UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

ESCUELA DE INGENIERIAS INDUSTRIALES

Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Análisis del problema de elección del ganador en subastas combinatorias. Aplicaciones a problemas de Ingeniería de Organización.

Autor:

Merideño Hernández, Laura

Tutor(es):

De Antón Heredero, Juan
Departamento de Organización de Empresas y CIM.

López Paredes, Adolfo
Departamento de Organización de Empresas y CIM.

Valladolid, julio de 2020.

Resumen

En la amplia literatura referida a las subastas combinatorias, las características y los mecanismos asociados a estas, destaca el hincapié a la hora de mencionar la resolución de un importante problema asociado a estas subastas. Este es el problema de determinación del ganador, "Winner Determination Problem" (WDP). Debido a ese gran interés, en el presente trabajo se ha realizado una extensa búsqueda referida a las subastas combinatorias y a los distintos algoritmos utilizados para la resolución del Winner Determination Problem, particularmente en problemas relacionados con el ámbito de la ingeniería. El fin de este trabajo es acercarnos un poco más a este problema e intentar encontrar una metodología para la óptima ejecución de este tipo de subastas.

Por otro lado, se comparan distintos mecanismos de subastas combinatorias, creando para ello un marco analítico que nos ayude a entender mejor sus numerosas características y nos permita identificar sus fortalezas y debilidades.

Palabras clave: Subastas combinatorias, complejidad computacional, mecanismos de subasta, problema de determinación del ganador, ofertas combinatorias.

Abstract

In the extensive literature referring to combinatorial auctions, their characteristics and mechanisms associated with them, emphasis is placed on the resolution of an important problem associated with these auctions. This is the problem of determining the winner, "Winner Determination Problem" (WDP). Due to this great interest, in the present work an extensive search has been made regarding combinatorial auctions and the different algorithms used for the resolution of the Winner Determination Problem, particularly in problems related to the engineering field. The aim of this work is to get a little closer to this problem and try to find a methodology for the optimal execution of this type of auctions.

On the other hand, different combinatorial auction mechanisms are compared, and an analytical framework is built with the aim of helping us to better understand their many characteristics and to allow us to identify their strengths and weaknesses.

Keywords: Combinatorial auction, computational complexity, auctions mechanism, Winner Determination Problem, combinatorial bids.

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Índice de ecuaciones

1. Introducción

Las subastas son mecanismos de mercado que permiten asignar, de manera eficiente, bienes, recursos o servicios, en el ámbito en el que no exista un mercado convencional en el que el precio no se encuentre determinado por la competencia entre vendedores y compradores. Estas subastas, por lo general, se componen de un vendedor que se enfrenta a n posibles compradores y, mediante unas reglas definidas anteriormente, se elige al ganador de la subasta (McAfee & McMillan, 1987).

Sin embargo, debido a la creciente necesidad de encontrar mecanismos más avanzados y amplios de asignación que aborden problemas complejos, presentados por cuestiones como el comercio electrónico, otras actividades comerciales de Internet, las rutas de distribución, aprovisionamiento (Kelly & Byde, 2006) , cadenas de suministro (Walsh et al., 2000) o la asignación de slots ferroviarios (Perennes, 2014), surgen las subastas combinatorias.

Las subastas combinatorias son un tipo concreto de subasta en la que los participantes pueden expresar sus preferencias reales al poder ofrecer por subconjuntos de objetos o “paquetes”, formados por combinaciones, en lugar de elementos individuales o cantidades continuas (de Vries & Vohra, 2003). Estos objetos sometidos a las subastas combinatorias, generalmente, tienen mayor valor en conjunto que la suma de sus valores por separado y por lo tanto, el interés del postor se centra en adquirir el paquete completo (Blumrosen & Nisan, 2007).

Entre los distintos problemas que presentan las subastas combinatorias, la mayoría de los autores se centran en resolver dos cuestiones clave. Por una parte, el problema del empaquetado: esta cuestión trata de abordar las mejores combinaciones posibles de lotes a subastar, así como conseguir la mejor eficiencia mediante estas combinaciones. Por otra parte, el problema de Determinación del Ganador, “*Winner Determination Problem*” (WDP) (de Andrade et al., 2015), que trata de resolver el conjunto de pujas ganadoras, así como la asignación de los lotes que maximice el beneficio del subastador. Estos son cuestiones computacionalmente complejas, ya que son problemas tipo *NP-Hard*, lo que significa que su complejidad aumenta de acuerdo con la cantidad de objetos a subastar, por lo que no se puede garantizar una solución óptima en un tiempo razonable (Holte, 2001). Hasta la fecha, la mayoría de resoluciones a este problema de determinación del ganador han sido realizadas mediante programación lineal o utilizando algoritmos metaheurísticos que ofrecen aproximaciones a la solución (Kelly, 2006). Estas son dos cuestiones que dependen, además, del campo de aplicación y que pueden variar, como veremos, en función del diseño y de los requisitos de presentación de las ofertas es decir, de las características y el tipo de subasta.

En este trabajo se estudiará el problema de Determinación del Ganador (WDP) mediante diversas formulaciones, prestando especial atención al problema Multidimensional de Mochila (MDKP), desarrollando distintos algoritmos para decodificar una solución, y de esta manera, poder aplicarlos a distintos ámbitos de la ingeniería, así como varios métodos de optimización para poder abordar estos problemas. Hay que destacar, como ya se ha mencionado con anterioridad, que la mayoría de los estudios recurren a la programación lineal para la optimización del problema debido a su alta complejidad y carga computacional. Además, veremos que en los diversos estudios existentes sobre el Winner Determination Problem, no existe aún un consenso general en cuanto al mejor método para resolverlo, ya que aparte de ser un problema muy actual y cada vez más analizado, también es un tema complicado y que está en constante búsqueda de mejora.

1.1. Alcance y objetivos del proyecto

Los objetivos principales de este trabajo de fin de grado (TFG) son, por un lado, estudiar las subastas combinatorias como un mecanismo de mercado en problemas de asignación, proporcionando una visión amplia y detallada a la vez, junto con un esquema para su clasificación que se centra en las teorías existentes de subastas, su problemática asociada y casos de aplicación reales. Por otro lado, se tratará y estudiará el problema de determinación del ganador, “Winner Determination Problem” (WDP), por ser el problema principal de las subastas combinatorias.

Para ello, estudiaremos diferentes formulaciones del WDP que se adaptan al contexto de aplicación de los problemas que tratan. Gracias a ello, veremos las funcionalidades y las limitaciones que poseen los mecanismos de asignación como las subastas combinatorias. Dentro de nuestro estudio, seleccionaremos algunos ejemplos prácticos de aplicación de las subastas combinatorias a problemas concretos del campo de la Ingeniería de Organización. Esto nos permitirá entender cómo se pueden superar los problemas de complejidad que presenta el WDP de manera eficiente.

Como objetivo secundario, plantearemos la elaboración de un marco analítico y evaluaremos las características de diseño de este tipo de subastas, de manera que nos permita clasificarlas. Este marco de estudio nos permitirá identificar las fortalezas y debilidades de las aproximaciones al WDP, creando así un instrumento que puede ser de gran utilidad para quien tenga que hacer frente a este problema.

1.2. Justificación

Dado el creciente interés y uso de las subastas combinatorias en múltiples ámbitos, y a la constante investigación y búsqueda de mecanismos más eficientes, este trabajo pretende profundizar en los distintos modelos de subastas combinatorias y su problemática asociada. Se aporta una exploración de los diferentes enfoques y modelos de las subastas combinatorias con el fin de entender mejor estos complejos mecanismos.

Además se analizará un importante tema asociado a ellas, el problema de determinación del ganador, *Winner Determination Problem*. Debido a su alta carga computacional, es una cuestión de permanente estudio y análisis que trata de resolver este problema de optimización e identificar de la manera más satisfactoria posible, el conjunto de pujas ganadoras de una subasta combinatoria.

A pesar de que el empleo de este tipo de subastas como mecanismos de asignación permite aumentar la eficiencia de los mercados, el diseño de una subasta combinatoria conlleva afrontar una serie de problemas que la literatura actual estudia constantemente. Por esta razón, la investigación realizada tiene potencial para mejorar la práctica de las subastas combinatorias y su aplicación en numerosos ámbitos del mercado y en especial, a problemas concretos de la Ingeniería de Organización Industrial como son la formación de la cadena de suministro o el aprovisionamiento.

1.3. Organización de la memoria

Con este propósito, el presente trabajo se estructura de la siguiente forma: en el capítulo 2 se trata la teoría relacionada con las subastas combinatorias, ofreciéndose una clasificación de estas, sus numerosas características y beneficios, los diferentes mecanismos utilizados en su diseño y la descripción de la problemática asociada a este tipo de subastas.

En el capítulo 3 se desarrolla un estudio del *Winner Determination Problem* (WDP) basado en la literatura existente, así como el modelo matemático vinculado a los distintos métodos posibles a utilizar y su decodificación. Además, veremos cómo funciona una heurística de algoritmos genéticos en este tipo de problemas.

El capítulo 4 estudia el uso de las subastas combinatorias para el caso de la formación de cadenas de suministro y la utilización de redes de dependencia para una resolución más gráfica y sencilla del WDP.

En el capítulo 5 se presenta un algoritmo que genera las mejores soluciones, como un grafo de los caminos más cortos para la resolución del *Winner Determination Problem* en una subasta de adquisición.

En el capítulo 6 se analizará un mecanismo de subasta combinatoria denominado la subasta combinatoria del reloj (CC), así como la historia, implementación, características y funcionamiento de este mecanismo que es cada vez más común y utilizado debido a su sencillez y sus ventajas.

En el capítulo 7 se trata otro procedimiento específico y novedoso de subasta denominado subasta PAUSE, se detallan sus dos etapas claramente diferenciadas así como sus propiedades.

El capítulo 8 recopila los distintos mecanismos expuestos y los compara, clasificándolos según sus características y según la teoría de las subastas combinatorias para, finalmente, detallar sus aplicaciones en el campo de la Ingeniería de Organización Industrial.

Por último, en el capítulo 9 se llega a una conclusión y se determinan diversos trabajos futuros de gran interés para el desarrollo de las subastas combinatorias en distintos ámbitos.

2. Subastas combinatorias

Las subastas combinatorias son un tipo concreto de subasta en el cual los participantes pueden pujar por combinaciones de ítems, en lugar de hacerlo de manera individual, como se realizaría en una subasta convencional. Al existir múltiples objetos no idénticos, la oferta que realice un participante depende de si gana o no otro bien, ya que su interés está enfocado en paquetes de bienes en su conjunto; por lo tanto, sólo algunos subconjuntos de bienes tendrán valor real para los participantes. "Estos participantes expresan sus preferencias reales al poder ofrecer por subconjuntos de objetos, a diferencia de lo que harían si sólo pudieran ofrecer por un objeto a la vez" (Santamaría, 2005, p. 2).

La gran ventaja que presentan este tipo de subastas es que permiten al ofertante expresar sus preferencias dentro de las ofertas de bienes que se realicen. Esto implica una alta eficiencia económica. El estudio de las subastas combinatorias tiene una gran importancia, tanto de manera teórica como práctica. En estas subastas, los modelos de asignación utilizados hasta el momento deben enfrentarse a la gran complejidad de los crecientes mercados en los que los comerciantes compiten para comprar o vender múltiples bienes diferentes pero, a su vez, relacionados.

Algunos autores como Santamaría, (2005) indican que, por regla general, los objetos de un conjunto son complementarios si la suma de sus valores por separado es menor que el valor del conjunto de bienes, y son sustitutos en caso contrario. Esto se ve representando de la siguiente forma:

Sean $g1, g2 \in M$ dos bienes y sea $(g1, g2)$ es un paquete de bienes:

Se dice que $g1$ y $g2$ son <u>complementarios</u> si y solo si se cumple lo expuesto en la Ecuación 1:

$$f(g1) + f(g2) \leq f(g1, g2)$$

Ecuación 1. Bienes complementarios. Fuente: de Andrade et al., (2015)

Se dice que son <u>sustitutos</u> si y solo si se cumple lo expuesto en la Ecuación 2:

$$f(g1) + f(g2) \geq f(g1, g2).$$

Ecuación 2. Bienes sustitutos. Fuente: de Andrade et al., (2015)

Uno de los grandes retos a la hora de implementar las subastas combinatorias es la determinación del ganador, un problema complejo de optimización que ha recibido bastante atención por múltiples autores como Sandholm, (2002). Este problema se conoce como *Winner Determination Problem* (WDP), y es un problema tipo *NP-Hard*, lo que implica que no existe un algoritmo determinista y cuyo tiempo de ejecución sea polinomial respecto al tamaño de datos de entrada, es decir, no existe un algoritmo que encuentre solución óptima en un tiempo razonable. "La importancia de esta clase de problemas se debe a que contiene numerosos problemas de búsqueda y de optimización para los que se desea conocer si existe una solución o si existe una mejor solución que las conocidas" (Bosquez et al., 2005, p. 3).

Debido a ser subastas de tipo combinatoria el número de ofertas posibles será del orden de $n(2^m - 1)$ donde n=número de ofertantes y m=número de bienes, y a cada participante se le permite expresar sus preferencias dentro de las ofertas realizadas. A causa de la alta complejidad de este tipo de problema y a su elevado número de ofertas posibles, no se ha encontrado aún un algoritmo capaz de encontrar una solución óptima ya que el problema puede llegar a ser computacionalmente impracticable. El uso de las subastas combinatorias es ventajoso porque permite a los licitantes expresar sus verdaderas preferencias y, por lo tanto, puede dar lugar a mejores asignaciones. "Sin embargo, el número exponencial de combinaciones posibles usualmente resulta intratable computacionalmente en estas subastas. De acuerdo con estas dificultades, solo se han implementado un pequeño número de subastas combinadas hasta la fecha" (Nisan, 2000, p. 1). En futuros capítulos de este trabajo se hablará del problema de determinación del ganador y se estudiarán diferentes modelos de aplicación de este problema para distintos campos de la ingeniería.

2.1. Características de las subastas combinatorias

Las subastas combinatorias pueden clasificarse de múltiples formas, dependiendo del número de postores y de vendedores, del número de rondas que se realicen a la hora de presentar las ofertas o de cuántas veces se deba resolver el WDP cada vez que se envía una oferta. En este apartado se van a exponer las diferentes características de las subastas combinatorias.

2.1.1. Subastas estáticas y dinámicas

Las subastas estáticas corresponden a las subastas de una sola ronda, es decir, los participantes realizan sus ofertas por los subconjuntos de bienes y los ganadores de la subasta son determinados de una sola vez (Santamaría, 2005).

En el caso de las subastas dinámicas, este tipo de subastas están compuestas, a diferencia de las subastas estáticas, de más de una ronda; por lo tanto, los participantes no están obligados a realizar sus ofertas de una sola vez por los subconjuntos que sean de su interés. Tras varias rondas, la asignación de los ganadores y los precios a pagar por estos se determinan en la última ronda.

Estos dos tipos de subastas difieren en la cantidad de información de la que disponen los participantes a la hora de realizar sus ofertas. Como se ha explicado, en el caso de las subastas dinámicas los agentes disponen de mayor margen de actuación a la hora de realizar sus ofertas, esto permite a los participantes conocer los movimientos y las ofertas que realicen sus competidores en rondas anteriores. Sin embargo, en las subastas estáticas los participantes no cuentan con esta ventaja, ya que no tienen ningún tipo de información sobre las ofertas que van a realizar sus competidores antes de que la asignación del ganador sea resuelta y los resultados sen determinados. Por lo tanto, las subastas dinámicas presentan una gran superioridad y utilidad con respecto a las subastas estáticas y permite a sus participantes realizar ofertas más estratégicas.

2.1.2. Tipos de subastas

Podemos distinguir las subastas tanto desde la posición del vendedor, el cual ofrece un bien (en cuyo caso el vendedor será el subastador y los aspirantes a compradores serán los que presentarán las pujas), como en el caso de un empresario que necesita provisión de suministros y acude a múltiples proveedores. En este caso el subastador será el comprador, mientras que los postores corresponderán a los diferentes proveedores que quieran suministrar el servicio o bien a esa empresa. La subasta se diseñará en función de las necesidades de ambas partes como explica Durá Juez (2003). De esta manera podemos distinguir distintos modelos de subastas como explican Navas et al. (2019). El esquema de esta clasificación se muestra en la Figura 1:

- Subastas **hacia adelante** (*forward auction*): Este modelo de subasta se refiere al primer caso explicado en este apartado, en el que existe un solo vendedor, el cual vende diferentes ítems agrupados en lotes o “paquetes”, y múltiples postores que realizan sus ofertas con el fin de conseguir ganar la subasta.
- Subasta **hacia atrás** (*reverse auction*): Esto corresponde al caso contrario al anterior. Son aquellas subastas donde el comprador establece una subasta y múltiples vendedores o suministradores participan en ella. Este tipo de subasta también se conoce como *procurement auction* o subasta de adquisición.
- Subastas **dobles** (*double auction*): Este caso incumbe a las subastas en las que coexisten a la vez, múltiples postores y múltiples subastadores. Se pueden considerar como una representación de los mercados organizados.

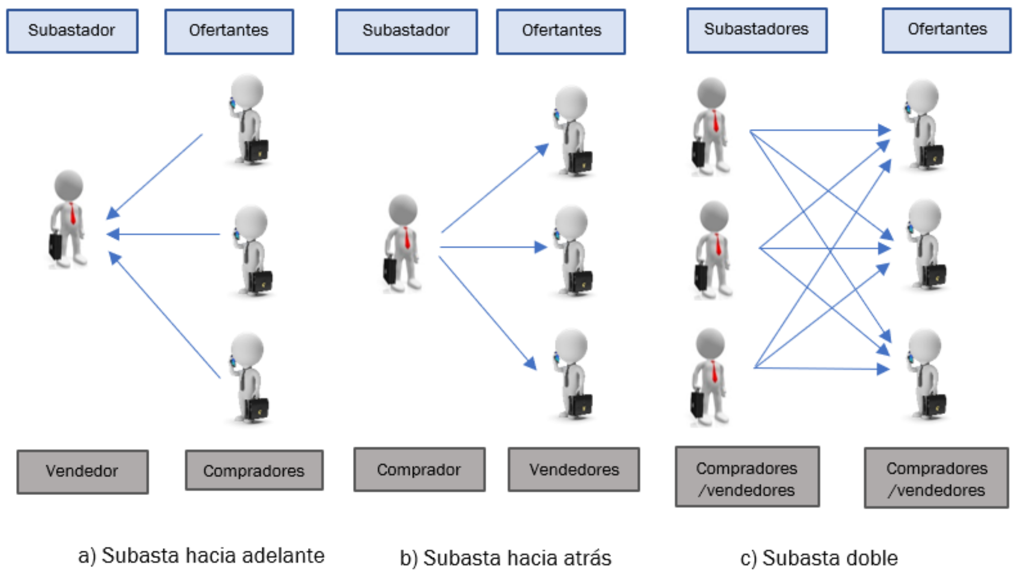


Figura 1. Clasificación de las subastas (Elaboración propia)

A la hora de desarrollar una subasta se debe tener en cuenta cómo se van a realizar las ofertas, así como las reglas que determinarán la asignación de los recursos y los precios. Se pueden distinguir cuatro tipos básicos de subastas como explica el autor (Durá Juez, 2003). A continuación realizamos una breve exposición de cada uno de estos tipos de subastas. Todos estos tipos de subastas admiten múltiples variantes tales como anunciar un precio mínimo o no, establecer tasas por la opción a pujar, recurrir a tiempos límite para realizar las ofertas o realizarlas hacia adelante o hacia atrás, como se ha explicado en el apartado anterior.

- **Subasta ascendente o inglesa**. Este es el tipo de subasta más utilizada y común. Este protocolo de subasta inglesa es un proceso iterativo, donde los postores compiten en el precio para comprar un artículo a un vendedor único. Este vendedor (quien tiene el papel de subastador), especifica el precio de la oferta inicial y este precio se va incrementando sucesivamente en cada ronda por los distintos postores hasta que queda un único comprador, que será a quién se le adjudique el bien al precio final (Bellosta et al., 2011). La comunicación más conocida de las ofertas realizadas por los postores es aquella en la que estos postores "cantan" sus pujas. Estas pujas se realizan tantas veces como se desee hasta que se cumpla la condición de superar la puja más alta en vigor. Generalmente, en estas subastas ascendentes los compradores se van retirando cuando el precio alcanza una cantidad que ellos no estén dispuestos a pagar. Este proceso se repite hasta que permanezca activo un único comprador, quien se adjudica el bien al precio en que abandonó el último candidato. La subasta inglesa o ascendente es utilizada en diversos campos de aplicación en la actualidad, como en la venta de artículos, obras de arte, esculturas, ventas de artículos por internet, entre otras (Pombo Hincapié, 2014). La principal característica de la subasta inglesa es, que los potenciales compradores tienen la ventaja de contar con información sobre sus competidores, ya que siempre conocen cual es el nivel actual de la puja máxima.

- Subasta descendente o holandesa. Este tipo de subasta consiste en el mecanismo inverso al realizado para la subasta ascendente. El subastador parte de un precio muy elevado y de manera iterativa, va anunciando diferentes precios en orden descendente, hasta que el precio es suficientemente bajo como para que alguno de los compradores acceda a comprarlo y gane la subasta. (Mavila H, 2003). A diferencia de lo que ocurre en la subasta inglesa, en la subasta descendente los compradores no cuentan con información sobre sus competidores, ya que cada agente conoce su valor de reserva y tiene incertidumbre acerca de los valores de los otros participantes. En este caso, los compradores no pueden ir obteniendo información a medida que avanza la subasta. En la subasta holandesa el vendedor fija un precio de reserva por debajo del cual no está dispuesto a vender, este precio de reserva determina el precio mínimo que está dispuesto a aceptar durante la subasta. Esta subasta debe su nombre a ser el mecanismo utilizado tradicionalmente para la venta de tulipanes en Holanda.
- Subasta a sobre cerrado o de primer precio. Como explica el autor Durá Juez, (2003), en las subastas de primer precio los postores realizan sus oferta en sobre cerrado, de manera que el bien se adjudica a la mejor oferta efectuada y el precio a pagar coincide con la mejor de las pujas. Las principales desventajas de las subastas de primer precio con respecto a la subasta inglesa son que, al realizar las ofertas a sobre cerrado como se ha explicado, en el momento de realizar las ofertas los participantes desconocen cuales son las ofertas de sus competidores. Además, son subastas de una sola ronda, es decir, los participantes sólo pueden presentar una única puja (Langlois, 2018).
- Subasta Vickrey o de segundo precio. Este tipo de subastas fue descrito por primera vez por el autor Willian Vickrey en la Universidad de Columbia en 1961. En este caso, la subasta sería igual que la subasta anterior, pero con la diferencia de que el precio que debe pagar el ganador de la subasta no será el precio del ganador, sino el segundo precio más alto presentado (Vickrey, 1961). De esta manera, el ganador nunca puede afectar al precio que paga, por lo que no hay incentivo para que ningún ofertante tergiverse su valor. La cantidad que el postor

ofrezca solo determinará si gana o no, y sólo ofreciendo su valor real puede asegurarse de ganar cuando esté realmente dispuesto a pagar el precio (Lawrence M. Ausubel & Milgrom, 2005). Como expone el autor Vickrey (1961), ningún postor lograría de ninguna manera aumentar sus ganancias presentando una oferta diferente a la de su valoración.

2.2. Diseño de subastas combinatorias

A la hora de diseñar las subastas combinatorias es importante crear mecanismos de subastas, así como un marco que nos permita aplicar este tipo de subastas a los distintos mercados existentes. Por lo tanto, es necesario crear unas pautas y etapas para desarrollar el proceso de diseño de las subastas. Podemos distinguir cuatro etapas:

I. Primera etapa (**inicial**). En esta primera fase debemos fijarnos en el entorno en el que se va a aplicar la subasta, esto es, realizar un modelado del mercado en el que se quiere implantar. Para ello, es necesario determinar cuáles serán los ítems o lotes, además de si estos figurarán como objeto físico o por el contrario un derecho temporal.
II. Segunda etapa (**estructural**). Se determinará el mecanismo de subastas a utilizar, pudiendo utilizar los ya existentes, o en cambio, crear uno propio, de manera que se decide si la subasta se compondrá de una o varias rondas, pudiendo fijar también un tiempo de duración durante el cual se realicen las ofertas (Mariduena Carvajal, 2005). En el siguiente apartado se hablará de estos distintos mecanismos. Cabe destacar la importancia de crear un lenguaje de subasta adaptado al mercado donde queremos implantarla.
III. Tercera etapa (**regulatoria**). Se pretende maximizar el beneficio o la eficiencia económica, entre otros. En esta tercera fase se formulará el WDP. Para ello se debe determinar una o varias funciones objetivo además de las restricciones asociadas. También es necesario determinar el modo de pago, como puede ser mediante la subasta Vickrey o la subasta de primer precio.
IV. Cuarta etapa (**iterativa de corrección**). Esta etapa consiste en una simulación de la subasta diseñada, con el fin de depurar el diseño si el cómputo y la resolución del WDP resulta muy compleja o no se obtiene una solución válida en un tiempo aceptable.

Otros aspectos que se deben considerar para el diseño de las subastas combinatorias son, determinar la información que los postores puedan conocer durante el proceso de la subasta, definir el lenguaje de recepción de las ofertas o preclasificar a los participantes involucrando restricciones de ofertas sobre determinados bienes si los participantes no cumplen algunas condiciones determinadas.

La Figura 2 que se muestra a continuación ilustra el esquema de las etapas a seguir para realizar el diseño de una subasta combinatoria.

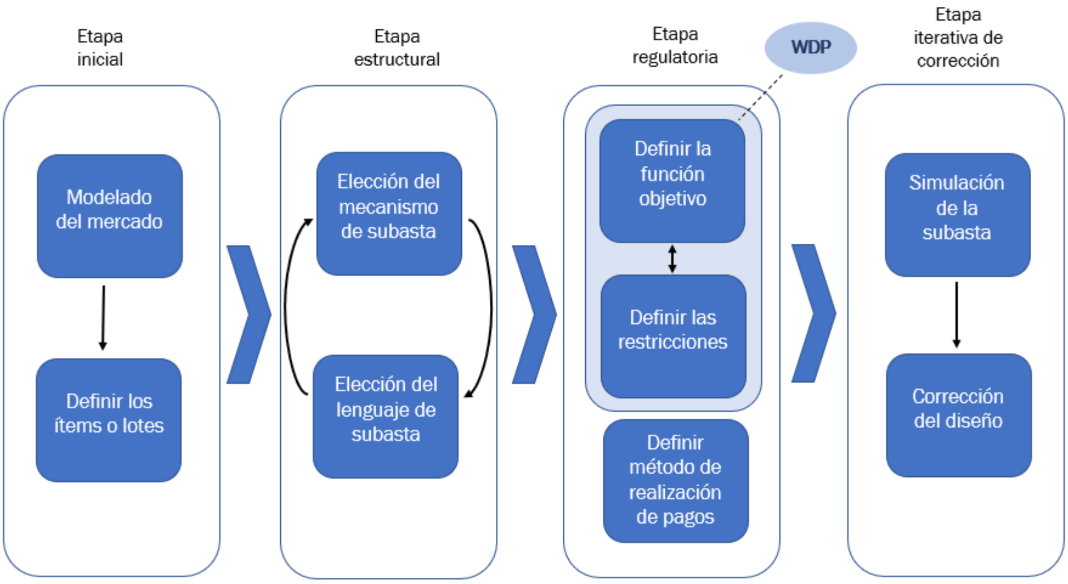


Figura 2. Esquema de diseño de una subasta combinatoria. (Elaborado a partir de Navas et al. (2019))

2.2.1. Mecanismos continuos

Los mecanismos continuos solo están formados por una etapa y las pujas y ofertas se envían hasta el cierre de la subasta. Estas subastas tienen características similares a las subastas de precio ascendente o inglesa. Una diferencia importante entre los mecanismos continuos y la mayoría de los enfoques existentes es que se proporcionan métricas de evaluación de ofertas en tiempo real, de manera que se facilitan las subastas continuas que imitan las propiedades de las subastas inglesas.

