



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas

**Wavelets básicas y aplicación a  
eliminación de ruido y compresión de  
imágenes .**

*Autor: Sanz Martín, Laura*

*Tutor: Cano Urdiales, Begoña*



# Introducción

En el mundo en que vivimos, repleto de imágenes y señales, es muy importante tratar bien esa información para sacarle el máximo partido. Una forma de hacerlo es a través del uso de las ondículas (o wavelets en inglés), introducidas en su versión más simple por Haar en el año 1909. El hecho de que las wavelets sean una herramienta útil viene reafirmado por el hecho de que, por ejemplo, en 1992 el FBI eligió un método de wavelets para comprimir su enorme base de datos de 30 millones de huellas dactilares. Más adelante, en 1995, Pixar Studios presenta la película Toy Story, la primera película de dibujos animados realizada completamente por computadora. En la secuela Toy Story 2, algunas formas se realizan mediante superficies de subdivisión, una técnica relacionada matemáticamente con las wavelets. Como ejemplo más destacable, en 1999, La Organización Internacional de Estándares (International Standards Organization) aprueba un nuevo estándar de compresión de imágenes digital denominado JPEG-2000. El nuevo estándar utiliza wavelets para comprimir archivos de imágenes en una proporción de 1:200, sin pérdidas apreciables en la calidad de la imagen.

El objetivo de este trabajo es explicar cómo se puede eliminar ruido en señales y comprimir imágenes utilizando wavelets. Para ello se han descrito los principales conceptos que permiten hacerlo describiendo los tipos de wavelets más sencillas.

El análisis wavelet es una extensión del análisis de Fourier y su objetivo es convertir en números, llamados coeficientes, la información contenida en una señal de forma que se puedan manipular, analizar, almacenar, transmitir o utilizar para reconstruir la señal original de manera eficiente. Dentro de las ventajas del análisis wavelet frente al análisis de Fourier, se pueden mencionar los siguientes: ofrece información en tiempo frecuencia instantánea para cada punto de la señal, satisface condiciones de multiresolución, es ajustable y adaptable, entre otras.

---

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. En el primero de ellos describimos los principales teoremas y fórmulas que posteriormente utilizaremos en el desarrollo de la teoría wavelet. A continuación, se explica el análisis multiresolución, que sienta las bases para la construcción de las funciones de escala y wavelets. Posteriormente, se describe un algoritmo que calcula los coeficientes wavelets ortogonales de una señal medida en una resolución finita. Por último, se desarrollan dos ejemplos de aplicaciones, uno destinado a quitar ruido de una señal eléctrica y otro destinado a la compresión de imágenes utilizando el paquete de Wavelets de Matlab [6].

La principal fuente de información en la que se basa este trabajo es el libro [5], que es uno de los libros de referencia para este campo de aplicación, junto con [7]. A lo largo de este trabajo hemos aplicado diferentes resultados presentes en algunas de las asignaturas que se imparten en el grado de Matemáticas, destacando: Análisis Numérico (donde se introdujo la Transformada Discreta de Fourier [4]), Cálculo Infinitesimal y Análisis Matemático (de donde se aplican algunos resultados recogidos en [1] y [2]), Ampliación de Ecuaciones Diferenciales (en la que se expone la Transformada de Fourier [3, 8]) e Introducción a los Espacios de Funciones (donde se explican los espacios  $L^p$ ).

# Índice

Capítulos	Página
<b>1. Transformada de Fourier y teoremas de muestreo</b>	<b>7</b>
1.1. Delta de Dirac . . . . .	7
1.1.1. Convergencia débil . . . . .	7
1.1.2. Cálculos simbólicos . . . . .	8
1.2. Transformada de Fourier y propiedades . . . . .	9
1.2.1. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	10
1.2.2. Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	13
1.3. Fórmula de Poisson . . . . .	15
1.4. Teorema de muestreo de Whittaker . . . . .	17
<b>2. Aproximaciones multiresolución y filtros</b>	<b>21</b>
2.1. Aproximaciones multiresolución. . . . .	21
2.1.1. Ejemplos. . . . .	25
2.2. Funciones de escala. . . . .	28
2.2.1. Aproximación. . . . .	32
2.2.2. Ejemplos. . . . .	33
2.3. Filtros espejo-conjugados. . . . .	37
2.3.1. Ecuación de escalado. . . . .	37
2.3.2. Ejemplos. . . . .	42
2.4. Wavelets . . . . .	45
2.4.1. Ejemplos. . . . .	51
<b>3. Transformada wavelet ortogonal rápida</b>	<b>55</b>
<b>4. Ejemplos y aplicaciones</b>	<b>59</b>
4.1. Eliminación de ruido. . . . .	59
4.2. Compresión de imágenes. . . . .	69



# Capítulo 1

## Transformada de Fourier y teoremas de muestreo

En este capítulo definimos la transformada de Fourier sobre  $L^2(\mathbb{R})$  y consideramos algunas propiedades y teoremas de muestreo que nos serán de utilidad a la hora de desarrollar la teoría wavelet y de dibujar numéricamente ciertas wavelets y funciones de escala.

### 1.1. Delta de Dirac

La función delta de Dirac es útil al hacer la transición desde funciones de una variable real a secuencias discretas. Los cálculos simbólicos con funciones de Dirac simplifican las cuentas sin preocuparse excesivamente de temas de convergencia. Esto está justificado por la teoría de distribuciones.

Una función delta de Dirac tiene su soporte reducido a  $t = 0$  y asocia a cualquier función continua  $\phi$  su valor en  $t = 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0).$$

#### 1.1.1. Convergencia débil

Una función delta de Dirac puede obtenerse estrechando una función integrable  $g$  tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$ . Sea  $g_s(t) = \frac{1}{s}g(\frac{t}{s})$ . Entonces para toda función continua  $\phi$ ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_s(t) \phi(t) dt = \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt. \quad (1.1)$$

Una función delta de Dirac puede definirse formalmente como el límite  $\delta = \lim_{s \rightarrow 0} g_s$ , el cual debe ser entendido en el sentido de (1.1). Este límite es denominado convergencia débil.

Una delta de Dirac no es una función en el sentido habitual ya que es cero cuando  $t \neq 0$  a pesar de que su integral es igual a 1, y por tanto hay que tener en cuenta que, cada vez que se habla de la función delta de Dirac hablamos de una función generalizada.

La notación simbólica de la última integral de (1.1) significa que una delta de Dirac aplicada a una función continua  $\phi$  asocia esta función con su valor en  $t = 0$ . A la función generalizada delta de Dirac se le suele llamar distribución delta. Una distribución general se define sobre el espacio  $C_0^\infty$  de funciones test que son infinitamente continuamente derivables con soporte compacto. Una distribución  $d$  es una forma lineal que asocia a toda función  $\phi \in C_0^\infty$  un valor escrito como  $\int_{-\infty}^{\infty} d(t) \phi(t) dt$ . Dos distribuciones  $d_1$  y  $d_2$  son iguales si para toda  $\phi \in C_0^\infty$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_1(t) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} d_2(t) \phi(t) dt.$$

### 1.1.2. Cálculos simbólicos

La integral simbólica sobre la función delta de Dirac es una notación útil ya que conserva las mismas propiedades que la integral usual, incluyendo cambios de variables e integración por partes.

Veamos algunas propiedades de esta integral simbólica:

1. Una delta de Dirac trasladada  $\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$  tiene la masa concentrada en  $\tau$  y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - u) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(u - t) dt = \phi(u).$$

Esto significa que  $(\phi * \delta)(u) = \phi(u)$  y de la misma forma se tiene que  $(\phi * \delta_\tau)(u) = \phi(u - \tau)$ .

- 
2. Multiplicando una delta de Dirac por una función continua y teniendo en cuenta que  $\delta(t - \tau) = 0$  si  $t \neq \tau$  obtenemos que

$$\phi(t)\delta(t - \tau) = \phi(\tau)\delta(t - \tau).$$

3. La derivada de la función delta de Dirac se define con una integración por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t - u)dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t)\delta(t)dt = -\phi'(0),$$

siempre que  $\phi$  sea una función derivable.

4. La derivada k-ésima de esta función se define de forma similar integrando por partes k veces, siempre que  $\phi$  sea una función de clase  $C^k$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta^{(k)}(t - u)dt = (-1)^k \phi^{(k)}(0).$$

5. La transformada de Fourier de  $\delta$  asocia a cada función de la forma  $e^{-i\omega t}$  su valor en  $t = 0$ ,

$$\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1,$$

y su traslación cumple  $\hat{\delta}_\tau(\omega) = e^{-i\omega\tau}$ .

La transformada de Fourier de el peine de Dirac  $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  es, por tanto,

$$\hat{c}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inT\omega}. \quad (1.2)$$

## 1.2. Transformada de Fourier y propiedades

Para evitar problemas de convergencia, definimos en primer lugar la integral de Fourier sobre el espacio  $L^1(\mathbb{R})$  de funciones integrables. Esta definición se extenderá posteriormente al espacio  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 1.2.1. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

La integral de Fourier

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.3)$$

mide cuántas oscilaciones a frecuencia  $\omega$  hay en  $f$ . Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  esta integral converge y

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (1.4)$$

Si  $\hat{f}$  también es integrable, el siguiente teorema proporciona la transformada inversa de Fourier.

**Teorema 1.1.** (*Transformada de Fourier Inversa*) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.5)$$

*Demostración.* Si sustituimos la expresión de  $\hat{f}$  en la segunda parte de la igualdad anterior se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\omega(t-u)} du \right) d\omega.$$

A esta función no podemos aplicarle directamente el Teorema de Fubini [2] pues  $f(u)e^{i\omega(t-u)}$  no es una función integrable en  $\mathbb{R}^2$  por lo que, para evitar esto, multiplicamos por  $e^{-\frac{\epsilon^2\omega^2}{4}}$  que converge a 1 cuando  $\epsilon$  tiende hacia 0.

Definimos por tanto,

$$I_\epsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{\epsilon^2\omega^2}{4}} e^{i\omega(t-u)} du \right) d\omega. \quad (1.6)$$

Aplicando el Teorema de Fubini [2] integrando respecto de  $u$ , y utilizando (1.3) se obtiene que

$$I_\epsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-\frac{\epsilon^2\omega^2}{4}} e^{i\omega t} d\omega.$$

---

Ya que

$$|\hat{f}(\omega)e^{-\frac{\epsilon^2\omega^2}{4}}e^{i\omega(t-u)}| \leq |\hat{f}(\omega)|$$

y ya que  $\hat{f}$  es integrable, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada [2], lo que implica que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_\epsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.7)$$

Ahora, aplicando de nuevo el teorema de Fubini [2], calculamos la integral (1.6) integrando primero respecto de  $\omega$ :

$$I_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(t-u)f(u)du, \quad (1.8)$$

con

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} e^{-\frac{\epsilon^2\omega^2}{4}} d\omega.$$

Haciendo el cambio de variable  $\omega' = \epsilon\omega$  demostramos que  $g_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}g_1(\epsilon^{-1}x)$ . Ahora, veamos que si definimos la función  $f(t) = e^{-t^2}$  se tiene que

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}} d\omega. \quad (1.9)$$

En primer lugar, aplicando (1.3) e integrando por partes se tiene que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt.$$

Esta función es diferenciable y satisface la ecuación diferencial

$$2\hat{f}'(\omega) + \omega\hat{f}(\omega) = 0.$$

La solución de esta ecuación es  $\hat{f}(\omega) = Ke^{-\frac{\omega^2}{4}}$  y como  $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ , se obtiene (1.9).

---

## 1.2. TRANSFORMADA DE FOURIER Y PROPIEDADES

---

Aplicando (1.9) a  $g_1$  se obtiene que  $g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ . La integral de  $g_1$  es igual a 1. La integral de las funciones  $g_\epsilon$  son iguales a 1 y ésta converge a la delta de Dirac  $\delta$  cuando  $\epsilon$  tiende a 0. Teniendo en cuenta también (1.8), se tiene que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [I_\epsilon(t) - f(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(t-u)[f(u) - f(t)] du dt = 0. \quad (1.10)$$

Insertando esto en (1.7) se obtiene (1.5). □

La propiedad más importante de la transformada de Fourier para aplicaciones de procesamiento de señales es el teorema de la convolución:

**Teorema 1.2.** (*Convolución*) Dado  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y  $h \in L^1(\mathbb{R})$ . La función  $g = f * h$  está en  $L^1(\mathbb{R})$  y

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega). \quad (1.11)$$

*Demostración.*

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)h(u) du \right) dt.$$

Puesto que  $|f(t-u)||h(u)|$  es integrable en  $\mathbb{R}^2$ , podemos aplicar el Teorema de Fubini y haciendo el cambio de variable  $v = t - u$  se tiene que

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u+v)\omega} f(v)h(u) du dv = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv\omega} f(v) dv \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\omega} h(u) du \right)$$

por lo que se verifica (1.11). □

La siguiente tabla resume las propiedades importantes de la transformada de Fourier, que utilizaremos a menudo a lo largo del trabajo:

---

---

Propiedad	Función	Transformada de Fourier
	$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
Inversa	$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Convolución	$f_1 * f_2(t)$	$\hat{f}_1(\omega)\hat{f}_2(\omega)$
Multiplicación	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\hat{f}_1 * \hat{f}_2(\omega)$
Traslación	$f(t - u)$	$e^{-iu\omega}\hat{f}(\omega)$
Modulación	$e^{i\epsilon t}f(t)$	$\hat{f}(\omega - \epsilon)$
Escalado	$f(\frac{t}{s})$	$ s \hat{f}(s\omega)$
Derivada tiempo	$f^{(p)}(t)$	$(i\omega)^p\hat{f}(\omega)$
Derivada Frecuencia	$(-it)^p f(t)$	$\hat{f}^{(p)}(\omega)$
Complejo conjugado	$f^*(t)$	$\hat{f}^*(-\omega)$
Simetría	$f(t) \in \mathbb{R}$	$\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$

---

Tabla 1.1: Propiedades de la transformada de Fourier.

### 1.2.2. Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

La transformada de Fourier de la función  $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$  es

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega}.$$

La función anterior no es integrable, pero su cuadrado sí lo es. La transformada de Fourier inversa (1.1) no puede aplicarse en este caso. Esto motiva la extensión de la transformada de Fourier al espacio de funciones  $L^2(\mathbb{R})$ . Al trabajar en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  podemos aplicar propiedades que vienen de un producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt$$

donde  $*$  denota el complejo conjugado. De esta manera, la norma en  $L^2(\mathbb{R})$  es:

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$


---

El siguiente teorema demuestra que los productos internos y las normas en  $L^2(\mathbb{R})$  se conservan mediante la transformación de Fourier. Las ecuaciones (1.12) y (1.13) se denominan respectivamente las fórmulas de Parseval y Plancherel.

**Teorema 1.3.** *Si  $f$  y  $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega)d\omega. \quad (1.12)$$

Para  $h = f$  se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.13)$$

*Demostración.* Sea  $g = f * \bar{h}$  con  $\bar{h}(t) = h^*(-t)$ . El teorema de la convolución 1.2 y la propiedad del complejo conjugado demuestran que  $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega)$ . Aplicando la fórmula (1.5) a  $g(0)$  se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h^*(t)dt = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\hat{h}^*(\omega)d\omega.$$

□

### Densidad en $L^2(\mathbb{R})$ .

Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  pero  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ , su transformada de Fourier no puede ser calculada con la integral de Fourier (1.13) pues  $f(t)e^{i\omega t}$  no es integrable. Esto es definido como un límite usando la transformada de Fourier de funciones en  $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Como  $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ , podemos encontrar una familia de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  que convergen hacia  $f$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Como  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  converge, es una sucesión de Cauchy, lo cual significa que  $\|f_n - f_p\|$  es arbitrariamente pequeña si  $n$  y  $p$  se hacen grandes. Sin embargo,  $f_n \in L^1(\mathbb{R})$  y su transformada de Fourier  $\hat{f}_n$  está bien definida. Aplicando la fórmula de Plancherel (1.13) se tiene que  $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es también una sucesión de Cauchy pues

---


$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_p\| = \sqrt{2\pi} \|f_n - f_p\|$$

es arbitrariamente pequeño para  $n$  y  $p$  se hacen grandes. Un espacio de Hilbert es completo cuando toda sucesión de Cauchy del espacio converge hacia una sucesión del espacio. Como  $L^2(\mathbb{R})$  es completo, existe  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f} - \hat{f}_n\| = 0.$$

Por definición,  $\hat{f}$  es la transformada de Fourier de  $f$ . Esta extensión de la transformada de Fourier a  $L^2(\mathbb{R})$  satisface, por densidad, el teorema de convolución 1.2, las fórmulas de Parseval (1.12) y Plancherel(1.13) y todas las propiedades de la tabla 1.1.

