Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Administración y Dirección de Empresas

Juegos repetidos: Cooperación

Presentado por:

Zarina Sieira Mateos

Valladolid, 18 de Julio de 2019

RESUMEN

La Teoría de Juegos es “una rama de la economía que estudia las decisiones en las que para que un individuo tenga éxito, tiene que tener en cuenta las decisiones tomadas por el resto de los agentes que intervienen en la decisión” (Javier J. Navarro, El Blog Salmón, 2011). Se distinguen dos tipos de juegos, unos que se basan directamente en acuerdos de cooperación y otros que, sin haber acuerdos previos, si pudieran cooperar llegarían a un mejor resultado. Además, los juegos se pueden repetir un número finito de veces o de manera infinita, surgiendo diferentes acuerdos entre los jugadores e incentivos para la cooperación, de manera que cada jugador diseñara sus estrategias en función de lo que vaya a hacer su adversario.

Palabras clave: juegos cooperativos, juegos no cooperativos, juegos repetidos.

Game Theory is "a branch of economics that studies decisions in which for an individual to be successful, he has to take into account the decisions made by the rest of the agents involved in the decision” (Javier J. Navarro, El Blog Salmon, 2011). There are two types of games, some that are based directly on cooperation agreements and others that, without previous agreements, if they could cooperate would reach a better result. In addition, games can be repeated a finite number of times or infinitely, arising different agreements between players and incentives for cooperation, so that each player designed their strategies depending on what their opponent will do.

Keywords: cooperative games, non-cooperative games, repeated games.

Codigos JEL: C7, L83, A12.

INDICE

INTRODUCCIÓN

La elección de este tema me ha parecido interesante porque es una parte de las matemáticas relativamente moderna que estudia problemas de decisión en los que interaccionan varios decisores. Sus investigadores estudian las estrategias óptimas, así como el comportamiento previsto y observado de individuos en juegos llegando incluso a haber conflicto de intereses o posibles traiciones de acuerdos. En este trabajo estudiaremos los distintos tipos de juegos, sus representaciones y además introduciremos el caso en el que se repitan un número finito o infinito de veces para saber cuál es el mejor resultado en cada caso.

Aunque la Teoría de Juegos fue fundada por Von Neumann (1928), algunos matemáticos como Zermelo (1913) o Borel (1921) ya anticiparon las bases de esta teoría. Concretamente, la primera vez que se nombró a la Teoría de Juegos fue en la revista Theory of Games and Economic Behavior (1944) por Von Neumann con el economista Morgenstern. Todo el estudio posterior sobre la Teoría de Juegos está muy influenciado por esta obra, en la que se definen las bases de lo que hoy en día es conocida como Teoría de Juegos clásica.

Ya en los cincuenta, Nash profundiza en la Teoría de Juegos estableciendo que cualquier juego con un número finito de estrategias tiene al menos una combinación en la que los jugadores no tienen incentivo a cambiar su estrategia o desviarse de ella, a lo que denominó el equilibrio de Nash en estrategias mixtas en juegos no cooperativos, y en los setenta, investigadores como Selten y Harsanyi desarrollan los conceptos que permitirán la aplicación de la Teoría de Juegos a la economía y otras disciplinas. Actualmente, los métodos de esta teoría se aplican a un gran número de campos como la economía, la biología, la sociología o las ciencias políticas.

Las grandes consecuencias que la Teoría de Juegos ha tenido sobre la Economía quedan reflejadas en que se le concediera el Premio Nobel de economía a tres de los matemáticos que fundaron las bases de la Teoría de Juegos aplicada a la economía: Nash, Selten y Harsanyi. Más recientemente, en 2005, Robert Aumann y Thomas Schelling recibieron el Nobel por sus escritos en los que trataban el tema del conflicto y la cooperación en la Teoría de Juegos.

Adam Smith decía que “el interés individual conduce a los seres humanos, como si fueran guiados por una mano invisible, hacia la consecución del bien común” pero la teoría de Nash y Neumann indica justamente lo contrario, el interés individual, el egoísmo y la racionalidad a la hora de tomar decisiones, puede conducir a los seres humanos a una situación no óptima, porque deben tener en cuenta las posiciones del resto de agentes involucrados en sus actuaciones, como veremos más adelante. En materia económica se dan muchas situaciones de este tipo sobre todo en materia comercial y en empresas industriales.

La Teoría de Juegos distingue dos modelos de juegos en su planteamiento:

- En los juegos no cooperativos o competitivos, cada componente buscará su mayor beneficio, prohibiéndose cualquier acuerdo previo. Esta rama estudia las diferentes estrategias que pueden utilizar cada uno de los jugadores, existiendo una serie de pagos asociada a cada jugador, que dependen de las diferentes estrategias que se empleen.
- En los juegos cooperativos, los jugadores disponen de mecanismos que les permiten tomar acuerdos vinculantes previos al juego. Es decir, los jugadores pueden cooperar formando coaliciones con el fin de obtener mayor riqueza. En un juego cooperativo no hay que estudiar las estrategias de los jugadores, ya que éstos actuarán del modo que consigan máxima ganancia.

En esta Teoría además se asume que:

- Cada jugador conoce y ha adoptado su mejor estrategia, es decir, son racionales.
- Todos conocen las estrategias de los otros.

2. JUEGOS COOPERATIVOS

Los Juegos Cooperativos se caracterizan por la posibilidad de que los jugadores pueden cooperar entre ellos para repartirse un beneficio final. Los jugadores de esta cooperación, actuarán buscando el máximo provecho en conjunto, formando coaliciones.

Una coalición puede estar formada por cualquier número de jugadores, además se permite la comunicación entre ellos. Una consecuencia de esta comunicación es que se establezcan acuerdos para orientar estrategias en un beneficio común, acuerdos que suelen acarrear pagos posteriores entre los jugadores. El objetivo de esta cooperación se centra, más que en las posibilidades estratégicas individuales de los jugadores, en las coaliciones a las que dichos jugadores tienen opción.

Cada coalición supone una alianza de un grupo de una parte del total de empresas, que puede formarse o no, no obstante, hay que considerarlos todos para evaluar el beneficio que le corresponde a cada empresa y así tener una visión más imparcial del juego. La definición de coalición incluye, entre otros, el conjunto vacío, los subconjuntos formados por un único jugador y el conjunto total. Existen un número de factores que afectan a esta cooperación, tales como:

- El número de empresas en el mercado: cuanto mayor sea el grado de concentración en el mercado, mayores serán los incentivos para cooperar. Las empresas en mercados concentrados tenderán a la cooperación debido a que los beneficios se repartirán entre menos empresas.
- Si las empresas compiten en más de un mercado, los acuerdos de cooperación serán más estables. Las empresas que compitan entre unas y otras en varios mercados pueden establecer estrategias de gatillo (cualquier desviación por parte de una de las partes deberá ser castigada de forma inmediata) que se puedan aplicar en todos estos mercados, y de esta forma crear estrategias de castigo más estrictas.
- Transparencia del mercado: cuanto más transparente sea un mercado, más fácil es asegurar que cada empresa sigue la misma estrategia, sin desviación alguna del acuerdo. La cooperación será menos probable en aquellas industrias donde sea más difícil detectar cambios en los niveles de producción y de precios de las empresas.

- Asimetría entre empresas: cuanto mayor sea la asimetría entre las empresas, mayor será la dificultad de que ocurra la colusión entre ellas. Si las empresas tienen estructuras de costes diferentes, aquella que tenga la estructura de costes más baja estará incentivada a reducir sus precios, y con ello causar que la otra empresa salga del mercado.

La teoría cooperativa permite estudiar cómodamente juegos con un número considerable de jugadores. La mayor dificultad se encuentra en el reparto de beneficios entre los jugadores que forman la agrupación. Dado que los jugadores han cooperado entre sí para obtener el máximo beneficio, éste se repartirá entre todos los componentes de la coalición.

El objetivo de la Teoría de Juegos Cooperativos es examinar la participación que ha tenido cada componente, para proponer un reparto de las ganancias, es decir, la utilidad total que puede alcanzar cada coalición por sí misma cuando sus miembros optimizan la coordinación de sus estrategias. Lo que denominamos "utilidad" representa por lo general pagos, beneficios, satisfacción, capacidad de acción o de decisión, costes, etc...

