bijection $\Psi : \mathcal{H}_T \rightarrow \mathcal{H}^T$ given by $\Psi(J) = J \setminus T$. Note that $\text{Sing}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}_T$. We claim that $\Psi(\text{Sing}(\mathcal{D})) = \text{Sing}(\mathcal{D}^T)$. Given $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$, we have to prove that $|\sigma^*| \geq 1$ for all $\sigma^* \in \Delta_{J \setminus T}^T$. Given such a σ^* , there is $\sigma \in \Delta_J \cap M_J^T$, satisfying

$$\sigma^* = \frac{\sigma|_{J \setminus T}}{1 - |\sigma|_T}.$$

Note that $|\sigma|_T < 1$, since $\sigma \in M_J^T$. Recalling that $T \subset J$, we have

$$|\sigma^*| = \frac{|\sigma|_{J \setminus T} + |\sigma|_T - |\sigma|_T}{1 - |\sigma|_T} = \frac{|\sigma| - |\sigma|_T}{1 - |\sigma|_T}. \tag{2}$$

Then $|\sigma^*| \geq 1$ since $|\sigma| \geq 1$. As a consequence $J \setminus T \in \text{Sing}(\mathcal{D}^T)$. Conversely, if we take $J^* \in \text{Sing}(\mathcal{D}^T)$, we have to prove that $|\sigma| \geq 1$, for all $\sigma \in \Delta_J$, where $J = J^* \cup T$. Given such a σ , we have two possibilities. If $|\sigma|_T \geq 1$ we are done. Otherwise $|\sigma|_T < 1$ and then $\sigma \in M_J^T$. In this case, there is $\sigma^* \in \Delta_{J^*}^T$ given by $\sigma^* = \sigma|_{J \setminus T} / (1 - |\sigma|_T)$. By Eq. (2), we have $(1 - |\sigma|_T)|\sigma^*| = |\sigma| - |\sigma|_T$. Moreover $1 - |\sigma|_T \leq |\sigma| - |\sigma|_T$ since $|\sigma^*| \geq 1$. As a consequence $|\sigma| \geq 1$ and then $J \in \text{Sing}(\mathcal{D})$.

Step 2: Commutativity of Hironaka's projections with the blow-up transforms. We are going to show that

$$(\Lambda_J(\mathcal{D}))^T = \Lambda_{J \setminus T}(\mathcal{D}^T).$$

We verify this commutativity first for the support fabrics and second for each polyhedron.

(a) *Commutativity for the support fabrics.* Let us see that $\pi_J(\mathcal{F})^T = \pi_{J \setminus T}(\mathcal{F}^T)$. Denote

$$\pi_J(\mathcal{F})^T = \left((I')^T, (\mathcal{H}')^T \right), \quad \pi_{J \setminus T}(\mathcal{F}^T) = \left((I^T)', (\mathcal{H}^T)' \right).$$

The index sets are equal, since $(I')^T = (I \cup \{\infty\}) \setminus T = (I \setminus T) \cup \{\infty\} = (I^T)'$. Let us see that $(\mathcal{H}'_s)^T = (\mathcal{H}^T)'_s$. Note that $K \supset J \Leftrightarrow K \setminus T \supset J \setminus T$ for every $K \in \mathcal{H}$, because $T \subset J$. Then, for each J^* , we have

$$J^* \in (\mathcal{H}'_s)^T \Leftrightarrow J^* \cup T \in \mathcal{H}'_s, \quad J^* \cap T = \emptyset \Leftrightarrow J^* \in (\mathcal{H}^T)'_s.$$

Take $K \in \mathcal{H}$ with $K \supset J$. Let us see that $(\mathcal{H}'^K_\infty)^T = (\mathcal{H}^T)^{K \setminus T}$. For each J^* , we have

$$\begin{aligned} J^* \in (\mathcal{H}'^K_\infty)^T &\Rightarrow J^* \cup T \in \mathcal{H}'^K_\infty \Rightarrow T \subset A_{J^*} \subsetneq J \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{J^* \setminus T} \subsetneq J \setminus T \Rightarrow J^* \in (\mathcal{H}^T)^{K \setminus T}. \\ J^* \in (\mathcal{H}^T)^{K \setminus T} &\Rightarrow A_{J^*} \subsetneq J \setminus T \Rightarrow A = A_{J^*} \cup T \subsetneq J \Rightarrow \\ &\Rightarrow J^* \cup T \in \mathcal{H}'^K_\infty \Rightarrow J^* \in (\mathcal{H}'^K_\infty)^T. \end{aligned}$$

(b) *Commutativity for the polyhedra.* It is enough to prove that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} M_K^T \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^K & \xrightarrow{f_{J'}} & \mathbb{R}_{\geq 0}^{J'} \cap M_{J'}^T \\ \nabla_K^T \downarrow & & \downarrow \nabla_{J'}^T \\ \mathbb{R}^{K \setminus T} & \xrightarrow{f_{J' \setminus T}} & \mathbb{R}_{\geq 0}^{J' \setminus T} \end{array}$$

where $J' \in \mathcal{H}'_\infty$, $K = \pi_J^\#(J')$, $T \subset J'$, $T \subset K$ and $f_{J'}(\sigma) = \lambda_{J'}(\sigma) - e_{J', \infty}$. Note that $f_{J'}$ is well-defined because $f_{J'}(\sigma)|_T = \sigma|_T$ for all $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}^K$.

Given $\sigma \in M_K^T \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^K$, we denote

$$\sigma' = f_{J'}(\sigma), \quad \sigma^T = \nabla_K^T(\sigma), \quad (\sigma^T)' = f_{J' \setminus T}(\sigma^T), \quad (\sigma')^T = \nabla_{J'}^T(\sigma').$$

We conclude that $(\sigma^T)' = (\sigma')^T$ from the following equalities:

$$\begin{aligned} (\sigma')^T_{|J' \setminus (T \cup \{\infty\})} &= \frac{\sigma_{|J' \setminus (T \cup \{\infty\})}}{1 - |\sigma|_T} = (\sigma^T)'_{|J' \setminus (T \cup \{\infty\})}; \\ (\sigma')^T(\infty) &= \frac{|\sigma|_J - 1}{1 - |\sigma|_T} = \frac{|\sigma|_{J \setminus T} + |\sigma|_T - 1}{1 - |\sigma|_T} = \frac{|\sigma|_{J \setminus T}}{1 - |\sigma|_T} - 1 = (\sigma^T)'(\infty). \end{aligned}$$

Hence, \mathcal{D} has reduction of singularities. This ends the proof of Proposition 7.

7.4 Connected components decomposition of desingularization

The problem of reduction of singularities can be solved by considering one by one each connected component of the singular locus.

Proposition 8 *Let \mathcal{D} be a polyhedra system and $\text{Sing}(\mathcal{D}) = \bigcup \mathcal{C}_\alpha$ the decomposition in connected components of the singular locus. Assume that there is reduction of singularities for each $\text{Red}_{\mathcal{C}_\alpha}(\mathcal{D})$. Then there is reduction of singularities for \mathcal{D} .*

In order to simplify notation, we denote $\mathcal{D}_\alpha = \text{Red}_{\mathcal{C}_\alpha}(\mathcal{D})$ and \mathcal{F}_α the support fabric of \mathcal{D}_α . Let us consider a connected component \mathcal{C}_α . By hypothesis, \mathcal{D}_α has a reduction of singularities

$$\mathcal{D}_\alpha \rightarrow \mathcal{D}_\alpha^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_\alpha^k.$$

This sequence induces a sequence of characteristic transforms

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}^k,$$

obtained performing blow-ups in the same centers. Let \mathcal{F}^k be the support fabric of \mathcal{D}^k . The polyhedra system \mathcal{D}^k satisfies the following properties:

1. For each $\beta \neq \alpha$, there is an equivalence between \mathcal{D}_β and $\text{Red}_{\mathcal{C}_\beta}(\mathcal{D}^k)$ given by $\text{Id}_{\mathcal{I}}$, where $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}_\beta} = \mathcal{I}_{\mathcal{F}_\beta^k}$, with $\mathcal{F}_\beta^k = \text{Red}_{\mathcal{C}_\beta}(\mathcal{F}^k)$.
2. The decomposition of the singular locus $\text{Sing}(\mathcal{D}^k)$ in connected components is given by $\text{Sing}(\mathcal{D}^k) = \bigcup_{\beta \neq \alpha} \mathcal{C}_\beta$.

Proof of Proposition 8 is concluded applying the same argument finitely many times.

7.5 Existence of maximal contact

Definition 3 Let \mathcal{D} be a special polyhedra system and let $\text{Sing}(\mathcal{D}) = \bigcup \mathcal{C}_\alpha$ be the decomposition of the singular locus in connected components. We say that \mathcal{D} is *consistent* if for each connected component \mathcal{C}_α , there is a stratum T_α that has maximal contact with $\text{Red}_{\mathcal{C}_\alpha}(\mathcal{D})$. By convention, non-singular polyhedra systems are consistent.

Proposition 9 *Under the induction hypothesis $\text{CRS}(n - 1)$, every n -dimensional consistent polyhedra system has reduction of singularities.*

Proof Let \mathcal{D} be a n -dimensional consistent polyhedra system. Let us consider the decomposition of the singular locus in connected components $\text{Sing}(\mathcal{D}) = \bigcup \mathcal{C}_\alpha$. In order to simplify notation, we write $\mathcal{D}_\alpha = \text{Red}_{\mathcal{C}_\alpha}(\mathcal{D})$. For each \mathcal{C}_α , we have a stratum T_α that has maximal contact with \mathcal{D}_α . If $T_\alpha \in \text{Sing}(\mathcal{D})$, by Remark 10, \mathcal{D}_α has reduction of singularities. Otherwise, since Hironaka’s projection $\mathcal{D}_\alpha^{T_\alpha}$ has dimension lower than n , there is reduction of singularities for $\mathcal{D}_\alpha^{T_\alpha}$ and by Proposition 7 we obtain reduction of singularities for \mathcal{D}_α . By Proposition 8 we conclude the proof. \square

Remark 12 There exist non-consistent polyhedra systems. For instance, consider the support fabric $\mathcal{F} = (I, \mathcal{H})$ with $I = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\mathcal{H} = P(I) \setminus \{\{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, I\}.$$

Take over it the polyhedra system $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$, given by

$$\Delta_{\{1,2,3\}} = [[(0, 0, 1), (1/2, 1, 0)]], \Delta_{\{2,3,4\}} = [[(1, 0, 0), (0, 1, 1/2)]]$$

and all their projections. We have $\text{Sing}(\mathcal{D}) = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$ is connected. We have that $T(\Delta_{\{1,2,3\}}) = \{3\}$ and $T(\Delta_{\{2,3,4\}}) = \{2\}$, then there is no stratum T with maximal contact.

The following statement says that every non-consistent special system of dimension n can be transformed in a finite number of steps in a consistent one. More precisely

Proposition 10 *Under the induction hypothesis $\text{CRS}(n - 1)$, for every n -dimensional special polyhedra system \mathcal{D} , there is a finite sequence of characteristic transforms $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ such that \mathcal{D}' is consistent.*

Proof The main idea in this proof is to reduce the problem to the case of polyhedra systems obtained by blow-up of local systems. The existence of maximal contact in those systems is assured by Remark 11 and by the stability results in Lemma 2.

Let us consider the set \mathcal{K} of closed strata in \mathcal{H} and the open set $\mathcal{U} = \mathcal{H} \setminus \mathcal{K}$. Recall that \mathcal{K} is a finite, totally disconnected closed set. We have $\dim(\mathcal{D}|_{\mathcal{U}}) < n$, since the dimension is reached only at closed points. Then $\mathcal{D}|_{\mathcal{U}}$ has a reduction of singularities

$$\mathcal{D}|_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{D}^1|_{\mathcal{U}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}^k|_{\mathcal{U}}.$$

This sequence gives rise to a sequence of characteristic transforms

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}^k \tag{3}$$

obtained performing blow-ups in the same centers. Let us prove that \mathcal{D}^k is consistent.

Write $\mathcal{D}^k|_{\mathcal{U}} = (\mathcal{F}^k|_{\mathcal{U}}, \{\Delta_{J'}^k\}_{J' \in \mathcal{H}^k|_{\mathcal{U}}}, d)$ and $\mathcal{D}^k = (\mathcal{F}^k, \{\Delta_{J'}^k\}_{J' \in \mathcal{H}^k}, d)$. By Corollary 1, we know that $\mathcal{F}^k|_{\mathcal{U}} = \mathcal{F}^k|_{\mathcal{U}_k}$ where $\mathcal{U}_k = (\pi_k^\#)^{-1}(\mathcal{U})$ and $\pi_k^\# : \mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{H}$ is given by the sequence of Eq. (3). We have $\text{Sing}(\mathcal{D}^k) \cap \mathcal{U}_k = \emptyset$ since $\mathcal{D}^k|_{\mathcal{U}}$ is non-singular. Moreover, we have $\mathcal{H}^k = \mathcal{U}_k \cup (\pi_k^\#)^{-1}(\mathcal{K})$. As a consequence, the singular locus $\text{Sing}(\mathcal{D}^k)$ is contained in $(\pi_k^\#)^{-1}(\mathcal{K})$, that we write as

$$(\pi_k^\#)^{-1}(\mathcal{K}) = \bigcup_{J \in \mathcal{K}} \mathcal{K}_J, \quad \text{where } \mathcal{K}_J = (\pi_k^\#)^{-1}(J).$$

Since \mathcal{K} is totally disconnected, we have $\mathcal{K}_{J_1} \cap \mathcal{K}_{J_2} = \emptyset$ for every $J_1, J_2 \in \mathcal{K}$ with $J_1 \neq J_2$. We conclude that, given a connected component \mathcal{C} of $\text{Sing}(\mathcal{D}^k)$, there is a unique stratum $J \in \mathcal{K}$ such that $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}_J$. On the other hand, we have $T(\Delta_J) \subset T(\Delta_{J'})$ for every $J' \in \mathcal{C}$, because of the vertical stability property of the directrix stratum stated in Proposition 6. Then the non-empty stratum $T(\Delta_J)$ has maximal contact with $\text{Red}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}^k)$. \square

Corollary 4 *Under the induction hypothesis $\text{CRS}(n - 1)$, there is a reduction of singularities for every n -dimensional special polyhedra system.*

8 General polyhedra systems

In this section we consider the case of n -dimensional general polyhedra systems. In order to prove it, we assume the hypothesis

$\text{CRS}^{\text{SP}}(n)$: n -dimensional special polyhedra systems have reduction of singularities.

Note that $\text{CRS}(n - 1)$ implies $\text{CRS}^{\text{SP}}(n)$. The main idea is to transform a given general polyhedra system into a Hironaka quasi-ordinary one, using the hypothesis $\text{CRS}^{\text{SP}}(n)$ and many of the ideas in Spivakovsky's work [20]. Then we are done in view of Proposition 3.

8.1 Spivakovsky's invariant

Let $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ be a polyhedra system. We recall that the fitting of \mathcal{D} is given by $\widetilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{F}; \{\widetilde{\Delta}_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$, where $\widetilde{\Delta}_J = \Delta_J - w_{\Delta_J}$. We define *Spivakovsky's invariant* $\text{Spi}_{\mathcal{D}}$ by

$$\text{Spi}_{\mathcal{D}} = \max \{ \delta(\widetilde{\Delta}_J); J \in \text{Sing}(\mathcal{D}) \}.$$

Note that $\text{Spi}_{\mathcal{D}} = 0$ if and only if \mathcal{D} is a Hironaka quasi-ordinary polyhedra system.

We define the set $S(\mathcal{D})$ by $S(\mathcal{D}) = \{ J \in \text{Sing}(\mathcal{D}); \delta(\widetilde{\Delta}_J) = \text{Spi}_{\mathcal{D}} \}$.

Lemma 3 *For every $J \in S(\mathcal{D})$, we have $\text{Spi}_{\Lambda_J(\mathcal{D})} \leq \text{Spi}_{\mathcal{D}}$.*

Proof Let us denote $\Lambda_J(\mathcal{D}) = (\mathcal{F}'; \{\Delta'_{J'}\}_{J' \in \mathcal{H}'}, d)$ and $\lambda = \text{Spi}_{\mathcal{D}}$. We write for simplicity w_K instead of w_{Δ_K} . We need to prove that

$$\delta(\widetilde{\Delta'_{J'}}) \leq \delta(\widetilde{\Delta_K}); \quad J' \in \mathcal{H}', K = \pi_J^\#(J').$$

Note that $\delta(\widetilde{\Delta_K}) = \delta(\Delta_K) - |w_K|$. If $J' \in \mathcal{H}'_s$ we are done. If $J' \in \mathcal{H}'_\infty$, then we have $w_{J'}(j) = w_K(j)$ if $j \neq \infty$ and $w_{J'}(\infty) = \delta(\Delta_J) - 1$. Moreover, $K \in S(\mathcal{D})$, since $K \supset J$. Take $\sigma \in \Delta_K$ such that $|\sigma - w_K| = \delta(\widetilde{\Delta_K})$. Then

$$\begin{aligned} \delta(\widetilde{\Delta'_{J'}}) &\leq |\lambda_{J'}(\sigma) - e_{J'\infty} - w_{J'}| = |\sigma| + |\sigma_{|A_{J'}}| - 1 - (|w_{|J' \setminus \{\infty\}}|) + (\delta(\Delta_J) - 1) \\ &= \delta(\widetilde{\Delta_K}) + |w_K| + |\sigma_{|A_{J'}}| - |w_{(K \setminus J) \cup A_{J'}}| - \delta(\widetilde{\Delta_J}) - |w_{J'}| = \lambda + |\sigma_{|A_{J'}}| - |w_{A_{J'}}| - \lambda \\ &= |\sigma_{|A_{J'}} - w_{A_{J'}}| \leq |\sigma| = \delta(\widetilde{\Delta_K}). \end{aligned}$$

□

8.2 Resolution of general systems

Here we prove that Spivakovsky's invariant decreases strictly after a "well-chosen" finite sequence of blow-ups. We do it by means of Spivakovsky's projection introduced below and the hypothesis $\text{CRS}^{\text{sp}}(n)$.

Let $\mathcal{D} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J\}_{J \in \mathcal{H}}, d)$ be a singular polyhedra system with $\text{Spi}_{\mathcal{D}} \neq 0$. We define *Spivakovsky's projection* \mathcal{D}^{sp} by

$$\mathcal{D}^{\text{sp}} = (\mathcal{F}; \{\Delta_J^{\text{sp}}\}_{J \in \mathcal{H}}, d^2), \quad \text{where } \Delta_J^{\text{sp}} = [[\widetilde{\Delta}_J / \text{Spi}_{\mathcal{D}} \cup \Delta_J]].$$

We have that \mathcal{D}^{sp} is a special polyhedra system and $\text{Sing}(\mathcal{D}^{\text{sp}}) = S(\mathcal{D})$ since

$$\delta(\Delta_J^{\text{sp}}) = \min \{ \delta(\widetilde{\Delta}_J / \text{Spi}_{\mathcal{D}}), \delta(\Delta_J) \} \leq 1.$$

Proposition 11 *Under the hypothesis $\text{CRS}^{\text{sp}}(n)$, there is a finite sequence of characteristic transforms*

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^0 \rightarrow \mathcal{D}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}^k$$

such that $\text{Spi}_{\mathcal{D}^k} < \text{Spi}_{\mathcal{D}}$ and the center J^i of the characteristic transform $\mathcal{D}^i \rightarrow \mathcal{D}^{i+1}$ belongs to $S(\mathcal{D}^i)$ for each $i = 0, 1, \dots, k - 1$.

Proof We consider $J \in S(\mathcal{D})$ and denote $\lambda = \text{Spi}_{\mathcal{D}}$. We have two situations:

1. $\text{Spi}_{\Lambda_J(\mathcal{D})} < \lambda$. (In this case, we are done).
2. $\text{Spi}_{\Lambda_J(\mathcal{D})} = \lambda$.

Suppose that $\text{Spi}_{\Lambda_J(\mathcal{D})} = \lambda$. Let us prove the commutativity of Spivakovsky's projections with the blow-up transforms. More precisely, given a stratum $J' \in \mathcal{H}'_\infty$ and $K = \pi^\#(J')$, we want to see that

$$\left[\left[\left[\widetilde{f_{J'}(\Delta_K)} \right] / \lambda \cup \left[f_{J'}(\Delta_K) \right] \right] \right] = \left[f_{J'} \left(\left[\widetilde{\Delta_K} / \lambda \cup \Delta_K \right] \right) \right], \quad (4)$$

where $f_{J'} : \mathbb{R}_{\geq 0}^K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{J'}$ is defined by $f_{J'}(\sigma) = \lambda_{J'}(\sigma) - e_{J',\infty}$. That is, recalling the definition of $\lambda_{J'}$, $f_{J'}(\sigma)(j) = \sigma(j)$ if $j \neq \infty$ and $f_{J'}(\sigma)(\infty) = |\sigma_{J'}| - 1$.

It is not difficult to see that, the proof of equality (4) is reduced to prove the equality $\widetilde{f_{J'}(\Delta_K)} / \lambda = f_{J'}(\widetilde{\Delta_K} / \lambda)$. That is, we want to show that

$$\frac{(\sigma' - w_{J'})}{\lambda} = f_{J'} \left(\frac{\sigma - w_K}{\lambda} \right), \quad \text{where } \sigma \in \Delta_K, \sigma' = f_{J'}(\sigma).$$

Note that we have $w_{J'}(j) = w_K(j)$ if $j \neq \infty$. Then we just need to see what happens with $j = \infty$. Recall that $w_{J'}(\infty) = \delta(\Delta_J) - 1$, $\delta(\Delta_J) = \delta(\widetilde{\Delta_J}) + |w_J|$ and $\delta(\widetilde{\Delta_J}) = \lambda$. Then

$$\frac{(\sigma' - w_{J'})}{\lambda}(\infty) = \frac{|\sigma_{J'}| - (s + |w_J|)}{\lambda} = \frac{|\sigma_{J'} - w_J|}{\lambda} - 1 = f_{J'} \left(\frac{\sigma - w_K}{\lambda} \right)(\infty).$$

By $\text{CRS}^{\text{sp}}(n)$, there is a reduction of singularities of \mathcal{D}^{sp} . Then the second situation cannot be repeated forever and we are done. \square

Now the proof of Theorem 2 is completed.

Acknowledgements I would like to express my gratitude to Professor Felipe Cano, for all the time devoted to the supervision of this work. I am also grateful with all the referees suggestions that have improved the text. The author is partially supported by the Ministerio de Educación, Cultura y Deporte of Spain (FPU14/02653 Grant) and by the Ministerio de Economía y Competitividad from Spain, under the Project "Álgebra y geometría en sistemas dinámicos y foliaciones singulares." (Ref.: MTM2016-77642-C2-1-P).