### 1.3. Fórmula de Poisson

**Teorema 1.4.** (*Fórmula de Poisson*) *En el sentido de las distribuciones se tiene que*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-inT\omega} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T}). \quad (1.14)$$

*Demostración.* Como ambas funciones son periódicas de periodo  $\frac{2\pi}{T}$ , basta probar la identidad en el intervalo  $[-\pi/T, \pi/T]$ . La segunda función en (1.14) en dicho intervalo vale  $2\pi\delta(0)/T$ . Por lo tanto, para que la igualdad sea cierta en el sentido de las distribuciones debe ocurrir por (1.2), que se cumpla que para toda función  $\hat{\phi} \in C^\infty([-\pi/T, \pi/T])$ ,

$$\langle \hat{c}, \hat{\phi} \rangle = \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \hat{\phi}(\omega)\delta(0)d\omega = \frac{2\pi}{T}\hat{\phi}(0).$$

Veamos esto. Para ello notemos que

$$\begin{aligned}
\langle \hat{c}, \hat{\phi} \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \langle e^{-inT\omega}, \hat{\phi} \rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left( \sum_{n=-N}^N e^{-inT\omega} \right) \hat{\phi}(\omega) d\omega \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{e^{iNT\omega} - e^{-iNT\omega}}{1 - e^{-iT\omega}} \hat{\phi}(\omega) d\omega \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\omega T)}{\sin(\frac{T\omega}{2})} \hat{\phi}(\omega) d\omega \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\omega T)}{\pi\omega} \cdot \frac{\frac{T\omega}{2}}{\sin(\frac{T\omega}{2})} \hat{\phi}(\omega) d\omega.
\end{aligned}$$

Se considera ahora la función  $\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} \hat{\phi}(\omega) \frac{\frac{T\omega}{2}}{\sin(\frac{T\omega}{2})} & \text{si } |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{si } |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$

y  $\psi(t)$  la transformada de Fourier inversa de  $\hat{\psi}(\omega)$ . Puesto que  $\hat{\mathbb{1}}_{[-a,a]}(t) = \frac{2\sin(at)}{t}$ , la fórmula de Parseval (1.12) implica que

$$\begin{aligned}
\langle c, \hat{\phi} \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\omega T)}{\pi\omega} \cdot \hat{\psi}(\omega) d\omega \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \hat{\mathbb{1}}_{[-(N+\frac{1}{2})T, (N+\frac{1}{2})T]}(\omega) \cdot \hat{\psi}(\omega) d\omega \\
&= \frac{2\pi}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-(N+\frac{1}{2})T}^{(N+\frac{1}{2})T} \psi(t) dt \\
&= \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt \\
&= \frac{2\pi}{T} \hat{\psi}(0) = \frac{2\pi}{T} \hat{\phi}(0).
\end{aligned}$$

□

---

## 1.4. Teorema de muestreo de Whittaker

Una señal discreta puede ser representada como una combinación lineal de funciones de Dirac. Asociamos a cualquier muestra  $f(nT)$  una Dirac  $f(nT)\delta(t - nT)$  situada en  $t = nT$ .

Un muestreo uniforme de  $f$  corresponde a la suma de Dirac ponderada,

$$f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT). \quad (1.15)$$

La transformada de Fourier de  $\delta(t - nT)$  es  $e^{-inT\omega}$ . Así la transformada de Fourier de  $f_d$  es la serie de Fourier

$$\hat{f}_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{-inT\omega}. \quad (1.16)$$

Para comprender cómo calcular  $f(t)$  a partir de los valores de la muestra  $f(nT)$ , y por lo tanto, a partir de  $f_d$  relacionemos las transformadas de Fourier  $\hat{f}$  y  $\hat{f}_d$ .

**Proposición 1.5.** *La transformada de Fourier de la señal discreta obtenida muestreando  $f$  en intervalos de tamaño  $T$  es*

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right). \quad (1.17)$$

*Demostración.* Como  $\delta(t - nT)$  es cero fuera de  $t = nT$ ,  $f(nT)\delta(t - nT) = f(t)\delta(t - nT)$  y podemos reescribir (1.15) como

$$f_d(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = f(t)c(t), \quad (1.18)$$

siendo  $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ . Calculando la transformada de Fourier, tenemos que

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{c})$$

con

$$\hat{c}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inT\omega} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

---

#### 1.4. TEOREMA DE MUESTREO DE WHITTAKER

---

donde las últimas igualdades se han obtenido aplicando la propiedad 5 de la sección 1.1.2 y la fórmula de Poisson. Por la propiedad 1 de la sección 1.1.2, concluimos que

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right),$$

como queríamos demostrar. □

Veamos ahora cómo reconstruir la función  $f$  a partir de sus muestras  $f(nT)$  bajo ciertas condiciones sobre el soporte de  $\hat{f}$ .

**Teorema 1.6.** (*Shannon, Whittaker*) *Si el soporte de  $\hat{f}$  está incluido en  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ , entonces*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)h_T(t - nT), \quad (1.19)$$

con  $h_T(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}}$ .

*Demostración.* Si  $n \neq 0$ , el soporte de  $\hat{f}(\omega - \frac{n\pi}{T})$  no interseca con el soporte de  $\hat{f}(\omega)$  ya que  $\hat{f}(\omega) = 0$  para  $|\omega| > \frac{\pi}{T}$ . Por (1.17) tenemos que

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T}\hat{f}(\omega) \text{ si } |\omega| \leq \frac{\pi}{T}. \quad (1.20)$$

Veamos que  $\hat{h}_T(\omega) = T \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}$ . Para ello, si tomamos la antitransformada de  $T \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]} e^{i\omega t} d\omega &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{i\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \frac{1}{it} [e^{it\frac{\pi}{T}} - e^{-it\frac{\pi}{T}}] \\ &= \frac{T}{\pi t} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) = h_T(t). \end{aligned}$$

Por tanto, de (1.20), utilizando de nuevo que el soporte de  $\hat{f}$  está contenido en el intervalo  $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ , tenemos que  $\hat{f}(\omega) = \hat{h}_T(\omega)\hat{f}_d(\omega)$ . Haciendo la

---

---

transformada de Fourier inversa de esta igualdad, nos queda

$$\begin{aligned} f(t) &= h_T(t) * f_d(t) = h_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)h_T(t - nT). \end{aligned}$$

□

**Corolario 1.7.** Si  $\text{sop}(f) \subset [-L, L]$  con  $f$  y  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces

$$\hat{f}(\omega) = 2L \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m a_m(f) \frac{\sin(\omega L - m\pi)}{\omega L - m\pi}$$

y

$$\check{f}(\omega) = \frac{L}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m a_m(f) \frac{\sin(\omega L + m\pi)}{\omega L + m\pi},$$

donde los  $a_m(f)$  son los coeficientes de Fourier de  $f$ , definidos por

$$a_m(f) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-2\pi i \frac{m}{2L}(t+L)} dt. \quad (1.21)$$

*Demostración.* Si en el teorema anterior,  $\hat{f}$  es  $f$  y  $\frac{\pi}{T} = L$  tenemos que, para la antitransformada

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt,$$

$$\check{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(L\omega - n\pi)}{L\omega - n\pi}$$

---

#### 1.4. TEOREMA DE MUESTREO DE WHITTAKER

Ahora, como  $\hat{f}(\omega) = 2\pi \check{f}(-\omega)$  y  $\sin(-x) = -\sin(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{f}\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(-L\omega - n\pi)}{-L\omega - n\pi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(-\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(L\omega + n\pi)}{L\omega + n\pi} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{m\pi}{L}\right) \frac{\sin(L\omega - m\pi)}{L\omega - m\pi}, \end{aligned}$$

haciendo en la última igualdad el cambio de variable  $m = -n$ .  
Por último, como

$$\hat{f}\left(\frac{m\pi}{L}\right) = (-1)^m a_m(f) 2L,$$

con los coeficientes  $a_m(f)$  definidos en (1.21), entonces

$$\hat{f}(\omega) = 2L \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m a_m(f) \frac{\sin(\omega L - m\pi)}{\omega L - m\pi}.$$

□

Utilizaremos estas fórmulas para aproximar numéricamente la transformada y antitransformada, quedándonos con un número finito de términos en la serie y aproximando  $a_m(f)$  mediante la transformada discreta de Fourier.

# Capítulo 2

## Aproximaciones multiresolución y filtros

En este capítulo presentaremos un método de construcción de wavelets ortonormales basado en la existencia de una familia de subespacios de  $L^2(\mathbb{R})$  que satisfacen ciertas propiedades.

### 2.1. Aproximaciones multiresolución.

Esta sección formaliza las aproximaciones multiresolución, que sientan las bases para la construcción de wavelets ortogonales. La aproximación de una función  $f$  a una resolución  $2^{-j}$  se define como una proyección ortogonal a un espacio  $V_j \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ . El espacio  $V_j$  agrupa todas las posibles aproximaciones a la resolución  $2^{-j}$ . La proyección ortogonal de  $f$  es la función  $f_j \in V_j$  que minimiza  $\|f - f_j\|$ . La siguiente definición especifica las propiedades matemáticas de los espacios multiresolución.

**Definición 2.1.** *Una secuencia  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de subespacios cerrados de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  es una aproximación multiresolución si se satisfacen las seis propiedades siguientes:*

1.  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$ .
2.  $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$ .
3.  $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(\frac{t}{2}) \in V_{j+1}$ .

$$4. \lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}.$$

$$5. \lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}).$$

6. Existe  $\theta$  tal que  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz de  $V_0$ , es decir, existen constantes  $A > 0$ ,  $B > 0$  tales que toda  $f \in V_0$  se puede descomponer de forma única como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[n] \theta(t - n) \quad (2.1)$$

con

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a[n]|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (2.2)$$

Daremos una explicación intuitiva de estas propiedades matemáticas. La propiedad 1 significa que  $V_j$  es invariante por cualquier traslación proporcional a la escala  $2^j$ . La inclusión de la propiedad 2 es consecuencia del hecho de que una aproximación a resolución  $2^{-j}$  contiene toda la información necesaria para calcular una aproximación a resolución menor  $2^{-j-1}$ . Dilatando funciones de  $V_j$  en el eje de abscisas por 2 aumentamos los detalles por 2 y la propiedad 3 garantiza que esto define una aproximación con resolución menor  $2^{-j-1}$ . Cuando la resolución  $2^{-j}$  tiende a 0, la propiedad 4 implica que se pierden detalles de  $f$  y

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_{V_j} f\| = 0.$$

Por otra parte, cuando la resolución  $2^{-j}$  tiende a  $+\infty$  la propiedad 5 impone que la señal aproximada converge a la señal original y

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|f - P_{V_j} f\| = 0.$$

Antes de ver algunos ejemplos, veamos la siguiente proposición que proporciona una condición necesaria y suficiente para que  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sea una base de Riesz.

---

**Proposición 2.2.** Una familia  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz del espacio  $V_0$  que genera si y solo si existen constantes  $A > 0$  y  $B > 0$  tales que

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], \frac{1}{B} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega - 2k\pi)|^2 \leq \frac{1}{A}. \quad (2.3)$$

*Demostración.* Supongamos, en primer lugar, que se cumple (2.3). Entonces, como  $f \in V_0$  se puede escribir como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[n] \theta(t - n) = (a * \theta)(t),$$

la transformada de Fourier de esta sucesión es

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \theta(t - n) \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t - n) e^{-i\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] e^{-i\omega n} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t - n) e^{-i\omega(t-n)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] e^{-i\omega n} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) e^{-i\omega u} du \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] e^{-i\omega n} \hat{\theta}(\omega) = \hat{a}(\omega) \hat{\theta}(\omega) \end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos aplicado el cambio de variable  $u = t - n$ .

Por lo tanto,  $\hat{f}(\omega) = \hat{a}(\omega) \hat{\theta}(\omega)$  donde  $\hat{a}(\omega)$  es la serie de Fourier

$$\hat{a}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a[k] e^{-i\omega k}.$$

La norma de  $f$ , utilizando la fórmula de Parseval (1.12), puede escribirse

como

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\hat{a}(\omega)|^2 |\hat{\theta}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |\hat{a}(u + 2k\pi)|^2 |\hat{\theta}(u + 2k\pi)|^2 du,\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de un cambio de variable, y por ser  $\hat{a}$   $2\pi$ -periódica, se tiene que

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{a}(u)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(u + 2k\pi)|^2 du. \quad (2.4)$$

Aplicando (2.3) se deduce que  $A\|f\|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{a}[u]|^2 du \leq B\|f\|^2$  y como

$$\int_0^{2\pi} |\hat{a}[u]|^2 du = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a(n)|^2, \quad (2.5)$$

se tiene inmediatamente (2.2), con lo que  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz.

Recíprocamente, si  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz, veamos que se cumple (2.3). Razonando por reducción al absurdo, tenemos que o bien para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño existe un intervalo  $I_\epsilon \subset [-\pi, \pi]$  donde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(u + 2k\pi)|^2 \leq \epsilon$$

o bien para todo  $M > 0$  suficientemente grande existe un intervalo  $I_M \subset [-\pi, \pi]$  donde

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(u + 2k\pi)|^2 \geq M.$$

Supongamos que lo que ocurre es lo primero (la demostración es análoga en el segundo caso). Para cada  $\epsilon > 0$  se puede construir una función  $\hat{a}_\epsilon(\omega)$   $2\pi$ -periódica tal que su soporte está contenido en  $I_\epsilon$ . Sea  $\hat{I}_\epsilon$  el intervalo resultante de trasladar el intervalo  $I_\epsilon$  a  $[0, 2\pi]$  sumando  $2\pi$  donde sea necesario. Sea  $f_\epsilon(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_\epsilon[n] \theta(t - n)$  donde  $a_\epsilon[n]$  son los coeficientes de  $\hat{a}_\epsilon(\omega)$  en

---

---

la base  $e^{-in\omega}$ . Entonces, aplicando (2.4) y (2.5), tenemos que

$$\|f_\epsilon\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{I}_\epsilon} |\hat{a}_\epsilon(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega \leq \epsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_\epsilon[n]|^2,$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_\epsilon[n]|^2}{\|f_\epsilon\|^2} \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Como esto lo podemos hacer para  $\epsilon$  tan pequeño como queramos, se entra en contradicción con la segunda desigualdad de (2.2) y, por tanto,  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  no sería una base de Riesz. □

### 2.1.1. Ejemplos.

#### Aproximaciones constantes a trozos.

Una aproximación multiresolución sencilla puede formarse con funciones constantes a trozos. Se define el espacio  $V_j$  como el conjunto de todas las funciones  $g \in L^2(\mathbb{R})$  tales que  $g(t)$  es constante para  $t \in [n2^j, (n+1)2^j]$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . La aproximación a una resolución  $2^{-j}$  de  $f$  es la función constante a trozos en dichos subintervalos de tamaño  $2^j$  más cercana en la norma  $L^2$ .

Veamos que este conjunto cumple las propiedades de la definición 2.1 de aproximación multiresolución:

1. Para ver la primera propiedad, notemos que  $f \in V_j$  si y solo si  $f(t)$  es constante para todo  $t \in [n2^j, (n+1)2^j]$  sea quien sea  $n \in \mathbb{Z}$  y, como cuando  $t$  está en dicho intervalo  $t - 2^j k \in [(n-k)2^j, (n-k+1)2^j]$ ,  $f(t - 2^j k)$  es constante en los mismos subintervalos y por lo tanto  $f(t - 2^j k) \in V_j$ .
2. Claramente  $V_{j+1} \subset V_j$  ya que las funciones constantes en intervalos de tamaño  $2^{j+1}$  son también constantes en intervalos de tamaño  $2^j$ .
3.  $f(\frac{t}{2}) \in V_{j+1}$  si y solo si  $f(\frac{t}{2})$  es constante en intervalos  $[n2^{j+1}, (n+1)2^{j+1}]$  y como

$$t \in [n2^{j+1}, (n+1)2^{j+1}] \Leftrightarrow \frac{t}{2} \in [n2^j, (n+1)2^j],$$

esto ocurre si y solo si  $f(t) \in V_j$ .

4. Es claro que se cumple la propiedad 4 pues cualquier función en dicha intersección tiene que ser constante en intervalos infinitamente grandes luego ha de ser constante en  $\mathbb{R}$ . Como dicha función también debe pertenecer a  $L^2$  dicha función debe ser idénticamente nula.
5. De la misma forma podemos ver que se cumple la propiedad 5 pues toda función  $g \in L^2(\mathbb{R})$  se puede aproximar tanto como se quiera por funciones constantes a trozos.
6. Para ver que existe  $\theta$  tal que  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz de  $V_0$ , consideremos  $\theta(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}$ . Entonces  $\theta(t - n) = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$  y tenemos que  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base pues los elementos de  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  son, claramente, linealmente independientes y es un sistema generador de  $V_0$ , pues todo elemento de  $V_0$  se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Nos queda ver que se cumple (2.2) para toda función de la forma (2.1), lo que es claro porque la intersección del soporte de  $\theta(t - n)$  y  $\theta(t - m)$  es vacía si  $n \neq m$  y por tanto,

$$\begin{aligned} \|f(t)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\theta(t - n) \right)^2 dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} a(n)^2 \theta(t - n)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)^2, \end{aligned}$$

luego la condición (2.2) se cumple para  $A = B = 1$ .

### Splines de grado 1.

Siguiendo el camino marcado en el ejemplo anterior, se puede dar una nueva aproximación multiresolución definiendo  $V_j$  como el conjunto de funciones  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tales que  $f$  es lineal a trozos y continua en los intervalos de la forma  $[m2^j, (m + 1)2^j]$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Del mismo modo que en el ejemplo anterior se puede ver fácilmente que  $V_j$  cumple las propiedades 1 – 5 de la definición de aproximación multiresolución.