Por tanto, definimos el juego cooperativo como:

- Un conjunto finito de jugadores denotado por N, n = {1, 2...}
- Función característica del juego u que asigna a cada coalición un número real. La única condición que se impone a esta función u es que u (Ø) = 0.

En la práctica, escribiremos simplemente u (1), u (1, 2) … en vez de u ({1}), u ({1,2}) …Por tanto, denotamos a un juego como (N, u) donde tanto N como u deben estar especificados. Buscaremos una regla general de reparto que sea objetivamente justa, y que evalúe el problema en términos de las utilidades asignadas a las coaliciones.

A la hora de buscar resultados posibles, debe hacerse un reparto del pago total entre los jugadores. El pago a cada jugador puede representarse mediante una función x que a cada jugador del conjunto N le asigne un número real que represente el pago que obtendrá ese jugador en el juego. Esta función puede expresarse mediante el vector de pagos x= (x_1, x_2,…x_n) donde x_i representa el pago al jugador i.

A la hora de usar los juegos cooperativos para modelar situaciones de la vida real, existe una restricción lógica para el vector de pagos y es que para que los jugadores acepten la distribución de beneficios propuesta por el vector de pagos, tienen que recibir un pago superior al que recibirían si jugasen solos. este es el llamado principio de individualidad racional. Veamos a continuación un ejemplo.

Supongamos que tres empresas, que representaremos por 1, 2 y 3, necesitan proveerse de forma periódica de 500, 1000 y 1500 unidades de cierto producto, respectivamente. El mayorista que suministra el producto tiene fijado un precio unitario de 1 euro, pero ofrece también los descuentos graduales siguientes según el volumen del pedido que recibe:

• Nada para las primeras 500 unidades

• El 15% de descuento para las unidades desde 501 hasta 1000

• El 20% para las unidades desde 1001 a 1500

• El 25% para las unidades desde 1501 en adelante

GRUPO	DEMANDA	COSTE REAL	BENEFICIO
(1)	500	500	0
(2)	1000	925	75
(3)	1500	1325	175
(1, 2)	1500	1325	175
(1, 3)	2000	1700	300
(2, 3)	2500	2075	425
(1, 2, 3)	3000	2450	550

2.1: Tabla que expone las condiciones del suministro a cada posible grupo de empresas.

Los beneficios que obtiene la coalición deberán ser repartidos al finalizar el juego entre los jugadores que forman la coalición, cuando este reparto de los beneficios es posible hablamos de un juego de utilidad transferible, que denominaremos UT.

Existen diferentes métodos para repartir los beneficios obtenidos por la coalición entre los jugadores que la forman. Uno de los más utilizados en los juegos cooperativos de utilidad transferible es el Valor de Shapley. Se trata de la única una asignación que cumple las propiedades de eficiencia, simetría, tratamiento del jugador pasivo y aditividad (Joaquín Pérez, José Luis Jimeno y Emilio Cerdá, (2004)).

Valor de Shapley

Sea G= (N, v) un juego en formal coalicional donde N= (1, 2, ...n), la asignación de pagos del valor de Shapley es

$$\varphi(v)=(\varphi 1(v), \varphi 2(v), \ldots, \varphi n(v))$$

con

$$\varphi i(v) = \sum_{S \in P(N)} q(s)[v(S) - v(S - \{i\})]$$

donde

$$q(s) = \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!}$$

siendo *s* el número de jugadores que hay en la coalición S.

Aplicándolo para nuestro caso tenemos q (1) = 1/3, q (2) = 1/6 y q (3) =1/3.

Las expresiones para el valor de Shapley son

$$\varphi 1(v) = q(1)[v(1) - v(0)] + q(2)[v(1,2) - v(2)] + q(2)[v(1,3) - v(3)]$$
$$+ q(3)[v(1,2,3) - v(2,3)] = \frac{1}{3}0 + \frac{1}{6}\left(175 - 75\right) + \frac{1}{6}\left(300 - 175\right) + \frac{1}{3}\left(550 - 425\right) = \frac{475}{6}$$

Análogamente se obtienen los valores para los otros dos jugadores. El valor de Shapley del juego es:

$$\varphi(v) = \left(\frac{475}{6}, \frac{1075}{6}, \frac{1750}{6}\right)$$

3. JUEGOS NO COOPERATIVOS

Los juegos no cooperativos son aquellos donde no se permite la cooperación, aunque en algunos casos podría favorecerlos a todos, como ya veremos; además los agentes toman sus decisiones de manera independiente.

El juego distingue una serie de elementos que lo forman:

- Jugadores: tienen a su disposición una serie de alternativas estratégicas y elegirán la más conveniente.
- Estrategias: es el plan de acción que seguirá en el juego cada componente. La Teoría de Juegos lo que pretende es llegar a la estrategia óptima.
- Ganancias: son las utilidades o beneficios que obtiene cada jugador al final del juego.

Los juegos no cooperativos se clasifican en:

- <u>Juegos estáticos o simultáneos:</u> es aquel en el que cada jugador toma su decisión sin saber la decisión del otro. Ejemplos: subastas a sobre cerrado, votaciones por mayoría simple. Tipos de estrategias:
  - Puras: es aquella que se toma con certeza e indica al jugador que movimiento debe elegir entre un número determinado de acciones. Por ejemplo, el juego de piedra papel tijera en el que ambos participantes tienen las mismas opciones de decisiones y cada uno tiene tres estrategias puras: piedra, papel o tijera; de la combinación de las decisiones de cada jugador saldrán diferentes perfiles u opciones del juego.
  - Mixtas: es una combinación de decisiones tomada de acuerdo a una serie de probabilidades cuya suma debe ser el 1, es decir, es una distribución de probabilidad frente a estrategias puras, introduce el azar.

Para ver la diferencia entre pura y mixta supongamos un juego en el que el jugador uno tiene opciones A y B mientras que el jugador dos tiene opciones C y D. Si el jugador uno elige tomar la opción A estará siguiendo una estrategia pura ya que de fijo toma esa decisión, sin embargo, si el jugador dos toma su decisión basándose en el lanzamiento de una moneda en el que si sale cara toma la opción C y si sale cruz toma la opción D estará siguiendo una estrategia mixta.

Este tipo de juegos se representan en lo que se denomina forma normal, donde los jugadores eligen simultáneamente su estrategia o jugada. Se representa a través de matrices en el caso de que sea un juego finito de 2 jugadores, en el que los jugadores actúan de manera simultánea, por lo tanto, la información es imperfecta, no saben lo que va hacer el otro. Este modelo de juego puede ser muy útil para identificar los equilibrios de Nash y eliminar las estrategias dominadas. Ejemplo del dilema de prisionero que veremos más adelante.

- Juegos dinámicos o secuenciales: son aquellos en los que existe un orden de actuación, teniendo en cuenta las posibles respuestas del otro jugador. Ejemplo que veremos con el modelo de Stackelberg.

Estos juegos se representan en forma extensiva, donde los jugadores eligen su jugada de forma secuencial. Se representa a través de esquema árbol donde cada vértice o nodo representa una decisión que puede tomar uno de los jugadores y sus pagos correspondientes. Esta representación se divide en subjuegos que son una parte del juego que comienza en un nodo de decisión unitario y contiene a todos los nodos sucesores sin romper con ningún conjunto de información.

La resolución es por medio de la llamada Inducción hacia atrás que es el procedimiento de analizar el juego desde el final hacia el principio, es decir. desde los conjuntos de información en el final del árbol hasta los conjuntos de información del principio y así identificar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.

Los juegos también se clasifican por la cantidad de información que tengan los jugadores sobre la estrategia de su adversario. Una de ellas son los juegos con información perfecta en la que cada jugador conoce el resultado de las jugadas anteriores, aunque en la practica la mayoría de las situaciones no tienen este tipo de información ya que hay incertidumbre sobre las jugadas del contrario; en este tipo de juego cada conjunto de información contiene un solo nodo.