Para el caso de subastas combinatorias en las que se compite por un conjunto de bienes, este tipo de subasta puede resultar bastante complejo en lo que a computación se refiere, ya que se debe resolver el problema de determinación del ganador (WDP) cada vez que se formula una oferta. Por ello, generalmente dependen de la elaboración del *feedback,* ya que es necesario plantear la cuestión de las repercusiones de proporcionar diferentes cantidades de información como retroalimentación a los postores. No es fácilmente aparente hasta qué punto los licitadores podrán explotar la información que se les facilite al formular sus ofertas. Además, tampoco está claro cómo se distribuirán las ganancias del comercio entre el vendedor y los compradores en función de la cantidad de retroalimentación proporcionada. Autores como Adomavicius et al., (2007) clasifican tres niveles de *feedback* para las subastas combinatorias:

- Nivel 1. *Baseline feedback* (control): Representa la configuración de la subasta combinatoria continua en la que todas las ofertas presentadas son visibles para todos los postores, pero no se proporciona ninguna otra retroalimentación.
- Nivel 2. *Outcome feedback*. En este nivel se incluye toda la información proporcionada en el Nivel 1 además de la combinación de pujas ganadoras actuales, esto es, en cada estado de la subasta los pujadores sabrán qué pujas ganarían si la subasta terminara en ese momento.
- Nivel 3. *Process feedback*. Este nivel incluye toda la retroalimentación proporcionada en el Nivel 2 más los valores que irían dirigidos a la formulación de una oferta exitosa por parte del postor. Estos valores pueden ser *deadness level*, es decir, los niveles de oferta por debajo de los cuales las ofertas nunca pueden formar parte de una combinación de oferta ganadora, y *winning level*, que son los niveles de oferta por encima de los cuales las ofertas pasan a formar parte del conjunto de ofertas actualmente ganadoras. Se espera que esta retroalimentación dirija al oferente hacia la formulación de ofertas exitosas.

Numerosos autores (Chewning & Harrell, 1990; Malhotra, 1982; O'Reilly, 1980) han realizado profundos análisis sobre la importancia que tienen los distintos tipos de información aportada a los postores en las subastas y su repercusión sobre las ofertas realizadas por estos.

2.2.2. Mecanismos iterativos

Los mecanismos iterativos en las subastas combinatorias son aquellos que están divididos en distintas etapas o turnos, de manera que la resolución del problema de determinación del ganador se resuelve al finalizar cada turno. De esta manera se reduce notablemente la complejidad del problema. Se debe destacar también, que mediante este mecanismo se ofrece transparencia y se reduce el aporte de privacidad. Esto se debe a que se puede acreditar a los diversos postores cómo se ha llegado a la determinación del precio ganador y a la asignación de los recursos al final de la subasta, si estos lo desean (Navas et al., 2019). Dentro de las subastas iterativas podemos distinguir dos tipos como exponen los autores (de Vries & Vohra, 2003):

- De primer orden (**de fijación de cantidades**). Los postores presentan en cada ronda sus ofertas. A continuación, el subastador realiza una asignación temporal de los artículos dependiendo de los precios presentados anteriormente. Los postores pueden ajustar las ofertas realizadas en las rondas anteriores y la subasta continúa. Estas subastas parecen ser las que más prevalecen en la práctica.

- De segundo orden (**de fijación de precios**). El subastador establece un precio y son los ofertantes quienes anuncian qué paquetes quieren adquirir a ese precio anunciado. Posteriormente, el subastador observa estas peticiones y ajusta los precios. De esta manera se resuelve el problema de equilibrar la demanda con el suministro. Esta subasta es más fácil de analizar ya que cada ofertante se limita a anunciar qué paquetes están dentro de sus necesidades a los precios anunciados por el subastador.

Las subastas iterativas presentan grandes ventajas con respecto a las subastas de una sola ronda. Mediante este mecanismo, se evita que los licitadores especifiquen sus ofertas para cada combinación posible por adelantado y además, son métodos que pueden adaptarse a entornos dinámicos en los que los bienes y los postores llegan y salen en momentos diferentes. Además, permite a los participantes obtener más información de sus competidores, ya que con la retroalimentación adecuada, se permite que esa información sea revelada (de Vries & Vohra, 2003).

2.2.3. Propiedades deseables de los mecanismos de subasta

En el momento de diseñar un mecanismo de subasta combinatoria hay que tener presente las propiedades que debe tener para ser un mecanismo óptimo y que así, sea eficiente a la hora de aplicarlo en entornos reales. Algunas de estas propiedades son las citadas por Pekeč & Rothkopf, (2003):

- **Eficiencia en la asignación**: Hay que asegurar que se maximiza el valor total para los ganadores de los artículos o paquetes que se subastan, ya que en una subasta combinatoria, lograr esta eficiencia en la asignación es clave. Relacionado con la eficiencia de la asignación, pero no necesariamente igual, está la eficiencia económica general. Este concepto tiene en cuenta el efecto provocado por los ingresos de la subasta en la eficiencia económica.
- **Maximización de los ingresos o minimización de los costos**: Las empresas que realizan subastas de adquisición (*reverse auctions*) suelen tener como objetivo minimizar los costos. Sin embargo, no es fácil diseñar subastas combinatorias que optimicen los ingresos debido a la dificultad de encontrar estrategias de licitación equilibradas ya que, además de esta dificultad, el diseñador de las subastas combinatorias se enfrenta a un obstáculo más básico: determinar la asignación de los ingresos maximizando (o minimizando) los costos para un determinado conjunto de ofertas.
- **Bajos costos de transacción**: Este es otro de los objetivos potenciales de los diseñadores de subastas combinatorias ya que es algo que

preocupa, tanto a los licitadores, como a los postores. Como se puede intuir, las subastas con menores costos de participación son deseables pero también lo es una alta velocidad de subasta.

- Equidad: Es un objetivo vital de las subastas a pesar de que es difícil de definir. Es de gran importancia para los participantes que se pueda garantizar una igualdad de trato con los competidores, algo que suele ser clave para el uso de las subastas por parte de los gobiernos.
- Ausencia de fallos: Si los fallos no pueden ser evitados por completo, deben minimizarse y mitigar su impacto. Es de vital importancia evaluar cuidosamente la probabilidad de fracaso a la hora de determinar los ganadores de la subasta de acuerdo con las normas establecidas. En caso de no poder evitarlos, pueden tolerarse fallos poco frecuentes o graves en la determinación del ganador óptimo, siempre que se garantice únicamente una pequeña pérdida de beneficio entre el valor óptimo y el asignado. Ocasionalmente, esta tolerancia de fallos puede facilitar la construcción de mecanismos combinatorios de subasta viables.
- Transparencia: Es importante velar por la transparencia en las subastas combinatorias debido a que simplifica la compresión de la situación por parte de los ofertantes, facilitando la toma de decisiones y aumenta su confianza en el proceso de subasta, ya que mejora su capacidad para verificar y comprobar que se han seguido las reglas de la subasta. No obstante, se trata de una propiedad difícil de implementar ya que los algoritmos polinómicos no equivalen a la transparencia.

2.3. Problemática asociada a las subastas combinatorias

Como se ha expuesto, el diseño de las subastas combinatorias es considerablemente complejo. Por lo tanto, a la hora de desarrollarlas surgen problemas asociados a estas. Se hará una breve explicación de algunos de estos problemas como el problema de exposición, el problema de los participantes, la expresión de la puja y las reglas más comúnmente aplicadas de cierre de las subastas combinatorias. Por último se expondrá el problema de determinación del ganador (WDP) y el problema de empaquetado.

2.3.1. Expresión de la puja combinatoria

Todos los autores destacan la importancia de la creación de un lenguaje de subastas específico para la realización de las pujas. Este lenguaje debe afrontar la capacidad de permitir a los ofertantes realizar sus propias combinaciones de ítems. Como se ha explicado, en las subastas combinatorias existe la posibilidad de realizar combinaciones que pueden derivar en una gran cantidad de lotes, esto es, del orden de $2^m - 1$, por lo tanto se podrían computar todas estas combinaciones para determinar el ganador de la subasta. Por ello, el lenguaje de subastas debe tener dos objetivos, que son:

- **Expresividad**: El lenguaje de las subastas debe ser capaz de expresar cualquier vector deseado de las ofertas, además las ofertas más importantes deben ser fácilmente expresadas. Para ello, la expresión de la oferta debe ser corta, y el participante debe encontrar fácil expresar su oferta en este idioma.
- **Simplicidad**: Debe ser simple tratar con las ofertas expresadas en el lenguaje de la subasta. Esta simplicidad debe existir tanto técnicamente (debe ser computacionalmente fácil manejar la asignación), como en el sentido humano (fácil de utilizar para los participantes, de manera que sean capaces de entender y trabajar con este lenguaje de subasta).

Un lenguaje de licitación bien seleccionado debe apuntar a lograr un buen equilibrio entre estos objetivos (Nisan, 2000). Este autor sostiene la creación de un lenguaje de subasta que esté en posición de expresar las preferencias y las ofertas entre los distintos conjuntos de objetos, para ello menciona los tipos más básicos de lenguaje de subastas de la siguiente forma:

- *Atomic bid*: En esta puja el postor solo puede realizar una oferta, especificando el conjunto de ítems seleccionado y el precio que desea pagar por este. Estas ofertas fueron llamadas ofertas de una sola mente.
- *OR bids*: Cada ofertante puede presentar un número arbitrario de ofertas, especificando el subconjunto ítems y el precio máximo que está dispuesto a pagar por ellos. Una oferta OR es equivalente a un conjunto de atomic bids separadas de postores diferentes.
- *XOR bids*: De la misma forma que las ofertas OR, cada ofertante puede presentar un número arbitrario de ofertas, especificando el subconjunto ítems y el precio máximo que está dispuesto a pagar por ellos. Aquí está implícito que el postor está dispuesto a obtener como mucho una de estas ofertas.

2.3.2. Problema de exposición

Muchos de los ítems comercializados en los mercados de interés actuales son complementarios. Como se ha explicado anteriormente, esto significa que el valor de un lote o “paquete” de ítems tiene más valor que la suma de estos ítems por separado, por lo tanto el valor de un ítem para un determinado postor dependerá de si éste puede comerciar a la vez con otros ítems.

Asociado al problema de expresión de la puja encontramos el problema de exposición. Este se produce cuando se ponen a la venta ítems de forma separada en subastas paralelas, por lo tanto se imposibilita la formación de pujas en forma de combinación. Por lo tanto en caso de que esto ocurra, habrá postores que no podrán obtener a la vez artículos que sean complementarios entre sí y que sean de su interés. (Rothkopf et al., 1998). Esta problemática supone una ineficiente ejecución de la subasta y lleva al postor a la formación de estrategias de pujas (Abrache et al., 2004). El problema de exposición es atenuado si en la realización de la subasta se permite que el participante pueda crear lotes que sean de su interés. Para ello es importante la creación de un lenguaje de puja, que permita expresar al postor su oferta de la forma más expresiva y sencilla posible.

2.3.3. Problema de los participantes

Con referencia a los participantes o postores de una subasta combinatoria, puede darse la posibilidad de que estos no estén dispuestos o no puedan compartir la información necesaria para el mecanismo de subasta y por ello, no conseguir optimizar el mercado. (Abrache et al., 2004). Esto puede deberse a tres causas principales:

- **Información confidencial**. Los participantes, por distintas razones, pueden ser reacios a la hora de aportar la información propia necesaria.
- **Desconocimiento del valor de los ítems**. En algunas ocasiones, es posible que los participantes no sean capaces de evaluar el valor de los ítems o del lote. Esto puede deberse a que este valor sea desconocido, de manera que el postor solo puede estimar su valor actual.
- **Complejidad de evaluación y comunicación de preferencias**. Especialmente cuando el número de ítems existentes en el mercado es elevado y los requisitos de los participantes complejos, puede llegar a ser una ardua tarea la evaluación de las preferencias del postor.

2.3.4. Reglas de cierre de la subasta

Es esencial a la hora de diseñar las subastas combinatorias, describir el proceso de finalización, es decir, de qué manera se concluirá la subasta y en qué momento se dejarán de recibir ofertas. Existen dos reglas de cierre generales para finalizar la subasta. En primer lugar, el cierre se podrá efectuar de manera secuencial, esto es, ir eliminando la posibilidad de pujar por los distintos ítems o paquetes de forma gradual. En segundo lugar, cerrar la subasta cuando ya no se reciban más ofertas por parte de los postores.

El autor McMillan, (1994) manifiesta que estas dos simples reglas son inadecuadas. Refiriéndose a la primera de ellas, defiende que la subasta no sería realmente simultánea, sino secuencial, con un orden aleatorio de licencias. En lo relacionado con la segunda regla de cierre, la cual deja todas las licencias abiertas hasta que la licitación cesa por completo, alega que esta da a los licitadores una completa flexibilidad para construir agregaciones, pero les da poco incentivo para pujar activamente ya que podrían contenerse esperando a que otros muestren sus manos.

Debido a esto, McMillan, (1994) manifiesta que para que una regla de cierre de subasta sea efectiva debe cumplir las siguientes condiciones:

1. La subasta debe terminar en un tiempo razonable.
2. Las pujas deben cerrarse de manera casi simultánea para ayudar al conjunto de ítems o paquetes.
3. Ser lo suficientemente simple y comprensible para todos los ofertantes.

2.3.5. WDP y Packing Problem

Como se ha comentado en anteriores apartados, la interrelación entre los artículos significa que, independientemente de la forma en la que se comercialicen los artículos en un mercado, el valor de ese artículo depende de si ese participante también ha tenido la posibilidad de comercializar o no algunos otros artículos. De esta manera, los artículos pueden considerarse complementarios o sustitutos entre sí (Santamaría, 2005). Un claro ejemplo de esto son las franjas horarias de los aeropuertos. Una franja horaria de despegue asociada al aeropuerto de origen de ese vuelo y la correspondiente franja horaria de aterrizaje en el aeropuerto de destino se complementan, de manera que para que el despegue se realice el necesario que se pueda cumplir el aterrizaje programado. Del mismo modo, es probable que dos pares de franjas horarias de despegue y aterrizaje que correspondan a los mismos aeropuertos de origen y destino dentro de ese mismo periodo de tiempo, sean sustitutos, ya que una compañía aérea puede prestar un servicio diario entre los dos aeropuertos (Abrache et al., 2004).

Esta manera en la que interrelación de los artículos repercute a las estrategias comerciales de un participante depende principalmente de cómo se negocian los artículos en el mercado. Debido a esto, un problema asociado a las subastas combinatorias consiste en la manera en la que se pueden combinar los ítems o artículos para formar los lotes sobre los que pujar. Este problema lo denominaremos "problema del empaquetado" o "*packing problem*". Surge la posibilidad de que el subastador sea el que restringe las combinaciones creando los lotes, de manera que los postores pujen sobre esos lotes establecidos y previamente comunicados, o también existe la opción de proporcionar a los postores la libertad de realizar sus propias combinaciones en función de sus intereses.

Las subastas combinatorias se consideran cada vez más como una alternativa eficaz a las subastas simultáneas de artículos separados. Pero por otro lado, estas subastas combinatorias a menudo requieren que el creador del mercado o la subasta, los participantes, o ambos, resuelvan complejos problemas de decisión y computación (Blumrosen & Nisan, 2007). El subastador debe decidir qué ofertas ganan y cuáles pierden sobre la base de ofertas que recibe, cumpliendo las restricciones impuestas y buscando maximizar sus ingresos por la venta de los artículos (Abrache et al., 2004). Este problema de determinación del ganador "*Winner Determination Problem*" (WDP), es conocido por ser un problema tipo *NP-Hard*, por lo que se considera difícil de resolver e incluso difícil de aproximar (Sandholm, 2002). En el siguiente capítulo hablaremos más en profundidad sobre el "*Winner Determination Problem*", mostraremos los distintos posibles escenarios en los que podemos enmarcar este problema y ofreceremos algunas aproximaciones para resolverlo de una manera computacionalmente más sencilla.

3. Winner Determination Problem

En una subasta, el vendedor desea vender los artículos que se subasten y obtener los pagos más altos posibles, mientras que cada ofertante espera adquirir los artículos al precio más bajo posible. Los mecanismos de subasta pueden diseñarse de modo que se obtengan resultados sociales deseables aunque cada agente actúe en base a su propio interés. En el caso de las subastas combinatorias, nos encontramos con un caso complejo ya que generalmente, los ofertantes tienen preferencias sobre los paquetes de ítems, es decir, la valoración de un postor por un lote de artículos no tiene por qué ser igual a la suma de las valoraciones de los artículos individuales del paquete (Sandholm, 2002). El problema de identificar qué conjuntos de ofertas aceptar ha sido usualmente apodado como el problema de determinación del ganador, *Winner Determination Problem* (WDP).

Su formulación precisa, dependerá de los objetivos del subastador. El problema de determinación del ganador (WDP) es equivalente al problema del empaquetado, conocido como un problema tipo NP-Hard (Blumrosen & Nisan, 2007), es decir, no existe ningún algoritmo que pueda resolverlo en tiempo polinómico. La literatura referida a este problema intenta realizar aproximaciones mediante la utilización de diversos métodos matemáticos además de realizar distintas simplificaciones del problema con el objetivo de alcanzar lo más rápido posible la solución óptima. Resolver este problema en subastas sin limitaciones adicionales y donde sólo se permiten ofertas simples puede ser sencillo, sin embargo este problema se complica mucho si no se limita la expresividad de los postores a la hora de presentar sus preferencias dentro de las ofertas realizadas, algo necesario para conseguir una alta eficiencia económica. Por otro lado, la formulación del WDP dependerá en gran modo de los objetivos marcados por el subastador en cada escenario. Numerosos autores como Bichler et al., (2019); de Andrade et al., (2015); Dobzinski et al., (2012); Kelly & Byde, (2006); Walsh et al., (2000) proponen diversas formulaciones para este problema de optimización.

3.1. Modelo matemático

Para realizar el modelo matemático más general utilizado para resolver el WDP, asumimos que el subastador determina a los ganadores, es decir, decide qué ofertas ganan y qué ofertas pierden, con el fin de maximizar los ingresos del vendedor. El modelo cambia en función de las condiciones de la subasta, esto es, habría que considerar otro modelo para el caso de las *reverse auctions* o subastas de adquisición, que veremos en siguientes capítulos. Esta forma de WDP es sencilla en el caso de las subastas no combinatorias ya que puede realizarse simplemente eligiendo el ofertante más alto por cada artículo por separado. Esto toma $O(a \cdot m)$ tiempo de cómputo, donde a es el número de ofertantes y m es el número de artículos a subastar. Sin embargo, desafortunadamente el problema de determinación del ganador en las subastas combinatoria es difícil ya que el tiempo de cómputo aumenta considerablemente. Como modelo matemático general podemos considerar el expuesto por Sandholm, (2002):

Sea M el conjunto de artículos a subastar y $m = |M|$. Entonces, cualquier agente i puede realizar una oferta, $bi(S) > 0$ para cualquier combinación $S \subseteq M$. Definimos la longitud de la oferta como el número de artículos de la oferta.

Claramente, si se han presentado varias ofertas para la misma combinación de artículos, para resolver el problema de determinación del ganador simplemente podemos mantener la oferta que tenga el precio más alto, y las otras ofertas pueden considerarse irrelevantes ya que no aportan beneficios para el vendedor. Por lo tanto el precio de oferta más alto para una combinación viene dado por la Ecuación 3:

$$b(S) = max_{i \in bidders} bi(S)$$

Ecuación 3. Precio más alto de ofertas. Fuente: Sandholm, (2002)

Si el agente i no ha presentado una oferta para la combinación S, decimos entones que $bi(S) = 0$. Por lo tanto, si ningún ofertante ha presentado una oferta para la combinación S, entonces decimos que $b(S) = 0$.

La determinación del ganador en una subasta combinatoria tiene como objetivo encontrar una solución que maximice los ingresos del subastador, ya que cada ganador paga los precios de sus ofertas ganadoras. Esto viene expuesto por la Ecuación 4.

$$max \sum_{S \in W} b(s)$$

Ecuación 4. Función objetivo WDP. Fuente: Sandholm, (2002)

Donde W es una partición. Una partición es un conjunto de subconjuntos de elementos. Es importante destacar que en una partición W algunos elementos pueden no estar incluidos en ninguno de los subconjuntos $S \in W$.

Utilizamos la notación de una partición por simplicidad. Dada una partición W, es trivial determinar qué ofertas están ganando y cuáles no. Cada combinación $S \in W$ se otorga al postor que realizó la oferta más alta para S. Entonces, un postor puede ganar más de una combinación. El problema de determinación del ganador también se puede formular como una programación entera, problema donde la variable decisión $xS = 1$ si el subconjunto S es asignado al ofertante i, y $xS = 0$ en caso contrario. Esto se define mediante la Ecuación 5:

$$max \sum_{S \epsilon \mathcal{S}} b(S)xS$$

$$s.t. \sum_{S|i \epsilon \mathcal{S}} xS \leq 1 \ \forall i \in M$$

$$x(S) = 0{,}1 \ \forall S \subset M$$

Ecuación 5. Formulación WDP. Fuente: Sandholm, (2002)

La restricción presentada limita la asignación de un artículo a un solo ofertante, impidiendo que se permita asignar un artículo a más de un ofertante ganador. Una restricción que está implícita dentro del modelo es que las ofertas de los participantes deben ser positivas.

3.2. Formulaciones del WDP

Para explicar en detalle el problema de determinación del ganador vamos a centrarnos además, en lo expuesto por de Andrade et al., (2015) en su trabajo "Biased random-key genetic algorithms for the winner determination problem in combinatorial auctions". Este autor defiende que el WDP puede ser modelado como un problema multidimensional de Mochila (MDKP). En su artículo aborda el WDP utilizando el modelo de subastas de primer precio, siendo subastas selladas de una sola ronda. Las ofertas cumplirán la restricción de no negatividad, además se considera que las ofertas son anónimas, de manera que no se utiliza la identidad del ofertante para resolver este problema.

Para describir este escenario definimos M como un subconjunto de bienes, de manera que $g1, g2 \in M$ donde $g1, g2$ son dos bienes. Es importante recalcar la definición de complementariedad y sustitubilidad explicada en apartados anteriores por la Ecuación 1 y la Ecuación 2:

Se dice que g1 y g2 son **complementarios** si y solo si:

$f(g1) + f(g2) \leq f(g1, g2)$ donde $(g1, g2)$ es un paquete de bienes.

Se dice que son **sustitutos** si y solo si:

$$f(g1) + f(g2) \geq f(g1, g2).$$

Sea $N = \{1,2, . . , n\}$ el conjunto de ofertantes y sea $M = \{1,2, \dots, m\}$ el conjunto de bienes.

Al tratarse de subastas complementarias en las que se puja por paquetes de bienes, podrá haber tantas ofertas como $n(2^m - 1)$ donde n corresponde con el número de ofertantes y m corresponde con el número de bienes. Debido a esto, el crecimiento de estas ofertas es de orden exponencial, por ello, en el proceso de determinación del ganador cuando M es grande, conlleva que su algoritmo se desarrolle en un tiempo no-polinomial.

Una colección de ofertas está representada por una tupla $B = (B1, \ldots, Bn)$ donde Bi es la oferta del postor i.

Nos limitamos a las subastas selladas de primer precio, los postores presentan una oferta por cada paquete deseado (no iterativas). Los ganadores pagan lo que obtuvieron en sus ofertas ganadoras $bi(S)$.

Problema del Conjunto Estable.

Un caso particular del problema de empaquetamiento o "*packing problem*" que versa sobre las distintas posibles formas de combinar los ítems o artículos para crear lotes sobre los que pujar, tratado en anteriores capítulos, es el Problema del Conjunto Estable. Este establece que un conjunto S de vértices de un grafo G es independiente o estable si no existen dos vértices de S que sean adyacentes en G (Faenza et al., 2014). Por lo tanto sea un grafo $G = (V, E)$ donde cada $S \in V$ representa una oferta. La arista $(S, S') \in E$ existe solo si $Bs \cap Bs' \neq 0$ donde $Bs \in Bi$, $Bs' \in Bj$, $i, j \in N$ y $i \neq j$. La arista existe solo si dos ofertas de postores diferentes piden un bien común.

El Problema del Conjunto Estable puede describirse como la Ecuación 6:

$$max \sum bs \cdot xs$$

$$s.t. \quad xs + xs' \leq 1 \; \forall (s, s') \in E$$

$$xs \; \in (0,1) \; \forall \; s \in E$$

Ecuación 6. WDP como Problema del Conjunto Estable. Fuente: de Andrade et al., (2015)

De manera que $bs = b(Bs)$, siendo bs el valor ofrecido por el paquete S. $xs = 1$ si la oferta s es ganadora y $xs = 0$ en caso contrario. La principal ventaja del modelo del conjunto estable es que el licitador en cuestión no tiene que presentar una oferta por cada subconjunto de bienes deseados.

Problema de la Mochila (MDKP).

$\mathrm{B} = \cup_{i=1}^{n} Bi$ sea el conjunto de todas las ofertas. En caso de que dos o más ofertas contengan los mismos bienes añadimos un bien "falso" a cada oferta, de manera que el nuevo bien identifique de manera única el paquete.

Sea $wjk = 1$ si el bien $j \in M$ se considera en la oferta $k \in B$. Sea $wjk = 0$ en otro caso. En el supuesto de subastas combinatorias con bienes únicos $Cj = 1$.

De manera que el WDP definido con un problema multidimensional de mochila MDKP puede ser determinado por la Ecuación 7:

$$max \sum_{k \in B} bk \cdot xk$$

$$s.t. \sum_{k \in B} wjk \cdot xk \leq Cj \quad \forall j \in M$$

$$xk \in (0,1) \forall k \in B$$

Ecuación 7. WDP como problema multidimensional de mochila. Fuente: de Andrade et al., (2015)

Los autores de Andrade, Toso, Resende & Miyazawa (2015) indican dos grandes diferencias entre ambos métodos en función de dos aspectos importantes a analizar:

- La rigidez de las formulaciones. Con respecto a la rigidez, el método MDKP genera formulaciones más estrictas que el modelo del Conjunto Estable y por lo tanto, resulta una mejor combinación lineal.
- El tamaño de la formulación. Como se ha explicado, para el modelo del Conjunto Estable el postor no tiene que presentar una oferta por cada subconjunto de bienes deseados. Por lo tanto el modelo MDKP puede tener un tamaño mayor.

Para explicar esto último, utilizamos un ejemplo real. Considérese el escenario en el que un postor realiza las siguientes ofertas:

$$B1 = (\{1,2\}, 10€);\ B2 = (\{2,3,4\}, 10€);\ B3 = (\{4,5\},10€)$$

Esto son 3 ofertas diferentes, en las que se especifica primero los ítems o bienes que el ofertante desea adquirir y a continuación, el precio que está dispuesto a pagar por ellos. Si utilizáramos el modelo del Conjunto Estable contaríamos con 3 variables sin limitación ya que las ofertas superpuestas pertenecen al mismo postor. Sin embargo, para el modelo MDKP el ofertante no puede generar ofertas superpuestas, por lo tanto este postor debería generar también las ofertas que se muestran a continuación:

$$B'12 = (\{1,2,3,4\}, 20€);\ B'13 = (\{1,2,4,5\}, 20€);$$

$$B'23 = (\{2,3,4,5\}, 20€); B'123 = (\{1,2,3,4,5\}, 30€)$$

Por esta razón los autores de Andrade et al., (2015) consideran que el modelo múltiple de mochila, MDKP es la mejor opción a la hora de realizar subastas combinatorias ya que el número de variables en este modelo es exponencial y además, cuenta con la ventaja de que las ofertas se realizan de una manera anónima, protegiendo la privacidad de los intereses de los postores.

3.3. Resolución del WDP: algoritmos genéticos de clave aleatoria

A la hora de intentar encontrar soluciones o aproximaciones a problemas tipo NP-Hard podemos recurrir tanto a enfoques exactos como de aproximación. Mientras que los primeros garantizan una solución óptima en el caso en el que esta exista, en problemas complejos podría hacerse prácticamente imposible encontrar esta solución ya que el tiempo de cómputo crece de forma exponencial con el tamaño del problema. Los segundos consisten en metodologías heurísticas o metaheurísticas que aunque no garantizan llegar al óptimo, pueden proporcionar muy buenas soluciones en tiempos razonables (Morillo et al., 2014).

Los algoritmos metaheurísticos son procedimientos que permiten tanto la exploración, para la búsqueda de un gran espacio de soluciones factibles, como la explotación, para centrar la búsqueda en una región del espacio determinada y factible donde puede encontrarse la solución óptima. Estos algoritmos son conocidos en la literatura para la solución de múltiples problemas complejos, como los combinatorios (Dréo et al., 2006). Algunos de estos algoritmos metaheurísticos más conocidos son el Recocido Simulado (Simulated Annealing), Búsqueda Tabú (*Tabu Search*), Algoritmos Genéticos (Genetic Algorithm), *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) o el Algoritmo de Colonia de Hormigas (ACO), entre otros.

Los algoritmo genéticos se basan en la teoría de evolución de Darwin en la cual los individuos mejor adaptados tienen mayor probabilidad de sobrevivir y pasar los resultados a su descendencia (Gen & Cheng, 1997). Cada individuo (solución) tiene asociado un valor de su aptitud, representado por su valor en la función objetivo. Las diferentes generaciones de individuos evolucionan a partir de la selección natural y mediante operadores genéticos tomando varias soluciones simultáneamente, logrando así un proceso de búsqueda en paralelo. Se parte para ello de una población inicial que suele crearse de manera aleatoria y a partir de ella, se seleccionan los padres que formarán parte de la siguiente generación. A continuación, se asignan parejas de padres de manera aleatoria y se procede a utilizar los operadores genéticos para hallar las nuevas soluciones (hijos). A partir de estos hijos se utiliza algún criterio de selección y se elabora la nueva generación. Este proceso se repite hasta cumplir un determinado criterio de parada (Morillo et al., 2014).