---

La base de Riesz de  $V_0$  en este caso viene dada por  $\theta(t - n)$  donde

$$\theta(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1 - t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} . \quad (2.6)$$

Mediante la regla de Simpson se comprueba fácilmente que la familia  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  no es una base ortonormal,

$$\langle \theta(t), \theta(t - 1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\theta(t - 1)dt = \int_0^1 (1 - t)t dt = \frac{1}{6} \neq 0.$$

Para ver que es una base de Riesz tenemos que comprobar (2.2) para  $f$  de la forma (2.1). Para ello, puesto que, por la definición de  $\theta(t - n)$ ,  $a[n]$  son los valores de  $f$  en  $n$ , podemos escribir  $f(t)$  como  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\theta(t - n)$  y por tanto

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\theta(t - n) \right)^2 dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\theta(t - n) \right)^2 dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} (f(k)\theta(t - k) + f(k + 1)\theta(t - k - 1))^2 dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 (f(k)\theta(u) + f(k + 1)\theta(u - 1))^2 du \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 (f(k)(1 - u) + f(k + 1)u)^2 du \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{6} [2f(k)^2 + 2f(k + 1)^2 + 2f(k)f(k + 1)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} [f(k)^2 + f(k + 1)^2 + f(k)f(k + 1)], \end{aligned}$$

donde en la cuarta igualdad hemos aplicado el cambio de variable  $u = t - k$  y en la sexta la regla de Simpson.

Aplicando la desigualdad  $a \cdot b \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ,

$$\begin{aligned} 3\|f\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [f(k)^2 + f(k+1)^2 + f(k)f(k+1)] \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} [f(k)^2 + f(k+1)^2 + \frac{f(k)^2 + f(k+1)^2}{2}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{3}{2}(f(k)^2 + f(k+1)^2). \end{aligned}$$

Aplicando, ahora, la desigualdad  $a \cdot b \geq -\frac{a^2+b^2}{2}$ ,

$$\begin{aligned} 3\|f\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [f(k)^2 + f(k+1)^2 + f(k)f(k+1)] \\ &\geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} [f(k)^2 + f(k+1)^2 - \frac{f(k)^2 + f(k+1)^2}{2}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(k)^2 + f(k+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$\|f\|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(k)^2 + f(k+1)^2}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)^2 \leq 3\|f\|^2,$$

y queda probado (2.2) con  $A = 1$  y  $B = 3$ .

## 2.2. Funciones de escala.

La aproximación de  $f$  a la resolución  $2^{-j}$  se define como la proyección ortogonal  $P_{V_j}f$  en  $V_j$ . Para calcular esta proyección, debemos encontrar una base ortonormal de  $V_j$ .

El siguiente teorema ortogonaliza las bases de Riesz  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y construye una base ortogonal para cada espacio  $V_j$  dilatando y trasladando una

---

---

función llamada función de escala. Para que no haya confusión entre la resolución  $2^{-j}$  y la escala  $2^j$ , en el resto del capítulo denotaremos por  $P_{V_j}f$  a la aproximación a escala  $2^j$ .

**Teorema 2.3.** *Sea  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  una aproximación multiresolución y  $\phi$  una función, que llamaremos función de escala, cuya transformada de Fourier viene dada por*

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}}. \quad (2.7)$$

Consideremos la notación  $\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-n2^j}{2^j}\right)$ . Entonces la familia  $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_j$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ .

Antes de la demostración de este teorema veamos las siguientes proposiciones:

**Proposición 2.4.** *Una base  $\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal si y solo si cuando*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \theta(t-n), \quad (2.8)$$

se tiene que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a[n]]^2. \quad (2.9)$$

*Demostración.* Supongamos que la base es ortonormal. Entonces,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f(t), f(t) \rangle = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \theta(t-n), \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[m] \theta(t-m) \right\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[n] a[m] \cdot \langle \theta(t-n), \theta(t-m) \rangle \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[m]^2. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si para toda  $f$  de la forma (2.8), se tiene (2.9), en particular para  $f(t) = \theta(t - n)$ ,  $\|f\|^2 = \|\theta(\cdot - n)\|^2 = 1$ . Por otro lado, para  $f(t) = \theta(t - n) + \theta(t - m)$  con  $m \neq n$  se tiene que  $\|f\|^2 = 2$ . Pero por definición de norma en  $L^2$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle \theta(t - n) + \theta(t - m), \theta(t - n) + \theta(t - m) \rangle \\ &= \langle \theta(t - n), \theta(t - n) \rangle + \langle \theta(t - n), \theta(t - m) \rangle \\ &\quad + \langle \theta(t - m), \theta(t - n) \rangle + \langle \theta(t - m), \theta(t - m) \rangle \\ &= 1 + 1 + 2 \langle \theta(t - n), \theta(t - m) \rangle, \end{aligned}$$

y concluimos que  $\langle \theta(t - n), \theta(t - m) \rangle = 0$ , y por tanto la base  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal. □

**Proposición 2.5.** *Una base de Riesz  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal si y solo si*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1. \quad (2.10)$$

*Demostración.* Por la proposición anterior y por (2.4), la base de Riesz es ortonormal si y solo si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{a}(\omega)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega, \quad (2.11)$$

para toda sucesión  $a[n]$  de  $L^2$ . Y aplicando (2.5), esto equivale a demostrar que

$$\int_0^{2\pi} |\hat{a}(\omega)|^2 \left[ 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 \right] d\omega = 0,$$

para toda función  $\hat{a}(\omega)$  de  $L^2[0, 2\pi]$ . Por tanto, el corchete debe anularse, de donde se extrae el resultado. □

Veamos ahora la demostración del teorema 2.3.

---

*Demostración.* Buscamos una base ortonormal para  $V_0$ . Sabemos que  $V_0$  tiene una base de Riesz

$$\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

luego si  $\phi \in V_0$ ,  $\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n] \theta(t - n)$  y su transformada de Fourier es  $\hat{\phi}(w) = \hat{a}(w) \hat{\theta}(w)$  con

$$\hat{a}(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) e^{-inw}.$$

Por la proposición anterior, para que  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sea una base ortonormal, es necesario y suficiente que  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(w + 2k\pi)|^2 = 1$ . Veamos cómo hay que elegir  $\hat{a}(w)$  para que esto se cumpla. Como, por la periodicidad de  $\hat{a}(w)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(w + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{a}(w + 2k\pi)|^2 |\hat{\theta}(w + 2k\pi)|^2 \\ &= |\hat{a}(w)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(w + 2k\pi)|^2 \end{aligned}$$

si tomamos

$$\hat{a}(w) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(w + 2k\pi)|^2}},$$

tenemos que  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal. Lo único que tenemos que comprobar es que  $\hat{a}(w) \in L^2([-\pi, \pi])$ . Pero la proposición 2.2 nos dice que

$$\frac{1}{B} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(w + 2k\pi)|^2 \leq \frac{1}{A}$$

luego  $|\hat{a}(w)|^2 \leq B$  y  $\int_{-\pi}^{\pi} |\hat{a}(w)|^2 \leq 2\pi B < \infty$  con lo que se obtiene el resultado.

Una vez demostrado el teorema para  $V_0$  tenemos que verlo para  $V_j$ , es decir, veamos que  $\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t - n2^j}{2^j}\right)$  es una base ortonormal de  $V_j$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ . Sea  $f(t) \in V_j$  sabemos que  $f(t) \in V_j$  si y solo si  $f(2^j t) \in V_0$  y,

por lo tanto,  $f(2^j t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\phi(t - n)$ . Si hacemos el cambio de variable  $u = 2^j t$  nos queda que

$$f(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\phi(u2^{-j} - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\phi\left(\frac{u - n2^j}{2^j}\right),$$

y tenemos que  $\phi_{j,n}$  es un sistema generador. Por otra parte, para ver que los  $\phi_{j,n}$  son linealmente independientes, suponiendo que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t - n2^j}{2^j}\right) = 0,$$

y haciendo el cambio de variable  $u = 2^{-j}t$ ,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi(u - n) = 0.$$

Por ser  $\phi(u - n)$  linealmente independientes, se tiene que  $a(n) = 0$  y por tanto, también lo son los  $\phi_{j,n}$ .

Por último, veamos que  $\phi_{j,n}$  es ortonormal,

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,n}, \phi_{j,m} \rangle &= \frac{1}{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{t - n2^j}{2^j}\right) \phi\left(\frac{t - m2^j}{2^j}\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u - n) \phi(u - m) du = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases} \end{aligned}$$

□

### 2.2.1. Aproximación.

La proyección ortogonal de  $f$  sobre  $V_j$  se obtiene con una expansión en la base ortonormal de funciones de escala de esta manera:

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n}. \quad (2.12)$$

---

El producto interno  $a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$  proporciona una aproximación discreta a escala  $2^j$ . Podemos reescribir esto como un producto de convolución:

$$a_j[n] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) dt = f * \bar{\phi}_j(2^j n), \quad (2.13)$$

con  $\bar{\phi}_j(t) = \sqrt{2^{-j}} \phi(2^{-j} t)$ .

### 2.2.2. Ejemplos.

Siguiendo con los mismos ejemplos que en la sección anterior veamos las funciones de escala para cada uno de ellos:

#### Aproximaciones constantes a trozos.

Para este caso consideramos  $\theta(t - n) = \mathbb{1}_{[n, n+1)}$  que es una base ortonormal por lo que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\omega) = \hat{\theta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) e^{-it\omega} dt = \int_0^1 e^{-it\omega} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega} - 1) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por el teorema de ortonormalidad 2.3 esta base debe cumplir la condición

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1.$$

Operando

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(2 - 2\cos(\omega))}{|\omega + 2k\pi|^2} \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega + 2k\pi|^2}, \end{aligned}$$

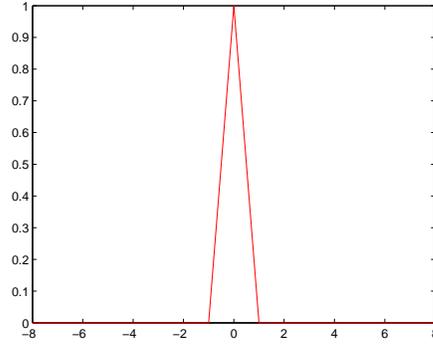
por lo que obtenemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega - 2k\pi|^2} = \frac{1}{4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (2.15)$$

siempre que  $\omega \neq 2k\pi$ . Dicha suma nos será útil a la hora de calcular una base ortonormal en el espacio multiresolución de splines de grado 1.

**Splines de grado 1.**

En este caso tenemos la base de Riesz  $\{\theta(t - n)\}$  con  $\theta(t)$  en (2.6), cuyo dibujo se muestra en la figura 2.1

Figura 2.1:  $\phi$ .

Si hacemos su transformada obtenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)e^{-it\omega} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} \theta(t)e^{-it\omega} dt \\
 &= \int_{-1}^0 (t+1)e^{-it\omega} dt + \int_0^1 (1-t)e^{-it\omega} dt \\
 &= \frac{1}{-i\omega} - \int_{-1}^0 \frac{e^{-it\omega}}{-i\omega} dt + \frac{1}{i\omega} + \int_0^1 \frac{e^{-it\omega}}{-i\omega} dt \\
 &= \frac{1}{-i\omega} - \left[ \frac{1}{-\omega^2} + \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} \right] + \frac{1}{i\omega} + \left[ \frac{e^{-i\omega}}{-\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \right] \\
 &= \frac{2}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{\omega^2} = \frac{2}{\omega^2} - \frac{2 \cos(\omega)}{\omega^2} \\
 &= \frac{2}{\omega^2} 2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2}.
 \end{aligned}$$

---

Por tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega - 2k\pi)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{4 \sin^2(\frac{\omega}{2})}{(\omega + 2k\pi)^2} \right|^2 \\ &= 16 \sin^4(\frac{\omega}{2}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^4}.\end{aligned}$$

Calculemos ahora el valor de

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^4}.$$

Para ello aplicaremos el siguiente teorema contenido en [1] que justificará los cálculos:

**Teorema 2.6.** (*Derivabilidad del límite puntual*). Sean  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones derivables en  $I$ . Se supone que:

1. La sucesión de derivadas  $\{f_k'\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en los subintervalos compactos de  $I$  hacia una función  $g$ .
2. Existe  $x_0 \in I$  tal que la sucesión numérica  $\{f_k(x_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$  es convergente.

Entonces la sucesión  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en los compactos de  $I$  hacia una función  $f$  que es derivable en  $I$ . Además,

$$f'(x) = g(x)$$

para cada  $x \in I$ .

Si en el teorema, consideramos  $I = (0, 2\pi)$  y  $f_k$  las sumas parciales

$$f_k(\omega) = \sum_{l=-k}^k \frac{1}{(\omega + 2l\pi)^2},$$

con

$$f_k'(\omega) = -2 \sum_{l=-k}^k \frac{1}{(\omega + 2l\pi)^3},$$

que converge uniformemente en los compactos de  $(0, 2\pi)$  pues, para cualquiera de estos compactos, existe una constante  $C$  tal que

$$|f'_k(\omega)| \leq 2 \left[ \frac{1}{\omega^3} + \frac{1}{(\omega - 2\pi)^3} + \sum_{l=-\infty}^{-2} \frac{1}{|l(l+1)2\pi|^3} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l\pi)^3} \right] < C.$$

Además, es claro que

$$f_k(\pi) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{l=-k}^k \frac{1}{(1+2l)^2}$$

es convergente.

Por tanto, aplicando el teorema y teniendo en cuenta el segundo miembro de (2.15) se obtiene

$$-\frac{\cos(\frac{\omega}{2})}{4 \sin^3(\frac{\omega}{2})} = \sum_{k=-\infty}^{-2} -\frac{2}{(\omega + 2k\pi)^3},$$

para cada  $\omega \in (0, 2\pi)$ . Por periodicidad, el resultado también es cierto siempre que  $\omega \neq 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Aplicando un razonamiento análogo

$$\frac{1 + 2 \cos^2(\frac{\omega}{2})}{8 \sin^4(\frac{\omega}{2})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{6}{(\omega + 2k\pi)^4},$$

para  $\omega \neq 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Por tanto,

$$\frac{1 + 2 \cos^2(\frac{\omega}{2})}{48 \sin^4(\frac{\omega}{2})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega + 2k\pi)^4},$$

y tenemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega - 2k\pi)|^2 = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos^2(\frac{\omega}{2})).$$

donde queda resuelta la indeterminación para  $\omega = 2l\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . De aquí, aplicando el teorema 2.3,

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\sqrt{3} \cdot 4 \sin^2(\frac{\omega}{2})}{\omega^2 \sqrt{1 + 2 \cos^2(\frac{\omega}{2})}} \quad (2.16)$$

---

define una base ortonormal  $\{\theta(t - n)\}$  del espacio  $V_0$  de splines de grado 1. Aplicando la antitransformada de (2.16) numéricamente tal y como se describió en el corolario 1.7, la función  $\phi$  resultante se muestra en la figura 2.2

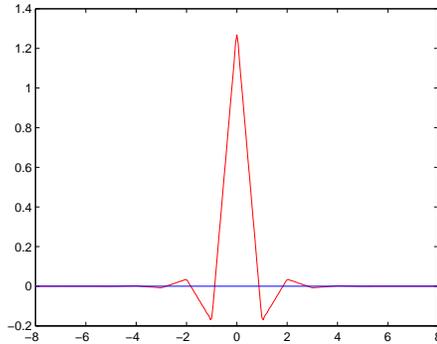


Figura 2.2:  $\phi$ .

## 2.3. Filtros espejo-conjugados.

Una aproximación multiresolución está totalmente caracterizada por la función de escala  $\phi$  que genera una base ortonormal de cada espacio  $V_j$ .

Veamos las propiedades de  $\phi$  que garantizan que los espacios  $V_j$  cumplan todas las condiciones de una aproximación multiresolución. Cualquier función de escala se determina mediante un filtro discreto llamado filtro espejo conjugado.

### 2.3.1. Ecuación de escalado.

La propiedad 2 de la definición de aproximación multiresolución impone que  $V_j \subset V_{j-1}$ . En particular,  $\frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\frac{t}{2}) \in V_1 \subset V_0$ . Como  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_0$ , podemos descomponer

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\phi(t - n) \quad (2.17)$$

con

$$h[n] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\frac{t}{2}), \phi(t-n) \rangle. \quad (2.18)$$

La ecuación de escalado (2.17) relaciona una dilatación de  $\phi$  por 2 con sus traslaciones enteras. La secuencia  $h[n]$  puede ser interpretada como un filtro discreto.