3.1 Generalidades. Equilibrio de Nash

Es un perfil de estrategias en el que todos los jugadores han puesto en práctica, y saben que lo han hecho, una estrategia que maximiza sus ganancias dadas las estrategias de los otros. Consecuentemente, ningún jugador tiene ningún incentivo para modificar individualmente su estrategia.

Es importante tener presente que un equilibrio de Nash no implica que se logre el mejor resultado conjunto para los participantes, sino sólo el mejor resultado para cada uno de ellos considerados individualmente. Es perfectamente posible que el resultado fuera mejor para todos si, de alguna manera, los jugadores coordinaran su acción.

Debemos tener en cuenta algunos conceptos:

- Óptimo de Pareto: es un criterio de eficiencia, fue desarrollado por Vilfredo Pareto en su libro «Manuale di economia politica" (Manual de economía política), publicado en 1906. Una asignación de bienes es óptima en el sentido de Pareto cuando no hay posibilidad de redistribución de una manera en la que al menos una persona estaría mejor, mientras que ningún otro individuo terminase peor.

Supongamos que vamos a ir de viaje con un amigo, pero no podemos ponernos en contacto con él y tenemos que tomar la decisión de si ir o no.

	Decides Viajar	**Decides no viajar**
Amigo decide viajar	(10,10)	(-10,0)
Amigo decide no viajar	(0,-10)	(0,0)

3.1.1: Representación de un juego en su forma normal para un ejemplo del equilibrio de Nash.

De manera que si ambos decidimos ir al viaje obtenemos una utilidad de 10 cada uno, si decidimos no ir la utilidad es cero, y si alguno de los dos decidimos ir al viaje y el otro no, la persona que decide ir pierde una utilidad de 10.

Recodemos que en el equilibrio de Nash todos conocen las estrategias de los otros por lo que nos quedan dos posibles soluciones en las que ambos vamos al viaje o en la que decidimos no ir, ya que ninguno estaría dispuesto a perder parte su utilidad, descartamos las soluciones en las que uno va y otro no.

También hemos supuesto que cada uno elige su mejor estrategia por ser individuos racionales, obteniendo como mejor resultado que ambos viajen y obteniendo así una utilidad de 10 cada uno.

3.2 Juegos en forma estratégica o normal

Vamos a ver un ejemplo clásico en la Teoría de Juegos como es el dilema del prisionero, que es un juego que demuestra que la cooperación beneficia ambas partes cuando ninguna de las dos coopera.

Vamos a entenderlo mejor con un ejemplo denominado dilema del prisionero, en el que la policía captura a dos delincuentes uno llamado Juan y el otro Pedro, la policía no tiene pruebas suficientes para culparlos por un presunto delito de robo, pero sí los puede condenar a dos años por tenencia ilícita de armas.

La policía los deja celdas y les propone, un trato por separado:

Si confiesa el atraco al banco y delata a su compañero usted saldrá libre y a su compañero le darán 10 años de prisión, pero si los dos confiesan haber robado el banco le rebajamos la pena cinco años.

Veamos el ejemplo con una tabla:

	Pedro confiesa	**Pedro no confiesa**
Juan confiesa	(-5,-5)	(0,-10)
Juan no confiesa	(-10,0)	(-2-,2)

3.2.1: Representación de un juego en forma normal para el ejemplo del dilema del prisionero.

Ambos tienen como objetivo disminuir de cualquier modo su condena, de manera que, si Juan confiesa y Pedro también los condenan a cinco años.

Si sólo Juan confiesa, a Pedro le dan 10 años. Si Juan no confiesa y Pedro si, a Juan le dan 10 años y si ninguno de los dos confiesa a cada uno le dan dos años de prisión por tenencia ilícita de armas.

Pongámonos en la situación de Juan, que pensará en las opciones de Pedro:

Si Pedro confiesa, la mejor decisión para Juan seria confesar y si Pedro no confiesa, lo mejor que puede hacer Juan es confesar, es decir, cualquiera que sea la opción de Pedro lo mejor para Juan es confesar.

Si pensamos en la situación de Pedro sobre Juan, va a pensar exactamente igual que Juan en las dos opciones anteriores, por lo que ambos confiesan y los condenan a cinco años de prisión. Es conveniente introducir en este punto que la estrategia de un jugador está estrictamente dominada si existe otra estrategia posible que proporciona al jugador un pago mayor. Independientemente de lo que hagan los demás jugadores, aplicando esto a nuestro ejemplo, si hubieran cooperado y ninguno hubiera confesado les hubieran dado dos años de prisión. El equilibrio de Nash por tanto sería confesar-confesar.

A continuación, vamos a ver este tipo de juegos aplicados a la economía mediante modelos de competencia imperfecta en duopolio. Los elementos que utilizaremos para los explicar los próximos modelos son:

E_1= empresa 1 E_2= empresa 2

p_1= precio de la empresa 1 p_2= precio de la empresa 2

q_1= cantidad de la empresa 1 q_2= cantidad de la empresa 2

Q= cantidad total ofrecida

C= coste marginal

3.2.1 Modelo de Cournot:

Fue desarrollado por Antoine A. Cournot en su obra “Researches Into the Mathematical principles of the Theory of Wealth” (Investigaciones acerca de los principios matemáticos de la teoría de las riquezas), de 1838. El duopolio de Cournot representa el comienzo del estudio de los oligopolios, en concreto los duopolios. Cournot realmente creó el concepto de Teoría de Juegos casi 100 años antes de John Nash, cuando trató el caso de cómo las empresas se comportarían en el caso de duopolios.

Las dos empresas quieren obtener los máximos beneficios a través de una mayor cantidad de ventas de sus productos, que supondremos homogéneos y mismos costes marginales, obteniendo de esta manera una porción mayor de la cuota de mercado con precios más altos. El objetivo es aumentar los ingresos, pero aumentar los beneficios aumentando la cantidad puede actuar de manera negativa en los beneficios y perder cuota de mercado.

$$u_1 (q_1, q_2) = (a-bq_1-bq_2-c)\, q_1$$

$$u_2 (q_1, q_2) = (a-bq_1-bq_2-c)\, q_2$$

Dadas las anteriores funciones de utilidad, la función de producción será de la siguiente forma:

$$P(Q)= a-bQ \text{ donde } Q= q_1+q_2 \text{ siendo } b>0 \text{ y } bQ<a$$

Calculando el equilibrio de Nash obtendremos la respuesta optima de E_1 a la acción de E_2, es decir, la función de reacción, resolviendo:

$$\max u_1 (q_1, q_2) = (a-bq_1-bq_2-c)\, q_1$$

Siendo la condición de primer orden para que sea máximo:

$$\frac{\partial u1}{\partial q1} = q1\left(-b\right) + \left(a - bq1 - bq2 - c\right) = 0$$

obtenemos $q_1=(a-c-bq_2) /2b$

Aplicamos la condición de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 u1}{\partial q1^2} = -2b < 0$$

Así la función de reacción será:

$$R_1(q_2) = (a-c-bq_2) /2b$$

Razonando de la misma manera para q_2 obtenemos la siguiente función de reacción:

$$R_2(q_1) = (a-c-bq_1) /2b$$

Si (q_1*, q_2*) es un equilibrio de Nash, q_1* será la mejor respuesta a q_2* y al revés, de manera que:

$$\boxed{\begin{array}{l} q_1^* = (a-c-bq_2^*) /2b \\ q_2^* = (a-c-bq_1^*) /2b \end{array}}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos:

$$q_1^*=q_2^*= (a-c) /3b$$

Sustituyendo las cantidades de equilibrio obtenemos la cantidad total el precio y el beneficio de equilibrio:

$$Q^*= 2[(a-c) /3b]$$

$$P^*= a-bQ= (a+2c) /3$$

$$u_1^*=u_2^*=(a-c)^2/9b$$

Supongamos un mercado en el que existen dos empresas idénticas que producen un mismo producto cuya demanda de mercado se representa como P = 1000 - Q y cuyos costes unitarios de producción son de 100 euros.

Primero tenemos que calcular la producción de equilibrio ya que el precio depende de la producción.