Para buscar soluciones al problema de determinación del ganador, de Andrade et al., (2015) implementaron un algoritmo genético de clave aleatoria sesgada que define como BRKA. Estos algoritmos son ventajosos cuando se usan para problemas donde el orden relativo de las tareas es importante (Rothlauf et al., 2002). Su elección de este algoritmo se basa en los éxitos con problemas de optimización combinatoria como el enrutamiento, la agrupación y el empaquetamiento (Gonçalves & Resende, 2011). Numerosos autores han implementado el algoritmo genético de clave aleatoria en sus trabajos, unos ejemplos son Norman & Bean, (1999) quienes utilizaron este algoritmo para resolver problemas complejos de programación o Rothlauf et al., (2002) quienes estudiaron varias representaciones de árboles en redes utilizando soluciones codificadas de claves aleatorias.

Existen dos características clave que distinguen los BRKGAs de los algoritmos genéticos tradicionales:

1. Una codificación cromosómica estandarizada. Utiliza un vector con t claves aleatorias, que son los alelos, uniformemente dibujadas en el intervalo [0,1] (Bean, 1994).
2. Un proceso evolutivo bien definido que utiliza un cruce uniformemente parametrizado y sustituye la aplicación del operador de la mutación en los cromosomas existentes con mutantes recién introducidos (definidos como vectores de longitud t de claves aleatorias, uniformemente dibujadas) para su exploración (Spears & de Jong, 1991).

Para poder implementar este algoritmo al problema de determinación del ganador es necesario construir una solución al problema a partir de un cromosoma del que se puede extraer el valor de la función objetivo o la aptitud para comparar distintos cromosomas. El par formado por un cromosoma y su aptitud se denomina *individuo*.

3.3.1. Decodificar el WDP

Para comenzar, de Andrade et al., (2015) desarrollaron 3 algoritmos para decodificar una solución. Definiendo el tamaño de cada cromosoma como t, se asocia cada oferta con un alelo, es decir, el valor de la j-ésima clave aleatoria está asociada con la j-ésima oferta. Para empezar se clasifican las ofertas según un orden particular, generando una permutación de ofertas.

Enfoque cromosómico *(chromosomal approach)*: Mediante este algoritmo, se ordenan las claves de manera decreciente de sus valores.

El siguiente algoritmo 1 resume un marco típico de BRKGA. Básicamente, generamos p cromosomas como individuos iniciales usando vectores con t claves aleatorias uniformemente dibujadas en el intervalo [0,1]. En cada iteración, un decodificador extrae la aptitud de los cromosomas. Para construir una nueva población copiamos los mejores individuos pe, llamados conjunto de élite y añadimos cromosomas $p\mu$ aleatorios que serán los mutantes. A continuación generamos la descendencia $p - pe - p\mu$ aplicando el operador de cruce.

El cruce se realiza entre un individuo aleatorio del conjunto de élite y un individuo del resto de la población, para ello se genera una descendencia por apareamiento, donde tomamos cada alelo del progenitor de élite con probabilidad ρe o del otro progenitor con probabilidad $1 - \rho e$.

Un esquema del funcionamiento de este algoritmo es el siguiente:

Algoritmo 1: esquema BRKGA

1. Generar la población inicial P;
2. mientras no se alcance un criterio de parada hacer:
    3. Decodificar cada cromosoma de P y extraer sus soluciones y aptitud;
    4. Clasificar la población P en orden decreciente de aptitud. Considere la parte superior pe como el grupo de élite E;
    5. Copia E a la siguiente generación Q, sin alterar;
    6. Añadir $p\mu$ nuevos cromosomas (mutantes) generados aleatoriamente a Q;
    7. Generar cromosomas $p - pe - p\mu$ (descendientes) por cruce parametrizado, seleccionando un padre al azar de E y otro de $P \backslash E$. Añádirlos a Q;
    8. $P \leftarrow Q$;
9. Devuelven el mejor individuo encontrado.

Enfoque codicioso *(greedy aproach)*: Para la aplicación de este algoritmo, primero se eligen las claves cuyos valores son mayores o iguales a un umbral τ previamente definido, a continuación estas claves se ordenan de manera decreciente del costo/beneficio de sus respectivas ofertas, es decir, $bj/|Bj|$. Es importante destacar que en este algoritmo, el orden relativo de las ofertas se fija para todos los cromosomas posibles y ciertamente, no se genera una permutación de las ofertas. En cambio, se genera una lista ordenada que contiene un subconjunto de las ofertas originales.

El enfoque de la Dualidad Sustituta (*surrogate Duality approach*): Similar al enfoque codicioso pero la relación costo/beneficio se calcula de forma diferente. Sea α el doble vector de solución de la relajación de la formulación MDKP cuando $x \in [0,1]^t$. Nótese que cada αi está ligada al bien i y representa el "precio de sombra" de i. El costo/beneficio de Bj es $bj/\sum_{i \in Bj} \alpha i$.

El primer autor que propuso el algoritmo del enfoque de la Dualidad Sustituta fue Pirkul, (1987). Como en el enfoque codicioso anterior, el vector dual puede ser computado sólo una vez, y las listas ordenadas pueden entonces ser generadas a partir de ella. La diferencia entre estos algoritmos es importante. En el enfoque codicioso es importante destacar que el algoritmo toma los paquetes más eficientes en primer lugar, por lo tanto, preferirá las ofertas que más valoran los bienes individualmente. Sin embargo en el enfoque de la dualidad sustituta, se trata de elegir los niveles de consumo agregado de los bienes, esto es que la eficiencia de la oferta es una medida de cuánto impacta la oferta en todo el sistema cuando esta es elegida ganadora, lo que significa que “si el coste marginal de los bienes para una oferta determinada es alto, entonces esta oferta considera bienes con alta demanda y puede no valer la pena elegirla ganadora si fuera un valor bajo para estos bienes” (de Andrade et al., 2015, p. 8).

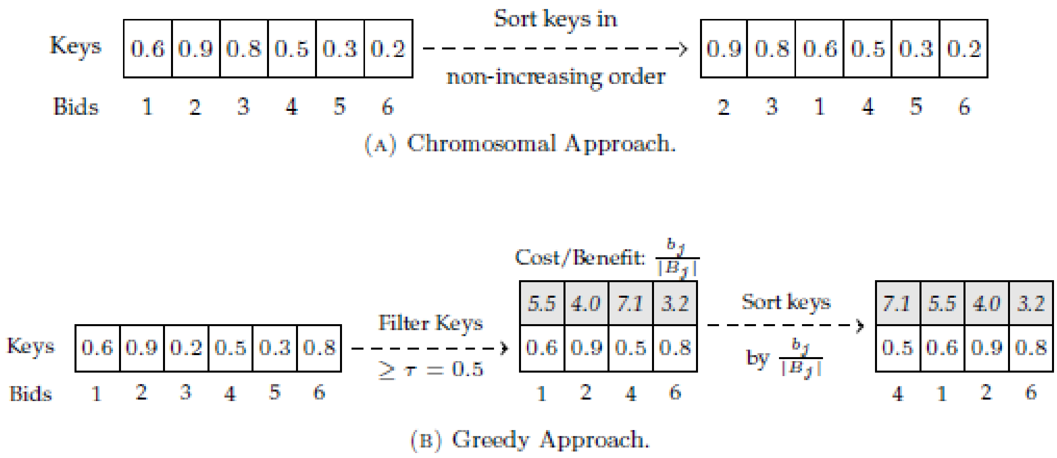


Figura 3. Ejemplo de clasificación de las claves mediante el enfoque cromosómico y codicioso. Fuente: de Andrade et al., (2015)

La Figura 3 muestra un ejemplo de aplicación de estos algoritmos. Comenzamos con el enfoque cromosómico (A). Podemos comprobar que simplemente se clasifican las claves en orden decreciente generando así una permutación de ofertas. Sin embargo, en el enfoque codicioso y de sustitución (B) primero se clasifican las ofertas por sus claves, eligiendo solo aquellas que cumplen $\tau \geq 0.5$ para este ejemplo y a continuación, se clasifican las ofertas restantes en orden decreciente de su costo/beneficio. Como se ha explicado, en el enfoque cromosómico el cromosoma se utiliza para generar una permutación de ofertas que se utilizará en el procesamiento posterior mientas que en el enfoque codicioso y de sustitución, el cromosoma se utiliza para generar un subconjunto de ofertas cuyo tamaño es controlado por un parámetro. Hay que destacar que si $\tau = 0$, entonces se consideran y eligen todas las ofertas y, como el orden relativo de las ofertas se fija a priori debido a la relación costo/beneficio, el decodificador siempre devuelve la misma solución. De esta manera, $\tau > 0$ puede ser utilizado como un umbral de separación o filtro.

3.3.2. Configuración experimental

Para la realización de la simulación de la subasta, de Andrade et al., (2015) buscaron tres objetivos principales:

1. Investigar la efectividad de los algoritmos de clave aleatoria sesgada (BRKGA) para encontrar soluciones óptimas en aquellos casos en los que los algoritmos exactos la encontraron.
2. Evaluar la calidad de la solución en aquellos casos en los que no se logró encontrar una solución óptima.
3. Investigar la eficacia de la inicialización del BRKGA con relajaciones de programación lineal (LP).

Instancias: Primero se generaron varias instancias usando un generador estándar de instancias para la subasta combinatoria llamado *Combinatorial Auction Test Suite* (CATS) (Leyton-Brown & Shoham, 2005).A continuación se crearon dos bloques de instancias, uno para las pequeñas instancias (40 a 400 ofertas y entre 10 y 100 bienes) y otro para las instancias más grandes (1000 a 4000 ofertas y 256 a 1500 bienes). Se fijó el número de bienes en un número menor que el de ofertas para buscar así conflictos, es decir, varias ofertas compitiendo por los mismos conjuntos de bienes. Además, se generaron instancias utilizando varios factores observados en los sistemas reales como el precio del paquete, la preferencia de cada postor y la equidad de las buenas distribuciones. Se seleccionaron tres clases de estas instancias y se llamaron LG. Cada una de estas clases contiene 100 instancias y todas ellas con más de 1000 ofertas. En la Figura 4 se muestran las ofertas y los bienes en cada instancia, la última línea expone el número de instancias en cada clase.

	CATS								LG		
Bids	40	80	200	400	1000	1024†	2000	4000	1000	1000	1500
Goods	10	10	50	50	256	256	512	1024	500	1000	1500
# of insts.	30	30	30	30	30	27	30	30	100	100	100

† Generated using `default_hard` flag.

Figura 4. Clasificación de las instancias y su tamaño. Fuente: de Andrade et al., (2015)

Algoritmos: Para la realización de las evaluaciones se consideraron algoritmos especializados tanto en el problema de determinación del ganador (WDP) como en el problema de mochila multidimensional (MDKP). Se probaron dos algoritmos exactos y dos algoritmos heurísticos, todos ellos de última generación. Estos algoritmos son los siguientes:

- **Boughaci Memetic Algorithm**: (BO_{MA})

Este algoritmo presentado por Boughaci et al., (2009) consiste en un algoritmo genético que utiliza una codificación de claves aleatorias. Mediante un procedimiento de búsqueda local realiza la explotación. Durante la fase de reproducción los individuos de la población son elegidos para cruzarse sólo si difieren los suficiente en una métrica de similitud, siendo esa similitud para nuestro caso el tamaño de la intersección del conjunto de ofertas ganadoras de los individuos.

Ese cruce se realiza eligiendo un individuo X de un conjunto llamado $C1$ formado por los mejores individuos, y otro individuo Y de otro conjunto $C2$, que contiene individuos con poca similitud con respecto a los individuos del conjunto $C1$. La búsqueda local se realiza de manera que, con probabilidad wp se elige la mejor oferta (la que maximiza los ingresos del subastador) o, con probabilidad $1 - wp$ se elige una oferta al azar. Esta oferta es añadida a la solución y todas las otras ofertas conflictivas son eliminadas. Ese proceso se repite para un número determinado de iteraciones y devuelve el mejor individuo encontrado. Este algoritmo presenta resultados competitivos.

- Raidl and Gottlieb Weight-Biased Genetic Algorithm: (RG_{RK})

Algoritmo propuesto por Raidl & Gottlieb, (2005) que consiste en un algoritmo genético para los problemas de mochila MDKP en el que una solución se representa mediante un vector real sesgado en el peso. Para generar los vectores sesgados, los autores utilizaron diferentes distribuciones de probabilidad y demostraron que este algoritmo mejora notablemente si se sigue una distribución logarítmica.

El vector ponderado w se genera de tal manera que $wj = (1 + \gamma)^{N(0,1)}$ donde N denota un número aleatorio distribuido normalmente con media 0 y desviación estándar 1 y $\gamma > 0$ es un parámetro que controla la intensidad del sesgo. El artículo j está sesgado por un nuevo precio $p'j = pjwj$. Para realizar la descendencia se seleccionan dos progenitores (padres) mediante un torneo binario y se realizan cruces en sus vectores con una probabilidad de mutación de $1/n$. Si la nueva solución candidata difiere de todas las soluciones de la población inicial, se reemplaza a la peor de ellas sólo si el nuevo candidato tiene mejor calidad que la peor solución. Los autores de Andrade et al., (2015) afirman que este algoritmo es, hasta la fecha, una de las mejores heurísticas para el MDKP.

- Mansini and Speranza Exact Algorithm: (CORAL)

Los autores Mansini & Speranza, (2012) presentaron un algoritmo exacto para el MDKP usando la idea de elementos centrales. Introducen un enfoque exacto basado en la solución óptima de subproblemas limitados a un conjunto de variables. Cada subproblema se enfrenta a un proceso de fijación de variables y continua hasta que el número de variables disminuye por debajo de un límite determinado (problema central restringido) y se resuelve con un procedimiento de bifurcación.

- Standard Mixed Integer Programming Solver: (CPLEX)

Para realizar los experimentos, los autores de Andrade et al., (2015) utilizaron también el Optimizador CPLEX de IBM como un solucionador de programación de enteros mixtos estándar. CPLEX Optimizer proporciona solucionadores de programación matemática de alto rendimiento flexibles para problemas de programación lineal, programación de enteros combinada, programación cuadrática y programación limitada cuadráticamente. Estos solucionadores incluyen un algoritmo en paralelo distribuido para la programación de enteros combinada que permite aprovechar múltiples sistemas para resolver problemas difíciles.

Además, para crear los cromosomas iniciales del algoritmo, se configuró CPLEX como se describe a continuación. Los algoritmos fueron descritos por de Andrade et al., (2015) como:

CA_{RA}: El algoritmo propuesto, utilizando el enfoque cromosómico y la inicialización aleatoria.

CA_{LP}: El algoritmo propuesto usando el enfoque cromosómico pero inicializado con las variables óptimas de las relajaciones del LP.

GA_{RA}: El algoritmo propuesto utilizando el enfoque codicioso y la inicialización aleatoria.

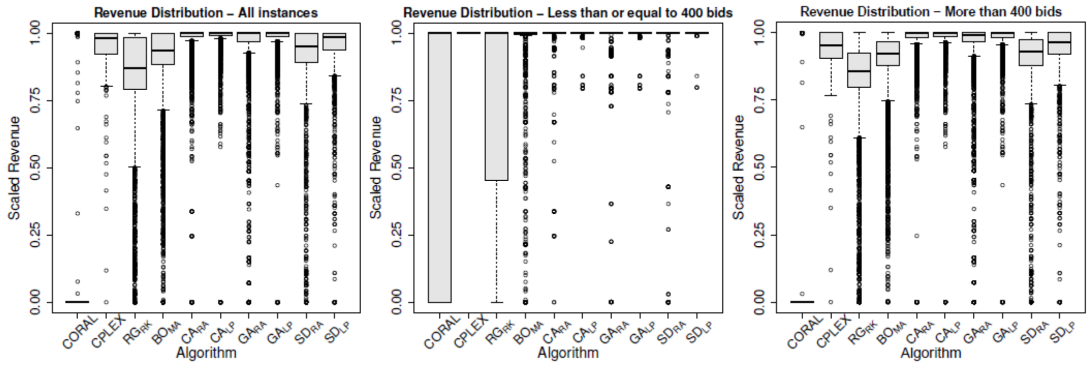
GA_{LP}: El algoritmo propuesto usando el enfoque codicioso e inicializado con las variables óptimas de las relajaciones del LP.

SD_{RA}: El algoritmo propuesto usando el enfoque de dualidad sustitutiva e inicialización aleatoria.

SD_{LP}: El algoritmo propuesto utilizando el enfoque de dualidad sustitutiva e inicialización con las variables óptimas de las relajaciones del LP.

3.3.3. Resultados experimentales

En su trabajo, de Andrade et al., (2015) mostraron los resultados experimentales obtenidos mediante una simulación de subastas en la que se realizaron numerosas ofertas con los algoritmos expuestos anteriormente. Para ello, se realizó solo una ronda por instancia para los algoritmos CPLEX y CORAL debido a que ambos son algoritmos exactos y deterministas. Sin embargo, para el resto de los algoritmos, se realizaron 30 rondas independientes por cada instancia. A continuación, la Figura 5 muestra los resultados obtenidos mediante estos algoritmos.



(A) (B) (C)

Figura 5. Dispersión de los ingresos por cada algoritmo. Fuente: de Andrade et al., (2015)

La Figura 5 presentada refleja la distribución de los ingresos producidos por cada algoritmo. Podemos ver que se tratan de *box-plots,* donde se muestra la ubicación del primer y tercer cuartil y la mediana de los ingresos. Los "bigotes" se extienden hasta el ingreso más extremo no más de 1,5 veces la longitud de la caja. Además, los puntos son los valores atípicos.

Como podemos ver, el gráfico (A) muestra la distribución de ingresos para todas las instancias. En este caso, el algoritmo CORAL fue el que presentó los resultados más pobres en comparación con los demás algoritmos. Sin embargo, podemos comprobar que CORAL es capaz de obtener mejores resultados en pequeñas instancias (B) mientras que para los casos de grandes instancias rara vez CORAL encuentra una buena solución (como muestran sus valores atípicos). Como hemos explicado, en el problema MDKP cada restricción j se limita a ser como máximo igual a Cj, donde generalmente $Cj \geq 1$. Para el problema de determinación del ganador de un solo bien, todas las restricciones son de la forma $Cj = 1$ por lo que no permite que CORAL se aproveche de ellos, limitando su característica principal. Solo en pequeños casos CORAL presenta buenos resultados, aunque peores que otras experimentaciones. Los autores de Andrade et al., (2015) afirman que a pesar de ser algoritmos exactos, CPLEX resuelve con éxito este tipo de problemas.

En cuanto a los algoritmos heurísticos, estos presentan buenos resultados. Entre ellos el RGRK experimentó los peores resultados seguido de BOMA. Además, los algoritmos generados por los autores experimentaron mejores resultados que los otros algoritmos. El algoritmo CPLEX generó resultados sólidos que fueron, generalmente, mejores que los resultados presentados por RGRK y BOMA. Con respecto a los algoritmos propuestos en este documento, el CPLEX fue peor excepto cuando se compara con la SDRA.

Es importante destacar que el rendimiento del algoritmo RGRK fue peor que el de todos los algoritmos heurísticos, algo que sorprende ya que este algoritmo ha sido valorado como una de las mejores heurísticas para el problema de mochila MDKP (Pfeiffer & Rothlauf, 2007).

Por lo tanto, de Andrade et al., (2015) concluye que los algoritmos BRKGAs pueden llegar a obtener soluciones de alta calidad, además de contar con su capacidad de obtener buenas soluciones en un plazo de tiempo corto, lo que permite su aplicación en subastas combinatorias con numerosos bienes y ofertas.

4. Subastas combinatorias para la formación de cadenas de suministro

En este capítulo vamos a crear un marco de aplicación de las subastas combinatorias dentro del ámbito de la ingeniería. Para ello, vamos a comprobar el uso factible de las subastas combinatorias y la resolución del problema de determinación del ganador (WDP) para la formación de cadenas de suministro. Para realizar este estudio, nos guiaremos a partir del trabajo "*Combinatorial Auctions for Supply Chain Formation*" de los autores Walsh et al., (2000). Estos autores afirman la existencia de diversos problemas a la hora de coordinar los protocolos de negociación para formar la cadena de suministro.

Esta complejidad se debe a que los agentes deben negociar de manera simultánea las relaciones de producción en los distintos niveles de la cadena de suministro de manera que existe una fuerte interdependencia entre los insumos y los productos de cada nivel. Walsh et al., (2000) defienden que la utilización de las subastas combinatorias de una sola ronda da lugar a asignaciones óptimas con ofertas veraces y proponen una política de oferta estratégica. Así pues, los agentes interesados en estas ofertas tienen el incentivo para pujar de manera estratégica ya que buscan aumentar sus ingresos por encima de sus gastos.

En su trabajo, Walsh et al., (2000) analizan la eficiencia y el superávit del productor y comparan el resultado con el de un protocolo de subasta distribuido y progresivo con pujas no estratégicas. Estos productores pueden llegar a ganar significativamente más mediante pujas estratégicas. "Sin embargo, cuando el excedente disponible es pequeño en relación con los valores de los consumidores, el comportamiento estratégico de los productores puede impedir que la cadena de suministro se forme en absoluto, resultando en cero ganancias para todos los agentes."(Walsh et al., 2000, p. 260).

Por lo que se refiere a una cadena de suministro, esta se encuentra formada por todos los procesos que están comprometidos de manera directa o indirecta en la labor de satisfacer las necesidades de suministro. Dentro de esta cadena de suministro existen diferentes niveles, como son los proveedores. Los almacenes de materia prima, la línea de producción, almacenes de productos terminados y, tras los canales de distribución, el cliente final (Ballou, 2004). Las complejas negociaciones suelen implicar relaciones de intercambio entre estos niveles de la cadena de suministro. Para responder a las condiciones cambiantes del mercado, las empresas deben ser capaces de formar y disolver de la manera más dinámica posible las interacciones comerciales, lo que requiere de un apoyo automatizado para la formación de la cadena de suministro.

Es importante destacar que este problema de formación de la cadena de suministro puede ser especialmente difícil cuando las empresas deben competir por los escasos recursos en los niveles existentes de la cadena de suministro. Además, las tecnologías de producción suelen contener fuertes complementariedades, es decir, los valores de obtención de diversos inputs y de producción de los outputs son mutuamente dependientes. En la literatura encontramos múltiples investigadores que han abordado el tema de las complementariedades mediante diversos mecanismos que median la negociación de varios bienes independientes a través una sola entidad (de Vries et al., 2007; Rassenti et al., 2017).

Debido a estas complementariedades, una empresa podría ser inviable si es incapaz de adquirir todos los inputs necesarios para cubrir sus necesidades de producción, o por otro lado, si produce bienes que no puede vender. Estos mismos productores pueden perder importantes beneficios al adquirir inputs pero no vender productos (Walsh et al., 2000). Una posible solución factible es utilizar las subastas combinatorias en la que los agentes realizan ofertas de todo o nada por paquetes de bienes, ya que las subastas combinatorias proporcionan una asignación de paquetes de alta calidad, de manera que asegura que los agentes no reciban paquetes indeseables. Aunque este tipo de problemas son denominados *NP-Hard*, lo que significa que se cree que no existe un algoritmo de tiempo polinómico para este tipo de problemas, (aunque esto es todavía una cuestión muy abierta en la teoría de la complejidad) y pude ser computacionalmente intratable (Rothkopf et al., 1998), los autores Andersson et al., (2000) han demostrado que un paquete de programación mixta entera y lineal puede resolver de manera rápida y eficaz muchos grandes problemas de asignación.

4.1. Redes de dependencia

Como se ha explicado anteriormente, la gestión de la cadena de suministro conforma toda la cadena de creación de valor, esto es, desde el aprovisionamiento de las materias primas hasta el transporte pasando por la fabricación y el ensamblaje. Esta cadena de suministro está formada por distintos agentes que, ayudados por su conocimiento y las comunicaciones entre ellos, pueden transformar los bienes básicos en bienes compuestos de valor. Nos referimos como "bien" a cualquier recurso o tarea discreta que forme parte de la cadena de suministro. Es importante destacar que estos bienes son rivales, es decir, no puede ser compartidos entre los distintos agentes.

Como desarrollan en su trabajo los autores Walsh et al., (2000) , para explicar el problema utilizamos una red de dependencia de tareas (V, E) que representa mediante un grafo, la dependencia entre agente y bienes.

Sea $V = G \cup A$, donde G es el conjunto de bienes y $A = C \cup \pi$ es el conjunto de agentes. Estos agentes están compuestos por consumidores C y productores π. Las aristas E del grafo, conectan a los agentes con los bienes que pueden usar o proporcionar, de manera que existe una arista $< g, a >$ desde $g \in G$ hasta $a \in A$ en el caso en el que el agente a puede hacer uso de una unidad de g y una arista $< a, g >$ cuando el agente a puede proporcionar una unidad de g, de manera que cada arista representa cada unidad de un bien. Estas mercancías solo pueden comercializarse en cantidades discretas.

Para continuar, un **consumidor** c que desee adquirir una unidad de un bien concreto paga el valor v_c por hacerlo, mientras que un **productor** π que puede producir una sola unidad de un output, está condicionado a adquirir un determinado número de bienes de entrada (inputs) para producir este output. Por ello, el productor π debe adquirir cada uno de los inputs y además, incurre en costes k_π para proporcionar su producción. Esto se ve explicado en la Figura 6 que muestra una red ejemplo.

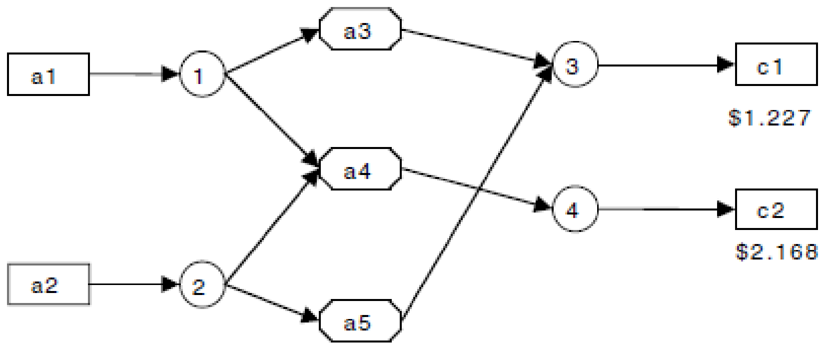


Figura 6. Red de dependencia de tareas. Fuente: Walsh et al., (2000)

En esta red de dependencia de la Figura 6, los círculos representan los bienes g utilizados mientras que los rectángulos y octógonos representan los distintos agentes a. Las flechas representan el uso o provisión de los bienes. La cantidad en dólares indica los valores del consumo final en los consumidores.

<u>DEFINICIÓN 1</u>: VALOR DE UNA ASIGNACIÓN.

El valor de la asignación (V', E') es mostrado en la Ecuación 8:

$$el\ valor\big((V', E')\big) \equiv \sum_{c \in C} v_c(E') - \sum_{\pi \in \Pi} k_\pi\,(E')$$

Ecuación 8. Valor de una asignación. Fuente: Walsh et al., (2000)

DEFINICIÓN 2: ASIGNACIONES EFICIENTES.

El conjunto de asignaciones eficientes contiene todas las asignaciones posibles (V^*, E^*) tal que el valor es factible según la Ecuación 9:

$$\left((V^*, E^*)\right) = max_{(V',E')}\{valor\left((V',E')\right)|(V',E')\ es\ factible\}$$

Ecuación 9. Asignaciones eficientes. Fuente: Walsh et al., (2000)

Los autores Walsh et al., (2000) presentan las definiciones anteriores con respecto a la asignaciones. El consumidor c obtiene el valor v_c (E') por la asignación E', el cual es v_c si este obtiene su bien deseado, si no, será 0. El productor π incurre en el coste k_π (E') el cual es k_π en caso de proporciona sus outputs, si no, es 0. Además, afirman que una solución es una asignación factible si uno o más consumidores adquieren un bien deseado. Si $c \in C \cap V'$ para la solución (V', E') entonces (V', E') es una solución para el consumidor c. Una asignación eficiente para la red de la Figura 6 se muestra a continuación en la Figura 7, donde la solución está formada por los agentes y los bienes sombreados y las aristas sólidas están en la solución.