La transformada de Fourier en ambos lados de (2.17) nos proporciona la siguiente igualdad

$$\hat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(\omega)\hat{\phi}(\omega) \quad (2.19)$$

con

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-in\omega}. \quad (2.20)$$

De esta manera veamos que podemos expresar  $\hat{\phi}(\omega)$  directamente como un producto de dilataciones de  $\hat{h}(\omega)$ . Para todo  $p > 0$ , la ecuación (2.19) implica que

$$\hat{\phi}(2^{-p+1}\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(2^{-p}\omega)\hat{\phi}(2^{-p}\omega). \quad (2.21)$$

Aplicándolo sucesivamente desde  $p = 1, 2, \dots, P - 1$ , obtenemos

$$\hat{\phi}(\omega) = \left( \prod_{p=1}^P \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\phi}(2^{-P}\omega). \quad (2.22)$$

Veamos ahora que si  $\phi$  es integrable se tiene que  $\hat{\phi}$  es continua en 0. Para ello notemos que

$$\hat{\phi}(\omega) - \hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)(e^{-it\omega} - 1)dt,$$

---

y por tanto,

$$|\hat{\phi}(\omega) - \hat{\phi}(0)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)| |e^{-it\omega} - 1| dt.$$

Como para todo  $\epsilon$  suficientemente pequeño, existe  $\theta_\epsilon > 0$  tal que  $|e^{-it\omega} - 1| < \epsilon$  si  $|t\omega| < \theta_\epsilon$ , se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)| |e^{-it\omega} - 1| dt \\ &= \int_{-\frac{\theta_\epsilon}{\omega}}^{\frac{\theta_\epsilon}{\omega}} |\phi(t)| |e^{-it\omega} - 1| dt + \int_{-\infty}^{-\frac{\theta_\epsilon}{\omega}} |\phi(t)| |e^{-it\omega} - 1| dt + \int_{\frac{\theta_\epsilon}{\omega}}^{\infty} |\phi(t)| |e^{-it\omega} - 1| dt \\ &\leq \epsilon \int_{-\frac{\theta_\epsilon}{\omega}}^{\frac{\theta_\epsilon}{\omega}} |\phi(t)| dt + \int_{-\infty}^{-\frac{\theta_\epsilon}{\omega}} |\phi(t)| |e^{-it\omega} - 1| dt + \int_{\frac{\theta_\epsilon}{\omega}}^{\infty} |\phi(t)| |e^{-it\omega} - 1| dt. \end{aligned}$$

Notemos que cuando  $\omega$  tiende a cero, la cota superior para todo  $\epsilon > 0$  converge a

$$\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)| dt \leq \epsilon \cdot C$$

por ser  $\phi$  integrable. Por tanto, para  $\omega$  suficientemente pequeño,

$$|\hat{\phi}(\omega) - \hat{\phi}(0)| \leq \epsilon \cdot C,$$

y, por tanto,  $\hat{\phi}$  es continua en  $\omega = 0$ . De aquí,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \hat{\phi}(2^{-P}\omega) = \hat{\phi}(0),$$

y, usando (2.22),

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \hat{\phi}(0). \quad (2.23)$$

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes sobre  $\hat{h}(\omega)$  que nos garantizan que este producto infinito es la transformada de Fourier de una función de escala.

**Teorema 2.7.** (Mallat, Meyer) Sea  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  una función de escala integrable. La serie de Fourier  $\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-in\omega}$  con  $h[n] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(\frac{t}{2}), \phi(t - n) \rangle$  > satisfice

---

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

y

$$\hat{h}(0) = \sqrt{2}. \quad (2.25)$$

Recíprocamente, si  $\hat{h}(\omega)$  es  $2\pi$ -periódica y continuamente derivable en un entorno de  $w = 0$ , satisface (2.24) y (2.25) y además

$$\inf_{\omega \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |\hat{h}(\omega)| > 0, \quad (2.26)$$

entonces

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \quad (2.27)$$

es la transformada de Fourier de una función de escala  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Vamos a demostrar solamente que se cumplen las condiciones necesarias (2.24) y (2.25).

Empecemos viendo la propiedad (2.24). Como  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal, por la proposición 2.5 se cumple que  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$  para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ . Además, como

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{h}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)|^2 |\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)|^2 = 1. \end{aligned}$$

---

Luego

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 = 2.$$

Separando los términos pares e impares y teniendo en cuenta que  $\hat{h}(\omega)$  es  $2\pi$ -periódica tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\frac{\omega}{2} + 2p\pi)|^2 |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + 2p\pi)|^2 + \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{h}(\frac{\omega}{2} + (2p+1)\pi)|^2 |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + (2p+1)\pi)|^2 \\ &= |\hat{h}(\frac{\omega}{2})|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + 2p\pi)|^2 + |\hat{h}(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + 2p\pi + \pi)|^2 = 2. \end{aligned}$$

Como  $\sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + 2p\pi)|^2 = 1$ , si denotamos  $\omega'$  a  $\frac{\omega}{2}$  nos queda que

$$|\hat{h}(\omega')|^2 + |\hat{h}(\omega' + \pi)|^2 = 2,$$

como queríamos demostrar.

Para ver la propiedad (2.25) demostraremos que  $\hat{\phi}(0) \neq 0$ , pues por (2.19) sabemos que  $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(0) \hat{\phi}(0)$  y de ahí ya se deduce el resultado. Más precisamente, verificaremos que  $|\hat{\phi}(0)| = 1$ , que es una consecuencia de la propiedad 5 de la definición de aproximación multiresolución. La proyección ortogonal de  $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  en  $V_j$  es

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n} \quad (2.28)$$

Por la propiedad 5 de la definición de aproximación multiresolución combinada con la fórmula de Parseval (1.12) se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|f - P_{V_j} f\|^2 = \lim_{j \rightarrow -\infty} 2\pi \|\hat{f} - \widehat{P_{V_j} f}\|^2 = 0. \quad (2.29)$$

Para calcular la transformada de Fourier  $\widehat{P_{V_j}f}(\omega)$ , denotamos  $\phi_j(t) = \sqrt{2^{-j}}\phi(2^{-j}t)$ . Insertando (2.13) en (2.28) obtenemos que

$$P_{V_j}f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f * \bar{\phi}_j(2^j n) \phi_j(t - 2^j n) = \phi_j * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f * \bar{\phi}_j(2^j n) \delta(t - 2^j n).$$

La transformada de Fourier de  $f * \bar{\phi}_j$  es  $\sqrt{2^j} \hat{f}(\omega) \hat{\phi}^*(2^j \omega)$ . Por (1.17) se tiene que

$$\widehat{P_{V_j}f}(\omega) = \hat{\phi}(2^j \omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{2^j}\right) \hat{\phi}^*\left(2^j \left[\omega - \frac{2k\pi}{2^j}\right]\right). \quad (2.30)$$

Elegimos  $\hat{f} = \mathbb{1}_{[-\pi, \pi]}$ . Para  $j < 0$  y  $\omega \in [-\pi, \pi]$ , (2.30) nos da

$$\widehat{P_{V_j}f}(\omega) = |\hat{\phi}(2^j \omega)|^2,$$

y la convergencia (2.29) implica que

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |1 - |\hat{\phi}(2^j \omega)|^2|^2 d\omega = 0.$$

Como  $\phi$  es integrable,  $\hat{\phi}$  es continua y se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} |\hat{\phi}(2^j \omega)| = |\hat{\phi}(0)| = 1$$

como queríamos demostrar. □

### 2.3.2. Ejemplos.

Veamos que se satisfacen las condiciones necesarias (2.24) y (2.25) para los ejemplos anteriormente descritos.

#### Aproximaciones constantes a trozos.

Para este caso tenemos  $\theta(t - n) = \mathbb{1}_{[n, n+1)}$  y

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h[p] \phi(t - p),$$

---

siendo, para todo  $p \in \mathbb{Z}$ ,

$$h[p] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\frac{t}{2}), \phi(t-p) \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{1}_{[0,2)}, \mathbb{1}_{[p,p+1)} \rangle .$$

Luego

$$h[p] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } p = 0, 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.31)$$

Haciendo ahora la transformada de Fourier de  $h$  tenemos que

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-in\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega}. \quad (2.32)$$

Por tanto,

$$\hat{h}(0) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

y se cumple (2.25).

Veamos que también se cumple (2.24),

$$\begin{aligned} |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i(\omega+\pi)}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\omega+\pi)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\omega} + \frac{1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega}\right) \\ &= 1 + \cos(\omega) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{i\omega} - \frac{1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \cos(\omega) + 1 - \cos(\omega) = 2. \end{aligned}$$

### Splines de grado 1.

Para este caso tenemos la función de escala dada por la expresión (2.16) y despejando  $\hat{h}(\omega)$  de la igualdad (2.19) se obtiene que

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\sqrt{2}\sin^2(\omega)\sqrt{1+2\cos^2(\frac{\omega}{2})}}{4\sin^2(\frac{\omega}{2})\sqrt{1+2\cos^2(\omega)}} = \frac{\sqrt{2}\cos^2(\frac{\omega}{2})\sqrt{1+2\cos^2(\frac{\omega}{2})}}{\sqrt{1+2\cos^2(\omega)}}, \quad (2.33)$$

donde para la última igualdad hemos tenido en cuenta que

$$\sin(\omega) = 2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Una vez obtenida la expresión anterior vemos claramente que se satisface (2.25) pues  $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$ . Veamos ahora (2.24),

$$\begin{aligned} |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 &= \frac{2 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)(1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right))}{1 + 2 \cos^2(\omega)} + \frac{2 \cos^4\left(\frac{\omega+\pi}{2}\right)(1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega+\pi}{2}\right))}{1 + 2 \cos^2(\omega + \pi)} \\ &= \frac{2}{1 + 2 \cos^2(\omega)} [\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)(1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)) + \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)(1 + 2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right))] \end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos tenido en cuenta que

$$\cos^2\left(\frac{\omega + \pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Luego para ver que se cumple (2.24) tenemos que comprobar que la expresión entre corchetes es igual que  $1 + 2 \cos^2(\omega)$ . Veámoslo,

$$\begin{aligned} &[\cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)(1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)) + \sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)(1 + 2 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right))] \\ &= \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)(1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)) + (1 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right))^2(3 - 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)) \\ &= \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right)(1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)) + (1 + \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right))(3 - 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)) \\ &= \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2 \cos^6\left(\frac{\omega}{2}\right) + 3 - 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + 3 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2 \cos^6\left(\frac{\omega}{2}\right) - 6 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + 4 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= 8 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - 8 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + 3. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cos^2(\omega) &= 1 + 2(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right))^2 \\ &= 1 + 2(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - (1 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)))^2 = 1 + 2(2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1)^2 \\ &= 1 + 2(4 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) + 1 - 4 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)) = 8 \cos^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - 8 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + 3, \end{aligned}$$

como queríamos ver.

---

---

## 2.4. Wavelets

Las wavelets ortonormales surgen de los detalles necesarios para incrementar la resolución de una aproximación de señal. Las aproximaciones de  $f$  a las escalas  $2^j$  y  $2^{j-1}$  son respectivamente iguales a sus proyecciones ortogonales sobre  $V_j$  y  $V_{j-1}$ . Sabemos que  $V_j \subset V_{j-1}$ . Sea  $W_j$  el complemento ortogonal de  $V_j$  en  $V_{j-1}$ , entonces se tiene que

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

El siguiente lema nos proporciona una relación entre las proyecciones de estos dos espacios.

**Lema 2.8.**

$$P_{V_{j-1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f. \quad (2.34)$$

*Demostración.* Demostrar (2.34) es equivalente a demostrar que

$$\langle f - (P_{V_j}f + P_{W_j}f), v \rangle = 0$$

para todo  $v \in V_{j-1}$ . Para ello, veamos por un lado que

$$\langle f - (P_{V_j}f + P_{W_j}f), v' \rangle = 0, \quad \forall v' \in V_j$$

y, por otro lado,

$$\langle f - (P_{V_j}f + P_{W_j}f), w \rangle = 0, \quad \forall w \in W_j.$$

Veamos que se cumple la primera expresión,

$$\langle f - (P_{V_j}f + P_{W_j}f), v' \rangle = \langle f - P_{V_j}f, v' \rangle - \langle P_{W_j}f, v' \rangle = 0.$$

Esto es debido a que  $\langle f - P_{V_j}f, v' \rangle$  es cero por la definición de  $P_{V_j}f$  y  $\langle P_{W_j}f, v' \rangle$  es cero pues  $V_j$  y  $W_j$  son ortogonales. Veamos ahora que se cumple la segunda,

$$\langle f - (P_{V_j}f + P_{W_j}f), w \rangle = \langle f - P_{W_j}f, w \rangle - \langle P_{V_j}f, w \rangle = 0,$$

pues  $\langle f - P_{W_j}f, w \rangle$  es cero por la definición de  $P_{W_j}f$  y  $\langle P_{V_j}f, w \rangle$  es cero ya que  $V_j$  y  $W_j$  son ortogonales.  $\square$

Buscamos una base  $\{\psi(t - n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  para cierta función  $\psi$  tal que sea una base ortonormal de  $W_0$ . A esa función  $\psi$  la llamaremos wavelet.

El siguiente teorema prueba que podemos construir una base ortonormal de  $W_j$  por escalado y traslación de una wavelet  $\psi$ .

**Teorema 2.9.** *Sea  $\phi$  una función de escala y  $h$  el correspondiente filtro espejo conjugado. Sea  $\psi$  la función cuya transformada de Fourier es*

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.35)$$

donde

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi). \quad (2.36)$$

Vamos a denotar

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right).$$

Entonces, para cada escala  $2^j$ ,  $\{\psi_{j,n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$  es una base ortonormal de  $W_j$ . Para todas las escalas,  $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* En primer lugar veamos que  $\hat{\psi}$  se puede escribir como el producto (2.35). Necesariamente  $\psi\left(\frac{t}{2}\right) \in W_1 \subset V_0$ . Esto se puede descomponer en  $\{\phi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , la cual es una base ortogonal de  $V_0$ , como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] \phi(t - n) \quad (2.37)$$

con

$$g[n] = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t - n) \rangle. \quad (2.38)$$

Y la transformada de Fourier de (2.37) conduce a

$$\hat{\psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega) \hat{\phi}(\omega). \quad (2.39)$$

Veamos ahora que la familia  $\{\psi(t - n)\}$  es una base ortonormal si y solo si

$$|\hat{g}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega + \pi)|^2 = 2. \quad (2.40)$$

---

Por la proposición 2.5 sabemos que  $\{\psi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal si y solo si, para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$I(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1. \quad (2.41)$$

Por (2.35) y por ser  $\hat{g}(\omega)$   $2\pi$ -periódica, separando los términos pares e impares, se tiene que

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + k\pi)|^2 \\ &= \frac{1}{2} |\hat{g}(\frac{\omega}{2})|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + 2p\pi)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} |\hat{g}(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\frac{\omega}{2} + 2p\pi + \pi)|^2. \end{aligned}$$

Sabemos que  $\sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$ , luego se obtiene (2.40). Obviamente (2.40) se cumple si se toma  $\hat{g}$  en (2.36) ya que se satisface (2.24). Veamos que  $\{\psi(t - n)\}$  y  $\{\phi(t - n)\}$  son ortogonales si y solo si

$$\hat{g}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi) \hat{h}^*(\omega + \pi) = 0. \quad (2.42)$$

Para ello tenemos en cuenta que el espacio  $W_0$  es ortogonal a  $V_0$  si y solo si  $\{\phi(t - n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  y  $\{\psi(t - n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  son dos familias de funciones ortogonales. Esto significa que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\langle \psi(t), \phi(t - n) \rangle = (\psi * \bar{\phi})(n) = 0.$$

La transformada de Fourier de  $(\psi * \bar{\phi})(t)$  es  $\hat{\psi}(\omega) \hat{\phi}^*(\omega)$ . Esto es debido a que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(-t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) e^{i\omega u} du \\ &= \hat{\phi}^*(\omega). \end{aligned}$$

Tomando  $f(t) = (\psi * \bar{\phi})(t)$  de la proposición 1.5 se deduce que para todo  $\omega \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega + 2k\pi) \hat{\phi}^*(\omega + 2k\pi) = 0.$$

Insertando ahora (2.35) y (2.19) se tiene que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \hat{\phi}^*\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) = 0$$

y por tanto,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) |\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right)|^2 = 0.$$

Separando ahora términos pares e impares,

$$\begin{aligned} & \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi\right) \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi\right) |\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi\right)|^2 \\ & + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + (2p+1)\pi\right) \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + (2p+1)\pi\right) |\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + (2p+1)\pi\right)|^2 \\ & = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\hat{g}$  y  $\hat{h}$  son  $2\pi$ -periódicas y que se cumple (2.10) obtenemos

$$\begin{aligned} & \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2p\pi\right)|^2 \\ & + \hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + (2p+1)\pi\right)|^2 \\ & = \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) = 0 \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. Vemos entonces que, cuando tomamos  $\hat{g}(\omega)$  en (2.36) se cumple (2.42).

---

Veamos ahora que  $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$ . Por el teorema 2.3 sabemos que  $\{\sqrt{2}\phi(2t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortogonal de  $V_{-1}$  y por ello demostrar que  $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$  equivale a demostrar que para toda sucesión  $a[n] \in l^2(\mathbb{Z})$  existen  $b[n] \in l^2(\mathbb{Z})$  y  $c[n] \in l^2(\mathbb{Z})$  tales que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\sqrt{2}\phi(2t - n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a[n]\sqrt{2}\phi(2(t - 2^{-1}n)) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b[n]\phi(t - n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c[n]\psi(t - n). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Esto es equivalente en términos de la transformada a que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{b}(\omega)\hat{\phi}(\omega) + \hat{c}(\omega)\hat{\psi}(\omega). \quad (2.44)$$

Como ocurre que

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

y

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

insertando esto en (2.44), lo que tenemos que probar es que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{b}(\omega) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{c}(\omega),$$

o lo que es lo mismo,

$$\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{b}(\omega) + \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{c}(\omega). \quad (2.45)$$

Para ello, definimos entonces

$$\hat{b}(2\omega) = \frac{1}{2}[\hat{a}(\omega)\hat{h}^*(\omega) + \hat{a}(\omega + \pi)\hat{h}^*(\omega + \pi)] \quad (2.46)$$

y

$$\hat{c}(2\omega) = \frac{1}{2}[\hat{a}(\omega)\hat{g}^*(\omega) + \hat{a}(\omega + \pi)\hat{g}^*(\omega + \pi)] \quad (2.47)$$

Veamos que con  $\hat{b}$  y  $\hat{c}$  en (2.46) y (2.47), se cumple (2.45),

$$\begin{aligned} & \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{b}(\omega) + \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{c}(\omega) = \\ & \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{1}{2}\left[\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{a}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\hat{h}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right] + \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{1}{2}\left[\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{g}^*\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{a}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\hat{g}^*\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right] = \\ & \frac{1}{2}\left[\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right)|\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 + \hat{a}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{i\frac{\omega}{2}}\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right)|\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 - \hat{a}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{i\frac{\omega}{2}}\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] = \\ & \frac{1}{2}\hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right)[|\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)|^2 + |\hat{h}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)|^2] = \hat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (2.36) y la proposición 1.5.