Las utilidades para las empresas 1 y 2:

$$U_1= (1000-(q_1+q_2)-100) *q_1$$

$$U_2= (1000-(q_1+q_2)-100) *q_2$$

Recordemos que cada empresa intenta maximizar sus utilidades por ello la utilidad de cada empresa depende de la variable producción. Igualando ambas expresiones a cero, y derivando cada expresión respecto q_1 y q_2 respectivamente se obtiene la cantidad óptima para las empresas 1 y 2:

$$q_1 = (900 - q_2) /2$$

$$q_2 = (900 - q_1) /2$$

Así hemos obtenido las funciones de reacción.

Una mayor producción total conlleva menores precios (esto siempre se cumple en pendientes negativas), entonces cada empresa quiere encontrar aquella mínima cantidad a producir y que así la otra empresa sea la que produzca más. Por ejemplo, la mejor respuesta para la empresa 1 es producir 100 unidades si cree que la empresa 2 producirá 700, y producir 300 unidades si estima que la empresa 2 también producirá 300 unidades.

Cada empresa basará sus decisiones en su función de reacción, estas decisiones se tomarán a la vez por ambas empresas por lo que calcularemos q1 en su función de reacción suponiendo que q_1=q_2, haremos lo mismo con la empresa 2 y se obtiene como resultado:

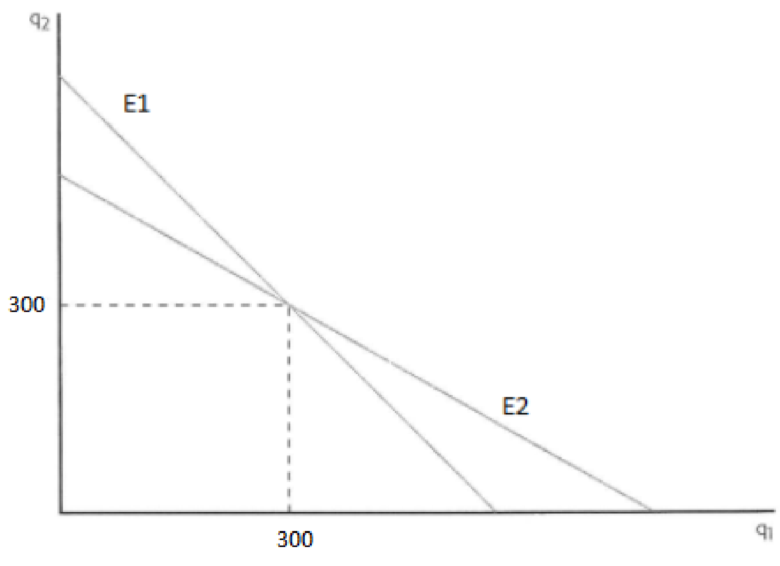
q_1*=q_2*=300 unidades

U_1=U_2= 90.000

P*=400 euros.

Este resultado nos muestra el equilibrio de Nash, que dice que existe este equilibrio cuando cada agente no quiere modificar su estrategia, y cree que es seguida por los demás.

Una producción de 300 unidades si se considera un equilibrio de Nash ya que es la mejor estrategia para la empresa y se cree que la otra empresa también producirá la cantidad acordada, siendo esta opción la mejor estrategia para ambas. Los resultados anteriores también se pueden presentar gráficamente:



3.2.1.1: Gráfica del Modelo de Cournot.

3.2.2 Modelo de Bertrand

Esto es similar al modelo de Cournot, pero las empresas ejercen poder de mercado por los precios de la elección.

Cuatro décadas después del modelo de Cournot, en 1883, Joseph Bertrand planteo un modelo de competencia donde dos empresas comparten el mismo mercado, los bienes son homogéneos y los costes marginales constantes y las empresas compiten en precio. Considerando erróneo el modelo de Cournot ya que opina que los duopolistas compiten en precios en vez de en cantidades y dedujo un precio de equilibrio como precio final que sería próximo al de libre competencia

El punto de vista de Bertrand fijando los precios parece más adecuado que el de Cournot. Teniendo en cuenta el modelo de Bertrand desde la perspectiva de la Teoría de Juegos, se considera como un juego simultáneo en el que la decisión estratégica se basa en los precios, en lugar de las cantidades.

En este modelo, los consumidores comprarán a la empresa que ofrece el precio más bajo, por lo que podemos tener fácilmente la intuición de que el equilibrio de Nash será el que las dos empresas fijen el mismo precio.

En este modelo las funciones de ambos productos dependen de sus respectivos precios, quedando definidas de la siguiente manera:

$$q_1(p_1, p_2) =a-p_1+bp_2$$

$$q_2(p_1, p_2) =a-p_2+bp_1$$

En el que las funciones de costes serán $C_1(q_1) =cq_1$ y $C_2(q_2) =cq_2$ y los parámetros a, b y c cumplen que $0<c<a$ y $0<b<2$. Los beneficios serán:

$$u_1(p_1, p_2) =q_1(p_1, p_2) (p_1-c)$$

$$u_2(p_1, p_2) =q_2(p_1, p_2) (p_2-c)$$

Para calcular la respuesta optima de E_1 a la acción de E_2, es decir, su función de reacción:

$$\max u_1(p_1, p_2) =(a-p_1+bp_2) (p_1-c)$$

Condición de primer orden de maximización de utilidad:

$$\frac{\partial u1}{\partial p1} = -\left(p1 - c\right) + \left(a - p1 + bp2\right) = 0$$

de donde obtenemos p_1=(a+c+bp_2) /2

La condición necesaria de máximo la obtenemos aplicando la condición de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 u1}{\partial p1^2} = -2 < 0$$

Análogamente haremos lo mismo para E_2. Las funciones de reacción:

$R_1(p_2)$ = (a+c+bp_2) /2
$R_2(p_1)$ = (a+c+bp_1) /2

Por lo tanto (p_1*, p_2*) será equilibrio de Nash:

P_1*=(a+c+bp_2*) /2

P_2*=(a+c+bp_1*) /2

Como hicimos en el modelo anterior, resolvemos el sistema de ecuaciones

p_1*=p_2*=(a+c)/(2-b)

Sustituyendo obtenemos la cantidad y el beneficio de equilibrio:

q_1*=q_2*=(a+(b-1)) c/(2-b)

u_1*=u_2*=u_1(p_1*, p_2*) =q_1*(p_1*-c) =(a+(b-1) c)^2/(2-b)^2

Supongamos que las empresas 1 y 2 fabrican los productos 1 y 2, respectivamente, el coste marginal de producción de cada bien es de 100 euros, donde las demandas por cada uno de estos productos se representan por:

q_1=1000-2P_1+P_2

q_2=1000-2P_2+P_1

El signo positivo del precio del producto en la cantidad vendida del producto 1, y viceversa, indica que a medida que aumenta el precio de un producto, aumenta el consumo del otro, por lo que se concluye que ambos son sustitutivos. Cada empresa maximiza sus utilidades dando lugar a las siguientes expresiones:

$$u1= (P1 - 100) *(1000 - 2P1 + P2)$$

$$u2= (P2 - 100) *(1000 - 2P2 + P1)$$

Puesto que en este caso las empresas compiten eligiendo el precio a cobrar, si para cada empresa igualamos el resultado de esta expresión a cero, se obtienen las siguientes funciones de reacción:

$$P_1= (1200+p_2) /4$$

$$P_2= (1200+p_1) /4$$

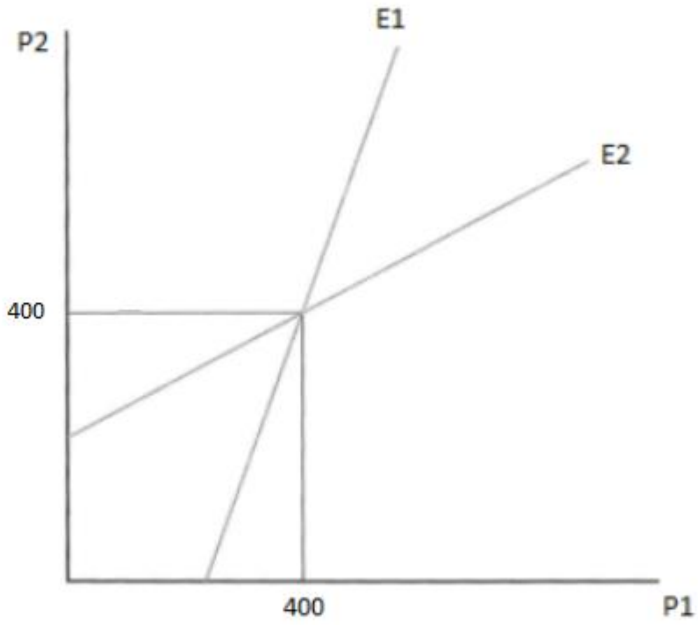
Si ambas empresas toman sus decisiones de precios simultáneamente, el equilibrio de este juego se obtiene en la intersección de ambas funciones de reacción, lo que arroja como resultado:

$$u_1 = u_2 = 180.000$$

$$q_1^*=q_2^*=600$$

$$p_1^*=p_2^*=400$$

Gráficamente, el equilibrio de Bertrand, donde este se obtiene en la intersección de las funciones de reacción de cada empresa, ya que solo en ese punto ambas empresas se encuentran sobre su función de reacción.