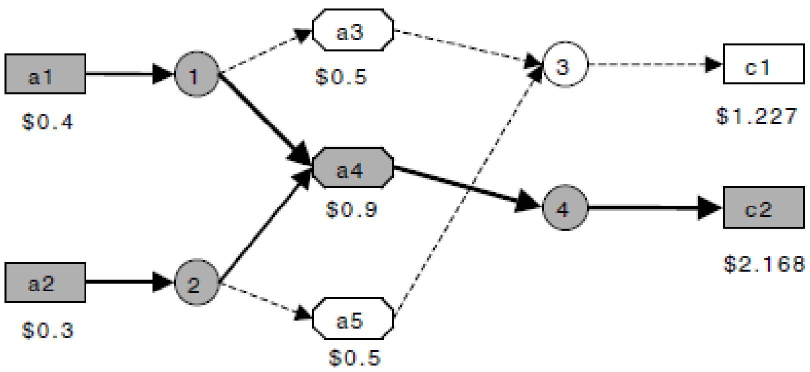


Figura 7. Solución eficiente para la red. Fuente: Walsh et al., (2000)

En su trabajo, Walsh et al., (2000) manifiestan que un equilibrio de precios competitivo se trata de una asignación factible en la que cada uno de los agentes está optimizando con respecto a los precios de modo que, estos agentes optimizan competitivamente (no estratégicamente) tomando los precios como se indica, ignorando cualquier efecto que puedan tener sus propias acciones sobre estos precios. En otras palabras, en una asignación de equilibrio de precios, los consumidores participantes adquieren bienes a precios no mayores que sus valores y los productores obtienen precios no negativos. Este equilibrio de precios es deseable debido a su estabilidad y siempre eficiente para el comportamiento de las economías. Se ha identificado un protocolo de mercado que obtiene buenas soluciones generalmente llamado SAMP-SB. Consiste en un protocolo de precio ascendente simultáneo con licitación simple en el que los agentes negocian simultáneamente en subastas ascendentes separadas (no combinatorias). Estos agentes utilizan políticas de licitación no estratégicas y se basan únicamente en los informes de precio de las subastas que son de su propio interés. Bajo estos supuestos se garantiza que el SAMP-SB realiza asignaciones factibles, sin embargo puede ocurrir que las asignaciones no lleguen al óptimo en algunos casos. Walsh et al., (2000) clasifican esta suboptimidad en tres tipos diferentes:

– Tipo 1: No encontrar una solución cuando sí existe una solución eficiente. Este tipo de suboptimismo puede ocurrir cuando no hay suficiente holgura entre los valores del consumidor y los costos del productor.
– Tipo 2: Formar una solución con un valor inferior a una solución eficiente.
– Tipo 3: Existen productores inactivos adquiriendo inputs.

Para ilustrar este punto vemos la Figura 8 que muestra los resultados de una ejecución del SAMP-SB para la red de la Figura 7, produciendo una asignación subóptima.

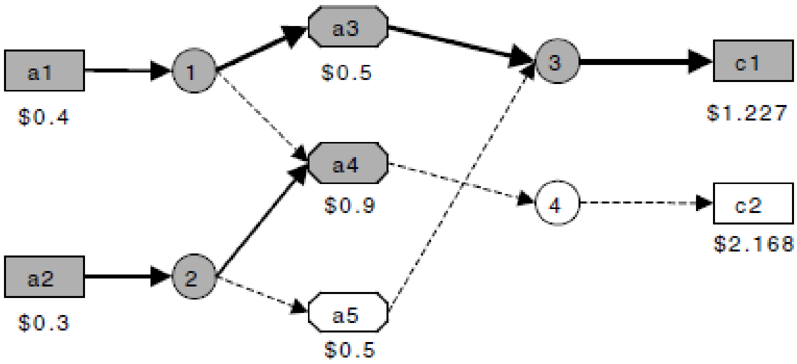


Figura 8. Una asignación subóptima generada por SAMP-SB. Fuente: Walsh et al., (2000)

La asignación de la Figura 8 muestra suboptimismo de tipo 2 ya que incluye al consumidor $c1$ mientras que la asignación eficiente se formaría con el consumidor $c2$. Además en esta red podemos ver que existe también suboptimismo de tipo 3 ya que el productor $a4$ es inactivo y sin embargo, está adquiriendo inputs por lo que no contribuye a obtener ningún valor en la instancia. Para eliminar este suboptimismo los autores (Walsh et al., 2000) permiten el descompromiso mediante el protocolo SAMP-SB-D. Mediante este protocolo los agentes siguen el SAMP-SB pero se eliminan los productores inactivos, es decir, se liberan de todas las obligaciones de intercambio determinadas por las subastas.

Por ejemplo, para la red de la Figura 8 los agente $a2$ y $a4$ se descomprometen para así evitar que empeore la asignación. Sin embargo, esto se logra haciendo que las asignaciones de la subasta no sean vinculantes, algo que no es deseable para los productores ya que pierden sus ventas de producción por las liberaciones. Además, un problema que presenta el SAMP-SB-D es cómo hacer cumplir el requisito de que los productores inactivos sean los únicos agentes que se liberen. En la siguiente sección se describe un protocolo de subasta combinatoria que mejora alguno de los problemas que se producen en los protocolos de negociaciones separadas.

4.2. Protocolo combinatorio

Para evitar el suboptimismo de tipo 3 y asegurar que los productores inactivos no adquieran inputs como puede ocurrir en SAMP-SB, los autores (Walsh et al., 2000) en su trabajo describen un protocolo combinatorio particular para combatir con los problemas del SAMP-SB y de los enfoques de bienes de precio separado en general, que consiste en un mecanismo de subasta en la que los agentes presentan ofertas de todo o nada para los paquetes de bienes. En las subastas combinatorias se reciben todas las ofertas y se hacen cumplir las reglas de licitación mientras que se comunica la información a los agentes y en función de las ofertas recibidas por los postores, se realizan las asignaciones. Esas ofertas realizadas por los postores se formulan dependiendo de las políticas de licitación en función de sus preferencias y de la información recibida durante la subasta (Blumrosen & Nisan, 2007).

Es importante recalcar la diferencia entre las políticas de licitación y el mecanismo de subasta. Mientras que las políticas de licitación están determinadas por los agentes individuales y sus preferencias, el mecanismo de subasta está definido por los diseñadores del sistema.

4.2.1. Mecanismo de subasta combinatoria

Se muestra un mecanismo de subasta combinatoria en la que los agentes presentan sus ofertas informando de los costos y los valores y a continuación, la subasta calcula una asignación que maximice el valor presentado e informa a los agentes de los resultados, de manera que el agente paga el precio que haya pujado por la asignación que recibe. Walsh et al., (2000) introducen el siguiente protocolo de presentación de las ofertas: el agente a realiza una oferta b_a de la forma $\{r_a, \{g_1, q_a^1\}, \dots, \{g_n, q_a^n\}\}$ donde q_a^1 es la cantidad entera que el agente a demanda y es positiva en el caso de las demandas de entrada y negativa para las demandas de salida, g_i corresponde al bien y r_a es la cantidad declarada a pagar (o ser pagado, en el caso de números negativos) por el conjunto de bienes demandados. Por ejemplo, un productor que requiere una unidad de cada uno de los bienes g_1 y g_2 para producir el producto g_3 y para ello solicita el pago de 5, haría la oferta $\{-5, \{g_1, 1\}, \{g_2, 1\}, \{g_3, -1\}\}$.

Dada una serie de ofertas B se calcula el WDP y se realiza la asignación ganadora de la subasta a partir de la Ecuación 10:

$$\varphi(B) = max \sum_{b_{a \in B}} r_a x_a$$

$$s.t. \sum_{b_{a \in B}} q_a^i x_a = 0, \;\; i = 1 \dots n$$

Ecuación 10. Formulación WDP. Fuente: Walsh et al., (2000)

Donde $x_a = 1$ si el agente a gana su oferta y $x_a = 0$ en el caso contrario. De esta manera se encuentra la asignación que optimiza el valor según lo reportado por las ofertas. Además hay que tener en cuenta que asumimos que los productores tienen un único paquete de inputs posible, si esto no fuera así, necesitaríamos una ecuación más compleja en el caso en el que los productores tuvieran posibilidades alternativas de producción.

4.2.2. Políticas de licitación combinatoria

Como se ha explicado en puntos anteriores, si los agentes se comportan de forma no estratégica ofreciendo sus verdaderos valores en las ofertas que realicen en la subasta combinatoria, el resultado será siempre una asignación eficiente. Los autores Walsh et al., (2000) estudian el rendimiento de las políticas de licitación estratégica y también proponen que, debido a que las subastas combinatorias eliminan el riesgo de que los agentes adquieran paquetes de bienes no rentables, estos agentes pueden estar dispuestos a realizar ofertas más agresivas y estratégicas que en los casos en los que se enfrentan a negociaciones separadas (no combinatorias). Para ello, asumimos el conocimiento común de la estructura de la red y los valores de los consumidores mientras que los costos de los productores se extraen de una distribución de probabilidad uniforme [0,1].

Un modelo de estrategia común en la literatura de subastas asume que los agentes juegan a estrategias de equilibrio Bayes-Nash basadas en el conocimiento común de los costes y las distribuciones de valor. Se encuentra el equilibrio de Bayes-Nash cuando dos empresas compiten en cantidades producidas, de manera que una de las empresas tiene toda la información sobre sus costos y los de su competidora, mientras que la otra empresa solo tiene conocimiento sobre sus propios costos y asigna probabilidades a los posibles costos de su competidora (Gomes & Sweeney, 2014). En teoría de juegos, un juego bayesiano es aquel en el cual la información sobre las características de los otros jugadores es incompleta (Ricart, 1988). Según los autores (McAfee & McMillan, 1987) en este tipo de subasta, si N compradores tienen valoraciones para un único bien común con una distribución de probabilidad [0,1], la expresión de una política de licitación de equilibrio Bayes-Nash es la mostrada en la Ecuación 11:

$$r_\pi = -k_\pi - \frac{1}{N}(1 - k_\pi)$$

Ecuación 11. Política de licitación de equilibrio Bayes-Nash. Fuente: Walsh et al., (2000)

4.3. Comparación de protocolos

Para contar con una idea más visual de los distintos protocolos expuestos en este trabajo los dividimos en cuatro clases. En las columnas se distinguen los mecanismos por su alcance, es decir, si las cuestiones se resuelven mediante una subasta combinatoria global o mediante una colección distribuida de bienes individuales. A su vez, en las filas se distinguen las políticas de licitación en función de si son o no estratégicas, en otras palabras, si se tiene en cuenta el efecto propio del agente en la asignación. Esto se ve reflejado en la Tabla 1 mostrada a continuación.

	Combinatorio	**Distribuido**
No estratégico	Una ronda combinatoria / Valores reales	SAMP-SB
Estratégico	Una ronda combinatoria / Ecuación 11	?

Tabla 1. Clasificación de protocolos (Elaborado a partir de Walsh et al., (2000))

De nuevo afirmamos que, prácticamente por definición, las licitaciones no estratégicas en los mecanismos combinatorios generan asignaciones perfectamente eficientes. Esta eficiencia, los autores Walsh et al., (2000) en su diferentes experimentos, la valoran como la fracción del valor eficiente obtenido del protocolo estratégico combinatorio.

En cuanto al protocolo distribuido estudiado es SAMP-SB, el cual difiere tanto en alcance como en estrategia con el protocolo combinatorio por lo que la relación cualitativa existente entre estos dos protocolos es ambigua y difícil de evaluar. "Lo que se esperaría es que debido al gran alcance del mecanismo combinatorio, aumentara la eficiencia, mientras que de manera contraria, el comportamiento estratégico podría impedirla." (Walsh et al., 2000, p. 264). La comparación entre estos protocolos es altamente complicada ya que el diseñador del mecanismo de subasta debe tener en cuenta distintos factores que van más allá de la eficiencia de la asignación, como son los costos de computación del mecanismo y la autoridad sobre el alcance de la negociación. Por lo tanto, resulta prácticamente imposible imponer cualquiera de estos protocolos debido a que los comportamientos de los agentes van más allá del alcance del diseñador del mecanismo.

Como se puede ver en la Tabla 1, existe un hueco vacío para el caso de un protocolo distribuido y estratégico. La mejor explicación para este hueco vacío es que llegar a un comportamiento estratégico justificable para el caso de progresión distribuida es bastante difícil, lo que se debe tanto a la complejidad dinámica como a la distributividad y por lo tanto se aplicaría también a las subastas combinatorias iterativas (Parkes & Ungar, 2000).

4.4. Experimentos del protocolo

Para evaluar la eficiencia de los protocolos y comprobar su funcionamiento en distintos escenarios, los autores Walsh et al., (2000) proponen redes de dependencia de tareas variadas para comparar la calidad de las asignaciones con el protocolo SAMP-SB. Algunos de estos ejemplos de redes son los mostrados en la Figura 9, Figura 10 y Figura 11:

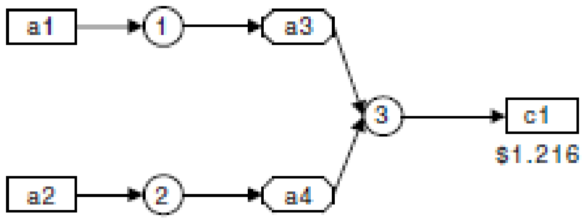


Figura 9. Red simple. Fuente: Walsh et al., (2000)

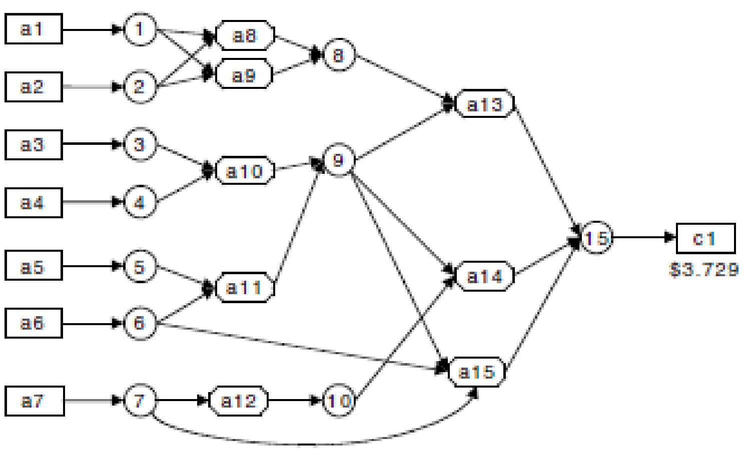


Figura 10. Red desequilibrada. Fuente: Walsh et al., (2000)

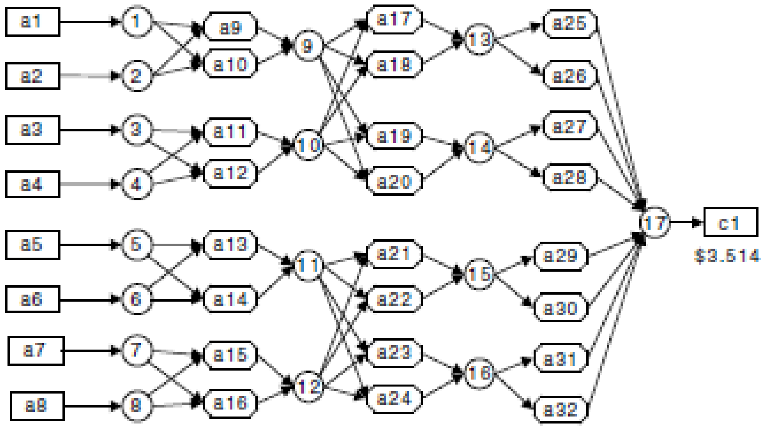


Figura 11. Red grande. Fuente: Walsh et al., (2000)

Para cada instancia se eligieron al azar los costos de los productores de manera uniforme mediante una probabilidad [0,1] y las ofertas de los productores se generaron mediante muestras de Monte Carlo sobre los costos de otros productores en su instancia. En concreto, la simulación de Monte-Carlo consiste en un método estadístico utilizado para resolver problemas matemáticos complejos a través de la generación de variables aleatorias (Weinberg, 1991). La simulación de Monte-Carlo se utilizó para calcular aproximaciones a la Ecuación 11. También se realizaron los protocolos SAMP-SB y SAMP-SB-D para cada instancia Después de esto, para calcular la asignación de la subasta, es decir, el problema de determinación del ganador (WDP) los autores (Walsh et al., 2000) utilizaron el paquete comercial de programación lineal mixta-integral CPLEX, ya visto en el capítulo anterior *Winner Determination Problem*. Para cada instancia y para cada protocolo se mide la eficiencia como la fracción del valor óptimo obtenido como excedente de los productores

Los resultados presentados se ven en la Figura 12, Figura 13 y Figura 14. Estas presentan la eficacia lograda por el protocolo combinatorio sobre las redes del ejemplo. Cada instancia está trazada como un punto en el excedente disponible medido en el eje de abscisas mientras que la eficiencia de la subasta combinatoria se muestra en el eje de ordenadas. Las regiones sombreadas que se encuentran por encima de los gráficos muestran abstracciones de los resultados divididos en clases de eficiencia en función del excedente disponible y nos indican si los resultados se encuentran por debajo, por encima o en el óptimo.

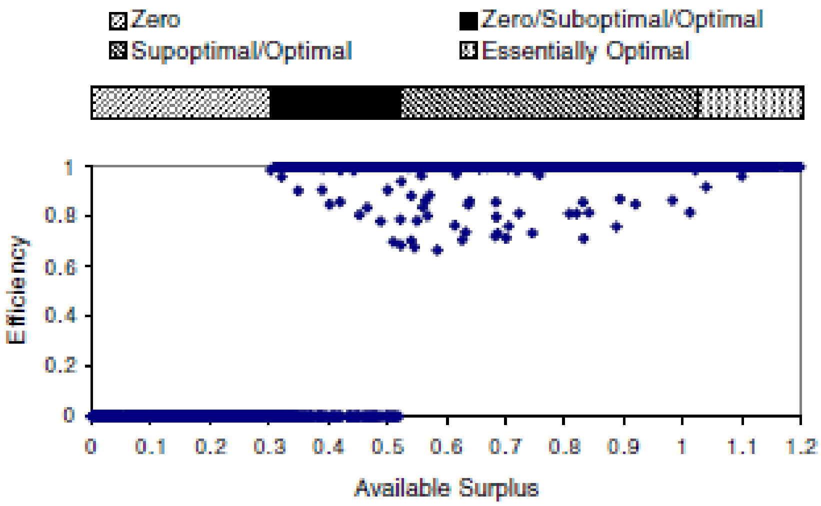


Figura 12. Resultados del protocolo combinatorio para la red simple. Fuente: Walsh et al., (2000)

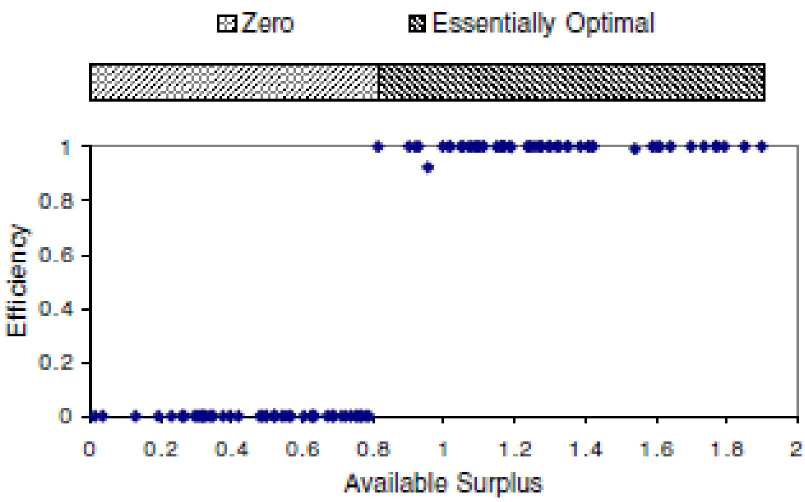


Figura 13. Resultados del protocolo combinatoria en la red desequilibrada. Fuente: Walsh et al., (2000)

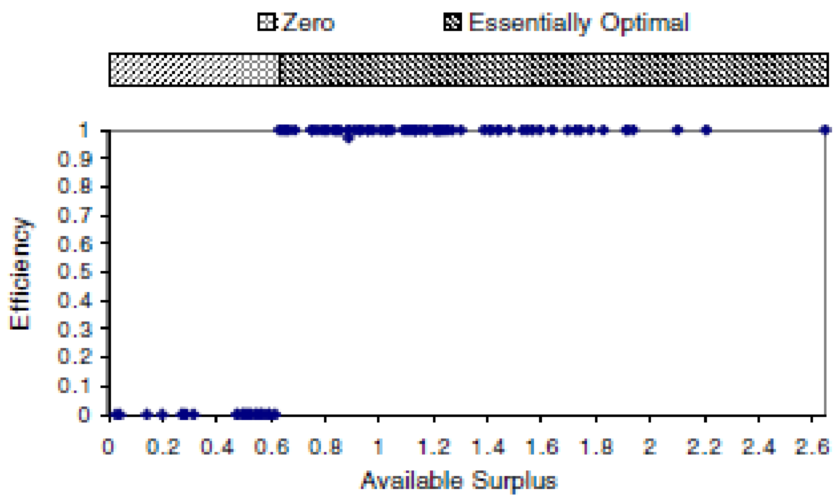


Figura 14. Resultados del protocolo combinatoria en la red grande. Fuente: Walsh et al., (2000)

Como podemos comprobar, en todas estas redes se puede ver que la eficiencia del protocolo es siempre cero para las regiones en las que el excedente es bajo. Además, hay que añadir que en todas las redes existen regiones "esencialmente óptimas", esto es, regiones en las que la eficiencia alcanza el valor de 1. Esto lo podemos ver reflejado en la última zona de la barra sombreada. La mayoría de las instancias son óptimas con algunas instancias ligeramente óptimas. La red simple también mostró eficiencias mixtas en las regiones medias de excedente disponible.

En resumen, estudiando estos resultados encontramos que los productores pueden obtener importantes resultados positivos con la política de licitación estratégica. Sin embargo, cuando el excedente disponible es pequeño en relación con los valores de los consumidores el protocolo genera una muy baja eficiencia global en comparación con el SAMP-SB-D y en algunos casos, incluso con SAMP-SB.

A la vista de lo estudiado en este capítulo podemos afirmar que una subasta combinatoria, vinculando directamente las negociaciones para todos los bienes, mejora de forma notable algunos de los posibles problemas de coordinación que se pueden producir en protocolos que implican negociaciones separadas. El protocolo combinatorio evita la dificultad de coordinar la adquisición de múltiples entradas con la provisión de su salida, algo que es característico de las negociaciones independientes. Como se ha mencionado anteriormente, si los agentes pujan de forma no estratégica la subasta puede calcular las asignaciones óptimas, pero los productores a su vez también pueden obtener un importante superávit positivo mediante políticas de licitación estratégica. "Sin embargo, cuando el superávit disponible es pequeño en relación con los valores de los consumidores, el comportamiento estratégico de los productores puede dar lugar a sobrepujado, impidiendo que se forme la cadena de suministro en absoluto" (Walsh et al., 2000, p. 268). Este estudio nos sugiere que es poco probable que las políticas tengan un éxito uniforme en todas las redes por igual y para todos los costos y valores. Es por esto por lo que diseñar mercados efectivos que comprendan tanto las subastas de bienes de precio separado como las subastas combinatorias, sigue siendo un importante e interesante tema de estudio y un problema a solucionar en futuros trabajos.

5. Teoría de grafos para subastas de aprovisionamiento

Como se ha explicado en anteriores capítulos, la utilización de las subastas combinatorias proporciona grandes beneficios pero a su vez, los participantes a menudo no son capaces de expresar fácilmente sus requisitos y valoraciones. Los postores de una subasta en ocasiones pueden dudar a la hora de cuantificar el valor de los atributos no relacionados con el precio y por consiguiente, puede llegar a ser difícil formular el problema de determinación del ganador (WDP) como un problema de asignación. Los mecanismos existentes para la ayuda a la toma de decisiones como son la navegación por escenarios y la obtención de preferencias, abordan esta dificultad mediante extensiones a un marco de optimización.

Para tratar estos problemas relacionados con la asignación del ganador en las subastas combinatorias nos basamos en el estudio realizado por los autores Kelly & Byde, (2006). Estos autores en su trabajo, "*Generating k Best Solutions to Winner Determination Problems: Algorithms & Application to Procurement*", presentan un enfoque complementario que enmarca el problema de decisión de adquisición como un problema de exploración más que como un problema de optimización. Para ello, utilizan un algoritmo que genera *k*-mejores soluciones para el WDP y así realizar la asignación de los ganadores de la subasta. Evaluaremos el método utilizando ofertas reales presentadas por proveedores reales en una subasta de adquisición de un material de piezas. "Este algoritmo se puede escalar a tamaño de problemas prácticos y además puede incorporar restricciones duras en el proceso de generación." (T. Kelly & Byde, 2006, p. 2).

Los participantes de la subasta pueden no estar seguros del valor que atribuyen a los atributos o dudar sobre si expresar varias consideraciones comerciales. Estos desafíos cognitivos de los participantes dificultan la computacionalidad del WDP y pueden ser molestos, incluso en problemas en las que la decisión recae sobre un solo agente, como es el caso de una subasta inversa (de adquisición) en el que un comprador se enfrenta a diversas ofertas. Los autores (T. Kelly & Byde, 2006) defienden que estas preferencias y limitaciones del comprador pueden ser tan difíciles de articular como formular el WDP mediante un problema de optimización adecuado. Dicho con otras palabras, el comprador puede reconocer una buena solución cuando la ve pero sin embargo, no puede declarar de forma precisa y explícita las propiedades que debe tener una buena solución.

En estos casos Boutilier et al., (2004), argumentan que se pueden aplicar dos técnicas de apoyo a la toma de decisiones:

- **Navegación de escenarios**: El comprador en una subasta inversa, puede recurrir a la navegación de escenarios, es decir, ejecutar rápidamente el WDP imponiendo diversas limitaciones mediante diferentes conjuntos de restricciones, con la esperanza de encontrar una solución atractiva y generar las correspondientes asignaciones óptimas. Esta técnica generalmente no admite una exploración eficiente ni suficiente de la asignación del espacio.

- Obtención de preferencias: Implica un método más sofisticado que intenta automatizar la navegación de escenarios permitiendo la expresión de preferencias. Para ello es necesario interrogar sistemáticamente a la persona que toma las decisiones y así, refinar de manera progresiva un modelo de su función de utilidad. De esta manera se puede obviar la necesidad de crear y explorar manualmente diferentes escenarios.

La obtención de preferencias presenta grandes ventajas respecto a la navegación de escenarios. El objetivo es obtener suficiente información parcial sobre las preferencias para poder calcular una asignación óptima. Aunque los objetivos de la navegación de escenarios y de la obtención de preferencias difieren, es evidente que estos problemas comparten una estructura similar, por lo que no sorprende que las técnicas de un campo sean pertinentes para el otro (Lahaie & Parkes, 2004). Diversos autores han desarrollado técnicas de obtención de preferencias para los problemas generales de decisión de un solo agente (Boutilier et al., 2004; Conen & Sandholm, 2001). Sin embargo, la técnica de obtención de preferencias no siempre es idónea ya que implica forzar fuertes suposiciones sobre la formulación de las preferencias, además de requerir un número elevado de consultas. Un problema asociado también puede ser que el agente no esté dispuesto a revelar sus preferencias y su información privada, algo que puede ser problemático (Conen & Sandholm, 2001). Las solicitudes de subasta están a veces motivadas por el deseo de preservar la privacidad y acortar las ofertas.

El fundamento del método descrito por Kelly & Byde, (2006) es un algoritmo que consigue generar las *k*-mejores soluciones del problema de determinación del ganador (WDP). En el caso más general, el algoritmo es capaz de proporcionar soluciones que maximicen las ganancias aunque su escalabilidad es limitada. Sin embargo, los autores defienden que cuando se aplica en subastas inversas, puede escalar tamaños de problemas prácticos. Las ofertas pueden expresar restricciones severas para evitar generar soluciones inaceptables y las ofertas pueden plantear descuentos y recargos por volumen. Como se ha mencionado con anterioridad, la principal contribución del algoritmo es que plantea el problema de determinación del ganador (WDP) como un problema de exploración más que uno de optimización. La diferencia de este algoritmo con respecto a la navegación de escenarios y la obtención de preferencias es, que estos últimos se basan en la optimización, de manera que utilizan muestras de las limitaciones de la persona que toma las decisiones o estimaciones de sus preferencias y con ellas, tratan de calcular una única solución óptima.

Por el contrario, mediante el algoritmo de *k*-mejores soluciones, se extrae sistemáticamente un conjunto de candidatos de la región más prometedora del espacio de soluciones, estas son, las soluciones que suponen un gasto mínimo (T. Kelly & Byde, 2006). Es por esto por lo que este algoritmo, además de revelar soluciones satisfactorias para el WDP, puede aportar una valiosa visión cualitativa y cuantitativa del costo de las limitaciones, así como la naturaleza del panorama competitivo.