Para completar la prueba tenemos que comprobar que  $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n)\in\mathbb{Z}^2}$  es una base ortogonal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Para ello veamos primero que los espacios  $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$  son ortogonales:  $W_j$  es ortogonal a  $V_j$  y  $W_l \subset V_{l-1} \subset V_j$  para  $j < l$  por lo que  $W_j$  y  $W_l$  son ortogonales.

Ahora veamos que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j. \quad (2.48)$$

Debido a que  $V_{j-1} = W_j \oplus V_j$ , por sustitución podemos comprobar que para todo  $L < J$

$$V_L = \bigoplus_{j=L+1}^J W_j \oplus V_J. \quad (2.49)$$

Ya que  $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$  es una aproximación multiresolución  $V_L$  y  $V_J$  tienden respectivamente a  $L^2(\mathbb{R})$  y  $\{0\}$  cuando  $L$  y  $J$  tienden respectivamente a  $-\infty$  y  $\infty$ , lo cual implica (2.48). Una unión de bases ortonormales de  $W_j$  es por tanto, una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

La demostración del teorema muestra que  $\hat{g}$  es la serie de Fourier de

$$g[n] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t - n) \right\rangle,$$

que son los coeficientes de la descomposición

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]\phi(t - n). \quad (2.50)$$

---

Utilizando la definición de  $\hat{g}(\omega)$  y  $\hat{h}(\omega)$  se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]e^{-in\omega} &= e^{-i\omega} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-in(\omega+\pi)} \right)^* \\
&= e^{-i\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^*[n]e^{in(\omega+\pi)} \\
&= e^{-i\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^*[n]e^{in\omega}(-1)^n \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^*[-m]e^{-i(m+1)\omega}(-1)^m \\
&= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h^*[1-r]e^{-ir\omega}(-1)^{1-r},
\end{aligned}$$

donde hemos hecho los cambios de variables  $m = -n$  y  $r = m + 1$ . Como esto es cierto para todo  $\omega$ , de aquí se obtiene

$$g[n] = (-1)^{1-n}h^*[1-n]. \quad (2.51)$$

Como trabajamos con funciones de escala tomando valores reales, por definición el filtro  $h[n]$  también es real para todo  $n \in \mathbb{N}$  con lo que en ese caso

$$g[n] = (-1)^{1-n}h[1-n].$$

El filtro espejo conjugado juega un papel importante en el algoritmo de la transformada wavelet rápida.

### 2.4.1. Ejemplos.

En los ejemplos de las secciones 2.2 y 2.3 calculamos las funciones de escala y el correspondiente filtro espejo conjugado. Veamos ahora el valor de  $\hat{\psi}(\omega)$  y  $\hat{g}(\omega)$  para cada uno de estos dos casos:

**Aproximaciones constantes a trozos.**

En este caso por (2.14) y (2.32) tenemos que

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}$$

y que

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega}$$

por lo tanto,

$$\hat{h}^*(\omega + \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\omega+\pi)}$$

y teniendo en cuenta (2.36) se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= e^{-i\omega} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\omega+\pi)} \right) \\ &= e^{-i\omega} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (1 - e^{i\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega} - 1).\end{aligned}$$

Veamos que se cumple (2.51), por (2.31) sabemos que

$$h[p] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } p = 0, 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.52)$$

y teniendo en cuenta (2.20) sabemos que

$$\hat{g}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]e^{-i\omega k}$$

luego

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]e^{-i\omega k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega} - 1)$$

luego se tiene que

$$g[n] = \begin{cases} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } n = 0, 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.53)$$

---

cumpliendo así (2.51). De esta forma, utilizando (2.37), podemos calcular  $\psi$ ,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq 2t < 1 \\ -1 & \text{si } 0 \leq 2t - 1 < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.54)$$

es decir,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (2.55)$$

cuya gráfica se muestra en la figura 2.3, y es bien conocida como wavelet de Haar.

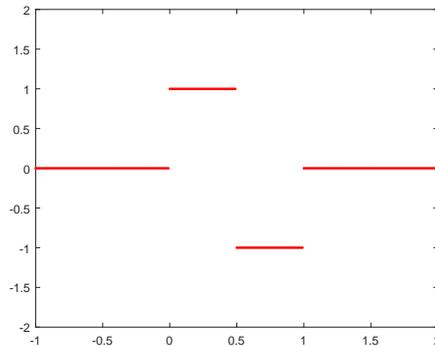


Figura 2.3:  $\psi(t)$ .

La fórmula (2.35) nos dice que

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{(e^{-i\omega} - 1)(1 - e^{-i\omega})}{i\omega}$$

### Splines de grado 1.

Para este caso, por las fórmulas (2.16) y (2.33) tenemos que

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\sqrt{3} \cdot 4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2 \sqrt{1 + 2 \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}}$$

y

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\sqrt{2} \cos^2(\frac{\omega}{2}) \sqrt{1 + 2 \cos^2(\frac{\omega}{2})}}{\sqrt{1 + 2 \cos^2(\omega)}},$$

y por tanto

$$\hat{h}^*(\omega + \pi) = \frac{\sqrt{2} \sin^2(\frac{\omega}{2}) \sqrt{1 + 2 \sin^2(\frac{\omega}{2})}}{\sqrt{1 + 2 \cos^2(\omega)}},$$

de lo que se deduce que

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \frac{\sqrt{2} \sin^2(\frac{\omega}{2}) \sqrt{1 + 2 \sin^2(\frac{\omega}{2})}}{\sqrt{1 + 2 \cos^2(\omega)}},$$

y, por (2.35), sabemos que

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}} \sqrt{3} \cdot 16 \sin^4(\frac{\omega}{4}) \sqrt{1 + \sin^2(\frac{\omega}{4})}}{\omega^2 \sqrt{(1 + 2 \cos^2(\frac{\omega}{2})) \sqrt{(1 + 2 \cos^2(\frac{\omega}{4}))}}.$$

Haciendo la antitransformada de Fourier de ésta, mediante el algoritmo justificado en en la Sección 1, se obtiene la siguiente gráfica que mostramos en la figura 2.4.

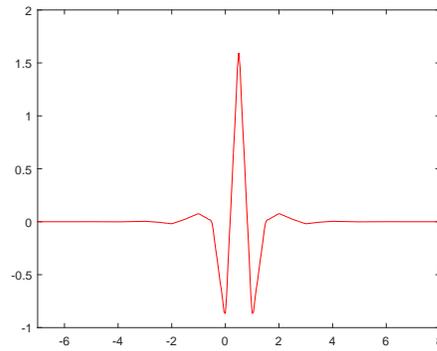


Figura 2.4:  $\psi(t)$ .

# Capítulo 3

## Transformada wavelet ortogonal rápida

En este capítulo describiremos un algoritmo que calcula los coeficientes wavelets ortogonales de una señal medida en una resolución finita. Una transformada wavelet rápida descompone sucesivamente cada aproximación  $P_{V_j}f$  en una aproximación más grosera  $P_{V_{j+1}}f$  más los detalles dados por  $P_{W_{j+1}}f$ . En la otra dirección, la reconstrucción a partir de coeficientes wavelet recupera cada  $P_{V_j}f$  desde  $P_{V_{j+1}}f$  y  $P_{W_{j+1}}f$ .

Ya que  $\{\phi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y  $\{\psi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  son bases ortogonales de  $V_j$  y  $W_j$ , la proyección en estos espacios viene caracterizada por

$$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle \quad (3.1)$$

y

$$d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle. \quad (3.2)$$

El siguiente teorema muestra que estos coeficientes son calculados con una cascada de convoluciones discretas y submuestreo. Denotaremos  $\bar{x}[n] = x[-n]$

y

$$\check{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p + 1. \end{cases}$$

**Teorema 3.1.** *En la descomposición*

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n - 2p]a_j[n] = a_j * \bar{h}[2p], \quad (3.3)$$

---


$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2p]a_j[n] = a_j * \bar{g}[2p]. \quad (3.4)$$

En la reconstrucción,

$$\begin{aligned} a_j[p] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n]a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p-2n]d_{j+1}[n] \\ &= \check{a}_{j+1} * h[p] + \check{d}_{j+1} * g[p]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

*Demostración.* Demostraremos en primer lugar (3.3). Cualquier  $\phi_{j+1,p} \in V_{j+1} \subset V_j$  se puede descomponer en la base ortonormal  $\{\phi_{j,n}\}$  de  $V_j$ , es decir,

$$\phi_{j+1,p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n}. \quad (3.6)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}} \phi\left(\frac{t-2^{j+1}p}{2^{j+1}}\right) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi^*\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2j+1}}} \phi\left(\frac{2^{-j}t-2p}{2}\right) \phi^*(2^{-j}t-n) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t'}{2}\right) \phi^*(t'-n+2p) dt' \\ &= \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{t'}{2}\right), \phi(t'-n+2p) \rangle = h[n-2p] \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde hemos hecho el cambio de variable  $t' = 2^{-j}t - 2p$  y hemos tenido en cuenta la ecuación (2.18). Luego volviendo a (3.6) se tiene que

$$\phi_{j+1,p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p] \phi_{j,n}.$$

Calculando el producto interno de  $f$  con cada  $\phi_{j+1,p}$  se obtiene

$$\langle f, \phi_{j+1,p} \rangle = \langle f, \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p] \phi_{j,n} \rangle$$


---

---

y por tanto, de (3.1),

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p]a_j[n] = a_j * \bar{h}[2p],$$

como queríamos probar.

Para demostrar (3.4), tomamos  $\psi_{j+1,p} \in W_{j+1} \subset V_j$ , que se puede descomponer en la base ortonormal  $\{\phi_{j,n}\}$  de  $V_j$ , es decir,

$$\psi_{j+1,p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \psi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n}. \quad (3.8)$$

Aplicando también el cambio de variable  $t' = 2^{-j}t - 2p$  y teniendo en cuenta la ecuación (2.18) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \psi_{j+1,p}, \phi_{j,n} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}} \psi\left(\frac{t-2^{j+1}p}{2^{j+1}}\right) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi^*\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2j+1}}} \psi\left(\frac{2^{-j}t-2p}{2}\right) \phi^*(2^{-j}t-n) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t'}{2}\right) \phi^*(t'-n+2p) dt' \\ &= \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t'}{2}\right), \phi(t'-n+2p) \rangle = g[n-2p] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Y volviendo a (3.8) se tiene que

$$\psi_{j+1,p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2p] \phi_{j,n}.$$

Calculando, ahora, el producto interno de  $f$  con cada  $\psi_{j+1,p}$ ,

$$\langle f, \psi_{j+1,p} \rangle = \langle f, \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2p] \phi_{j,n} \rangle$$

y por tanto, de (3.2)

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2p] a_j[n] = a_j * \bar{g}[2p]$$


---

---

obteniendo (3.4).

Por último, probaremos (3.5). Como  $W_{j+1}$  es el complemento ortogonal de  $V_{j+1}$  en  $V_j$  la unión de las bases  $\{\psi_{j+1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y  $\{\phi_{j+1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_j$ . Así se puede descomponer cualquier  $\phi_{j,p}$  en esta base obteniendo,

$$\phi_{j,p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{j,p}, \phi_{j+1,n} \rangle \phi_{j+1,n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \phi_{j,p}, \psi_{j+1,n} \rangle \psi_{j+1,n}. \quad (3.10)$$

Insertando (3.7) y (3.9) en (3.10) se tiene que

$$\phi_{j,p} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n] \phi_{j+1,n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p-2n] \psi_{j+1,n},$$

y haciendo el producto interno con  $f$  en ambos lados,

$$\langle f, \phi_{j,p} \rangle = \langle f, \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n] \phi_{j+1,n} \rangle + \langle f, \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p-2n] \psi_{j+1,n} \rangle.$$

Por lo tanto,

$$a_j[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[p-2n] a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[p-2n] d_{j+1}[n].$$

□

# Capítulo 4

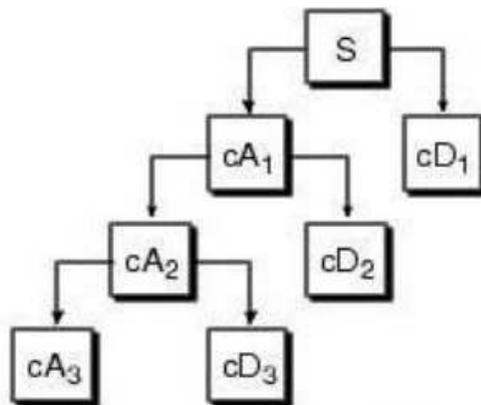
## Ejemplos y aplicaciones

Utilizando el paquete de Wavelets de Matlab se muestran a continuación dos aplicaciones:

### 4.1. Eliminación de ruido.

La eliminación de ruido por Wavelets trata de eliminar el ruido presente en la señal conservando sus características.

Como se ha explicado en el capítulo anterior, en primer lugar, la señal se divide en una aproximación  $a_1$  y un detalle  $d_1$ . A su vez, la aproximación  $a_1$  se divide en una segunda aproximación  $a_2$  y un detalle  $d_2$  y así sucesivamente hasta conseguir el nivel deseado. El procedimiento descrito podemos verlo en el siguiente esquema



## 4.1. ELIMINACIÓN DE RUIDO.

Veamos un caso concreto. La figura 4.1 muestra la señal correspondiente al consumo eléctrico medido cada medio minuto durante tres días consecutivos en cierta ciudad.

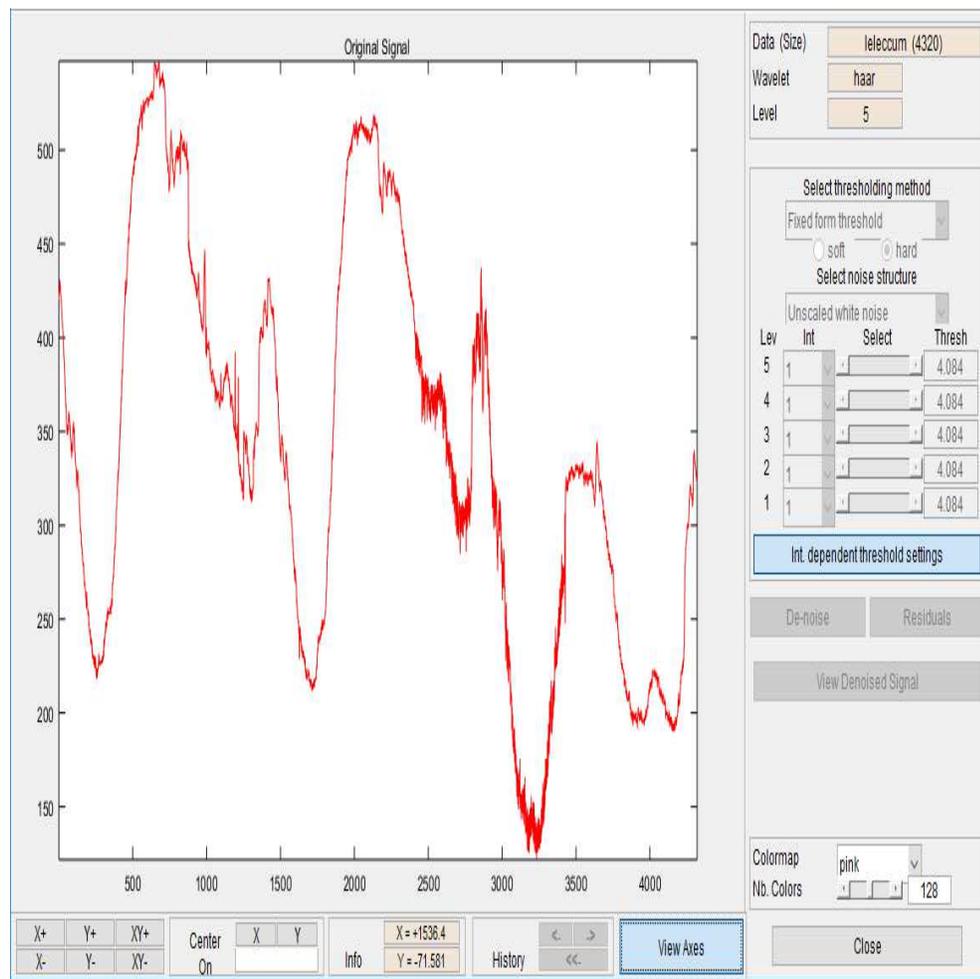


Figura 4.1: Señal Original.

Se observa un cierto comportamiento periódico durante los dos primeros días (laborables) y un comportamiento distinto, con menos consumo eléctrico, durante el tercer día (sábado). Se aprecia ruido, es decir, discontinuidades en todo el intervalo temporal, pero de forma distinguida en el intervalo  $[2000, 3500]$ . Probablemente el ruido en todo el intervalo de tiempo se debe

a pequeños encendidos y apagados de luz mientras que el ruido correspondiente al intervalo [2000, 3500] se debe a que un cierto aparato de medida de consumo eléctrico esté averiado durante ese periodo.

