



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

**Propuesta didáctica para la enseñanza en
bachillerato de la noción de matriz como
transformación geométrica a través de
herramientas tecnológicas visuales**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación
Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y
Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

Alumno: Álvaro Vielba Iglesias

Tutor: José Cano Torres

Valladolid, Junio de 2020

Resumen

En el currículo de Bachillerato se encuentra el tema de matrices. Usualmente la noción de matriz se trata de forma puramente algebraica y se incide poco en su aspecto como representación de una transformación geométrica del plano. En este trabajo se desarrollará una propuesta didáctica en la que mediante las tecnologías cercanas al alumno, como pueden ser las aplicaciones de filtros de fotografía, se motive a éste tanto en las transformaciones geométricas del plano como en su representación en forma de matriz.

Palabras clave: Bachillerato, matriz, transformación geométrica, unidad didáctica, filtros de fotografía.

Abstract

Matrices appear in the curriculum of grade 12th. The concept of matrix is usually treated in a purely algebraic manner while its representation of a geometric transformation is hardly even considered. This dissertation will develop a didactic proposal which aims to motivate the learner to study the geometric transformations and its matricial representation by using known technology, such as for instance, photography filters.

Keywords: Grade 12th, matrix, geometric transformation, didactic unit, photography filters.

Índice de contenidos

Introducción	4
1 Análisis normativo y documental	5
1.1 La LOE y la LOMCE respecto a las matrices y las transformaciones geométricas	5
1.2 Libros de texto	8
1.3 Experiencia como docente en prácticas	14
1.4 Conclusión del análisis normativo y documental	15
2 Marco conceptual	15
2.1 Marco didáctico	15
2.2 Marco teórico-matemático	20
2.2.1 El grupo de las transformaciones	21
2.2.2 Las transformaciones afines	21
2.2.3 Las transformaciones euclídeas	26
2.2.4 Los grupos ornamentales	38
2.3 Marco tecnológico	52
2.3.1 Imágenes digitales	52
2.3.2 Filtros de fotografía	53
2.3.3 Procesamiento de imágenes en Python	53
2.3.4 Creación del filtro de mosaico	57
3 Análisis didáctico	60
3.1 Organización del contenido	60
3.2 Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluable	72
3.3 Selección de actividades	73
3.4 Contribución a las competencias clave	85
3.5 Evaluación del aprendizaje	86
3.6 Otros elementos del diseño curricular	88
4 Conclusiones finales	89