3.2.2.1: Gráfica del modelo de Bertrand.

Vamos a comparar el resultado obtenido con el que hubiese habido en caso de existir cooperación entre las empresas.

De haber cooperado, y de ser el precio la variable a seleccionar, las empresas maximizaran las utilidades conjuntas, que equivalen a:

$$UT= (P_1 - 100)(1000 - 2P_1 + P_2) + (P_2 - 100)(1000 - 2P_2 + P_1)$$

Derivando la expresión anterior respecto de p_1 y p_2, e igualando el resultado de esta derivada a cero, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$4p_2 = 1100 + 2p_1$$

$$4p_1 = 1100 + 2p_2$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$p_1^* = p_2^* = 550$$

$$q_1^* = q_2^* = 450$$

$$UT= 405.000$$

Si las empresas se repartieran las cantidades y utilidades en partes iguales, cada una obtendría una utilidad de 202.500 euros, superiores a las utilidades de 180.000 euros que obtenían en el equilibrio de Bertrand-Nash.

Por otra parte, el modelo de Bertrand concluyó que cuando los productos son homogéneos, los costes unitarios de producción de las empresas son constantes y no existe restricción de capacidad para ofrecer lo que se demande a cada precio igual o superior al coste marginal de producción, entonces el único equilibrio es con ambas empresas cobrando un precio equivalente al coste marginal de producción.

Esta última solución para el caso de productos homogéneos representa un equilibrio de Nash debido a:

- Cada empresa no le convendrá cobrar un precio menor porque obtendrá perdidas.
- Si una empresa cobra un precio mayor a su coste marginal, no venderá nada debido a que la otra empresa tendrá incentivos para bajar su precio en una pequeña cantidad y así, quedarse con todo el mercado, hasta que el precio iguale el coste marginal.

De lo anterior se concluye que el único precio del que ninguna de las dos empresas deseara moverse es el que coincida con su coste marginal. Este resultado, nos muestra por que las empresas buscan a toda costa diferenciarse de su competencia.

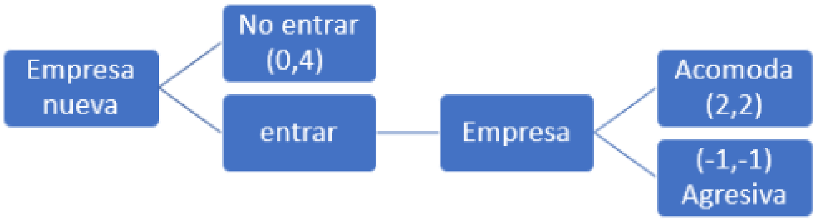
Asimismo, si bien los modelos de Cournot y Bertrand asumen que la interdependencia entre las empresas es simultánea, la gran diferencia entre ambos es que mientras en Cournot se supone que la variable de decisión de las empresas es la cantidad que hay que producir, en el modelo de Bertrand la corresponde al precio a cobrar por su producto.

Ambos tipos de decisiones son frecuentes en la vida real, aunque las decisiones de precio se asocian más con el corto plazo, y las de cantidades o capacidades, con el largo plazo.

Una diferencia importante entre los modelos de Cournot y Bertrand es que mientras la función de reacción tiene pendiente negativa cuando las empresas compiten en cantidades, dicha función tiene pendiente positiva cuando las firmas compiten en precios y los productos son sustitutos.

3.3 Juegos en forma extensiva

Es otro tipo de representación de los juegos no cooperativos, para ver en qué consisten vamos a suponer que en un mercado hay una empresa que gana 4 y otra empresa tiene que decidir si entra o no en el mercado.



3.3.1: Representación del ejemplo de decisión de entrar o no en el mercado en su forma extensiva.

Si la nueva empresa decide entrar, la empresa que ya estaba en el mercado puede acomodar la entrada de la nueva y repartir el beneficio o posicionarse de forma agresiva mediante precios, por ejemplo, y perdería 1 de utilidad.

Si la nueva empresa decidiera entrar, no tendría sentido que la empresa actual tome la posición de agresiva para acabar perdiendo utilidad pudiendo optar por la opción de acomodar y ganar 2 cada una.

En este punto del ejemplo viene bien mencionar el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, es el mismo concepto que en el equilibrio de Nash pero que se da en el subjuego. Con lo cual el equilibrio de Nash que hemos elegido es también equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Sin embargo, si la empresa que ya está en el mercado opta por la posición agresiva, la empresa nueva optará por no entrar, por lo que la nueva empresa no gana utilidad y la que ya está en el mercado obtiene una utilidad de 4.

En esta situación también habría un equilibrio de Nash ya que es una mejor respuesta ante lo que hace el otro y no van a ganar más si se da la otra opción.

3.3.1 Modelo de Stackelberg

En este modelo hay una empresa líder, que es la que fija la cantidad de producción y luego las empresas seguidoras son las que toman sus decisiones en un mercado de competencia imperfecta en un juego no cooperativo.

Fue desarrollado en 1934 por Heinrich Stackelberg en su obra “Market Structure and Equilibrium” (Estructura de Mercado y Equilibrio). Supone un gran descubrimiento especialmente en lo referente al análisis de los duopolios, debido a que es un modelo que se basa en hipótesis iniciales diferentes, y muestra conclusiones diferentes, a las de modelos de duopolios anteriores como el de Cournot o el de Bertrand.

En Teoría de Juegos, el duopolio de Stackelberg es un juego secuencial (no simultáneo, a diferencia del modelo de Cournot). En este modelo, existen dos empresas que producen bienes homogéneos y están sujetos a la misma demanda y función de costes.

Una empresa, la líder, que será la que mayor cuota de mercado tenga o la más conocida y valorada, decide primero cuanta será la cantidad q_1 que ofertará. La otra empresa, la seguidora, tras observar la decisión de la primera empresa, escogerá qué cantidad ofertará, q_2. Para encontrar el equilibrio de Nash del juego tenemos que utilizar inducción hacia atrás, como en cualquier juego secuencial.

El equilibrio del juego es lo que llamamos el equilibrio de Stackelberg. Sin embargo, que la líder haya decido producir más no significa que vaya a obtener beneficios mayores. La producción total será mayor y los precios menores, pero la empresa uno, es decir, la empresa líder, saldrá mejor parada que la empresa dos.

Todo esto nos lleva a conocer la importancia de información precisa de ese mercado a la hora de diseñar nuestra estrategia, y la interdependencia de las estrategias de cada jugador, especialmente cuando hay un líder de mercado, que tiene la ventaja de actuar primero, y un seguidor.

Los problemas que pueden surgir en este modelo es que la líder trate de aprovecharse de su situación privilegiada amenazando la existencia de la seguidora, lo que puede llevar a esta última a producir más a precios más bajos con el fin de ganar más cuota de mercado; no hace falta que la empresa seguidora lleve a cabo esta acción, ya solo la amenaza de poder hacerlo hará que la líder cambie su comportamiento.