Utilizando los parámetros wavelet Haar y nivel de análisis 5 obtenemos la descomposición de la señal que mostramos a continuación

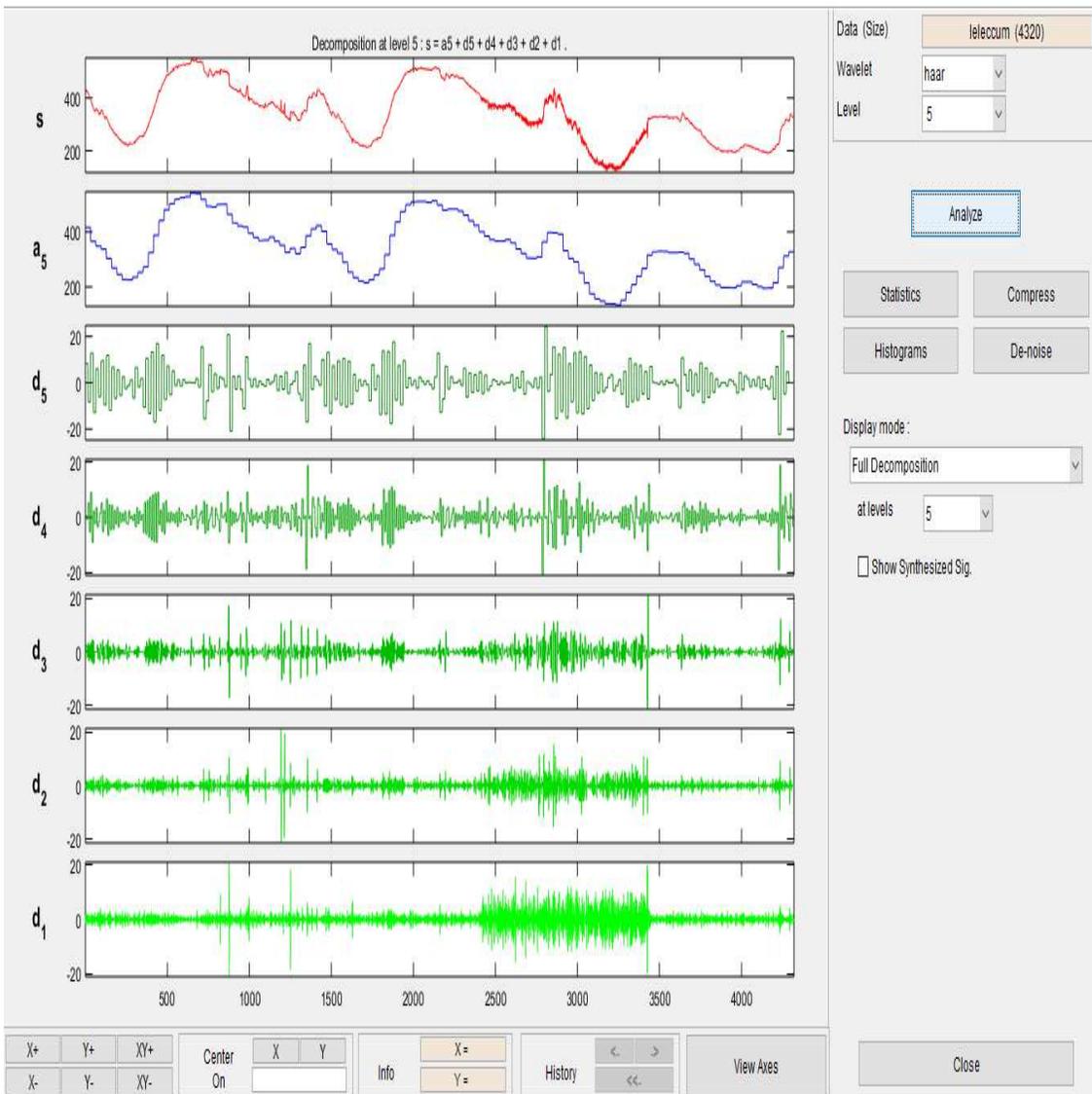


Figura 4.2: Descomposición de la señal.

#### 4.1. ELIMINACIÓN DE RUIDO.

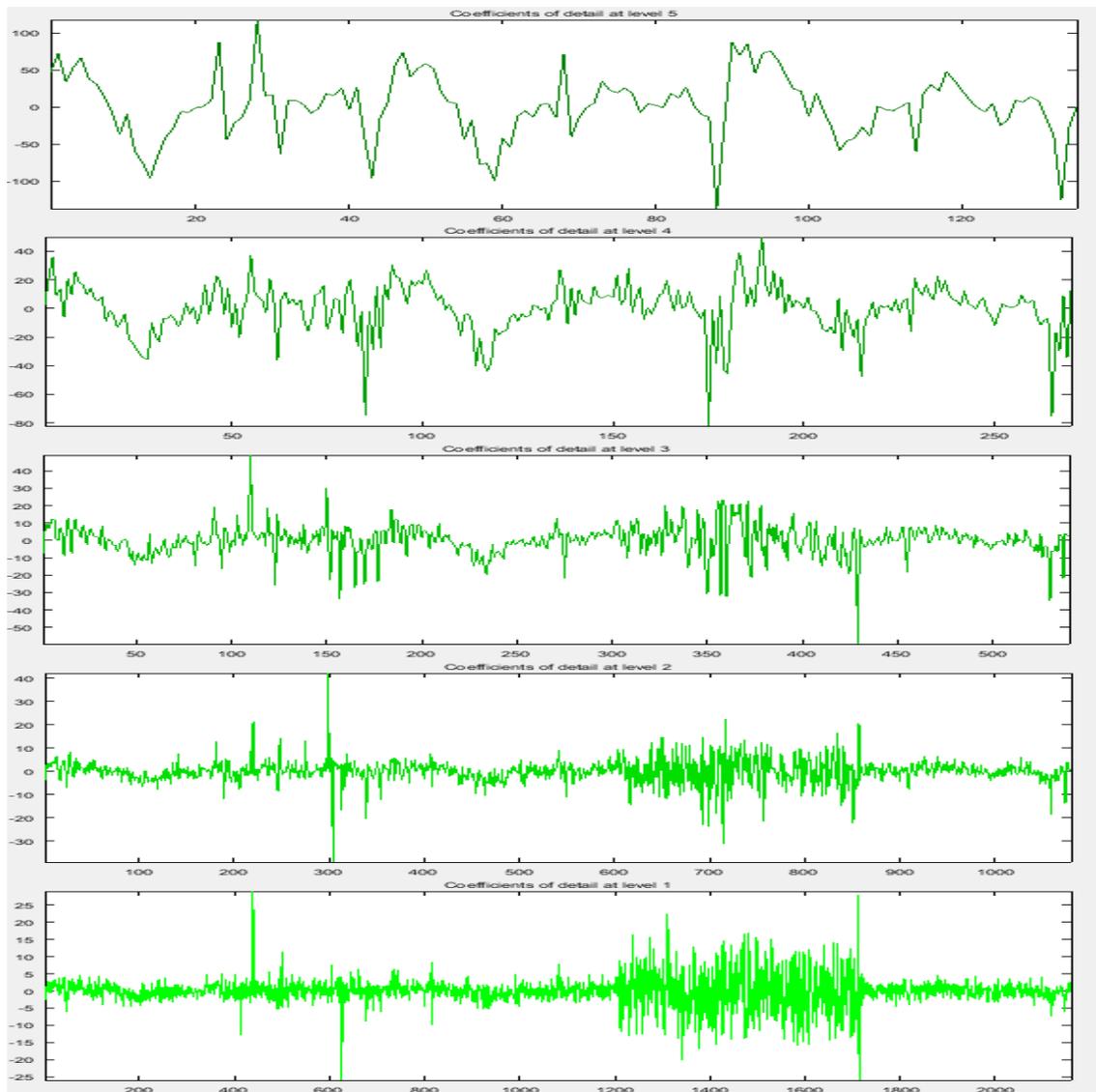


Figura 4.3: Coeficientes de los detalles.

En la figura 4.2 se puede apreciar la señal original junto a su aproximación de nivel cinco,  $a_5$ , y los detalles  $d_1, d_2, d_3, d_4$  y  $d_5$  desde el nivel 1 al nivel 5. En  $d_1$  se aprecia claramente el momento temporal en el que se produce el ruido distinguido en la señal ya que los valores que toma  $d_1$  en ese intervalo son sensiblemente mayores. En la figura 4.3 se pueden apreciar los coeficientes

de los detalles.

Mostramos ahora la descomposición de la señal en forma más detallada en la figura 4.4 en la que se aprecian las distintas aproximaciones en los distintos niveles y los correspondientes detalles.

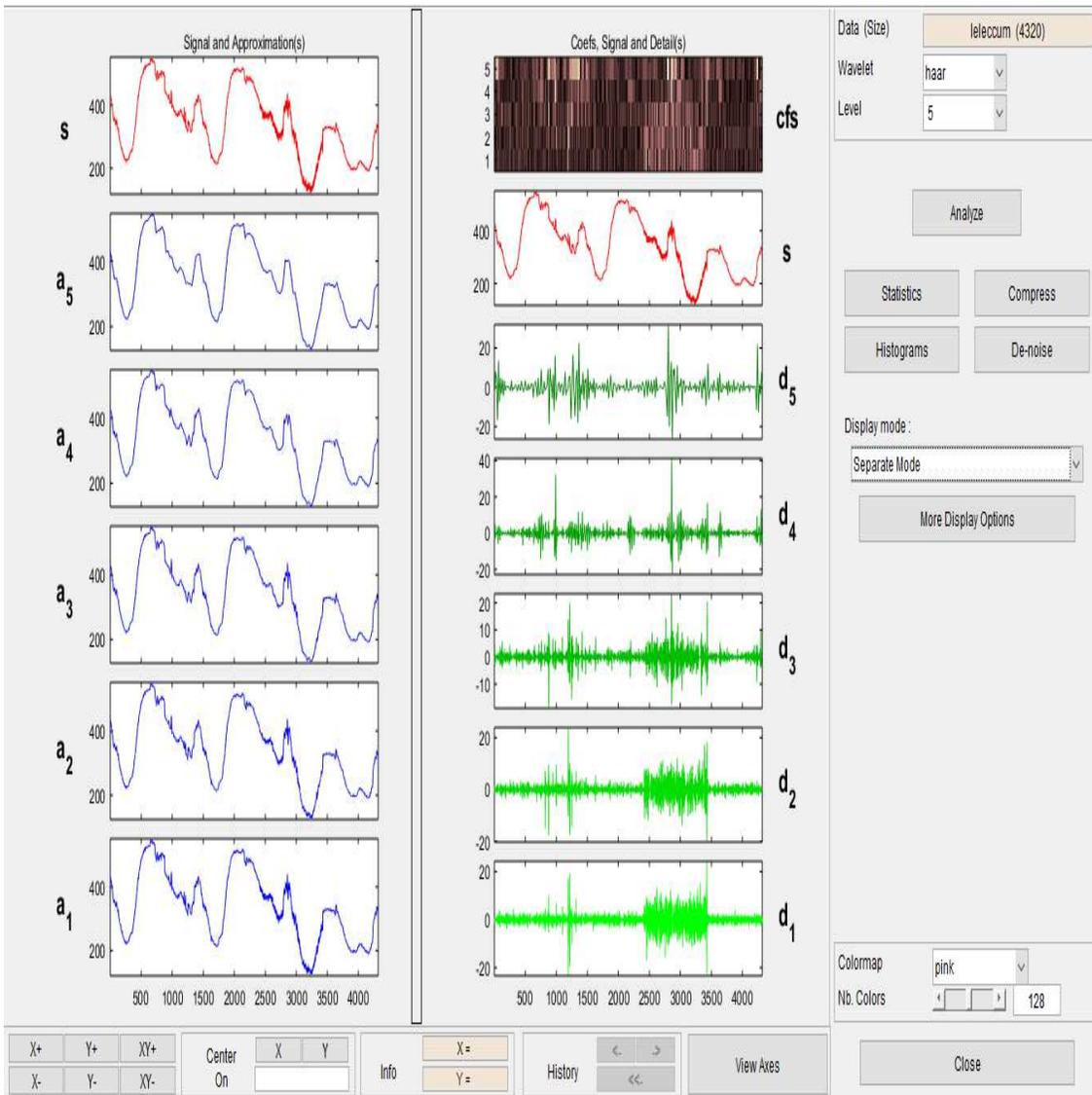


Figura 4.4: Descomposición de la señal. Forma detallada.

Utilizando la función “de-noise” del paquete de wavelets de Matlab, éste

#### 4.1. ELIMINACIÓN DE RUIDO.

elige unos umbrales para cada nivel de detalle de manera que los coeficientes de los detalles por debajo de ese umbral se anulan o se hacen más pequeños. Si los umbrales son los mismos para todos los coeficientes de detalle, la señal “sin ruido” que muestra Matlab con la opción “hard” ( que consiste en hacer nulos los coeficientes por debajo del umbral) se muestra en la figura 4.5.

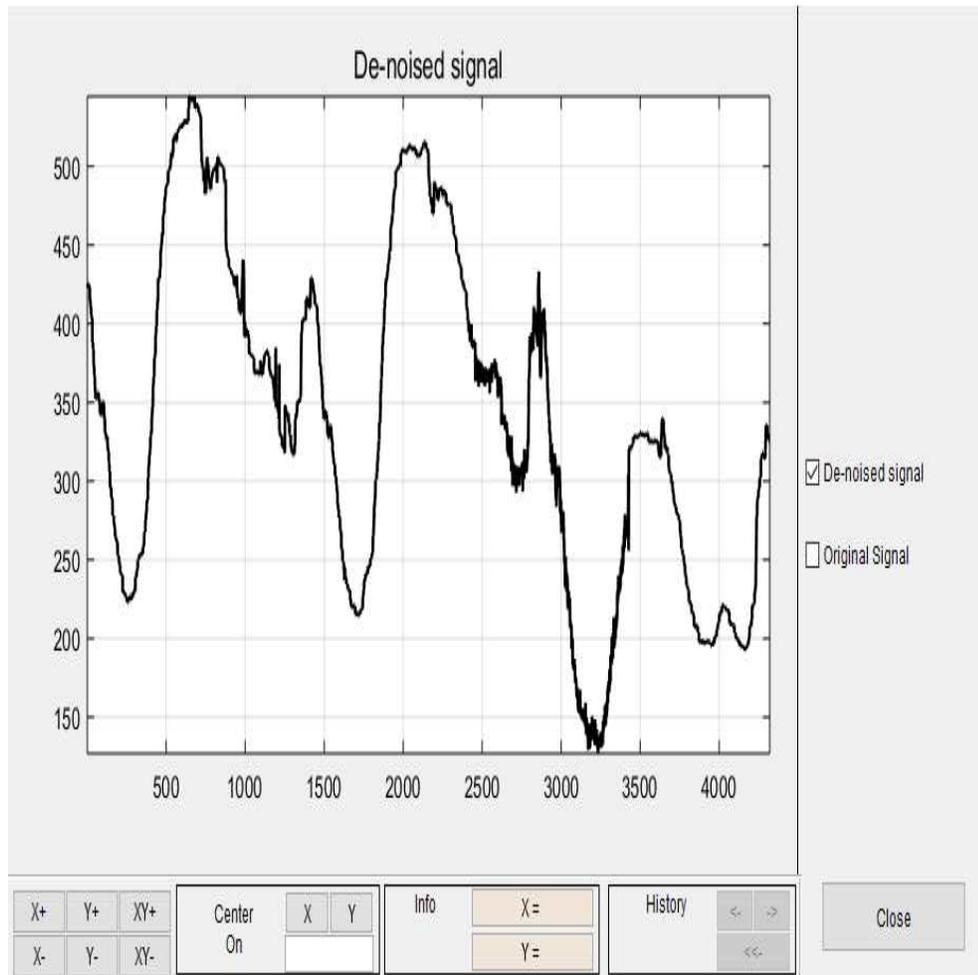


Figura 4.5: Señal sin ruido con umbral 4.084.

Sin embargo, podemos ser más selectivos a la hora de quitar ruido centrándonos en el ruido que se produce en el intervalo  $[2000, 3500]$ . Éste es el que se muestra más claramente en los niveles de detalle  $d_1$  y  $d_2$ , correspondientes a

---

las escalas más pequeñas y que se muestran en las figuras 4.6 y 4.7.

