



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

El problema de la intersección de matroides

Autor: María Blázquez Hernández

Tutor/es: Philippe Gimenez

Índice general

Introducción	1
1. Conceptos básicos sobre matroides	3
1.1. Definiciones y primeros ejemplos	3
1.2. Circuitos, rango y dualidad	12
1.3. Operaciones	19
2. Intersección de matroides	23
2.1. Matroides y optimización	23
2.2. Politopos matroides	25
2.3. Teorema de intersección de dos matroides	31
2.4. Intersección ponderada de matroides	38
3. Aplicaciones	39
3.1. Emparejamientos bipartitos	39
3.2. Arborescencias y ramificaciones	45
3.3. Orientaciones	46
3.4. Coloración de un grafo	48
3.5. Biconectores y bibosques	49
4. Intersección de tres o más matroides	55
Bibliografía	59

Introducción

En este trabajo, vamos a estudiar los matroides y más concretamente, la intersección de matroides. Antes de continuar, destacamos que los matroides son estructuras combinatorias que intentan capturar de forma abstracta la esencia de la dependencia. La idea de un matroide, es decir, de una dependencia abstracta, parece que ha sido desarrollada históricamente a lo largo de una serie de líneas independientes durante el período 1900 – 1935. De manera independiente, diferentes sistemas de axiomas fueron dados, cada uno de los cuales es equivalente al de un matroide. Esto indica la naturalidad del concepto. Solo a finales de 1930, se obtuvo una síntesis de las diferentes corrientes, cuando Whitney introdujo la noción de matroide.

En mi caso particular, empecé a conocer los matroides gracias a un artículo de Ardila ([1]) que trata sobre la geometría de los matroides. Como se ve a continuación, el proyecto se divide en cuatro partes.

La primera se dedica a introducir la definición de matroide como un par (E, \mathcal{F}) , donde E es un conjunto finito y \mathcal{F} es una colección de subconjuntos de E que cumplen una serie de propiedades. También estudiamos algunos ejemplos destacados de matroides como los matroides gráficos, los vectoriales o los transversales. Luego aparecen otras herramientas con las cuales también podemos caracterizar los matroides, como por ejemplo los circuitos, que se centran más en el concepto de dependencia, mientras que los matroides se refieren más al tema de la independencia. Esta primera parte termina con una serie de operaciones que se pueden dar en los matroides.

La siguiente parte es el tema central del trabajo. El objetivo que buscamos es demostrar que existe un conjunto independiente de máxima cardinalidad común a dos matroides sobre el mismo conjunto base y estudiar el modo de encontrar tal conjunto. Incluso, estudiamos si existe un conjunto con estas características pero que sea de peso máximo respecto a una función de coste definida previamente.

Empezamos hablando de algunos conceptos que relacionan los matroides con la optimización. Más aún, los matroides surgen de manera natural en la

optimización combinatoria dado que son precisamente las estructuras para las cuales el algoritmo voraz funciona. Pero también se pueden estudiar los matroides a partir de politopos debido a que se pueden formar politopos matroides y con estos podemos utilizar técnicas de optimización para encontrar el máximo de una función coste, donde la solución del problema corresponde con un conjunto independiente de máximo peso común a los dos matroides. Después viene uno de los teoremas más importantes del trabajo, que consiste en que la intersección de dos politopos matroides crea un politopo cuyos vértices son vértices de ambos politopos originales. Este teorema fue demostrado por Jack Edmonds en 1970, el cual ha aportado resultados destacados referidos a los matroides, como se muestra en el libro [5] que consiste en una serie de papeles dedicados a Edmonds.

Desde el punto de vista de los matroides, podemos demostrar que existe un conjunto independiente de máxima cardinalidad común a dos matroides debido a un algoritmo que es capaz de encontrar tal conjunto en tiempo polinomial y que también aparece en este apartado. Incluso se puede encontrar un conjunto independiente de máximo peso común a dos matroides, respecto a una función de coste dada, mediante un algoritmo similar al anterior.

La tercera parte es más ilustrativa dado que trata de algunas aplicaciones de intersección de dos matroides como por ejemplo los emparejamientos bipartitos, las arborescencias y ramificaciones o la coloración de un grafo. Además de estudiar estas aplicaciones de forma general, también se incluyen ejemplos concretos para amenizar y ayudar al lector a comprender el concepto de intersección de matroides.

Por último, cerramos el proyecto con un pequeño estudio de la intersección de más matroides. En este caso, tenemos que la intersección de tres o más matroides es un problema NP-completo debido a que existe un ejemplo de intersección de tres matroides que es NP-completo (el problema del vendedor ambulante o problema del viajero).

Capítulo 1

Conceptos básicos sobre matroides

En primer lugar, vamos a estudiar algunos conceptos básicos necesarios sobre matroides. Esta parte viene en todos los apuntes que tratan sobre matroides pero en el artículo [6] se encuentra explicado con más detalle.

1.1. Definiciones y primeros ejemplos

Definición 1.1. Un *matroide* es un par $M = (E, \mathcal{F})$ donde E es un conjunto finito y \mathcal{F} es una familia de subconjuntos de E que satisface:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- (2) si $T \in \mathcal{F}$ y $S \subseteq T$, entonces $S \in \mathcal{F}$,
- (3) si $S, T \in \mathcal{F}$ y $|T| > |S|$, entonces existe un elemento $t \in T \setminus S$ tal que $S \cup \{t\} \in \mathcal{F}$.

Los elementos de \mathcal{F} se llaman *conjuntos independientes* de M . Un subconjunto de E que no está en \mathcal{F} se llama *dependiente*. Por la propiedad (3), si $F \subseteq E$, entonces todos los subconjuntos maximales independientes de F tienen la misma cardinalidad y se llaman *bases* de F .

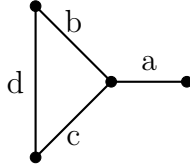
Veámos ahora una lista de ejemplos clásicos de matroides.

Matroide gráfico

Un ejemplo bastante común de matroide es el *matroide gráfico* donde E es el conjunto de aristas de un grafo G y \mathcal{F} es la colección de bosques de

G . Recordemos que en un grafo, un bosque es un conjunto de aristas que no contiene ningún ciclo.

Ejemplo 1.2. A continuación, observamos un ejemplo de matroide gráfico:



En este ejemplo, el conjunto finito es $E = \{a, b, c, d\}$ y los conjuntos independientes son

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}.$$

\mathcal{F} cumple las 3 propiedades de los matroides:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- (2) En \mathcal{F} se encuentran todos los conjuntos unipuntuales, todos los conjuntos de dos elementos posibles y de tres elementos tenemos todos menos $\{b, c, d\}$ (es un ciclo). Por tanto, para comprobar esta propiedad, es suficiente con ver si todos los subconjuntos de los conjuntos $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ y $\{a, c, d\}$ pertenecen a \mathcal{F} . Pero esto es evidente.
- (3) Como antes, es suficiente con probarlo para cada $T \in \mathcal{F}$ con $|T| = 3$ y cualquier $S \in \mathcal{F}$ con $|S| < 3$. Si tomamos $S = \{x\}$ con $x \in \{a, b, c, d\}$, como \mathcal{F} contiene todos los subconjuntos de E con dos elementos, siempre podemos encontrar un elemento que pertenezca a T y sea distinto de x de tal manera que al añadir el nuevo elemento a x , es también un conjunto independiente. Si $S = \{x, y\}$ con $x, y \in E, x \neq y$, como entre los tres subconjuntos $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$ y $\{a, c, d\}$ se encuentran todos los elementos de E , siempre podemos encontrar un elemento z de tal manera que $\{x, y, z\}$ sea uno de los tres subconjuntos.

Matroide vectorial

En este caso E es un conjunto finito de vectores en un espacio vectorial y \mathcal{F} es la familia de todos los subconjuntos de E formados por vectores linealmente independientes.

Proposición 1.3. *Se define de esta manera un matroide.*

Demostración. Para comprobar que (E, \mathcal{F}) es realmente un matroide, es suficiente con probar la propiedad (3) dado que todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente sigue siendo linealmente independiente.

Para probar (3), consideramos dos subconjuntos linealmente independientes de E :

$$V = \{v_1, \dots, v_k\}, \quad U = \{u_1, \dots, u_m\},$$

con $k < m$. Ahora tomamos $W = \langle U \cup V \rangle$, el espacio vectorial generado por $U \cup V$. Supongamos, por reducción al absurdo, que no existe ningún $u \in U \setminus V$ tal que $V \cup \{u\} = \{v_1, \dots, v_k, u\}$ es linealmente independiente. Entonces W es igual al espacio vectorial generado por V , por tanto la dimensión de W es $k = |V|$. Pero por otra parte, $m = |U| \leq \dim(W)$, lo cual es absurdo porque $k < m$. En consecuencia, existe $u \in U \setminus V$ tal que $V \cup \{u\}$ es linealmente independiente. \square

Matroide uniforme

Aquí, E es un conjunto finito, k es un entero positivo y $\mathcal{F} = \{F \subseteq E : |F| \leq k\}$. Se trata de un ejemplo de matroide muy sencillo de comprender.

La propiedad (1) es evidente, por lo que pasamos directamente a comprobar la segunda. Sea $T \in \mathcal{F}$ y $S \subseteq T$. Se cumple $|S| \leq |T| \leq k$, por tanto $S \in \mathcal{F}$. Para probar (3), tomamos $S, T \in \mathcal{F}$ con $|T| > |S|$. Como T tiene más elementos que S , existe $e \in T \setminus S$ tal que $|S \cup \{e\}| \leq |T| \leq k$. Luego $S \cup \{e\} \in \mathcal{F}$.

Matroide transversal (*transversal matroid*)

En primer lugar, recordemos que dado un grafo G , un *emparejamiento* (o *matching*) es un conjunto de aristas sin vértices en común. Si en este emparejamiento se utilizan todos los vértices del grafo G , se dice que un *emparejamiento perfecto*. Ahora, un *grafo bipartito* es un grafo $G = (N, F)$ (siendo N los vértices y F las aristas de G) cuyo conjunto de vértices se puede separar en dos conjuntos disjuntos U y V , es decir, se cumple que:

1. $U \cup V = N$,
2. $U \cap V = \emptyset$

de manera que las aristas solo pueden conectar vértices de un conjunto con vértices del otro, es decir,

$$\forall u_1, u_2 \in U, \forall v_1, v_2 \in V, e = (u_1, u_2) \notin F \text{ y } e = (v_1, v_2) \notin F.$$

Con todo esto, podemos definir un matroide transversal como el par (U, \mathcal{F}) , siendo U uno de los conjuntos finitos de vértices de un grafo bipartito G y $\mathcal{F} = \{I : I \subseteq U, \text{ existe un emparejamiento } M \text{ en } G \text{ que cubre } I\}$.

Proposición 1.4. *Se define de esta manera un matroide.*

Demostración. (1) Es evidente.

(2) Sean $T \in \mathcal{F}$ y $S \subseteq T$. Si existe un emparejamiento M en G que cubre T , entonces ese mismo emparejamiento también cubre S . Luego $S \in \mathcal{F}$.

(3) Sean $T, S \in \mathcal{F}$ con $|T| > |S|$. Existen emparejamientos M y M' en G de tal manera que el conjunto de vértices de U involucrados en M es S y el que está involucrado en M' es T . Por lo que $|M| = |S| < |T| = |M'|$.

Consideramos $M \cup M'$. Cada componente del grafo $(N, M \cup M')$ es un camino, un circuito o un vértice. Como $|M'| > |M|$, al menos una de las componentes tiene que ser un camino P con más cimas en M' que en M . El camino consiste en cimas alternativamente en M' y en M , con cimas finales en M' .

Supongamos que N y N' denotan las cimas en P que ocurren en M y M' , respectivamente. Entonces $|N'| = |N| + 1$. Como P tiene longitud impar $(2|N| + 1)$, exactamente uno de los vértices finales pertenece a U (lo llamamos vértice final u). Entonces u pertenece al conjunto de vértices de U involucrados en M' , que coincide con T , y no pertenece al involucrado en M , que es S ($u \in T \setminus S$). Definimos $M'' := (M \setminus N) \cup N'$. Claramente, M'' es un emparejamiento con conjunto de vértices de U involucrado $S \cup \{u\}$. Por lo tanto, $S \cup \{u\} \in \mathcal{F}$. Este último apartado está demostrado en los apuntes [12].

□

Tenemos otra forma equivalente de definir un matroide transversal tomando subconjuntos de un conjunto finito U .

Proposición 1.5. *Sean S_1, \dots, S_m una serie de subconjuntos de un conjunto finito U . Un conjunto $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ es un transversal parcial (partial transversal) si existen índices i_1, \dots, i_n distintos de tal manera que $y_j \in S_{i_j}, j = 1, \dots, n$. Entonces el par (U, \mathcal{F}) es un matroide transversal, siendo \mathcal{F} la colección de subconjuntos de U que son transversales parciales. El recíproco también es cierto, es decir, todo matroide transversal es de esta forma.*

Demostración. Tenemos que demostrar que existe un grafo bipartito G donde uno de los conjuntos de vértices es U y todos los subconjuntos de U transversales parciales son conjuntos independientes para el matroide transversal definido a partir del grafo bipartito G .

Consideramos el grafo bipartito G con conjunto de vértices

$$N = \{1, \dots, m\} \cup U$$

y con aristas los pares $\{i, x\}$ con $i \in \{1, \dots, m\}$ y $x \in S_i$. Sea $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq U$ transversal parcial. Entonces existen i_1, \dots, i_n tales que $y_j \in S_{i_j}$ y por tanto $\{i_j, y_j\}$ es una arista del grafo bipartito G para todo j , y el conjunto $M = \{\{i_j, y_j\} : j = 1, \dots, n\}$ es un emparejamiento de G que cubre Y . Luego Y es un conjunto independiente para el matroide transversal asociado al grafo bipartito G .

Ahora vamos a probar el recíproco. Sea (U, \mathcal{F}) el matroide transversal definido a partir de un grafo bipartito G con bipartición $U \cup V$ sobre su conjunto de vértices. Vamos a comprobar que existen unos subconjuntos de U , S_1, \dots, S_m de tal manera que todo conjunto independiente es transversal parcial.

Para ello, consideramos $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subseteq U$ un conjunto independiente. Es decir, existe un emparejamiento M en G que cubre Y . Supongamos que $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. Denotamos $S_i = \{x \in U : \{v_i, x\} \in M\}$, para todo $i = 1, \dots, m$. Entonces, que M sea un emparejamiento que cubre Y , es equivalente a que para todo $y_j \in Y$ existe $v_i \in V$ tal que $\{v_i, y_j\} \in M$. Por tanto, existen índices i_1, \dots, i_n tal que $y_j \in S_{i_j}, j = 1, \dots, n$. Es decir, Y es transversal parcial. \square

Ejemplo 1.6. Tenemos a continuación un pequeño ejemplo de matroide transversal a partir del siguiente grafo bipartito:

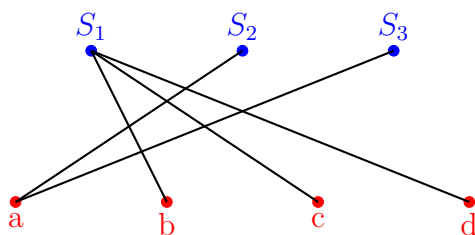


Figura 1.1: Grafo bipartito con bipartición $U = \{a, b, c, d\}$ y $V = \{S_1, S_2, S_3\}$.

En primer lugar, los conjuntos unipuntuales son independientes porque siempre podemos tomar una arista que contenga el vértice deseado y una

arista siempre es un emparejamiento. Los conjuntos de la forma $\{a, x\}$, con $x = b, c, d$, son independientes porque no existen aristas que contengan a y otro elemento de U . En cambio, $\{b, c\}$ no es independiente porque las únicas aristas que contienen b y c tienen a S_1 como vértice común, luego no pueden formar un emparejamiento. Lo mismo ocurre con $\{b, d\}$ y $\{c, d\}$. Por esta razón no podemos tener un conjunto independiente con tres elementos.

Consideramos ahora $S_i, i = 1, 2, 3$, un subconjunto de U , tomando cada elemento de S_i un vértice de U para el cual existe una arista que une este vértice con S_i . De esta manera, tenemos que $S_1 = \{b, c, d\}, S_2 = S_3 = \{a\}$. Vamos a estudiar los conjuntos transversales parciales. Si tomamos $Y = \{a\}$, $a \in S_2 = S_3$, luego Y es transversal parcial. Si $Y = \{b\}$, $b \in S_1$ y obtenemos que Y es transversal parcial. Lo mismo ocurre con $\{c\}, \{d\}$. Por tanto, los conjuntos unipuntuales son transversales parciales. Si $Y = \{a, x\}, x = b, c, d$, tenemos que $a \in S_2 = S_3$ y $x \in S_1$ y entonces Y es transversal parcial. Pero si tomamos $\{b, c\}$, no existen índices distintos $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}$ tales que $b \in S_{i_1}$ y $c \in S_{i_2}$. Por tanto, no son transversales parciales. Lo mismo sucede con los conjuntos de tres elementos. Entonces, si consideramos el matroide transversal (U, \mathcal{F}) con \mathcal{F} la colección de subconjuntos de U que son transversales parciales, observamos la equivalencia de la proposición 1.5.