References

1. Aroca, J.M., Hironaka, H., Vicente, J.L.: The theory of maximal contact. Mem. Mat. Inst. Jorge Juan Madrid, vol. 29 (1975) [Second version: Complex Analytic Desingularization. Springer ISBN 978-4-431-70218-4 (2018)]
2. Cano, F.: Desingularization Strategies of Three-Dimensional Vector Fields. Lecture Notes In Mathematics, vol. 1259. Springer, Berlin (1987)
3. Cano, F.: Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three. Ann. Math. **160**, 907–1011 (2004)
4. Cano, F., Cerveau, D.: Desingularization of nondicritical holomorphic foliations and existence of separatrices. Acta Math. **169**(1–2), 1–103 (1992)
5. Cossart, V.: Sur le polyèdre caractéristique d'une singularité. Bull. Soc. Math. Fr. **103**(1), 13–19 (1975)
6. Cossart, V.: Polyèdre caractéristique et éclatements combinatoires. Rev. Mat. Iberoam. **5**(1–2), 67–95 (1989)
7. Cossart, V.: Desingularization: a few bad examples in dimension 3, characteristic $p > 0$. Topics in algebraic and non-commutative geometry, pp. 103–108. Contemp. Math., vol. 324. American Mathematical Society, Providence (2003)
8. Cossart, V.: Is there a notion of weak maximal contact in characteristic $p > 0$? Asian J. Math. **15**(3), 357–368 (2011)
9. Cossart, V., Jannsen, U., Saito, S.: Canonical embedded and non-embedded resolution of singularities for excellent two-dimensional schemes (2013). [arXiv:0905.2191v2](https://arxiv.org/abs/0905.2191v2)
10. Fernández-Duque, M.: Elimination of resonances in codimension one foliations. Publ. Mat. **57**(1), 75–97 (2015)
11. Goward Jr., R.A.: A simple algorithm for principalization of monomial ideals. Trans. Am. Math. Soc. **357**(12), 4805–4812 (2005)

12. Hironaka, H.: Characteristic Polyhedra Singularities. *J. Math. Kyoto Univ.* **7**(3), 251–293 (1967)
13. Hironaka, H.: Additive groups associated with points of a projective space. *Ann. Math. (2)* **92**, 327–334 (1970)
14. Kouchnirenko, A.G.: Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.* **32**(1), 1–31 (1976)
15. McQuillan, M., Panazzolo, D.: Almost étale resolution of foliations. *J. Differ. Geom.* **95**(2), 279–319 (2013)
16. Narashiman, R.: Monomial equimultiple curves in positive characteristic. *Proc. Am. Math. Soc.* **89**(3), 402–406 (1983)
17. Oka, M.: Non-degenerate complete intersection singularity. *Actualités Mathématiques*. Hermann, Paris, viii+309, p. 220 (1997)
18. Panazzolo, D.: Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three. *Acta Math.* **197**(2), 167–289 (2006)
19. Schober, B.: Characteristic polyhedra for idealistic exponents with history, Ph.D. Thesis. University of Regensburg, Regensburg (2013)
20. Spivakovsky, M.: A solution to Hironaka’s polyhedra game, *Arithmetic and Geometry II*, *Progress in Mathematics*, vol. 36. Birkhauser, Boston, pp. 419–432 (1983)
21. Youssin, B.: Newton polyhedra of ideals. *Mem. Am. Math. Soc.* 87(433), i–vi, 75–99 (1990)

Anexo II: Global Invariant Branches of Non-degenerate Foliations on Toric Projective Surfaces.

- Manuscrito subido a ArXiv.
- Sometido para su publicación.
- <https://arxiv.org/pdf/1902.04875.pdf>.

Global Invariant Branches of Non-degenerate Foliations on Projective Toric Surfaces

Beatriz Molina-Samper

Abstract

We prove that the isolated invariant branches of a weak toric type complex hyperbolic foliation on a projective toric ambient surfaces extend to projective algebraic curves. To do it, we pass through the characterization of the weak toric type foliations in terms of “Newton non-degeneracy” conditions, in the classical sense of Kouchnirenko and Oka. Finally, under the strongest hypothesis of being a toric type foliation, we find that there is a dichotomy: Either it has rational first integral but does not have isolated invariant branches or it has finitely many global invariant curves and all of them are extending isolated invariant branches.

1 Introduction

The aim of this paper is to describe local-global features for the invariant curves of weak toric type complex hyperbolic foliations on projective toric ambient surfaces. The main result we present is stated as follows:

Theorem 5. The isolated invariant branches of a complex hyperbolic weak toric type foliation on a projective toric surface extend to projective algebraic curves.

A foliation is of toric type when it has a combinatorial desingularization. This definition was introduced by M.I.T. Camacho and F.Cano in [2]. Analogously, a foliation is of weak toric type when it has a combinatorial desingularization, but just up to presimple points. We call complex hyperbolic to the foliations without saddle-nodes after reduction of singularities (they are also called “generalized curves”). An invariant branch is isolated if it always falls into a non-dicritical component of the exceptional divisor after any reduction of singularities. This concept was suggested in [3] by C. Camacho, A. Lins Neto and P. Sad.

We characterize weak toric type foliations in terms of Newton polygons and “initial forms”. To do it, we introduce the concept of Newton non-degenerate foliation, following the classical ideas of A.G. Kouchnirenko and M. Oka for varieties, that can be found in [8, 9]. We prove the equivalence result below:

Theorem 3: A complex hyperbolic foliated surface is Newton non-degenerate if and only if it is of weak toric type.

A foliated surface is the data of a foliation \mathcal{F} on a complex surface M and a normal crossings divisor $E \subset M$. Most of the definitions and properties we present in this paper concern to the pair (\mathcal{F}, E) and not only to the foliation \mathcal{F} .

Let us recall that a nonsingular projective toric surface is naturally endowed with a normal crossings divisor given by the union of the non-dense orbits of the torus action. Moreover, these surfaces can be obtained by blowing-ups and blowing-downs from the projective plane $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ with the “standard” toric structure, that gives the divisor $X_0X_1X_2 = 0$. Most of the properties we are going to consider are stable under equivariant (combinatorial) blowing-ups and blowing-downs. This allow us to prove many of the results by looking just to the projective plane.

In order to describe Newton non-degenerate foliations on the projective plane, we use in an essential way the following property: “The number of roots of a Laurent polynomial system in general position is the mixed volume of the associated polyhedra”. This result was proved by D.N. Bernstein, A.G. Khovanskii and A.G. Kouchnirenko in [1, 7]. Applying it, we show that the homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$ of a Newton non-degenerate foliation \mathcal{F} is a single vertex or a segment. In this way, we describe a set of projective algebraic curves such that any isolated invariant branch at a given point is the germ of one of these curves at the point. More precisely, we have the following three cases for the homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$:

Case a) It is a single point: there are no isolated invariant branches.

Case b) It is the segment joining the points $(0, d, 0)$ and $(0, 0, d)$: the isolated invariant branches are in a finite family of lines $\ell_\lambda = (X_2 - \lambda X_1 = 0)$.

Case c) It is the segment joining the points $(d, 0, 0)$ and $(0, a, d - a)$: the isolated invariant branches are in a finite family of curves $\mathcal{C}_\lambda = (X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}} - \lambda X_0^{\tilde{d}} = 0)$.

In this way, we obtain the proof of Theorem 5.

Concerning the existence of isolated invariant branches in the weak toric type case, we see in Lemma 12 that we effectively find at least one for each λ in the above families. In case b), we just blow-up the common point of all the lines ℓ_λ . Each of the transformed lines cuts the new divisor at two points p_λ and q_λ and we prove that the “eigenvalues ratios” of the singularities of the foliation at these points are opposite each to the other, hence one of them is a simple point and we find an isolated invariant branch through it. In case c), we find a similar property after reduction of singularities of the cuspidal family $\mathcal{C}_\lambda = (X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}} - \lambda X_0^{\tilde{d}} = 0)$.

When we have the strongest property that the foliation is of toric type, we obtain the following result:

Theorem 6: We have the next dichotomy for a toric type foliation on a projective toric surface:

- I) There is rational first integral and there are no isolated invariant branches.
- II) There is no rational first integral and every proper invariant branch extending to a projective algebraic curve is an isolated invariant branch.

An invariant branch is proper when it is based at a point of the divisor but is not contained in it.

From the results of this paper, we know that there is always global invariant curve for a toric type foliation on a projective toric surface. This does not hold for general complex hyperbolic foliations on the projective plane. Indeed, Jouanolou’s classical example (see [6]) given by the differential form

$$(X_0^2 X_1 - X_2^3) dX_0 + (X_1^2 X_2 - X_0^3) dX_1 + (X_2^2 X_0 - X_1^3) dX_2$$

has no algebraic invariant curves, but it has seven singularities and two isolated invariant branches at each.

Jouanolou’s example is classically used to construct germs of codimension one foliations in dimension three without invariant surface. In a forthcoming paper, we apply these results to prove the existence of invariant surface for germs of toric type codimension one foliations in dimension three.

2 Generalities on Foliated Surfaces

We introduce basic definitions and results concerning the theory of holomorphic singular foliations in dimension two. All these contents can be essentially found at [4].

2.1 Foliated surfaces

A nonsingular complex analytic surface M , is a \mathbb{C} -ringed space $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ in local \mathbb{C} -algebras of functions, covered by open subsets isomorphic to open subsets of $(\mathbb{C}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$. Denote by Ω_M^1 the sheaf of germs of holomorphic one-forms on M . A *codimension one holomorphic singular foliation* \mathcal{F} on M (for short, a *foliation* on M) is an invertible subsheaf $\mathcal{F} \subset \Omega_M^1$, locally generated at each point $p \in |M|$ by a holomorphic one-form $\omega \in \Omega_{M,p}^1$, that we write in local coordinates as

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2,$$

where $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{M,p}$ have no common factors. The *singular locus* $\text{Sing}(\mathcal{F})$ is the closed analytic subset of M locally defined by $f_1 = f_2 = 0$. It is a set of isolated points.

A *normal crossings divisor* E of M is the union of a finite family $\{E_i\}_{i \in I}$ of connected closed nonsingular holomorphic curves such that, for each point $p \in |M|$ we have $E \subset (x_1 x_2 = 0)$, where (x_1, x_2) is a local coordinate system. Note that the E_i are the irreducible components of E . We denote by $e_p(E)$ the number of irreducible components of E through $p \in |M|$, we have that $e_p(E) \in \{0, 1, 2\}$. We say that E is a *strong normal crossings divisor* if either $E_i \cap E_j$ is empty or it is a single point, for every i, j .

Given a point $p \in |M|$, a curve branch (Γ, p) is defined by an equation $f = 0$, where $f \in \mathcal{O}_{M,p}$ is irreducible. We say that (Γ, p) is an *invariant branch of \mathcal{F}* if $\omega \wedge df = f\alpha$, where α is a germ of holomorphic 2-form and ω is a generator of \mathcal{F} at p . We know that there is an only invariant branch (Γ, p) through p , when $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Consider an irreducible curve Y of M and a point $p \in Y$. If $(\Gamma, p) \subset (Y, p)$ is an invariant branch, then every branch $(\Upsilon, q) \subset (Y, q)$ is also invariant, for each $q \in Y$. In this case, we say that Y is an *invariant curve of \mathcal{F}* . The non-invariant irreducible components of E are also called *dicritical components*. We write the index set as $I = I_{\text{inv}} \cup I_{\text{dic}}$, where I_{inv} corresponds to the invariant components and I_{dic} corresponds to the dicritical ones. We also denote

$$E_{\text{inv}} = \cup_{i \in I_{\text{inv}}} E_i; \quad E_{\text{dic}} = \cup_{i \in I_{\text{dic}}} E_i.$$

We say that \mathcal{F} and E have *normal crossings at $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$* if $E \cup \Gamma$ is a local normal crossings divisor, where (Γ, p) is the only invariant branch of \mathcal{F} through p . The *adapted singular locus* $\text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ is defined by

$$\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \text{Sing}(\mathcal{F}) \cup \{p \notin \text{Sing}(\mathcal{F}); \mathcal{F} \text{ and } E \text{ have no normal crossings at } p\}.$$

We have that $\text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ is a set of isolated points and $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) \supset \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Remark 1. If $|M|$ is a compact set or a germ around a compact set, then $\text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ is finite.

We say that a coordinate system (x_1, x_2) at $p \in |M|$ is *adapted to E* if $e_p(E) = 0$, $E = (x_1 = 0)$ or $E = (x_1 x_2 = 0)$. Let $\Omega_M^1(\log E)$ be the sheaf of germs of logarithmic one-forms along E . A *codimension one singular E -foliation \mathcal{L} on M* (for short, an *E -foliation* on M) is an invertible subsheaf $\mathcal{L} \subset \Omega_M^1(\log E)$, locally generated at each point $p \in |M|$ by a logarithmic one-form $\eta \in \Omega_{M,p}^1(\log E)$, that we write in adapted local coordinates as

$$\eta = \sum_{i=1}^e a_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i=e+1}^2 a_i dx_i; \quad e = e_p(E),$$

where the coefficients a_i have no common factors. We define the *adapted multiplicity* $\nu_p(\mathcal{F}, E)$ to be the minimum $\nu_p(a_1, a_2)$ of the orders $\nu_p(a_1)$ and $\nu_p(a_2)$ at p of the coefficients.

Denote by $\text{Fol}(M, E)$ the set of E -foliations on M and by $\text{Fol}(M)$ the set of foliations. Observe that $\text{Fol}(M, \emptyset) = \text{Fol}(M)$. There is a bijection between $\text{Fol}(M)$ and $\text{Fol}(M, E)$ given by $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$, determined by the relation $\omega = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_e^{\varepsilon_e} \eta$, where the exponents ε_i are defined by

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i = 0 \text{ is invariant.} \\ 0 & \text{if } x_i = 0 \text{ is dicritical.} \end{cases}$$

A local generator η of $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ is also called a *local generator of \mathcal{F} adapted to E* .

Definition 1. An *ambient surface* is a pair $\mathcal{M} = (M, E)$, where M is a nonsingular complex analytic surface and E is a strong normal crossings divisor. A *foliated surface* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is the data of an ambient surface and a foliation \mathcal{F} on M .

Given an open subset $U \subset |M|$ such that $E \cap U$ has only finitely many irreducible components, the restriction $\mathcal{M}|_U$ is a well-defined ambient surface. In this case, the restriction $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_U$ is also a foliated surface. Given a point $p \in |M|$, we define the germ $(\mathcal{M}, \mathcal{F})_p$ of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ at p in the natural way.

2.2 Presimple and simple points under blowing-ups

Let us consider a foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ and a point $p \in |M|$. A germ ξ of holomorphic vector field is *tangent to \mathcal{F}* if $\omega(\xi) = 0$, where ω is a local generator of \mathcal{F} (the sheaf of tangent germs of vector fields also defines the foliation). Notice that $\xi(p) = 0$ when $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ and, in this case, we have a well-defined linear part L_ξ .

Definition 2. We say that p is a *presimple point* for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ or we have that $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, $e_p(E) \geq 1$, $e_p(E_{\text{dic}}) = 0$ and there is a germ ξ of vector field tangent to \mathcal{F} such that L_ξ is non-nilpotent. We say that p is *simple* if it is presimple and the eigenvalues of L_ξ have not positive rational ratio, when $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$. A *saddle-node* is a simple singularity where the linear part of every tangent germ of vector field has a zero eigenvalue.

We distinguish two types of presimple points: trace and corner type points. More precisely:

1. If $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$, we say that it is of *trace type* if $e_p(E_{\text{inv}}) = 0$ and that it is of *corner type* if $e_p(E_{\text{inv}}) = 1$.
2. If $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, we say that it is of *trace type* if $e_p(E) = 1$ and that it is of *corner type* if $e_p(E) = 2$.

Remark 2. Given a presimple singularity, there are no dicritical components through it. If p is a simple nonsingular point, we have that $e_p(E_{\text{dic}}) \in \{0, 1\}$. Hence, a point p with $e_p(E_{\text{dic}}) = 2$ cannot be a presimple point.

Definition 3. A foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is *desingularized* (respectively, *pre-desingularized*) if it has only simple points (respectively, presimple points).

Remark 3. If $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is pre-desingularized, then $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Consider the blowing-up $\pi : M' \rightarrow M$ centered at a point $p \in |M|$. We obtain a new foliated surface $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$, where $\mathcal{M}' = (M', E')$, with $E' = \pi^{-1}(E \cup \{p\})$ and \mathcal{F}' is the transform of \mathcal{F} by π . We write for short $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

We summarize now the main properties of the behaviour of simple and presimple points under blowing-up (for more details, see [4].) Let us assume that the center p of π is a presimple point for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. We have that all $q \in D$ are presimple points for $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$, where $D = \pi^{-1}(p)$ is the exceptional divisor. More specifically:

1. If $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$, then D is invariant and there is only one point $p' \in \text{Sing}(\mathcal{F}') \cap D$. Moreover p' is a simple singularity (it represents the tangent at p of the only invariant branch of \mathcal{F} at p).
2. If p is a simple singularity for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, then D is invariant and there are exactly two points $p'_1, p'_2 \in \text{Sing}(\mathcal{F}') \cap D$. Moreover p'_1 and p'_2 are simple singularities for $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$. We have also that p'_1, p'_2 are corners if p is a corner and that there is a corner and a trace between $\{p'_1, p'_2\}$ if p is a trace.
3. If p is a presimple but not simple singularity for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, we take a germ of vector field ξ with L_ξ non-nilpotent. We have three possibilities:

- (a) The linear part L_ξ is the identity up to a factor. In this case D is dicritical and $\text{Sing}(\mathcal{F}') \cap D = \emptyset$.
- (b) The linear part L_ξ is not diagonalizable. The exceptional divisor D is invariant and there is only one point p' in $\text{Sing}(\mathcal{F}') \cap D$. Moreover p' is a saddle-node corner type singularity. This situation only holds if p is of trace type.
- (c) The linear part L_ξ has two different eigenvalues λ, μ with $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}_{>1}$. In this situation D is invariant and there are exactly two points $p', q' \in \text{Sing}(\mathcal{F}') \cap D$. One of them is a simple singularity and the other one is presimple with eigenvalues equal to $\lambda - \mu, \mu$. Moreover, if p is of corner type, then p', q' are both corners; if p is of trace type, we obtain a corner and a trace between $\{p', q'\}$.

2.3 Reduction of singularities

We say that a morphism $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is a *reduction* (respectively, a *pre-reduction*) of singularities of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if π is a finite composition $\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \dots \circ \pi_N$, where each

$$\pi_i : (\mathcal{M}^i, \mathcal{F}^i) \rightarrow (\mathcal{M}^{i-1}, \mathcal{F}^{i-1}),$$

is a blowing-up centered at $p_{i-1} \in |M_{i-1}|$, for $i = 1, 2, \dots, N$ and $(\mathcal{M}', \mathcal{F}') = (\mathcal{M}^N, \mathcal{F}^N)$ is a desingularized (respectively, pre-desingularized) foliated surface. The reduction of singularities π is called *minimal* if, for any other reduction of singularities $\bar{\pi} : (\mathcal{M}'', \mathcal{F}'') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$, there is a unique factorization $\bar{\pi} = \pi \circ f$, where

$$f : (\mathcal{M}'', \mathcal{F}'') \rightarrow (\mathcal{M}', \mathcal{F}')$$

is the composition of a finite sequence of blowing-ups (up to isomorphism). Note that π is minimal if and only if all the centers p_i are non-simple points. In the same way, we define and characterize *minimal pre-reduction of singularities*.

Remark 4. Following the above definitions, there is no reduction of singularities for foliated surfaces with infinitely many non-simple points.

The following result is consequence of Seidenberg's Theorem [10] and the statements in [4].

Theorem 1. Let $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ a foliated surface. We have that:

1. There is a reduction of singularities of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if and only if the set of non-simple points is finite. In this case, there is a minimal reduction of singularities.
2. There is a pre-reduction of singularities of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if and only if the set of non-presimple points is finite. In this case, there is a minimal pre-reduction of singularities.

Remark 5. Assume that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ has reduction of singularities and let π and σ be, respectively, the minimal reduction and pre-reduction of singularities. If

$$\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F}), \quad \sigma : (\mathcal{M}^*, \mathcal{F}^*) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F}),$$

then there is a unique factorization $\pi = \sigma \circ f$, where $f : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}^*, \mathcal{F}^*)$ is the composition of a finite sequence of blowing-ups centered at presimple but non-simple points.

We are interested in foliated surfaces without saddle-nodes after reduction of singularities. In other contexts they correspond to the so-called "generalized curves" (see [3]).

A foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is *complex hyperbolic* (for short, CH) if there is a reduction of singularities $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ without saddle-nodes in $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$. Note the following properties:

1. If $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is CH, for any reduction of singularities $\bar{\pi} : (\mathcal{M}'', \mathcal{F}'') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ there are no saddle-nodes in $(\mathcal{M}'', \mathcal{F}'')$.

2. Being CH depends just on the foliation \mathcal{F} . That is, if $((M, E), \mathcal{F})$ is CH, then any other $((M, D), \mathcal{F})$ is also CH. In particular, it makes sense to say that a point $p \in |M|$ is CH for \mathcal{F} when the germ \mathcal{F}_p is CH, independently of the chosen divisor.
3. A simple singularity is CH if and only if it is not a saddle-node. The presimple but not simple singularities that are not CH are those presented in 3b) of Subsection 2.2.

Lemma 1. A point p of a CH-foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is presimple if and only if $\nu_p(\mathcal{F}, E) = 0$.

Proof. If $e = e_p(E) = 0$, then p is presimple if and only if p is nonsingular, and we are done. If $e = 1$, take a local generator $\eta = a_1 dx_1/x_1 + a_2 dx_2$ of \mathcal{F} adapted to E . We distinguish two cases:

- 1a) Dicritical case, that is $E = (x_1 = 0)$ is dicritical. This is equivalent to say that $a_1 = x_1 \tilde{a}_1$, in particular, we have $\nu_p(a_1) > 0$. A local generator of \mathcal{F} is given by $\omega = \tilde{a}_1 dx_1 + a_2 dx_2$. In this case, the point p is presimple if and only if it is nonsingular and \mathcal{F}, E have normal crossings at p . That happens if and only if $\nu_p(a_2) = 0$.
- 1b) Invariant case. A local generator of \mathcal{F} is given by $\omega = a_1 dx_1 + x_1 a_2 dx_2$. The point p is nonsingular with normal crossings if and only if $\nu_p(a_1) = 0$. The point p is a presimple singularity if and only if p is a saddle-node (not allowed, because we are in the CH-situation) or $\nu_p(a_2) = 0$.

If $e = 2$, consider a local generator $\eta = a_1 dx_1/x_1 + a_2 dx_2/x_2$ of \mathcal{F} adapted to E , where $E = (x_1 x_2 = 0)$ locally at p . There are three possibilities:

- 2a) $e_p(E_{\text{dic}}) = 2$. We know that p is not presimple. On the other hand, we have that x_i divides a_i for $i = 1, 2$, hence $\nu_p(a_1, a_2) > 0$.
- 2b) $e_p(E_{\text{dic}}) = 1$. Suppose that $(x_1 = 0)$ is invariant and that $(x_2 = 0)$ is dicritical. We have that $a_2 = x_2 \tilde{a}_2$ and that $\omega = a_1 dx_1 + x_1 \tilde{a}_2 dx_2$ is a local generator of \mathcal{F} . The point p is presimple if and only if it is a nonsingular point and \mathcal{F}, E have normal crossings at p . This happens if and only if $\nu_p(a_1) = 0$. We end by noting that $\nu_p(a_1) = 0$ if and only if $\nu_p(a_1, a_2) = 0$, since $\nu_p(a_2) > 0$.
- 2c) $e_p(E_{\text{dic}}) = 0$. We have that $\omega = x_2 a_1 dx_1 + x_1 a_2 dx_2$ is a local generator of \mathcal{F} and hence p is a singular point. The linear part of a germ of vector field tangent to \mathcal{F} is diagonal with eigenvalues $\lambda_i = a_i(0)$, for $i = 1, 2$. As a consequence, the point p is presimple if and only if $\nu_p(a_1, a_2) = 0$. ■

2.4 Combinatorial blowing-ups

The concept of toric type foliated surface has been introduced in [2].

Let $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ be a foliated surface and let us consider the blowing-up $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ centered at a point $p \in |M|$. We say that π is a *combinatorial blowing-up* if $e_p(E) = 2$. The composition of a finite sequence of blowing-ups is *combinatorial* if each blowing-up is combinatorial.