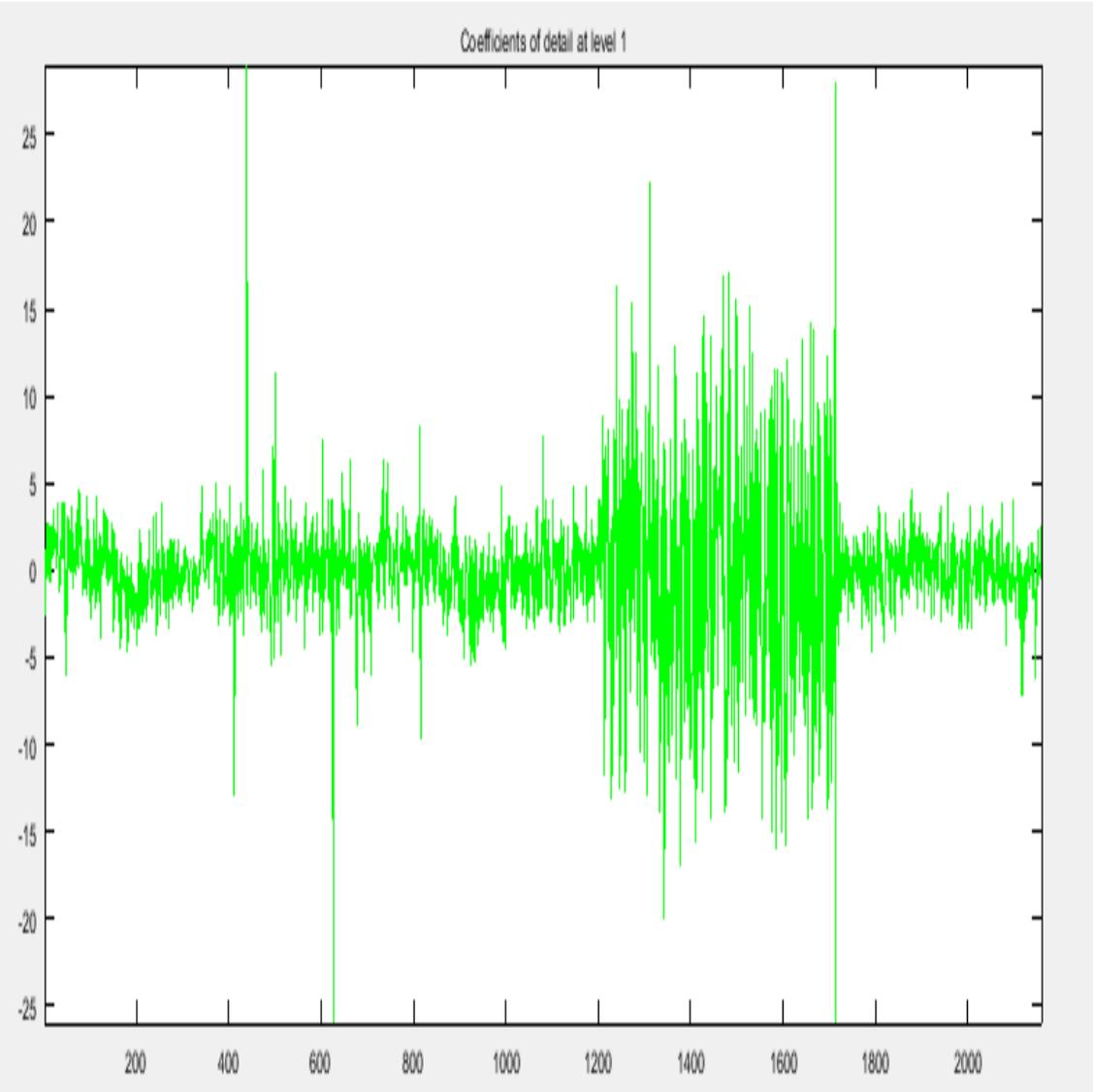


Figura 4.6: Detalle nivel 1.

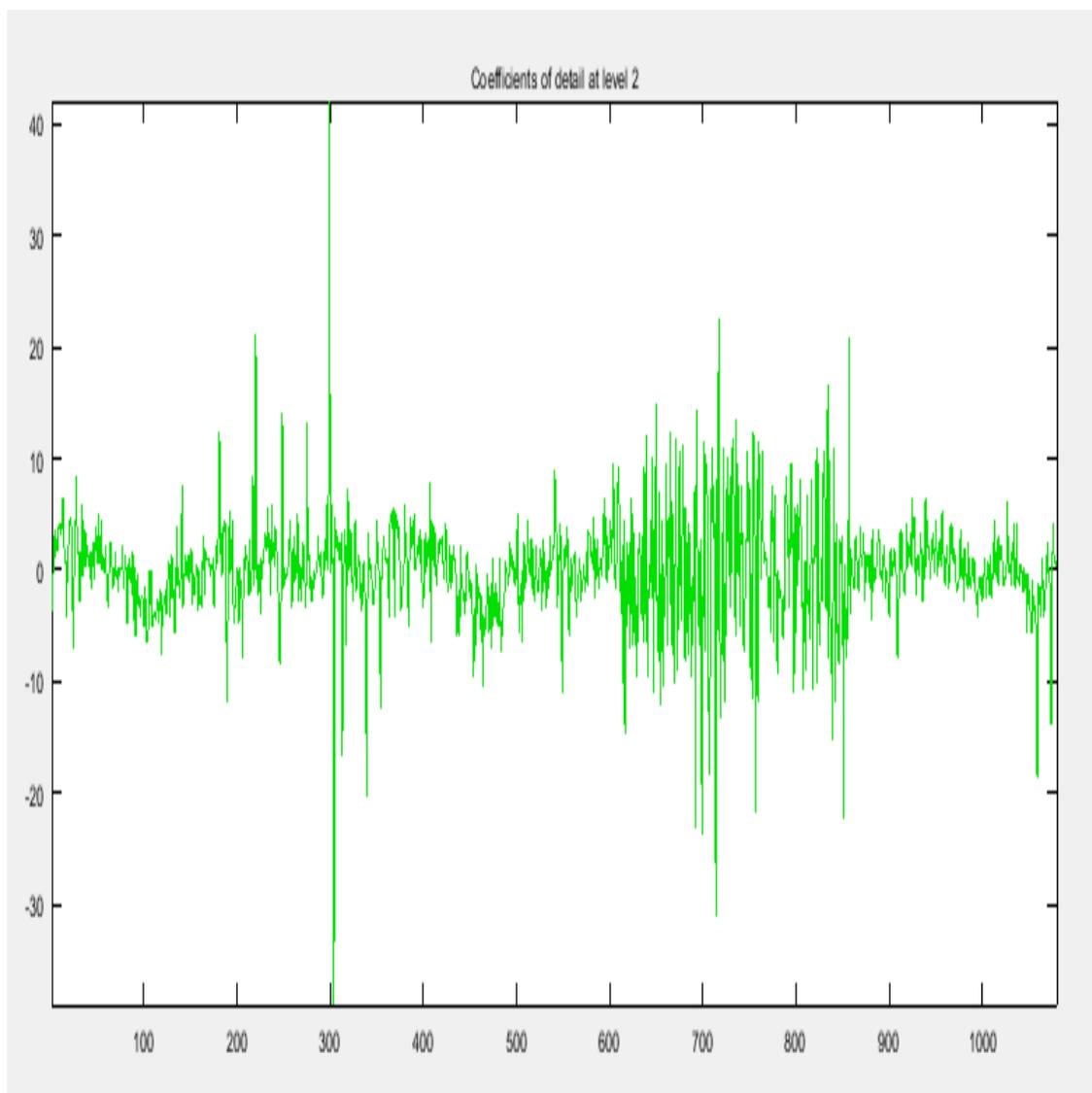


Figura 4.7: Detalle nivel 2.

Hemos reducido el ruido de la señal original dividiendo entre 10 los coeficientes de los detalles  $d1$  y  $d2$  en el intervalo  $[2000, 3500]$ , cuyo resultado se muestra en las figuras 4.8 y 4.9.

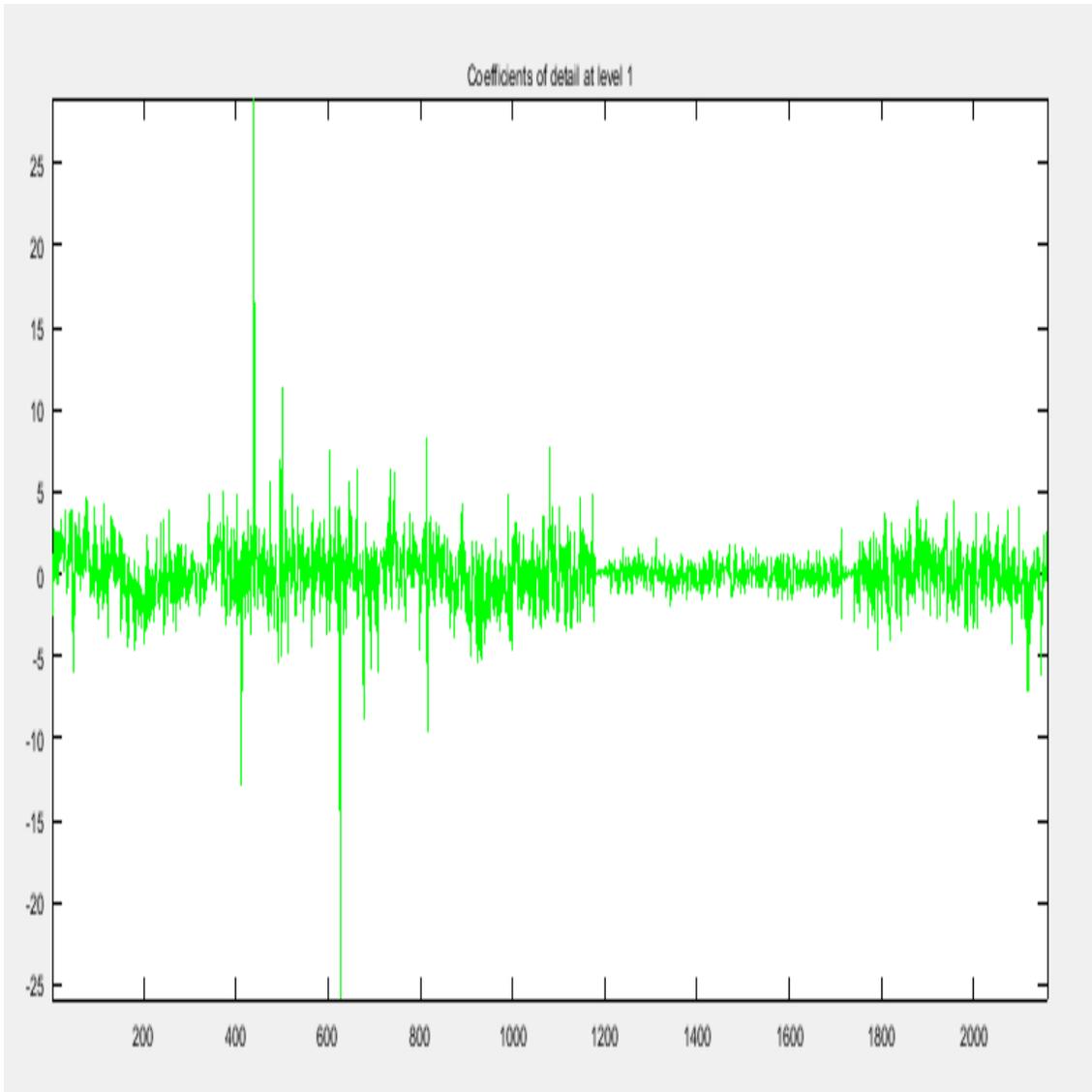


Figura 4.8: Detalle de nivel 1 reducido.

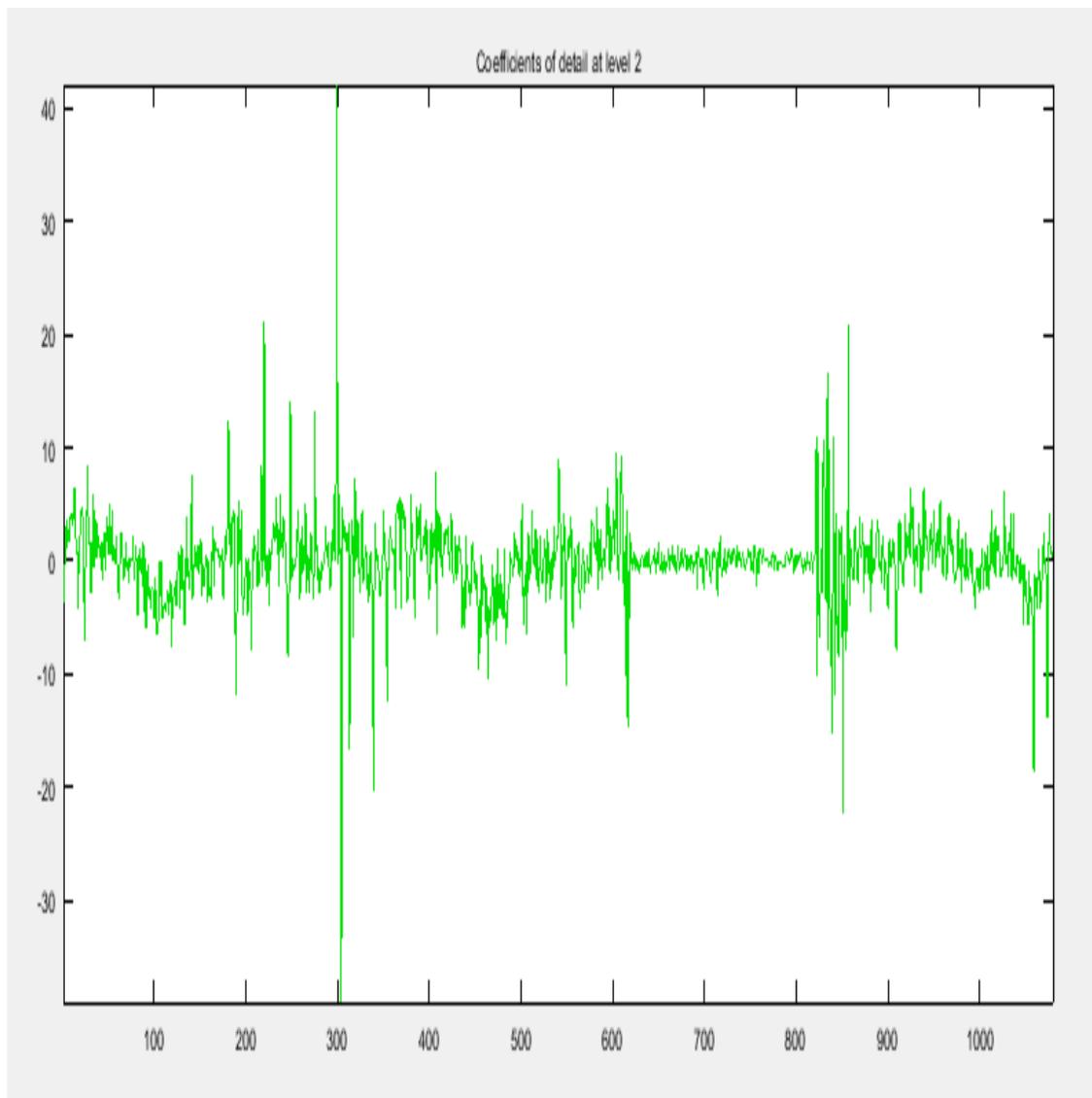


Figura 4.9: Detalle de nivel 2 reducido.

De esta manera, el ruido debido al aparato de medida ha desaparecido como se muestra en la figura 4.10.

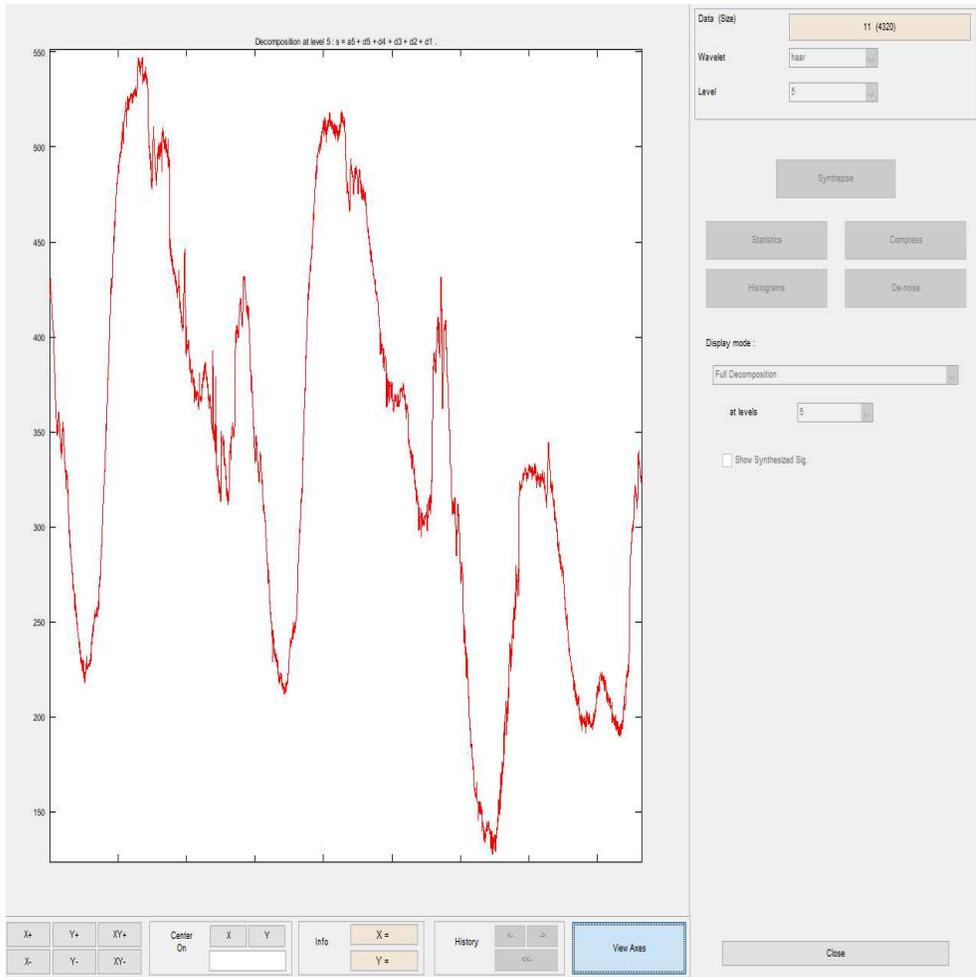


Figura 4.10: Señal sin ruido dividiendo entre 10 los coeficientes de detalle  $d1$  y  $d2$  correspondientes al intervalo  $[2000, 3500]$ .