Índice de figuras

1	Competencia matemática en PISA[20]	16
2	Taxonomía revisada de Bloom. Habilidades cognitivas[3]	20
3	Una transformación afín conserva proporciones de longitudes: $AB/CD = A'B'/C'D'$. <i>Elaboración propia</i>	24
4	Transformación afín entre dos triángulos. <i>Elaboración propia</i>	24
5	Cuadriláteros afines. <i>Elaboración propia</i>	26
6	Transformación euclídea entre triángulos de igual forma y tamaño. <i>Elaboración propia</i>	29
7	Traslación de P a Q. <i>Elaboración propia</i>	30
8	Giro de ángulo 45° . <i>Elaboración propia</i>	31
9	Simetría axial. <i>Elaboración propia</i>	33
10	Simetría con deslizamiento. <i>Elaboración propia</i>	34
11	Simetría con deslizamiento como producto de simetrías. <i>Elaboración propia</i>	35
12	Bolas de piedra talladas - Escocia 2500 a.C [8]	39
13	Grupos ornamentales	39
14	Grupo dihedral \mathcal{D}_5 . <i>Elaboración propia</i>	40
15	Grupo cíclico \mathcal{C}_6 . <i>Elaboración propia</i>	41
16	Grupo de friso \mathcal{F}_1 . <i>Elaboración propia</i>	43
17	Grupo de friso \mathcal{F}_2 . <i>Elaboración propia</i>	44
18	Grupo de friso \mathcal{F}_1^1 . <i>Elaboración propia</i>	44
19	Grupo de friso \mathcal{F}_2^1 . <i>Elaboración propia</i>	44
20	Grupo de friso \mathcal{F}_1^2 . <i>Elaboración propia</i>	45
21	Grupo de friso \mathcal{F}_2^2 . <i>Elaboración propia</i>	45
22	Grupo de friso \mathcal{F}_1^3 . <i>Elaboración propia</i>	45
23	Esquema de clasificación de los grupos de friso. <i>Elaboración propia</i>	46
24	Grupos cristalógraficos (1). <i>Elaboración propia</i>	50
25	Grupos cristalógraficos (2). <i>Elaboración propia</i>	51
26	Clasificación de los grupos cristalógraficos [29]	52
27	Colores RGB. <i>Elaboración propia</i>	54
28	Sistema de referencia en imágenes de OpenCV-Python. <i>Elaboración propia</i>	55
29	Transformación afín sobre una imagen. <i>Elaboración propia</i>	56
30	Traslación y rotación de imágenes. <i>Elaboración propia</i>	57
31	Celda primitiva grupo cristalográfico $p4$ [18].	58
32	Imágenes resultantes. <i>Elaboración propia</i>	59
33	Representación de una función como relación entre conjuntos	60
34	Homotecia de centro C y razón k .	64
35	simetría respecto a $y = x$. <i>Elaboración propia</i>	64
36	Giro de centro O y ángulo α . <i>Elaboración propia</i>	65
37	Representación matricial de las transformaciones. SM (Ed. previa. ISBN: 978-84-675-3472-6).	66
38	Resultados de transformaciones sobre la referencia usual. <i>Elaboración propia</i>	67
39	Efecto de las transformaciones sobre la forma y tamaño de las figuras. <i>Elaboración propia</i>	68
40	Concepto de grupo de simetría. <i>Elaboración propia</i>	69
41		70
42	Motivo y celda primitiva del grupo $p6m$. <i>Elaboración propia</i>	71
43	Grupo cristalográfico $p6m$ obtenido con Geogebra. <i>Elaboración propia</i>	71
44	Experiencias con papel I[18]	78
45	Experiencias con papel II. <i>Elaboración propia</i>	79

Introducción

En el curso de segundo de bachillerato se introduce por primera vez en el currículo el concepto de matriz en la asignatura de matemáticas. Su estudio se centra generalmente en la estructura subyacente bajo este nuevo objeto. Se definen la suma de matrices, el producto (cuando es posible), el rango, la inversa de una matriz y el determinante; se dan una serie de propiedades y resultados sobre estas definiciones; y finalmente se enlaza con la representación matricial de sistemas de ecuaciones. Esta limitación del currículo al álgebra de matrices provoca que algunos estudiantes conciban la idea de matriz como un invento artificioso y carente de una justificación clara. Si bien es cierto que históricamente las matrices, y primero que ellas los determinantes, nacen del afán de simplificar la notación de los sistemas de ecuaciones lineales, las aplicaciones que surgen a posteriori superan las barreras del álgebra y sirven de utilidad en muchos campos de las matemáticas. Se usan matrices en tablas de datos, teoría de grafos, cadenas de Markov, variables aleatorias multivariadas, gradientes n -dimensionales, wronskianos... y sin ir tan lejos las matrices tienen una interpretación geométrica que enlaza con un contenido curricular previo (de 3º de ESO) como es el de transformaciones geométricas en el plano. Por un lado, como ocurre con otras nociones matemáticas en las que intervienen las matrices, aunque las transformaciones geométricas se pueden estudiar sin recurrir a ellas, las matrices facilitan enormemente la descripción de las ecuaciones de las transformaciones geométricas, el resultado de las composiciones de las mismas y su clasificación, entre otras cuestiones. Por otro lado, las transformaciones geométricas dan un sentido, y sobre todo, una motivación a los estudiantes de 2º de bachillerato al hecho de dedicar una parte importante del curso a analizar las matrices como un objeto matemático propio.