Matroide de partición (*partition matroid*)

Es un caso especial dentro de las matroides transversales. Usando la segunda definición, pedimos además que S_1, S_2, \dots, S_n sea una partición de U y podemos describir entonces la colección de conjuntos independientes como:

$$\mathcal{F} = \{I : I \subseteq U, |I \cap S_i| \leq 1, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Matroide de emparejamiento (*matching matroid*)

Un *matroide de emparejamiento* es un matroide (E, \mathcal{F}) donde E es el conjunto de vértices del grafo G y \mathcal{F} es el conjunto de todos los subconjuntos de vértices de G que se pueden cubrir con un emparejamiento.

Proposición 1.7. *Se define de esta manera un matroide.*

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son evidentes. Por tanto, nos queda probar (3):

Supongamos que tenemos $I, J \in \mathcal{F}$ con $|J| > |I|$. Sean M_I, M_J emparejamientos de G cubriendo los vértices de I e J , respectivamente. Consideramos el emparejamiento $M_I \Delta M_J = M_I \setminus M_J + M_J \setminus M_I$. Cada vértice en $J \setminus I$ tiene un camino alternativo que empieza desde ese vértice. Alguno de esos caminos

puede terminar en $I \setminus J$, pero no todos porque $|J \setminus I| > |I \setminus J|$. Entonces, al menos uno de los vértices en $J \setminus I$ tiene un camino que termina en algún otro sitio. Este punto final no puede estar en $J \cap I$ dado que estos vértices tienen grado 0 o 2 en $M_I \Delta M_J$. Luego tenemos un camino alternativo P desde $J \setminus I$ a un vértice que no está en I . Ahora $M_I \Delta P$ es un emparejamiento que cubre I y un vértice más en $J \setminus I$. Esta demostración aparece en los apuntes [7]. \square

Ejemplo 1.8. Vamos a estudiar un ejemplo de matroide de emparejamiento. En este caso, $E = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}.$$

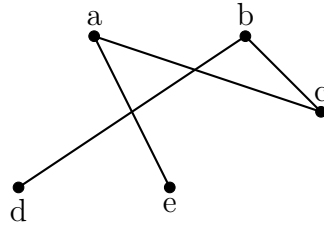
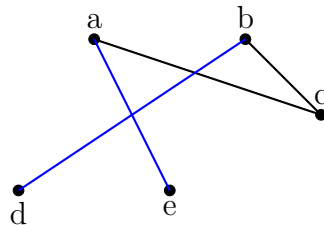


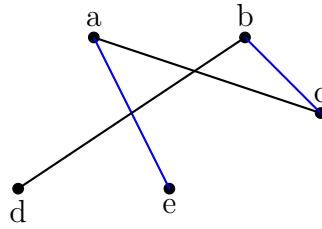
Figura 1.2: Grafo G .

Como en el ejemplo 1.6, los conjuntos unipuntuales son independientes porque una arista es un emparejamiento.

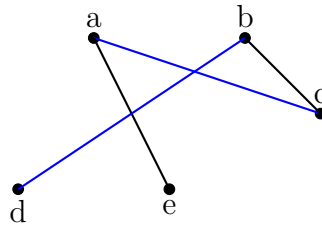
- $\{a, b\}$ es independiente porque podemos tomar $M = \{\{a, e\}, \{b, d\}\}$, que es un emparejamiento que cubre los vértices a y b .



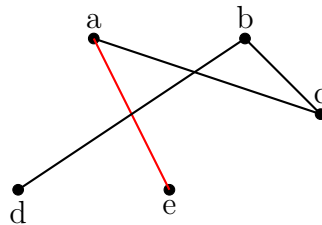
- $\{a, c\}$ es independiente porque $M = \{\{a, e\}, \{b, c\}\}$ es un emparejamiento que cubre a y c .



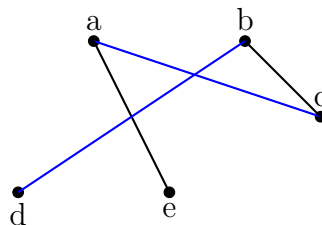
- $\{a, d\}$ es independiente porque $M = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ es un emparejamiento que cubre a y d .



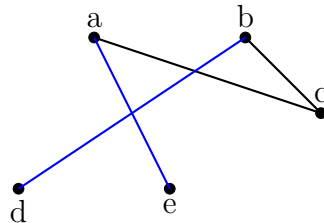
En cambio, $\{a, e\}$ no es independiente porque cualquier arista que contiene e , también contiene a .



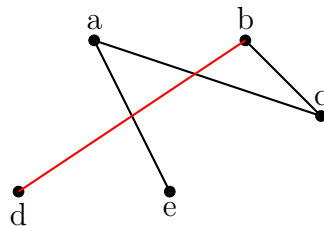
- $\{b, c\}$ es independiente porque $M = \{\{b, d\}, \{a, c\}\}$ es un emparejamiento que cubre b y c .



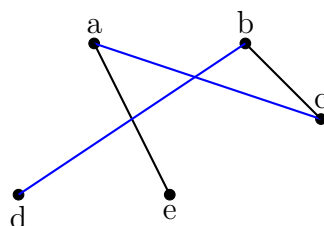
- $\{b, e\}$ es independiente porque $M = \{\{b, d\}, \{a, e\}\}$ es un emparejamiento que cubre b y e .



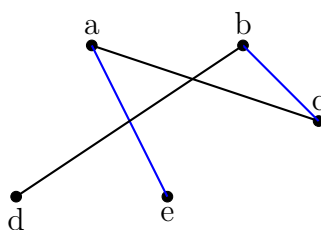
$\{b, d\}$ no es independiente porque cualquier arista que contenga d también contiene b .



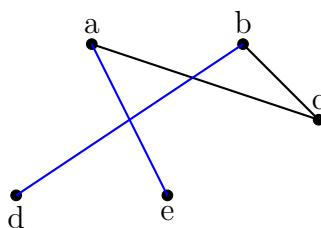
- $\{c, d\}$ es independiente porque $M = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ es un emparejamiento que cubre c y d .



- $\{c, e\}$ es independiente porque $M = \{\{b, c\}, \{a, e\}\}$ es un emparejamiento que cubre c y e .



- $\{d, e\}$ es independiente porque $M = \{\{b, d\}, \{a, e\}\}$ es un emparejamiento que cubre d y e .



No existen conjuntos independientes de tres elementos o más porque no tenemos un emparejamiento que cubra más de tres elementos a la vez.

1.2. Circuitos, rango y dualidad

A continuación, estudiamos más objetos relacionados con matroides y por último tratamos un poco la dualidad de los matroides.

Definición 1.9. Un subconjunto $X \subseteq E$ es *dependiente minimal* (por inclusión) si todo subconjunto de X distinto de X es independiente. Un subconjunto dependiente minimal de un matroide M se llama *circuito* de M . Denotamos por \mathcal{C} el conjunto de circuitos de un matroide. Observamos que \mathcal{F} se puede determinar a partir de \mathcal{C} porque los elementos de \mathcal{F} son los subconjuntos de E que no contienen elementos de \mathcal{C} . Un circuito de cardinal uno es un *bucle*.

Por ejemplo, en los matroides gráficos, los circuitos son los ciclos del grafo y los conjuntos independientes son los subgrafos que no contienen ningún ciclo. Sabiendo todo esto, podemos caracterizar \mathcal{C} por una serie de propiedades:

Proposición 1.10. *Un conjunto \mathcal{C} de subconjuntos de E es el conjunto de circuitos de un matroide sobre E si y solo si verifica las siguientes propiedades:*

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$,

(C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ y $C_1 \subseteq C_2$, entonces $C_1 = C_2$,

(C3) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2$ y $e \in C_1 \cap C_2$, entonces existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq \{C_1 \cup C_2\} \setminus \{e\}$. (Propiedad de eliminación).

Demostración. Empezamos con la implicación \Rightarrow . Tenemos que comprobar que dado un matroide (E, \mathcal{F}) y \mathcal{C} el conjunto de circuitos del matroide, los elementos de \mathcal{C} cumplen las tres propiedades (C1), (C2) y (C3):

(C1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, luego $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C2) Tenemos C_1 y C_2 dos circuitos tales que $C_1 \subseteq C_2$. Suponemos que $C_1 \neq C_2$. Entonces C_1 es un conjunto independiente pero eso es absurdo porque los circuitos son conjuntos dependientes. Luego $C_1 = C_2$.

(C3) Tenemos dos circuitos C_1 y C_2 distintos y $e \in C_1 \cap C_2$. Sabemos que $C_1 \setminus C_2 \neq \emptyset$ porque sino $C_1 \subseteq C_2$. Lo mismo pasa con $C_2 \setminus C_1$. Suponemos ahora que $\{C_1 \cup C_2\} \setminus \{e\}$ no contiene ningún circuito. Entonces $\{C_1 \cup C_2\} \setminus \{e\} = B$ es independiente, y por tanto, es una base para $C_1 \cup C_2$ (porque es maximal). También $|B| = |C_1 \cup C_2| - 1$. Como $C_1 \cap C_2$ es un conjunto independiente, podemos encontrar una base B' para $C_1 \cup C_2$ que contiene $C_1 \cap C_2$. Entonces $|B'| = |B| = |C_1 \cup C_2| - 1$. Como $C_1 \setminus C_2$ y $C_2 \setminus C_1$ son no vacíos, esto es posible si y solo si o bien $C_1 \subseteq B'$ o $C_2 \subseteq B'$, contradiciendo que B' es una base. Por tanto, existe un circuito $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq \{C_1 \cup C_2\} \setminus \{e\}$. Este apartado de la demostración viene en el lema 21 de los apuntes [3].

Para la otra implicación \Leftarrow , consideramos el conjunto

$$\mathcal{C} = \{X \subseteq E : X \text{ cumple (C1), (C2), (C3)}\}.$$

Tenemos que comprobar que \mathcal{C} es el conjunto de circuitos de un matroide, donde los conjuntos independientes son los subconjuntos de E que no contienen ningún elemento de \mathcal{C} . Para ello, tomamos $C \in \mathcal{C}$. Sea $X \subseteq C, X \neq C$. Suponemos que X contiene un elemento $C' \in \mathcal{C}$. Como $X \subseteq C, C' \subseteq C$. Entonces por la propiedad (C2), $C' = C$ y por tanto, $X = C$, lo cual es absurdo porque $X \neq C$. En consecuencia, X no contiene ningún elemento de \mathcal{C} por lo que X es independiente y \mathcal{C} es el conjunto de circuitos de un matroide. \square

Definición 1.11. Sea $M = (E, \mathcal{F})$ un matroide y $X \subseteq E$. El *rango* de X , denotado por $r_M(X)$, es el cardinal de un conjunto maximal independiente de X , es decir,

$$r_M = \text{máx}\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathcal{F}\}.$$

Proposición 1.12. Una función r del conjunto de partes de E en \mathbb{N} es la función rango de un matroide (E, \mathcal{F}) , donde $\mathcal{F} = \{I \subseteq E : r(I) = |I|\}$, si y sólo si verifica las siguientes condiciones:

(R1) $r(\emptyset) = 0$,

(R2) si $S \subseteq T$, entonces $r(S) \leq r(T)$ (“monotonía”),

(R3) $r(S) \leq |S| \forall S \subseteq E$ (“subcardinalidad”),

(R4) $r(S \cup T) + r(S \cap T) \leq r(S) + r(T) \forall S, T \subseteq E$ (“submodularidad”).

Demostración. Vamos a probar primero la implicación \Rightarrow . Para ello, sea (E, \mathcal{F}) un matroide. Tenemos que comprobar que la función rango r_M cumple las cuatro propiedades (R1), (R2), (R3) y (R4):

(R1) $\emptyset \in \mathcal{F} \Rightarrow r_M(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.

(R2) Sea $S \subseteq T$.

$$r_M(S) = \text{máx}\{|Y| : Y \subseteq S, Y \in \mathcal{F}\} \leq \text{máx}\{|Y| : Y \subseteq T, Y \in \mathcal{F}\} = r_M(T).$$

(R3) $|Y| \leq |S|$ para todo $Y \subseteq S$. Por tanto,

$$r_M(S) = \text{máx}\{|Y| : Y \subseteq S, Y \in \mathcal{F}\} \leq |S|.$$

(R4) Sean $Y, Z \subseteq E$. Sea $F \in \mathcal{F}$ un conjunto maximal respecto a la inclusión con $F \subseteq Y \cap Z$ y sea $F' \in \mathcal{F}$ un conjunto maximal respecto a la inclusión con $F \subseteq F' \subseteq Y \cup Z$. Por la propiedad (3) de los matroides, $r_M(Y \cup Z) = |F'|$ y $r_M(Y \cap Z) = |F|$ porque F y F' son maximales. Entonces:

$$\begin{aligned} r_M(Y) + r_M(Z) &\geq |F' \cap Y| + |F' \cap Z| = |F' \cap (Y \cap Z)| + |F' \cap (Y \cup Z)| \\ &\geq |F' \cap F| + |F'| = |F| + |F'| = r_M(Y \cap Z) + r_M(Y \cup Z). \end{aligned}$$

Este punto está demostrado en los apuntes [12], en el teorema 10.2.

Para la otra implicación \Leftarrow , consideramos $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ una función que cumple las propiedades (R1), (R2), (R3) y (R4) y sea $\mathcal{F} = \{I \subseteq E : r(I) = |I|\}$. Tenemos que probar que (E, \mathcal{F}) es un matroide y que la función rango de este matroide es r .

- (1) $r(\emptyset) = 0 = |\emptyset|$, luego $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- (2) Sea $T \in \mathcal{F}$ y sea $S \subseteq T$. ¿ $S \in \mathcal{F}$? Lo probamos por inducción. Si $|S| = 0$, entonces $S = \emptyset$ y por (1), $r(S) = |S| = 0$. Suponemos que para cada subconjunto $S \subseteq T$ con $|S| = |T| - 1$, se cumple que $r(S) = |S|$. Sea $S \subseteq T$ con $|S| = |T|$. Suponemos que $S \neq T$. Entonces existe $e \in T \setminus S$. Como $S \subseteq T$, $S = S \setminus \{e\} \subseteq T \setminus \{e\}$ y por tanto, $|T| = |S| \leq |T \setminus \{e\}| = |T| - 1$ lo cual es absurdo. Esto implica que $S = T$ y $r(S) = r(T) = |T| = |S|$.
- (3) Sean $F, F' \in \mathcal{F}$ con $|F| < |F'|$. Sea U el subconjunto más grande de $F' \setminus F$ con $r(F \cup U) = |F|$. Entonces $U \neq F' \setminus F$ porque $r(F \cup F') \geq |F'| > |F|$. Luego existe $x \in (F' \setminus F) \cup U$. Si $F \cup \{x\} \in \mathcal{F}$, ya tendríamos lo que queremos probar. Por tanto, asumimos $F \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$. Como consecuencia, obtenemos $r(F \cup \{x\}) = |F|$. Ahora tomamos $U' := U \cup \{x\}$. Entonces, por (R4),

$$|F| = r(F \cup \{x\}) \leq r(F \cup U') \leq r(F \cup U) + r(F \cup \{x\}) - r(F) = |F|,$$

por lo que $r(F \cup U') = |F|$ contradiciendo la maximalidad de U .

Por último, vamos a demostrar que la función rango de este matroide es r . En primer lugar, si $Y \in \mathcal{F}$,

$$r_M(Y) = \max\{|Z| : Z \subseteq Y, Z \in \mathcal{F}\} = |Y| = r(Y).$$

Por tanto, nos falta probar que también se cumple la igualdad para cualquier subconjunto $X \subseteq E$. Sea $X \subseteq E$ y sea $Y \in \mathcal{F}$ tal que $r_M(X) = |Y|$. Por una parte,

$$r_M(X) = r_M(Y) = r(Y) \stackrel{(R2)}{\leq} r(X).$$

Para la otra desigualdad, utilizamos inducción sobre $|X|$. Si $X = \emptyset$, es trivial. Suponemos que $X \neq \emptyset$ y elegimos $y \in X$. Por hipótesis de inducción, sabemos que existe $Y \in \mathcal{F}$, $Y \subseteq X - y$, tal que $r_M(X - y) = |Y| = r(X - y)$. Si $r(X) = r(X - y)$, ya estaría. Luego asumimos que $r(X) > r(X - y)$. Entonces $Y + y \in \mathcal{F}$ porque

$$r(Y + y) \stackrel{(R4)}{\geq} r(Y) + r(X) - r(X - y) \geq |Y| + 1.$$

Por tanto,

$$r(X) \leq r(X - y) + r(\{y\}) \leq |Y| + 1 = r_M(Y + y) \leq r_M((X - y) + y) = r_M(X).$$

Esta demostración aparece en el libro [13] en el capítulo 39. \square

Por ejemplo, en los matroides vectoriales el rango de un conjunto X es el tamaño del subconjunto linealmente independiente más grande contenido en X , que coincide con el rango en sentido del álgebra lineal. En los gráficos es igual al número de vértices menos el número de componentes conexas. Lo probamos a continuación:

Proposición 1.13. *En los matroides gráficos, el rango es igual al número de vértices menos el número de componentes conexas.*

Demostración. Sea (E, \mathcal{F}) un matroide gráfico y sea $X \subseteq E$. Vamos a utilizar inducción para esta prueba. Supongamos que X tiene una sola componente conexas, es decir, es conexo. El rango de X es el tamaño del bosque más grande contenido en X , por lo que este bosque tiene que pasar por todos los vértices de X pero no puede haber ningún ciclo. Luego

$$r(X) = |V(X)| - 1,$$

siendo $V(X)$ el conjunto de vértices que unen las aristas de X .