Definition 4. A foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of *toric type* if it admits a combinatorial reduction of singularities. Analogously, we say that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of *weak toric type* if it has a combinatorial pre-reduction of singularities.

The foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is called of *toric type at a point* $p \in |M|$ if the germ $(\mathcal{M}, \mathcal{F})_p$ is of toric type. Analogously, it is called of *weak toric type at* p if the germ $(\mathcal{M}, \mathcal{F})_p$ is of weak toric type.

Remark 6. Given a point p with $e_p(E) \leq 1$, we have that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of toric type (respectively of weak toric type) at p if and only if p is a simple (respectively presimple) point for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Recall that the divisor E has finitely many irreducible components. Thus, there are only finitely many points with $e_p(E) = 2$. As a consequence, the foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of toric type if and only if the property holds at every point $p \in |M|$. We have the same comment for the weak toric type property.

Remark 7. If p is a corner type presimple singularity of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, we have that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of toric type at p , in view of the behaviour of presimple singularities described in Subsection 2.2. Even more, all the singularities appearing after the minimal reduction of singularities of the germ $(\mathcal{M}, \mathcal{F})_p$ are corner type simple points.

2.5 Isolated invariant branches

The concept of isolated invariant branch is useful for choosing finitely many representative invariant branches, in case dicritical components arise after reduction of singularities. We give the precise definition below.

Definition 5. Consider an invariant branch (Γ, p) of a foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. We say that (Γ, p) is *isolated for* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if the following properties hold:

- $(\Gamma, p) \not\subset (E, p)$.
- For every composition $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ of a finite sequence of blowing-ups, we have that $p' \in \text{Sing}(\mathcal{F}', E')$, where (Γ', p') is the strict transform of (Γ, p) by π .

Remark 8. Note that $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$, just by taking π the identity. Besides, it is enough to consider blowing-ups centered at the infinitely near points of (Γ, p) .

The property of being isolated is stable under blowing-ups. In the following statement we show that it is also stable by combinatorial blowing-downs.

Proposition 1. Let us consider a combinatorial blowing-up $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ between foliated surfaces. If (Γ', p') is an isolated invariant branch for $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$, we have that (Γ, p) is an isolated invariant branch for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, where (Γ, p) is the image of (Γ', p') by π .

Proof. Suppose that p is the center of the blowing-up, otherwise we are done. If (Γ', p') is isolated, in particular $(\Gamma', p') \not\subset (E', p')$ and then also $(\Gamma, p) \not\subset (E, p)$. If $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$, we are done. Assume that $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$. Since p is a regular point, we get that (Γ, p) is the only invariant branch through p . Moreover, we have that $e_p(E) = 2$ and that \mathcal{F}, E have normal crossings at p . Then (Γ, p) is contained in E and this is a contradiction. ■

The following assertions give a description of the isolated invariant branches at presimple points.

Lemma 2. Consider a foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ and $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ a reduction of singularities. Let (Γ, p) be an isolated branch of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ and let (Γ', p') be the strict transform of (Γ, p) by π . We have that p' is a trace type simple singularity.

Proof. By definition, we know that $p' \in \text{Sing}(\mathcal{F}', E')$ and $(\Gamma', p') \not\subset (E', p')$. Moreover, we have

$$\text{Sing}(\mathcal{F}', E') = \text{Sing}(\mathcal{F}'),$$

because $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is desingularized. If p' is of corner type, the only invariant branches through it are contained in E' . Then p' is a trace type simple singularity. ■

Lemma 3. Let $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ be a presimple singularity of a foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. If p is of corner type, there are no isolated invariant branches through it. If p is of trace type, there is at most one isolated invariant branch through it; when it exists, it is nonsingular, transversal to the divisor and any other nonsingular invariant branch is tangent to the divisor.

Proof. Assume first that p is of corner type and let us find a contradiction with the existence of an isolated invariant branch (Γ, p) . By Remark 7, we know that the minimal reduction of singularities of the germ $(\mathcal{M}, \mathcal{F})_p$ produces only singularities that are of corner type. In view of Lemma 2, the strict transform of (Γ, p) passes through a trace type simple singularity and this is not possible.

Assume now that p is a trace type presimple singularity. Recall that $e_p(E) = e_p(E_{\text{inv}}) = 1$. Suppose that there is an isolated branch (Γ, p) . Consider the blowing-up $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ centered at p . Let (Γ', p') be the strict transform of (Γ, p) . We know that $p' \in \text{Sing}(\mathcal{F}', E') = \text{Sing}(\mathcal{F}')$. Since (Γ', p') is an isolated invariant branch, we obtain that p' is not a corner type point, hence it is a trace type presimple singularity of $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$. In particular, we have that $e_{p'}(E') = e_{p'}(E'_{\text{inv}}) = 1$. Note also that $E' = \pi^{-1}(E)$, locally at p' .

The above arguments show that (Γ, p) is nonsingular and transversal to E . Indeed, this is a direct consequence of the fact that the infinitely near points of (Γ, p) are never over the strict transform of the precedent exceptional divisor.

Let us prove that any other nonsingular invariant branch is tangent to E . Equivalently, if (Γ_1, p) is a nonsingular invariant branch transversal to E , let us show that $(\Gamma_1, p) = (\Gamma, p)$. Denote by (Γ'_1, p'_1) to the strict transform of (Γ_1, p) by π . It is enough to prove that $p'_1 = p'$; in this case, the situation repeats at p' , we conclude that (Γ_1, p) and (Γ, p) have the same infinitely near points and thus they coincide. Since (Γ_1, p) is transversal to E , we have that p'_1 does not belong to the strict transform of E . Moreover, $p'_1 \in \text{Sing}(\mathcal{F}')$, because both (Γ'_1, p'_1) and $\pi^{-1}(p)$ define invariant branches of \mathcal{F}' at p'_1 . Then, the only trace type singularity of $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ in $\pi^{-1}(p)$ is p'_1 ; this means that $p'_1 = p'$.

It remains to show that (Γ, p) is the only isolated invariant branch. We know that any isolated invariant branch must be nonsingular and transversal to E , then it is necessarily (Γ, p) . ■

Corollary 1. Let (Γ, p) be a smooth invariant branch transversal to E through a trace type presimple singularity. If there is an isolated branch for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ through p , it is necessarily (Γ, p) .

Remark 9. If p is a trace type non saddle-node simple singularity, there is exactly one isolated invariant branch through p . When it is a saddle-node, it is possible to have a formal non-convergent invariant branch, that is also isolated (in the formal sense).

Remark 10. Consider a foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ and a point $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$. If there are only finitely many invariant branches through p (equivalently, there are no dicritical components created after reduction of singularities over p), then each invariant branch $(\Gamma, p) \not\subset (E, p)$ is isolated.

3 Pairs of Laurent Polynomials in General Position

Here we recall a result about the number of solution of a Laurent polynomials system looking at the mixed area of the convex polytopes associated to it (see [1, 8]). In Section 5, we apply this result to our study of Newton non-degenerate foliations in projective toric ambient surfaces.

A *convex polytope* $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ is the convex hull of a finite set of points of \mathbb{R}^2 . We denote the area of Δ by $\text{Ar}(\Delta) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. The *mixed area* $\text{MA}(\Delta_1, \Delta_2)$ of two convex polytopes $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$ is given by $\text{MA}(\Delta_1, \Delta_2) = \text{Ar}(\Delta_1 + \Delta_2) - \text{Ar}(\Delta_1) - \text{Ar}(\Delta_2)$, where $\Delta_1 + \Delta_2$ denotes the Minkowski sum.

Remark 11. The mixed area of two convex polytopes is zero if and only if either one of them is a single point or they are parallel segments.

The ring of Laurent polynomials $\mathbb{C}[u_1, u_2, u_1^{-1}, u_2^{-1}]$ gives the regular functions of the complex torus $(\mathbb{C}^*)^2 = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$. The *convex polytope* $\Delta(f)$ of a *Laurent polynomial* f is defined by

$$\Delta(f) = \text{convex hull}\left(\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2; f_{ij} \neq 0\}\right), \quad f = \sum_{(i,j)} f_{ij} u_1^i u_2^j.$$

The *support-restriction* f_C of f to a subset $C \subset \mathbb{Z}^2$ is $f_C = \sum_{(i,j) \in C} f_{ij} u_1^i u_2^j$.

We call *weight vectors* to the elements of the set $\mathcal{W} = \{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{>0}; p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\} \cup \{(1, 0)\}$. Note that, there is a bijection $\mathcal{W} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, given by $(p, q) \mapsto -p/q$ (assuming $-1/0 = \infty$). We say that a Laurent polynomial $F \neq 0$ is *quasi-homogeneous with weight vector* (p, q) if there is an $r \in \mathbb{Z}$ such that $F(t^p u_1, t^q u_2) = t^r F(u_1, u_2)$. The integer r is called the *quasi-homogeneous degree* of F . In this case, there is a decomposition

$$F = c u_1^{\tau_1} u_2^{\tau_2} \prod_{j=1}^N (u_2^p - \alpha_j u_1^q); \quad (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad c, \alpha_j \in \mathbb{C}^*, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Conversely, such a decomposition provides a quasi-homogeneous Laurent polynomial. Moreover, we can see that F is quasi-homogeneous with weight vector (p, q) and degree r if and only if $\Delta(F)$ is a segment contained in the line of equation $pi + qj = r$. In particular, a single monomial is quasi-homogeneous for any weight vector.

The following definitions can be found in [1, 8].

Definition 6. A pair (F_1, F_2) of quasi-homogeneous Laurent polynomials with weight vector (p, q) is *non-degenerate* if $\alpha_{1j} \neq \alpha_{2k}$ for every j, k , where

$$F_i = c_i u_1^{\tau_{i1}} u_2^{\tau_{i2}} \prod_{j=1}^{N_i} (u_2^p - \alpha_{ij} u_1^q), \quad i = 1, 2.$$

Otherwise, we say that (F_1, F_2) is *degenerate*.

Definition 7. A pair of arbitrary Laurent polynomials (f_1, f_2) is in *general position*, if the pairs (f_{1L}, f_{2L}) are non-degenerate for every side L of $\Delta(f_1, f_2) = \text{convex hull}(\Delta(f_1) \cup \Delta(f_2))$.

Remark 12. Consider two Laurent polynomials $F(u_1, u_2), G(u_1, u_2)$ and three monomials $u^a = u_1^{a_1} u_2^{a_2}$, $u^b = u_1^{b_1} u_2^{b_2}$, $u^c = u_1^{c_1} u_2^{c_2}$, where $a, b, c \in \mathbb{Z}^2$ and $a_1 b_2 - a_2 b_1 \in \{-1, 1\}$. We have the following properties:

1. The Laurent polynomial F is quasi-homogeneous if and only if $u^c F$ is quasi-homogeneous. Moreover, both have the same weight vector.
2. The Laurent polynomial $F(u_1, u_2)$ is quasi-homogeneous with weight vector (p, q) if and only if $F(u^a, u^b)$ is quasi-homogeneous with weight vector (up to sign) $(pb_2 - qa_2, qa_1 - pb_1)$.
3. The pair $(F(u_1, u_2), G(u_1, u_2))$ is non-degenerate if and only if the pair $(u^c F(u^a, u^b), u^c G(u^a, u^b))$ is non-degenerate.

Remark 13. If the pair (F_1, F_2) is non-degenerate and both F_1, F_2 have the same quasi-homogeneous degree, then $(F_1 + F_2, F_2)$ is also non-degenerate.

Remark 14. Note that (f_{1L}, f_{2L}) is degenerate if $f_{1L} = 0$ or $f_{2L} = 0$.

Theorem 2. (See [1, 8]) Let (f_1, f_1) be a pair of Laurent polynomials in general position. The number of solutions in $(\mathbb{C}^*)^2$ of the system $f_1 = f_2 = 0$ is equal to the mixed area $\text{MA}(\Delta(f_1), \Delta(f_2))$.

4 Weak Toric Type Foliated Surfaces

In this section we give an algebraic characterization in terms of “weighted initial forms” of the weak toric type complex hyperbolic foliated surfaces. More precisely, we introduce the concept of Newton non-degenerate foliated surface, following the classical ideas for curves and functions (see [9]) and we prove that they are exactly the weak toric type foliated surfaces in the CH-context.

4.1 Newton non-degenerate foliated surfaces

The *Newton polygon* $N(f; x_1, x_2)$ of a formal power series $f = \sum f_{ij}x_1^i x_2^j \in \mathbb{C}[[x_1, x_2]]$ is defined by

$$N(f; x_1, x_2) = \text{convex hull}(\text{Supp}(f) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2),$$

where $\text{Supp}(f) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2; f_{ij} \neq 0\}$. The topological boundary of $N(f; x_1, x_2)$ is a union of two non-compact sides and finitely many compact sides (consisting of more than one point) with negative rational slopes. The endpoints of the sides are called vertices.

Let us consider an ambient surface $\mathcal{M} = (M, E)$ and a point $p \in |M|$ with $e_p(E) = 2$. Take a logarithmic one-form $\eta \in \Omega_{M,p}^1(\log E)$, that we write in adapted local coordinates (x_1, x_2) as

$$\eta = a_1 dx_1/x_1 + a_2 dx_2/x_2; \quad a_1, a_2 \in \mathcal{O}_{M,p} = \mathbb{C}\{x_1, x_2\} \subset \mathbb{C}[[x_1, x_2]].$$

The *Newton polygon* $N_p(\eta; x_1, x_2)$ is the convex hull of $N(a_1; x_1, x_2) \cup N(a_2; x_1, x_2)$.

Remark 15. In order to get uniqueness in the definition of the Newton polygon of a foliated surface, we consider total orderings \prec in the set of irreducible components of the divisor.

Now, we consider a foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, a total ordering \prec in the set of irreducible components of E and a point $p \in |M|$ with $e_p(E) = 2$.

Lemma 4. Take local coordinates $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2)$ adapted to E , such that $(x_2 = 0) \prec (x_1 = 0)$ and $(x'_2 = 0) \prec (x'_1 = 0)$. We have that

$$N = N_p(\eta; x_1, x_2) = N_p(\eta'; x'_1, x'_2),$$

where $\eta = a_1 dx_1/x_1 + a_2 dx_2/x_2$, $\eta' = a'_1 dx'_1/x'_1 + a'_2 dx'_2/x'_2$ are local generators of \mathcal{F} adapted to E . Moreover, given a compact side L of N , it holds that (a_{1L}, a_{2L}) is non-degenerate if and only if (a'_{1L}, a'_{2L}) is non-degenerate.

Proof. Just note that there are units $u, u_1, u_2 \in \mathcal{O}_{M,p}$, such that $\eta' = u\eta$ and $x'_i = u_i x_i$, for $i = 1, 2$. ■

In view of Lemma 4 we define the *Newton polygon* $N_p^\prec(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ by

$$N_p^\prec(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = N_p(\eta; x_1, x_2).$$

Remark 16. The point p is presimple if and only if $N_p^\prec(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$.

The foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is *non-degenerate at p with respect to the order \prec and a compact side L of $N_p^\prec(\mathcal{M}, \mathcal{F})$* if the pair (a_{1L}, a_{2L}) is non-degenerate. For short, we say that (\mathcal{F}, L) is *non-degenerate*.

Remark 17. Consider two different orderings \prec, \prec' in the set of irreducible components of E . Denote by E_1 and E_2 the irreducible components of E through p , such that $E_2 \prec E_1$. We have two possibilities at p depending on the order \prec' between E_1 and E_2 :

- $E_2 \prec' E_1$. We have $N_p^{\prec'}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = N_p^\prec(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.
- $E_1 \prec' E_2$. We have $N_p^{\prec'}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) = \sigma(N_p^\prec(\mathcal{M}, \mathcal{F}))$, where σ is the symmetry $(u, v) \mapsto (v, u)$. Moreover, given a compact side L of $N_p^\prec(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, we have that (\mathcal{F}, L) is non-degenerate, with respect to \prec , if and only if $(\mathcal{F}, \sigma(L))$ is non-degenerate, with respect to \prec' .

Definition 8. A foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is *Newton non-degenerate at $p \in |M|$* if the point p is presimple, or $e_p(E) = 2$ and (\mathcal{F}, L) is non-degenerate for each compact side L of $N_p^\prec(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ (this definition does not depend on the chosen ordering \prec , in view of Remark 17). We say that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is *Newton non-degenerate* if the property holds at each point.

4.2 Non-degenerate foliations and combinatorial blowing-ups

We present here several results about the stability of being Newton non-degenerate under combinatorial blowing-ups and blowing-downs.

Let us consider a CH-foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, a total ordering \prec in the set of irreducible components of E and a point $p \in |M|$ with $e_p(E) = 2$. Denote by E_1, E_2 the irreducible components of E through p , such that $E_2 \prec E_1$.

Let (x_1, x_2) be a local coordinate system such that $E_i = (x_i = 0)$, for $i = 1, 2$. Consider a local generator $\eta = a_1 dx_1/x_1 + a_2 dx_2/x_2$ of \mathcal{F} adapted to E at p . Denote by $d \geq 0$ the adapted order, that is $d = \nu_p(\mathcal{F}, E) = \nu_p(a_1, a_2)$. We write

$$a_i = A_i + \tilde{a}_i \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\}, \nu_p(\tilde{a}_i) > d, \quad i = 1, 2,$$

where the A_i are homogeneous polynomials of degree d . Note that $(A_1, A_2) \neq (0, 0)$.

Let us perform the blowing-up $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ centered at p . Note that π is a combinatorial blowing-up, since $e_p(E) = 2$. We consider the ordering \prec' in the set of irreducible components of E' obtained by adding the exceptional divisor $D = \pi^{-1}(p)$ with the property $E'_2 \prec' D \prec' E'_1$, where E'_i denote the strict transforms of E_i , for $i = 1, 2$. Denote

$$\{q_0\} = D \cap E'_2, \{q_\infty\} = D \cap E'_1 \quad \text{and} \quad \mathcal{T} = D \setminus \{q_0, q_\infty\}.$$

Remark 18. We can consider affine coordinates (x'_1, x'_2) on the chart of the blowing-up with origin in q_0 , given by $x_1 = x'_1, x_2 = x'_1 x'_2$. In this chart $E'_2 = (x'_2 = 0)$ and $D = (x'_1 = 0)$. Analogously, we can consider affine coordinates (x''_1, x''_2) on the chart of the blowing-up with origin in q_∞ , given by $x_1 = x''_1 x''_2, x_2 = x''_2$. Here $D = (x''_2 = 0)$ and $E'_1 = (x''_1 = 0)$. These choices of coordinates are compatible with the ordering \prec' in the set of irreducible components of E' .

Remark 19. The following properties are well known (see [4]):

1. Assume that the blowing-up π is dicritical. That is, the exceptional divisor D is dicritical, what happens if and only if $A_1 + A_2 = 0$. In this case $\mathcal{T} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}', E')$ is given by $A_1 = 0$ and all the points in this set are non-presimple points.
2. Suppose that the blowing-up π is non-dicritical. In this case $\text{Sing}(\mathcal{F}', E') \cap D = \text{Sing}(\mathcal{F}') \cap D$ and $\mathcal{T} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}')$ is given by the tangent cone $A_1 + A_2 = 0$.

Lemma 5. It holds that $\mathcal{T} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}', E') \neq \emptyset$ if and only if $N_p^\prec(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ has a compact side of slope -1 .

Proof. It follows by Remark 19, looking separately the dicritical and non-dicritical cases. ■

Lemma 6. If π is non-dicritical, then the non-presimple points $q \in \mathcal{T}$ are given by $A_1 + A_2 = A_2 = 0$.

Proof. Consider coordinates (x'_1, x'_2) like in Remark 18. A generator η' of \mathcal{F}' adapted to E' is given by

$$\eta' = \left((A_1 + A_2)(1, x'_2) + x'_1 \frac{(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2)(x'_1, x'_1 x'_2)}{(x'_1)^{d+1}} \right) \frac{dx'_1}{x'_1} + \left(A_2(1, x'_2) + x'_1 \frac{\tilde{a}_2(x'_1, x'_1 x'_2)}{(x'_1)^{d+1}} \right) \frac{dx'_2}{x'_2},$$

The non-presimple points $q \in \mathcal{T}$ are given by $x'_1 = 0, x'_2 = \lambda \in \mathbb{C}^*$, with $(A_1 + A_2)(1, \lambda) = A_2(1, \lambda) = 0$, in view of Lemma 1. ■

Corollary 2. The pair (A_1, A_2) is non-degenerate if and only if each point $q \in \mathcal{T}$ is presimple.

Proof. Suppose that $N_p^<(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ does not have a compact side with slope -1 . This is equivalent to say that A_1 and A_2 are the same monomial up to constant and hence (A_1, A_2) is a non-degenerate pair. On the other hand, in view of Lemma 5, all the points $q \in \mathcal{T}$ are presimple.

Suppose now that $N_p^<(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ has a compact side with slope -1 . Assume first that all the points $q \in \mathcal{T}$ are presimple. The blowing-up π is non-dicritical by Remark 19, then Lemma 6 implies that $(A_1 + A_2, A_2)$ is non-degenerate and by Remark 13, this is equivalent to say that (A_1, A_2) is non-degenerate. Conversely, if (A_1, A_2) is non-degenerate, then $A_1 \neq -A_2$ and the blowing-up is non-dicritical. Moreover $(A_1 + A_2, A_2)$ is non-degenerate, as a consequence, all the points $q \in \mathcal{T}$ are presimple. \blacksquare

We introduce the notation $N = N_p^<(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, $N_0 = N_{q_0}^<(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$, $N_\infty = N_{q_\infty}^<(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$.

Let \mathcal{S}_p^+ be the set of compact sides of N with slope greater than -1 and let \mathcal{S}_{q_0} be the set of compact sides of N_0 . There is a bijection between \mathcal{S}_p^+ and \mathcal{S}_{q_0} given by $L \in \mathcal{S}_p^+ \mapsto L' \in \mathcal{S}_{q_0}$, where L' is the side of slope $m' = m/(1+m) < 0$, being $m \in \mathbb{Q}_{>-1}$ the slope of L . In the same way, denote by \mathcal{S}_p^- the set of compact sides of N with slope lower than -1 and by \mathcal{S}_{q_∞} the set of compact sides of N_∞ . There is a bijection $L \in \mathcal{S}_p^- \mapsto L' \in \mathcal{S}_{q_\infty}$ where L' has slope $m' = m+1 < 0$, being $m \in \mathbb{Q}_{<-1}$ the slope of L . Given a compact side L of N with slope different than -1 , that is $L \in \mathcal{S}_p^+ \cup \mathcal{S}_p^-$, we say that L' is the *transform* of L .

Lemma 7. Consider a compact side $L \in \mathcal{S}_p^+ \cup \mathcal{S}_p^-$ and let L' be transform of L . It holds that (\mathcal{F}, L) is non-degenerate if and only if (\mathcal{F}', L') is non-degenerate.