Además, en el mundo tecnológico actual, las aportaciones de las matrices son innumerables y decisivas en algunos campos. Esta conexión de las matemáticas con la realidad por la que tanto se aboga últimamente en las aulas tampoco es habitualmente plasmada en la enseñanza de las matrices en bachillerato. Una aportación de las matrices especialmente cercana a los alumnos de estas edades proviene de las imágenes digitales y los filtros de fotografía, presentes en las redes sociales, en el cine y en los videojuegos, por ejemplo. La representación de las imágenes es una gran matriz de píxeles, uno o varios números que determinan el color de una dimuta porción de la imagen, y los filtros consisten en cambios en esta matriz para provocar los efectos deseados en la imagen que se visualiza.

Teniendo en cuenta estas consideraciones en este trabajo se busca llegar a una propuesta didáctica que complemente el contenido habitual del tema de matrices en segundo de bachillerato. La propuesta pretende alcanzar una serie de objetivos generales sobre la asignatura de matemáticas y específicos sobre el contenido en cuestión.

Objetivos generales

- OG1: Evitar una matemática procedimental, consistente en la mera aplicación rutinaria de resultados y algoritmos, y dar mayor importancia a los procesos de razonamiento y de modelización de la realidad.
- OG2: Relacionar diferentes ramas de las matemáticas para llegar a un aprendizaje más profundo y versátil.
- OG3: Potenciar la visualización a través de la geometría y otras representaciones de los objetos matemáticos.
- OG4: Conectar las matemáticas académicas con la realidad, especialmente con la tecnología, donde tienen innumerables aplicaciones.
- OG5: Introducir en la medida de lo posible entornos de programación, indispensables para las ciencias y en particular para las matemáticas hoy en día.
- OG6: Favorecer el aprendizaje basado en competencias alejando la concepción de las matemáticas como una labor individual y buscando relacionar las matemáticas con otras ciencias así como con la historia y la cultura.

Objetivos específicos

- OE1: Justificar la necesidad del uso de las matrices como objeto matemático más allá de la representación de sistemas de ecuaciones.

- OE2: Soslayar la interdependencia del álgebra y la geometría recuperando las transformaciones geométricas en el plano para el estudio de matrices.
- OE3: Aportar a los estudiantes una motivación y una comprensión profunda de las transformaciones geométricas en el plano a partir de los grupos ornamentales (rosetones, frisos y mosaicos).
- OE4: Aplicar las matemáticas a temas de interés y actualidad mediante los filtros de fotografía.

Así, el trabajo se estructura en cuatro secciones sin contar la introducción. En la primera, *análisis normativo y de contenido*, en base a los currículos de las dos últimas leyes de educación, los libros de texto de las editoriales SM y Vicens Vives para Matemáticas II de 2º de bachillerato y la experiencia durante las Prácticas externas del presente Máster, se trata de dar una idea de cuáles son los contenidos marcados en la actual legislatura y cómo los enfocan generalmente las editoriales y profesores sobre los que se ha podido realizar una observación. La segunda sección corresponde al *marco conceptual* en el que se apoyará la propuesta. Esta subdividido en tres partes: un marco teórico-matemático en el que se desarrollan las ideas matemáticas de las que se extraen los contenidos; un marco tecnológico, que sienta las bases de las herramientas tecnológicas que se utilizan para la creación de filtros de imagen; y un marco didáctico en el que se recogen las teorías de aprendizaje que ayudan a entender la manera en que se abordan los contenidos matemáticos de la propuesta. Estos, así como los tipos de tareas, la evaluación y otros elementos del diseño curricular para la propuesta se establecen en la tercera sección, *análisis didáctico*. En la cuarta sección se extraen unas *conclusiones finales* sobre el trabajo.