Suponemos que es cierto que

$$r(X) = |V(X)| - (k - 1),$$

siendo $k - 1$ el número de componentes conexas de X con $k \geq 2$. Ahora consideramos $X \subseteq E$ con k componentes conexas. Sea B el bosque más grande contenido en X . Vamos a agrupar las componentes conexas de B en dos conjuntos B_1 y B_{k-1} disjuntos, donde B_1 solo tiene una componente conexas y B_{k-1} tiene $k - 1$ componentes conexas. Por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} r(B_{k-1}) &= |V(B_{k-1})| - (k - 1), \\ r(B_1) &= |V(B_1)| - 1. \end{aligned}$$

Luego

$$r(X) = r(B) = r(B_{k-1}) + r(B_1) = |V(B_1)| + |V(B_{k-1})| - (k - 1 + 1) = |V(B)| - k,$$

utilizando que $B_{k-1} \cup B_1 = B$ y $B_{k-1} \cap B_1 = \emptyset$. □

Sea M un matroide E y \mathcal{B} el conjunto de bases de M . Entonces

$$\mathcal{B}^* = \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es el conjunto de bases de un matroide sobre E .

Proposición 1.14. *El par (E, \mathcal{F}^*) es un matroide, donde*

$$\mathcal{F}^* = \{Y \subseteq E : \exists B \in \mathcal{B} \text{ con } Y \cap B = \emptyset\}.$$

Demostración. (1) $\emptyset \in \mathcal{F}^*$ de manera trivial.

(2) Sea $T \in \mathcal{F}^*$ y $S \subseteq T$. Como $T \in \mathcal{F}^*$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $T \cap B = \emptyset$. Como $S \subseteq T$, $S \cap B = \emptyset$ y por tanto, $S \in \mathcal{F}^*$.

(3) Sean $S, T \in \mathcal{F}^*$ con $|T| > |S|$. Como $T \in \mathcal{F}^*$, existe una base B_T de M tal que $B_T \subseteq E \setminus T$. De manera similar, también existe una base de M que está contenida en $E \setminus S$. Ahora, $B_T \setminus S \subseteq E \setminus S$, lo cual implica que existe una base B' de M tal que $B_T \setminus S \subseteq B' \subseteq E \setminus S$. Vamos a probar que $T \setminus S \not\subseteq B'$:

En primer lugar, como $B_T \cap S \subseteq S \setminus T$ y $B_T \cap T = \emptyset$, obtenemos que $(B_T \setminus S) \cap (T \setminus S) = \emptyset$. Supongamos por reducción al absurdo que $T \setminus S \subseteq B'$. Entonces

$$|B_T| = |B_T \cap S| + |B_T \setminus S| \leq |S \setminus T| + |B_T \setminus S| < |T \setminus S| + |B_T \setminus S| \leq |B'|,$$

usando en la última desigualdad el hecho que $(B_T \setminus S) \cap (T \setminus S) = \emptyset$. Pero esto es una contradicción porque las bases tienen el mismo número de elementos. Por tanto, $T \setminus S \not\subseteq B'$. Como consecuencia, tenemos que existe $z \in T \setminus S$ con $z \notin B'$. Entonces $B' \cap (S \cup \{z\}) = \emptyset$ y obtenemos que $S \cup \{z\} \in \mathcal{F}^*$. Esta última parte de la demostración aparece en el libro [13] en el capítulo 39. □

Definición 1.15. El matroide sobre E con \mathcal{B}^* el conjunto de bases, que denotamos por M^* , se llama el *dual* de M . Una base de M^* se llama *cobase* de M .

Como consecuencia,

$$r(M^*) = |E| - r_M \text{ y } M^{**} = M.$$

Proposición 1.16. La función rango r_{M^*} del matroide dual M^* satisface, para todo $U \subseteq E$:

$$r_{M^*}(U) = |U| + r_M(E \setminus U) - r_M(E).$$

Demostración. Denotamos \mathcal{B} y \mathcal{B}^* las colecciones de bases de M y M^* , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} r_{M^*}(U) &= \text{máx}\{|U \cap A| : A \in \mathcal{B}^*\} \\ &= \text{máx}\{|U \setminus B| : B \in \mathcal{B}\} \\ &= |U| - r_M(E) + \text{máx}\{|B \setminus U| : B \in \mathcal{B}\} \\ &= |U| - r_M(E) + r_M(E \setminus U). \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.17. Vamos a considerar el matroide transversal M del ejemplo 1.6.

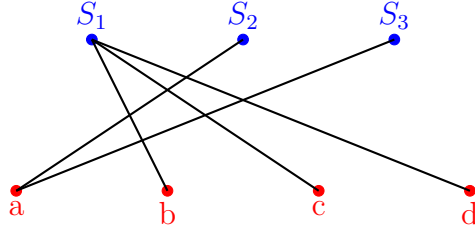


Figura 1.3: Grafo bipartito con bipartición $U = \{a, b, c, d\}$ y $V = \{S_1, S_2, S_3\}$.

Según la proposición 1.14, su matroide dual tendría como conjuntos independientes los siguientes:

$$\mathcal{F}^* = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}\}.$$

Vamos a comprobar que realmente es un matroide:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{F}^*$.
- (2) Si tomamos un conjunto $X \in \mathcal{F}^*$ de dos elementos, sus posibles subconjuntos pueden ser $\emptyset, \{b\}, \{c\}$ o $\{d\}$ que también son elementos de \mathcal{F}^* . Luego se cumple (2).
- (3) Sean $S, T \in \mathcal{F}^*$ con $|T| > |S|$. Si $S = \emptyset$, entonces es evidente que existe $e \in T \setminus S$ tal que $S \cup \{e\} \in \mathcal{F}^*$ (basta con tomar cualquier elemento de T). Si $S \neq \emptyset$, tiene que ser un conjunto unipuntual y T un conjunto con dos elementos. Los conjuntos de dos elementos incluyen los elementos b, c o d , por lo que para cualquier $S \in \mathcal{F}^*$ unipuntual, existirá $e \in T \setminus S$ tal que $S \cup \{e\} \in \mathcal{F}^*$.

El conjunto \mathcal{C}^* de circuitos de M^* es el conjunto de subconjuntos $D \subset E$ tales que $D \cap B \neq \emptyset \forall B \in \mathcal{B}$ y D es minimal para la inclusión con esta propiedad, que coincide con la definición que hemos estudiado previamente.

Proposición 1.18. *El conjunto \mathcal{C}^* definido sobre el matroide dual M^* es el conjunto de circuitos del matroide M^* .*

Demostración. Veamos que cada elemento de \mathcal{C}^* es un circuito del matroide M^* . Sea $D \in \mathcal{C}^*$. Tomamos $X \subseteq D$ con $X \neq D$. ¿ X es independiente en M^* ? Suponemos que no es independiente. Entonces $X \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Pero esto es posible si y solo si $X = D$ o $D \subseteq X$ porque D es minimal para la inclusión con esta propiedad, lo cual es absurdo debido a que son conjuntos distintos. Por tanto, X es independiente.

Si ahora consideramos un circuito C^* del matroide M^* , sabemos que C^* no es independiente. Recordemos que en los matroides duales, un conjunto X es independiente si existe $B \in \mathcal{B}$ de tal manera que $X \cap B = \emptyset$. Luego C^* cumple que $C^* \cap B \neq \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Además, C^* es minimal por inclusión, lo cual implica que $C^* \in \mathcal{C}^*$. \square

Definición 1.19. Un circuito de M^* se llama *cocircuito* de M y un cocircuito de cardinal uno se llama *cobucle* de M .

Observamos que los cocircuitos de un matroide son los complementarios de hiperplanos en el conjunto de elementos,

$$\mathcal{C}^* = \{E \setminus H \mid H \in \mathcal{H}\},$$

donde \mathcal{H} es el conjunto de hiperplanos de M . Ciertamente los cocircuitos de un matroide satisfacen las mismas propiedades (C1), (C2), (C3) que los circuitos.

1.3. Operaciones

En este apartado, vamos a comentar algunas operaciones naturales que se dan en los matroides. En primer lugar, consideramos $M = (E, \mathcal{F})$ un matroide para las sucesivas definiciones.

Definición 1.20. Sea $S \subseteq E$. La *restricción* $M|S$ es un matroide sobre S que tiene como colección de conjuntos independientes

$$\mathcal{F}|S = \{I \subseteq S : I \in \mathcal{F}\}.$$

Claramente se ve que $M|S$ es un matroide.

Proposición 1.21. Sea $S \subseteq E$. $(E \setminus S, \mathcal{F}/S)$ es un matroide, donde

$$\mathcal{F}/S = \{I \subseteq E \setminus S : I \cup I_S \in \mathcal{F}\},$$

con I_S cualquier subconjunto maximal independiente de S .

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son evidentes y falta por probar la propiedad (3). Para ello, tomamos $U, V \in \mathcal{F}/S$ con $|U| > |V|$. Esto implica que $U \cup I_S \in \mathcal{F}$ y $V \cup I_S \in \mathcal{F}$, para cualquier subconjunto I_S maximal

independiente de S . Fijamos I_S un subconjunto maximal independiente de S . Entonces, si aplicamos la propiedad (3) del matroide $M = (E, \mathcal{F})$, tenemos que existe $t \in (U \cup I_S) \setminus (V \cup I_S)$ tal que $(V \cup I_S) \cup \{t\} \in \mathcal{F}$. Como $t \notin (V \cup I_S)$, $t \notin I_S$ y por tanto, $t \in U \setminus V$. Esto es cierto para todo I_S subconjunto maximal independiente de S , luego $V \cup \{t\} \in \mathcal{F}/S$. \square

Definición 1.22. El matroide $(E \setminus S, \mathcal{F}/S)$ de la proposición anterior se denomina la *contracción* M/S .

Cuando tenemos que $S = E \setminus \{e\}$, ponemos directamente $M|_e$ la *restricción* o *supresión* de $e \in E$, que se trata del matroide $(E \setminus \{e\}, \mathcal{F} \cap 2^{E \setminus \{e\}})$, donde $2^{E \setminus \{e\}}$ indica el conjunto de partes de $E \setminus \{e\}$. Cuando $S = \{e\}$, ocurre que la *contracción* de $e \in E$ es:

$$M/e = \begin{cases} (E \setminus \{e\}, \{S \setminus \{e\} | e \in S, S \in \mathcal{F}\}) & \text{si } \{e\} \in \mathcal{F}, \\ (E \setminus \{e\}, \mathcal{F}) & \text{si } \{e\} \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

La supresión de e deja la función rango sobre los subconjuntos de $E \setminus \{e\}$ invariante, mientras que la contracción de e produce la siguiente función rango:

$$r'(F) := r(F \cup \{e\}) - r(\{e\}), F \subseteq E \setminus \{e\}.$$

Estas operaciones son útiles para demostraciones inductivas.

Por último, vamos a hablar de operaciones con más de un matroide.

Proposición 1.23. Sean $M_1 = (E_1, \mathcal{F}_1)$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{F}_2)$ dos matroides con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Entonces $(E_1 \cup E_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$ es un matroide, donde

$$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 = \{I_1 \cup I_2 : I_1 \in \mathcal{F}_1, I_2 \in \mathcal{F}_2\}.$$

Demostración. La primera propiedad es trivial. Para la segunda, tomamos $T \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ y $S \subseteq T$. Tenemos que $T = T_1 \cup T_2$, donde $T_1 \in \mathcal{F}_1$ y $T_2 \in \mathcal{F}_2$. Como $S \subseteq T_1 \cup T_2$ y $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $S \subseteq T_1$ o $S \subseteq T_2$. Suponemos que $S \subseteq T_1$ (sino se razona de manera similar). Entonces $S = S \cup \emptyset \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$.

Para la tercera propiedad, sean $T, S \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ con $|T| > |S|$. Sabemos que $T = T_1 \cup T_2$ y $S = S_1 \cup S_2$ con $T_1, S_1 \in \mathcal{F}_1$ y $T_2, S_2 \in \mathcal{F}_2$. Suponemos que para todo $t \in T \setminus S$, $S \cup \{t\} \notin \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$. Entonces para todo $t \in T_1 \setminus S_1$, $S_1 \cup \{t\} \notin \mathcal{F}_1$, lo cual no es posible si $|T_1| > |S_1|$ ya que $T_1, S_1 \in \mathcal{F}_1$. Luego $|T_1| \leq |S_1|$. Aplicamos el mismo razonamiento a T_2 y S_2 , y obtenemos que $|T_2| \leq |S_2|$. Pero entonces

$$|T| = |T_1| + |T_2| \leq |S_1| + |S_2| = |S|,$$

lo cual es absurdo. Por tanto, existe $t \in T \setminus S$ tal que $S \cup \{t\} \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$. \square

Definición 1.24. El matroide $(E_1 \cup E_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$ definido en la proposición anterior se llama la *suma directa* $M_1 \oplus M_2$ de dos matroides $M_1 = (E_1, \mathcal{F}_1)$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{F}_2)$.

Definición 1.25. Se dice que un matroide $M = (E, \mathcal{F})$ es *conexo* si para dos subconjuntos cualesquiera de E , existe un circuito de M que contiene a ambos subconjuntos.

Proposición 1.26. *Todo matroide descompone de forma única como suma directa de sus componentes conexas.*

Demostración. Supongamos que $M = (E, \mathcal{F})$ es un matroide no conexo. Sino descompone en un solo matroide que es el mismo. Vamos a considerar E_1, \dots, E_k una partición de E donde k sea el entero positivo más pequeño de tal manera que para cada circuito C de M , existe $i = 1, \dots, k$ tal que $C \subseteq E_i$. Ahora tomamos la suma directa $M_1 \oplus \dots \oplus M_k$, donde M_i es el matroide de restricción $M|_{E_i}$ para todo $i = 1, \dots, k$. Demostramos

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k.$$

Para demostrar la igualdad de estos dos matroides, es suficiente con ver que tienen los mismos conjuntos independientes, dado que tienen el mismo conjunto base ($E = E_1 \cup \dots \cup E_k$). Empezamos con la contención \subseteq . Sea $T \in \mathcal{F}$. Como T es un subconjunto de E y E se descompone en la partición $E_1 \cup \dots \cup E_k$, existen $T_1 \subseteq E_1, \dots, T_k \subseteq E_k$ tal que $T = T_1 \cup \dots \cup T_k$. Por la propiedad (2) del matroide M , los subconjuntos de T son independientes también, es decir, $T_i \in \mathcal{F}$, para todo $i = 1, \dots, k$. Luego $T_i \in \mathcal{F}_i$ para todo $i = 1, \dots, k$ y $T \in \mathcal{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_k$.

Para la otra contención \supseteq , consideramos $T = T_1 \cup \dots \cup T_k \in \mathcal{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_k$. Sabemos que cada $T_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, \dots, k$, por lo que $T_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, k$. Suponemos que $T \notin \mathcal{F}$. Como cada subconjunto de T es un conjunto independiente de M , T es un circuito de M . Utilizando que M no es conexo, obtenemos que existe $i = 1, \dots, k$ tal que $T \subseteq E_i$. Pero esto es absurdo porque $T_j \not\subseteq E_i$ para todo $j = 1, \dots, k, j \neq i$. Por tanto, $T \in \mathcal{F}$.