En este modelo mantenemos los mismos supuestos que en el modelo de Cournot:

La función de demanda:

$$P=a-Q \text{ donde } Q<a$$

Los beneficios serán:

$$u_1(q_1, q_2) = q_1(a-q_1-q_2)-cq_1$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2(a-q_1-q_2)-cq_2$$

Supongamos que E_1 elige la cantidad q_1, donde $q_1>0$, mientras E_2 observa para luego escoger la cantidad q_2, donde también $q_2>0$.

Para saber qué cantidad escogerá E_2 en función de la cantidad que haya elegido E_1:

$$\max u_2(q_1, q_2) = q_2(a-c-q_1-q_2)$$

La condición de primer orden para que sea máximo:

$$\frac{\partial u2}{\partial q2} = 0$$

Despejando obtenemos $q_2=(a-q_1-c)/2$.

La condición de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 u2}{\partial q2^2} = -2 < 0$$

Por lo tanto, este punto es un máximo y la función de reacción de E_2 frente a la acción de E_1 será:

$$R_2(q_1) = (a-q_1-c)/2$$

La empresa E_1 se va a anticipar a esta respuesta de E_2, por lo que fijara su cantidad maximizando su función de utilidad:

$$\text{Max } u_1(q_1, R_2(q_1)) = q_1(a-c-q_1-R_2(q_1)) = [q_1(a-q_1-c)]/2$$

La condición de primer orden, es decir, derivada parcial igual a cero:

$$\frac{\partial u1}{\partial q1} = 0$$

Así obtenemos $q_1=(a-c)/2$. Por último, ya aplicamos la condición de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 u1}{\partial q1^2} = -1 < 0$$

Por lo tanto, el q1 que hemos calculado es un máximo y que junto con a la función de reacción de E_2 obtenemos el equilibrio de Nash:

$$q_1^*=(a-c)/2$$

$$R_2(q_1^*) = (a-q_1^*-c)/2 = (a-c)/4$$

Vamos a ver la solución que se daría según el modelo de Stackelber con el mismo ejemplo que usamos para los modelos de Cournot y Bertrand, supongamos ahora que la empresa uno se mueve antes que la empresa dos y que cuando ésta última debe decidir su nivel de producción, ya conoce la decisión de producción que tomó la empresa uno.

La empresa uno basará su decisión suponiendo que la empresa dos tomará la mejor decisión para ella, ya que será lo que haga la empresa uno también, por lo tanto, la empresa uno supondrá que la dos se moverá a través de su función de reacción así la líder conocerá la reacción de la empresa ante sus cambios de producción. Como podemos ver la base fundamental de este modelo es la información.

Volviendo al ejemplo, donde la demanda es $P = 1000 - Q$, los costes unitarios de producción son de 100 euros, y q_1 y q_2 son las cantidades producidas por las empresas 1 y 2, respectivamente, se obtiene la función de reacción de la seguidora, que corresponde a:

$$q_2 = (900-q_1)/2$$

En este caso, la empresa 1 maximiza sus beneficios, sujeta a la función de reacción de 2, lo que supone maximizar la siguiente función de beneficios, es decir, derivar la siguiente expresión:

$$U_1= (1000-q_1-((900-q_1) /2)-100)\ q_1$$

Resolviendo este ejercicio se obtiene que, en equilibrio:

q_1*= 450 unidades q_2*= 225 unidades

U_1=101.250 euros U_2=75.937 euros

P= 325 euros

Así, ambas empresas ganan, pero como vemos en los resultados gana más la líder que la seguidora, ya que al ser el movimiento secuencial la empresa líder saca ventaja de ello, esto es lo que la diferencia del modelo anterior en la que los movimientos son simultáneos y además en este modelo el resultado se acerca más uno de competencia.

Como conclusión podemos decir que el modelo de Stackelberg se aplica donde una empresa tenga más ventajas respecto a las demás, es decir haya asimetrías en ese mercado y el modelo de Cournot donde no existan tantas diferencias entre las empresas.

En resumen, mientras los modelos de Cournot y Bertrand plantean una interdependencia simultánea, el de Stackelberg se basa en el liderazgo de una de las empresas, que se traduce en que una tiene la posibilidad de tomar su decisión antes que la otra por lo que esta última, cuando toma su decisión, ya conoce la decisión tomada por la primera.

4. JUEGOS REPETIDOS

En la teoría de juegos, los juegos repetidos, son conocidos como superjuegos, y son los que se juegan una y otra vez por un tiempo, y se representan usando el modo extensivo.

La gran diferencia con los juegos de una sola repetición, es que los repetidos introducen unos incentivos a la cooperación entre jugadores para recibir unos pagos continuamente, sabiendo que, si no mantienen su parte del trato, el competidor puede dejar de cooperar.

La decisión de dejar de cooperar o la de seguir cooperando tiene que ser real para que nuestro competidor mantenga su parte del trato. Analizar si el trato es factible consiste simplemente en analizar qué situación nos es más ventajosa:

- Romper el trato nos conlleva un beneficio excepcional durante ese periodo en el que se rompe el acuerdo.
- Seguir cooperando con beneficios inferiores, pero que se dan durante todos los turnos.

Cada participante va a diseñar sus estrategias o movimientos teniendo en cuenta todos los movimientos anteriores hasta ese momento por lo que cada jugador tendrá esto en cuenta y prepararan el juego basándose en el comportamiento del adversario, y también sus cambios de estrategia.

Los juegos repetidos proporcionan diferentes ingresos en cada turno, dependiendo de las estrategias. Dado que este beneficio se da en diferentes momentos en el tiempo, tenemos que tener en cuenta la suma total de los pagos descontados de cada uno utilizando las siguientes fórmulas:

$P = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{p_t}{(1+r)^t}$	$P = \sum_{t=0}^{n} \frac{p_t}{(1+r)^t}$

Siendo:

- P: suma descontada de pagos
- t: número de la repetición en la que el juego está
- n: número total de repeticiones (juegos repetidos finitos)
- pt: el pago en la repetición en la que el juego está
- r: la tasa de descuento.

4.1 Juegos repetidos un número finito de veces

Un ejemplo de un juego repetido podría ser el de una persona que come todos los días en un mismo restaurante y tiene dos opciones dejar una propina generosa el camarero o no dejar una propina. Por su parte el camarero tiene a su vez también dos posibles estrategias esforzarse por dar un buen servicio o no esforzarse.

Es un juego repetido ya que se enfrentan cada día a esas posibles estrategias los mismos jugadores, el equilibrio dependerá de si se repite un número finito o infinito de veces. Además, ambos saben que el viernes es el último día en el que van a interactuar porque el camarero se va a marchar al día siguiente a otra cafetería.

El cliente no tendrá incentivos para dejar una generosa propina, pues eso no favorecerá el que reciba un mejor servicio ya que el camarero no le atenderá al día siguiente.

Por su parte, el camarero tampoco tendrá especial interés en esforzarse ese día ya que el viernes sabe que no va a recibir una buena propina.

El cliente el jueves tampoco va a dejar una buena propina porque ya sabe que el camarero no piensa darle un buen servicio.

El camarero sabe que el jueves no va a recibir propina tampoco se esforzara ese día lo que provocará que el cliente tampoco le deje una buena propina el miércoles y así sucesivamente.

Como vemos cuando contamos con un horizonte finito y conocido podemos analizar las estrategias que se van adoptar en el desarrollo del juego resolviéndolo por inducción hacia atrás.

Si solo existe un equilibrio de Nash y se trata de un juego que se repite durante un número finito de veces, los jugadores adoptarán las estrategias que componen dicho equilibrio de Nash a lo largo de todas las etapas que conste el juego repetido ya que no hay incentivos individuales para cambiar de estrategia.

	Buen trato	**Mal trato**
Propina	(8,8)	(0,10)
No propina	(10,0)	(2,2)

4.1.1: Representación en forma normal del ejemplo del camarero-cliente.

Cuando los jugadores saben el número de repeticiones, es interesante operar una inducción hacia atrás para resolver el juego.