Proof. Suppose that $L \in \mathcal{S}_p^+$, the proof is analogous when $L \in \mathcal{S}_p^-$. Consider coordinates (x'_1, x'_2) like in Remark 18. A local generator η' of \mathcal{F}' adapted to E' at q_0 is given by $\eta' = a'_1 dx'_1/x'_1 + a'_2 dx'_2/x'_2$, where $a'_1 = (a_1 + a_2)(x'_1, x'_1 x'_2)/(x'_1)^d$ and $a'_2 = a_2(x'_1, x'_1 x'_2)/(x'_1)^d$. We also have that

$$a'_{1L'} = (a_{1L} + a_{2L})(x'_1, x'_1 x'_2)/(x'_1)^d, \quad a'_{2L'} = a_{2L}(x'_1, x'_1 x'_2)/(x'_1)^d.$$

Then $(a'_{1L'}, a'_{2L'})$ is non-degenerate if and only if $(a_{1L} + a_{2L}, a_{2L})$ is non-degenerate, in view of Remark 12. This is equivalent to have (a_{1L}, a_{2L}) non-degenerate, by Remark 13. \blacksquare

Corollary 3. The following properties hold:

- (\mathcal{F}, L) is non-degenerate for every $L \in \mathcal{S}_p^+$ if and only if $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is Newton non-degenerate at q_0 .
- (\mathcal{F}, L) is non-degenerate for every $L \in \mathcal{S}_p^-$ if and only if $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is Newton non-degenerate at q_∞ .

Proof. Direct consequence of Lemma 7. \blacksquare

Proposition 2. Consider a CH-foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Let $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ be a combinatorial blowing-up centered at a point $p \in |M|$. We have that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is Newton non-degenerate at p if and only if $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is Newton non-degenerate at each point $q \in \pi^{-1}(p)$.

Proof. If $N = N_p^<(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ has no compact side with slope -1 , we are done by Corollary 3 and Lemma 5. Assume now that N has a compact side L_0 with slope -1 . By Corollary 3, it is enough to prove that (\mathcal{F}, L_0) is non-degenerate if and only if $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is Newton non-degenerate at every $q \in \mathcal{T}$, equivalently if and only if each $q \in \mathcal{T}$ is a presimple point. Let η' be as in the proof of Lemma 6. Noting that (\mathcal{F}, L_0) is non-degenerate if and only if (A_1, A_2) is non-degenerate, we are done in view of Corollary 2. \blacksquare

Corollary 4. Consider a CH-foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Let $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ be a finite composition of combinatorial blowing-ups. We have that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is Newton non-degenerate at a given point $p \in |M|$ if and only if $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is Newton non-degenerate at each point $q \in \pi^{-1}(p)$.

4.3 Equivalence statement

This subsection is devoted to prove the following result:

Theorem 3. A CH-foliated surface is Newton non-degenerate if and only if it is of weak toric type.

Let $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ be a foliated surface. Let us do the proof at each point $p \in |M|$.

1. $e_p(E) \leq 1$. We have, by definition, that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is Newton non-degenerate at p if and only if p is a presimple point. That happens if and only if $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of weak toric type at p , by Remark 6.
2. $e_p(E) = 2$. Assume that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of weak toric type at p . This means that there is a finite composition of combinatorial blowing-ups $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ such that each $q \in \pi^{-1}(p)$ is a presimple point. We have that $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is Newton non-degenerate for each $q \in \pi^{-1}(p)$, by definition. By Corollary 4, we obtain that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is Newton non-degenerate at p . In the opposite way, assume that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is Newton non-degenerate at p . Let us perform the combinatorial blowing-up $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ with center p . We have that $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is Newton non-degenerate for each $q \in \pi^{-1}(p)$ by the stability property stated in Proposition 2. As a consequence, the only non-presimple points $q \in \pi^{-1}(p)$ satisfy $e_q(E') = 2$. The situation repeats, since $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is again Newton non-degenerate at these points. This allow us to conclude that the minimal pre-reduction of singularities of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})_p$ is combinatorial and thus $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of weak toric type at p .

5 Non-degenerate Foliations on Projective Toric Surfaces

In this section we recall the definition of projective toric surfaces and some results about their birational geometry. We consider particularly Newton non-degenerate CH foliated surfaces defined on the complex projective plane $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ and we prove that the area of their homogeneous polygons is zero.

5.1 Birational geometry of toric ambient surfaces

The contents on this subsection can be essentially found at [5].

A *toric surface* is an irreducible complex surface S containing a two-dimensional complex torus $T \simeq (\mathbb{C}^*)^2$ as a Zariski open subset, such that the action of T on itself extends to an algebraic action on S . The natural blowing-ups in the category of toric surfaces are the ones compatible with the torus action (*equivariant*). This happens if and only if the center of the blowing-up is an orbit.

The union of the non-dense orbits of the torus action in a nonsingular toric surface S is a strong normal crossings divisor E_S . We say that the pair (S, E_S) is a *toric ambient surface*. The points $p \in |S|$ with $e_p(E_S) = 2$ are exactly the closed orbits of the torus action. As a consequence, in the category of toric surfaces, the equivariant blowing-ups are exactly the combinatorial ones.

Remark 20. In view of the fact that a nonsingular toric surface S gives in a natural way a toric ambient surface (S, E_S) , we use the expression *foliation \mathcal{F} on S* to make reference also to the foliated surface $((S, E_S), \mathcal{F})$.

Example 1. The first example of nonsingular projective toric surface is the projective plane $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. The torus action is given in homogeneous coordinates $[X_0, X_1, X_2]$ by

$$((t_1, t_2), [x_0, x_1, x_2]) \mapsto [x_0, t_1 x_1, t_2 x_2].$$

The associated divisor is given by the three coordinate lines $X_0X_1X_2 = 0$. The standard affine example of nonsingular toric surface is \mathbb{C}^2 . The torus action is given in coordinates (x_1, x_2) by

$$((t_1, t_2), (\alpha_1, \alpha_2)) \mapsto (t_1\alpha_1, t_2\alpha_2).$$

The associated divisor is given by the coordinate lines $x_1x_2 = 0$. When we refer to $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ or \mathbb{C}^2 as toric surfaces, we implicitly assume the above actions and coordinates.

The following result concerns the birational geometry of projective toric surfaces.

Theorem 4 (See [5]). Given two nonsingular projective toric surfaces S and S' , there is a nonsingular projective toric surface S'' and two finite sequences of equivariant blowing-ups $\pi : S'' \rightarrow S$, $\pi' : S'' \rightarrow S'$.

Corollary 5. A given nonsingular projective toric surface S is obtained from the toric surface $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ by a finite sequence $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow S$ of combinatorial blowing-ups and blowing-downs.

Proof. Take $S' = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ in Theorem 4. ■

5.2 Newton non-degenerate foliations on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

The aim of this subsection is to prove the following statement:

Proposition 3. The homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$ of a CH-Newton non-degenerate foliation \mathcal{F} on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ is a segment or a single point.

5.2.1 Foliation on the projective plane

Before doing the proof of the result, we recall basic definitions of foliations on the projective plane (see [4]) and we introduce the notion of homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$ of a foliation \mathcal{F} on the toric surface $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

A foliation \mathcal{F} on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ is given by a logarithmic homogeneous differential form

$$W = A_0dX_0/X_0 + A_1dX_1/X_1 + A_2dX_2/X_2, \quad A_i \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2], \quad i = 0, 1, 2,$$

where the coefficients A_i are homogeneous polynomials of the same degree $d_{\mathcal{F}}$, without common factor and such that $A_0 + A_1 + A_2 = 0$. We say that W is a *homogeneous generator of \mathcal{F}* . If W' is another homogeneous generator of \mathcal{F} , then $W' = kW$ with $k \in \mathbb{C}^*$ and conversely.

Remark 21. The number $d_{\mathcal{F}}$ does not coincide with the so-called degree of the foliation. For instance, if the divisor $X_0X_1X_2 = 0$ has no dicritical components, the foliation is given by the holomorphic form

$$X_0X_1X_2W = X_1X_2A_0dX_0 + X_0X_2A_1dX_1 + X_0X_1A_2dX_2,$$

without common factors in the coefficients. Hence, the foliation degree is equal to $d_{\mathcal{F}} + 1$. In a general way, the foliation degree is equal to $d_{\mathcal{F}} + 1 - \epsilon$, where ϵ is the number of dicritical components of $X_0X_1X_2 = 0$.

Definition 9. The *homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$ of a foliation \mathcal{F} on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}^2}$* is given by

$$\Delta_h(\mathcal{F}) = \text{convex hull}(\Delta(A_0) \cup \Delta(A_1) \cup \Delta(A_2)) \subset \mathbb{R}^3,$$

where $W = A_0dX_0/X_0 + A_1dX_1/X_1 + A_2dX_2/X_2$ is a homogeneous generator of \mathcal{F} .

Remark 22. Although $\Delta_h(\mathcal{F})$ is contained in \mathbb{R}^3 , the name ‘‘homogeneous polygon’’ is due to the fact that $\Delta_h(\mathcal{F}) \subset d_{\mathcal{F}}\Sigma_3^0$, where $\Sigma_3^0 = \{(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3; \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 1\}$. Note also that $\Delta_h(\mathcal{F}) \cap (\sigma_i = 0) \neq \emptyset$ for every $i = 0, 1, 2$, since the coefficients A_0, A_1, A_2 have no common factors.

We are interested in describing a foliation \mathcal{F} of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ in terms of affine charts. We read the complex projective plane $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ in affine charts $A_i = (X_i \neq 0) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, for $i = 0, 1, 2$. We identify each A_i with the affine toric variety \mathbb{C}^2 through the coordinates (x_j^i, x_k^i) given by $x_j^i = X_j/X_i$, $x_k^i = X_k/X_i$, for $j, k \neq i$. We denote by O_i to the origin of A_i . Note that $O_0 = [1, 0, 0]$, $O_1 = [0, 1, 0]$, $O_2 = [0, 0, 1]$. We also denote by D_i the divisor $E_{A_i} = (x_j^i x_k^i = 0)$. We call *affine i -chart* \mathcal{F}_i of \mathcal{F} to the restriction $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}|_{A_i}$. A generator of \mathcal{F}_i adapted to the divisor D_i is given by $\eta_i = a_j^i dx_j^i/x_j^i + a_k^i dx_k^i/x_k^i$, for $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, where $a_\ell^i = A_\ell(X_0/X_i, X_1/X_i, X_2/X_i) \in \mathbb{C}[x_j^i, x_k^i]$, for $\ell \in \{j, k\}$.

Definition 10. An algebraic foliation \mathcal{G} on the affine toric surface \mathbb{C}^2 is in *general position* if the pair (a_1, a_2) is in general position, where $\eta = a_1 dx_1/x_1 + a_2 dx_2/x_2$, with $a_1, a_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ is a generator of \mathcal{G} adapted to the divisor $E_{\mathbb{C}^2} = (x_1 x_2 = 0)$. The *affine polygon* $\Delta(\mathcal{G})$ of \mathcal{G} is defined by $\Delta(\mathcal{G}) = \Delta(a_1, a_2)$.

In particular, we have the affine polygons $\Delta(\mathcal{F}_i)$ associated to the affine i -charts of \mathcal{F} . The relationship between $\Delta_h(\mathcal{F})$ and $\Delta(\mathcal{F}_i)$ is given by $\Delta(\mathcal{F}_i) = \Phi_i^d(\Delta_h(\mathcal{F}))$, where $d = d_{\mathcal{F}}$ and Φ_i^d is the projection

$$\Phi_i^d : d\Sigma_3^0 \rightarrow d\Sigma_2 = \{(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2; \sigma_1 + \sigma_2 \leq d\}$$

defined by $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\sigma_j, \sigma_k)$, with $j, k \neq i$. We call to $\Delta(\mathcal{F}_i)$ the *i -chart of $\Delta_h(\mathcal{F})$* . Given a side L of $\Delta_h(\mathcal{F})$, the side $L_i = \Phi_i^d(L)$ of $\Delta(\mathcal{F}_i)$ is called the *i -chart of L* .

Let us describe now the relationship between the homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{G})$ and the Newton polygons $N_i = N_{\mathcal{O}_i}^{\prec_i}((A_i, D_i), \mathcal{F}_i)$, where the ordering \prec_i is given by the natural order of the indices, that is $(x_j^i = 0) \prec (x_k^i = 0)$ if and only if $j > k$. Note that $N_i = \text{convex hull}(\Delta(\mathcal{F}_i) + \mathbb{R}_{\geq 0}^2)$, then the compact sides of the Newton polygon N_i are some of the sides of the affine polygon $\Delta(\mathcal{F}_i)$. Let L be a side of $\Delta_h(\mathcal{F})$. We have that $L \subset \{\sigma \in d_{\mathcal{F}}\Sigma_3^0; \sigma_i = 0\}$ if and only if L_ℓ is contained in a non-compact side of N_ℓ for $\ell = j, k$. Otherwise, we have the following statement:

Lemma 8. Given a side L of $\Delta_h(\mathcal{F})$ such that $L \not\subset \{\sigma \in d_{\mathcal{F}}\Sigma_3^0; \sigma_\ell = 0\}$ for any $\ell = 0, 1, 2$, there is a unique affine chart A_i such that L_i is a compact side of N_i .

Proof. Consider the triangle given by $\Gamma_L^0 = \{\alpha(d, 0, 0) + (1 - \alpha)\sigma; 0 \leq \alpha \leq 1, \sigma \in L\}$. In the same way, define Γ_L^1 and Γ_L^2 . We have that $\Gamma_L^i \cap \Delta_h(\mathcal{F}) = L$ and $\text{Ar}(\Gamma_L^i) \neq 0$ if and only if L_i is a compact side of N_i . On the other hand, there is a unique $\ell \in \{0, 1, 2\}$ such that $\Gamma_L^\ell \cap \Delta_h(\mathcal{F}) = L$ and $\text{Ar}(\Gamma_L^\ell) \neq 0$, because of the convexity of $\Delta_h(\mathcal{F})$. ■

5.2.2 Proof of Proposition 3

Let \mathcal{F} be a foliation of the projective plane $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ and let $W = A_0 dX_0/X_0 + A_1 dX_1/X_1 + A_2 dX_2/X_2$ be a homogeneous generator of \mathcal{F} . Denote $d = d_{\mathcal{F}}$.

Let us consider a side L of the homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$. We give a description of the support-restrictions A_{jL} of A_j to L as follows.

1. When $L \subset \{\sigma \in d_{\mathcal{F}}\Sigma_3^0; \sigma_i = k\}$ for some $i \in \{0, 1, 2\}$ and $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. We detail the case $i = 0$, the other ones are done in a similar way. The A_{jL} are homogeneous polynomials of degree d of the form $A_{jL} = X_0^k \tilde{A}_{jL}$, with $\tilde{A}_{jL} \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$, for $j = 0, 1, 2$. That is

$$\tilde{A}_{jL} = X_1^{\sigma_1^j} X_2^{\sigma_2^j} \prod_{\ell=1}^{d_j} (X_2 - \alpha_{\ell j} X_1), \quad \sigma_1^j + \sigma_2^j + d_j = d - k.$$

2. Otherwise, up to reordering of the variables, there is a monomial X^σ such that for each $j = 0, 1, 2$, we have $A_{jL} = X^\sigma \tilde{A}_{jL}$, where the $\tilde{A}_{jL} \in \mathbb{C}[U, V]$ are homogeneous polynomials of degree n with $U = X_0^{\tilde{d}}$, $V = X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}}$, $\tilde{d}n = d - |\sigma|$ and $0 < \tilde{a} < \tilde{d}$. That is,

$$\tilde{A}_{jL} = (X_0^{\tilde{d}})^{u_j} (X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}})^{v_j} \prod_{\ell=1}^{n_j} (X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}} - \alpha_{\ell j} X_0^{\tilde{d}}); \quad u_j + v_j + n_j = n.$$

Remark 23. The cases above can be considered in a unified way by writing $U = X_1, V = X_2$ when we are in the first one.

Lemma 9. Let L be a side of $\Delta_h(\mathcal{F})$ and let L_i be the i -chart of L . The following assertions are equivalent:

1. There is an index $i \in \{0, 1, 2\}$ such that (\mathcal{F}^i, L_i) is non-degenerate.
2. For any index $i \in \{0, 1, 2\}$, we have that (\mathcal{F}^i, L_i) is non-degenerate.

Proof. Take notations as in Remark 23. Consider $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ and suppose that $(a_{jL_i}^i, a_{kL_i}^i)$ is degenerate, that is, they have a non-monomial common factor. Since

$$a_{\ell L_j}^i = A_{\ell L}(X_0/X_i, X_1/X_i, X_2/X_i), \ell = j, k,$$

the factor comes from a common factor $V - \alpha U$ of A_{jL}, A_{kL} . As a consequence $V - \alpha U$ also divides A_{iL} , since $A_{0L} + A_{1L} + A_{2L} = 0$. Then $(a_{iL_j}^j, a_{kL_j}^j)$ and $(a_{iL_k}^k, a_{jL_k}^k)$ are also degenerate. ■

We say that (\mathcal{F}, L) is *non-degenerate* when the equivalent conditions of Lemma 9 hold.

Lemma 10. If \mathcal{F} is a CH Newton non-degenerate foliation on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, then each affine i -chart \mathcal{F}_i is in general position, for $i = 0, 1, 2$.

Proof. In view of Lemma 9, it is enough to prove that given a side L of $\Delta_h(\mathcal{F})$, there is an index $i \in \{0, 1, 2\}$ such that (\mathcal{F}_i, L_i) is non-degenerate. Let us do it.

If $L \subset \{\sigma \in d\Sigma_3^0; \sigma_1 = 0\}$, then $L_0 \subset \{(\tau_1, \tau_2) \in \Sigma_2; \tau_1 = 0\}$ and $a_{1L_0}^0, a_{2L_0}^0$ are polynomials in the single variable x_2^0 . Moreover, we can write

$$a_1^0 = a_{1L_0}^0 + x_1^0 \tilde{a}_1^0, \quad a_2^0 = a_{2L_0}^0 + x_1^0 \tilde{a}_2^0.$$

If $(a_{1L_0}^0, a_{2L_0}^0)$ is degenerate, then there is $\lambda \in \mathbb{C}^*$ with $a_{1L_0}^0(\lambda) = a_{2L_0}^0(\lambda) = 0$. This implies that the point $[1, 0, \lambda] \in A_0$ is non-presimple for \mathcal{F} . This is impossible, since \mathcal{F} is of weak toric type, by Theorem 3. Then (\mathcal{F}_0, L_0) is non-degenerate. We reason in a similar way when $L \subset \{\sigma \in d\Sigma_3^0; \sigma_\ell = 0\}$, for $\ell = 0, 2$.

Otherwise, by Lemma 8, there is a unique $i \in \{0, 1, 2\}$ such that that L_i is a compact side of $N_{O_i}^{\succ i}((A_i, E_{A_i}), \mathcal{F}_i)$. Then, by definition, we have that (\mathcal{F}_i, L_i) is non-degenerate. ■

Proof of Proposition 3. Let us work in the 0-chart \mathcal{F}_0 . In view of Lemma 10, we have that \mathcal{F}_0 is in general position. As a consequence, given a side L_0 of $\Delta(\mathcal{F}_0) = \Delta(a_1^0, a_2^0)$, we have that (\mathcal{F}_0, L_0) is non-degenerate and $\Delta(a_1^0) \cap L_0 \neq \emptyset, \Delta(a_2^0) \cap L_0 \neq \emptyset$, by Remark 14. The fact of being \mathcal{F} Newton non-degenerate also implies that $(a_1^0 = a_2^0 = 0) \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \emptyset$. Applying Theorem 2 we conclude that $\text{MA}(\Delta(a_1^0), \Delta(a_2^0)) = 0$. Now, by Remark 11, we have two options, up to reordering, for $\Delta(a_1^0)$ and $\Delta(a_2^0)$:

1. The affine polygon $\Delta(a_1^0)$ is a single point σ . In this case σ belongs to each side of $\Delta(\mathcal{F}_0)$. This implies that $\Delta(\mathcal{F}_0)$ is a single point or a segment.
2. The affine polygons $\Delta(a_1^0)$ and $\Delta(a_2^0)$ are parallel segments $L_1 = \Delta(a_1^0), L_2 = \Delta(a_2^0)$. Recall that $\Delta(\mathcal{F}_0)$ is the convex hull of $L_1 \cup L_2$. If $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, then $\Delta(\mathcal{F}_0)$ is a segment. If $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, then $\Delta(\mathcal{F}_0)$ has four sides where L_1 and L_2 are two of them. This contradicts the fact that $L_1 = \Delta(a_1^0)$ intersects L_2 .

Thus, we have that $\Delta(\mathcal{F}_0)$ is a segment or a single point and the same happens with $\Delta_h(\mathcal{F})$. ■

6 Isolated Invariant Curves

The main goal of this section is to prove that the isolated invariant branches of Newton non-degenerate foliations on projective toric ambient surfaces have a global nature. We also give local and global results about the existence of isolated invariant branches in the weak toric type and in the toric type contexts.

6.1 Global nature of isolated invariant branches

The objective of this subsection is to prove the following result:

Theorem 5. The isolated invariant branches of a CH-Newton non-degenerate foliation on a projective toric surface extend to projective algebraic curves.

Since being Newton non-degenerate is equivalent to being of weak toric type in the complex hyperbolic frame, the previous result can be stated as follows:

“The isolated invariant branches of a CH-weak toric type foliation on a projective toric surface extend to projective algebraic curves”.

Let \mathcal{F} be a CH-Newton non-degenerate foliation on a projective toric surface S . In view of Theorem 4, there is a finite sequence of combinatorial blowing-ups and blowing-downs $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow S$. The transform \mathcal{F}' of the foliation \mathcal{F} by this sequence is a Newton non-degenerate foliation on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, by the stability property stated in Proposition 2. If we prove that all the isolated invariant branches of \mathcal{F}' extend to projective algebraic curves, we have proved also that the property holds for \mathcal{F} , because of the stability property of the isolated invariant branches stated in Proposition 1.

As a consequence, it is enough to prove the result when \mathcal{F} is defined on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Recall that we have, up to reordering, three cases for the homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$:

- a) It is a single point.
- b) It is the segment joining the points $(0, d, 0)$ and $(0, 0, d)$, with $d > 0$.
- c) It is the segment joining the points $(d, 0, 0)$ and $(0, a, d - a)$, with $0 < a < d$.

Case a). There are no isolated invariant branches. Let us see it. A homogeneous generator W is given by

$$W = \lambda_0 dX_0/X_0 + \lambda_1 dX_1/X_1 + \lambda_2 dX_2/X_2, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 0, 1, 2.$$

If $\lambda_0 = 0$, we have $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \text{Sing}(\mathcal{F}) = \{O_0\}$ and O_0 is a corner presimple singularity without isolated invariant branches through it.

If $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, we have $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \text{Sing}(\mathcal{F}) = \{O_0, O_1, O_2\}$. All the singularities are presimple corners, so there are no isolated invariant branches through them.

Case b). The only isolated invariant branches are contained in a finite family of lines through O_0 . Let us prove it. A homogeneous generator W of \mathcal{F} is given by

$$W = A_0(X_1, X_2)dX_0/X_0 + A_1(X_1, X_2)dX_1/X_1 + A_2(X_1, X_2)dX_2/X_2, \quad A_0 + A_1 + A_2 = 0,$$

where the A_i are homogeneous of degree d . Let us consider the set $\mathcal{P}_{\Lambda_{\mathcal{F}}} = \{[0, 1, \lambda] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2; \lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}\}$, where $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; A_0(1, \lambda) = 0\}$. Note that:

1. $X_0 = 0$ is invariant.
2. $\mathcal{P}_{\Lambda_{\mathcal{F}}} \cup \{O_0\} \subset \text{Sing}(\mathcal{F}, E) \subset \mathcal{P}_{\Lambda_{\mathcal{F}}} \cup \{O_0, O_1, O_2\}$.

3. $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}) \subset \{O_0\}$.

The point $O_i \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ if and only if $X_j = 0$ is invariant, for $\{i, j\} = \{1, 2\}$. In this case, it is a corner type presimple point and there are no isolated invariant branches through it.