Falta por probar la unicidad. Supongamos que M se descompone en otra suma directa:

$$M = M'_1 \oplus \dots \oplus M'_l,$$

donde $l \geq k$ porque k lo habíamos escogido para ser el más pequeño de tal manera que M se descompusiera en sus componentes conexas. Entonces tenemos que :

$$M_1 \oplus \dots \oplus M_k = M'_1 \oplus \dots \oplus M'_l.$$

Sea $F \in \mathcal{F}$. Entonces existen $F_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, F_k \in \mathcal{F}_k$ y $F'_1 \in \mathcal{F}'_1, \dots, F'_l \in \mathcal{F}'_l$ tal que

$$F = F_1 + \dots + F_k = F'_1 + \dots + F'_l.$$

De esta igualdad, deducimos que existe $i = 1, \dots, l$, tal que $F_1 \subseteq F'_i$. Por comodidad, vamos a reordenar la suma de los $F'_j, j = 1, \dots, l$, para que $F'_i = F'_1$. De manera similar, existe $j = 1, \dots, k$ tal que $F'_1 \subseteq F_j$. Pero como $F_1 \subseteq F'_1, F'_1 \subseteq F_1$ porque $F_1 \cap F_j = \emptyset, \forall j = 2, \dots, k$. Luego obtenemos que $F_1 = F'_1$. Si ahora seguimos razonando de la misma forma sobre

$$F_2 + \dots + F_k = F'_2 + \dots + F'_l,$$

obtenemos que $F_2 = F'_2$. Repitiendo el mismo proceso, llegamos a que $F_i = F'_i$, para todo $i = 1, \dots, k$. Por tanto, para que se dé la igualdad $F_1 + \dots + F_k = F'_1 + \dots + F'_l, F'_j = \emptyset$, para todo $j = k + 1, \dots, l$. Esto se cumple para todo conjunto independiente F de M , luego $M_1 = M'_1, \dots, M'_k = M_k, M'_{k+1} = \emptyset, \dots, M'_l = \emptyset$ y tenemos que M se descompone de forma única como suma de sus componentes conexas. \square

Capítulo 2

Intersección de matroides

En este capítulo, vamos a empezar a hablar de la intersección de matroides. Nuestro objetivo es encontrar un conjunto independiente de máxima cardinalidad común a dos matroides sobre el mismo conjunto base. Primero comenzamos con un matroide y una función de coste $c : E \rightarrow \mathbb{Q}_+$, que asigna a cada elemento $e \in E$, un coste $c(e)$. De esta manera, definimos el peso de un subconjunto $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq E$ como $c(X) := c(x_1) + \dots + c(x_m)$. Lo que vamos a hacer en la primera sección es estudiar si existe un conjunto independiente de peso máximo en un matroide. En la segunda sección, vamos a estudiar lo mismo pero desde otra perspectiva relacionada con los politopos. En la tercera, ya hablamos del estudio de un conjunto independiente de máxima cardinalidad común a dos matroides, desde la perspectiva de politopos y a través de un algoritmo, que produce directamente el conjunto buscado. La última sección, trata brevemente de un algoritmo que encuentra un conjunto independiente de máximo peso común a dos matroides, respecto a una función de coste.

2.1. Matroides y optimización

Los matroides y la optimización combinatoria están bastante relacionados debido a que se puede encontrar un conjunto independiente de máximo peso a través de un algoritmo muy elemental, llamado algoritmo voraz. Lo primero de todo es considerar un matroide $M = (E, \mathcal{F})$ y una función de coste (weight function) $c : E \rightarrow \mathbb{Q}_+$, de tal manera que a cada elemento $e \in E$, corresponde un coste $c(e)$ y a cada subconjunto $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ de E , le asignamos un peso $c(X) = c(x_1) + \dots + c(x_m)$. Nuestro objetivo consiste en encontrar un conjunto independiente de máximo peso respecto a la función de coste c . La mayor parte de los resultados se encuentran en los libros [8] y [13].

Definición 2.1. El *algoritmo voraz* (*greedy* en inglés) es un algoritmo basado en los siguientes pasos:

- (I) Elegimos un elemento $e_1 \in E$ tal que $\{e_1\} \in \mathcal{F}$ y $c(e_1)$ maximal.
- (II) Asumiendo que e_1, \dots, e_i están escogidos, elegimos e_{i+1} en $E \setminus \{e_1, \dots, e_i\}$ de tal manera que $\{e_1, \dots, e_i, e_{i+1}\} \in \mathcal{F}$ y $c(e_{i+1})$ es maximal.
- (III) Se repite (II) hasta que no exista e_{i+1} .

Teorema 2.2 ([8, Thm. 7.5.12]). *El algoritmo voraz termina con un conjunto $X = \{e_1, \dots, e_r\} \in \mathcal{F}$ de peso máximo.*

Demostración. Según la construcción del conjunto X , en cada iteración añadimos un elemento de tal manera que X sea independiente y el nuevo elemento sea de coste máximo. Entonces, cuando el algoritmo termina, X es un subconjunto maximal independiente de E , es decir, es una base por la propiedad (3) de la definición de matroides. Por tanto, $r = |X| = r_M(E)$.

Razonamos por reducción al absurdo: suponemos que el algoritmo falla, lo cual quiere decir que existe otro conjunto $Y = \{f_1, \dots, f_t\}$ con peso mayor que X . Suponemos también que

$$c(f_1) \geq c(f_2) \geq \dots \geq c(f_t).$$

En primer lugar, como $r = r_M(E)$, $t \leq r$. Lo siguiente que tenemos en cuenta es que dado que $c(Y) > c(X)$, existe $1 \leq j \leq t$ con $c(f_j) > c(e_j)$. Si ahora aplicamos la propiedad (3) de los matroides a $Y' = \{f_1, \dots, f_j\}$ y $X' = \{e_1, \dots, e_{j-1}\}$, existe $1 \leq i \leq j$ tal que $f_i \notin X'$ y $\{e_1, \dots, e_{j-1}, f_i\} \in \mathcal{F}$. Pero

$$c(f_i) \geq c(f_j) > c(e_j)$$

lo cual contradice la elección de e_j en el algoritmo voraz. □

Tenemos un resultado que caracteriza a los matroides en el que el algoritmo voraz participa de manera fundamental:

Teorema 2.3 (Teorema de Rado, 1957). *Los matroides son exactamente esas estructuras (E, \mathcal{F}) satisfaciendo las propiedades (1) y (2) de la definición de matroides y para las cuales el algoritmo voraz da un conjunto máximo independiente en \mathcal{F} para cada función de coste $c : E \rightarrow \mathbb{Q}_+$.*

Demostración. Sea $M = (E, \mathcal{F})$ un par con E un conjunto finito y \mathcal{F} una colección de subconjuntos de E que satisface (1) y (2). Tenemos que demostrar el punto (3). Para ello, sean $I, J \in \mathcal{F}$ con $k = |I|$ y $k + 1 = |J|$. Supongamos

que no existe $z \in J \setminus I$ tal que $I \cup \{z\} \in \mathcal{F}$. Construimos una función de coste c :

$$\begin{cases} c(e) = k + 2 & \text{si } e \in I, \\ c(e) = k + 1 & \text{si } e \in J \setminus I, \\ c(e) = 0 & \text{si } e \notin J \cup I. \end{cases}$$

Según el algoritmo voraz, se eligen los elementos de coste $k + 2$ y no podemos añadir ninguno más porque el conjunto no sería independiente. Luego el peso sería $c(Y) = k(k + 2)$. Pero en realidad, lo más óptimo sería elegir los $k + 1$ elementos de J de coste $k + 1$ porque

$$c(J) \geq (k + 1)^2 > k(k + 2) = c(I),$$

lo cual es absurdo porque el algoritmo voraz siempre devuelve el resultado óptimo. Por tanto, existe $z \in J \setminus I$ tal que $I \cup \{z\} \in \mathcal{F}$.

El recíproco ya lo hemos demostrado en el teorema 2.2. \square

Si tenemos un matroide descrito por sus conjuntos independientes, entonces es trivial encontrar un conjunto independiente óptimo examinando esa lista. Este algoritmo sería polinomial (incluso lineal) respecto al número de elementos de E . Pero podemos tener los matroides en forma más compacta como por ejemplo en forma de matriz en los matroides vectoriales, fijando una base del espacio vectorial y representando los vectores de E en la matriz de coordenadas. En estos casos, enumerar todos los conjuntos independientes puede resultar demasiado costoso (del orden de un tiempo exponencial). Sin embargo, el algoritmo voraz trabaja en tiempo polinomial dado que se puede comprobar la independencia de cualquier conjunto en tiempo polinomial. Por ejemplo, en este caso de los matroides vectoriales, se examina si un conjunto de vectores es linealmente independiente a través de la eliminación Gaussiana.

2.2. Politopos matroides

Para comenzar, vamos a introducir algunos conceptos básicos sobre politopos y sobre optimización.

Definición 2.4. Un *politopo* es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos P en algún \mathbb{R}^d . También puede representarse como la intersección finita de semiespacios en algún \mathbb{R}^d que está acotada. A la intersección finita de semiespacios en algún \mathbb{R}^d se le conoce como *poliedro*. La *dimensión* de un politopo es la dimensión de su envolvente convexa, es decir, el mínimo k , $k \leq d$ tal que $P \subseteq \mathbb{R}^k$.

Los politopos están formados por *caras*, que son las intersecciones con hiperplanos para las cuales el politopo está enteramente contenido en uno de los dos semiespacios determinados por el hiperplano. Todas las caras distintas del politopo se llaman *caras propias*. Las caras de dimensión 0, 1, $\dim(P) - 2$ y $\dim(P) - 1$ se llaman *vértices*, *cimas*, *crestas* y *facetas*, respectivamente. De hecho, un politopo es la envolvente convexa de sus vértices. En el libro [15] se encuentra más información sobre politopos.

Ahora tenemos una pequeña introducción sobre la optimización, donde los resultados aparecen sin demostración debido a que no es el tema central del trabajo.

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $X \subseteq \mathbb{R}^n$, un problema de optimización se puede formular como:

$$\begin{aligned} & \text{mín } f(x) \\ & \text{sujeta a las restricciones} \\ & x \in X, \end{aligned}$$

donde f es la función objetivo, x son los vectores de las variables de decisión y X es el conjunto de soluciones admisibles. Por tanto, un problema de optimización consiste en determinar, si existe, un punto mínimo de la función f entre todos los puntos del conjunto X .

Si la función objetivo f es lineal, $f(x) = c^T x$, y el conjunto X se puede expresar en términos de relaciones (igualdades o desigualdades) lineales, entonces se dice que es un problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^T x \\ & \text{sujeta a las restricciones} \\ & Ax \geq b, \end{aligned}$$

siendo A una matriz real de tamaño $m \times n$. Podemos pasar de un problema de máximo a un problema de mínimo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{máx } c^T x & \equiv - \text{mín } -c^T x \\ Ax \geq b & \equiv -Ax \leq -b \\ Ax = b & \equiv \begin{cases} Ax \geq b \\ Ax \leq b \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora vamos a presentar la forma estándar de mínimo para un problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín } z & = c^T x \\ Ax & = b, \quad b \geq 0 \\ x & \geq 0 \\ x & \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Todo problema de programación lineal se puede transformar a la forma estándar mediante el cambio, si es necesario, a un problema de mínimo y/o la incorporación, en su caso, de variables excedentes y artificiales, además de las de holgura.

Tenemos varios tipos de problemas de programación lineal, en función de sus soluciones:

1. Inadmisibles: el problema no tiene soluciones que cumplen todas las restricciones.
2. Admisibles con valor óptimo ilimitado: existe solución que cumple las restricciones pero el valor del máximo o del mínimo es ilimitado.
3. Admisibles con valor óptimo finito:
 - 3.1 Único punto de óptimo: existe una única solución que cumple las restricciones y el valor del óptimo es finito.
 - 3.2 Infinitos puntos de óptimos: existen infinitas soluciones que cumplen las restricciones y el valor del óptimo es finito.

Definición 2.5. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *convexa* sobre un conjunto X si, dados dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in X$, resulta que:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \text{ con } \lambda \in [0, 1].$$

Teorema 2.6. Una función lineal del tipo $c^T x$ es una función convexa.

Demostración. Es trivial a partir de la definición de función convexa. \square

Definición 2.7. Un punto $x^* \in X$ es un *óptimo global* para la función $f(x)$ si y solo si

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X.$$

Definición 2.8. Un punto $x' \in X$ es un *óptimo local* para la función $f(x)$ si y solo si

$$f(x') \leq f(x), \forall x \in N(x', \epsilon),$$

siendo $N(x', \epsilon)$ un entorno de x' .

Teorema 2.9. Si f es una función convexa y X es un conjunto convexo, entonces todo óptimo local x' de f sobre X (si existen) es un óptimo global.

Como la función $f(x) = c^T x$ es convexa y el conjunto $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ es convexo, se puede aplicar este teorema y, por tanto, en problemas de programación lineal los óptimos locales y globales coinciden.

Consideramos un problema de programación lineal en forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z = c^T x \\ & Ax = b, \quad (1) \\ & x \geq 0 \quad (2) \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Suponemos que $m = \text{rango}(A)$ y $m < n$. A se puede dividir en $A = [A_B | A_N]$ donde:

- A_B es una matriz no singular $m \times m$ ($\det(A_B) \neq 0$).
- A_N es una matriz $m \times (n - m)$.

La matriz A_B está compuesta de m columnas linealmente independientes de A . Tales columnas (vistas como vectores) son, por tanto, una base del espacio vectorial generado por las m columnas de A . La matriz A_B se dice que es *matriz de base*. En correspondencia con A_B y A_N , se puede dividir el vector x como:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n - m \end{matrix},$$

donde x_B es el vector de las variables de base (*vector de base*) y x_N es el vector de las variables fuera de base.

$$Ax = b \Leftrightarrow A_B x_B + A_N x_N = b \Leftrightarrow A_B x_B = b - A_N x_N \Leftrightarrow x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N.$$

Una solución del sistema de ecuaciones (1) corresponde a determinar el valor para m variables (x_B), habiendo fijado arbitrariamente el valor para las restantes $n - m$ variables (x_N).

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix} \text{ es solución de base.}$$

Si $x_B = A^{-1} b \geq 0$, se obtiene una solución de base admisible.

Teorema 2.10 (Teorema fundamental de la programación lineal). *Dado un problema de programación lineal en forma estándar:*

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & z = c^T x \\ & Ax = b, \quad (1) \\ & x \geq 0 \quad (2) \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde A es una matriz $m \times n$ con $\text{rango}(A) = m$ y $m < n$, entonces:

1. Existe una solución admisible \Rightarrow existe una solución admisible de base.
2. Existe una solución óptima finita \Rightarrow existe una solución óptima finita que es también de base.

Teorema 2.11. Sea A una matriz $m \times n$ de rango m y b un vector m dimensional. Sea X el poliedro convexo formado por todos los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen $Ax = b$ y $x \geq 0$. Un vector x es un vértice del poliedro X si y solo si x es una solución admisible de base del sistema.

Corolario 2.12. Si el poliedro $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ no es vacío, entonces tiene al menos un vértice.

Corolario 2.13. Si existe solución óptima finita en un problema de programación lineal, entonces existe solución óptima finita que corresponde a un vértice de X .

Ahora vamos a explicar un concepto que utilizamos después.

Definición 2.14. El *vector indicador* de un subconjunto T de un conjunto S es el vector $x_T := (x_s)_{s \in S}$ tal que $x_s = 1$ si $s \in T$ y $x_s = 0$ si $s \notin T$.

En nuestro caso, tomamos \mathbb{R}^E el conjunto de las aplicaciones de E en \mathbb{R} , con E finito. Dados $x \in \mathbb{R}^E$, $x = (x_e)_{e \in E}$, y $F \subseteq E$, $x^F \in \mathbb{R}^E$ tal que

$$x_e^F = 1 \text{ si } e \in F \text{ y } x_e^F = 0 \text{ si } e \in E \setminus F,$$

es el vector indicador de F .

Dado un matroide $M = (E, \mathcal{F})$, se puede definir un politopo asociado a este matroide M de la siguiente manera:

Definición 2.15. Un *politopo matroide* es la envolvente convexa de vectores indicadores (incidence vectors) de conjuntos independientes de M , es decir,

$$IND(M) := \text{conv}\{\chi^I \in \mathbb{R}^E \mid I \in \mathcal{F}\}$$

De esta forma, la optimización en matroides es equivalente a encontrar $\text{máx}\{c^T x \mid x \in IND(M)\}$, para un cierto $c \in \mathbb{R}^E$, porque por el corolario 2.13, en los problemas de programación lineal si existe solución óptima finita, es decir, en este caso si existe el máximo, coincide con un vértice, en este caso, del politopo $IND(M)$. Además, los vértices del politopo $IND(M)$ son vectores indicadores de conjuntos independientes de M . Por lo que, resolviendo este problema de programación lineal, si existe solución óptima, obtendríamos

que se alcanza el máximo en un vector indicador de un conjunto independiente. Si tomamos $c = (1, \dots, 1)_E$, obtendríamos el vector indicador χ^F de un conjunto independiente F con mayor suma de sus componentes, es decir, F sería el conjunto independiente más grande de \mathcal{F} . Por tanto, tenemos otro método para encontrar un conjunto independiente de máxima cardinalidad en un matroide.

Ahora vamos a estudiar una caracterización del politopo matroide de un matroide M .

Teorema 2.16. *Para todo matroide $M = (E, \mathcal{F})$, $IND(M)$ es el conjunto de todos los vectores $x \in \mathbb{R}^E$ que satisfacen :*

(P1) $x_e \geq 0$ para todos $e \in E$,

(P2) $x(F) \leq r(F)$ para todos $F \subseteq E$.