Hay que tener en cuenta las estrategias de cada jugador cuando se dan cuenta de que la próxima ronda va a ser la última. Se comportan como si se tratara de un juego de una única repetición, por lo tanto, se aplica el equilibrio de Nash y el equilibrio será el mismo que en el juego de una sola repetición. En este caso el equilibrio será dar no propina-mal trato ya que el camarero pensará que el cliente no le ofrecerá propina y el cliente no tendrá incentivos para dejar propina porque no va a recibir un buen trato por parte del camarero.

Si consideramos ahora la penúltima ronda, cada jugador sabe que en la siguiente ronda (la última) ambos van a estar en la situación de no dar propina-mal trato, asique no hay ningún beneficio en hacer lo contrario en esta ronda tampoco. La misma lógica se aplica para las rondas anteriores. Por lo tanto, dar no dar propina-mal trato es el equilibrio de Nash para todas las rondas.

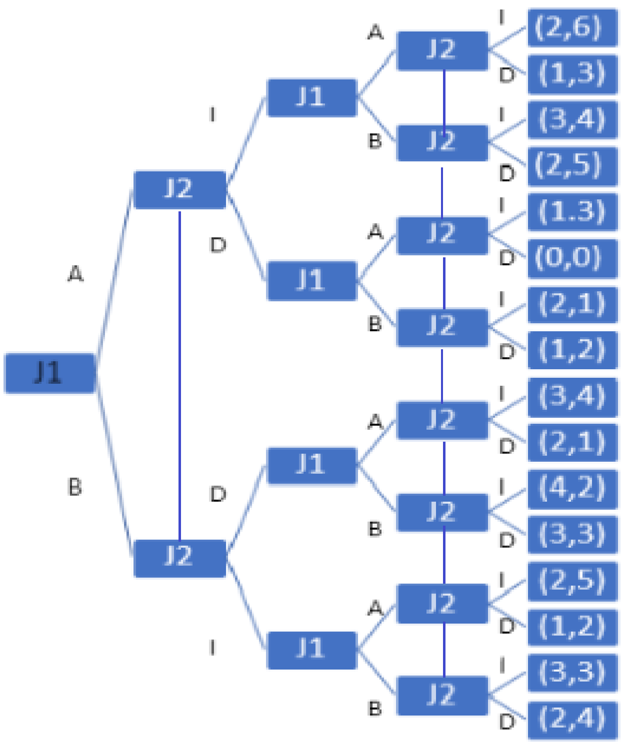
Veamos otro ejemplo:

	Izquierda	**Derecha**
Arriba	(1,3)	(0,0)
Bajo	(2,1)	(1,2)

4.1.2: Representación en forma normal del ejemplo de arriba/abajo izquierda/derecha.

Supongamos que dos individuos se encuentran ante este juego en el que el jugador número uno debe elegir entre alto y bajo y el jugador número dos tiene que elegir entre izquierda y derecha y además deben realizan su elección de manera simultánea. El jugador uno va a pensar que el jugador dos va a elegir lo que mayor beneficio le reporte, en este caso elegir la izquierda, si el jugador dos elige izquierda, la mejor opción del jugador uno es elegir abajo.

Si pensamos ahora en el jugador dos que pensara lo que vaya a hacer el jugador uno, pensara que la mejor opción para el jugador 1 es elegir abajo, por lo que el jugador dos elegirá derecha. Como se puede apreciar el juego sólo tiene un equilibrio de Nash en estrategias puras correspondiente a que el jugador número uno elija abajo y el jugador número dos elija derecha, si ambos jugadores vuelven a enfrentarse al mismo juego es previsible que vuelvan a utilizar las mismas estrategias. Vamos a ver ahora este mismo ejemplo en la otra forma de representación de un juego, es decir, de forma extensiva, teniendo en cuenta las dos etapas y calcularemos los equilibrios de Nash perfecto en subjuegos del juego repetido.



4.1.3: Representación en forma extensiva del juego arriba/abajo izquierda/derecha que se repite dos de veces.

Los pagos que figuran al final son el resultado de sumar los obtenidos en cada una de las etapas en función por tanto de la elección realizada por uno y otro jugador en ambas ocasiones.

Así si en la primera etapa juega en el perfil de estrategias (A, I) ambos obtendrán como pago (1,3) respectivamente.

Si vuelven a jugar en la segunda etapa de la misma manera volverán a ganar (1,3) por lo que los pagos finales serán (2,6).

Igualmente, si en la primera etapa juega en el perfil de estrategias (A, I) y en la segunda etapa cambian a jugar (A, D), los pagos que obtendrá serán los correspondientes a sumar 0 unidades que ambos consiguieron en la primera etapa, de la misma manera, si en la primera etapa juegan en el perfil de estrategias (A, I) y en la segunda etapa pasan a jugar (B, I) los pagos que recibirán se calcularán sumando los pagos de la primera etapa (1,3) con los de la segunda etapa (2.1) lo que hace un total de (3,4).

Repetimos este proceso para todas las posibilidades como se puede apreciar en el gráfico. Como podemos ver, este juego cuenta con cuatro subjuegos que comienzan en el momento en el que se ha acabado la primera etapa, ven el resultado que han obtenido en ella y tienen que elegir por segunda vez.

Para encontrar el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos habría que resolver los cuatro subjuegos y calcular a continuación el equilibrio del juego en su conjunto, resolviendo por inducción hacia atrás. Al hacerlo vemos que el equilibrio de Nash en cada subjuego consiste en jugar la combinación de estrategias (B, D).

Vamos a ver el dilema del prisionero y la posibilidad de adoptar estrategias condicionadas al comportamiento del otro, así en un dilema del prisionero, dado que ambos jugadores tienen una estrategia dominante, la no cooperativa, el equilibrio de Nash será único y cada uno de ellos obtendrá un pago inferior al que podría haber obtenido si hubiera operado por separado

Si el juego se desarrolla durante un número finito de partidas los jugadores seguirán sin tener ningún incentivo para cooperar, pero una regla de comportamiento en este tipo de juegos es que la estrategia de uno sea independiente de la estrategia desarrollada por el otro jugador y además lo que es bueno para uno es malo para el otro y viceversa.

Vamos a suponer por tanto que los individuos toman estrategias condicionadas según las cuales podrán actuar en la segunda etapa en función de cual haya sido el comportamiento del otro jugador en la primera ronda.

	Coopera	**No coopera**
Coopera	(5,5)	(-10, 10)

No coopera	(10, -10)	(0,0)

4.1.5: Representación del juego del dilema del prisionero con estrategias condicionadas, en su formal normal un número finito de veces.

En este juego en una etapa, la estrategia dominante de ambos jugadores es no cooperar porque existirá un único equilibrio de Nash. Puesto que no habrá última ronda, en cada ronda, los dos prisioneros calculan que habrá otra ronda y por lo tanto siempre hay beneficios derivados de la estrategia de cooperar (en la que ambos mienten).

La siguiente acción puede estar condicionada o no a la acción del otro, así una posible estrategia no condicionada sería (C; C, C) que sería cooperar en la primera etapa y cooperar si el otro lo hizo en la primera etapa y cooperar si el otro no lo hizo en la primera etapa, es decir cooperar siempre independientemente de lo que el otro haya hecho.

Una estrategia condicionada sería por ejemplo (C; C, NC) que la interpretaríamos de la siguiente manera cooperar en la primera etapa y después cooperar si el otro lo hizo en la primera etapa y no cooperar si el no coopero.

Si nos fijamos en las estrategias de los jugadores en las que comienzan no cooperando, después de la elección que tomen en la segunda etapa, que puede estar condicionada, vemos que un equilibrio se corresponde con la estrategia de ambos jugadores de no cooperar en ningún caso (NC; NC, NC) por lo que no cabe duda de que lo van hacer.

El otro equilibrio es en el que ambos siguen la estrategia condicionada de cooperar en la segunda etapa si el otro no lo hizo en la primera y no cooperar si lo hizo, es decir (NC; C, NC), pero como ninguno coopero en la primera etapa ninguno lo hará tampoco en la segunda.

Como muestra la teoría y hemos visto en este ejemplo por tanto en cada etapa hemos de esperar que no se produzca la cooperación si se conoce el final de un juego repetido un número dado de veces, sin embargo, la intuición nos indica que no siempre se cumple este comportamiento dado que la solución que se alcanza es la más desfavorable para ellos.