1 Análisis normativo y documental

Dado que lo que se pretende es proponer una variación o una ampliación de un contenido ya establecido es conveniente tener presente cómo se viene abordando el mismo hasta el momento. Para ello se analiza en primer lugar el contenido mínimo que establecen las dos últimas leyes de educación, LOE y LOMCE, respecto al tema de matrices de la asignatura Matemáticas II de 2º de bachillerato y respecto a las transformaciones en el plano de 3º de ESO. En segundo lugar se lleva a cabo una pequeña investigación documental basada en los libros de texto de las editoriales SM y Vicens Vives de 2º de bachillerato. Se complementa esto último con la propia experiencia del docente en prácticas a través de la observación de la puesta en práctica de la unidad didáctica de matrices en un curso de 2º de bachillerato. La razón de esta sección es la de hacerse una idea de cómo está enfocada la enseñanza de matrices en base a las pautas de los dos últimos currículos (muy similares en la LOE y en la LOMCE). Está claro que las conclusiones que se obtengan de este proceso sirven como mera referencia para la propuesta didáctica. No se pretende hacer un estudio concienzudo y de resultados extrapolables pues para ello sería necesario realizar una investigación documental más extensa y llevar a cabo una labor de observación metódica en una muestra suficientemente amplia.

1.1 La LOE y la LOMCE respecto a las matrices y las transformaciones geométricas

Tanto en la LOE como en la LOMCE el contenido de matrices y determinantes se ubica en el bloque II de *Números y álgebra* y junto a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales abarca el bloque al completo. El Real decreto 1467/2007, de 2 de noviembre[26], y el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre[27], por los que se establece el currículo básico del Bachillerato de la LOE y de la LOMCE respectivamente, contemplan los contenidos y criterios de evaluación para el bloque mencionado que se observan en la tabla 1.

Aunque hay ligeras variaciones entre la LOE y la LOMCE respecto al bloque de álgebra de Matemáticas II de 2º de bachillerato el guión es común en ambas: explicar las matrices como un objeto matemático propio con unas operaciones y propiedades que lo caracterizan y aplicarlo a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. No obstante en ambas se incluye en los contenidos una aplicación a la *resolución de*

LOE. RD 1467/2007	
Contenido	Criterios de evaluación
<p>Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Operaciones con matrices. Aplicación de las operaciones y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales. - Determinantes. Propiedades elementales de los determinantes. Rango de una matriz. - Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones y, en general, para resolver situaciones diversas. [...] 2. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en tres dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones. [...] 3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas específicas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. [...]
LOMCE. RD 1105/2014	
Contenido	Criterios de evaluación
<p>Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Clasificación de matrices. Operaciones.</p> <p>Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.</p> <p>Determinantes. Propiedades elementales. Rango de una matriz. Matriz inversa. Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.

Tabla 1: 2ºBachillerato. Bloque II. Álgebra lineal

problemas en contextos reales que es particularmente interesante para los propósitos de esta propuesta.

En los contenidos las diferencias son dos pequeñas aportaciones que añade la LOMCE. La primera es la clasificación de matrices. Los diferentes tipos de matrices (diagonales, triangulares superiores, triangulares inferiores, cuadradas, por bloques, ortogonales, etc) adquieren importancia cuando se relacionan con otros conceptos matemáticos. En este caso están asociados al cálculo del rango y la discusión de un sistema de ecuaciones lineales, para la cual es preciso hablar de matrices cuadradas en vistas a realizar el cálculo del determinante e incluso de matrices triangulares si se calcula el rango por el método de Gauss-Jordan, y a la resolución de estos sistemas tanto por la regla de Cramer (vuelven a ser precisos los determinantes) como por el método de Gauss (se habla de matrices triangulares y diagonales). Por supuesto, la utilidad de estos primeros tipos de matrices no se limita a los sistemas de ecuaciones lineales (por ejemplo, aparecen en la diagonalización de matrices). Aunque esta clasificación no se menciona en la LOE se entiende que también es necesaria, pues como se acaba de explicar, va a ser preciso hablar de tipos de matrices específicos para el cálculo del rango, la discusión de un sistema de ecuaciones lineales y su resolución. La otra añadidura de la LOMCE es que el método de Cramer y el de Gauss para la resolución de sistemas se consideran como contenidos exigidos.