A point $P_\lambda \in \mathcal{P}_{\Lambda_{\mathcal{F}}}$ is a trace type presimple singularity. The germ of the line $\ell_\lambda = (X_2 - \lambda X_1 = 0)$ at P_λ is an invariant branch. By Lemma 3, there are no isolated branches through P_λ different from $(\ell_\lambda, P_\lambda)$.

The point O_0 is non-presimple and it belongs to the lines $\ell_\lambda = (X_2 - \lambda X_1 = 0)$. Let us prove that the isolated invariant branches at O_0 are among the germs (ℓ_λ, O_0) , with $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$. Let us work in the affine 0-chart. A generator η_0 of \mathcal{F}_0 is given by

$$\eta_0 = A_1(x_1^0, x_2^0)dx_1^0/x_1^0 + A_2(x_1^0, x_2^0)dx_2^0/x_2^0.$$

The blowing-up at O_0 is determined, in the first chart, by the equations $x_1^0 = u$, $x_2^0 = uv$. Denote by p_0 the point $u = v = 0$. A local generator at p_0 of the transform \mathcal{F}' of \mathcal{F} is $(A_1 + A_2)(1, v)du/u + A_2(1, v)dv/v$. Note that $\{\lambda \in \mathbb{C}^*; (A_1 + A_2)(1, \lambda) = 0\} = \Lambda_{\mathcal{F}}$, since $A_1 + A_2 = -A_0$. The points $p'_\lambda = (u = 0, v = \lambda)$, with $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ are trace type presimple singularities, since \mathcal{F} is of weak toric type. The strict transform of the branches (ℓ_λ, O_0) with $\lambda \in \Lambda$ are the invariant branches $(\ell'_\lambda, p'_\lambda)$, where $\ell'_\lambda = (y_2 - \lambda = 0)$. On the other hand, we have that p_0 is a corner type presimple point, because of Remark 16. Analogously, the origin of the second chart p_∞ is also a corner type presimple point. Hence, after blowing-up, the isolated invariant branches are among $(\ell'_\lambda, p'_\lambda)$ with $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$. By the stability property established in Proposition 1, there are no isolated invariant branches at O_0 different from (ℓ_λ, O_0) with $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$.

Case c). Let us prove that the only isolated invariant branches are contained in a finite family of curves of the type $X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}}X_2^{\tilde{a}} - \lambda X_0^{\tilde{d}} = 0$. Note that, they are locally cusps at the points O_1 and O_2 . A homogeneous generator of \mathcal{F} is given by

$$W = A_0dX_0/X_0 + A_1dX_1/X_1 + A_2dX_2/X_2, \quad A_0 + A_1 + A_2 = 0,$$

where the A_i belong to $\mathbb{C}[U, V]$, with $U = X_0^{\tilde{d}}$, $V = X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}}X_2^{\tilde{a}}$, $d = \tilde{d}n$, $a = \tilde{a}n$ and $n = \text{gcd}(d, a)$. Note that:

1. $X_1 = 0, X_2 = 0$ are not dicritical simultaneously.
2. $\{O_1, O_2\} \subset \text{Sing}(\mathcal{F}, E) \subset \{O_0, O_1, O_2\}$.
3. $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}) \subset \{O_1, O_2\}$.

The point $O_0 \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ if and only if $X_1 = 0, X_2 = 0$ are both invariant. In this case, it is a corner type presimple singularity and there are no isolated invariant branches through it.

Let us consider the subset of \mathbb{C}^* given by $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; (\tilde{a}A_0 + \tilde{d}A_2)(1, \lambda) = 0\}$ and the closed curves $\mathcal{C}_\lambda = (X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}}X_2^{\tilde{a}} - \lambda X_0^{\tilde{d}} = 0)$ with $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$. Note that O_1, O_2 belong to \mathcal{C}_λ and $(\mathcal{C}_\lambda, O_1), (\mathcal{C}_\lambda, O_2)$ are invariant branches. Let us prove that the isolated invariant branches for \mathcal{F} are among these ones. We do the proof at O_1 and a similar argument works at O_2 . To do it, let us work in the affine 1-chart. The point O_1 is a non-presimple point and a generator of \mathcal{F}_1 adapted to D_1 is given by

$$\eta_1 = A_0(x_0^1, 1, x_2^1)dx_0^1/x_0^1 + A_2(x_0^1, 1, x_2^1)dx_2^1/x_2^1.$$

Observe that $A_0(x_0^1, 1, x_2^1)$ and $A_2(x_0^1, 1, x_2^1)$ are quasi-homogeneous polynomials with weight vector (\tilde{a}, \tilde{d}) . Equivalently, the Newton polygon $N_{O_1}^{\leq 1}((A_1, D_1), \mathcal{F}_1)$ has exactly one compact side, whose slope is $-\tilde{a}/\tilde{d}$. In order to prove the result, we consider the composition

$$((\tilde{A}_1, \tilde{D}_1), \tilde{\mathcal{F}}_1) \xrightarrow{\pi} ((A'_1, D'_1), \mathcal{F}'_1) \xrightarrow{\sigma} ((A_1, D_1), \mathcal{F}_1)$$

of the finite sequence of combinatorial blowing-ups that provides the minimal reduction of singularities of the cusp $(x_2^1)^{\tilde{a}} - (x_0^1)^{\tilde{d}} = 0$, where π is the last blowing-up. Note that $e_q(E') = 2$, where q is the center of π . The morphism σ is given in affine coordinates (u, v) centered at q by $x_0^1 = u^\alpha v^\beta$; $x_2^1 = u^\gamma v^\delta$, where $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ is the only solution of the diophantine system

$$\alpha + \beta = \tilde{a}; \quad \gamma + \delta = \tilde{d}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

A local generator η'_1 of \mathcal{F}'_1 adapted to D'_1 at q is given by

$$u^{\gamma\alpha} v^{\beta\delta} \eta'_1 = A_0(u^\alpha v^\beta, 1, u^\gamma v^\delta)(\alpha du/u + \beta dv/v) + A_2(u^\alpha v^\beta, 1, u^\gamma v^\delta)(\gamma du/u + \delta dv/v).$$

We make the following remarks:

1. The Newton polygon $N'_q((A'_1, D'_1), \mathcal{F}'_1)$ has exactly one compact side, which has slope -1 .
2. For each $s \in \text{Sing}(\mathcal{F}'_1, D'_1)$ we have $e_s(D'_1) = 2$. This follows from Remark 19 and the behaviour by blowing-up of the compact sides of the Newton polygon explained in Subsection 4.2.
3. Each $s \in \text{Sing}(\mathcal{F}'_1, D'_1) \setminus \{q\}$ is a corner type presimple singularity, in view of Remark 16.
4. The strict transform of the algebraic curve \mathcal{C}_λ is the line $\ell_\lambda = (v - \lambda u = 0)$.

By Lemma 3, the strict transform of all the isolated invariant branches through O_1 passes through q . The, the problem is reduced to show that there are no isolated invariant branches at q different from (ℓ_λ, q) with $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$. This is done by similar computations to the ones in case b).

Remark 24. The set $\Lambda_{\mathcal{F}}$ is not empty. In fact, when $\Delta_h(\mathcal{F})$ is in case b) it has d elements and when $\Delta_h(\mathcal{F})$ is in case c) it has n elements. Let us prove the result for case b), the other case is done in a similar way, working after pre-reduction of singularities. We need to prove that A_0 has not multiple factors and also that X_1, X_2 do not divide A_0 . Let $X_2 - \lambda X_1$ be a multiple factor of A_0 . A local generator of \mathcal{F} adapted to $E_{\mathbb{P}^2_c}$ at P_λ is given by

$$y^2 \bar{A}_0(1, y + \lambda) dx_0^1/x_0^1 + A_2(1, y + \lambda) dy, \quad A_2(1, \lambda) \neq 0, \quad A_0 = (X_2 - \lambda X_1)^2 \bar{A}_0$$

This means that P_λ is a saddle-node. This is impossible because \mathcal{F} is CH. Suppose now that $A_0 = X_1 \bar{A}_0$. A local generator of \mathcal{F} adapted to $E_{\mathbb{P}^2_c}$ at O_1 is given by

$$x_2^1 \bar{A}_0(1, x_2^1) dx_0^1/x_0^1 + A_2(1, x_2^1) dx_2^1/x_2^1, \quad A_2(1, 0) \neq 0.$$

We conclude that O_1 is a saddle-node, that can not hold. Analogously X_2 does not divide A_0 .

6.2 Existence of isolated invariant branches

We present a local result of existence of isolated invariant branches for toric type foliated surfaces. To do it, we use the following result of stability:

Lemma 11. Let us consider a CH foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, a point $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ and a combinatorial blowing-up $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$. We have that p is a presimple corner type point if and only if each point $p' \in \pi^{-1}(p) \cap \text{Sing}(\mathcal{F}', E')$ is presimple of corner type point.

Proof. It is enough to do the proof when p is the center of blowing-up.

In Subsection 2.2, we have proved that each point $p' \in \pi^{-1}(p) \cap \text{Sing}(\mathcal{F}', E') = \pi^{-1}(p) \cap \text{Sing}(\mathcal{F}')$ is a presimple singularity of corner type when p is a corner type presimple point. Now, we have to prove that p is a corner type presimple point assuming that each $p' \in \pi^{-1}(p) \cap \text{Sing}(\mathcal{F}', E')$ is a presimple of corner type. We distinguish two cases:

The blowing-up is non-dicritical. Given $p' \in \pi^{-1}(p)$, we have that

$$\nu_{p'}(\mathcal{F}') = \mu_{p'}(\mathcal{F}') = \begin{cases} 0 & \text{if } e_{p'}(E'_{\text{inv}}) = 1 \\ 1 & \text{if } e_{p'}(E'_{\text{inv}}) = 2 \end{cases} \quad (\text{recall that } \mathcal{F}' \text{ is CH}),$$

where $\nu_{p'}(\mathcal{F}')$ denotes the algebraic multiplicity of \mathcal{F}' at p' and $\mu_{p'}(\mathcal{F}')$ denotes the Milnor number of \mathcal{F}' at p' (see [4]). Consider the Noether type formula (see [3])

$$\mu_p(\mathcal{F}) - \nu_p(\mathcal{F})^2 = S_p - (\nu_p(\mathcal{F}) + 1) \geq 0, \quad S_p = \sum_{p' \in \pi^{-1}(p)} \mu_{p'}(\mathcal{F}').$$

Thus, we have $1 \leq S_p \leq 2$. If $S_p = 1$, then $\nu_p(\mathcal{F}) = 0$ and $e_p(E_{\text{inv}}) = 1$; this means that p is a regular point and \mathcal{F}, E have normal crossings at p . If $S_p = 2$, then $\nu_p(\mathcal{F}) \in \{0, 1\}$ and $e_p(E_{\text{inv}}) = 2$; thus, necessarily $\nu_p(\mathcal{F}) = 1$. Observe that we have $\nu_p(\mathcal{F}, E) = \nu_p(\mathcal{F}) + 1 - e_p(E_{\text{inv}}) = 1 + 1 - 2 = 0$, then p is a corner type presimple singularity for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

The blowing-up is dicritical. We necessarily have $\text{Sing}(\mathcal{F}', E') = \emptyset$, this means that p is singular, $e_p(E_{\text{inv}}) = 2$ and there is a germ of vector field tangent to \mathcal{F} whose linear part is the identity up to a factor (radial case). Then, p is a presimple corner type singularity. \blacksquare

Proposition 4. Assume that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of toric type at a point $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$. If p is not a presimple point of corner type, there is an isolated invariant branch (Γ, p) through it.

Proof. If $e_p(E) = 1$, then p is necessarily a trace type simple singularity. Then, there is an only isolated invariant branch through p , by Remark 9. If $e_p(E) = 2$, we consider the composition $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ of a finite sequence of combinatorial blowing-ups inducing a reduction of singularities over p . As a result of Lemma 11, there is a trace type simple singularity $p' \in \pi^{-1}(p)$ and an isolated invariant branch (Γ', p') through p' . Then (Γ, p) is an isolated invariant branch for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, where (Γ, p) is the image of (Γ', p') . \blacksquare

This proposition does not hold when $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is just of weak toric type at p : for instance, when $e_p(E) = 1$ and the foliation is locally defined by the radial vector field. Nevertheless, when we work in a global way with weak toric type foliations on toric projective surfaces, we give a result of existence of isolated invariant branches, that we state in Proposition 5.

Let \mathcal{F} be a CH weak toric type foliation on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. We take notations as in Subsection 6.1, recalling, in particular the existence of the cases a), b) and c) for the homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$.

Assume that $\Delta_h(\mathcal{F})$ is not a single point. Consider $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ and denote

$$Y = \ell_{\lambda}, P_1 = P_{\lambda} \text{ and } P_2 = O_0, \text{ if } \Delta_h(\mathcal{F}) \text{ is in case b).}$$

$$Y = \mathcal{C}_{\lambda}, P_1 = O_1 \text{ and } P_2 = O_2, \text{ if } \Delta_h(\mathcal{F}) \text{ is in case c).}$$

We have that $Y \cap E = \{P_1, P_2\}$ and P_1, P_2 are not presimple corner type points of $\text{Sing}(\mathcal{F}, E)$. Moreover, the germs (Y, P_1) and (Y, P_2) are irreducible branches: in case b) they are lines and in case c) they are cusps of types $(\tilde{d}, \tilde{d} - \tilde{a})$ and (\tilde{d}, \tilde{a}) , respectively. Let

$$\pi : ((M', E'), \mathcal{F}') \rightarrow ((\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2, E_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}), \mathcal{F})$$

be a combinatorial pre-reduction of singularities and denote by Y' the strict transform of Y by π . We have that $Y' \cap E' = \{p'_1, p'_2\}$, where each $p'_i \in \pi^{-1}(P_i)$ is a trace type presimple singularity, for $i = 1, 2$. Let ξ_i be a germ of vector field at p'_i tangent to \mathcal{F}' with non-nilpotent linear part L_{ξ_i} and denote by $r(L_{\xi_i}) = \{\alpha_i, 1/\alpha_i\}$ the ratio of its eigenvalues.

Lemma 12. We have $r(L_{\xi_1}) = -r(L_{\xi_2})$. In particular, there is a simple singularity between p'_1 and p'_2 .

Proof. In case b), the eigenvalues of L_{ξ_1} are $\bar{A}_0(1, \lambda)$ and $-A_2(1, \lambda)$, where $A_0 = (x_2 - \lambda X_1)\bar{A}_0$. The eigenvalues of L_{ξ_2} are $-\bar{A}_0(1, \lambda)$ and $-A_2(1, \lambda)$, since $A_1 + A_2 = -A_0$.

In case c), consider the sequence of combinatorial blowing-ups that provides the minimal reduction of singularities of the cusp (Y, P_1) . It is given in affine coordinates (u_1, v_1) centered at p'_1 by $x_0^1 = u_1^{\tilde{a}}(v_1 + \lambda)^\beta$ and $x_2^1 = u_1^{\tilde{d}}(v_1 + \lambda)^\delta$. A local generator of the strict transform of \mathcal{F} adapted to the divisor $(u_1 = 0)$ is given by

$$(\tilde{a}A_0 + \tilde{d}A_2)(1, v_1 + \lambda) \frac{du_1}{u_1} + \frac{(\beta A_0 + \delta A_2)(1, v_1 + \lambda)}{v_1 + \lambda} dv_1,$$

and the eigenvalues of L_{ξ_1} are

$$\mu_1 = -\frac{(\beta A_0 + \delta A_2)(1, \lambda)}{\lambda}, \quad \rho_1 = \frac{\tilde{a}A_0 + \tilde{d}A_2}{X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}} - \lambda X_0^{\tilde{d}}}(1, \lambda).$$

The sequence of combinatorial blowing-ups obtained following the infinitely near points of the cusp (Y, P_2) is given in affine coordinates (u_2, v_2) centered at p'_2 by $x_0^2 = u_2^{\tilde{d}-\tilde{a}}(v_2 + 1/\lambda)^{\delta-\beta}$, $x_1^2 = u_2^{\tilde{d}}(v_2 + 1/\lambda)^\delta$. A local generator of the strict transform of \mathcal{F} adapted to the divisor $(u_2 = 0)$ is given by

$$((\tilde{d} - \tilde{a})A_0 + \tilde{d}A_1)(v_2 + 1/\lambda, 1) \frac{du_2}{u_2} + \frac{((\delta - \beta)A_0 + \delta A_1)(v_2 + 1/\lambda, 1)}{v_2 + 1/\lambda} dv_2,$$

and the eigenvalues of L_{ξ_2} are

$$\mu_2 = -\frac{((\delta - \beta)A_0 + \delta A_1)(1/\lambda, 1)}{\frac{1}{\lambda}}, \quad \rho_2 = \frac{(\tilde{d} - \tilde{a})A_0 + \tilde{d}A_1}{-\frac{1}{\lambda} X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}} + X_0^{\tilde{d}}}(1/\lambda, 1).$$

We have the relations $\mu_1 = -\lambda^{n-2}\mu_2$ and $\rho_1 = \lambda^{n-2}\rho_2$, since $A_1 = -(A_0 + A_2)$. Hence $r(L_{\xi_1}) = -r(L_{\xi_2})$ \blacksquare

Remark 25. When \mathcal{F} is of toric type, p'_1 and p'_2 are both trace type simple singularities. Hence (Y, P_1) and (Y, P_2) are isolated invariant branches.

Proposition 5. Let \mathcal{F} be a weak toric type foliation on a projective toric surface S . Assume that there is a point $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ which is not presimple of corner type. Then, there is an isolated invariant branch (Γ, q) passing through some $q \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E_S)$.

Proof. It is enough to do the proof when $S = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, because of Lemma 11 and the stability of the isolated invariant branches by combinatorial blowing-ups and blowing-downs stated in Proposition 1. When the homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$ has a single vertex, all the points in $\text{Sing}(\mathcal{F}, E_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2})$ are presimple of corner type. As a consequence $\Delta_h(\mathcal{F})$ is not a single vertex and it is in case b) or in case c). By Lemma 12, there is a trace type simple singularity q' after performing a pre-reduction of singularities that we denote by π . The (only) invariant branch (Y', q') through q' provides an isolated invariant branch (Y, q) through $q = \pi(q') \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2})$. \blacksquare

When we are in the toric type case, we can say even more:

Proposition 6. Let us consider a toric type foliation \mathcal{F} on a projective toric surface S and an isolated invariant branch (Γ, p) . Let Y be a projective algebraic curve extending (Γ, p) . We have that any branch $(Y, q) \subset (Y, p)$ with $q \in Y \cap E$ is an isolated invariant branch.

Proof. Follows essentially from Theorem 5 and Remark 25. \blacksquare

7 Rational First Integrals and Global Invariant Curves

In this section we prove the following property for toric type foliations on projective toric surfaces: Either there are finitely many global invariant curves different from the divisor, all of them extending isolated invariant branches, or there are infinite many global invariant curves (there is rational first integral), but there is no place for isolated invariant branches.

We say that an invariant branch (Γ, p) of a foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is *proper for* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ when $p \in E$ and $(\Gamma, p) \not\subset (E, p)$. This property is stable by combinatorial blowing-ups and blowing-downs. When $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of weak toric type, all the isolated invariant branches are proper, since every singularity belongs to the divisor.

Theorem 6. We have the following dichotomy for a toric type foliation \mathcal{F} on a projective toric surface S :

- I) There is rational first integral and there are no isolated invariant branches.
- II) There is no rational first integral and every proper invariant branch extending to a projective algebraic curve is an isolated invariant branch.

It is enough to prove the dichotomy for the case $S = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Indeed, having rational first integral, being a projective algebraic curve, being invariant, proper and isolated are properties that have a good behaviour under blowing-ups and blowing-downs.

Remark 26. Every global invariant curve Y extends a proper branch. To see it, just note that we have $Y \cap (X_i = 0) \neq \emptyset$, when $S = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$.

Remark 27. If \mathcal{F} has rational first integral Φ , there are infinitely many invariant curves for \mathcal{F} . To see it, observe that $\lambda F - \mu G = 0$ are isolated invariant curve for each $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, when $S = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ and $\Phi = F/G$.

Assume $S = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. We distinguish between the cases a), b) and c) for the homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{F})$ and we take notations as in Subsection 6.1.

Case a). There are no isolated invariant branches for \mathcal{F} . We have two options:

- The points O_0, O_1, O_2 are all simple corners. The components of the divisor $X_i = 0$ are invariant, for $i = 0, 1, 2$. Assume that there is a global invariant curve Y different from this ones. We have that Y cuts $X_0 = 0$ at singular points. They are necessarily O_1 or O_2 , what contradicts the fact that O_1 and O_2 are simple singularities. As a consequence, such a Y can not exist. In particular, there is no rational first integral for \mathcal{F} and we are in situation II).
- One of the O_i is presimple but non-simple, say O_0 . We have that

$$\lambda_0 = m - n, \lambda_1 = n, \lambda_2 = -m, \quad n, m \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Then $d(X_0^{m-n} X_1^n X_2^{-m})$ is a rational first integral and we are in situation I).

Case b). Let us see that situation II) holds. By Remark 25, we have that $(\ell_\lambda, O_0), (\ell_\lambda, P_\lambda)$ are isolated invariant branches for every $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ and they are the only ones. Then, it just remains to prove that a global invariant curve is either a component of the divisor or a line ℓ_λ with $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$.

Let Y be a global irreducible invariant curve of degree r different from ℓ_{λ_0} for some $\lambda_0 \in \Lambda_{\mathcal{F}}$. The curve Y intersects ℓ_{λ_0} in r singular points (counted with multiplicity). They are necessarily O_0 or P_{λ_0} and in fact, just O_0 , since P_{λ_0} is a simple singularity. If Y is a line, it cuts transversally ℓ_{λ_0} at O_0 and it intersects $X_0 = 0$ in a single singularity. As a consequence it is $X_1 = 0, X_2 = 0$ or a line ℓ_λ with $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}} \setminus \{\lambda_0\}$. Otherwise, if $r > 1$, we have that Y and ℓ_{λ_0} have the same tangent at O_0 . When we perform the blowing-up, we obtain three invariant branches passing through p'_{λ_0} : the exceptional divisor, ℓ'_{λ_0} and the strict transform Y' of Y . This contradicts the fact that p'_{λ_0} is a simple singularity.

Case c). Let us prove that situation II) holds. Like in case b), the problem is reduced to show that a global invariant curve is either a component of the divisor or one of the curves $\mathcal{C}_\lambda^{\mathcal{F}} = \mathcal{C}_\lambda$ with $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{F}}$.