Demostración. Por una parte, los vectores indicadores cumplen las desigualdades de forma trivial.

Para demostrar la otra contención, $IND(M) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^E | x \text{ cumple (P1) y (P2)}\}$, asumimos, sin pérdida de generalidad, que los conjuntos unipuntuales $\{e\}$ son independientes en M . Entonces $IND(M)$ contiene todos los vectores unitarios y el vector cero, por tanto, $IND(M)$ tiene dimensión $|E|$.

Ahora tomamos una desigualdad $a^T x \leq b$ que define una faceta de $IND(M)$. Queremos ver que $a^T x \leq b$ es un múltiplo positivo de una de las dos desigualdades (P1), (P2). Para ello, suponemos que existe $e \in E$ de tal manera que $a_e < 0$. Si existe $I \in \mathcal{F}$ con $e \in I$ y $a^T \chi^I = b$, entonces $J := I \setminus \{e\} \in \mathcal{F}$ y $a^T \chi^J > b$, lo cual contradice la desigualdad $a^T x \leq b$. Lo probamos:

Si $a_e < 0$, entonces, al retirar la componente e , se aumenta el producto $a^T \chi^J > a^T \chi^I = b$. Por lo tanto, $x_e = 0$ para todos los puntos de la faceta que cumplan la igualdad $a^T x = b$. Entonces la faceta $IND(M) \cap \{a^T x = b\}$ es la misma que la faceta $IND(M) \cap \{x | x_e = 0\}$. Por tanto, $a^T x \leq b$ es un múltiplo positivo de $-x_e \leq 0$.

Suponemos ahora que $a_e \geq 0$ para todo $e \in E$. Sea $F := \{e \in E | a_e > 0\}$. Queremos probar que $a^T x \leq b$ es un múltiplo positivo de $x(F) \leq r(F)$. Para ello, si $I \in \mathcal{F}$ y $a^T \chi^I = b$, entonces $\chi^I(F) = r(F)$, es decir, $I \cap F$ es una base de F (porque cada base de F tiene el mismo rango que coincide con $r(F)$). Razonamos por reducción al absurdo: suponemos que existe $f \in F \setminus I$ tal que $I' = I \cup \{f\} \in \mathcal{F}$. Entonces $a^T \chi^{I'} = a^T \chi^I + a_f > a^T \chi^I = b$, lo cual contradice la desigualdad $a^T x \leq b$. Luego I es base de F y por tanto, $a^T x \leq b$ es múltiplo positivo de $x(F) \leq r(F)$. \square

Por lo tanto, se puede estudiar el problema de encontrar un conjunto máximo independiente de máximo peso a través del algoritmo voraz o podemos obtener el politopo matroide y utilizar algoritmos de programación lineal para conseguir el máximo, como por ejemplo el método símplex.

2.3. Teorema de intersección de dos matroides

Ahora consideramos la intersección de matroides para aplicarlo a muchas estructuras combinatorias que se pueden ver como conjuntos independientes comunes de dos matroides (ver capítulo 3).

En primer lugar, consideramos dos matroides $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ y $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ sobre el mismo conjunto finito E . La intersección de dos matroides se define como $M_1 \cap M_2 := (E, \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2)$.

Definición 2.17. Definimos el politopo asociado a la intersección de dos matroides como sigue:

$$IND(M_1 \cap M_2) := \text{conv}\{\chi^I \mid I \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\}.$$

No necesariamente esta intersección es otro matroide (ver 3.1) pero el politopo asociado cumple una propiedad que se demuestra en el siguiente teorema:

Teorema 2.18. (Edmonds, 1970) Sean M_1 y M_2 dos matroides sobre el mismo conjunto base E . Se cumple que:

$$IND(M_1 \cap M_2) = IND(M_1) \cap IND(M_2),$$

es decir, $IND(M_1 \cap M_2)$ se determina por el sistema de inecuaciones

- (I) $x_e \geq 0$ para todo $e \in E$,
- (II) $x(F) \leq \min\{r_1(F), r_2(F)\}$ para todo $F \subseteq E$,

donde r_i es la función rango de M_i , $i = 1, 2$.

Demostración. La primera contención $IND(M_1 \cap M_2) \subseteq IND(M_1) \cap IND(M_2)$ es obvia. Para la otra contención, aplicamos inducción sobre $|E|$. Si $E = \emptyset$, el teorema es trivial. Sea $E \neq \emptyset$ y tomamos y un vértice del politopo $IND(M_1) \cap IND(M_2)$. Si probamos que y es integral (todas sus componentes son enteras), entonces $y \in IND(M_1 \cap M_2)$. Lo probamos brevemente:

Como $y \in IND(M_1) \cap IND(M_2)$, y es combinación lineal de

$$\{\chi^I | I \in \mathcal{F}_1\}, (y = \sum_{I \in \mathcal{F}_1} a_I \chi^I),$$

y también de

$$\{\chi^J | J \in \mathcal{F}_2\}, (y = \sum_{J \in \mathcal{F}_2} b_J \chi^J).$$

Sea $\{e\} \subseteq E$. Dado que las componentes de y son enteras, son mayores o iguales que 0 e $y(F) \leq r_i(F), i = 1, 2, \forall F \subseteq E$,

$$y(\{e\}) = 0 \quad \text{o} \quad y(\{e\}) = 1.$$

Si $\{e\} \notin \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, puede ser porque $\{e\} \notin \mathcal{F}_i$ para algún i o porque no está en ninguna de las dos familias. Supongamos que $\{e\} \notin \mathcal{F}_2$. Por la propiedad (2) de los matroides, no existe ningún $J \in \mathcal{F}_2$ tal que $e \in J$, por lo que $y(\{e\}) = \sum_{e \in J, J \in \mathcal{F}_2} b_J \chi^J(\{e\}) = 0$. Luego $y(\{e\}) = 1$ si $\{e\} \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Como los conjuntos unipuntuales son independientes, podemos escribir $y = \sum_{\{e\} \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} \chi^{\{e\}}$ y por tanto, $y \in IND(M_1 \cap M_2)$.

Primero vamos a demostrar que y tiene al menos una componente entera y luego utilizaremos como hipótesis de inducción

$$(H.I.) \quad x \in IND(M'_1) \cap IND(M'_2) \quad y \quad x \text{ entero} \implies x \in IND(M'_1 \cap M'_2),$$

donde $M'_i = (E', \mathcal{F}')$ es un matroide con $dim(E') = dim(E) - 1, i = 1, 2$. Asumimos que $y > 0$. Sea $\mathcal{T}_i := \{S \subseteq E | y(S) = r_i(S)\}, i = 1, 2$. Se aprecia que \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 son cerrados bajo la unión y la intersección, debido a que si $S, T \in \mathcal{T}_i$, entonces por la propiedad de la submodularidad (R4):

$$\begin{aligned} r_i(S) + r_i(T) &\stackrel{(R4)}{\geq} r_i(S \cup T) + r_i(S \cap T) \\ &\stackrel{y \in IND(M_i)}{\geq} y(S \cup T) + y(S \cap T) \\ &= y(S) + y(T) \\ &\stackrel{S, T \in \mathcal{T}_i}{=} r_i(S) + r_i(T) \end{aligned}$$

$$\implies r_i(S \cup T) + r_i(S \cap T) = y(S \cup T) + y(S \cap T).$$

A continuación, definimos dos relaciones de equivalencia \sim_i ($i = 1, 2$) sobre E como sigue:

$$e \sim_i f \text{ si } e = f, \text{ o no existe } S \subseteq E \text{ con } S \in \mathcal{T}_i \text{ y } |S \cap \{e, f\}| = 1.$$

Sean A_1, \dots, A_k las clases de equivalencia de \sim_1 y B_1, \dots, B_l las clases de equivalencia de \sim_2 . Si $S \in \mathcal{T}_1$, entonces S es unión de clases A_i . De manera similar, si $S \in \mathcal{T}_2$, entonces S es unión de clases B_j .

Como y es un vértice del politopo definido por las desigualdades (P1) y (P2) con componentes diversas de 0, es la única solución de las ecuaciones de la forma $x(F) = \min\{r_1(F), r_2(F)\}$. Es decir, y es solución de

$$\begin{aligned} x(S) &= r_1(S), \text{ si } S \in \mathcal{T}_1 \\ x(S) &= r_2(S), \text{ si } S \in \mathcal{T}_2. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, se sigue que los vectores indicadores $\chi^S, S \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ generan todo \mathbb{R}^E . Ahora, como $\chi^S, S \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, es suma de vectores χ^{A_i} o χ^{B_j} , entonces $\{\chi^{A_i} | i = 1, \dots, k\} \cup \{\chi^{B_j} | j = 1, \dots, l\}$ también genera todo \mathbb{R}^E . Esto implica que $k + l > |E|$ y de hecho, es estricto porque $\chi^{A_1} + \dots + \chi^{A_k} = \chi^{B_1} + \dots + \chi^{B_l}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $k > \frac{1}{2}|E|$. Entonces una de las clases A_i debe tener un solo elemento, $A_i = \{f\}$. Sean

$$U := \cup\{S \in \mathcal{T}_1 | f \notin S\}$$

y

$$V := \cap\{S \in \mathcal{T}_1 | f \in S\}.$$

U y V pertenecen a \mathcal{T}_1 porque es cerrado bajo la unión y la intersección. Además $V \setminus U = \{f\}$. Si tomamos $e \in V \setminus U$, para cada $S \in \mathcal{T}_1$, $e \in S$ si y solo si $f \in S$, lo cual quiere decir que $e \sim_1 f$. Pero como $A_i = \{f\}$, no existe ningún elemento $e \neq f$ con $e \sim_1 f$. Por tanto, $U \cup \{f\} = U \cup V$ y, como $U, V \in \mathcal{T}_1$, $U \cup \{f\} \in \mathcal{T}_1$. En consecuencia,

$$y_f = y(U \cup V) - y(U) \stackrel{U \cup V, U \in \mathcal{T}_1}{=} r_1(U \cup V) - r_1(U),$$

lo cual implica que y_f es entero. Por lo tanto, ya tenemos que una componente de y es entera, que va a ser 0 o 1.

Si $y_f = 0$, entonces suprimimos f de M_1 y M_2 y obtenemos $M'_1 = (E \setminus \{f\}, \mathcal{F}_1 \cap 2^{E \setminus \{f\}})$ y $M'_2 = (E \setminus \{f\}, \mathcal{F}_2 \cap 2^{E \setminus \{f\}})$. El vector y' , que es la proyección de y sobre $\mathbb{R}^{E \setminus \{f\}}$, es un vértice de $IND(M'_1) \cap IND(M'_2)$. Por la hipótesis de inducción, y' es entero y eso implica que y también es entero.

Si $y_f = 1$, hacemos la contracción de f en M_1 y M_2 . Como antes, y' es un vértice de $IND(M_1/\{f\}) \cap IND(M_2/\{f\})$ y por hipótesis de inducción, y' es entero, luego y también lo es.

Esta teorema corresponde con el teorema 7.5.16 del libro [8]. \square

Ahora vamos a describir un algoritmo para encontrar un conjunto independiente de máxima cardinalidad común a dos matroides dados. Toda esta

parte de algoritmos viene en los apuntes [12] y en el libro [9]. Para poder continuar, necesitamos dos lemas técnicos a modo de preparación.

Sea $M = (E, \mathcal{F})$ un matroide. Para cualquier $Y \in \mathcal{F}$, definimos un grafo bipartito $H(M, Y)$ como sigue. El grafo $H(M, Y)$ tiene como conjunto de vértices E , con clases coloreadas Y y $E \setminus Y$. Los elementos $y \in Y$ y $x \in E \setminus Y$ son adyacentes si y solo si $(Y \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{F}$. Entonces tenemos:

Lema 2.19. *Sea $M = (E, \mathcal{F})$ un matroide y sean $Y, Z \in \mathcal{F}$ con $|Y| = |Z|$. Entonces $H(M, Y)$ contiene un emparejamiento perfecto sobre $Y \Delta Z$.*

Demostración. Recordemos que un emparejamiento perfecto es un emparejamiento que utiliza todos los vértices del grafo (ver 1.1, matroides transversales). Suponemos que no tenemos un emparejamiento perfecto sobre $Y \Delta Z$. El teorema de emparejamiento de König dice que en cualquier grafo bipartito, el número de cimas en un emparejamiento máximo es igual al número de vértices en una cobertura de vértices mínima. Utilizando este teorema, tenemos que existe un subconjunto S de $Y \setminus Z$ y un subconjunto S' de $Z \setminus Y$ tal que para cada arista $\{y, z\}$ de $Y \Delta Z$ que satisface $z \in S'$, tenemos $y \in S$ y $|S| < |S'|$.

Como $|(Y \cap Z) \cup S| < |(Y \cap Z) \cup S'|$, existe un elemento $z \in S'$ tal que $T := (Y \cap Z) \cup S \cup \{z\} \in \mathcal{F}$. Esto implica que existe un $U \in \mathcal{F}$ de manera que $T \subseteq U \subseteq T \cup Y$ y $|U| = |Y|$. Así que $U = (Y \setminus x) \cup \{z\}$ para algún $x \notin S$. Como $\{x, z\}$ es una arista de $H(M, Y)$, esto contradice la elección de S y S' . \square

El siguiente resultado sería el equivalente:

Lema 2.20. *Sea $M = (E, \mathcal{F})$ un matroide y $Y \in \mathcal{F}$. Sea $Z \subseteq E$ tal que $|Z| = |Y|$ y $H(M, Y)$ contiene un único emparejamiento perfecto N sobre $Y \Delta Z$. Entonces Z pertenece a \mathcal{F} .*

Demostración. Razonamos por inducción sobre $k := |Z \setminus Y|$, siendo el caso $k = 0$ trivial. Sea $k \geq 1$. Por la unicidad de N , existe una arista $\{y, z\} \in N$, con $y \in Y \setminus Z$ y $z \in Z \setminus Y$, con la propiedad de que no existe ningún $z' \in Z \setminus Y$ tal que $z' \neq z$ y $\{y, z'\}$ es una arista de $H(M, Y)$.

Sea $Z' := (Z \setminus \{z\}) \cup \{y\}$ y $N' := N \setminus \{\{y, z\}\}$. Entonces N' es el único emparejamiento en $H(M, Y)$ sobre $Y \Delta Z'$. Por tanto, por inducción, $Z' \in \mathcal{F}$. Luego podemos afirmar que existe $S \in \mathcal{F}$ de manera que $Z' \setminus \{y\} \subseteq S \subseteq (Y \setminus \{y\}) \cup Z$ y $|S| = |Y|$ porque $(Y \setminus \{y\}) \cup Z = (Y \setminus \{y\}) \cup \{z\} \cup Z'$ y $(Y \setminus \{y\}) \cup \{z\} \in \mathcal{F}$. Asumiendo que $Z \notin \mathcal{F}$, sabemos que $z \notin S$ y por tanto, $r((Y \cup Z') \setminus \{y\}) = |Y|$. Entonces existe $z' \in Z' \setminus Y$ tal que $(Y \setminus \{y\}) \cup \{z'\} \in \mathcal{F}$. Esto contradice la elección de y debido a que $\{y, z'\}$ sería una arista de $H(M, Y)$. \square

A continuación, empezamos a estudiar el algoritmo previamente citado pero antes definimos lo que es un *grafo dirigido*: es un tipo de grafo en el cual las aristas tienen un sentido definido.

Para dos matroides cualesquiera $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ y $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ y cualquier $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, definimos un grafo dirigido $H(M_1, M_2, Y)$ como sigue. Su conjunto de vértices es E , mientras que para cualquier $y \in Y, x \in E \setminus Y$,

(y, x) es un arco de $H(M_1, M_2, Y)$ si y solo si $(Y \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{F}_1$,

(x, y) es un arco de $H(M_1, M_2, Y)$ si y solo si $(Y \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{F}_2$.

De hecho, este grafo puede considerarse como la unión de las versiones dirigidas de los grafos $H(M_1, Y)$ y $H(M_2, Y)$ definidos anteriormente.

Lo siguiente es la base para encontrar un conjunto independiente de máxima cardinalidad común a dos matroides.

Algoritmo 2.21. Entrada: los datos entrantes son dos matroides $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ y $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ y un conjunto $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Salida: el algoritmo devuelve un conjunto $Y' \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ con $|Y'| > |Y|$, si existe.