En cuanto a los criterios de evaluación se observa que la LOMCE mantiene dos de los criterios de evaluación (el primero y el tercero) de los establecidos por la LOE y suprime el segundo. Precisamente este segundo habla de una interpretación geométrica en tres dimensiones y de la relación entre matrices y vectores para resolver problemas de tipo geométrico. Uno de los objetivos de la propuesta didáctica de este trabajo es precisamente recuperar esta conexión algebraico-geométrica, aunque considerando el plano de dos dimensiones, pues el objetivo es que la visualización sea más sencilla. Además, en la LOE se detallan cada uno de los tres criterios con unas aclaraciones para cada uno de los mismos que no se han incluido en la tabla. En el caso del segundo criterio se añade lo siguiente:

La finalidad de este criterio es evaluar la capacidad para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos. Se pretende valorar especialmente la capacidad para realizar transformaciones sucesivas con objetos geométricos en el espacio de tres dimensiones.

Es decir, que se insiste en la idea de visualizar geoméricamente las matrices. La última frase es especialmente visible a través de las transformaciones geométricas aplicadas sobre objetos geométricos, como se verá en el marco teórico.

Será también útil echar un vistazo al apartado de transformaciones geométricas en el plano del currículo de matemáticas de 3º de ESO. Tanto en la LOE como en la LOMCE el contenido de transformaciones geométricas en el plano se ubica en el bloque III de *Geometría*, tras los lugares geométricos en el plano y el teorema de Tales. El Real decreto 1631/2006, de 29 de diciembre[25], y el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre[27], por los que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria de la LOE y de la LOMCE respectivamente, contemplan los contenidos y criterios de evaluación para el tema mencionado que se observan en la tabla 2.

Respecto al criterio de evaluación que aparece en la LOE se realiza la siguiente aclaración:

Con este criterio se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, para que puedan ser utilizados como un recurso más de análisis en una formación natural o en una creación artística. El reconocimiento de los movimientos lleva consigo la identificación de sus elementos característicos: ejes de simetría, centro y amplitud de giro, etc. Igualmente los lugares geométricos se reconocerán por sus propiedades, no por su expresión algebraica. Se trata de evaluar, además, la creatividad y capacidad para manipular objetos y componer movimientos para generar creaciones propias.

Esta viene a decir que no se pretende abordar en 3º de ESO el contenido de transformaciones geométricas en el plano de forma algebraica, es decir, no se va a pedir al alumno que sea capaz de dar las ecuaciones de un movimiento ni de la composición de movimientos. Lo que se exige en este curso es la comprensión geométrica de este concepto y el reconocimiento del mismo en figuras y especialmente en la naturaleza y el arte. Aunque está aclaración no se incluye de forma explícita en la LOMCE se puede interpretar de esta misma forma dado que un tratamiento analítico de este tema sería aún complejo y ocultaría el sentido

LOE. RD 1631/2006	
Contenido	Criterios de evaluación
Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento. Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas. Planos de simetría en los poliedros. Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.	4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. [...]
LOMCE. RD 1105/2014	
Contenido	Criterios de evaluación
Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros.	4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza. 5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.

Tabla 2: 3º ESO. Bloque III. Geometría-Transformaciones geométricas.

visual tan intuitivo de los movimientos en el plano.

Por otra parte, se observa en la tabla 2 que en la LOE se habla también del reconocimiento de las traslaciones, giros y simetrías en la naturaleza, el arte y otras construcciones humanas, lo cual da pie a introducir los grupos ornamentales.

Una sucinta conclusión que se puede sacar de esta mirada a las dos últimas legislaciones educativas es la posibilidad y la idoneidad de conectar en el curso de 2º de bachillerato el contenido algebraico de matrices con el contenido de transformaciones geométricas, aislado en el curso de 3º de ESO, con el fin principal de que estas últimas sirvan de estímulo y de justificación al estudio de las matrices como un objeto matemático propio.