5.1. Enfoque general

El enfoque de *k*-mejores soluciones tiene una escalabilidad limitada en el caso más general. Sin embargo, está formado por cuatro observaciones simples:

1. El WDP en las subastas combinatorias y los intercambios de ofertas selladas tienen una profunda relación con la formulación general del problema de la mochila (*knapsack problema*). Esto ha recibido mucha atención en la literatura por numerosos autores (de Andrade et al., 2015; Kelly, 2006).
2. Estos problemas pueden ser resueltos mediante programación dinámica (T. Kelly & Byde, 2006).
3. Cualquier problema dinámico puede ser expresado como un problema de búsqueda de gráficos de largo o corto recorrido (Ahuja et al., 1993).
4. Podemos generar *k* caminos más cortos en un gráfico. El problema de los caminos más cortos consiste en enumerar los caminos que conectan un par fuente-destino dado en el grafo con una longitud total mínima (Eppstein, 1998).

Para computar el método expresamos el programa dinámico correspondiente a la subasta y al WDP como el camino más corto o el más largo en un gráfico en el que la longitud del camino corresponderá al valor de nuestra función objetivo. El problema de camino más corto consiste en determinar el camino de longitud mínima entre un par de nodos. La cuestión es cómo calcular este camino de longitud más pequeña entre dos vértices dados. La literatura sobre los algoritmos más cortos es extensa (Eppstein, 1998; Villeneuve & Desaulniers, 2005, Current et al., 1999). Los algoritmos son utilizados para generar un gran número de soluciones que son postprocesadas para eliminar las soluciones insatisfactorias. Existen distintos algoritmos dentro de la teoría de grafos que permiten conseguir el camino más corto entre dos vértices de un grafo dirigido ponderado (Star, 1996). Un ejemplo sería el algoritmo del camino más corto de Dijsktra. Este algoritmo obtiene la longitud del camino más corto entre dos vértices en un grafo simple conexo no dirigido con pesos positivos. De hecho, el algoritmo de Dijsktra encuentra el camino más corto desde un nodo fijado *s* a cada uno de los nodos restantes del grafo (Salas, 2008).

Aplicando alguno de los algoritmos de *k*-rutas más cortas generamos una tabla de *k*-mejores soluciones al WDP. Esta tabla denota implícitamente los precios de los paquetes de restricciones, es decir, cualquier paquete de restricciones que se satisfaga con una solución en la tabla de *k*-mejores soluciones, su precio es simplemente la diferencia en el valor objetivo de la función entre la mejor solución que satisfaga las limitaciones y la mejor solución sin restricciones (T. Kelly & Byde, 2006). Como se ha mencionado anteriormente, el WDP de una subasta o de un intercambio combinatorio se trata como un problema multidimensional de mochila, por lo tanto, si la dimensionalidad del problema es pequeña (es decir, si el número de bienes es pequeño), se puede utilizar un solucionador de programación pequeño con un tiempo pseudo-polinómico modesto (T. Kelly, 2006). Sin embargo, el WDP en la mayoría de subastas combinatorias se trata de un problema *NP-Hard* (Blumrosen & Nisan, 2007) y los resultados de las aproximaciones para los problemas multidimensionales de mochila no son esperanzadores (Mansini & Speranza, 2012).

La relación del problema de determinación del ganador (WDP) en las subastas combinatorias y los problemas generalizados de mochila (MDKP) fue señalada por Holte, (2001) quien defiende que el problema generalizado de mochila puede generar, de media, el 99% de las soluciones óptimas del problema de determinación del ganador. Además de este, autores como Kellerer et al., (2004); Tennenholtz, (2000) proporcionan extensas discusiones de la conexión de los problemas de mochila en las subastas.

En resumen, conceptualmente es sencillo calcular las *k*-mejores soluciones para las subastas combinatorias de oferta sellada más generales, pero en la práctica esto es inviable desde el punto de vista computacional para las subastas en las que participan muchos bienes. Para escalar en el número de bienes debemos restringir la subasta. Es por esto que los autores Kelly & Byde, (2006) presentan un algoritmo de *k*-mejores soluciones que puede escalarse a importantes problemas del mundo real.

5.2. Subastas de adquisición

El problema de determinación del ganador (WDP) en las subastas de adquisición (subastas inversas) puede ser un tema conceptualmente trivial y computacionalmente fácil en el caso en el que el comprador solo busque obtener las mercancías a un costo mínimo total. Sin embargo, en muchos entornos, otras características distintas del costo también pueden interpretar un papel importante a la hora de evaluar la calidad de una asignación. Por ejemplo, en una subasta de adquisición el licitador puede preocuparse por cuestiones diversas, como el porcentaje de negocios adjudicados a un proveedor específico, el número de proveedores que participan (pudiendo limitar el número de vendedores incluidos en la solución), la calidad de sus entregas, querer repartir los gastos de manera uniforme entre los vendedores y así preservar la diversidad en el mercado o cualquier otro factor que pueda compensarse con el costo (Boutilier et al., 2004).

En su trabajo, Kelly & Byde, (2006) presentan un algoritmo de *k*-mejores soluciones en una subasta de adquisición en la que participa un solo comprador y múltiples vendedores con múltiples tipos de bienes disponibles en muchas unidades. Está permitida la multiprotección, esto es, el comprador puede optar a obtener unidades de un único bien de múltiples proveedores y de la misma manera, este comprador puede limitar la multiprotección de artículos individuales antes de que se generan las *k*-mejores soluciones.

5.2.1. Notación y problema ejemplo

Para realizar la notación del algoritmo nos basamos en el trabajo de autores Kelly & Byde, (2006) "*Generating k Best Solutions to Winner Determination Problems: Algorithms & Application to Procurement*". Sea I el número de artículos disponibles a subastar, es decir, los distintos tipos de bienes que el comprador quiere adquirir. El parámetro Q especifica el número de cuantiles (partes de un artículo) que se ofrece a suministrar. Por ejemplo, si el parámetro $Q = 4$ entonces el proveedor se ofrece a suministrar el 25%, 50%, 75% o 100% del número total de unidades demandadas de cada artículo. Denominamos S al número total de vendedores que participan en la subasta. Para cada ítem i, los vendedores presentan una oferta Bi que está formada por el par (q, p) donde q es un valor en el rango $1 \ldots Q$ mientras que p es el pago que el vendedor requiere obtener por suministrar la cantidad q de la demanda del comprador por ese ítem i. De manera que una solución aceptable del WDP será aquella en la que el comprador obtiene exactamente Q unidades de cada ítem.

Para nuestro caso particular, consideramos una subasta de adquisición con $I = 3$ artículos que son $i1, i2, i3$ y $S = 2$ vendedores (s_A, s_B). El parámetro $Q = 2$, por lo tanto, los vendedores pueden suministrar el 0%, el 50% o el 100% de la demanda de cada artículo que el comprador desea adquirir. Los pagos p que los vendedores requieren obtener por suministrar la demanda q se muestran en la Tabla 2.

	ítem $i1$		ítem $i2$		ítem $i3$	
Vendedor (*seller*)	50%	100%	50%	100%	50%	100%
s_A	3\$	6\$	4\$	7\$	5\$	11\$
s_B	2\$	7\$	5\$	8\$	4\$	10\$

Tabla 2. Ofertas en el problema ejemplo. (Elaborado a partir de Kelly & Byde, (2006))

subasta			$\sum p$	**subasta**			$\sum p$	**subasta**			$\sum p$
$i1$	$i2$	$i3$	(\$)	$i1$	$i2$	$i3$	(\$)	$i1$	$i2$	$i3$	(\$)
AA	AA	AA	24	AB	AA	AA	23	BB	AA	AA	25
AA	AA	AB	22	AB	AA	AB	21	BB	AA	AB	23
AA	AA	BB	23	AB	AA	BB	22	BB	AA	BB	24
AA	AB	AA	26	AB	AB	AA	25	BB	AB	AA	27
AA	AB	AB	24	AB	AB	AB	23	BB	AB	AB	25
AA	AB	BB	25	AB	AB	BB	24	BB	AB	BB	26
AA	BB	AA	25	AB	BB	AA	24	BB	BB	AA	26
AA	BB	AB	23	AB	BB	AB	22	BB	BB	AB	24
AA	BB	BB	24	AB	BB	BB	23	BB	BB	BB	25

Tabla 3. Soluciones del problema ejemplo. (Elaborado a partir de Kelly & Byde, (2006))

Como podemos ver analizando la Tabla 2, el vendedor s_A ofrece un descuento por volumen en el ítem $i2$ mientras que para el ítem $i3$ impone un recargo por volumen. De la misma manera ocurre con el vendedor s_B quien impone un recargo por volumen en el ítem $i1$ y en el $i3$ mientras que ofrece un descuento por volumen por el ítem $i2$.

El comprador tiene la opción por lo tanto, de adquirir el 100% de s_A, el 100% de s_B o el 50% de cada proveedor. Por consiguiente, el número de soluciones aceptables de cada sub-subasta (es decir, por cada ítem) será tres. Esto implica un total de soluciones aceptables del problema de $3^3 = 27$. En la Tabla 3 se muestran las soluciones posibles y el pago total asociado a cada una de ellas.

En la notación propuesta en la Tabla 3, la cadena de caracteres como AA significa que el vendedor s_A suministra el 100% del artículo, mientras que la cadena AB significa que cada vendedor suministra el 50% del artículo y la cadena BB por lo tanto, significa que el vendedor s_B suministra el 100%. La mejor solución será aquella que tenga menor coste, por lo tanto observando detenidamente la Tabla 3 podemos afirmar que la solución AB AA AB tiene el menor coste (21\$). Sin embargo si existen restricciones puede que la mejor solución cambie. Por ejemplo, si hay que satisfacer la restricción de que el vendedor s_B debe suministrar al menos el 50% de cada artículo, entonces la mejor solución será AB BB AB y cuesta 22$ (esta es la opción con menor coste en la que el vendedor B participa en todos los artículos), y por lo tanto el precio de la restricción lateral es de 1$. Si además, añadimos la restricción de que el vendedor s_B debe suministrar todo el artículo $i1$, entonces la mejor solución será BB BB AB (24$) y el precio de ambas restricciones juntas es 4$.

Vemos ahora el caso en que hay que satisfacer la restricción de que el vendedor s_A debe suministrar al menos el 50% de cada artículo. En este caso la mejor solución será también AB AA AB por lo tanto el precio de la restricción latera será de 0$. Sin embargo, esto cambia si añadimos la restricción de que el vendedor s_A debe suministrar todo el artículo i3, en cuyo caso la mejor solución será AB AA AA (23$). Al añadir esta restricción el precio lateral será por lo tanto, de 2$.

Según los autores Kelly & Byde, (2006) el número de soluciones de cada sub-subasta viene dado por la Ecuación 12, que asigna los cuantiles Q a los vendedores S:

$$R(S,Q) = \frac{(Q+S-1)!}{Q!\,(S-1)!} = \frac{(2+2-1)!}{2!\,(2-1)!} = 3$$

Ecuación 12. Número de soluciones de cada sub-subasta. Fuente: Kelly & Byde, (2006)

5.2.2. Generar *k*-mejores soluciones

El número de soluciones aceptables totales para el WDP de la subasta de adquisición es $R(S,Q)^I = 3^3 = 27$, que es demasiado grande para escalarlo a un problema de tamaño práctico. Por esto, los autores Kelly & Byde, (2006) en su trabajo construyen una solución gráfica formada por aristas que corresponden a las soluciones aceptables para el WDP. Este grafo está formado por nodos fuente s, nodos destino t y nodos intermedios $d1, d2, \ldots, dt$, de manera que las aristas dirigidas desde el nodo s hacia el nodo $d1$ representan las soluciones aceptables para la sub-subasta del ítem $i1$, las aristas de $d1$ a $d2$ representan las soluciones de la sub-subasta del ítem $i2$ y por último, las aristas desde $d2$ hacia t representan las soluciones de la sub-subasta $i3$. Eso lo vemos representado en la Figura 15.

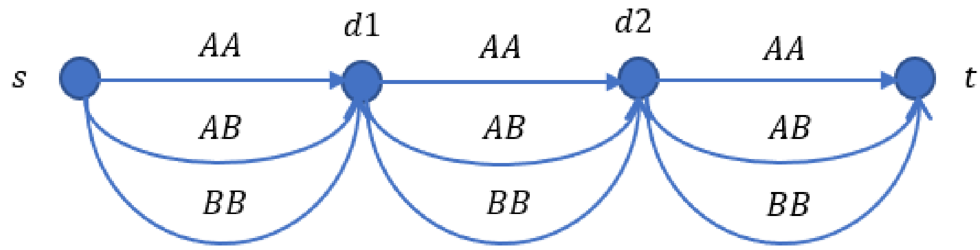


Figura 15. Soluciones del grafo del problema ejemplo. (Elaborado a partir de Kelly & Byde, (2006))

No se muestra en la imagen, pero los pesos de las aristas corresponden con el costo de la solución respectiva en la Tabla 2, por ejemplo, la arista AA que va desde el nodo s hasta el nodo $d1$ tiene un peso de 6$ correspondiente a que el vendedor s_A suministre el 100% del item1, como demuestra la tabla 1. De modo que "el problema de generar las *k*-soluciones aceptables más baratas para el WDP de la subasta de adquisición se convierte entonces en el problema de computar los *k*-caminos más cortos en el gráfico de soluciones" (T. Kelly & Byde, 2006, p. 5). Además, al tratarse de un grafo acíclico, esto es, que podemos ignorar con seguridad la posibilidad de rutas cíclicas en la generación del proceso, se evita gran parte de la complejidad de los algoritmos de las rutas más cortas.

El fundamento del algoritmo de *k*-caminos más cortos es una representación eficiente de un árbol de expansión minimal que se basa en el concepto de desviaciones. Un árbol de expansión minimal en un grafo simple conexo y ponderado es un árbol de expansión para el que la suma de los pesos de sus aristas es mínima (Ahuja et al., 1993). Definimos que una desviación de un camino P es un camino Q, que tiene el mismo origen y destino que el camino P, que inicialmente forma parte del árbol mínimo y contiene exactamente un enlace, llamado enlace de desviación, que no es un enlace de P, pero cuyo nodo final es el nodo final de un enlace de P. La posición final del camino Q coincide con la del camino P (Hoffman & Pavley, 1959). De modo que, podemos representar todos los caminos posibles en nuestro grafo de soluciones como un árbol ordenado por montones en el que el camino más corto es la raíz, y os hijos de cada nodo son sus desviaciones. Para ilustrar esto, los autores (T. Kelly & Byde, 2006) en su trabajo muestran el siguiente grafo de la Figura 16:

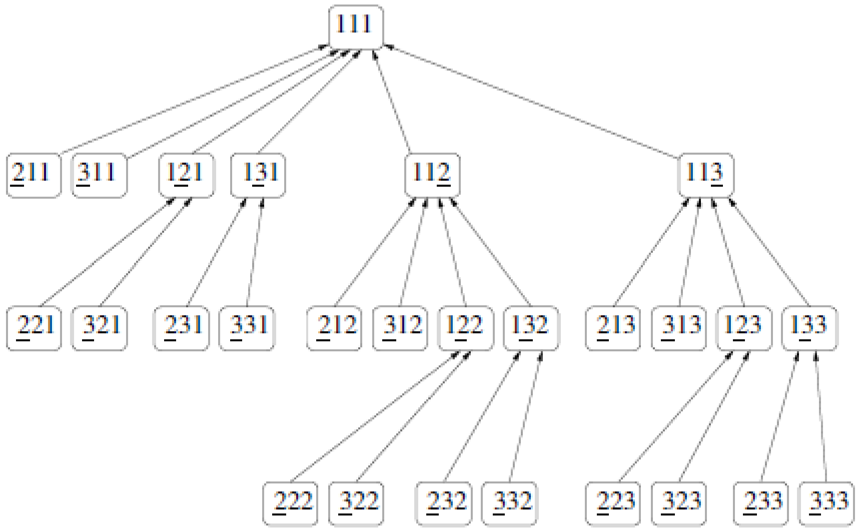


Figura 16. Estructura de los caminos del problema ejemplo. Fuente: T. Kelly & Byde, (2006)

En la Figura 16 podemos ver el montón de caminos existentes para nuestro problema ejemplo. La notación utilizada es la siguiente: los números de los nodos presentan el rango de las soluciones elegidas en las sub-subastas de los artículos individuales, por ejemplo, el nodo 312 corresponde a la tercera solución más barata de la subasta del ítem $i1$, la solución más barata del ítem $i2$ y la segunda solución más barata para la subasta del ítem $i3$. Es decir, la posición del número indica la sub-subasta mientras que el número en sí indica la calidad de la solución de esa sub-subasta. En cuanto a los nodos subrayados en el grafo, estos representan las desviaciones. Por ejemplo en el caso del nodo 312 el número 3 está subrayado ya que es la posición que difiere de su nodo padre, el 112. Vemos que en la cima del grafo, representando la raíz del árbol, está el nodo 111 el cual corresponde con la solución de costo mínimo obtenida al elegir la solución más barata en cada sub-subasta.

5.3. Limitaciones globales

Kelly & Byde, (2006) en su trabajo describen un enfoque que permite modificar la representación gráfica vista en la Figura 15 , de manera que se incorporan ciertas restricciones severas, y las soluciones producidas que violen las restricciones no se generan cuando se aplica el algoritmo de k-caminos más cortos. Para ello, denominamos gráfico ampliado al que codifica las restricciones globales para así distinguirlo del gráfico de soluciones simples de la Figura 15.

El gran inconveniente provocado por este enfoque de expansión del grafo para permitir la representación de las restricciones complejas es que inevitablemente se aumenta la complejidad de la computación del algoritmo de los *k*-caminos más cortos. Debido a esto, los autores se plantean si es un buen método, o por el contrario, es mejor generar una lista más amplia de posibles soluciones y filtrar aquellas que violen las restricciones impuestas. “En la práctica, el enfoque descrito en esta sección se escala mejor cuando la restricción es más estricta, es decir, cuando la proporción de todos los caminos que no cumplen la restricción es significativa” (T. Kelly & Byde, 2006, p. 6).

Vamos a ver cómo ampliar el grafo de soluciones para formar un grafo de soluciones restringidas Gf cuyas trayectorias corresponden a resultados con un número fijo Sf de vendedores que reciben asignaciones no nulas. Los autores eligen esta restricción por varias razones: es útil, ya que es una preocupación común de los ejecutivos de compras, está claro que sólo es computable globalmente y tiene una representación relativamente sencilla.

Como se ha explicado anteriormente, dado que la longitud de un camino Gf es el costo del correspondiente resultado global, los caminos más cortos de Gf corresponderán a las soluciones más baratas para el problema de determinación del ganador (WDP) (Star, 1996). A continuación, en la Figura 17 y la Figura 18 vemos dos grafos ejemplo.

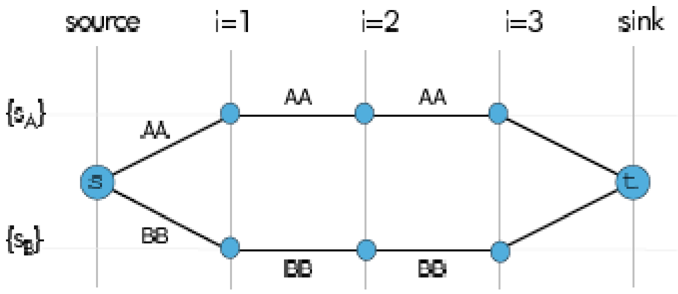


Figura 17. Gráfico de soluciones restringidas $G1$: $S = 2, I = 3, Q = 2$. Fuente: T. Kelly & Byde, (2006)

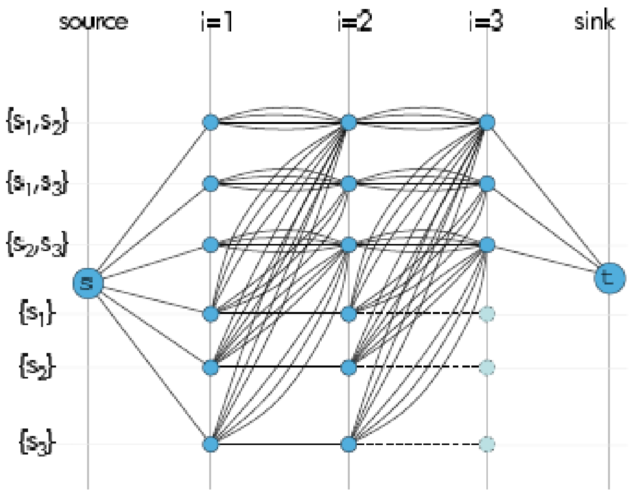


Figura 18. Gráfico de soluciones restringidas $G2$: $S = I = Q = 3$. Fuente: Kelly & Byde, (2006)

Como podemos ver en la Figura 17 se muestra el grafo $G1$ en el que el número de artículos $I = 3$, existen dos vendedores $S = 2$ y el número de cuantiles $Q = 2$. Un ejemplo más complicado se muestra en la Figura 18 en la que se presentan el grafo $G2$ en el cual los valores de las componentes son $I = S = Q = 3$. Nótese que Gf puede contener vértices y aristas que no están en ningún camino del nodo s al nodo t como ocurre en el grafo $G2$ de la Figura 18.

En resumen, sigue siendo complicado tener una idea global de las limitaciones que son susceptibles de representación y de su resolución a la hora de computar el algoritmo de *k*-caminos más cortos, debido a esto, sigue siendo un importante trabajo de estudio e investigación en el futuro. De todos modos, en su trabajo, (Kelly & Byde, 2006) han presentado varios ejemplos de restricciones como son:

1. Límites superiores o inferiores de los posibles cuantiles asignados a un vendedor particular.
2. El número de los vendedores permitidos en la subasta.
3. Los límites en el valor de ítems posibles asignados a un vendedor.

Además, se ha introducido un método general para el cálculo de las mejores soluciones a una gran clase de problemas de determinación del ganador de subastas en condiciones de igualdad. Este enfoque se adapta a los tamaños de problemas reales de subastas de adquisición, permitiendo incluso, recargos y descuentos por volumen, así como la multifuente. La complejidad de este algoritmo aumenta con el número de vendedores y de artículos, además de verse afectado por las restricciones o las preferencias de los agentes. Mediante el gráfico de resultados de restricciones se pueden acomodar muchas restricciones globales con solo un modesto aumento de la complejidad computacional. Es importante destacar que este algoritmo no depende de un solucionador de programas o de otro tipo de software ya que se puede implementar desde cero con un esfuerzo moderado y bajo costo (T. Kelly & Byde, 2006).

Los autores T. Kelly & Byde, (2006) defienden que los resultados basados en ofertas reales de subastas de adquisición demuestran que su algoritmo puede generar un gran número de soluciones a los WDP de las subastas prácticas. Además, mediante el algoritmo de *k*-mejores soluciones para el WDP se proporciona al responsable de la toma de decisiones en la subasta, una gran y útil herramienta que aporta valiosas opciones, tanto cualitativas como cuantitativas en una región prometedora del espacio de soluciones.

6. Subasta combinatoria del reloj (CC)

Como se ha explicado con anterioridad, las subastas combinatorias no son habituales en la práctica ya que se enfrentan a numerosos problemas. Alguno de los problemas que deben abordarse a la hora de aplicar estas subastas son su alta incertidumbre de computación (es decir, no hay garantía de que las ofertas ganadoras puedan asignarse y encontrarse en un tiempo “razonable” cuando el número de licitadores y de artículos se hace más grande) y que la subasta es cognitivamente compleja, por lo que puede llevar a algunos participantes a realizar estrategias de licitación perversas (Blumrosen & Nisan, 2007; Porter et al., 2003).

A pesar de estas desventajas, los aspectos positivos de las subastas combinatorias son abundantes. Las subastas combinatorias mejoran nuestra capacidad de asignar múltiples recursos de manera eficiente cuando nos encontramos en entornos económicos complejos, además de permitir una puja más expresiva en la que los participantes puedan presentar ofertas de paquetes con restricciones lógicas que limitan el conjunto factible de asignaciones de subastas (Rothkopf et al., 1998). Este tipo de subastas permiten explícitamente a los compradores y vendedores de bienes y servicios ofertar paquetes que tengan valores o costos relacionados. Finalmente, también pueden manejar las relaciones entre las licitaciones o las asignaciones como las restricciones presupuestarias o los límites de agregación que permiten a muchas ofertas estar relacionadas entre sí (por ejemplo, el caso en el que un ofertante no esté dispuesto a gastarse más de una cantidad determinada de dinero en todas sus ofertas).

Según lo expuesto en anteriores apartados, cuando los valores tienen fuertes complementariedades, existe el peligro de que se produzca el llamado “problema de exposición”. Esto produciría pérdidas para los licitadores en el caso de que las subastas combinatorias no estuvieran permitidas y sin embargo, se ofertaran artículos o bienes complementarios (Abrache et al., 2004). Para entender esto con más claridad vemos el trabajo “*Combinatorial auction design*” de los autores Porter et al., (2003) en el que muestran subastas propuestas por la Comisión Federal de Comunicaciones (FCC). En su artículo, se refieren al diseño de un sistema transparente y eficiente que busca solventar el problema de exposición, y la práctica de subastas combinatorias de compradores para múltiples artículos distintos con múltiples unidades de cada uno de ellos. Además, se describe un diseño de subasta combinatoria llamado “Subasta Combinatoria del Reloj (CC)” que busca eliminar muchos de los problemas encontrados en diseños anteriores y presenta resultados satisfactorios en la práctica.

6.1. Proceso de diseño de la subasta SMR de la FCC

La Comisión Federal de Comunicaciones (FCC) llevó a cabo varias subastas de alto precio para el espectro de comunicaciones. El diseño de subasta de la FCC consistió en una subasta simultánea multironda (SMR) y contaba con varias características notables (Guala, 2001):

- Subasta simultánea de las diversas licencias ofrecidas.
- Contaba con un procedimiento iterativo que permitía la actualización de las ofertas ronda por ronda.
- Reglas de actividad que exigían una participación continua con incrementos mínimos de la oferta.

Una de las grandes virtudes de la subasta simultánea multironda SMR (con pujas por artículos individuales) es que las ganancias que obtenga cada postor se basan en decidir si pujar más alto, es decir, un postor siempre puede garantizar que ganará un paquete particular si sigue pujando hasta que sus competidores se hagan a un lado. De esta manera se limita lo que los participantes revelan sobre sus valores personales de los paquetes y los perdedores saben por qué motivos perdieron la subasta (Lawrence M Ausubel & Cramton, 2011).

Finalmente, la FCC decidió implementar la subasta SMR en lugar de optar por una forma de subasta combinatoria por tres razones declaradas:

1. **Incertidumbre computacional**: Las subastas combinatorias cargan con una alta complejidad computacional y requieren de la solución de problemas de programación entera para seleccionar las ofertas ganadoras. Estos problemas son notorios por ser computacionalmente difíciles (técnicamente descrito como un polinomio no determinado o *NP-Hard*) y no garantizar que se pueda encontrar una solución en un tiempo "razonable" cuando el número de artículos o de participantes en la subasta se hace más grande (de Vries & Vohra, 2003).
2. **Complejidad de la oferta**: Las subastas combinatorias son complicadas tanto para el subastador como para el participante debido a que hay inconcebiblemente muchos paquetes por los que un postor podría querer hacer ofertas, lo que lleva a que la selección de cualquier conjunto de artículos puede ser estratégicamente difícil de decidir. En segundo lugar, otro aspecto a tener en cuenta sería que el ofertante determine cuánto pujar por los paquetes de artículos para tener éxito, algo que conlleva también, una alta complejidad computacional (Blumrosen & Nisan, 2007).
3. **Problema del umbral**: Las subastas combinatorias presentan el siguiente problema que es importante de analizar, ya que conlleva un

impedimento estratégico para obtener resultados eficientes. El problema del umbral puede ocurrir por ejemplo, si cada uno de los dos pequeños ofertantes está pujando por un artículo separado, pero a su vez, un tercer postor está pujando por un paquete que contiene ambos artículos. Esto llevará a que los dos pequeños postores deban, implícitamente, coordinarse a través de sus ofertas para determinar un precio y poder conseguir que la suma de ambas ofertas supere a la oferta del paquete total para así, poder conseguirlo frente al tercer postor (Porter et al., 2003).

Debido a estos inconvenientes, la FCC decidió implementar el diseño de subasta no combinatoria SMR en lugar de enfrentarse a los temas discutidos anteriormente. Sin embargo, los licitadores en la subasta SMR que tenían valores complementarios para un determinado paquete de licencias estaban sujetos al problema de exposición financiera si no adquirían al menos una de esas licencias.