Descripción del algoritmo: asumimos que M_1 y M_2 están dados de tal manera que para cualquier subconjunto Z de E , podemos comprobar en tiempo polinomial si $Z \in \mathcal{F}_1$ y si $Z \in \mathcal{F}_2$. Consideramos los conjuntos

$$E_1 := \{y \in E \setminus Y \mid Y \cup \{y\} \in \mathcal{F}_1\},$$

$$E_2 := \{y \in E \setminus Y \mid Y \cup \{y\} \in \mathcal{F}_2\}.$$

Además consideramos el grafo dirigido $H(M_1, M_2, Y)$ definido previamente. Existen dos casos:

Caso 1. Existe un camino dirigido P en $H(M_1, M_2, Y)$ desde algún vértice en E_1 a algún vértice en E_2 (posiblemente de longitud 0 si $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$). Tomamos el camino más corto P (con un número mínimo de arcos). Sea P el camino que pasa por los vértices $y_0, z_1, y_1, \dots, z_m, y_m$ de $H(M_1, M_2, Y)$, en este orden. Por construcción del grafo $H(M_1, M_2, Y)$ y los conjuntos E_1 y E_2 , esto implica que y_0, \dots, y_m pertenecen a $E \setminus Y$ y z_1, \dots, z_m pertenecen a Y . Ahora devolvemos

$$Y' := (Y \setminus \{z_1, \dots, z_m\}) \cup \{y_0, \dots, y_m\}.$$

Caso 2. No existe un camino dirigido en $H(M_1, M_2, Y)$ desde un vértice en E_1 a un vértice en E_2 . Entonces Y es un conjunto independiente de máxima cardinalidad común.

El algoritmo se apoya en los siguientes teoremas:

Teorema 2.22. *Si el caso 1 se cumple, entonces $Y' \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.*

Demostración. Asumimos que se da el caso 1. Por simetría, es suficiente con probar que Y' pertenece a \mathcal{F}_1 . Para ver que $Y' \setminus \{y_0\}$ pertenece a \mathcal{F}_1 , consideramos el grafo $H(M_1, Y)$ definido antes. Observamos que las aristas $\{z_j, y_j\}$ forman el único emparejamiento en $H(M_1, M_2, Y)$ con unión igual a $\{z_1, \dots, z_m, y_1, \dots, y_m\}$ (sino P tendría un atajo). Luego por el lema 2.20, $Y' \setminus \{y_0\} = (Y \setminus \{z_1, \dots, z_m\}) \cup \{y_1, \dots, y_m\} \in \mathcal{F}_1$.

Para probar que $Y' \in \mathcal{F}_1$, observamos que $r_{M_1}(Y \cup Y') \geq r_{M_1}(Y \cup \{y_0\}) = |Y| + 1$, y que, como $(Y' \setminus \{y_0\}) \cap E_1 = \emptyset$, $r_{M_1}((Y \cup Y') \setminus \{y_0\}) = |Y|$.

Dado que $Y' \setminus \{y_0\} \in \mathcal{F}_1$, sabemos que $Y' \in \mathcal{F}_1$. \square

Teorema 2.23. *Si el caso 2 se cumple, entonces Y es un conjunto de máxima cardinalidad común.*

Demostración. Si se da el caso 2, entonces no existe $E_1 - E_2$ camino dirigido en $H(M_1, M_2, Y)$. Por tanto, existe un subconjunto U de E que contiene E_2 tal que $U \cap E_1 = \emptyset$ y tal que ningún arco de $H(M_1, M_2, Y)$ entra en U . (Podemos tomar para U el conjunto de vértices que no se alcanzan por un camino dirigido desde E_1). Probamos

$$r_{M_1}(U) + r_{M_2}(E \setminus U) = |Y|.$$

Pero antes, veamos que

$$r_{M_1}(U) = |Y \cap U|.$$

Claramente, como $Y \cap U \in \mathcal{F}_1$, tenemos $r_{M_1}(U) \geq |Y \cap U|$. Supongamos que $r_{M_1}(U) > |Y \cap U|$. Esto implica que existe $x \in U \setminus Y$ tal que $(Y \cap U) \cup \{x\} \in \mathcal{F}_1$. Dado que $Y \in \mathcal{F}_1$, entonces existe un conjunto $Z \in \mathcal{F}_1$ con $|Z| \geq |Y|$ y $(Y \cap U) \cup \{x\} \subseteq Z \subseteq Y \cup \{x\}$. Por tanto, $Z = Y \cup \{x\}$ o $Z = (Y \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ para algún $y \in Y \setminus U$.

En el primer caso, $x \in E_1$, contradiciendo el hecho de que $x \in U$. En el segundo, (y, x) es un arco de $H(M_1, M_2, Y)$ entrando en U , lo cual contradice la definición de U (porque $y \notin U$ y $x \in U$). Esto demuestra que $r_{M_1}(U) = |Y \cap U|$. De manera similar, tenemos que $r_{M_2}(E \setminus U) = |Y|$. Ahora, esta última igualdad implica que para cualquier conjunto Z en $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ se tiene

$$|Z| = |Z \cap U| + |Z \setminus U| \leq r_{M_1}(U) + r_{M_2}(E \setminus U) = |Y|.$$

Por tanto, Y es un conjunto independiente común de máxima cardinalidad. \square

El algoritmo trabaja en tiempo polinomial, dado que se sabe que construir los grafos dirigidos auxiliares $H(M_1, M_2, Y)$ y encontrar el camino P (si existe) se produce en tiempo polinomial. Esto nos lleva al siguiente resultado:

Teorema 2.24. *Es posible encontrar un conjunto independiente de máxima cardinalidad común a dos matroides en tiempo polinomial.*

Demostración. Se prueba directamente de lo anterior, ya que podemos encontrar un conjunto independiente de máxima cardinalidad común después de aplicar como mucho $|E|$ veces el algoritmo anteriormente descrito. \square

El algoritmo también sostiene una relación mín – máx para la máxima cardinalidad de un conjunto independiente común:

Teorema 2.25. *(Edmonds, 1970) Sean $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ y $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ dos matroides, con funciones de rango r_{M_1} y r_{M_2} , respectivamente. Entonces*

$$\max\{|Y| : Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2\} = \min\{r_{M_1}(U) + r_{M_2}(E \setminus U) | U \subseteq E\}.$$

Demostración. La desigualdad \leq se sigue de manera similar a la demostración del teorema 2.23. Si tomamos $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ y cualquier conjunto $U \subseteq E$, entonces

$$|Y| = |Y \cap U| + |Y \setminus U| \leq r_{M_1}(U) + r_{M_2}(E \setminus U)$$

porque $Y \cap U \in \mathcal{F}_1$ y $Y \setminus U \in \mathcal{F}_2$. Luego $|Y| \leq \min_{U \subseteq E} (r_{M_1}(U) + r_{M_2}(E \setminus U))$. Como es cierto para todo $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$,

$$\max_{Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} |Y| \leq \min_{U \subseteq E} (r_{M_1}(U) + r_{M_2}(E \setminus U)).$$

La otra desigualdad proviene del hecho que si el algoritmo se para con el conjunto Y , obtenemos un conjunto U con el que se cumple

$$r_{M_1}(U) + r_{M_2}(E \setminus U) = |Y|.$$

Por tanto, el máximo $\max_{Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} |Y|$ es al menos tan grande como el mínimo $\min_{U \subseteq E} (r_{M_1}(U) + r_{M_2}(E \setminus U))$. \square

En el capítulo 3, estudiaremos este algoritmo sobre un ejemplo concreto.

2.4. Intersección ponderada de matroides

A continuación, consideramos el problema de encontrar un conjunto independiente común de máximo peso, en dos matroides dados, con una función de coste dada. El algoritmo es una extensión del algoritmo anterior, pero ahora, en cada iteración, en vez de encontrar un camino P con un número mínimo de arcos en H , pediremos que P tenga una mínima longitud respecto a alguna función de longitud definida en H .

Para describir el algoritmo, si $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ y $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ son matroides y $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de coste, llamaremos $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ un conjunto *extremo* si $w(Z) \leq w(Y)$ para cada $Z \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ satisfaciendo $|Z| = |Y|$.

Algoritmo 2.26. Entrada: como datos de entrada tenemos dos matroides $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ y $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$, una función de coste $w : E \rightarrow \mathbb{Q}$, y un conjunto independiente común extremo Y .

Salida: el algoritmo devuelve un conjunto independiente común extremo Y' con $|Y'| = |Y| + 1$, si existe.

Descripción del algoritmo: consideramos otra vez los conjuntos E_1 y E_2 y el grafo dirigido $H(M_1, M_2, Y)$ sobre E como antes. Para todo $x \in E$, definimos la “longitud” $l(x)$ de x como:

$$\begin{aligned} l(x) &:= w(x) & \text{si } x \in Y \\ l(x) &:= -w(x) & \text{si } x \notin Y. \end{aligned}$$

La *longitud* de un camino P , denotado por $l(P)$, es igual a la suma de las longitudes de los vértices que atraviesan P , contando multiplicidades.

Consideramos dos casos:

Caso 1. $H(M_1, M_2, Y)$ tiene un $E_1 - E_2$ camino P . Elegimos P de tal manera que $l(P)$ es minimal y que tenga un número mínimo de arcos entre todos los $E_1 - E_2$ caminos de longitud mínima. Devolvemos $Y' := Y \Delta V(P) = Y \setminus V(P) + V(P) \setminus Y$, donde $V(P)$ denota los vértices que se utilizan en el camino P .

Caso 2. $H(M_1, M_2, Y)$ no tiene ningún $E_1 - E_2$ camino. Entonces Y es un conjunto independiente común de tamaño máximo.

Los resultados teóricos sobre los que se apoya este algoritmo se encuentran en los apuntes [12] y en el libro [13] y no los demostramos porque se excede del contenido del trabajo.

Capítulo 3

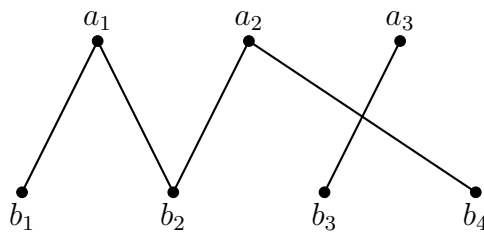
Aplicaciones

Después de hablar de la teoría de intersección de dos matroides, es conveniente estudiar algunas aplicaciones para observar que realmente este concepto se utiliza. Todas estas aplicaciones se encuentran en mayor o menor extensión en las referencias [4], [12] y [13].

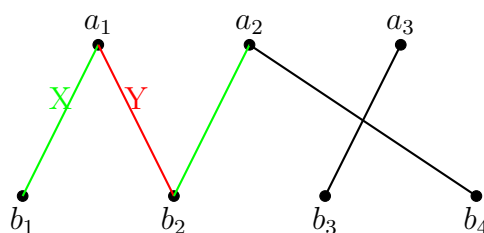
3.1. Emparejamientos bipartitos

Los emparejamientos en un grafo bipartito $G = (V, E)$ con partición (A, B) no forman los conjuntos independientes de un matroide. Lo vemos con un contraejemplo:

Consideramos el grafo bipartito $G = (V, E)$ que se observa a continuación:



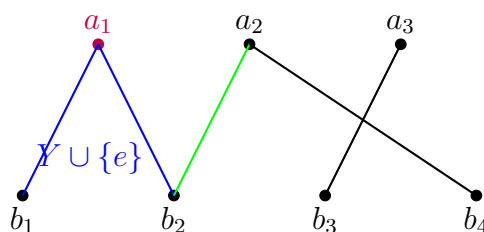
Ahora suponemos que (E, \mathcal{F}) , donde \mathcal{F} es la familia de emparejamientos en el grafo G , es un matroide. Consideramos $X = \{a_1, b_1\} \cup \{a_2, b_2\}$ y $Y = \{a_1, b_2\}$, ambos conjuntos independientes del matroide considerado ya que son emparejamientos sin vértices común respectivamente.



¿Existe alguna arista $e \in X \setminus Y$ tal que $Y \cup \{e\} \in \mathcal{F}$?

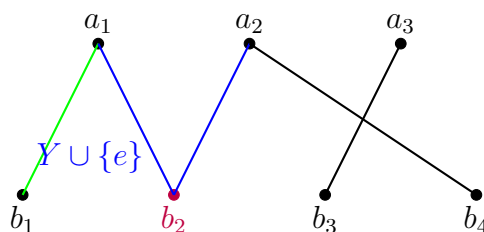
$$Y \cup \{a_1, b_1\} = \{a_1, b_2\} \cup \{a_1, b_1\},$$

que tiene un vértice común a_1 .



$$Y \cup \{a_2, b_2\} = \{a_1, b_2\} \cup \{a_2, b_2\},$$

con un vértice en común b_2 .



Por tanto, no es un matroide.

Sin embargo, estos emparejamientos pueden verse como los conjuntos independientes comunes a dos matroides. Este es el ejemplo canónico de intersección de matroides.

Sea M_1 un matroide de partición con conjunto de base E , donde la partición de E está dada por $E = \cup\{\delta(v) : v \in A\}$, con $\delta(v)$ una función que denota las aristas que inciden sobre v . Observamos que es una partición debido a que todas las demás aristas tienen precisamente un punto final en A . Entonces, la familia de conjuntos independientes de M_1 está dada por:

$$\mathcal{F}_1 = \{F : |F \cap \delta(v)| \leq 1, \forall v \in A\}.$$

En otras palabras, un conjunto de aristas es independiente para M_1 si tiene como mucho una arista incidente sobre cada vértice de A (y cualquier número de aristas incidentes sobre cada vértice de B). Podemos, de manera similar, definir $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$, donde:

$$\mathcal{F}_2 = \{F : |F \cap \delta(v)| \leq 1, \forall v \in B\}.$$

Ahora observamos que cualquier $F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ corresponde con un emparejamiento en G y viceversa.

Proposición 3.1. *Sea G un grafo bipartito y M_1 y M_2 dos matroides definidos más arriba. Un conjunto F es independiente en ambos matroides si y solo si corresponde con un emparejamiento en G .*

Demostración. Sea $F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. F es un conjunto de aristas donde cada arista solo incide una vez sobre cada vértice de A y de B , luego cada arista pasa una vez por cada vértice involucrado y forma un emparejamiento debido a que las aristas no coinciden en ningún vértice (sino existiría un vértice por el que incide más de una arista).

Para el inverso, si tenemos un emparejamiento en G , tenemos un conjunto de aristas que van de vértices de A a vértices de B sin vértices en común. Luego cada arista solo puede incidir una vez en cada vértice de A y de B , porque sino tendríamos un vértice común y no sería un emparejamiento. Entonces ese conjunto de aristas pertenece a $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. \square

Por tanto, el conjunto independiente más grande común a \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 corresponde a un emparejamiento máximo en G . Vamos a estudiar ahora un ejemplo de emparejamiento bipartito donde aplicamos el algoritmo 2.21.

Ejemplo 3.2. Consideramos el grafo bipartito $G = (V, E)$ que se muestra en la figura 3.1, con partición $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Ahora tomamos los matroides de partición $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ y $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ como hemos descrito antes.

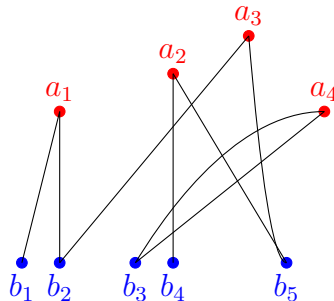


Figura 3.1: grafo bipartito G .

En la figura 3.2, se muestran todos los conjuntos independientes comunes a ambos matroides de máxima cardinalidad.

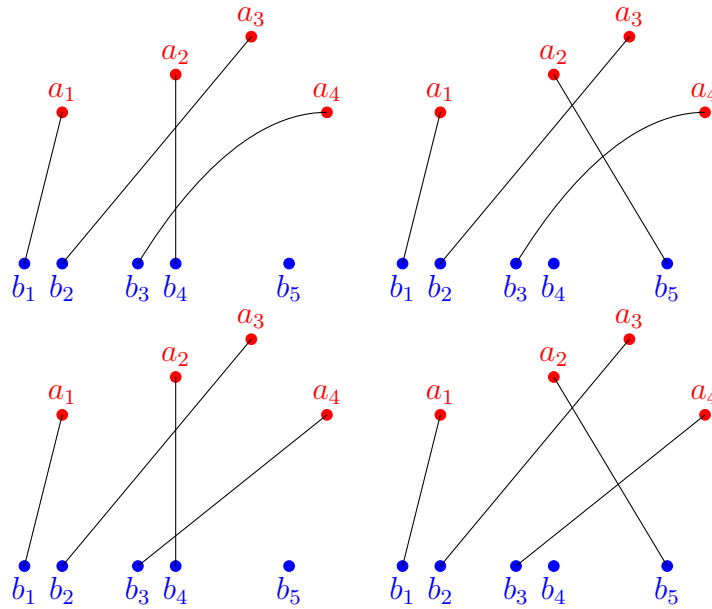


Figura 3.2: Conjuntos independientes comunes a M_1 y M_2 de máxima cardinalidad.

Partimos de un conjunto independiente $Y \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, $Y = \{y_1 = \{a_1, b_1\}\}$.

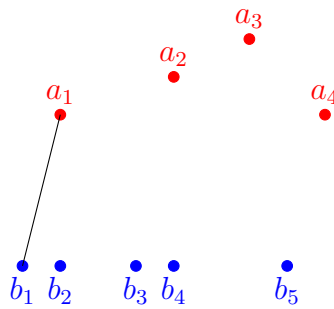


Figura 3.3: Conjunto independiente común Y .