We take the rational map $\varphi : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus [0, 0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ given in coordinates by

$$Y_0 = X_0^{\tilde{d}}, Y_1 = X_1^{\tilde{d}-\tilde{a}} X_2^{\tilde{a}}, Y_2 = X_2^{\tilde{d}}.$$

This map is compatible with the torus action. A homogeneous generator W of \mathcal{F} is given by

$$W = A_0(Y_0, Y_1) dX_0/X_0 + A_1(Y_0, Y_1) dX_1/X_1 + A_2(Y_0, Y_1) dX_2/X_2,$$

where the coefficients A_i are homogeneous polynomials of degree n and $A_0 + A_1 + A_2 = 0$. We have that \mathcal{F} is the pull-back by φ of a the toric type foliation \mathcal{G} of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ generated by

$$\Omega = (\tilde{d} - \tilde{a})A_0 dY_0/Y_0 + \tilde{d}A_1 dY_1/Y_1 + (-\tilde{a}A_1 + (\tilde{d} - \tilde{a})A_2) dY_2/Y_2.$$

The homogeneous polygon $\Delta_h(\mathcal{G})$ is in case b). Moreover, we have

$$\Lambda = \Lambda_{\mathcal{G}} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; (-\tilde{a}A_1 + (\tilde{d} - \tilde{a})A_2)(1, \lambda) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C}^*; (\tilde{a}A_0 + \tilde{d}A_2)(1, \lambda) = 0\} = \Lambda_{\mathcal{F}}.$$

As a consequence, there is a biunivocal relation between $\mathcal{C}_\lambda^{\mathcal{F}}$ and $\ell_\lambda^{\mathcal{G}}$. More precisely

$$\varphi(\mathcal{C}_\lambda^{\mathcal{F}}) = \ell_\lambda^{\mathcal{G}}, \quad \varphi^{-1}(\ell_\lambda^{\mathcal{G}}) = \mathcal{C}_\lambda^{\mathcal{F}}.$$

Let $Y \not\subset (X_0 X_1 X_2 = 0)$ be a global curve invariant for \mathcal{F} . We have that $\varphi(Y) \not\subset (Y_0 Y_1 Y_2 = 0)$ and it is a global curve invariant for \mathcal{G} . By the study of case b), there is a $\lambda \in \Lambda$ such that $\varphi(Y) = \ell_\lambda^{\mathcal{G}}$ and hence $Y = \mathcal{C}_\lambda^{\mathcal{F}}$.

Fundings

The author is partially supported by the Ministerio de Educación, Cultura y Deporte of Spain (FPU14/02653 grant) and by the Ministerio de Economía y Competitividad from Spain, under the Project “Algebra y geometría en sistemas dinámicos y foliaciones singulares.” (Ref.: MTM2016-77642-C2-1-P).

Acknowledgements

I would like to express my deepest gratitude to Professor Felipe Cano for his unconditional supervision of this work. I would also like to thank Professor Clementa Alonso for all her suggestions.

References

- [1] D.N. Bernshtein, *The number of roots of a system of equations*. Funktsional’nyi Analiz i Ego Prilozheniya Vol.9, No. 3, pp. 1-4 (1975) (Russian). English translation in Functional Analysis and its Applications 9, No. 3, pp. 183-185 (1975).
- [2] M.I. Camacho, F. Cano, *Singular foliations of toric type*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 6^e série, tome 8, No. 1, pp. 45-52 (1999).
- [3] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*. J. Differential Geometry Vol. 20 No. 1, pp. 143-174 (1984).
- [4] F. Cano, D. Cerveau, J. Déserti, *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Berlin Education Editions. ISBN-13: 978-2701174846 (2013).

- [5] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Springer-Verlag ISBN-10: 0-387-94755-8 (1996).
- [6] J. P. Jouanolou, *Équations de Pfaff algébriques*. Lecture Notes in Mathematics, 708. Springer-Verlag ISBN-10: 3-540-09239-0 (1979)
- [7] A.G. Khovanskii, *Newton polyhedra (algebra and geometry)*. American Mathematical Society Translations (2), Vol. 153 (1992).
- [8] A.G. Kushnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*. Invent. Math. 32, No. 1, pp. 1-31 (1976).
- [9] M. Oka, *Non-degenerate complete intersection singularity*. Actualités Mathématiques. Hermann, Paris, viii+309, pp. 220. (1997).
- [10] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation $Ady=Bdx$* . Amer. J. Math., 90 pp. 248-269 (1968).

Anexo III: Invariant Surfaces for Toric Type Foliations in Dimension Three.

- Manuscrito subido a ArXiv.
- Sometido para su publicación.
- <https://arxiv.org/pdf/1905.00836.pdf>.

Invariant Surfaces for Toric Type Foliations in Dimension Three

Beatriz Molina-Samper

Abstract

In this paper we show that every toric type foliation on $(\mathbb{C}^3, 0)$, without saddle-nodes, has invariant surface. The difficulty concentrates at the compact dicritical components of the exceptional divisor of the (combinatorial) reduction of singularities. These components are naturally endowed with a structure of projective toric surface. This allows us to enlarge the concept of partial separatrix in a consistent way and, finally, to detect the existence of invariant surface. The result of Ortiz-Rosales-Voronin, about the distribution of invariant curves in dimension two, is a key argument in our proof.

1 Introduction

The problem of existence of invariant hypersurfaces for a holomorphic codimension one foliation is a leitmotif in the theory of holomorphic singular foliations, coming from an initial question of René Thom. The main result in this paper is a contribution to this problem, that we state as follows:

“Every torifiable complex hyperbolic foliation on $(\mathbb{C}^3, 0)$ has an invariant surface”.

A foliation is torifiable (of toric type) when it admits a combinatorial reduction of singularities, with respect to some coordinate system. The expression “complex hyperbolic” means that we can not extract saddle-nodes from the foliation. Let us remark that this type of foliations may be dicritical, in the sense that there are some generically transversal irreducible components of the exceptional divisor after reduction of singularities.

The existence of invariant hypersurface has a positive answer in the non-dicritical situation. The prove is due to Camacho-Sad in the bidimensional case [2], to Cano-Cerveau in the three-dimensional case [6] and to Cano-Mattei in general ambient dimension [8]. In contrast to what it happens in dimension two, there are dicritical examples of codimension one foliations in dimension three without invariant surface; the first family of such examples was given by Jouanolou [13].

In order to prove the existence of invariant surface for a dicritical foliation on $(\mathbb{C}^3, 0)$, it is essential to have “good properties” for the restriction of the foliation to compact dicritical components after reduction of singularities. In the context of toric type foliations, we see that the compact components of the exceptional divisor are projective toric surfaces, in the sense of Toric Geometry, endowed in a natural way of a normal crossings divisor, compatible with the ambient divisor. In a previous work [15], we have proved that a toric type foliation \mathcal{G} on a projective toric surface S , with the associated divisor D_S , satisfies that:

“Every isolated invariant branch (Γ, p) extends to a global curve $Y \subset S$; moreover, all the branches of Y at the points of $Y \cap D_S$ are isolated.”

In a general way, if we have this “prolongation property for isolated invariant branches”, we can extend the argument of Cano-Cerveau in [6] to prove the existence of invariant surface, provided we have at least one non-corner type (trace type) simple singular point, after reduction of singularities. The details of this argument may be found in Subsection 3.2.

Now, it would be enough to find a trace type singular point after reduction of singularities, in the toric type context. Such a point appears if and only if there is at least one invariant component in the exceptional divisor, as we show in Section 4. In the proof of this result, we invoke a refined version of Camacho-Sad's theorem proved by Ortiz-Rosales-Voronin in [16]. The remaining case corresponds to toric type foliations admitting reduction of singularities without invariant components. In this situation only blowing-ups centered in curves are allowed, in an étale way over an initial one, and the existence of invariant surface follows straightforward.

2 Generalities on Foliated Spaces

We introduce basic definitions and results concerning the theory of holomorphic singular foliations. These contents can be essentially found at [5].

2.1 Foliations

Let us recall that a *nonsingular complex analytic space* M of dimension n is a \mathbb{C} -ringed space $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ in local \mathbb{C} -algebras of functions, covered by open subsets isomorphic to open subsets of $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Let Ω_M^1 be the sheaf of germs of holomorphic one-forms on M . A *codimension one holomorphic singular foliation* \mathcal{F} on M (for short, a *foliation* on M) is an integrable and invertible coherent \mathcal{O}_M -submodule $\mathcal{F} \subset \Omega_M^1$, such that the quotient Ω_M^1/\mathcal{F} is a torsion-free \mathcal{O}_M -module. The foliation \mathcal{F} is locally generated at each point $p \in M$ by a holomorphic one-form $\omega \in \Omega_{M,p}^1$ satisfying $\omega \wedge d\omega = 0$, that we write in local coordinates as

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n, \quad f_i \in \mathcal{O}_{M,p}$$

where the coefficients f_i have no common factors. The *order* $\nu_p(\mathcal{F})$ of \mathcal{F} at p is defined by

$$\nu_p(\mathcal{F}) = \nu_p(f_1, f_2, \dots, f_n) = \min\{\nu_p(f_i); i = 1, 2, \dots, n\},$$

where $\nu_p(f_i)$ is the order at p of the coefficient f_i . The *singular locus* $\text{Sing}(\mathcal{F})$ is the closed analytic subset of M locally defined by

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = (f_1 = f_2 = \cdots = f_n = 0).$$

Note that $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ if and only if $\nu_p(\mathcal{F}) > 0$. Since the coefficients of ω have no common factors, the codimension of $\text{Sing}(\mathcal{F})$ in M is at least two.

Denote by Θ_M the sheaf of germs of holomorphic vector fields on M . Given a point $p \in M$, a germ $\xi \in \Theta_{M,p}$ is called *tangent to \mathcal{F}* at p when $\omega(\xi) = 0$, where ω is a local generator of \mathcal{F} . The *dimensional type* $\tau_p(\mathcal{F})$ of \mathcal{F} at p is given by

$$\tau_p(\mathcal{F}) = n - k \geq 1,$$

where k is the dimension of the \mathbb{C} -vector space spanned by the vectors $\xi(p)$, with ξ a tangent germ of vector field. As a result of the rectification theorem of vector fields, there are local coordinates $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ such that \mathcal{F} is locally generated by a one-form ω of the type

$$\omega = \sum_{i=1}^{\tau} f_i(x_1, x_2, \dots, x_{\tau}) dx_{\tau}, \quad \tau = \tau_p(\mathcal{F}). \quad (1)$$

Such a coordinate system is called *minimal*. The foliation is locally an analytic cylinder over a codimension one foliation on a space of dimension τ . Note that $\tau = 1$ if and only if $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Let us consider a holomorphic morphism $\phi : N \rightarrow M$, where N is a nonsingular connected complex analytic space. The morphism ϕ is called *invariant for \mathcal{F}* when $\phi^*\omega$ is identically zero for the local generators ω of \mathcal{F} . Otherwise, we say that ϕ is *generically transversal to \mathcal{F}* ; in this case, there is an induced foliation $\phi^{-1}\mathcal{F}$ on N , locally defined by the pull-backs $\phi^*\omega$, after dividing by the common factors of the coefficients.

A closed analytic subspace $Y \subset M$ is called *invariant for \mathcal{F}* at $p \in Y$ if each morphism $\phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (M, p)$ factoring through (Y, p) is invariant. We say that Y is *invariant for \mathcal{F}* when the property holds at each point $p \in Y$. Being invariant at a point is an open and closed property on Y . Hence, an irreducible subspace Y invariant at a point is invariant.

Remark 2.1. Every subspace $Y \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$ is invariant for \mathcal{F} .

Recall that a hypersurface H of M is locally given at $p \in H$ by a reduced equation $f = 0$, where $f \in \mathcal{O}_{M,p}$. An analytic subspace $Y \subset M$ of dimension k is a complete intersection if it is given by intersection of $n - k$ hypersurfaces $H_i \subset M$. We know that a complete intersection Y is invariant for \mathcal{F} at a point $p \in Y$ if and only if there is a local generator ω of \mathcal{F} such that $\omega \wedge df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_k|_Y = 0$, where $f_i = 0$ are reduced local equations of H_i , for $i = 1, 2, \dots, n - k$.

Remark 2.2. Frobenius' theorem implies that there is a unique germ of invariant hypersurface of \mathcal{F} through each nonsingular point.

Let us recall the classical definitions of presimple and simple singularities in the bidimensional case studied by Seidenberg in [17] (for more details, see [7]). Let \mathcal{G} be a foliation on $(\mathbb{C}^2, 0)$ generated by a holomorphic one-form $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ and let us assume that the origin $0 \in \text{Sing}(\mathcal{G})$. Consider the tangent vector field

$$\xi = f_2 \partial / \partial x_1 - f_1 \partial / \partial x_2.$$

and denote by L_ξ its linear part. The origin is a *presimple singularity* for \mathcal{G} if $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, where λ and μ are the eigenvalues of L_ξ . We say that it is a *simple singularity* for \mathcal{G} if we also have $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}_{>0}$. A simple singularity such that $\lambda\mu = 0$ is called a *saddle-node*. In section 2.3, we precise and extend these notions to arbitrary dimension.

Next definitions can be found in [9]:

Definition 2.1. A foliation \mathcal{F} is *complex hyperbolic* at $p \in M$ if there is no generically transversal morphism $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, p)$ with 0 being a saddle-node for $\phi^{-1}\mathcal{F}$. The foliation \mathcal{F} is *complex hyperbolic* (for short, *CH*) if the property holds at each $p \in M$.

Definition 2.2. A foliation \mathcal{F} is *dicritical* at $p \in M$ when there is a generically transversal morphism $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (M, p)$, such that $\phi^{-1}\mathcal{F} = (dx = 0)$ and $\phi(y = 0)$ is invariant for \mathcal{F} . The foliation \mathcal{F} is *non-dicritical* if it is not dicritical at each $p \in M$.

Remark 2.3. Note that $y = 0$ is a curve, hence $\phi(y = 0)$ is either the point p or a germ at p of analytic curve. Moreover, we can prove that $\phi(y = 0) \subset \text{Sing}(\mathcal{F})$.

2.2 Foliated Spaces

Let M be an n -dimensional nonsingular complex analytic space and let $\{E_i\}_{i \in I}$ be a finite family of connected nonsingular hypersurfaces. The union $E = \cup_{i \in I} E_i$ is called a *normal crossings divisor* of M if for each point $p \in M$, there is a local coordinate system $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ such that

$$E \subset (x_1 x_2 \cdots x_n = 0).$$

Such coordinate systems are called *adapted to E* .

The non-invariant irreducible components of E are also called *dicritical components*. We write the index set as $I = I_{\text{inv}} \cup I_{\text{dic}}$, where I_{inv} corresponds to the invariant components and I_{dic} corresponds to the dicritical ones. We also denote $E_{\text{inv}} = \cup_{i \in I_{\text{inv}}} E_i$ and $E_{\text{dic}} = \cup_{i \in I_{\text{dic}}} E_i$. Given an irreducible analytic subspace $Y \subset M$, we denote by $e_Y(E)$ the number of irreducible components of E containing Y .

Remark 2.4. Note that $e_p(E_{\text{inv}}) \leq \tau_p(\mathcal{F})$ and $e_p(E_{\text{inv}}) \leq \nu_p(\mathcal{F}) + 1$, for every $p \in M$.

Let \mathcal{F} be a foliation on M . We say that \mathcal{F} and E *have normal crossings* at $p \in M$ when $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$ and $E \cup H$ is a local normal crossings divisor, where (H, p) is the only germ of invariant hypersurface through p . The *adapted singular locus* $\text{Sing}(\mathcal{F}, E)$ is defined by

$$\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \{p \in M; \mathcal{F} \text{ and } E \text{ have not normal crossings at } p\}.$$

Remark 2.5. We have that $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset \text{Sing}(\mathcal{F}, E)$. The equality does not hold necessarily: for instance, take the foliation on $(\mathbb{C}^2, 0)$ given by $d(x + y^2) = 0$ and consider $E = (x = 0)$. Note that $0 \in \text{Sing}(\mathcal{F}, E) \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, since $(x = 0) \cup (x + y^2 = 0)$ is not a normal crossings divisor.

Proposition 2.1. The adapted singular locus $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) \subset M$ is a closed analytic subset of codimension at least two.

Proof. We work locally at a point $p \in M$. If $e_p(E_{\text{dic}}) = 0$, we have $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \text{Sing}(\mathcal{F})$ and we are done. In a general way, we consider local coordinates such that $E_{\text{dic}} = \cup_{j \in A_{\text{dic}}}(x_j = 0)$, where $A_{\text{dic}} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Let $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ be a local generator of \mathcal{F} . Define the closed analytic subsets

$$Z_J = (x_j = 0; j \in J) \cap (f_j = 0; j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus J), \quad J \subset A_{\text{dic}}.$$

It is easy to check that $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \cup_J Z_J$, locally at p .

Note that $Z_\emptyset = \text{Sing}(\mathcal{F})$, hence $\text{codim}(Z_\emptyset) \geq 2$. We also have $\text{codim}(Z_J) \geq 2$ when $\#J \geq 2$. Then, it is enough to show that $Z_{\{j\}}$ has codimension at least two, for every $j \in A_{\text{dic}}$. Let us assume that there is $j \in A_{\text{dic}}$ such that $Z_{\{j\}} = (x_j = 0)$. Then we have

$$f_k = x_j \tilde{f}_k, \quad \tilde{f}_k \in \mathcal{O}_{M,p}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}$$

and hence $(x_j = 0)$ is invariant. This is a contradiction. \blacksquare

We are interested in considering not only a foliation \mathcal{F} but a pair (\mathcal{F}, E) , where $E \subset M$ is a normal crossings divisor. In order to do this, it is useful to introduce the logarithmic concept of E -foliation.

Let us consider the sheaf of germs of logarithmic one-forms along E , which is denoted by $\Omega_M^1(\log E)$. An E -foliation \mathcal{L} on M is an integrable and invertible coherent \mathcal{O}_M -submodule $\mathcal{L} \subset \Omega_M^1(\log E)$, such that the quotient $\Omega_M^1(\log E)/\mathcal{L}$ is torsion-free. The E -foliation \mathcal{L} is locally generated at each point $p \in M$ by an integrable logarithmic one-form $\eta \in \Omega_{M,p}^1(\log E)$, that we write in local coordinates adapted to E as

$$\eta = \sum_{j \in A} a_j \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{j \in B} a_j dx_j, \quad E = \cup_{j \in A}(x_j = 0); \quad A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2)$$

where the coefficients $a_j \in \mathcal{O}_{M,p}$ have no common factors. The order $\nu_p(\mathcal{L}, E)$ of \mathcal{L} at p is $\nu_p(\mathcal{L}, E) = \nu_p(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Let $\text{Fol}(M, E)$ and $\text{Fol}(M)$ be respectively the sets of E -foliations and foliations on M . There is a bijection

$$\text{Fol}(M) = \text{Fol}(M, \emptyset) \rightarrow \text{Fol}(M, E), \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{L}_{\mathcal{F}},$$

defined in terms of local generators at $p \in M$ by the relation $\omega = (\prod_{j \in A_{\text{inv}}} x_j) \eta$, where $E_{\text{inv}} = \cup_{j \in A_{\text{inv}}}(x_j = 0)$ is the invariant part of E with respect to the foliation \mathcal{F} . A local generator η of $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ is also called a *local generator of \mathcal{F} adapted to E* . We define the order $\nu_p(\mathcal{F}, E)$ of \mathcal{F} adapted to E by the equality

$$\nu_p(\mathcal{F}, E) = \nu_p(\mathcal{L}_{\mathcal{F}}, E).$$

Observe that $\nu_p(\mathcal{F}) = \nu_p(\mathcal{F}, E) + e_p(E_{\text{inv}}) - 1$.

Remark 2.6. An irreducible component $x_j = 0$ of E is a dicritical component if and only if there is $\tilde{a}_j \in \mathcal{O}_{M,p}$ such that $a_j = x_j \tilde{a}_j$.

Definition 2.3. An *ambient space* $\mathcal{M} = (M, E)$ is a pair consisting of a nonsingular complex analytic space M and a normal crossings divisor $E \subset M$. A *foliated space* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is the data of an ambient space and a foliation \mathcal{F} on M . A foliated space is *complex hyperbolic* when the corresponding foliation is complex hyperbolic.

Remark 2.7. We consider also ambient spaces where M is a germ of nonsingular complex analytic space around a compact analytic subset K . We can transfer to this case all the definitions of this text, just by taking a small enough open set around K .

Remark 2.8. The name ‘‘foliated space’’ is inspired in the terminology ‘‘foliated manifold’’ introduced by A. Belotto (see [1]).

2.3 Presimple Points

We slightly modify the definitions of simple and presimple singularities given for dimension two in Subsection 2.1, taking into account not only the foliation, but also the normal crossings divisor. We also extend the definitions to higher dimension.

Let us consider a foliated space $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ and a point $p \in M$. Let

$$\eta = \sum_{j \in A} a_j dx_j / x_j + \sum_{j \in B} a_j dx_j$$

be a local generator of \mathcal{F} adapted to E as in Equation 2. Write $E_{\text{inv}} = \cup_{j \in A_{\text{inv}}} (x_j = 0)$ and $E_{\text{dic}} = \cup_{j \in A_{\text{dic}}} (x_j = 0)$, where we have $A = A_{\text{inv}} \cup A_{\text{dic}}$.

Definition 2.4 (See [5, 11]). The point p is *presimple* for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if either $\nu_p(\mathcal{F}, E) = 0$ or there is $(j, k) \in A \times B$ such that $\partial a_j / \partial x_k(p) \neq 0$.

Proposition 2.2. If p is presimple for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, then $e_p(E_{\text{inv}}) \leq \tau_p(\mathcal{F}) \leq e_p(E_{\text{inv}}) + 1$.

Sketch of the proof. (For more details, see [5, Lemma 5] and [11]). Recall that $a_j = x_j \tilde{a}_j$ for every $j \in A_{\text{dic}}$, hence $\nu_p(a_j) > 0$ and $\partial a_j / \partial x_k(p) = 0$ for every $k \in B$. When $\nu_p(\mathcal{F}, E) = 0$, we distinguish two cases:

- There is a $j \in A_{\text{inv}}$ such that a_j is a unit. The germs of vector fields

$$\xi_k = \partial / \partial x_k - (a_k / a_j) x_j \partial / \partial x_j, \quad k \in B; \quad \xi_\ell = \partial / \partial x_\ell - (\tilde{a}_\ell / a_j) x_j \partial / \partial x_j, \quad \ell \in A_{\text{dic}},$$

are tangent to \mathcal{F} at p . The dimensional type is $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}})$, since there are no more independent trivializing vector fields.

- For every $\ell \in A$, we have $\nu_p(a_\ell) > 0$ and there is a $j \in B$ such that a_j is a unit. The germs of vector fields

$$\xi_k = \partial / \partial x_k - (a_k / a_j) \partial / \partial x_j, \quad k \in B \setminus \{j\}; \quad \xi_\ell = \partial / \partial x_\ell - (\tilde{a}_\ell / a_j) \partial / \partial x_j, \quad \ell \in A_{\text{dic}},$$

are tangent to \mathcal{F} at p . The dimensional type is $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}}) + 1$.

When $\nu_p(\mathcal{F}, E) > 0$ but $\partial a_j / \partial x_k(p) \neq 0$ for some $j \in A, k \in B$, trivializing vector fields may be obtained thanks to the integrability condition. We obtain also that $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}}) + 1$. ■

Definition 2.5. Let $p \in M$ be a presimple point for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. We say that p is of *corner type* when $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}})$ and we say that p is of *trace type* when $\tau_p(\mathcal{F}) = e_p(E_{\text{inv}}) + 1$.

Remark 2.9. In view of proof of Proposition 2.2, the point p is presimple of corner type if and only if $\nu_p(a_j) = 0$ for some $j \in A_{\text{inv}}$.

Proposition 2.3. Let us suppose that \mathcal{F} is a complex hyperbolic foliation at p . We have that p is a presimple point for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if and only if $\nu_p(\mathcal{F}, E) = 0$. Moreover, if $e_p(E_{\text{inv}}) \geq 1$, we have that p is presimple of corner type for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if and only if $\nu_p(a_j) = 0$, for every $j \in A_{\text{inv}}$.