Para intentar “reducir” la exposición financiera, la FCC aplicó una regla de retirada que consistía en que los licitadores tenían la opción de revocar sus ofertas de determinadas licencias con la condición de pagar la diferencia entre su oferta y la oferta ganadora final, en el caso de que ésta fuera menor (Porter et al., 2003). A causa de esta regla de retirada, los ofertantes comenzaron a utilizar algunas estrategias interesantes. Por ejemplo, los individuos se retiraban y posteriormente pujaban justo por debajo de su oferta anteriormente retirada, de esta manera mostraban su voluntad de no competir. Del mismo modo, estos licitadores pujarían por artículos para los cuales no tenían valor para así mantener su actividad pero sin mostrar realmente en qué estaban interesados en pujar, lo cual denominan los autores Porter et al., (2003) como “estacionamiento”. Debido a estos problemas surgidos a raíz de la subasta SMR y con el objetivo de solventarlos, surgieron nuevos diseños.

Con el fin de superar y corregir el problema de exposición que presentan las subastas separadas (no combinatorias) en las que se ofertan bienes o artículos complementarios, se planteó la posibilidad de utilizar una subasta combinatoria con un mecanismo iterativo que permitiera a los licitadores explorar el espacio de las ofertas sin tener que ofertar por todos los artículos posibles. En general, los mecanismos iterativos que permiten a los sistemas de subasta proporcionar retroalimentación y permitir a los licitadores revisar sus ofertas, producen resultados más eficientes (Adomavicius et al., 2007), como ya se ha señalado en anteriores capítulos. Este tipo de mecanismos surge debido al deseo de los participantes de revelar la menor información posible e interés por los artículos o paquetes en una subasta que oferta simultáneamente múltiples artículos (de Vries & Vohra, 2003).

En su trabajo, los autores Porter et al., (2003) distinguen dos reglas de tiempo específicas entre los diseños iterativos, estas son:

- Subasta continua: Para la realización de esta subasta, se inicia un temporizador de manera que las ofertas pueden ser presentadas en tiempo real. A continuación, se contabiliza la mejor combinación de ofertas de manera que se ajuste a las limitaciones de la subasta. La ventaja de esta subasta es que cuenta con una lista de espera en la que se pueden presentar nuevas ofertas en cualquier momento y esperar para que sean "combinadas" con otras ofertas o sustituirlas por las ofertas ganadoras provisionales. Mediante la lista de espera los participantes pueden indicar a otros que están dispuestos a combinarse para así superar una oferta de gran volumen. Esta subasta terminará si no se presentan ofertas que cambien la asignación durante un periodo de tiempo límite (Porter et al., 1989).
- Multironda: Cada vez que comienza una ronda y las ofertas cerradas son presentadas, un programa de programación entera (IP) se resuelve para encontrar la asignación ganadora y la combinación de ofertas más valiosa. De nuevo, nuevas ofertas cerradas son publicadas y se ejecuta de nuevo el IP. En el momento en el que no se generen nuevas ofertas o nuevos ganadores, la subasta ha terminado (Blumrosen & Nisan, 2007).

Además, para superar el problema del umbral, los autores (Porter et al., 2003) defienden que el enfoque más obvio es utilizar una oferta sellada de precios de tipo Vickrey. Como se ha indicado anterioridad, la subasta Vickrey cuenta con el incentivo de que la oferta no la determina el postor, sino que es determinada por las ofertas de otros ya que gana el postor más alto, pero el precio que paga este es la segunda oferta más alta (Vickrey, 1961). Por lo tanto, mediante la subasta de Vickrey es posible superar el problema del umbral.

6.2. La subasta combinatoria del reloj (CC)

Con el fin de resolver el problema de la carga de computación asociado a las subastas combinatorias de gran tamaño, pero sin interferir con la transparencia de las ofertas y simplificar la tarea para los licitadores los autores Porter et al., (2003) desarrollaron un diseño simple de la subasta: la subasta del reloj (CC). La subasta combinatoria del reloj (CC) ha resultado una importante innovación en el mercado, siendo utilizada en subastas reales importantes de espectro en todo el mundo y con capacidad de eclipsar a la subasta simultánea multironda (SMR) (Lawrence M. Ausubel & Baranov, 2014). Mediante el CC se combina una fase de reloj dinámico y una ronda suplementaria única mientras que la asignación de los premios correspondientes se determina por las reglas Vickrey-Clarke-Groves que incitan a licitaciones verdaderas mientras que la fase del reloj tiene por objeto revelar información (Janssen & Kasberger, 2019). Se crea un precio único para cada artículo que es controlado por el rejo de precios de esos artículos y el precio solo sube cuando existe demanda de más de un artículo.

6.2.1. Funcionamiento de la subasta CC

Como explican Ausubel & Baranov, (2014) consiste en un proceso de licitación en dos etapas:

La primera etapa consiste en una subasta de reloj dinámico, esto es, los relojes se ponen en marcha a precios bajos, uno para cada artículo. El subastador anuncia estos precios de licitación de la subasta y los licitadores, en un plazo fijo, responden con las cantidades que desean adquirir a los precios anunciados por el reloj. Estas ofertas avanzan en rondas múltiples a medida que los precios aumentan hasta que la demanda agregada es inferior o igual a la oferta de cada artículo. En otras palabras, un simple algoritmo cuenta la demanda de cada artículo por parte de cada licitador, asegurándose de que se cumplen las restricciones oportunas de la subasta. Si existen artículos que cuenten con más de un postor que demande más unidades de las que se encuentran disponibles en la subasta, entonces el precio del reloj se eleva y se inicia una nueva ronda de nuevas ofertas.

En la segunda etapa, los licitadores tienen la oportunidad de presentar multiplicidad de ofertas, tanto para mejorar sus ofertas en la ronda del reloj como para expresar los valores de otros paquetes. La subasta continúa mientras haya un exceso de demanda de los artículos que se ofrecen. En el momento en el que la subasta llega a un punto en el que la demanda es igual a la oferta (queda exactamente una oferta por cada unidad de cada artículo disponible), entonces termina la subasta y a los postores permanentes se les adjudica los artículos a los precios actuales del reloj. Al final de esta segunda etapa, las ofertas de las rondas del reloj y de las siguientes rondas entran en el problema de determinación del ganador (WDP). El WDP determina entonces la asignación de valor máximo entre los licitantes y se realiza la asignación de artículos a los ganadores de la subasta. El paquete ganador se determina mediante la búsqueda de la asignación que maximice el valor total sujeto a unas restricciones. Cada ítem puede ser asignado o vendido una sola vez y solo puede ser seleccionada una oferta por cada postor. La Figura 19 esquematiza el funcionamiento de este mecanismo.

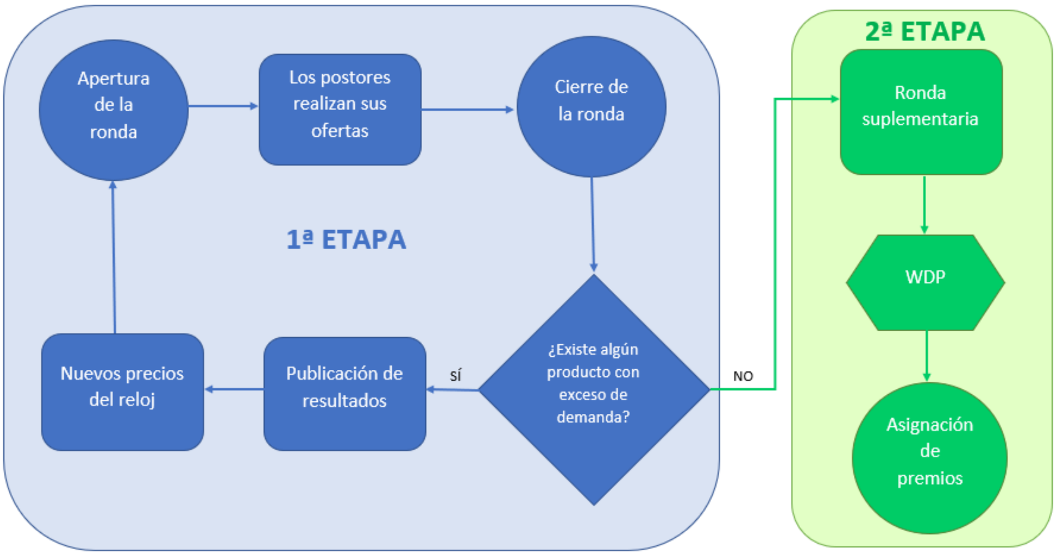


Figura 19. Esquema del funcionamiento de la subasta CC. (Elaborado a partir de L.M. Ausubel & Baranov, (2017))

Los autores Porter et al., (2003) en su trabajo, añaden que sin embargo, puede suceder que después de que un precio de reloj determinado aumente, la demanda de ese artículo se haga menor de lo que está disponible, por lo tanto, existiría un exceso de oferta para ese artículo. En el caso en el que esto ocurra, el subastador debe computar la solución a un IP para encontrar así la asignación de artículos que maximizarían sus ingresos. La solución tenderá a utilizar las ofertas de anteriores relojes para asignar las unidades para las que haya exceso de oferta en el actual reloj de precios. En el supuesto de que la solución no desplace a aquellos que mantengan las ofertas ganadoras permanentes en los artículos donde el suministro sea igual a la demanda, la subasta termina y los ofertantes pagan los precios ofertados. En el caso contrario, si la solución busca desplazar al menos a un ofertante que tenga una oferta ganadora en un artículo donde su oferta sea igual a su demanda, entonces se considera que ese artículo tiene exceso de demanda, el precio del reloj sube y la subasta continúa.

A modo de resumen, la asignación final será aquella en la que todas las ofertas que se hayan mantenido permanentes adquieran los artículos a los precios finales del reloj, mientras que los artículos con exceso de demanda serán asignados a precios de relojes anteriores. “Los precios finales a menudo no son únicos, y esto permite a este mecanismo de subasta cierta flexibilidad para lograr una asignación eficiente” (Porter et al., 2003, p. 3).

Este mecanismo de subasta combinatoria es utilizado e implementado cuando existen múltiples postores, además de múltiples productos a subastar en diferentes cantidades.

6.2.2. Características de la subasta CC

Numerosos autores como L.M. Ausubel & Cramton, (2004); Bichler & Goeree, (2017); Cramton, (2013) se han referido a la subasta del reloj en la literatura, y es que, sus aspectos positivos son considerables. La principal ventaja de la subasta del reloj (CC) está en su simplicidad para el participante y los requisitos mínimos de computación a los que tiene que recurrir el subastador (Porter et al., 2003). Además, como expresan L.M. Ausubel & Cramton, (2004), no es necesario que los bienes sean sustitutos para que la subasta del reloj consiga el resultado deseado. Esta subasta se acomoda a la venta de múltiples unidades y los ofertantes cuentan con la completa libertad de moverse dentro y fuera de la subasta, pujando por cualquier paquete a voluntad. Permite al ofertante imponer restricciones sin aumentar la carga computacional asociada a la subasta ya que la subasta simplemente calcula la demanda para un artículo como el máximo número de unidades que podría ganar.

El postor también es libre de mezclar los precios anteriores y actuales del reloj siempre y cuando parte de su oferta sea a los precios actuales del reloj, por lo que esta subasta también proporciona una alta flexibilidad de movimiento. De mismo modo, los autores apuntan que el comportamiento estratégico de los licitadores se puede controlar aún más, si éstos solo cuentan con la información necesaria, es decir, los precios de los artículos, para evitar ofertar más de su máxima disposición a pagar. Para conseguirlo, los licitadores no necesitarían saber quién está ofertando, cuántos están pujado y por qué artículos o paquetes están pujando. Es por esto que la subasta combinatoria del reloj es un proceso simple y transparente.

La subasta del reloj es un proceso más simple que la subasta ascendente simultánea. A los licitadores se les proporciona la información mínima necesaria para la determinación de precios que son: los precios y el exceso de demanda. De manera que los licitadores no se distraen con otra información que sea extraña. Además, las subastas del reloj son generalmente rápidas ya que un aumento de incremento toma sólo una ronda.

Para finalizar, una de las grandes ventajas de la subasta combinatoria del reloj es que permite descubrir el precio ayudando así a reducir la maldición del ganador. La maldición del ganador, que se ve en la Figura 20, es un fenómeno que se produce cuando el ganador de una subasta o postor ofrece una puja mayor al valor real del bien que se subasta, en otras palabras, el ofertante hace una predicción errónea que sobrestima el valor del bien, ofreciendo una puja alta, de manera que ganará la subasta pero terminará perdiendo dinero o utilidades. Este fenómeno puede aparecer en subastas en las que se dan las siguientes características esenciales (Conde, 2011):

- El valor del bien o artículo a subastar es objetivo e igual para todos los participantes pero su valor no es del todo conocido o veraz (por ejemplo, pozos petroleros, derechos de transmisión de partidos de fútbol, obras de arte, etc.)
- Las pujas u ofertas se hacen a sobre cerrado por lo que es muy difícil conocer lo que ofrecen los demás participantes.
- El problema se incrementa con el número de postores.
- La maldición del ganador perjudica especialmente a los agentes con menor información (agentes pequeños).

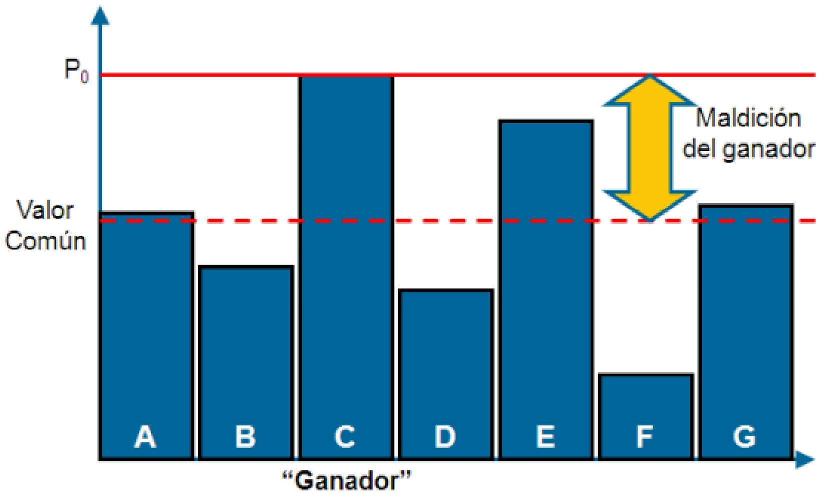


Figura 20. La maldición del ganador. Fuente: Conde, (2011)

Puesto que en la subasta combinatoria del reloj los precios se fijan para todos los participantes por igual y son los postores los que ofrecen las cantidades por las que están dispuestos a pagar ese precio y gracias a la transparencia que ofrece este mecanismo de subasta, se evita de una manera muy eficaz el fenómeno de la maldición del ganador. Los licitadores cuentan con la información necesaria para evitar sobrestimar el valor del bien que se está ofertando. Otro aspecto positivo de la subasta combinatoria del reloj es que permite al licitador reducir la cantidad de cualquier artículo siempre que se haya aumentado el precio en algún artículo que el ofertante haya demandado, por lo tanto, el ofertante puede pujar con seguridad por ganancias sinérgicas. De esta manera se elimina el problema de la exposición (Lawrence M Ausubel et al., 2004). Por otro lado, esto también es la causa de la principal desventaja de la subasta del reloj: permite a los ofertantes coordinar sus decisiones durante la subasta (Trifunovic & Ristic, 2013).

Para finalizar, Lawrence M Ausubel & Cramton, (2011) apuntan que las rondas suplementarias en la subasta del reloj no satisfacen la propiedad de garantizar que la asignación provisional que se realice en la ronda final del reloj, no se vea modificada como resultado de la ronda suplementaria en el caso en el cual, no hay artículos sin asignar en la ronda final del reloj. Además, también afirman que existe la problemática para los licitantes a la hora de determinar una oferta que garantice ganar el paquete final del reloj cuando no hay artículos no asignados en la ronda final del reloj.

6.2.3. Ejemplo de la subasta CC

Una cuestión muy importante de la subasta combinatoria del reloj es el tamaño de los incrementos de las ofertas. Si se establece un gran incremento de la oferta, la subasta concluirá en menos rondas, además de introducir incentivos para los juegos del azar. Es por esto que los autores Lawrence M Ausubel et al., (2004) apuntan que usando pequeños incrementos en la subasta del reloj, puede aumentar enormemente el número de rondas y a su vez, el tiempo necesario para concluir la subasta. También defienden que los licitadores, por regla general, prefieren una subasta más corta ya que reduce los costos de participación y la exposición a los movimientos de los precios del mercado durante la subasta.

Los autores (Lawrence M Ausubel et al., 2004) defienden utilizar un mecanismo discreto por dos importantes razones. En primer lugar, la comunicación rara vez es tan fiable como para que los ofertantes estén dispuestos a exponerse a un reloj continuo. Las rondas discretas son una mejor opción para solventar los problemas de comunicación, además de asegurar una ventana de licitación de duración significativa y proporciona tiempo a los licitadores para corregir cualquier problema. En segundo lugar, una subasta de ronda discreta puede mejorar la determinación de los precios al proporcionar a los licitadores la oportunidad de reflexionar entre las rondas, ya que los licitadores necesitan tiempo para incorporar la información de rondas anteriores.

A continuación vamos a exponer un pequeño caso práctico para ver y conocer el funcionamiento real de la subasta combinatoria del reloj. En este caso contaremos con dos productos disponibles a subastar y una subasta interronda. Mediante subastas interronda el subastador propone precios finales provisionales. Los licitadores entonces expresan sus demandas de cantidad en cada ronda de la subasta y en todos los vectores de precios a lo largo del segmento de línea, desde los precios de inicio de ronda hasta los precios finales de ronda propuestos. Si en algún momento de la ronda los precios llegan a un punto en el que hay un exceso de oferta de algún bien, entonces la ronda termina con esos precios. De lo contrario, la roda terminaría con los precios de fin de ronda propuestos inicialmente.

La primera ronda de precios son 90$ para el producto 1 y 180$ para el producto 2, mientras que la última ronda de precios es 100$ para el producto

1 y 200$ para el producto 2. Esto lo vemos reflejado en la Tabla 4 mostrada a continuación.

	Producto 1		Producto 2	
	Precio ($)	Cantidad (uds)	Precio ($)	Cantidad (uds)
0%	90	8	180	4
40%	94	5	188	4
60%	96	5	192	2
100%	100	5	200	2

Tabla 4. Ejemplo subasta CC. (Elaborado a partir de Lawrence M Ausubel et al., (2004)).

El subastador agrega todas las ofertas y determina si alguno de los productos se libera en rondas de hasta el 100% (es decir, si existe un exceso de demanda) y si esto no ocurre, el proceso se repite con los nuevos precios de la ronda final basándose en el exceso de demanda. Como podemos ver analizando la Tabla 4, comprobamos que hay una caída de cantidad de 8 a 5 unidades en el producto 1 que hace que éste se despeje, pero el producto 2 aún no se ha despejado ya, que la cantidad no ha disminuido. Por lo tanto, la ronda actual se contabilizará con el precio correspondiente al 40% y la siguiente ronda tendrá precios de inicio de 94$ y 188$ respectivamente y, tal vez, precios de final de ronda de 94$ y 208$. El precio del producto 1 dejaría de incrementarse ya que ya oferta no varía de 5 unidades, por lo tanto no existe un exceso de demanda. La fase del reloj concluye en el momento en el que no hay un exceso de demanda en ningún artículo y el resultado incluye todos los paquetes y los precios asociados que se ofrecieron durante la fase del reloj.

Mediante este uso de licitaciones interronda se evita la ineficiencia asociada a una cuadrícula de precios más gruesa. También se evita el comportamiento de juego que implicaría una subasta continua. Lo único que se pierde es el descubrimiento de los precios dentro de la ronda. Sin embargo, el descubrimiento de precios dentro de la ronda es mucho menos importante que el descubrimiento de precios que ocurre entre rondas.

Para finalizar veremos un ejemplo más sencillo que refleja el mecanismo seguido en una subasta combinatoria del reloj. Para ello contamos con 6 ítems (A, B, C, D, E, F) y una unidad de cada uno. En la subasta participarán 3 postores diferentes y se consideran incrementos de 1 €/unidad. En la Tabla 5 mostrada a continuación podemos ver los resultados de la primera ronda de la subasta.

		Pujas				
Ronda 1	Precio (€/ud)	Postor 1	Postor 2	Postor 3	Uds. demandadas	Uds. Ofertadas
A	1	1	1	0	2	1
B	1	0	1	0	1	1
C	1	1	0	1	2	1
D	1	1	0	1	2	1
E	1	0	0	0	0	1
F	1	0	0	1	1	1

Tabla 5. Ronda 1 ejemplo CCA. (Elaboración propia).

Observamos que tras la ronda 1 de la subasta, existe un exceso de demanda para los ítems A, C y D. Debido a esto, se incrementa el precio de esos ítems en 1 €/unidad y continuamos con la realización de la siguiente ronda, como se muestra en la Tabla 6.

		Pujas				
Ronda 2	Precio (€/ud)	Postor 1	Postor 2	Postor 3	Uds. demandadas	Uds. Ofertadas
A	2	0	1	0	1	1
B	1	0	1	0	1	1
C	2	1	0	1	2	1
D	2	1	0	0	1	1
E	1	0	0	1	1	1
F	1	0	0	1	1	1

Tabla 6. Ronda 2 ejemplo CCA. (Elaboración propia).

Mediante el incremento realizado en los ítems con exceso de demanda de la ronda anterior, podemos ver que para el ítem A y el ítem D se ha reducido el número de ofertas por parte de los postores. Sin embargo, estas se mantienen en el caso del ítem C. Puesto que sigue existiendo un exceso de demanda para el ítem C, volvemos a incrementar el precio de este ítem en 1 €/unidad y realizamos la siguiente ronda (Tabla 7).

		Pujas				
Ronda 3	Precio (€/ud)	Postor 1	Postor 2	Postor 3	Uds. demandadas	Uds. Ofertadas
A	2	0	1	0	1	1
B	1	0	0	0	0	1
C	3	1	0	0	1	1
D	2	1	0	0	1	1
E	1	0	0	1	1	1
F	1	0	0	1	1	1

Tabla 7. Ronda 3 ejemplo CCA. (Elaboración propia).

Finalmente, mediante el incremento en el precio del ítem C, la oferta ha disminuido. Por lo tanto ya no existe ningún ítem con exceso de demanda, es decir, la oferta y la demanda están equilibradas. Por este motivo, la subasta finaliza con los precios actuales del reloj.

La asignación será la siguiente: el postor 1 gana el ítem C a un precio de 3€ y el ítem D a un precio de 2€, el postor 2 gana el ítem A a un precio de 2€, el postor 3 gana los ítems E y F a un precio de 1€ cada uno. Finalmente, el ítem B queda sin asignar a ningún postor.

7. Procedimiento de subasta PAUSE

Como ya conocemos de anteriores apartados, las subastas combinatorias surgen especialmente con el objetivo de superar el problema de exposición. Es muy común el caso de subastas en las que el valor de una propiedad o bien para un postor, se incrementa si otra propiedad o grupo de propiedades es adquirida por ese mismo postor. Debido a este conflicto, los subastadores tienen un incentivo para estructurar sus subastas de manera que los participantes y postores puedan completar sus sinergias mediante la combinación de las propiedades, a fin de que sea justo para los licitadores y práctico de implementar. Por esto, el enfoque más obvio es permitir ofertas de grupos o lotes de propiedades sobre los que pujar, llamadas ofertas combinatorias (F. Kelly & Steinberg, 2000).

Sin la posibilidad de realizar estas combinaciones sobre las que pujar, los licitadores se enfrentarán al "problema de exposición" (Rothkopf et al., 1998). Como explican los autores Kelly & Steinberg, (2000), en el caso en el que el postor no pueda realizar una oferta por el paquete y deba hacerlo individualmente, puede ocurrir que adquirir el conjunto de artículos por separado le lleve a comprometerse a un precio que es más alto de lo que realmente valen para él, o por otra parte, puede no estar dispuesto a pagar una cantidad más alta a la suma de sus valoraciones individuales, algo que conllevaría perder la subasta y por lo tanto, no ser capaz de obtener el lote para el cual la sinergia lo convierte en el receptor eficiente.

Sin embargo, la implantación de las subastas combinatorias aun no es muy común ya que como hemos mencionado numerosas veces en este trabajo, acarrean una alta complejidad computacional. En general, el principal problema del subastador de determinar el conjunto de asignaciones factibles de la subasta (WDP), es un problema tipo *NP-Hard* (de Vries & Vohra, 2003).

Surge así, un procedimiento de subasta combinatoria iterativa llamado PAUSE (Progressive Adaptive User Selection Environment) por los autores Kelly & Steinberg, (2000). Esta subasta por un lado, permite todas las ofertas de paquetes, pero por otro lado, también es computable tanto para el subastador como transparente para los ofertantes que participen en la subasta. Su principal ventaja recae en que, debido a que no se puede eliminar la complejidad computacional asociada a las ofertas combinatorias (Blumrosen & Nisan, 2007), esta complejidad computacional se transfiere del subastador al ofertante que realiza la oferta por paquetes. Esto conlleva que el subastador ya no se enfrente al problema de determinación del ganador y a su alta complejidad computacional.

7.1. Dos etapas de la subasta PAUSE

El procedimiento PAUSE (Progressive Adaptive User Selection Environment) es un procedimiento en dos etapas, las cuales se definen de la siguiente manera:

I. La etapa 1 consiste en una subasta ascendente simultánea, de múltiples rondas que se realizan en tres subetapas, con requisitos progresivos de elegibilidad y un requisito de margen de mejora. Los licitadores presentan ofertas sobre propiedades individuales y separadas.
II. La etapa 2 es una subasta simultánea de varias rondas, realizada en dos subetapas, con requisitos progresivos de elegibilidad y un requisito de margen de mejora. Cuenta con ofertas compuestas (combinatorias) para facilitar la realización de las sinergias de los jugadores.

Como explican los autores (F. Kelly & Steinberg, 2000) la subasta PAUSE está diseñada con la finalidad de ser totalmente general en cada posible oferta combinatoria que esté disponible para los licitadores. Por otra parte, si el subastador desea restringir las ofertas de cualquier manera, la subasta se adaptará a ello y el subastador podrá anunciar a los postores una lista con los atributos que debe tener una oferta (es decir, las normas o restricciones que deben cumplir las ofertas realizadas por los postores para que sean válidas). En la subasta PAUSE hay un tamaño máximo permitido para un paquete, esto es, el número de artículos componentes que aumenta en el curso de la subasta. Esta característica ayuda a mitigar el "problema del umbral" (Land et al., 2006).

ETAPA 1: LICITIACIÓN DE PROPIEDADES INDIVIUALES.

En esta primera etapa cada licitador presenta una colección de ofertas en propiedades individuales, concretamente, los licitadores pueden presentar ofertas por uno o más artículos individuales pero no se permite la presentación de ofertas por paquetes. En cada una de las rondas realizadas existe un requisito de margen de mejora: la nueva oferta realizada debe mejorar la oferta de esa propiedad anterior.

El subastador en cada ronda y para cada propiedad, comprueba que la oferta por esa propiedad es válida comprobando el incremento de validez, es decir, la oferta debe satisfacer los límites del requisito del margen de mejora mencionado anteriormente.

El procedimiento PAUSE es progresivo, es decir, la ronda termina cuando se finaliza la puja por cada una de las propiedades disponibles y cuando ningún licitador desea presentar una oferta más alta. Esta primera etapa se divide en tres subetapas, de manera que al concluir la tercera subetapa, las ofertas principales (es decir, las ofertas más bajas, ya que en cada ronda se acepta la oferta más baja válida para cada propiedad) de las propiedades se registran a sus respectivos propietarios. El subastador anuncia el número de ganadores múltiples resultantes de esta primera etapa.

Regla de Actividad. Un licitador es considerado activo en una propiedad si conserva el liderazgo de la ronda anterior o si presenta una oferta aceptable en la ronda actual. Cada una de las tres subetapas que forman la etapa 1, contiene un número no especificado de rondas de licitación permitidas. Los licitadores que participen en ellas deben permanecer activos en propiedades que cubran, respectivamente en las tres subetapas, el 60%, 70% y 80% del número de suscriptores que desean seguir siendo elegibles para licitar. Para que se produzca la transición de la subetapa 1 a la subetapa 2 se debe cumplir que haya ofertas en no más de 10% de los suscritores durante tres rondas consecutivas. Y el paso de la subetapa 2 a la subetapa 3, cuando hay ofertas en no más del 5% de los suscriptores durante tres rondas consecutivas.

Múltiples ganadores. Al concluir la tercera subetapa, el subastador anuncia el número de ganadores de cada propiedad. Si al menos una oferta está dentro del 15% de la oferta más baja, entonces todos los que ofrecen dentro de este 15% de la oferta más baja son designados ganadores. Si ninguna oferta está dentro del 15% pero una está dentro del 25%, entonces los ofertantes más bajos son ganadores y por último, si ninguna oferta está dentro del 25% entonces hay un solo ganador de la subasta. El número de ganadores múltiples en cada propiedad j es denominada como $m(j)$. Antes del comienzo de la etapa 2, la propiedad j se reemplaza por las propiedades $j1, j2, j3, \dots, jm(j)$ y a cada una de ellas se le asigna un número nominal de suscriptores igual a $sub(j)/m(j)$ donde $sub(j)$ denota el número de suscriptores de la propiedad j.