Consideramos los conjuntos $E_1 = \{y \in E \setminus Y \mid Y \cup \{y\} \in \mathcal{F}_1\}$ y $E_2 = \{y \in E \setminus Y \mid Y \cup \{y\} \in \mathcal{F}_2\}$ y el grafo dirigido $H(M_1, M_2, Y)$ definido previamente al algoritmo 2.21, donde el conjunto de vértices es E .

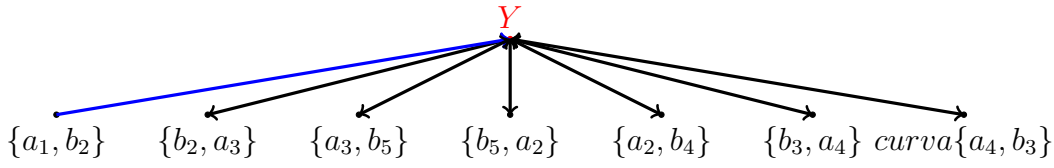


Figura 3.4: Grafo dirigido $H(M_1, M_2, Y)$.

Como $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, existe un camino en $H(M_1, M_2, Y)$ de longitud cero que une el vértice $y_2 = \{b_2, a_3\}$ consigo mismo. Entonces obtenemos $Y' = Y \cup \{y_2\}$ un conjunto independiente común a los dos matroides pero no es de máxima cardinalidad, por lo que repetimos el proceso.

Tomamos $Y = \{y_1, y_2\}$ y construimos de nuevo el grafo dirigido $H(M_1, M_2, Y)$.

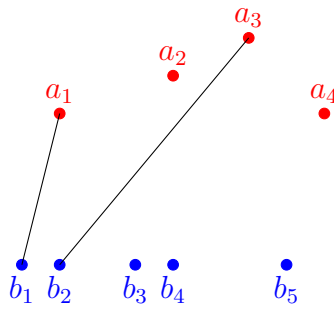


Figura 3.5: Conjunto independiente común Y .

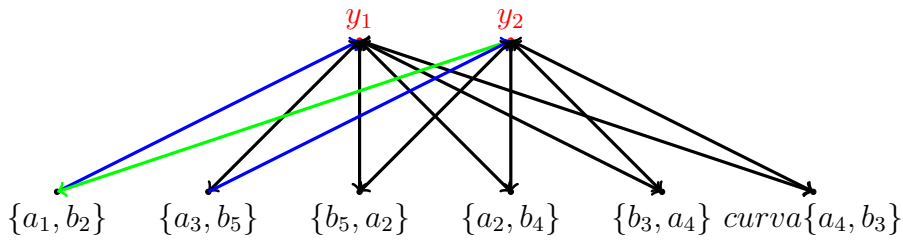
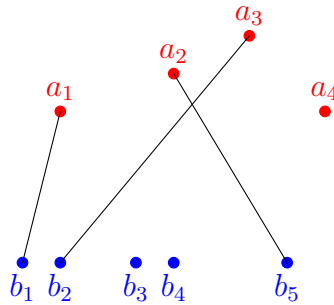
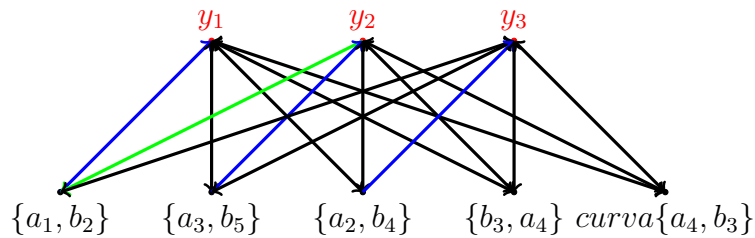
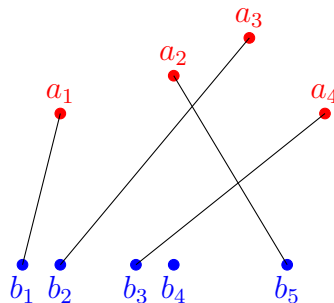


Figura 3.6: Grafo dirigido $H(M_1, M_2, Y)$.

Igual que antes, $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ y existe un camino dirigido en $H(M_1, M_2, Y)$ de longitud cero que conecta el vértice $y_3 = \{b_5, a_2\}$ consigo mismo. Obtenemos $Y' = Y \cup \{y_3\}$ y volvemos a repetir lo mismo con $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Figura 3.7: Conjunto independiente común Y .Figura 3.8: Grafo dirigido $H(M_1, M_2, Y)$.

En este caso, tenemos que existe $y_4 = \{b_3, a_4\} \in E_1 \cap E_2$ y construimos $Y' = Y \cup \{y_4\}$. Volvemos a formar $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ y aplicamos el algoritmo. En este momento, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ porque $E_1 = \emptyset$. Luego no existe un camino dirigido que una un vértice de E_1 y uno de E_2 . Por tanto, Y debería ser un conjunto independiente común a los dos matroides de máxima cardinalidad como habíamos probado en 2.23 y comparando con el estudio que habíamos realizado a mano, comprobamos que efectivamente se trata de un conjunto común independiente de máxima cardinalidad.

Figura 3.9: Conjunto independiente común de máxima cardinalidad Y .

3.2. Arborescencias y ramificaciones

Recordemos que en teoría de grafos, un árbol es un grafo en el que dos vértices cualesquiera están conectados por exactamente un camino, un bosque es una unión disjunta de árboles y un árbol de expansión es un árbol compuesto por todos los vértices y algunas (quizá todas) de las aristas de un grafo conexo, no dirigido.

Sea $D = (V, A)$ un grafo dirigido. Una *ramificación* en D es un conjunto de aristas $A' \subseteq A$ tal que el grado de cada vértice es como máximo uno y las aristas en A' forman un bosque. Tomamos un vértice raíz especial $r \in V$. Una *r-arborescencia* (o simplemente *arborescencia*) es un árbol de expansión (cuando lo vemos como un grafo no dirigido) dirigido lejos de r . Entonces, cada vértice se puede alcanzar desde la raíz r . Como una r-arborescencia no tiene arcos entrando en la raíz, asumimos que D no tiene tampoco tales arcos. También podemos ver una arborescencia como una ramificación en la cual r es el único vértice con grado 0.

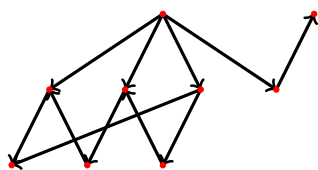


Figura 3.10: un grafo dirigido D

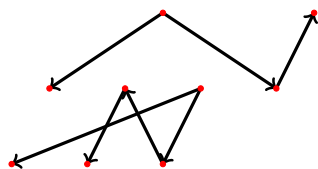


Figura 3.11: una ramificación del grafo D .

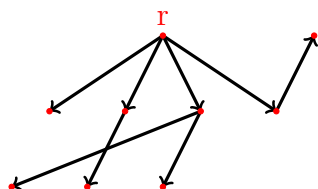


Figura 3.12: una r-arborescencia del grafo D .

Las r -arborescencias se pueden ver como conjuntos independientes simultáneamente en dos matroides. Denotamos por G el grafo no dirigido que se obtiene a partir de D quitando las direcciones de los arcos. Notamos que si tenemos ambos arcos $a_1 = (u, v)$ y $a_2 = (v, u)$ entre u y v en D , entonces obtenemos dos aristas no dirigidas también llamadas a_1 y a_2 entre u y v en G . Definimos $M_1 = (A, \mathcal{F}_1) = M(G)$ el matroide gráfico correspondiente a G , y $M_2 = (A, \mathcal{F}_2)$ el matroide de partición en el cual los conjuntos independientes son aquellos con como mucho un arco entrando en cada vértice $v \neq r$. En otras palabras,

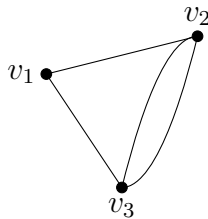
$$\mathcal{F}_2 = \{F : |F \cap \delta^-(v)| \leq 1, \forall v \in V \setminus \{r\}\},$$

donde $\delta^-(v)$ denota el conjunto $\{(u, v) \in A\}$ de arcos entrando en v . Por tanto, cualquier r -arborescencia es independiente en ambos matroides M_1 y M_2 . (En M_1 , los bosques son los conjuntos independientes y una r -arborescencia es un árbol, luego es independiente en M_1 . Por otra parte, como en un árbol dos vértices están conectados por exactamente un camino, también es independiente en M_2).

A la inversa, cualquier conjunto independiente T en ambos M_1 y M_2 y de cardinalidad $|V| - 1$ (de tal manera que es una base en ambos matroides) es una r -arborescencia. De hecho, tal T , siendo un árbol de expansión en G , tiene un único camino entre r y cualquier vértice v ; este camino debe estar dirigido desde la raíz r porque sino tendríamos un arco entrando en r o dos arcos entrando al mismo vértice.

3.3. Orientaciones

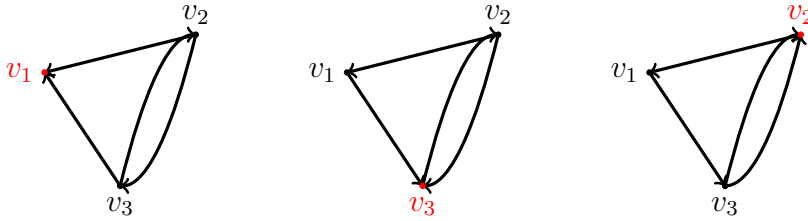
Dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$, consideramos orientaciones de todas sus aristas en arcos dirigidos; es decir, cada arista (no dirigida) $\{u, v\}$ se reemplaza por un arco (u, v) de u a v o por un arco (v, u) de v a u . Nuestro objetivo es, dado $k : V \rightarrow \mathbb{N}$, decidir si existe una orientación de tal manera que, para cada vértice $v \in V$, el grado del vértice v (el número de arcos que entran en v) es como mucho $k(v)$. Claramente, esto no es siempre posible como se aprecia a continuación:



Supongamos que tenemos el grafo que se muestra en la parte superior y una función

$$k : V \rightarrow \mathbb{N}, k(v_1) = 1, k(v_2) = 1, k(v_3) = 1.$$

No podemos dar una orientación de tal manera que para cada vértice, el grado de este sea menor o igual que uno.



Este problema puede resolverse usando intersección de matroides. Para verlo desde este punto de vista, consideramos el grafo dirigido $D = (V, A)$ en el cual cada arista $e = \{u, v\}$ de E se reemplaza por los arcos (u, v) y (v, u) . Con el conjunto de arcos A como conjunto base, definimos dos matroides de partición, M_1 y M_2 . Un conjunto es independiente en M_1 si podemos tomar como mucho uno de los dos arcos $\{(u, v), (v, u)\}$ para cada $(u, v) \in E$, es decir,

$$\mathcal{F}_1 = \{F \subseteq A : |F \cap \{(u, v), (v, u)\}| \leq 1, \forall (u, v) \in E\}.$$

Evidentemente es un matroide de partición porque los subconjuntos

$$\{(u, v), (v, u) : (u, v) \in E\}$$

forman una partición de A . Un conjunto es independiente en M_2 si podemos tomar como mucho $k(v)$ arcos entre $\delta^-(v)$ para todo v :

$$\mathcal{F}_2 = \{F \subseteq A : |F \cap \delta^-(v)| \leq k(v), \forall v \in V\}.$$

Observamos que, de hecho, esto define un matroide transversal dado que los conjuntos $\delta^-(v)$ sobre todos los v , forman una serie de subconjuntos en A .

Por tanto, existe una orientación que satisface las restricciones del grado requeridas si existe un conjunto común independiente a M_1 y M_2 de cardinalidad precisamente $|E|$ (en tal caso, elegimos o (u, v) o (v, u) pero no ambos). Lo probamos brevemente:

Si tenemos un conjunto común independiente a M_1 y M_2 de cardinalidad $|E|$, entonces por una parte cumple las restricciones del grado de cada vértice al ser independiente en M_2 , y por otra, como es independiente en M_1 , de cada arista $\{u, v\}$ de G , solo tenemos un arco $((u, v)$ o $(v, u))$. Si añadimos que este conjunto es de cardinalidad $|E|$, entonces tenemos una orientación válida para el grafo G .

3.4. Coloración de un grafo

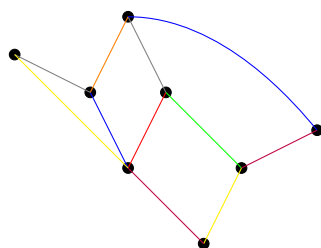
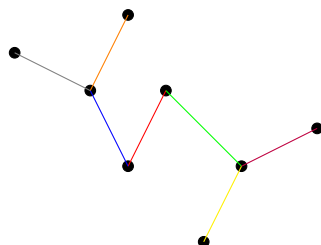
Los grafos coloreados fueron motivados originalmente por la conjetura de los cuatro colores formulada en la década de 1850, estableciendo que cada mapa plano se puede colorear con como mucho cuatro colores de tal manera que las regiones que comparten un borde común no reciben el mismo color. Esta conjetura pasó a ser un teorema en 1977 ya que fue probado por Kenneth Appel y Wolfgang Haken.

Definición 3.3. Una *arista coloración* de un grafo G es una asignación de colores a las aristas de G de tal manera que aristas adyacentes son coloreadas diferentes. Un grafo G es *k-arista coloreable* si existe una l-arista coloración de G para algún $l \leq k$. El mínimo k para el que un grafo G es k-arista coloreable se llama el *índice cromático* o *número cromático de aristas* de G y se denota por $\chi'(G)$.

Suponemos que tenemos un grafo conexo no dirigido $G = (V, E)$ y elegimos una arista coloración para el grafo G .

Esto se representa mediante una partición de E en $E_1 \cup \dots \cup E_k$ donde cada E_i representa un conjunto de aristas del mismo color i . El problema de decidir si este grafo tiene un árbol de expansión en el cual todas las aristas tienen un color diferente, puede ser abordado a través de intersección de matroides. Recordemos que un árbol de expansión es un árbol donde se utilizan todos los vértices del grafo. Este árbol de expansión se llama *árbol de expansión colorido*.

Consideramos los matroides $M_1 = M(G)$ el matroide gráfico del grafo G y $M_2 = (E, \mathcal{F}_2)$ el matroide de partición donde $\mathcal{F}_2 = \{F : |F \cap E_i| \leq 1, \forall i\}$. Los conjuntos independientes de M_2 son todos los subconjuntos de aristas del grafo G donde cada arista es de un solo color. Por otro lado, los conjuntos independientes de M_1 son las aristas que forman bosques en G y más concretamente, las bases de G son los árboles de expansión. Entonces si tenemos una base de M_1 que también sea independiente en M_2 , obtenemos un árbol de expansión colorido. Es decir, con la intersección de estos dos matroides resolvemos el problema de encontrar un árbol de expansión colorido en el grafo G , si existe. Si no existe tal árbol, como resultado de la intersección de los dos matroides, obtendremos un bosque en el que cada arista es de un color.

Figura 3.13: grafo coloreado G .Figura 3.14: árbol de expansión de G .

Para obtener más información de la coloración de un grafo, los libros [13] y [14] profundizan más sobre este aspecto.

3.5. Biconectores más pequeños y bibosques más largos de un grafo

Sea $G = (V, E)$ un grafo y tomamos una partición de V en R y S . Un subconjunto $F \subseteq E$ se llama *biconector* asociado a la partición R-S, si cada componente del grafo (V, F) interseca ambos subconjuntos R y S , en el sentido de que si tomamos el grafo $(V, E \setminus F)$, R y S están desconectados, es decir, no existe ningún camino que una un vértice de R con otro de S . Si F tiene tamaño mínimo, es un biconector más pequeño.

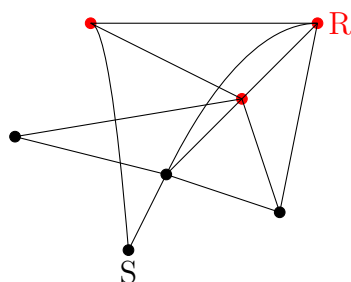


Figura 3.15: Grafo G con partición R y S .

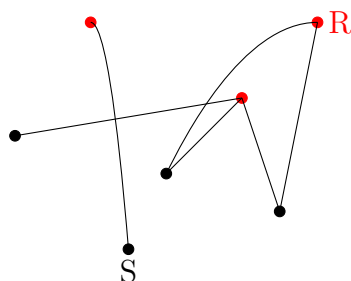


Figura 3.16: Grafo (V, F) donde F es un biconector.

Definición 3.4. Un *conjunto de expansión* en un matroide (E, \mathcal{F}) es un subconjunto de \mathcal{F} que contiene una base.

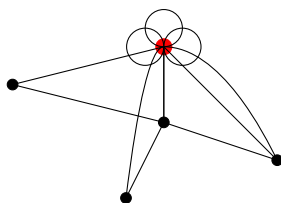
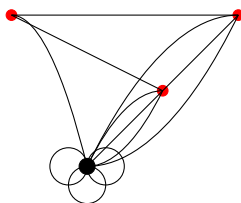
Proposición 3.5. Un *conjunto de expansión* en un matroide gráfico es cualquier subconjunto de aristas que forman un grafo conexo con todos los vértices del grafo inicial.