Proof. Let us prove the first assertion. Assume that $\nu_p(\mathcal{F}, E) > 0$ and there is $(j, k) \in A \times B$ such that $\partial a_j / \partial x_k(p) \neq 0$. We obtain that $\bar{\omega} = 0$ gives a saddle-node, where

$$\bar{\omega} = \omega|_{(x_i=0; i \notin \{j,k\})} = \bar{a}_j dx_j + x_j \bar{a}_k dx_k, \quad \bar{a}_\ell = a_\ell|_{(x_i=0; i \notin \{j,k\})}.$$

Let us prove the second statement. By Remark 2.9, the point p is presimple of corner type if and only if there is $j \in A_{\text{inv}}$ such that $\nu_p(a_j) = 0$. If there is an $\ell \in A_{\text{inv}}$ with $\nu_p(a_\ell) > 0$, we have a saddle-node given by the restriction $\omega|_{(x_i=0; i \notin \{j,\ell\})}$. ■

2.4 Residual Vectors and Simple Points

Let us consider a foliated space $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ and a point $p \in M$. Denote $\tau = \tau_p(\mathcal{F})$ the dimensional type. We know that there is a minimal local coordinate system $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ and a local generator ω of \mathcal{F} with

$$\omega(\partial / \partial x_j) = 0, \quad \partial / \partial x_j(\omega(\partial / \partial x_\ell)) = 0, \quad \text{for } j > \tau \text{ and } \ell \leq \tau.$$

That is, we can write ω as in Equation 1. We say that \mathbf{x} is a *minimal coordinate system adapted to E* when $E_{\text{inv}} = \cup_{j=1}^e (x_j = 0)$ and $E_{\text{dic}} \subset \cup_{j=\tau+1}^n (x_j = 0)$. Note that $e \leq \tau$. The generator of \mathcal{F} adapted to E defined by $\eta = (1 / \prod_{j=1}^e x_j) \omega$ can be written as

$$\eta = \sum_{j=1}^e a_j(x_1, x_2, \dots, x_\tau) \frac{dx_j}{x_j} + \sum_{j=e+1}^\tau a_j(x_1, x_2, \dots, x_\tau) dx_j \quad (3)$$

The above expression of the vector fields ξ_k and ξ_ℓ in the proof of Proposition 2.2 allows to prove the following statement:

Proposition 2.4. There is a minimal coordinate system adapted to E at a given presimple point $p \in M$.

Assume that p is a presimple point for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Recall that $e \leq \tau \leq e + 1$ and take a minimal coordinate system \mathbf{x} and an adapted generator η as in Equation 3. The *residual vector* $\lambda_{\eta, \mathbf{x}} \in \mathbb{C}^\tau$ is defined by

$$\lambda_{\eta, \mathbf{x}} = \begin{cases} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau) & \text{with } \lambda_i = a_i(p) & \text{if } \tau = e \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\tau-1}, \mu) & \text{with } \lambda_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_\tau}(p), \mu = a_\tau(p) & \text{if } \tau = e + 1. \end{cases}$$

Remark 2.10. Since p is presimple point, we have that $\lambda_{\eta, \mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$.

Lemma 2.1. Let p be a presimple point for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. Consider minimal coordinate systems \mathbf{x} and \mathbf{x}' adapted to E , such that $(x_j = 0) = (x'_j = 0)$ for every $j \in \{1, 2, \dots, e\}$. Given η and η' generators of \mathcal{F} adapted to E as in Equation 3, there is a constant $c \in \mathbb{C}^*$ such that $\lambda_{\eta, \mathbf{x}} = c\lambda_{\eta', \mathbf{x}'}$.

Proof. We have that there are units $u, u_j \in \mathcal{O}_{M, p}$ with $\partial/\partial x_k(u) = \partial/\partial x_k(u_j) = 0$ for $k > \tau$, such that $\eta' = u\eta$ and $x'_j = u_j x_j$, for every $j \in \{1, 2, \dots, e\}$. Moreover, when $\tau = e + 1$, we have $x'_\tau = \alpha x_\tau + \phi(x_1, x_2, \dots, x_{\tau-1}) + x_\tau \psi(x_1, x_2, \dots, x_\tau)$, where $\alpha \in \mathbb{C}^*$ and $\phi(p) = \psi(p) = 0$. If $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, we have that $\lambda_{\eta', \mathbf{x}'} = c\lambda_{\eta, \mathbf{x}}$, with $c = u(p)$. Assume now that $\eta = \eta'$ and let us write

$$\eta = \sum_{i=1}^{\tau-1} a_i dx_i/x_i + x_\tau^\varepsilon a_\tau dx_\tau/x_\tau = \sum_{i=1}^{\tau-1} a'_i dx'_i/x'_i + x_\tau^\varepsilon a'_\tau dx'_\tau/x'_\tau, \quad \varepsilon = \tau - e.$$

If $(x'_1, x'_2, \dots, x'_\tau) = (x_1, x_2, \dots, x_\tau)$, we are done. Suppose that there is $j \in \{1, 2, \dots, e\}$ such that $u_j \neq 1$ and $x'_i = x_i$ for every $i \neq j$. We have that

$$a'_j = a_j(1 + x_j h_j), \quad a'_i = a_i + x_i h_i a_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, \tau\} \setminus \{j\},$$

where $du_j/u_j = \sum_{i=1}^{\tau} x_i h_i dx_i/x_i$. As a consequence $\lambda_{\eta, \mathbf{x}} = \lambda_{\eta', \mathbf{x}'}$. In case $\tau = e + 1$ and $x'_i = x_i$ for every $i \in \{1, 2, \dots, e\}$, we obtain

$$a'_i = a_i - cx_i a_\tau (\partial\phi/\partial x_i + x_\tau \partial\psi/\partial x_i), \quad a'_\tau = ca_\tau (1 - \psi - x_\tau \partial\psi/\partial x_\tau),$$

with $c = 1/\alpha$. Hence $\lambda_{\eta, \mathbf{x}} = c\lambda_{\eta', \mathbf{x}'}$. ■

Lemma 2.2. If \mathcal{F} is a complex hyperbolic foliation at a point p presimple for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, then the residual vector $\lambda_{\eta, \mathbf{x}}$ belongs to $(\mathbb{C}^*)^\tau$.

Proof. If p is of corner type, in view of Proposition 2.3 we are done. Assume that p is a presimple point of trace type. By Proposition 2.3 and Remark 2.9, we have that $\mu \neq 0$. Then, if $\lambda_j = 0$ for some $j \in \{1, 2, \dots, e\}$, the restriction

$$\omega|_{(x_i=0; i \notin \{j, \tau\})} = \bar{a}_j dx_j + x_j \bar{a}_\tau dx_\tau, \quad \bar{a}_\ell = a_\ell|_{(x_i=0; i \notin \{j, \tau\})}.$$

would give a saddle-node. ■

Given $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, let us consider a vector $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \in \mathbb{C}^s$. A *resonance* \mathbf{r} for β is an s -tuple of non-negative integers $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s$ such that $r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + \dots + r_s \beta_s = 0$. We say that β is *non-resonant* if it does not have resonances different from $\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Remark 2.11. In this work we consider just non-negative resonances. Observe that Martinet-Ramis resonances in [14] allow negative entries in \mathbf{r} .

Let us give a definition of simple point in the complex hyperbolic frame. This definition coincides with the general one introduced in [5, 6].

Definition 2.6. Assume that \mathcal{F} is a complex hyperbolic foliation at p . We say that p is a *simple point* for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if it is presimple and the residual vectors $\lambda_{\eta, \mathbf{x}}$ are non-resonant (this property does not depend on the particular choice of \mathbf{x} and η).

Remark 2.12. Being simple is an open property on M . That is, if p is a simple point, there is a small enough open set $U \subset M$ containing p such that each $q \in U$ is a simple point.

Definition 2.7. A foliated space $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is *desingularized* if each $p \in M$ is a simple point.

Remark 2.13. We have that $\text{Sing}(\mathcal{F}, E) = \text{Sing}(\mathcal{F})$ when $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is desingularized.

Remark 2.14. Let p be a simple point for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, where \mathcal{F} is a complex hyperbolic foliation at p . If p is of corner type, the only invariant hypersurfaces for \mathcal{F} through it are contained in E . If p is of trace type, there is exactly one germ of invariant hypersurface (H, p) not contained in E (for the general case, see [6]). The singular locus, locally at p , is given by

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup_{1 \leq i < j \leq \tau} E_i \cap E_j, \quad i, j \in I_{\text{inv}},$$

taking $E_\tau = H$ when p is of trace type. Denote by $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}$ the set of trace type simple singularities for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. If p is of corner type, we have that $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} = \emptyset$, locally at p . When p is a trace type simple singularity, we have

$$\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} = (E_1 \cap H) \cup (E_2 \cap H) \cup \cdots \cup (E_{\tau-1} \cap H).$$

2.5 Reduction of Singularities and Toric Type Foliated Spaces

The concept of toric type foliated space was introduced in [4, 15] for the bidimensional case. Here we generalize it to higher dimension.

Let us consider an ambient space $\mathcal{M} = (M, E)$ and a connected nonsingular analytic subspace $Y \subset M$. We say that Y and E have *normal crossings* if for each point $p \in M$ there is a local coordinate system $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ adapted to E and a subset $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$ such that $Y = \bigcap_{i \in B} (x_i = 0)$, locally at p . In this case, the blowing-up $\pi : M' \rightarrow M$ centered at Y gives a new normal crossings divisor $E' = \pi^{-1}(E \cup Y)$ and we get a new ambient space $\mathcal{M}' = (M', E')$. Given a foliation \mathcal{F} on M , we say that Y is an *admissible center* for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ if, in addition, the subspace Y is invariant for \mathcal{F} . We write, for short

$$\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F}),$$

where \mathcal{F}' is the transform of \mathcal{F} by π . We also say that π is an *admissible blowing-up of foliated spaces*. The blowing-up π is called *dicritical* if the exceptional divisor $\pi^{-1}(Y)$ is a dicritical component of E' .

Remark 2.15. Note that given an admissible blowing-up $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$, the following properties hold:

1. The blowing-up π is dicritical only if \mathcal{F} is dicritical.
2. If the foliation \mathcal{F} is non-dicritical, then \mathcal{F}' is non-dicritical
3. If the foliation \mathcal{F} is complex hyperbolic, then \mathcal{F}' is also complex hyperbolic.

Let $\sigma : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ be a morphism obtained, up to isomorphism, by composition of a finite family of admissible blowing-ups. That is,

$$\sigma : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') = (\mathcal{M}^r, \mathcal{F}^r) \xrightarrow{\pi_r} (\mathcal{M}^{r-1}, \mathcal{F}^{r-1}) \xrightarrow{\pi_{r-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_1} (\mathcal{M}^0, \mathcal{F}^0) = (\mathcal{M}, \mathcal{F}),$$

where each π_i is an admissible blowing-up of foliated spaces. If $(\mathcal{M}', \mathcal{F}')$ is desingularized, we say that σ is a *reduction of singularities of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$* .

Remark 2.16. In general, the existence of reduction of singularities of a foliated space $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is only known when $\dim M \leq 3$ (see [5, 17]). Nevertheless, it always exists if $\mathcal{M} = ((\mathbb{C}^n, 0), \emptyset)$ and \mathcal{F} is a complex hyperbolic non-dicritical foliation. Indeed, it is given by a reduction of singularities of the invariant hypersurfaces of \mathcal{F} (see [3, 12]). For this reason, these foliations are also called “generalized hypersurfaces”. For $n \geq 4$, the existence of reduction of singularities is an open problem, even in the dicritical complex hyperbolic case.

An admissible blowing-up $\pi : (\mathcal{M}', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{M}, \mathcal{F})$ centered at $Y \subset M$ is called *combinatorial* when Y is a connected component of an $E_J = \bigcap_{j \in J} E_j$, with $J \subset I$.

Definition 2.8. A foliated space $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is of *toric type* if it has a combinatorial reduction of singularities. A foliation \mathcal{F} on a complex analytic space M is called *torifiable* if there is a normal crossings divisor E on M such that the foliated space $((M, E), \mathcal{F})$ is of toric type.

Remark 2.17. A complex hyperbolic foliated space $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, where $\mathcal{M} = ((\mathbb{C}^n, 0), E)$ and the origin is a presimple corner is of toric type (see [11]). Moreover, if the origin is not simple, the foliation \mathcal{F} is dicritical. In the two-dimensional being of toric type is very close to be Newton non-degenerate (see [15]).

3 Invariant Surfaces and Extended Partial Separatrices

Partial separatrices have been introduced in [9] to formalize the arguments in [6] for the construction of invariant surfaces of non-dicritical foliations in ambient dimension three. We extend this concept to the dicritical case and we give properties that assure the existence of invariant surfaces supported by them.

3.1 The Prolongation Property

Along this subsection we consider a foliated surface $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$, where $\mathcal{S} = (S, D)$ and S is a surface. In dimension two we only blow-up with center at points, hence every blowing-up is automatically admissible.

Let $(\Gamma, p) \not\subset (D, p)$ be an invariant branch of \mathcal{G} . We say that (Γ, p) is *isolated for* $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ when for each composition $\sigma : (\mathcal{S}', \mathcal{G}') \rightarrow (\mathcal{S}, \mathcal{G})$ of a finite sequence of blowing-ups, the point p' belongs to the adapted singular locus $\text{Sing}(\mathcal{G}', D')$, where (Γ', p') is the strict transform of (Γ, p) by σ . Note that $p \in \text{Sing}(\mathcal{G}, D)$ when (Γ, p) is an isolated invariant branch, just by taking σ to be the identity. Besides, in order to verify if (Γ, p) is isolated or not, it is enough to consider blowing-ups centered at the infinitely near points of (Γ, p) .

From now on, in order to simplify the exposition, each time we say “a curve Y in S ”, we make reference to a “closed irreducible analytic curve Y in S ”.

Definition 3.1. A foliated surface $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ has the *prolongation property for isolated branches* if for every isolated invariant branch (Γ, p) the next conditions hold:

1. There is a curve $Y \subset S$ extending (Γ, p) , that is, such that $(\Gamma, p) \subset (Y, p)$. (Note that Y is unique).
2. If $Y \subset S$ is the curve extending (Γ, p) and $q \in Y \cap D$, each branch $(\Upsilon, q) \subset (Y, q)$ is isolated.

Remark 3.1. The second condition implies that $Y \cap D \subset \text{Sing}(\mathcal{G}, D)$.

Lemma 3.1. A desingularized foliated surface $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ has the prolongation property for isolated branches if and only if for each trace type singularity $p \in \text{Sing}(\mathcal{G})$, the following conditions hold for the only invariant branch $(\Gamma, p) \not\subset (D, p)$ through it:

1. There is a curve $Y \subset S$ extending (Γ, p) .
2. If $Y \subset S$ is the curve extending (Γ, p) , then $Y \cap D_{\text{dic}} = \emptyset$.

Proof. Since $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ is desingularized, we have that an invariant branch $(\Gamma, p) \not\subset (D, p)$ is isolated if and only if p is a trace type simple singularity. Assume that there is a curve $Y \subset S$ extending (Γ, p) . Observe that $(Y, q) \not\subset (D, q)$ is analytically irreducible for every $q \in Y$, because there is at most one invariant branch different from the divisor at q . As a consequence, it is enough to see that given $q \in Y \cap D$, we have that (Y, q) is isolated if and only $e_q(D_{\text{dic}}) = 0$.

If (Y, q) is isolated, then q is a simple singularity; hence $e_q(D_{\text{dic}}) \leq 2 - \tau_q(\mathcal{G}) = 0$. Conversely, when $e_q(D_{\text{dic}}) = 0$, we have that (Y, q) and (D, q) are two invariant branches; then q is a simple singularity and (Y, q) is an isolated invariant branch. ■

Recall that a *toric surface* is an irreducible complex surface S containing a two-dimensional complex torus $T \simeq (\mathbb{C}^*)^2$ as a Zariski open subset, such that the action of T on itself extends to an algebraic action on S (see, for instance [10]). The union of the non-dense orbits of the torus action on S is a normal crossings divisor D_S . Hence S gives in a natural way a *toric ambient surface* (S, D_S) . In the work [15], we have provided a proof of the following statement:

Proposition 3.1. The prolongation property for isolated branches holds for every toric type foliated surface $((S, D_S), \mathcal{G})$ over a nonsingular projective toric ambient surface.

3.2 Extended Partial Separatrices

We consider a desingularized foliated space $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ in dimension three, where $\mathcal{M} = (M, E)$ and M is a germ of complex analytic set around a compact analytic subset. By Remark 2.14, the set of trace type simple singularities $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}$ is a closed analytic subspace of M : it is a union of nonsingular curves Y with $e_Y(E) = e_Y(E_{\text{inv}}) = 1$. A connected component \mathcal{C} of $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}$ is called a *partial separatrix*. Given $q \in \mathcal{C}$, there is an open set $U \subset M$ containing q and an irreducible surface S_q on U , such that the germ of S_q at each $q' \in \mathcal{C} \cap U$ is the only invariant surface through q' different from E . Moreover $S_q \cap E_{\text{inv}} = \mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}$ in U . When $\mathcal{C} \cap E_{\text{dic}} = \emptyset$, the surface S_q extends to an irreducible closed surface $S_{\mathcal{C}} \subset M$ invariant for \mathcal{F} .

We are interested in connecting partial separatrices of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ through invariant curves contained in the dicritical components of E . Denote by Σ the set whose elements are the curves $Z \subset E_{\text{dic}}$ with $e_Z(E) = 1$, invariant for \mathcal{F} and satisfying $Z \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Note that Σ is a finite set. Indeed, there are finitely many dicritical components $E_k \subset E_{\text{dic}}$. Moreover $\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap E_k$ is finite and there is at most one invariant branch contained in E_k but not in E_{inv} through each $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap E_k$. Let us denote $\mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$ the closed analytic subspace of M given by

$$\mathcal{U}_{\mathcal{F}, E} = \mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} \cup (\cup_{Z \in \Sigma} Z).$$

Note that every $q \in \mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$ is a trace type simple point, in particular $e_q(E) \leq 2$.

Definition 3.2. The *extended partial separatrices* are the connected components of $\mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$.

Lemma 3.2. Let us consider an extended partial separatrix $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$. For each point $q \in \mathcal{E}$, there is an open set $U_q \subset M$ containing q and an irreducible surface S_q defined in U_q , such that $\mathcal{E} \cap U_q \subset S_q$. Moreover, the germ of S_q at each $q' \in \mathcal{E} \cap U_q$ is the only invariant surface through q' not contained in E .

Proof. It follows from the local structure of the singular locus, described in Subsection 2.3, and from the fact that there is a unique invariant surface through a regular point. ■

Definition 3.3. An extended partial separatrix $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$ is *complete* when $(S_q, q) \cap E = (\mathcal{E}, q)$ for every $q \in \mathcal{E}$, where S_q is the only germ of surface invariant for \mathcal{F} through q that is not contained in E .

Corollary 3.1. If $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{F}, E}$ is a complete extended partial separatrix, there is a unique irreducible closed surface $S_{\mathcal{E}} \subset M$ invariant for \mathcal{F} , such that $S_{\mathcal{E}} \cap E = \mathcal{E}$.

Proof. It follows from Lemma 3.2 and Definition 3.3 in a similar way as Cano-Cerveau's argument in [6] (see also [9]). ■

Let E_k be a dicritical component of E . We know that the foliation \mathcal{F} induces by restriction a foliation $\mathcal{F}|_{E_k}$ on E_k . We define the restriction $\mathcal{M}|_{E_k}$ of the ambient space \mathcal{M} to E_k by

$$\mathcal{M}|_{E_k} = (E_k, E|_{E_k}), \quad E|_{E_k} = \overline{E \setminus E_k} \cap E_k.$$

We obtain in this way a foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ given by $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k} = (\mathcal{M}|_{E_k}, \mathcal{F}|_{E_k})$. Since $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is desingularized, the restriction $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ is also desingularized. Moreover, we have that $(E|_{E_k})_{\text{inv}} = E_{\text{inv}}|_{E_k}$ and $(E|_{E_k})_{\text{dic}} = E_{\text{dic}}|_{E_k}$.

Proposition 3.2. Let $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ be a desingularized foliated space. Assume that the foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ has the prolongation property for isolated branches, for each dicritical component E_k of E . Then every extended partial separatrix is complete.

Proof. Let us consider an extended partial separatrix \mathcal{E} . Note that $1 \leq e_q(E) \leq 2$ for every point $q \in \mathcal{E}$. When $e_q(E) = 1$, there is a unique curve $Y \subset \mathcal{E}$ containing q . The intersection of (S_q, q) and E is a branch trough q containing the germ (Y, q) ; as a consequence, we have that $(S_q, q) \cap E = (Y, q)$. Let us assume now $E = E_1 \cup E_2$, locally at q . We distinguish three cases:

- $E_{\text{inv}} = E_1 \cup E_2$. There is a partial separatrix $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$, such that $(\mathcal{C}, q) = (\mathcal{E}, q)$. Then, we conclude by the study of the partial separatrices in [6] and [9].
- $E_{\text{inv}} = E_1$. There is a curve $Y \subset E_1$ with $q \in Y$ such that $(Y, q) = (\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}, q)$. The foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_2}$ is desingularized and $q \in \text{Sing}(\mathcal{F}|_{E_2})$ is of trace type. The unique branch $(\Gamma, q) \not\subset (E|_{E_2}, q)$ invariant for $\mathcal{F}|_{E_2}$ extends to a curve $Z \subset E_2$, by the prolongation property for isolated branches. Note that $Z \in \Sigma$, hence $Z \subset \mathcal{E}$. We conclude that $(S_q, q) \cap E = (Y \cup Z, q) = (\mathcal{E}, q)$.
- $E_{\text{inv}} = \emptyset$. In this case $E_{\text{dic}} = E_1 \cup E_2$. Let us see that this situation does not hold. Note that q is a regular point. There is a curve $Z \in \Sigma$ with $q \in Z$. We can assume $Z \subset E_1$. By definition of Σ , there is $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap Z$. Note that $e_p(E_{\text{inv}}) = 1$ and (Z, p) is the unique invariant branch for $\mathcal{F}|_{E_1}$ not contained in $E|_{E_1}$. In view of Lemma 3.1, we have that $Z \cap (E|_{E_1})_{\text{dic}} = \emptyset$. We find a contradiction, since $q \in E_2|_{E_1} = E|_{E_1} = (E|_{E_1})_{\text{dic}}$. ■

3.3 Invariant Surfaces for Torifiable Foliations

The main result in this paper is the following:

Theorem 3.1. Every torifiable complex hyperbolic foliation on $(\mathbb{C}^3, 0)$ has an invariant surface.

We present now the structure of the proof of Theorem 3.1. Let us consider a germ of complex hyperbolic foliation \mathcal{F}_0 and a strong normal crossings divisor E^0 on $(\mathbb{C}^3, 0)$. Denote $\mathcal{M}_0 = ((\mathbb{C}^3, 0), E^0)$ and assume that $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)$ is of toric type. Let us fix a combinatorial reduction of singularities

$$\sigma : (\mathcal{M}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0).$$

The proof of Theorem 3.1 follows from the next statements:

Proposition 3.3. If $E_{\text{inv}} = \emptyset$, there is a closed surface S of M , invariant for \mathcal{F} , with $S \not\subset E$.

Proposition 3.4. If $E_{\text{inv}} \neq \emptyset$ and $E^0 = E_{\text{dic}}^0$, there is an extended partial separatrix of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$.

Proposition 3.5. Every extended partial separatrix of $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is complete.