ETAPA 2: OFERTAS COMBINATORIAS.

En esta etapa las ofertas no pueden presentarse de forma aislada, de manera que cada licitador debe presentar sus ofertas como parte de una oferta compuesta que consiste en un conjunto de ofertas de paquetes no superpuestas, que abarcan todos los artículos de la subasta. En general, un licitador estará interesado en presentar una oferta sólo para un subconjunto de artículos de la subasta, y en cualquier ronda, tal vez sólo lo estará para un subconjunto de estos. Sin embargo, en el caso de los artículos por los que no tenga interés en pujar, el postor completa su oferta compuesta utilizando las ofertas anteriores de cualquiera de los licitadores.

Formalmente, una oferta compuesta consiste en (Land et al., 2006):

1. Una división del conjunto de elementos en subconjuntos llamados bloques.

2. Una asignación que asigna cada bloque tanto a un licitador como al precio de la oferta de ese bloque.
3. Una evaluación, que es la suma de los precios de las ofertas de todos los bloques de la partición

Del mismo modo que en la etapa 1, en cada ronda hay un requisito de margen de mejora: Sea b el número de nuevas ofertas en la oferta compuesta. La nueva evaluación debe mejorar la mejor evaluación anterior en al menos b y estrictamente menos de $2b$.

Es importante mencionar que en esta etapa de la subasta, las identidades de los ofertantes se hacen púbicas. Por lo tanto, la validez de una oferta puede ser comprobada por el jugador que construya la oferta compuesta, algo que aporta transparencia y fidelidad a la subasta. Además, en cada ronda, el subastador debe comprobar la validez de las ofertas realizadas por los postores. En cada ronda de esta segunda etapa se registra en una base de datos la nueva colección de ofertas sobre los paquetes junto a sus respectivos propietarios y se acepta la oferta compuesta válida más baja. De esta manera, en cada ronda, el subastador acepta una oferta compuesta de entre todas las ofertas compuestas presentadas por los postores, pero registra todas y cada una de las ofertas válidas. La ronda terminará cuando termine la puja y no se ofrezcan nuevas ofertas.

<u>Regla de actividad</u>. La diferencia de las reglas de actividad de la etapa 2 con respecto a la etapa 1 es que los licitadores deben permanecer activos en propiedades que cubran, respectivamente en las dos subetapas, el 90% y el 98% del número de suscriptores para los que desean seguir siendo elegibles para licitar. La transición de la subetapa 1 a la subetapa 2 se produce cuando se presentan ofertas por un máximo del 10% de los suscriptores durante tres rondas consecutivas.

<u>Múltiples ganadores</u>. Al finalizar la etapa 2 los ganadores de $m(j)$ en la propiedad j son designados cada uno de ellos con una cuota de $1/m(j)$ de la responsabilidad de la propiedad j. En concreto, la obligación contractual de cada jugador es la siguiente:

1. El jugador recibirá su subsidio de oferta por suscriptor hasta $1/m(j)$ del número total de suscriptores en esa propiedad.
2. La autoridad reguladora podrá exigir a cualquier ganador de esa propiedad que no esté cumpliendo con el monto total de su participación contractual, que atienda a cualquier suscriptor no atendido a esa propiedad.

Es esencial que, antes del comienzo de la etapa 2, el subastador establezca las reglas que debe cumplir una oferta válida compuesta de manera que puedan ser comprobadas tanto por los ofertantes como por el subastador. En particular, no es el subastador el que debe tratar de decidir el número de ganadores múltiples después del fin de la subasta, ya que hacerlo implicaría una tarea considerable de complejidad computacional para el subastador.

Land et al., (2006) realizan cuatro simplificaciones adicionales y asumen que no hay restricciones de presupuesto. Las dos primeras simplificaciones se refieren a la estructura de la subasta, la tercera se refiere al comportamiento del ofertante y la cuarta se asegura de que no se produzca el empate en las ofertas compuestas:

1. La subasta formada por *m* artículos funcionará durante *m* etapas.
2. No existe un límite de rondas en cada etapa.
3. Todos los ofertantes participarán en una licitación directa, esto es, cada licitador presentará la oferta mínima que maximice su beneficio dados los precios actuales de la oferta. Además, ningún licitador podrá hacer una oferta que, en caso de ser aceptada, le daría un beneficio negativo.
4. Al finalizar una etapa habrá una única oferta compuesta que se ofrece al subastador.

Los autores Land et al., (2006) ilustran cómo se forman las ofertas compuestas en la subasta PAUSE mediante el siguiente ejemplo. Contamos con seis artículos a subastar que son $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. La etapa 1 terminó con una oferta de 5$ por cada uno de los seis artículos que se subastan por parte de los licitadores A, B, C, D, E, y F respectivamente; de este modo, el subastador obtuvo unos ingresos totales por estas seis ofertas de 30$. Sin embargo, en la ronda actual hay ofertas permanentes correspondientes a 10$ del ofertante A por el paquete de artículos α, α', 20$ del ofertante B por el paquete β, β' y 15$ del ofertante C por el paquete γ, γ'. Estas tres ofertas suponen unos ingresos que ascienden a un total de 45$ por parte del subastador. Además, el ofertante A tiene una valoración alta para el paquete compuesto por los artículos α, β, γ y realiza una oferta compuesta formada por una oferta presentada por él mismo de 35$ por el paquete α, β, γ, junto con las anteriores ofertas de 5$ de cada uno de los artículos α', β', γ' de los postores D, E y F, respectivamente. Finamente, los ingresos del subastador serán de 50$ resultante de la oferta compuesta del postor A.

A continuación en la Figura 21 vemos otro ejemplo expuesto por Kelly & Steinberg, (2000) en su trabajo dónde se puede entender, de manera más visual, la formación de las distintas ofertas dependiendo de la etapa en la que se encuentren. En la Figura 21 podemos analizar el funcionamiento de una subasta de seis artículos en la que participan los postores a, b, c y d. Durante la etapa 1 los postores realizan sus ofertas por separado y de manera individual. En la Figura 21 vemos el resultado de la ronda final de la etapa 1.

Después, durante la etapa 2, se presentan las ofertas compuestas y como vemos, los postores realizan sus ofertas conjuntas junto con los demás postores. Se siguen realizando rondas hasta que se encuentra la mejor valoración, es decir, la oferta más baja y no se realizan más ofertas. El subastador finaliza anunciando los ganadores de la subasta.

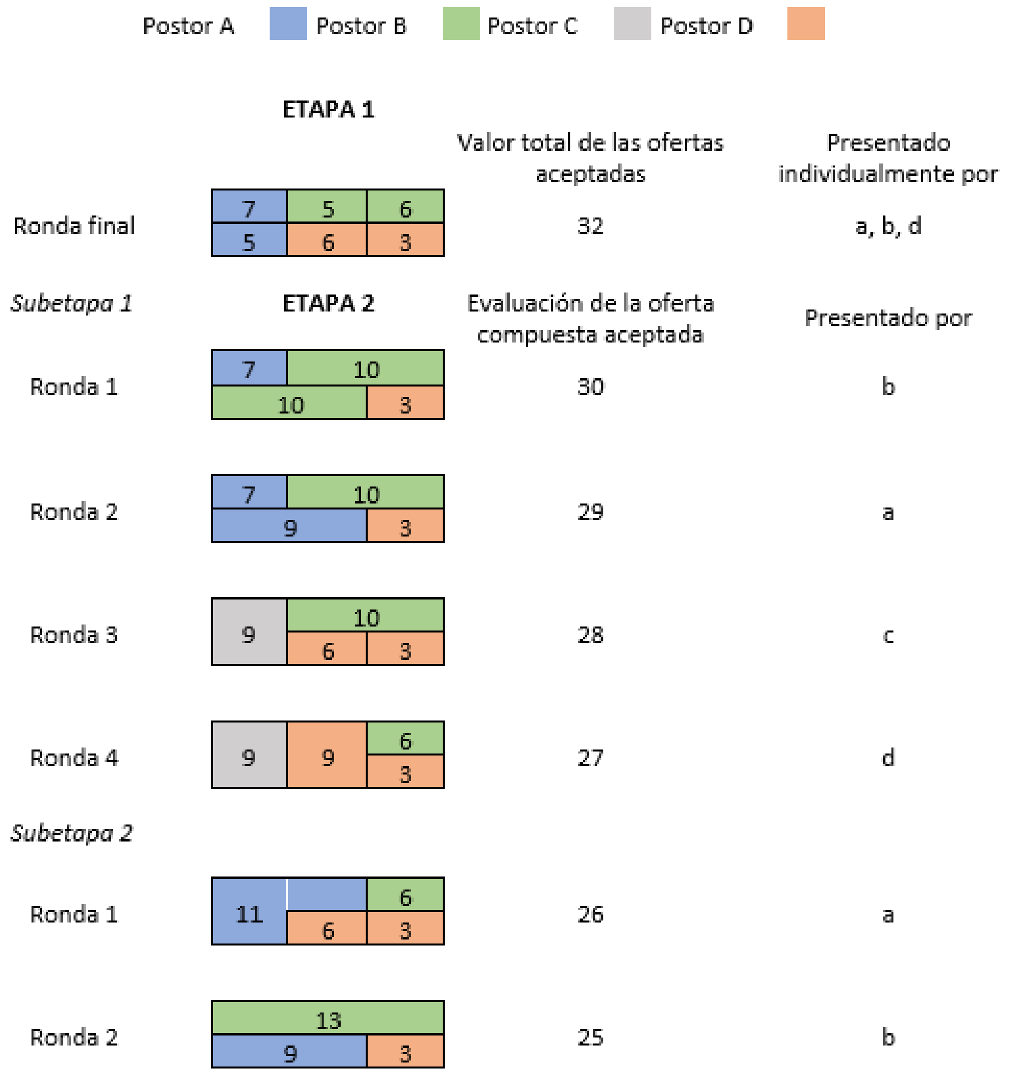


Figura 21. Ejemplo subasta PAUSE. (Elaborado a partir de Kelly & Steinberg, (2000))

Kelly & Steinberg, (2000) explican que, aunque para el procedimiento presentado de la subasta PAUSE el problema del subastador de determinar la oferta ganadora es computable y sencilla, para un licitante puede tratarse de un problema tipo *NP-Hard* determinar si puede construir una oferta compuesta que supere la oferta compuesta actualmente aceptada. Sin embargo, se trata de un problema con muy poca carga computacional para los pequeños postores interesados en sólo un pequeño número de propiedades. Como apuntan Rothkopf et al., (1998), si la forma de generar las ofertas compuestas se restringe de una o varias maneras, entonces el problema puede convertirse en uno mucho más computable. Sin embargo, esto puede no ser así en los casos en que es poco probable que los licitadores lleguen a un acuerdo sobre la forma de restricción apropiada de las ofertas compuestas, ya que entones, el problema adopta una forma mucho más compleja y difícil de abordar.

7.2. Propiedades de la subasta PAUSE

Como ya se ha mencionado con anterioridad, el procedimiento de subasta PAUSE se define como un procedimiento progresivo ya que la subasta concluye sólo cuando ningún ofertante desea presentar una oferta más alta al igual que ocurre con la subasta de Vickrey (Vickrey, 1961). Además, también es progresivo en el sentido de que se establece un tamaño máximo permitido para cada paquete. Este aspecto progresivo ayuda a mitigar el "problema del umbral" (Porter et al., 2003) presentado en anteriores capítulos.

Una característica que distingue claramente a la subasta PAUSE de los demás mecanismos de subasta es que, para formas las ofertas de paquetes, los postores hacen uso de las ofertas de los demás participantes (Land et al., 2006). Otro aspecto significativo que ya se ha mencionado es que en PAUSE, un ofertante no está autorizado a realizar una oferta de un paquete por sí mismo, sino que debe presentarla como parte de una oferta conjunta que comprende una colección de ofertas de paquetes que abarquen todos los artículos de la subasta. Además, otro punto a favor de este procedimiento es que los autores de las ofertas no son anónimos, por lo tanto sus competidores pueden saber su identidad, algo que les puede aportar información.

(F. Kelly & Steinberg, 2000) explican las tres consecuencias importantes que acarrea la presentación de ofertas compuestas:

1. **Trazabilidad computacional**. El subastador no tiene que hacerse cargo de la alta carga combinatoria y computacional ya que no tiene que juntar las ofertas individuales y simplemente necesita elegir la mejor oferta válida.
2. **Transparencia**. Los ofertantes que hayan perdido la subasta pueden comprobar los motivos de su pérdida comparando su oferta con la oferta compuesta ganadora, de manera que se ofrece una alta transparencia para los licitantes.
3. **Ausencia de envidia**. Al finalizar la subasta, ningún licitador preferirá intercambiar su asignación con la de otro licitador, además de que se conocerán la identidad de todos los postores.

En su trabajo, (F. Kelly & Steinberg, 2000) se centran en cuestiones de interés para el subastador, como son los límites en las rondas de la subasta PAUSE y la forma en el que el procedimiento mitiga el problema del umbral. También tuvieron en cuenta cuestiones de aplicación, ensayo y validación de las ofertas y aunque el procedimiento PAUSE se aplica a las subastas combinatorias en general, los autores Kelly & Steinberg, (2000) lo presentaron en el contexto de la asignación de servicios de compañías telefónicas. "Para esa solicitud, la Comisión Federal de Comunicaciones (FCC) de los EE.UU exigió que el procedimiento incluyera algunas características adicionales, la más importante de ellas era la concesión de múltiples ganadores" (Land et al., 2006, p. 4).

8. Comparación de mecanismos combinatorios

Para finalizar el presente trabajo, analizaremos los mecanismos explicados anteriormente y los clasificaremos de acuerdo con las características de las subastas, con el fin de enmarcarlos, conseguir una visión más global de estos mecanismos, compararlos y medir su alcance.

La clasificación de los mecanismos se realizará en base a las características expuestas en el capítulo *Subastas combinatorias* al comienzo de este trabajo, de manera que catalogaremos cada mecanismo en función de los criterios que se muestran en Tabla 8:

Naturaleza de los ítems	
Divisibles	Indivisibles
Tipo de subasta	
Hacia adelante (forward auction)	Hacia atrás (reverse auction)
Objetivo de la subasta	
Eficiencia local	Eficiencia social
Regla de precios	
Primer precio	Segundo precio (subasta Vickrey)
Mecanismo de subasta	
Estática	Dinámica
Información revelada	
Subasta de oferta cerrada	Subasta de oferta abierta

Tabla 8. Clasificación de las subastas combinatorias (Elaboración propia).

Clasificaremos los ítems en función de si son bienes indivisibles o bienes divisibles. Es necesario recalcar que la divisibilidad de los artículos debe distinguirse claramente de la divisibilidad de la oferta, de manera que la primera depende intrínsecamente de la naturaleza física del bien, mientras que esta última se refiere a la tolerancia de los licitantes para obtener la ejecución parcial de sus ofertas (Abrache et al., 2004).

También se tendrá en cuenta el tipo de subasta de la que estamos hablando en cada caso, es decir, el papel que desempeñan los participantes en la subasta, distinguiendo entre las subastas hacia adelante, en las que existe un vendedor y múltiples compradores, o la subasta hacia atrás o de adquisición, que corresponde a las subastas en las que existen muchos vendedores y un comprador, como se ha explicado en anteriores capítulos de este trabajo.

Así mismo, consideraremos cuál es el objetivo de la subasta, en las que podemos distinguir por un lado, una eficiencia local cuando se optimizan los ingresos del vendedor, el costo para el comprador o el superávit de la subasta, y por otro lado, una eficiencia social, cuando se busca optimizar el bienestar social general de los participantes.

En cuanto a las reglas de precio utilizadas en la subasta, hemos visto que existen múltiples reglas pero en esta clasificación tendremos en cuenta las dos reglas de precios más comunes: de primer precio, en la que el ganador de la subasta paga el precio más alto ofertado, o la subasta de segundo precio o subasta de Vickrey, en la que el precio a pagar por el ganador de la subasta es el segundo precio más alto.

También se clasificará el método estudiado según el mecanismo de subasta, ya sea una subasta estática correspondiente a una sola ronda, o a una subasta dinámica, compuesta por más de una ronda, por lo que los participantes no están obligados a realizar sus ofertas de una sola vez y la asignación de los ganadores y los precios se determinan en la última ronda.

Por último, contemplaremos qué información se revela a los participantes, distinguiendo entre subastas de oferta cerrada en las que no se revela información a los participantes, y las subastas abiertas, que proporcionan información sobre el estado de la subasta (Abrache et al., 2004).

Mediante estos parámetros se pueden derivar diferentes situaciones y mecanismos de subasta combinatoria, aunque el desafío del diseño de mecanismos para las subastas combinatorias es mucho más amplio. Por lo tanto, los diseñadores de mercados que tratan de aplicar los mecanismos de subasta tienen que lidiar con muchas cuestiones complicadas de abordar. Muchas de esas cuestiones se basan principalmente en la experiencia del diseñador y su conocimiento en el contexto de las subastas (Rothkopf et al., 1998).

Lo más importante, y de lo que el diseñador debe asegurarse estableciendo adecuadamente las reglas de la subasta, es de que los objetivos se logren siempre, incluso en los entornos en los que los participantes tienen intereses propios y se caracterizan por información incompleta (Abrache et al., 2004). El hecho de abordar estas cuestiones ha motivado el esfuerzo general de investigación sobre el diseño de mecanismos, y una gran parte de este esfuerzo se ha dedicado a los mecanismos de subasta combinatoria.

8.1. Clasificación del método de la teoría de grafos para subastas de aprovisionamiento

El algoritmo de *k*-mejores soluciones se puede aplicar para establecer una subasta de múltiples tipos de bienes y en muchas unidades, independientemente de su naturaleza, es decir, los bienes pueden ser tanto divisibles como indivisibles. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que en todos los métodos presentados en este trabajo, a la hora de formular el modelo, consideramos que las pujas son indivisibles.

Kelly & Byde, (2006) explican que un algoritmo que consigue generar las *k*-mejores soluciones, en el caso más general, es capaz de proporcionar soluciones aunque con una escalabilidad limitada. Sin embargo defienden que, cuando se aplica a subastas inversas (subastas hacia atrás) puede escalar tamaños de problemas prácticos y encontrar una solución óptima al problema de determinación del ganador (WDP), permitiendo conocer el costo de las limitaciones. De acuerdo con estas afirmaciones, clasificaremos este método como un tipo de subasta hacia atrás.

En cuanto al objetivo de la subasta, podemos considerar que es tanto proporcionar una eficiencia social como una eficiencia local, ya que aparte de desear obtener las mercancías a un costo mínimo total, el subastador también puede preocuparse por otras características que interpreten un papel importante a la hora de evaluar la calidad de la asignación. Algunas de estas características pueden ser el porcentaje de negocios adjudicados a un proveedor específico o la calidad de sus entregas. Kelly & Byde, (2006) defienden que este enfoque se adapta a tamaños de problemas reales de subastas de adquisición, permitiendo introducir restricciones o preferencias de los agentes. Mediante el gráfico de resultados visto en este trabajo se pueden acomodar restricciones globales con sólo un modesto aumento de la complejidad computacional.

En su trabajo, Kelly & Byde, (2006) no especifican una regla de precios estricta para la realización del método de las *k*-mejores soluciones, por lo tanto clasificaremos este método con la posibilidad de diseñarlo con ambas reglas de precio, es decir, de primer precio o como una subasta Vickrey.

El mecanismo de subasta expuesto por Kelly & Byde, (2006) consiste en un mecanismo estático, es decir, una subasta compuesta por una única ronda en las que se permite ofrecer descuentos por volumen o recargos por volumen. Una vez realizadas las ofertas en la subasta se pasa a computar el algoritmo de *k*-mejores soluciones, de manera que el problema de generar las *k*-mejores soluciones aceptables más baratas se convierte en el problema de computar los *k*-caminos más cortos en el gráfico de las posibles soluciones.

Respecto a la información revelada durante la subasta a los postores, Kelly & Byde, (2006) especifican que el método de las *k*-mejores soluciones se aplica en subastas combinatorias con intercambios de ofertas selladas, es decir, los participantes no saben cuánto han pujado los demás participantes en la subasta. El mejor postor es declarado ganador del proceso de licitación. Los licitantes sólo pueden presentar una oferta y, por lo tanto, no pueden ajustar sus ofertas basándose en ofertas competidoras.

Estas características permiten al método de las k-mejores soluciones obtener buenos resultados basados en ofertas reales de subastas de adquisición y puede generar un alto número de soluciones a los WDP de las subastas prácticas, a pesar de que la complejidad del algoritmo aumente con el número de vendedores y de artículos, además de verse afectado por las restricciones o preferencias de los agentes que participen en la subasta. Se trata de una útil y sencilla herramienta con la que puede contar el responsable de la toma de decisiones en la subasta y que le aporta valiosas opciones, tanto cualitativas como cuantitativas, en una región del espacio prometedora.

Así pues, resumimos las características del método de las *k*-mejores soluciones en la Tabla 9.

Naturaleza de los ítems	
Divisibles ✓	Indivisibles ✓
Tipo de subasta	
Hacia adelante (forward auction)	Hacia atrás (reverse auction) ✓
Objetivo de la subasta	
Eficiencia local ✓	Eficiencia social ✓
Regla de precios	
Primer precio ✓	Segundo precio (subasta Vickrey) ✓
Mecanismo de subasta	
Estática ✓	Dinámica
Información revelada	
Subasta de oferta cerrada ✓	Subasta de oferta abierta

Tabla 9. Clasificación de las características del método de la teoría de grafos (Elaboración propia).

Estas características permiten al método de las *k*-mejores soluciones obtener buenos resultados basados en ofertas reales de subastas de adquisición y puede generar un alto número de soluciones a los WDP de las subastas prácticas, a pesar de que la complejidad del algoritmo aumente con el número de vendedores y de artículos, además de verse afectado por las restricciones o preferencias de los agentes que participen en la subasta. Se trata de una útil y sencilla herramienta con la que puede contar el responsable de la toma de decisiones en la subasta y que le aporta valiosas opciones, tanto cualitativas como cuantitativas, en una región del espacio prometedora.

8.2. Clasificación del protocolo combinatorio para la formación de cadenas de suministro

El protocolo combinatorio descrito por los autores Walsh et al., (2000) en su trabajo, tiene como propósito solventar el suboptimismo que surge a partir de los protocolos de negociaciones separadas y de nuevo, puede ser utilizado al margen de la naturaleza del ítem, en otras palabras, puede emplearse tanto para subastar bienes divisibles como para bienes indivisibles.

Acerca del tipo de subasta propuesto para este protocolo podemos clasificarlo tanto como una subasta hacia adelante como una subasta inversa, integrando ambos tipos de subastas en una, ya que al tratarse de la formación de una cadena de suministro en la que participan consumidores que desean adquirir un bien concreto al igual que productores, que pueden producir outputs y para ello están condicionados a adquirir un determinado número de bienes de entrada para producirlos.

El objetivo del método propuesto por Walsh et al., (2000) es analizar la eficiencia y el superávit del productor y compararlo con el de un protocolo de subasta distribuido y progresivo con pujas no estratégicas, de manera que clasificaremos el objetivo de este protocolo de subasta combinatoria en el ámbito de la eficiencia local.

En cuanto a la regla de precios impuesta en este protocolo de subasta, los autores Walsh et al., (2000) no especifican si el precio que deberá pagar el ganador de la asignación será el precio más alto, como en la subastas de primer precio, o si el ganador deberá pagar el segundo precio más alto como incentivo para el postor a ofrecer su valoración real, por lo tanto, el diseñador cuenta con ambas opciones.

A diferencia de los demás modelos combinatorios expuestos en el presente trabajo, los autores Walsh et al., (2000) aplican el protocolo combinatorio a subastas de una sola ronda en las que los agentes presentan ofertas de todo o nada y defienden que esto da lugar a asignaciones óptimas con ofertas veraces utilizando una política de oferta estratégica. Por lo tanto, el mecanismo de subasta utilizado en este protocolo es un mecanismo estático, es decir, los postores realizan sus ofertas de bienes y los ganadores de la subasta son determinados de una sola vez (Santamaría, 2005).

Por último, en lo que concierne a la información revelada a los postores durante la subasta, en la subasta combinatoria se reciben todas las ofertas y se hacen cumplir las reglas de licitación mientras se comunica la información a los agentes y en función de las ofertas recibidas por los postores, se realizan las asignaciones. Las ofertas presentadas por estos postores de formulan dependiendo de unas políticas de licitación, de sus preferencias y de la información recibida durante la subasta. En efecto, podemos clasificar este protocolo de subasta combinatoria como una subasta de oferta abierta ya que los postores cuentan con información diversa a la hora de realizar sus ofertas.

Naturaleza de los ítems	
Divisibles ✓	Indivisibles ✓
Tipo de subasta	
Hacia adelante (forward auction) ✓	Hacia atrás (reverse auction) ✓
Objetivo de la subasta	
Eficiencia local ✓	Eficiencia social
Regla de precios	
Primer precio ✓	Segundo precio (subasta Vickrey) ✓
Mecanismo de subasta	
Estática ✓	Dinámica
Información revelada	
Subasta de oferta cerrada	Subasta de oferta abierta ✓

Tabla 10. Clasificación de las características del protocolo combinatorio estratégico para la formación de la cadena de suministro (Elaboración propia).

A la vista de las características de este protocolo combinatorio y de lo expuesto por los autores Walsh et al., (2000), podemos afirmar que una subasta combinatoria mejora notablemente muchos de los problemas de coordinación que se pueden producir en subastas de negociaciones separadas. Si estos agentes pujan de forma no estratégica se puede llegar a obtener resultados y asignaciones óptimas pero los productores a su vez también pueden obtener importantes beneficios mediante políticas de licitación estratégica. Por lo tanto, el carácter de este protocolo combinatorio queda enmarcado en función del campo de estudio de como se muestra en la Tabla 10.

8.3. Clasificación subasta del reloj

La subasta del reloj ha resultado ser un mecanismo de subasta muy utilizado y que ha supuesto una importante innovación en el mercado, llegando a ser muy implementada en subastas reales de espectro en todo el mundo. Es por esto por lo que puede ser llevado a cabo para subastar ítems tanto divisibles como indivisibles. Por ejemplo, la capacidad de las redes de telecomunicaciones o los terrenos se tratan de bienes divisibles, mientras que también se pueden subastar bienes indivisibles como son los derechos de pasos de ferrocarril o los lotes de artículos. Por este motivo, la subasta del reloj puede ser utilizada para subastar cualquier tipo de bien, independientemente de su naturaleza, proporcionando al subastador una gran flexibilidad.

En cuanto al tipo de subasta que puede ser utilizada con este mecanismo, la clasificamos como una subasta hacia adelante ya que contamos con un vendedor y múltiples compradores que pujan por adquirir un bien, a la vez que los precios del reloj aumentan en función de la demanda.

En lo que respecta al objetivo de la subasta podemos considerar que obtiene resultados socialmente eficientes ya que este mecanismo de subasta permite optimizar el bienestar social general de los participantes, resultando un mecanismo efectivo tanto para el subastador, que puede ver maximizados sus ingresos y que no debe lidiar con una alta complejidad computacional, como para los participantes, ya que su principal ventaja está en su simplicidad y los ofertantes cuentan con la completa libertad de moverse dentro y fuera de la subasta, pujando por cualquier paquete a voluntad y pudiendo mezclar los precios actuales y anteriores del reloj. Además, otra de las grandes ventajas con la que cuentan los postores es que la subasta del reloj permite descubrir los precios, ayudando así a reducir la maldición del ganador.

En relación con las reglas de precios, la subasta del reloj que nosotros describimos se determina por las reglas de Vickrey, de manera que la asignación de precios correspondiente se determina por las reglas Vickrey-Clarke-Groves (Janssen & Kasberger, 2019). Este sistema de subasta asigna los elementos de una manera socialmente óptima, dando a los licitadores un incentivo para ofertar sus verdaderas valoraciones, con el fin de obtener una asignación eficiente.

Según lo explicado, la subasta del reloj se trata de un mecanismo de subasta dinámico, formado por varias rondas en las que las ofertas avanzan a medida que los precios aumentan, hasta que la demanda agregada es inferior o igual a la oferta de cada artículo. Por lo tanto, los participantes no están obligados a realizar sus ofertas de una sola vez por los conjuntos que sean de su interés. Tras varias rondas, la asignación de los ganadores y los precios finales del reloj a pagar por estos, se determinan en la última ronda.