Si los jugadores decidiesen cooperar obtendría mejores resultados en un juego repetido, por lo tanto, si existen más de un equilibrio de Nash pueden ocurrir que existan equilibrios de Nash perfectos en subjuegos que incluyan alguna etapa con combinaciones de estrategias que no sean un equilibrio de Nash.

4.2 Juegos repetidos un número infinito de veces

A diferencia de lo que ocurre con los juegos repetidos un número de repeticiones finitas conocidas cuando el juego se repite durante el número de veces indefinido es posible que surja la cooperación, el hecho que hace posible la cooperación es la posibilidad de encontrarse en el futuro, es decir, puede dar lugar a una situación de cooperación tácita en el que las empresas condicionan su comportamiento hoy por la posibilidad de verse recompensadas o castigadas en el futuro.

El trabajo sin duda más citado en la literatura acerca de las posibles estrategias que se pueden seguir en una situación de un juego repetido un número infinito indeterminado de veces es el de Axelrod en sus artículos de los años 80 publicó los resultados de torneos informatizados del dilema del prisionero repetido, en ellos buscaba identificar las condiciones bajo las cuales puede emerger un comportamiento cooperativo en ausencia de un poder central, analizando detalladamente las estrategias propuestas.

En este torneo estrategia vencedora es la Rapoport conocida como ojo por ojo según esta estrategia, en el primer juego la acción que elegimos es la cooperativa en el resto de jugadas haremos lo que el otro jugador hizo en la jugada anterior, de esta forma de esta forma los jugadores se encontraran en la situación de equilibrio mutuamente cooperativo si por el contrario ante nuestra cooperación el otro decide no cooperar nos traiciona buscando Obtener así la mayor rentabilidad. en la siguiente jugada obtendrá nuestra respuesta no cooperativa, la del ojo por ojo.

El éxito de esta estrategia se basa en su capacidad para diferenciar a sus oponentes y adaptarse a ellos también porque resiste a la explotación es decir si el otro no copera yo le respondo no cooperando y también responde positivamente con cooperación a la cooperación.El hecho de tomar represalias rápidamente, en la jugada siguiente, añade fuerza esta estrategia frente a otras opciones en las que se pospone esta actitud para otro momento posterior.

A diferencia de lo que ocurre con el juego repetido finito de veces, si las interacciones son infinitas o se desconoce cuál es el final es más posible que surjan equilibrios en los que los individuos actúen de manera cooperativa.

4.2.1 Modelo de Cournot:

Por último, analizaremos como la repetición infinita del modelo de Cournot puede dar lugar a una situación de cooperación tácita entre las empresas. Vamos a suponer un mercado con dos empresas E1 y E2 que fabrican un determinado producto homogéneo, siendo las cantidades producidas de manera simultánea q1 y q2 respectivamente y que se enfrentan a una demanda temporal constante mediante una función de demanda decreciente con costes marginales constantes. Concretamente la función de demanda será:

$$P=a-bQ \text{ siendo } bQ<a \text{ y } Q=q1+q2$$

Los beneficios en cada periodo serán:

$$U1(q1, q2) =(a-bq1-bq2-c)\, q1$$

$$U2\,(q1, q2) =(a-bq1-bq2-c)\, q2$$

Recordemos que en el duopolio de Cournot habíamos llegado a la conclusión de que el equilibrio de Nash se daba con:

$$P^*= a-bQ= (a+2c)\,/3$$

$$u_1^*=u_2^*=(a-c)^2/9b$$

Sin embargo, en situación de monopolio la función es:

$$\text{Max } (a-Q-c)\, Q \text{ siendo } Q>0 \quad Q=(a-c)\,/2$$

Por lo que en un duopolio en el que las empresas pactan, se repartirán entre las dos la cantidad a producir de equilibrio:

$$Q_i^*=(a-c)\,/4b$$

En este punto tenemos que mencionar la estrategia del disparador que consiste en que la primera empresa en el primer periodo comience cooperando y que continúe cooperando mientras lo haga la empresa 2. Pero si alguna vez la empresa2 no coopera, no volverá a cooperar la empresa 1 nunca más. Esta estrategia condiciona lo que se va a jugar en cada periodo es en función de lo que se ha jugado en el pasado.

Respecto a la cantidad a producir, en el primer periodo y en los siguientes será la de la mitad del monopolio, qi=(a-c) /4b y en caso contrario producirá la cantidad de equilibrio de Cournot q_i^*=(a-c) /3b.

5. CONCLUSIONES

La Teoría de Juegos se ha convertido en el arma fundamental para aquellas situaciones de conflicto de intereses entre varios individuos con objetivos distintos. Actualmente tiene muchas aplicaciones como en la Economía, en las Ciencias Políticas, en la Filosofía, en la Biología, pero sobre todo en las estrategias empresariales ya que no depende el resultado de la actuación de un solo jugador sino de la interacción también del contrario, viendo además que los mejores resultados se dan en la cooperación, en caso de que sea posible, buscando el Equilibrio de Nash. Ya que, aunque desde el punto de vista empresarial se quiera maximizar los beneficios minimizando el riesgo siempre existirán instituciones que impidan llegar a ese equilibrio para favorecer la competencia

6. BIBLIOGRAFIA

Amer R.,Carreras F. y Magaña A. (2008): "Aplicaciones de los juegos cooperativos al ámbito empresarial". Disponible en:

https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2099/4859/juegos_cooperativos.pdf

Bour E.A, (2004): "Inducción hacia atrás y Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos". Disponible en:

http://www.ebour.com.ar/pdfs/Guia%203%20Teoria%20de%20los%20Juegos%20(Induccion%20hacia%20atras%20y%20ENPS).pdf

Calabuig, Universidad de Valencia (2012): “Juegos Repetidos”. Disponible en:

https://www.uv.es/~calabuig/juegos21.pdf

Colussi A. (2014): “La Teoría de Juegos y sus aplicaciones en la Economía actual”. Disponible en:

https://repositorio.comillas.edu/rest/bitstreams/1184/retrieve

Cuadros comparativos (2016): “Cuadros comparativos entre cartel y oligopolio”. Disponible en:

http://cuadroscomparativos.com/cuadros-comparativos-entre-cartel-y-oligopolio-informacion-y-diferencias-entre-ambos/

Eduardo González Fidalgo, (2018): Análisis competitivo de la empresa. Disponible en:

http://ocw.uniovi.es/pluginfile.php/1890/mod_resource/content/1/Tema_3_10.pdf

El Blog Salmón (2011): “Que es el Equilibrio de Nash”. Disponible en:

https://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-es-el-equilibrio-de-nash

Ferreira J.L, (2012): “Juegos repetidos un número infinito de veces”. Disponible en:

http://www.eco.uc3m.es/docencia/new_juegos/doc/3.2%20Repetidos%20infinitos.pdf

Javier J. Navarro, El Blog Salmón, (2011). Disponible en:

https://www.elblogsalmon.com/conceptos-de-economia/que-es-la-teoria-de-juegos

Laurelle y Valenciano (1999): “Teoría de Juegos Cooperativos”. Disponible en:

http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/11847/fichero/Volumen+1%252FCap%C3%ADtulo+1.pdf+

Oviedo J. (2015): “Teoría de Juegos no cooperativos”. Disponible en:

http://www.mmce2005.unsl.edu.ar/Cursos/JuegosNoCooperativos.pdf

Pérez J., Jimeno J.L y Cerdá E. (2004): *Teoría de Juegos*. Editorial Pearson Prentice Hall, España.

Polinomics:”Duopolio de Cournot, Bertrand y Stackelberg”. Disponible en:

https://policonomics.com/es/duopolio-cournot/

Tarzijan J., Paredes R. (2012): *Organización industrial para la estrategia empresarial*. Editorial Pearson Prentice Hall.

Ventsel E.S (2014): “Elementos de la Teoría de los Juegos”. Disponible en:

http://www.librosmaravillosos.com/elementosteoriajuegos/index.html

Wikipedia (2015):” Equilibrio de Nash”. Disponible en:

https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_juegos#Equilibrio_de_Nash