## 4.2. Compresión de imágenes.

Una imagen en color viene definida por tres matrices, de manera que cada pixel corresponde a una posición específica en las mismas, que indica la tonalidad correspondiente a cada uno de los colores rojo, verde y azul. La primera matriz nos da la componente roja, la segunda la componente verde y la tercera la componente azul.

El principal objetivo en la compresión de imágenes es minimizar la memoria necesaria para representarla, a la vez que se almacena información de una calidad aceptable. Las wavelets aportan una solución eficiente a este problema. Las imágenes están representadas por un número pequeño de coeficientes de una aproximación no muy buena pero apoyados por un número de coeficientes de detalle bastante grande. La compresión consiste, por tanto, en mantener solo los coeficientes de los detalles más relevantes. Más concretamente, el tanto por ciento que se han obtenido de mayor tamaño. A continuación se muestra la compresión de una imagen utilizando el paquete wavelet de Matlab: A la imagen original recogida en la figura 4.11, le aplicamos la wavelet de Haar con un nivel 4:

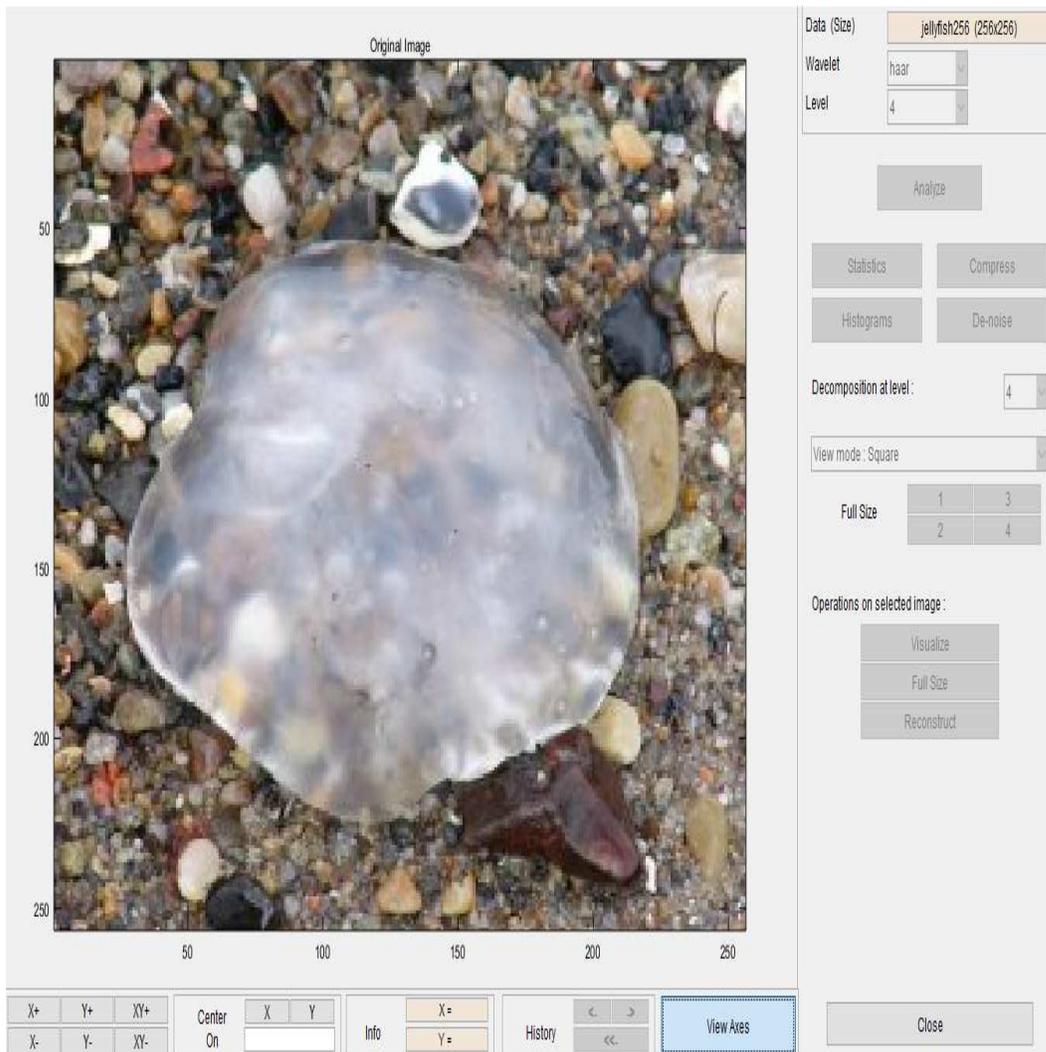


Figura 4.11: Imagen original.

La forma de comprimir es intentar hacer nulos el mayor número de coeficientes de detalle sin perder información importante de la señal. Al igual que para la eliminación de ruido, se puede pensar en establecer un umbral y anular los coeficientes de los detalles por debajo de ese umbral. Puesto que la base de funciones de escala y wavelets utilizada es ortonormal, una manera de medir la información que hemos perdido es a través de la llamada energía (suma de los coeficientes de aproximación y detalle al cuadrado). Las

representaciones en wavelets concentran la energía en un pequeño número de coeficientes. Aún así, cuantos más ceros son elegidos más energía es perdida y, por lo tanto, es importante tener en cuenta un balance entre ambos. Idealmente se busca el mayor número de anulación de ceros con la mayor energía retenida. El umbral que utiliza Matlab para hacer nulos los coeficientes de los detalles resulta de un balance entre el tanto por ciento de energía retenida por la señal y el tanto por ciento de coeficientes anulados (ver dónde se cortan las líneas azul y rosa en la figura 4.12). En cualquier caso, el paquete de Matlab también permite fijar un tanto por ciento de ceros (es decir, el nivel de compresión de memoria) y a partir de eso ver cuál es la energía retenida. Para una primera compresión de la imagen fijamos el número de ceros en el 90 % obteniéndose así el umbral representado en la figura 4.12 (correspondiente a la línea punteada del eje de abcisas), y obteniendo así la imagen comprimida que mostramos en la figura 4.13.

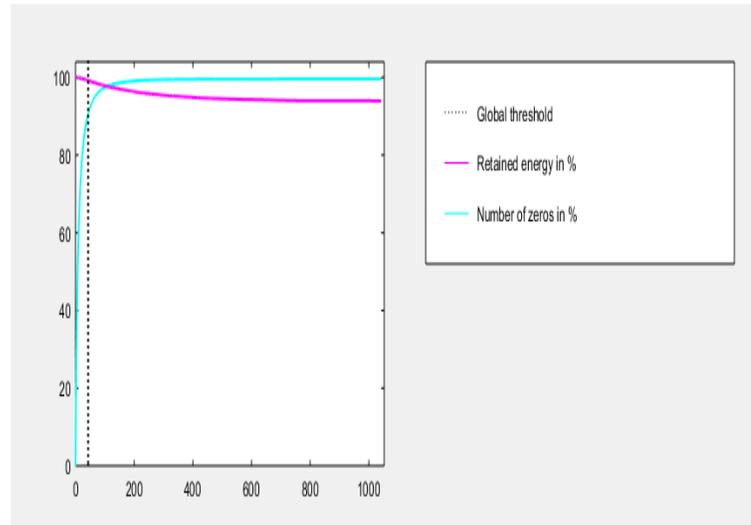


Figura 4.12: Umbral con 90 % de anulación de coeficientes.

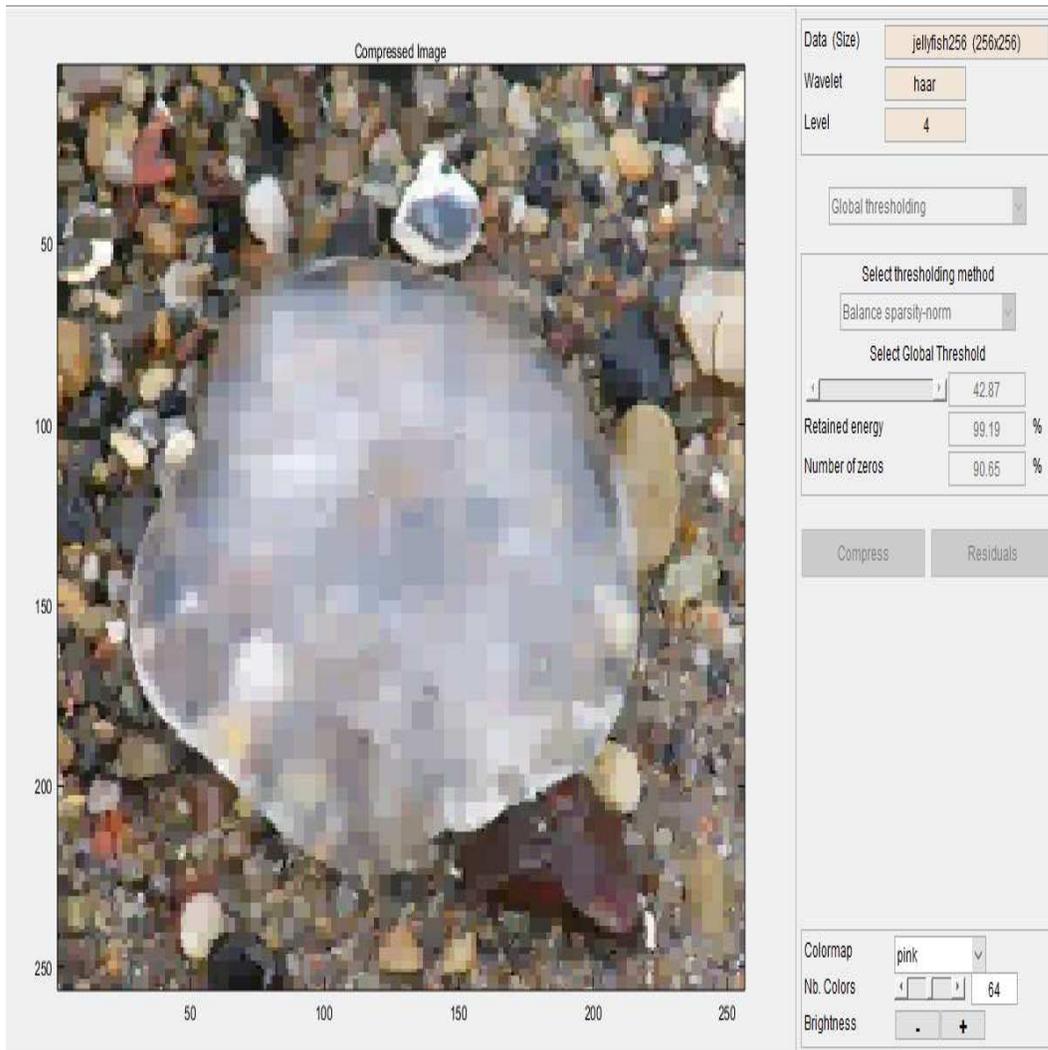


Figura 4.13: Imagen comprimida al 90 %.

Ahora, fijamos el número de ceros en el 70% y se obtiene el umbral representado en la figura 4.14, y la imagen comprimida recogida en la figura 4.15. Notemos que esta imagen es muy parecida a la original. Obviamente, a menor número de ceros, mayor es la calidad de la imagen, pero la imagen proporcionada en la figura 4.15 ya puede ser más que suficiente para muchos efectos prácticos.

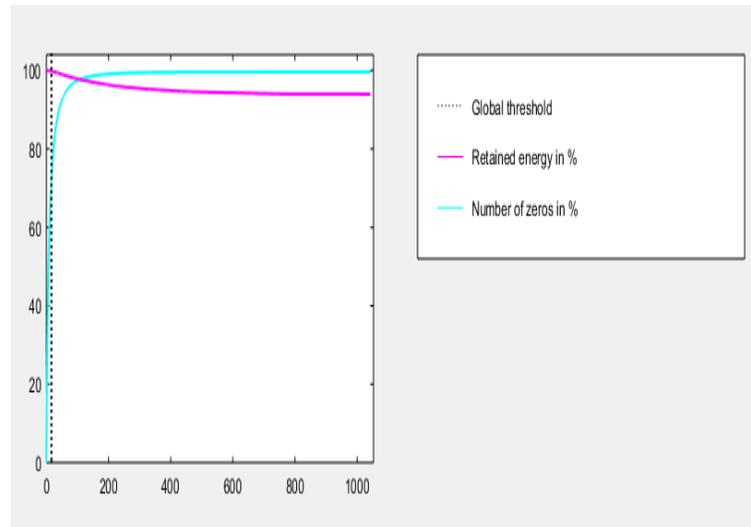


Figura 4.14: Umbral con 70 % de anulación de coeficientes.

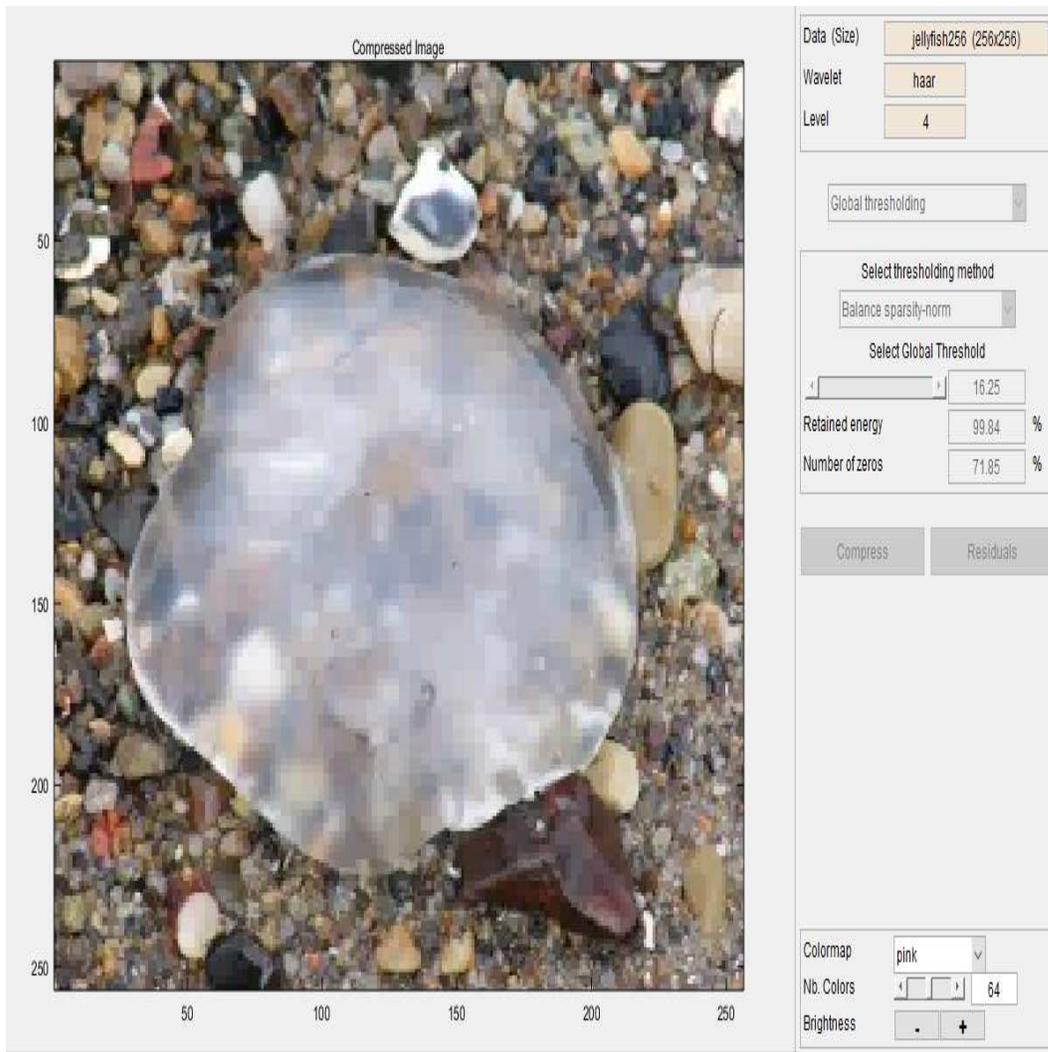


Figura 4.15: Imagen comprimida al 70 %.

Solo señalar, para concluir, que se han diseñado muchas wavelets con el fin de que la compresión de imágenes sea lo más eficiente posible. El análisis de esos otros muchos tipos de wavelets queda fuera del objetivo de este trabajo, pero sí nos gustaría recalcar su interés.



# Bibliografía

- [1] GALINDO SOTO, F., SANZ GIL, J., TRISTÁN VEGA, L. A., *Guía práctica de Cálculo Infinitesimal en una variable real, 2003* Thomson.
- [2] GALINDO SOTO, F., SANZ GIL, J., TRISTÁN VEGA, L. A., *Guía práctica de Cálculo Infinitesimal en varias variables, 2005* Thomson.
- [3] HABERMAN, R., *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno* Prentice Hall, 1994.
- [4] KINCAID, D. AND CHENEY, W. , *Numerical Analysis An International* Thomson Publising Company, 1996 .
- [5] MALLAT, S., *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way* Academic Press, 1998.
- [6] MISITI,M. , MISITI, Y., OPPENHEIM, G., POGGI, J.M. , *MATLAB Wavelet Toolbox, User's Guide* The MathWorks Inc, 1997.
- [7] STRANG, J., NGUYEN,T., *Wavelets and Filter Banks* Wellesley Cambridge Press, 2013.
- [8] STRICHARTZ, R., *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms* CRC Press, 1994.