Por último, en las subastas del reloj suele informarse sólo de la demanda agregada de las mercancías después de cada ronda ya que en muchas situaciones, las demandas agregadas contienen la mayor parte de la información necesaria para la determinación de los precios. Si, en cambio, el subastador revelara las demandas individuales de los postores, esta información tan detallada podría ser utilizada para facilitar una reducción coordinada de las demandas a precios bajos. Para evitar esa posibilidad Ausubel & Cramton, (2004) afirman que, en las subastas del reloj reales, el subastador informa sólo de las demandas agregadas de fin de ronda, y no de las demandas individuales de los licitadores. Además, el comportamiento estratégico se puede controlar aún más si los postores sólo cuentan con la información necesaria, de manera que no necesitarían saber quién está ofertando o cuántos están pujando y por qué artículos están pujando. Por lo tanto, podemos clasificar este mecanismo de subasta como una subasta de sobre cerrado ya que no proporciona esta información a los participantes.

Naturaleza de los ítems	
Divisibles ✓	Indivisibles ✓
Tipo de subasta	
Hacia adelante (forward auction) ✓	Hacia atrás (reverse auction)
Objetivo de la subasta	
Eficiencia local	Eficiencia social ✓
Regla de precios	
Primer precio	Segundo precio (subasta Vickrey) ✓
Mecanismo de subasta	
Estática	Dinámica ✓
Información revelada	
Subasta de oferta cerrada ✓	Subasta de oferta abierta

Tabla 11. Clasificación de las características de la subasta CC (Elaboración propia).

A modo de resumen, la Tabla 11 indica las características expuestas anteriormente según la clasificación realizada en la Tabla 8.

Como podemos ver, la subasta combinatoria del reloj cuenta con unas características que presentan este mecanismo como una buena opción a la hora de implementarlo para diseñar una subasta. Sus amplias ventajas como su flexibilidad, transparencia, simplicidad, libertad de movimiento dentro de la subasta y su descubrimiento de precios convierten a la subasta combinatoria del reloj en una de las subastas más usadas en todo el mundo y a pesar de ser muy novedosas, ya se han aplicado en subastas de alto riesgo en media docena de países. Aun así, el estudio y uso de la subasta combinatoria del reloj puede expandirse enormemente y sigue siendo un interesante objeto de estudio.

8.4. Clasificación subasta PAUSE

El procedimiento de subasta combinatoria iterativa PAUSE (Progressive Adaptive User Selection Environment) planteado por Kelly & Steinberg, (2000), permite todas las ofertas de paquetes y a su vez, se transfiere la complejidad computacional asociada a las ofertas combinatorias, del subastador al ofertante. Este procedimiento de subasta se puede implementar para cualquier tipo de ítem, independientemente de la naturaleza de este, es decir, el subastador puede llevar a cabo este diseño de subasta tanto para bienes divisibles como para bienes indivisibles. Es necesario tener en cuenta que durante la primera etapa de la subasta se presenta una colección de ofertas individuales mientras que en la segunda etapa las ofertas se presentan como parte de una oferta compuesta.

Del mismo modo ocurre a la hora de clasificar el procedimiento PAUSE según el tipo de subasta ya que se puede poner en práctica tanto como una subasta hacia adelante como una subasta de adquisición (hacia atrás). Gracias a la gran trazabilidad computacional de esta subasta, el subastador no tiene que acarrear con la alta carga combinatoria y computacional, por este motivo, el diseñador de la oferta cuenta con una gran libertad de acción.

Sin embargo, y de acuerdo con lo anteriormente dicho, clasificamos el objetivo de la subasta como una eficiencia local. Aunque se trata de un problema con muy poca carga computacional para los postores, una característica que distingue claramente la subasta PAUSE de los demás mecanismos de subasta es que la complejidad computacional se transfiere del subastador al ofertante, que realiza la oferta por paquetes (F. Kelly & Steinberg, 2000). Esto implica que el subastador no se enfrente al problema de determinación del ganador y a su alta carga computacional. Por consiguiente, podemos considerar que se optimizan los ingresos del vendedor, en el caso de una subasta hacia adelante, o el costo para el comprador si se trata de una subasta de adquisición, dadas las ofertas de los participantes.

Kelly & Steinberg, (2000) definen el procedimiento de subasta PAUSE como un procedimiento progresivo, de manera que la subasta concluye únicamente cuando ningún ofertante desea presentar nuevas ofertas (en este caso una oferta compuesta más baja) de acuerdo con las reglas de precio establecidas por la subasta Vickrey.

En cuanto a la clasificación de la subasta PAUSE, de acuerdo con el mecanismo de subasta, se ha explicado anteriormente la naturaleza progresiva de este procedimiento. No se trata de una subasta estática, sino de una subasta dinámica ya que las dos etapas que la forman se realizan mediante múltiples rondas para facilitar la sinergia de los participantes y conseguir un resultado óptimo. Además, un punto a favor de este aspecto progresivo es que ayuda a mitigar el "problema del umbral".

Un aspecto interesante de esta subasta tiene que ver con la información revelada a sus participantes. En la segunda etapa de la subasta, las identidades de los ofertantes se hacen públicas, de manera que los postores pueden comprobar la validez de las ofertas compuestas y además, se conocen las ofertas de los competidores ya que cada licitador debe presentar sus ofertas como parte de una oferta compuesta en conjunto con los demás licitadores. Debido a la alta información con la que cuentan los ofertantes, el procedimiento de subasta PAUSE proporciona una alta transparencia y por ello se clasifica como una subasta de oferta abierta.

Naturaleza de los ítems	
Divisibles ✓	Indivisibles ✓
Tipo de subasta	
Hacia adelante (forward auction) ✓	Hacia atrás (reverse auction) ✓
Objetivo de la subasta	
Eficiencia local ✓	Eficiencia social
Regla de precios	
Primer precio	Segundo precio (subasta Vickrey) ✓
Mecanismo de subasta	
Estática	Dinámica ✓
Información revelada	
Subasta de oferta cerrada	Subasta de oferta abierta ✓

Tabla 12. Clasificación de las características de la subasta PAUSE (Elaboración propia)

En definitiva y según con todo lo aquí expuesto sobre la subasta PAUSE, Tabla 12 muestra la clasificación final de la subasta PAUSE de acuerdo con las características de las subastas combinatorias.

A pesar de sus llamativas características, la subasta PAUSE proporciona importantes ventajas como una gran trazabilidad computacional ya que el subastador no se hace cargo de la carga combinatoria y simplemente debe elegir la mejor oferta válida, su transparencia, gracias a la gran información revelada a los participantes, quienes pueden comprobar el motivo de su asignación en la subasta comparando su oferta con la oferta ganadora y la ausencia de envidia, debido a que los participantes conocerán la identidad de todos los postores. Estos puentes fuertes colocan a la subasta PAUSE como una buena opción a la hora de diseñar una subasta y ya ha sido utilizada por instituciones como la Comisión Federal de Comunicaciones (FCC) de los Estado Unidos.

8.5. Aplicaciones a los mecanismos combinatorios

En general, estos mecanismos de subasta pueden ser utilizados en múltiples ámbitos, pero más concretamente tienen numerosos usos en el campo de la ingeniería de organización industrial. Un caso en particular es el del uso de un protocolo combinatorio para la formación de una cadena de suministro, o la utilización de redes de dependencia para obtener soluciones a subastas de aprovisionamiento.

Los mecanismos combinatorios de la subasta del reloj y de la subasta PAUSE, a pesar de haber sido utilizado especialmente para la asignación de espectro de frecuencia en Estados Unidos bajo la supervisión de la *Federal Communications Commision* (FCC), también pueden emplearse para la asignación de redes de transporte, distribución y almacenamiento. Especialmente, la subasta del reloj puede aplicarse perfectamente en otros ámbitos donde numerosos productores ponen a la venta sus productos frente a numerosos compradores (subastas dobles). Esto es perfectamente aplicable al novedoso escenario llamado “B2B Exchanges” (*Business to Bussines Exchanges*) (Martín Oller, 2007) que consisten en unir proveedores y compradores en una sola entidad que se encarga de asignar los bienes y el dinero entre ellos, algo que se ha hecho muy popular dentro del negocio de la logística y que manejan una interesante porción del mercado.

9. Conclusiones

Las subastas se han convertido en uno de los mecanismos de asignación más utilizado a la hora de transferir bienes. En los últimos años la importancia de estas transacciones realizadas mediante subastas ha sido muy significativa. Su uso se ha ido extendiendo a nuevos sectores de bienes y servicios y se ha incrementado notablemente el número de participantes de las subastas, tanto del lado de la oferta como del de la demanda.

Las subastas condicionan los comportamientos de sus participantes a partir de unas reglas preestablecidas y explícitas y además, las hacen muy interesantes para su estudio y análisis. Estas subastas se utilizan en la actualidad en numerosos ámbitos como las licencias, explotaciones, títulos y propiedades, hasta obras de arte, antigüedades y artículos personales. Además, la aparición de Internet ha sido clave para fomentar el uso de las subastas, de manera que hoy en día cualquier cosa puede ser vendida o comprada a través de una subasta por aquel que lo desee.

Uno de los grandes avances de las subastas y que más se ha utilizado en los últimos tiempos han sido las subastas combinatorias. La mejora de las subastas de múltiples objetos es constante, ya que presentan algunas particularidades que no se encuentran en las subastas de objetos individuales y tienden a dar lugar a asignaciones más eficientes que los mecanismos de subasta tradicionales. Esto convierte a las subastas combinatorias en un tema mucho más complejo, dinámico y con mucho espacio para el diseño. Esto es especialmente importante en las situaciones en las que los ítems son complementarios y existe una sinergia entre ellos, de manera que los ofertantes solo están interesados en conseguir el paquete completo.

Las subastas combinatorias han demostrado ser una aproximación eficaz a la hora de resolver problemas de asignación en los diversos mercados, y por ello, en la última década ha crecido significativamente su interés gracias a la aplicabilidad de estas y las ventajas que ofrecen. Este tipo de subastas puede maximizar tanto el beneficio del subastador como estimular la competencia entre los distintos postores.

Uno de los principales problemas asociados a las subastas combinatorias es encontrar una asignación de artículos a los licitadores, es decir, determinar los ganadores de las subastas. Este problema de determinación del ganador es conocido como *Winner Determination Problem* (WDP) y es uno de los retos computacionales más estudiados en lo relacionado con este tipo de subastas. Este problema es de tipo *NP-Hard*, es decir, no es posible encontrar una solución en tiempo polinómico. Aun así, se puede llegar a distintas aproximaciones más o menos óptimas. Para abordar este problema se han seguido tres enfoques fundamentalmente diferentes (Lehmann et al., 2005):

1. Diseñar algoritmos que sean rápidos (en cuanto al tiempo polinómico en el tamaño de instancia del problema) pero que no encuentren una solución óptima para algunas instancias del problema.
2. Restringir los paquetes por los que se pueden presentar ofertas o los precios de estas, de manera tan severa que el problema se pueda resolver de manera óptima y rápido.
3. Diseñar algoritmos de búsqueda de árbol que puedan encontrar una solución óptima. Debido a que se trata de un problema *NP-Hard*, cualquier algoritmo óptimo para el problema será lento en algunas instancias del problema.

Además de estos, han surgido nuevos enfoques y se han modificado las reglas y los mecanismos en las subastas múltiples, de manera que han ido surgiendo nuevos modelos que se van superando, para corregir los errores que se descubren en la práctica y así aumentar su eficiencia. Aunque la literatura ha comenzado abordando el problema de determinación del ganador (WDP), se ha iniciado un notable esfuerzo multidisciplinar para investigar las cuestiones originales planteadas por las ofertas combinatorias, así como para replantear algunos otros problemas conocidos de la teoría y de la práctica de las subastas (como el lenguaje de subasta o los incentivos) que se vuelven particularmente difíciles cuando se permite la licitación de paquetes.

En este trabajo se ha estudiado la teoría de subastas combinatorias y se ha detallado su extensa clasificación según sus características y su problemática asociada, entendiendo su gran importancia como mecanismos de mercado en problemas de asignación y casos de aplicación reales. Se han estudiado las ventajas y desventajas de los mecanismos existentes y sus modificaciones, que en muchos casos son una combinación que intenta reunir las virtudes de cada uno, y reducir los inconvenientes individuales.

Debido a las ventajas de las subastas combinatorias, en la literatura, son numerosos los autores que se centran en resolver de forma interdisciplinar las dificultades asociadas a las mismas. Por ello, se ha estudiado en profundidad el problema de determinación del ganador (WDP) como el problema principal de las subastas combinatorias. Se han propuesto diferentes formulaciones del WDP adaptándolas al caso concreto de aplicación de los problemas que se tratan. De esta manera hemos podido comprender su funcionalidad y también las numerosas limitaciones e inconvenientes que acarrean este tipo de subastas a la hora de llevarlas a la práctica.

Se han seleccionado algunos ejemplos prácticos de aplicación de este tipo de subastas dentro del ámbito de la Ingeniería de Organización, como han sido la subasta del reloj, la subasta PAUSE, la utilización de un protocolo combinatorio para la formación de la cadena de suministro y la aplicación de la teoría de grafos en subastas de adquisición. Estos mecanismos han sido valorados según un marco analítico, se han clasificado en función de sus características y se han evaluado sus ventajas e inconvenientes a la hora de hacerlos realidad. Con todo ello, se han buscado alternativas para superar estos grandes problemas de complejidad que presenta el WDP de una manera eficiente.

El diseño de subastas combinatorias y su uso compatible con los distintos mercados, así como abordar el problema de determinación del ganador (WDP) ha sido clave en numerosos estudios actuales y el objetivo fundamental de recientes investigaciones. Aunque se han reportado importantes avances sobre las subastas combinatorias y sus mecanismos de aplicación, todavía se necesita mucho trabajo e investigación para ampliar los resultados a modelos de subasta que se puedan adaptar completamente a los crecientes mercados actuales, a sus limitaciones y a sus características dispares.

10. Bibliografía

Abrache, J., Crainic, T. G., & Gendreau, M. (2004). Design issues for combinatorial auctions. Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies, 2(1), 1-33. https://doi.org/10.1007/s10288-004-0033-y

Adomavicius, G., Sanyal, P., Gupta, A., & Curley, S. (2007). Design and Effects of Information Feedback in Continuous Combinatorial Auctions. 18.

Ahuja, R. K., Magnanti, T. L., & Orlin, J. B. (1993). Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall.

Andersson, A., Tenhunen, M., & Ygge, F. (2000). Integer programming for combinatorial auction winner determination. Proceedings Fourth International Conference on MultiAgent Systems, 39-46. https://doi.org/10.1109/ICMAS.2000.858429

Ausubel, Lawrence M., & Baranov, O. V. (2014). Market Design and the Evolution of the Combinatorial Clock Auction.

Ausubel, Lawrence M, & Cramton, P. (2011). Activity Rules for the Combinatorial Clock Auction. 11.

Ausubel, Lawrence M, Cramton, P., & Milgrom, P. (2004). The Clock-Proxy Auction: A Practical Combinatorial Auction Design. En Handbook of Spectrum Auction Design.

Ausubel, Lawrence M., & Milgrom, P. (2005). The Lovely but Lonely Vickrey Auction. En P. Cramton, Y. Shoham, & R. Steinberg (Eds.), Combinatorial Auctions(pp.17-40). The MIT Press. https://doi.org/10.7551/mitpress/9780262033428.003.0002

Ausubel, L.M., & Cramton, P. (2004). Auctioning many divisible goods. Journal of the European Economic Association, 2(2-3), 480-493. Scopus. https://doi.org/10.1162/154247604323068168

Ballou, R. H. (2004). Logística: Administración de la cadena de suministro. Pearson Educación.

Bean, J. C. (1994). Genetic Algorithms and Random Keys for Sequencing and Optimization. ORSA Journal on Computing, 6(2), 154-160. https://doi.org/10.1287/ijoc.6.2.154

Bellosta, M.-J., Kornman, S., & Vanderpooten, D. (2011). Preference-based English reverse auctions. Artificial Intelligence, 175(7-8), 1449-1467. https://doi.org/10.1016/j.artint.2010.11.015

Bichler, M., Fux, V., & Goeree, J. K. (2019). Designing combinatorial exchanges for the reallocation of resource rights. Proceedings of the National Academy of Sciences, 116(3), 786-791. https://doi.org/10.1073/pnas.1802123116

Bichler, M., & Goeree, J. K. (2017). Handbook of Spectrum Auction Design. Cambridge University Press.

Blumrosen, L., & Nisan, N. (2007). Combinatorial Auctions. En N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, & V. V. Vazirani (Eds.), Algorithmic Game Theory (pp. 267-300). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511800481.013

Bosquez, O. A. C., Ramos, G., & de los Santos Torres, G. (2005). Búsqueda tabú aplicada a un problema NP-Completo: Generación de horarios en la DAIS. 12.

Boughaci, D., Benhamou, B., & Drias, H. (2009). A memetic algorithm for the optimal winner determination problem. Soft Computing, 13(8), 905. https://doi.org/10.1007/s00500-008-0355-3

Boutilier, C., Sandholm, T., & Shields, R. (2004). Eliciting Bid Taker Non-price Preferences in (Combinatorial) Auctions. 8.

Chewning, E. G., & Harrell, A. M. (1990). THE EFFECT OF INFOFIMATION LOAD ON DECISION MAKERS' CUE UTILIZATION LEVELS AND DECISION QUALITY IN A FINANCIAL DIST-RJZSS DECISION TASK. 16.

Conde, P. V. (2011). INTRODUCCIÓN A LOS MECANISMOS DE SUBASTAS. COMISIÓN NACIONAL DE ENERGÍA (CNE), IX Curso de Regulación Energética de ARIAE, 30.

Conen, W., & Sandholm, T. (2001). Preference Elicitation in Combinatorial Auctions. Proc. ACM E-Commerce Conf, 4.

Cramton, P. (2013). Spectrum Auction Design.

Current, J. C.-R. and J. C. and J., Climaco, J., & Current, J. (1999). An interactive bi-objective shortest path approach: Searching for unsupported nondominated solutions.

de Andrade, C. E., Toso, R. F., Resende, M. G. C., & Miyazawa, F. K. (2015). Biased Random-Key Genetic Algorithms for the Winner Determination Problem in Combinatorial Auctions. Evolutionary Computation, 23(2), 279-307. https://doi.org/10.1162/EVCO_a_00138

de Vries, S., Schummer, J., & Vohra, R. V. (2007). On ascending Vickrey auctions for heterogeneous objects. Journal of Economic Theory, 132(1), 95-118. https://doi.org/10.1016/j.jet.2005.07.010

de Vries, S., & Vohra, R. V. (2003). Combinatorial Auctions: A Survey. INFORMS Journal on Computing, 15(3), 284-309. https://doi.org/10.1287/ijoc.15.3.284.16077

Dobzinski, S., Nisan, N., & Schapira, M. (2012). Truthful randomized mechanisms for combinatorial auctions. Journal of Computer and System Sciences, 78(1), 15-25. https://doi.org/10.1016/j.jcss.2011.02.010

Dréo, J., Pétrowski, A., Siarry, P., & Taillard, E. (2006). Metaheuristics for Hard Optimization: Methods and Case Studies. Springer Science & Business Media.

Durá Juez, P. (2003). Teoría de subastas y reputación del vendedor. Comisión Nacional del Mercado de Valores.

Eppstein, D. (1998). Finding the k Shortest Paths. SIAM Journal on Computing, 26.

Faenza, Y., Oriolo, G., & Stauffer, G. (2014). Solving the Weighted Stable Set Problem in Claw-Free Graphs via Decomposition. Journal of the ACM, 61(4), 1-41. https://doi.org/10.1145/2629600

Gen, M., & Cheng, R. (1997). Genetic Algorithms and Engineering Design. John Wiley & Sons.

Gomes, R., & Sweeney, K. (2014). Bayes–Nash equilibria of the generalized second-price auction. Games and Economic Behavior, 86, 421-437. https://doi.org/10.1016/j.geb.2012.09.001

Gonçalves, J. F., & Resende, M. G. C. (2011). A parallel multi-population genetic algorithm for a constrained two-dimensional orthogonal packing problem. Journal of Combinatorial Optimization, 22(2), 180-201. https://doi.org/10.1007/s10878-009-9282-1

Guala, F. (2001). Building economic machines: The FCC auctions. Studies in History and Philosophy of Science Part A, 32(3), 453-477. https://doi.org/10.1016/S0039-3681(01)00008-5

Hoffman, W., & Pavley, R. (1959). A Method for the Solution of the nth Best Path Problem. Journal of the ACM (JACM), 6(4), 506-514. https://doi.org/10.1145/320998.321004

Holte, R. C. (2001). Combinatorial Auctions, Knapsack Problems, and Hill-Climbing Search. En E. Stroulia & S. Matwin (Eds.), Advances in Artificial Intelligence (Vol. 2056, pp. 57-66). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-45153-6_6

Janssen, M., & Kasberger, B. (2019). On the clock of the combinatorial clock auction.

Kellerer, H., Pferschy, U., & Pisinger, D. (2004). Multidimensional Knapsack Problems. En H. Kellerer, U. Pferschy, & D. Pisinger (Eds.), Knapsack Problems (pp. 235-283). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-24777-7_9

Kelly, F., & Steinberg, R. (2000). A Combinatorial Auction with Multiple Winners for Universal Service. Management Science, 46(4), 586-596. https://doi.org/10.1287/mnsc.46.4.586.12054

Kelly, T. (2006). Generalized Knapsack Solvers for Multi-unit Combinatorial Auctions: Analysis and Application to Computational Resource Allocation. En P. Faratin & J. A. Rodríguez-Aguilar (Eds.), Agent-Mediated Electronic Commerce VI. Theories for and Engineering of Distributed Mechanisms and Systems (Vol. 3435, pp. 73-86). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/11575726_6

Kelly, T., & Byde, A. (2006). Generating k Best Solutions to Winner Determination Problems: Algorithms & Application to Procurement.

Lahaie, S. M., & Parkes, D. C. (2004). Applying learning algorithms to preference elicitation. Proceedings of the 5th ACM Conference on Electronic Commerce - EC '04, 180. https://doi.org/10.1145/988772.988800

Land, A., Powell, S., & Steinberg, R. (2006). PAUSE: A Computationally Tractable Combinatorial Auction.

Langlois, L. (2018). Diseño de información en subastas de primer precio con creencias heterogéneas. Intituto de Economía. Universidad de Chile.

Leyton-Brown, K., & Shoham, Y. (2005). A Test Suite for Combinatorial Auctions. En P. Cramton, Y. Shoham, & R. Steinberg (Eds.), Combinatorial Auctions (pp. 451-478).The MIT Press.https://doi.org/10.7551/mitpress/9780262033428.003.0019

Malhotra, N. K. (1982). Information Load and Consumer Decision Making. Journal of Consumer Research, 8(4), 419-430. https://doi.org/10.1086/208882

Mansini, R., & Speranza, M. G. (2012). CORAL: An exact algorithm for the multidimensional knapsack problem. INFORMS Journal on Computing, 24(3), 399-415. Scopus. https://doi.org/10.1287/ijoc.1110.0460

Mariduena Carvajal, C. L. (2005). Subastas Combinatorias Iterativas: Simulación de una Aplicación. Universidad San Francisco de Quito.

Martín Oller, F. (2007). Optimización de Subastas Combinatorias. Instituto Tecnológico de Buenos Aires.

Mavila H, D. (2003). Las subastas. Industrial Data.

McAfee, R. P., & McMillan, J. (1987). Auctions and Bidding. Journal of Economic Literature.

McMillan, J. (1994). Selling Spectrum Rights. Journal of Economic Perspectives, 8(3), 145-162. https://doi.org/10.1257/jep.8.3.145

Morillo, D., Moreno, L., & Díaz, J. (2014). Metodologías Analíticas y Heurísticas para la Solución del Problema de Programación de Tareas con Recursos Restringidos (RCPSP): Una revisión. Parte 2. 10(20), 25.

Navas, E., Poza, D., Villafáñez, F., Pajares, J., & López-Paredes, A. (2019, diciembre). Proceso de diseño de una subasta combinatoria. 13th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management, Gijón, España.

Nisan, N. (2000). Bidding and allocation in combinatorial auctions. Proceedings of the 2nd ACM Conference on Electronic Commerce-EC'00,1-12. https://doi.org/10.1145/352871.352872

Norman, B. A., & Bean, J. C. (1999). A genetic algorithm methodology for complex scheduling problems. Naval Research Logistics (NRL), 46(2), 199-211. https://doi.org/10.1002/(SICI)1520-6750(199903)46:2<199::AID-NAV5>3.0.CO;2-L

O'Reilly, C. A. (1980). Individuals and Information Overload in Organizations: Is More Necessarily Better? Academy of Management Journal, 23(4), 684-696. https://doi.org/10.5465/255556

Parkes, D. C., & Ungar, L. H. (2000). Preventing Strategic Manipulation in Iterative Auctions: ProxyAgents and Price-Adjustment. 8.

Pekeč, A., & Rothkopf, M. H. (2003). Combinatorial Auction Design. Management Science,49(11), 1485-1503. https://doi.org/10.1287/mnsc.49.11.1485.20585

Perennes, P. (2014). Use of combinatorial auctions in the railway industry: Can the "invisible hand" draw the railway timetable? Transportation Research Part A: Policy and Practice, 67, 175-187. https://doi.org/10.1016/j.tra.2014.07.002

Pfeiffer, J., & Rothlauf, F. (2007). Analysis of greedy heuristics and weight-coded eas for multidimensional knapsack problems and multi-unit combinatorial auctions. Proceedings of the 9th Annual Conference on Genetic and

Evolutionary Computation - GECCO '07, 1529. https://doi.org/10.1145/1276958.1277258

Pirkul, H. (1987). A heuristic solution procedure for the multiconstraint zero-one knapsack problem. Naval Research Logistics (NRL), 34(2), 161-172. Scopus. https://doi.org/10.1002/1520-6750(198704)34:2<161::AIDNAV322034020 3>3.0.CO;2-A

Pombo Hincapié, S. J. (2014, enero 27). Subasta inglesa, una subasta a viva voz. Racionalidad Ltd https://racionalidadltda.wordpress.com/2014/01/27/subasta-inglesa-una-subasta-a-viva-voz/

Porter, D., Ledyard, J., & Banks, J. (1989). Allocating Uncertain and Unresponsive Resources: An Experimental Approach

Porter, D., Rassenti, S., Roopnarine, A., & Smith, V. (2003). Combinatorial auction design. 5.

Raidl, G. R., & Gottlieb, J. (2005). Empirical Analysis of Locality, Heritability and Heuristic Bias in Evolutionary Algorithms: A Case Study for the Multidimensional Knapsack Problem. Evolutionary Computation, 13(4), 441-475. https://doi.org/10.1162/106365605774666886

Rassenti, S. J., Smith, V. L., & Bulfin, R. L. (2017). A combinatorial auction mechanism for airport time slot allocation. En Handbook of Spectrum Auction Design (pp. 373-390). Scopus. https://doi.org/10.1017/9781316471609.019

Ricart, J. E. (1988). JUEGOS CON INFORMACION INCOMPLETA. IESE Business School. Universidad de Navarra.

Rothkopf, M. H., Pekeč, A., & Harstad, R. M. (1998). Computationally Manageable Combinational Auctions. Management Science, 44(8), 1131-1147. https://doi.org/10.1287/mnsc.44.8.1131

Rothlauf, F., Goldberg, D. E., & Heinzl, A. (2002). Network Random Keys—A Tree Representation Scheme for Genetic and Evolutionary Algorithms. Evolutionary Computation, 10(1), 75-97. https://doi.org/10.1162/106365602317301781

Salas, A. (2008). Acerca del Algoritmo de Dijkstra. arXiv:0810.0075 [cs]. http://arxiv.org/abs/0810.0075

Sandholm, T. (2002). Algorithm for optimal winner determination in combinatorial auctions. Artificial Intelligence, 135(1-2), 1-54. https://doi.org/10.1016/S0004-3702(01)00159-X

Santamaría, N. (2005). Análisis de los Problemas del Subastador y del Participante en las Subastas Combinatorias Estáticas.

Spears, W. M., & de Jong, K. A. (1991). On the virtues of parameterized uniform crossover. Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms.

Star, L. V. (1996). Matemática discreta y combinatoria. Anthropos Editorial.

Tennenholtz, M. (2000). Some Tractable Combinatorial Auctions. 6.

Trifunovic, D., & Ristic, B. (2013). Multi-unit auctions in the procurement of electricity. Economic Annals, 58(197), 47-77. https://doi.org/10.2298/EKA1397047T

Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders. The jounal of finances, 16, 8-37.

Walsh, W. E., Wellman, M. P., & Ygge, F. (2000). Combinatorial auctions for supply chain formation. Proceedings of the 2nd ACM Conference on Electronic Commerce https://doi.org/10.1145/352871.352900

Weinberg, K. A. F. and W. H. (1991). Theoretical foundations of dynamical Monte Carlo simulations.