Demostración. En un matroide gráfico de un grafo G , las bases son las aristas de los árboles de expansión de G , que son grafos conexos ya que dos vértices cualesquiera están conectados por un solo camino. Por otra parte, de todo grafo conexo se puede extraer un árbol de expansión eliminando aristas. Entonces, como un conjunto de expansión es aquel que contiene una base del matroide, en los matroides gráficos los conjuntos de expansión son subconjuntos de aristas que forman un grafo conexo. \square

El problema de encontrar un biconector de menor tamaño, se reduce a encontrar un conjunto de expansión más pequeño común a dos matroides, como sigue a continuación:

Definimos un grafo G_R a partir de G contrayendo el conjunto R en un vértice. Las aristas dentro de R se mantienen como bucles (un bucle es una

arista que conecta un vértice consigo mismo). Definimos un grafo G_S de manera similar para S . Sean M_R y M_S los matroides gráficos de G_R y G_S , respectivamente. Ahora observamos la relación entre biconectores y conjuntos de expansión en M_R y M_S .

Figura 3.17: Grafo G_R .Figura 3.18: Grafo G_S .

Proposición 3.6. *Un conjunto es un biconector asociado a la partición R - S si y solo si es un conjunto de expansión en M_R y M_S .*

Demostración. Empezamos con la implicación \Rightarrow . Consideramos un grafo G y una partición R y S como hemos descrito previamente. Ahora tomamos F un biconector. Consideramos F_R el mismo subconjunto de aristas F pero contrayendo los vértices de R en uno para que F_R sea un subconjunto de aristas del grafo G_R . ¿ (V_R, F_R) forma un grafo conexo?

Si tomamos un vértice de S y el vértice de R , como F era biconector, existe una arista que conecta estos dos vértices. Si tomamos u y v dos vértices de S , sabemos que existían e_1 y e_2 aristas en el grafo G tal que e_1 unía u con un vértice de R y e_2 unía v con otro de R . Como en G_R los vértices de R se contraen en uno, estas dos aristas son adyacentes, por lo que existe un camino que une u y v . Si tomamos dos vértices de R , como en G_R se contraen todos los vértices en uno, siempre existe un camino que une los vértices de R . Luego F es un conjunto de expansión en M_R .

Ahora consideramos de manera similar F_S en el grafo G_S . Razonando de la misma manera que antes, obtenemos que F es un conjunto de expansión en M_S .

Para la otra implicación \Leftarrow , tomamos un conjunto F de expansión en M_R y M_S . F es un subconjunto de \mathcal{F} , luego F no contiene ningún bucle en G_R ni en G_S . Sea $e \in F$ una arista que no une ningún vértice de R con otro de S . Entonces e une dos vértices de R o dos vértices de S . Supongamos que se da lo primero. Esta arista en el grafo G_R se convierte en un bucle, pero eso es absurdo porque F no contiene bucles. Por tanto, cada arista de F une un vértice de R con otro de S , es decir, F es un biconector. \square

Para reducir el problema de encontrar un conjunto de expansión más pequeño común a dos matroides en el conjunto máximo común independiente a dos matroides, utilizamos que el complementario de un conjunto de expansión es un conjunto independiente del matroide dual. (Así habíamos definido los matroides duales, $\mathcal{B}^* = \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$, donde \mathcal{B} es el conjunto de bases del matroide). Entonces, el problema se reduce a encontrar un conjunto máximo independiente común a los dos matroides duales.

Un *bibosque* asociado a la partición R-S es un bosque F tal que cada componente de (V, F) tiene como mucho una arista en $\delta(R)$, denotando $\delta(R)$ el conjunto de aristas que unen vértices de R con otros vértices distintos de los de R . La reducción a una intersección de matroides es similar a como hemos descrito para el caso del biconector. Sean u un vértice en R y v un vértice en S . Definimos el grafo G_u a partir de G como sigue: para cualquier arista e que tiene un punto final en R y el otro en S , cambiamos el punto final en R por u . Definimos el grafo G_v de forma similar con respecto a S y v . Entonces un conjunto común independiente a dos matroides gráficos correspondientes a los grafos G_u y G_v es precisamente un bibosque.

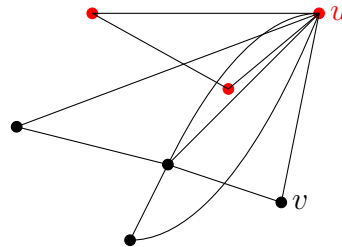


Figura 3.19: Grafo G_u .

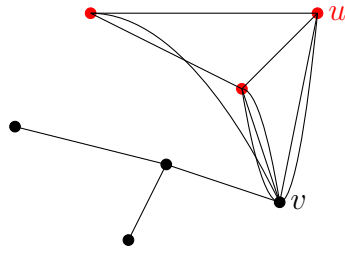


Figura 3.20: Grafo G_v .

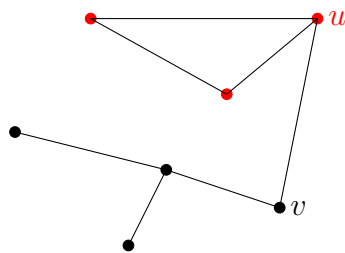


Figura 3.21: Aristas comunes a G_u y a G_v .

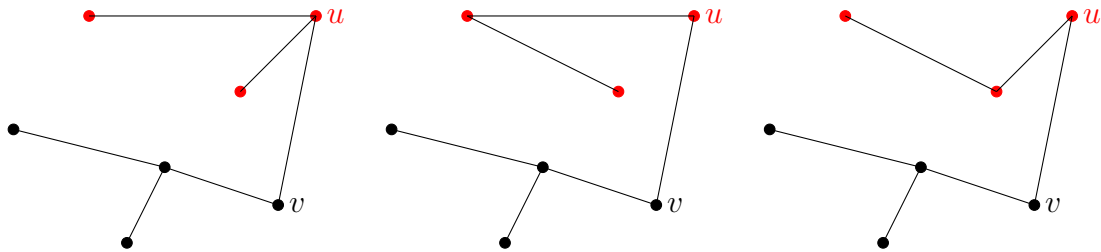


Figura 3.22: Bibosques del grafo G que son conjuntos independientes comunes a G_u y G_v .

En todas estas aplicaciones, tratamos de encontrar un conjunto independiente común a dos matroides, luego podemos resolver estos problemas dado que tenemos varios algoritmos que se centran en encontrar precisamente estos conjuntos, como vimos en el apartado 2.

Capítulo 4

Intersección de tres o más matroides

Con todo el estudio que hemos realizado anteriormente, podemos afirmar que se puede encontrar un conjunto máximo independiente de manera fácil en los matroides, a través del algoritmo voraz, y para la intersección de dos matroides no se puede resolver tan fácilmente pero tenemos algoritmos polinomiales que también son eficaces. En cambio, para la intersección de tres o más matroides, no existe un algoritmo polinomial general.

Sin embargo, para algunas intersecciones de tres o más matroides puede existir un algoritmo polinomial. Por ejemplo, podemos intersecar una de las intersecciones de dos matroides que hemos estudiado previamente con otro matroide de una manera trivial, como con el matroide de todos los subconjuntos. Otra forma sería intersecar con un matroide uniforme de conjuntos de tamaño $\leq k$, que es un problema igual de fácil de resolver (simplemente habría que tomar los conjuntos independientes que son comunes a dos matroides, y después elegir todos aquellos que tengan un tamaño menor o igual que k , lo cual se realiza todo en un tiempo polinomial).

Antes de continuar, debemos introducir el concepto de problemas NP-completos. En primer lugar, NP es el acrónimo de *nondeterministic polynomial time*, es decir, *tiempo polinomial no determinista*. La clase NP es el conjunto de problemas que pueden ser resueltos en tiempo polinómico por una máquina de Turing no determinista.

Definición 4.1. Un problema de decisión C es NP-completo si:

1. C está contenido en la clase NP, y
2. todo problema de NP se puede reducir a C en tiempo polinomial.

Como consecuencia, si tuviéramos un algoritmo para C que lo resuelve en un tiempo polinomial, se tendría una solución para todos los problemas de NP en tiempo polinomial.

El siguiente resultado se encuentran en varios libros y apuntes, entre ellos [2] y [11].

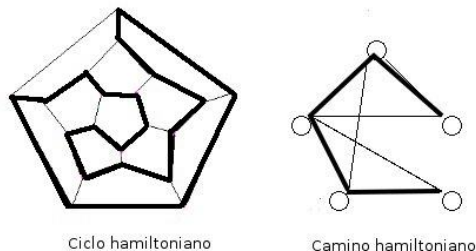
Teorema 4.2. *La intersección de k matroides es un problema NP-completo para $k \geq 3$.*

Demostración. Es suficiente con probar el teorema para $k = 3$ dado que la prueba se puede extender a valores más grandes de k usando varias copias del mismo matroide. Para ello, veremos que el problema del vendedor ambulante (Traveling Salesman Problem), el cual es bastante conocido por ser uno de los principales ejemplos de problema NP-completo, se puede ver como una intersección de tres matroides.

Para empezar, dado un grafo $G = (V, E)$, un *ciclo de Hamilton* en G es un ciclo C donde se recorren todos los vértices del grafo una vez. El *problema del vendedor ambulante* (TSP) consiste en dado un grafo $G = (V, E)$ y una función de longitud $l : E \rightarrow \mathbb{R}$, el objetivo es encontrar un ciclo de Hamilton C de mínima longitud.

Tenemos también la versión dirigida. Dado un grafo $D = (V, A)$, un *ciclo de Hamilton dirigido*, o simplemente *ciclo de Hamilton*, en D es un ciclo dirigido C donde se recorren todos los vértices del grafo una vez. El *problema asimétrico del vendedor ambulante* (TSP o ATSP) consiste en que dado un grafo dirigido $D = (V, A)$ y una función de longitud $l : A \rightarrow \mathbb{R}$, el objetivo es encontrar un ciclo de Hamilton de mínima longitud.

En vez de considerar un ciclo de Hamilton, tomamos un *camino Hamiltoniano dirigido* que se define como, dado un grafo dirigido $D = (V, A)$ y $u, t \in V$, un camino desde u a t que pasa por cada vértice una vez. De esta manera, el problema asimétrico del vendedor ambulante se reduce a encontrar un camino Hamiltoniano entre u y t .



Ahora consideramos los siguientes matroides:

1. $M_1 = (E, \mathcal{F}_1)$ es el matroide gráfico del grafo D sin direcciones, es decir, E es el mismo conjunto de aristas que A pero ignorando las direcciones.
2. $M_2 = (A, \mathcal{F}_2)$, donde

$$\mathcal{F}_2 = \{X \in E \mid \forall v \in V \setminus \{u\}, |X \cap \delta^-(v)| \leq 1 \text{ y } |X \cap \delta^-(u)| = 0\}$$

con $\delta^-(v)$ la función que denota las aristas que entran en el vértice v . M_2 es un matroide de partición debido a que divide A en los subconjuntos de aristas que entran en cada vértice de D . Los conjuntos independientes son precisamente aquellos subconjuntos de aristas que entran como mucho una vez en cada vértice de D , excepto u , en el que no entran nunca.

3. $M_3 = (A, \mathcal{F}_3)$, donde

$$\mathcal{F}_3 = \{Y \in E \mid \forall v \in V \setminus \{t\}, |Y \cap \delta^+(v)| \leq 1 \text{ y } |Y \cap \delta^+(t)| = 0\}$$

con $\delta^+(v)$ la función que denota las aristas que salen del vértice v . M_3 también es un matroide de partición porque divide A en los subconjuntos de aristas que salen de cada vértice de D . Los conjuntos independientes de M_3 son los subconjuntos de aristas que salen como mucho una vez de cada vértice de D , excepto t , del que no salen nunca.

Entonces, si tomamos un conjunto independiente de M_1 , M_2 y M_3 , se trata de un bosque donde cada arista entra y sale de cada vértice como mucho una vez, excepto u y t , para los cuales ninguna arista entra nunca en u y ninguna arista sale nunca de t . Si lo tomamos de máxima cardinalidad, obtenemos un árbol de expansión de tamaño $|V| - 1$ donde u sería la raíz, t sería un vértice final y para el resto de vértices, tenemos una arista que entra en el vértice y otra que sale. Esto implica que t es el único vértice final, por lo que tenemos un camino que empieza en u y termina en v que pasa una vez por cada vértice de D , es decir, un camino Hamiltoniano.

Si lo queremos ver como un ciclo, podemos considerar primero un grafo D' que tenga un vértice más, v' , que el grafo D . De esta manera, buscamos un camino Hamiltoniano que una un vértice u de D con v' en el grafo D' , de la misma forma que antes cambiando D por D' . Una vez que encontremos el camino, llamamos $v' = u$ y obtenemos un ciclo Hamiltoniano de D .

Acabamos de demostrar que el problema del vendedor ambulante se puede ver como intersección de los matroides M_1 , M_2 y M_3 y por tanto, la intersección de tres matroides es un problema NP-completo. \square

Como ya hemos mencionado, el problema del vendedor ambulante es NP-completo y no se conoce un algoritmo que lo pueda resolver en tiempo polinomial. Una posibilidad es estudiar todos los posibles caminos y escoger el que tenga menor longitud pero el tiempo computacional es del orden de $n!$, siendo n el número de vértices, por lo que para un número ligeramente alto de vértices es inviable. De todas formas, existen otras técnicas que dan soluciones cercanas a la óptima, como por ejemplo la técnica de *Ramificación y poda* (*Branch and Bound*). Esta técnica aparece en el libro [13] en el capítulo 58 y se estudia con más detenimiento en los libros [5] y [9].

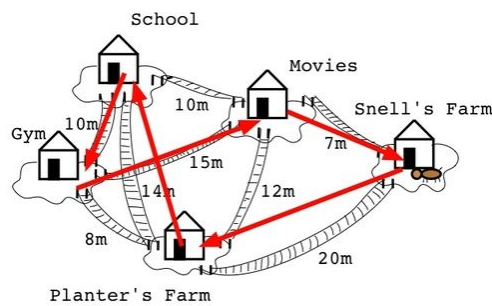


Figura 4.1: Ejemplo del problema del vendedor ambulante.

Bibliografía

- [1] F. Ardila, The Geometry of Matroids, *Notices of the AMS* **65** (2018), 902–908.
- [2] J. Bang-Jensen, G. Z. Gutin, *Digraphs, Theory, Algorithms and Applications* **2**, Springer, 2007.
- [3] C. Chekuri, *Introduction to Matroids*, Topics in Combinatorial Optimization, Lecture 14, The University of Illinois, (2010). Available at: <https://courses.engr.illinois.edu/cs598csc/sp2010/Lectures/Lecture14.pdf>
- [4] C. Chekuri, *Matroid Intersection*, Topics in Combinatorial Optimization, Lecture 17, The University of Illinois, (2010). Available at: <https://courses.engr.illinois.edu/cs598csc/sp2010/Lectures/Lecture17.pdf>
- [5] M. Jünger, G. Reinelt, G. Rinaldi, *Combinatorial Optimization - Eureka, You Shrink!*, Lecture Notes in Computer Science **2570**, Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [6] E. Gioan, J. Ramirez Alfonsin, *Eléments de théorie des matroïdes et matroïdes orienté*, Informatique Mathématique - Une Photographie en 2013, Presses Universitaires de Perpignan, **I-2** (2013), 47-95. Available at: <https://hal-lirmm.ccsd.cnrs.fr/lirmm-01398338/document>
- [7] M. X. Goemans, *Lecture Notes on Matroid Intersection*, Combinatorial Optimization, The Massachusetts Institute of Technology, (2011). Available at: <http://math.mit.edu/~goemans/18433S11/matroid-intersect-notes.pdf>
- [8] M. Grötschel, L. Lovasz, A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Algorithms and Combinatorics **2**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.

- [9] B. Korte, J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, Algorithms and Combinatorics **21**, Springer, 2012.
- [10] E. L. Lawler, *Combinatorial Optimization, Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [11] S. Saurabh, *Representability of Matroids, Reduction of graph problems to Matroid Intersection and Matroid Parity*, Advanced Graph Algorithms, Lecture **14**, The Institute of Mathematical Sciences, Chennai (2014). Available at: <https://kam.mff.cuni.cz/ashutosh/lectures/lec14.pdf>.
- [12] A. Schrijver, *A Course in Combinatorial Optimization*, The University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands, (2010). Available at: <https://homepages.cwi.nl/~lex/files/dict.pdf>.
- [13] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization- Polyhedra and Efficiency*, Vol. B, Algorithms and Combinatorics **24**, Springer, 2003.
- [14] K. Thulasiraman, S. Arumugam, A. Brandstädt, T. Nishizeki, *Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms*, Chapman & Hall/CRC Computer and Information Science Series **34**, Chapman and Hall/CRC, 2015.
- [15] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **152**, Springer, 1995.