Let us see how we deduce Theorem 3.1 from these propositions. If $E_{\text{inv}}^0 \neq \emptyset$, there is an invariant surface for \mathcal{F}_0 contained in E^0 and we are done. Hence, we can assume $E^0 = E_{\text{dic}}^0$. If $E_{\text{inv}} = \emptyset$, Proposition 3.3 assures the existence of a closed surface $S \subset M$ invariant for \mathcal{F} , with $S \not\subset E$. If $E_{\text{inv}} \neq \emptyset$, there is an extended partial separatrix \mathcal{E} by Proposition 3.4, that is complete by Proposition 3.5; as a consequence of Corollary 3.1, there is a closed surface $S = S_{\mathcal{E}} \subset M$ invariant for \mathcal{F} , with $S \not\subset E$. In both cases, by Grauert's Proper Mapping Theorem, we obtain a surface $S_0 = \sigma(S)$ of $(\mathbb{C}^3, 0)$ invariant for \mathcal{F}_0 , with $S_0 \not\subset E^0$.

Proposition 3.3 and Proposition 3.4 are proved in Section 4 and Proposition 3.5 is proved in Section 5. For the proof of Proposition 3.4, we use the next version of the "refined Camacho-Sad's Theorem" in [16]:

Proposition 3.6. Let us consider a complex hyperbolic foliated surface $(\mathcal{S}_0, \mathcal{G}_0)$, where the ambient surface is $\mathcal{S}_0 = ((\mathbb{C}^2, 0), D^0)$ and let $\sigma : (\mathcal{S}, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{S}_0, \mathcal{G}_0)$ be the composition of a finite sequence of blowing-ups. Assume that there is a connected component K of D_{inv} with the property that every point $p \in K$ is simple for $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$. Then, we have $\mathcal{T}_{\mathcal{S}, \mathcal{G}} \cap K \neq \emptyset$.

Proof. After completing the reduction of singularities of $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$, we apply similar arguments to the ones in the proof of [16]. ■

4 The Hunt of Trace Singularities

The aim of this section is to prove Proposition 3.3 and Proposition 3.4. Recall that we have a complex hyperbolic foliation \mathcal{F}_0 such that the foliated space $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)$ is of toric type, where $\mathcal{M}_0 = ((\mathbb{C}^3, 0), E^0)$, with $E^0 = E_{\text{dic}}^0$. Moreover, we have a fixed combinatorial reduction of singularities $\sigma : (\mathcal{M}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)$.

Remark 4.1. If $E_{\text{inv}} = \emptyset$, then $e_0(E^0) \leq 2$. Indeed, if $e_0(E^0) = 3$, we always find points $p \in M$ with $e_p(E) = 3$; since p is a simple point, we have $E_{\text{inv}} \neq \emptyset$. If $E_{\text{inv}} \neq \emptyset$, then $e_0(E^0) \geq 2$. Indeed, if $e_0(E^0) \in \{0, 1\}$ we have that σ is the identity morphism, since it is combinatorial. Hence, we have that $E = E^0$ and $E_{\text{inv}} = \emptyset$.

Proof of Proposition 3.3. If σ is the identity morphism, the foliation \mathcal{F}_0 is regular and it has normal crossings with E^0 . By the Frobenius theorem, there is a unique germ of surface S_0 in $(\mathbb{C}^3, 0)$ invariant for \mathcal{F}_0 , with $S_0 \not\subset E^0$ and we are done. When σ is not the identity morphism, we have that $e_0(E^0) = 2$, in view of Remark 4.1, and it is a composition of blowing-ups with one-dimensional combinatorial centers. Note that $K = \sigma^{-1}(0)$ is a finite union of curves and M is a germ around it. Since every point $p \in K$ is simple, we have that

$$0 = e_p(E_{\text{inv}}) \leq \tau_p(\mathcal{F}) \leq e_p(E_{\text{inv}}) + 1 = 1.$$

As a consequence $\tau_p(\mathcal{F}) = 1$ and hence $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$. Moreover \mathcal{F} and E have normal crossings at p . Then, there is a unique germ of invariant surface (S_p, p) , with $(S_p, p) \not\subset (E, p)$. We distinguish two situations:

- If K is not a closed analytic subspace invariant for \mathcal{F} , there is a regular point $p \in K$ such that $S_p \cap K = \{p\}$. Hence $S = (S_p, p)$ defines a closed surface in M , since M is a germ around K .
- If K is invariant for \mathcal{F} , we have that $(K, p) \subset (S_p, p)$ for every $p \in K$, as a consequence, the germ of surface (S_p, p) extends to a closed surface S defined in M invariant for \mathcal{F} , with $K \subset S$. The argument is similar to the one in the proof of Corollary 3.1. \blacksquare

Proof of Proposition 3.4. It is enough to prove that the set of trace type singularities $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E}$ is not empty. Indeed, in this case we find at least one partial separatrix for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ that is naturally contained in an extended partial separatrix. We divide the proof in two steps:

1. Let $\Gamma^0 = E_1^0 \cap E_2^0$, where E_1^0 and E_2^0 are two irreducible components of E^0 . Let us assume that Γ^0 has been used as a center of blowing-up in σ and hence $D = \sigma^{-1}(\Gamma \setminus \{0\})$ is a normal crossings divisor. If $D_{\text{inv}} \neq \emptyset$, then $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} \neq \emptyset$.
2. If $e_0(E^0) = 3$, then $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} \neq \emptyset$.

Note that Step 1 gives the complete proof when $e_0(E^0) = 2$, since in this case we have $E = D \cup E_1 \cup E_2$, where E_i is the strict transform of E_i^0 by σ , for $i = 1, 2$.

Step 1: Let us write $D = \cup_{i=1}^n D_i$, $D_0 = E_1$ and $D_{n+1} = E_2$, in such a way that $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$, for every $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Assume $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} = \emptyset$ and let us find a contradiction.

We consider a local coordinate system (x_1, x_2, y) at the origin of \mathbb{C}^3 with $E^0 = (x_1 x_2 = 0)$ and satisfying that $(y = 0)$ is not invariant for \mathcal{F}_0 (this is always possible). In this situation, there is $\varepsilon > 0$ such that $\Delta_c^0 = (y = c)$ is generically transversal to \mathcal{F}_0 through the point $p_c = (0, 0, c)$, for every $0 < |c| < \varepsilon$. Consider the foliated surface

$$(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)|_{\Delta_c^0} = ((\Delta_c^0, E^0|_{\Delta_c^0}), \mathcal{F}_0|_{\Delta_c^0}), \quad E^0|_{\Delta_c^0} = E^0 \cap \Delta_c^0.$$

Let Δ_c be the strict transform of Δ_c^0 by σ . Note that $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{\Delta_c}$ is a foliated surface obtained from $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)|_{\Delta_c^0}$ by a sequence of blowing-ups induced by σ . Recalling that $D_{\text{inv}} \neq \emptyset$ and that D_0, D_{n+1} are dicritical components, there are indices $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ with $j \leq k$ such that D_i is invariant for every $j \leq i \leq k$ and D_{j-1}, D_{k+1} are dicritical components. We write $Y_{c,i} = D_i \cap \Delta_c$, for every $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$. The fiber $\sigma^{-1}(p_c)$ is given by

$$\sigma^{-1}(p_c) = D \cap \Delta_c = \cup_{i=1}^n Y_{c,i}.$$

Observe that $Y_{c,i}$ is an invariant component of $E|_{\Delta_c}$, for every $j \leq i \leq k$. Since $\mathcal{T}_{\mathcal{F}, E} = \emptyset$, we have that each $p \in Y_{c,i}$, with $j \leq i \leq k$, is a simple point of corner type for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ and as a consequence, also for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{\Delta_c}$. In particular

$$p_{c,j-1} = Y_{c,j-1} \cap Y_{c,j}, \quad p_{c,k} = Y_{c,k} \cap Y_{c,k+1},$$

are regular points for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{\Delta_c}$. We conclude that $Y_{c,j-1}$ and $Y_{c,k+1}$ are dicritical components of $E|_{\Delta_c}$. In this way, we find a contradiction with Proposition 3.6.

Step 2: We write $E^0 = E_1^0 \cup E_2^0 \cup E_3^0$ and $\Gamma_i^0 = E_j^0 \cap E_k^0$, with $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Denote

$$D^2 = \overline{\sigma^{-1}(\Gamma_2^0 \setminus \{0\})}, \quad D^3 = \overline{\sigma^{-1}(\Gamma_3^0 \setminus \{0\})}.$$

We have that $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup D^2 \cup D^3 \cup \tilde{E}$, where $\tilde{E} = \sigma^{-1}(\Gamma_1)$ and E_i is the strict transform of E_i^0 by σ , for $i = 1, 2, 3$. The restriction $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_1}$ is a desingularized foliated surface, obtained from $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)|_{E_1^0}$ by a sequence of blowing-ups induced by σ . Note that

$$E|_{E_1} = (\tilde{E} \cap E_1) \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3,$$

where $\Gamma_j = D^j \cap E_1$ for $j = 2, 3$. An irreducible component of $E|_{E_1}$ is invariant for $\mathcal{F}|_{E_1}$ if and only if it is the intersection of E_1 with an invariant component of E , since $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ is desingularized and E_1 is a dicritical component of E . In particular, if the branch Γ_3 is invariant, we have that Γ_3^0 has been used as a center of blowing-up, hence D^3 is a normal crossings divisor; moreover, we obtain that $D_{\text{inv}}^3 \neq \emptyset$. In this case, we conclude by Step 1. We argue in the same way when Γ_2 is invariant.

Let us suppose now that Γ_2 and Γ_3 are not invariant for $\mathcal{F}|_{E_1}$. There are points $p \in E_1$, with $e_p(E|_{E_1}) = 2$. Since $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_1}$ is a desingularized foliated surface, we conclude that

$$(E|_{E_1})_{\text{inv}} = \tilde{E}_{\text{inv}} \cap E_1 \neq \emptyset.$$

By Proposition 3.6, there is a point $p \in \tilde{E}_{\text{inv}} \cap E_1$ that is a singularity of trace type for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_1}$. We have that p is also a singularity of trace type for $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ and we are done. \blacksquare

5 Prolongation Property in Toric Type Foliated Surfaces

In this section we prove Proposition 3.5. Recall that the ambient space is $\mathcal{M}_0 = ((\mathbb{C}^3, 0), E)$, the foliation \mathcal{F}_0 is complex hyperbolic and the foliated space $(\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)$ is of toric type. Moreover, we have a fixed combinatorial reduction of singularities $\sigma : (\mathcal{M}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{M}_0, \mathcal{F}_0)$.

In view of Proposition 3.2, we have that Proposition 3.5 comes from the following statement

Proposition 5.1. For each dicritical component E_k of E , the foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ has the prolongation property for isolated branches.

The foliated surface $(\mathcal{M}, \mathcal{F})|_{E_k}$ has automatically the prolongation property for isolated branches, when E_k is a non-compact dicritical component of E . Otherwise, in view of Proposition 3.1, the proof of Proposition 5.1 follows from the next statement:

Lemma 5.1. Every compact component E_k of E has a structure of toric surface, where $E|_{E_k}$ is the natural divisor given by the torus action. That is $(E_k, E|_{E_k})$ is a toric ambient surface.

Proof. An irreducible component E_k of E is compact if and only if $\sigma(E_k) = \{0\}$. Since we are in a combinatorial situation, we are allowed to blow-up the origin only if $e_0(E^0) = 3$. Hence, let us assume $e_0(E^0) = 3$. We fix local coordinates (x_1, x_2, x_3) at the origin of \mathbb{C}^3 such that $E^0 = (x_1 x_2 x_3 = 0)$. This allows us to give an immersion of $(\mathbb{C}^3, 0) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ by

$$(a_1, a_2, a_3) \mapsto [1, a_1, a_2, a_3].$$

Let $H = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3$ be the union of the coordinate planes of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, in such a way that $H_i \cap (\mathbb{C}^3, 0) = (x_i = 0)$, for $i = 1, 2, 3$. The projective space $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ has a structure of toric variety that provides in a natural way a toric ambient variety $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, H)$; that is, the orbits are the strata defined by H . In this situation, the combinatorial sequence of blowing-ups $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_0$ lifts to a combinatorial (equivariant) sequence of blowing-ups

$$\tilde{\sigma} : (\tilde{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^3, \tilde{H}) \rightarrow (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3, H).$$

Each compact irreducible component E_k of E is also an irreducible component of \tilde{H} . Moreover, we have that $E|_{E_k} = \tilde{H}|_{E_k}$. Hence $(E_k, E|_{E_k})$ is a toric ambient surface. \blacksquare

The proof of Theorem 3.1 is ended.

Fundings

The author is partially supported by the Ministerio de Educación, Cultura y Deporte of Spain (FPU14/02653 grant) and by the Ministerio de Economía y Competitividad from Spain, under the Project “Álgebra y geometría en sistemas dinámicos y foliaciones singulares.” (Ref.: MTM2016-77642-C2-1-P).

References

- [1] A. Belotto da Silva, *Local resolution of ideals subordinated to a foliation*. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM, 110 (2016), pp. 841-862.
- [2] C. Camacho; P. Sad, *Invariant varieties through singularities of vector fields*. Ann. of Math. 115 (1982), pp. 579-595.
- [3] C. Camacho; A. Lins Neto; P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*. J. Differential Geometry Vol. 20 No. 1 (1984), pp. 143-174.
- [4] M.I.T. Camacho; F. Cano, *Singular foliations of toric type*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 6^e série, tome 8, No. 1, (1999) pp. 45-52.
- [5] F. Cano, *Reduction of singularities of codimension one foliations in dimension three*. Ann. of Math (2) 160 (3) (2004), pp. 907-1011.
- [6] F. Cano; D. Cerveau, *Desingularization of non-dicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*. Acta Math. 169 (1992), pp. 1-103.
- [7] F. Cano; D. Cerveau; J. Déserti, *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Berlin Education Editions. ISBN-13: 978-2701174846 (2013).
- [8] F. Cano; J-F. Mattei, *Hypersurfaces intégrales des feuilletages holomorphes*. Annales de l’institut Fourier 42.1-2 (1992), pp. 49-72.
- [9] F. Cano; M. Ravara-Vago, *Local Brunella’s alternative II. Partial separatrices*. Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 23 (2015), pp. 12840–12876.
- [10] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, ISBN-10: 0-387-94755-8 (1996).
- [11] M. Fernández-Duque, *Elimination of resonances in codimension one foliations*. Publicacions Matemàtiques, Vol. 59, No. 1 (2015), pp. 75-97.
- [12] P. Fernández; J. Mozo-Fernández, *On generalized surfaces in $(\mathbb{C}^3, 0)$* . Astérisque 323 (2009), pp. 261-268.
- [13] J. P. Jouanolou, *Équations de Pfaff algébriques*. Lecture Notes in Mathematics, 708. Springer-Verlag ISBN-10: 3-540-09239-0 (1979)
- [14] J. Martinet; J-P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*. Annales scientifiques de l’É.N.S. 4e série, tome 16, No. 4 (1983), pp. 571-621
- [15] B. Molina-Samper, *Global Invariant Branches of Non-degenerate Foliations on Projective Toric Surfaces*. ArXiv: 1902.04875 (Submitted on 13 Feb 2019).
- [16] L Ortiz; E. Rosales; S. Voronin, *On Camacho-Sad’s theorem about the existence of a separatrix*. International Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 11 (2010), pp. 1413-1420.
- [17] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation $Ady=Bdx$* . Amer. J. Math., 90 (1968), pp. 248-269.

Bibliografía

- [1] C. Alonso; M.I.T. Camacho; F. Cano, *Topological invariants for singularities of real vector fields in dimension three*. Discrete Contin. Dyn. Syst. DCDS 20, no. 4, pp. 823-847 (2008).
- [2] C. Alonso; M.I.T. Camacho; F. Cano, *Topological classification of multiple saddle connections*. Discrete Contin. Dyn. Syst. DCDS 15, no. 2, pp. 395-414 (2006).
- [3] J.M. Aroca; H. Hironaka; J.L. Vicente, *The theory of maximal contact*. Mem. Mat. Inst. Jorge Juan Madrid, No 29 (1975), 135 pp. Second version: *Complex Analytic Desingularization*. Springer ISBN 978-4-431-70218-4 (2018).
- [4] A. Belotto da Silva, *Local resolution of ideals subordinated to a foliation*. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM, 110 (2016), pp. 841-862.
- [5] D.N. Bernshtein, *The number of roots of a system of equations*. Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya Vol.9, No. 3, pp. 1-4 (1975) (Russian). English translation in Functional Analysis and its Applications 9, No. 3, pp. 183-185 (1975).
- [6] C. Camacho; R. Rosas, *Invariant sets near singularities of holomorphic foliations*. Ergod. Th. and Dynam. Sys. 36, pp. 2408-2418 (2016).
- [7] C. Camacho; P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*. Annals of Mathematics, Vol. 115, No. 3, pp. 579-595 (1982).
- [8] C. Camacho; A. Lins Neto; P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*. J. Differential Geometry Vol. 20 No. 1, pp. 143-174 (1984).
- [9] M.I.T. Camacho; F. Cano, *Singular foliations of toric type*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 6^e série, tome 8, No. 1, pp. 45-52 (1999).
- [10] F. Cano, *Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three*. Annals of Mathematics, pages 907-1011 from Volume 160 (2004).
- [11] F. Cano; D. Cerveau, *Desingularization of nondicritical holomorphic foliations and existence of separatrices*. Acta Math. 169, no. 1-2, pp. 1-103 (1992).
- [12] F. Cano, D. Cerveau, J. Déserti, *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Berlin Education Editions. ISBN-13: 978-2701174846 (2013).
- [13] F. Cano; M. Fernández-Duque, *Local Uniformization of Foliations for Rational Archimedean Valuations*. ArXiv Preprint, <https://arxiv.org/pdf/1611.08730.pdf>. (2018).
- [14] F. Cano; J.F. Mattei, *Hypersurfaces intégrales des feuilletages holomorphes*. Annales de l'institut Fourier 42.1-2, pp. 49-72 (1992).
- [15] F. Cano; M. Ravara-Vago, *Local Brunella's alternative II. Partial separatrices*. Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 23 (2015), pp. 12840-12876.

- [16] F. Cano; M. Ravara-Vago; M. Soares, *Local Brunella's alternative I. RICH foliations*. Int. Math. Res. Not. IMRN, Vol 2015, Issue 9, pp. 2525-2575 (2015).
- [17] D. Cerveau, *Pinceaux linéaires de feuilletages sur $\mathbb{C}P(3)$ et conjecture de Brunella*. Publ. Mat. 46, no. 2, pp. 441-451 (2002).
- [18] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Springer-Verlag ISBN-10: 0-387-94755-8 (1996).
- [19] M. Fernández-Duque, *Elimination of resonances in codimension one foliations*. Publications Mathématiques, Vol. 59, No. 1 (2015), pp. 75-97.
- [20] P. Fernández; J. Mozo-Fernández, *On generalized surfaces in $(\mathbb{C}^3, 0)$* . Astérisque 323, pp. 261-268 (2009).
- [21] R. Godement, *Théorie des faisceaux*. Actualités scientifiques et industrielles, 1252. Publications de l'Institut de mathématique de l'Université de Strasbourg ISBN: 2-7056-1252-1 (1973)
- [22] Goward, Jr. Russell A. *A simple algorithm for principalization of monomial ideals* Trans. Amer. Math. Soc. Vol 357 No 12 (2005).
- [23] R.C. Gunning; H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*. AMS Chelsea Publishing, Volume 368, ISBN: 978-0-8218-2165-7 (1965)
- [24] J.P. Jouanolou, *Équations de Pfaff algébriques*. Lecture Notes in Mathematics, 708. Springer-Verlag ISBN-10: 3-540-09239-0 (1979).
- [25] J. Martinet; J-P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*. Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 16, No. 4, pp. 571-621 (1983).
- [26] D. Marín; J.F. Mattei *Incompressibilité des feuilles de germes de feuilletages holomorphes singuliers*. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 41, no. 6, pp. 855-903 (2008).
- [27] D. Marín; J.F. Mattei *Monodromy and topological classification of germs of holomorphic foliations*. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 45, no. 3, pp. 405-445 (2012).
- [28] J.F. Mattei and E. Salem. *Modules formels locaux de feuilletages holomorphes*. ArXiv Preprint <https://arxiv.org/abs/math/0402256> (2004).
- [29] B. Molina-Samper, *Combinatorial Aspects of Classical Resolution of Singularities*. RACSAM. Serie A. Matem. <https://doi.org/10.1007/s13398-018-0583-z> (2018).
- [30] B. Molina-Samper, *Global Invariant Branches of Non-degenerate Foliations on Toric Projective Surfaces*. ArXiv Preprint, <https://arxiv.org/pdf/1902.04875.pdf>. Submitted (2019).
- [31] B. Molina-Samper, *Invariant Surfaces for Toric Type Foliations in Dimension Three*. ArXiv Preprint, <https://arxiv.org/pdf/1905.00836.pdf>. Submitted (2019).
- [32] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Lecture Notes in Mathematics, Volume 1358, ISBN: 3-540-63293-X (1974).
- [33] H. Hironaka, *Characteristic Polyhedra Singularities*. J. Math. Kyoto Univ. 7 (3), pp. 251-293 (1967).
- [34] A.G. Khovanskii, *Newton polyhedra (algebra and geometry)*. American Mathematical Society Translations (2), Vol. 153 (1992).

BIBLIOGRAFÍA

- [35] A.G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*. Invent. Math. 32, no. 1, 1-31 (1976).
- [36] M. Oka, *Non-degenerate complete intersection singularity*. Actualités Mathématiques. Hermann, Paris, viii+309, pp.220 (1997).
- [37] L Ortiz; E. Rosales; S. Voronin, *On Camacho-Sad's theorem about the existence of a separatrix*. International Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 11, pp. 1413-1420 (2010).
- [38] L Ortiz; E. Rosales; S. Voronin, *Formal and analytic normal forms of germs of holomorphic nondicritic foliations*. J. Singul. 9, pp. 168–192 (2014).
- [39] S. Pinheiro; H. Reis *Topological aspects of completely integrable foliations*. J. Lond. Math. Soc. (2) 89, no. 2, pp. 415–433 (2014).
- [40] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differential equation $Ady=Bdx$* . Amer. J. Math., 90 pp. 248-269 (1968).
- [41] M. Spivakovsky, *A solution to Hironaka's polyhedra game*. Arith. and Geom. II, Progr. Math. vol. 36, Birkhauser, Boston, pp. 419-432 (1983).

Índice de figuras

1.1.	Singularidades simples hiperbólico-complejas en dimensión dos.	35
1.2.	Figura final: Singularidades simples en dimensión tres.	35
1.3.	Sucesiones de explosiones combinatorias.	38
1.4.	Ramas invariantes aisladas y no aisladas.	41
2.1.	Explosión del tejido soporte \mathcal{T}	44
2.2.	Compatibilidad con las proyecciones.	46
2.3.	Tejido soporte de contacto maximal.	51
2.4.	Proyección de Hironaka local.	51
2.5.	Caso no consistente.	52
2.6.	Proyección de Spivakovsky.	54
4.1.	Representación baricéntrica de $\mathcal{W}_{\{1,2,3\}}$ y sus particiones.	80
4.2.	Movimiento del poliedro y estabilidad.	82
4.3.	Situación final en un punto $p \in S_J$	83
5.1.	Caso a) Un solo vértice.	89
5.2.	Caso b) Segmento que une $(0, d, 0)$ y $(0, 0, d)$	89
5.3.	Caso c) Segmento que une $(d, 0, 0)$ y $(0, a, d - a)$	89
5.4.	Pre-desingularización minimal en el caso b).	91
5.5.	Pre-desingularización minimal en el caso c).	91
6.1.	Ejemplo de Jouanolou en $(\mathbb{C}^3, 0)$	96
6.2.	Componente dicrítica compacta en la cual no se cierra $S_{\mathcal{C}}$	97
6.3.	Propiedad de prolongación a lo largo de una componente dicrítica.	98
6.4.	Divisores compactos obtenidos por explosiones combinatorias.	100