1.2 Libros de texto

Aunque los libros de texto siguen las pautas que marca la ley son publicaciones especializadas con identidad propia [12] y, por lo tanto, su interpretación de la misma puede ofrecer distintas variaciones en el contenido, en su organización o en las actividades. Con este pretexto se realiza un análisis documental que se va a limitar al tema de matrices de la última edición de los libros de SM y Vicens Vives de Matemáticas II. Se considerarán también los temas de determinantes y de sistemas de ecuaciones lineales, que completan el bloque de álgebra de 2º de bachillerato, pero sobre ellos no se entrará en detalle. Los ítems en los que se centra este pequeño estudio son los contenidos que aparecen, cómo se organizan y qué tipo de tareas se incluyen a lo largo del tema. Respecto a este último se distinguirán cuatro tipos de tareas en función de los cuatro niveles de demanda cognitiva que se plantean en [22]. Estos se subdividen en dos: baja demanda cognitiva, al que pertenecen el nivel I (*memorización*) y el nivel II (*procedimiento sin conexión*) y alta demanda cognitiva, al que pertenecen el nivel III (*procedimiento con conexión*) y el nivel IV (*hacer matemáticas*). Sobre la clasificación de Smith y Stein (tabla 3) se hablará con más detalle en el marco didáctico. Se adelantan aquí los cuatro niveles de la misma para facilitar la lectura de los presentes párrafos. No se trata de un análisis documental exhaustivo pero será suficiente para los objetivos que se plantea este trabajo. La elección de precisamente estos dos libros y no otros para la realización del análisis

deriva, primero, de que el libro de SM es el utilizado en el grupo de 2º de bachillerato en el que se ha participado como observador durante la asignatura de Prácticas Externas y, por lo tanto, permite enlazar con el apartado 1.3 en el que se explica cómo se ha tratado el tema de matrices en este grupo; y, segundo, de que lamentablemente no se ha tenido acceso a otros libros de texto que de alguna manera pudieran ser más representativos de cara a analizar algún aspecto de interés para la propuesta didáctica.

1. Matemáticas II. 2º de bachillerato. Editorial SM. Autores: Fernando Alcaide Guindo, Joaquín Hernández Gómez, María Moreno Warleta, Esteban Serrano Marugán, Vicente Rivière, Luis Sanz, Jesús Fernando Barbero González, Manuel de León, Antonio Pérez, José Luis Pérez Álvarez, José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada. ISBN: 9788467587135.

Ubicación de la unidad de matrices

Tema 7. Tras los 6 temas del bloque de análisis.

Contenido y organización

El contenido del tema se divide en seis secciones que abarcan dos páginas cada una: *Matrices; El espacio vectorial de las matrices; Producto de matrices; Rango de una matriz. Cálculo por el método de Gauss-Jordan; Matriz inversa. Cálculo por el método de Gauss-Jordan; y Aplicaciones de las matrices.*

En la **sección 1** se definen, en primer lugar, matriz, elemento de una matriz y dimensión de una matriz; se introduce la notación matricial; y se define matriz nula. La definición de matriz es la siguiente:

Una matriz es un conjunto de elementos organizados por filas y por columnas.

En segundo lugar se explica cuándo dos matrices son iguales y qué es la matriz traspuesta. Por último, se establece una clasificación de algunos tipos de matrices en rectangulares o cuadradas, matrices fila y matrices columna. Dentro de las matrices cuadradas se definen orden, diagonal principal y diagonal secundaria y se da una nueva clasificación en matriz triangular superior, matriz triangular inferior, matriz diagonal, matriz escalar, matriz identidad, matriz simétrica y matriz antisimétrica.

En la **sección 2** se introducen las dos operaciones que dan a las matrices su estructura de espacio vectorial. Primero, la suma junto con sus propiedades (conmutativa; asociativa; elemento neutro; matriz opuesta, es decir, elemento opuesto; y traspuesta de la suma) y luego, el producto por un número real junto con sus propiedades (distributiva respecto a la suma de matrices; distributiva respecto a la suma de reales; asociativa; y producto por la unidad, es decir, $1 \cdot A = A$). A continuación se justifica por qué las matrices tienen una estructura de espacio vectorial.

Por tener definidas las operaciones de suma y producto por números, con las propiedades que se han visto, para cada dimensión $m \times n$, el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ de matrices de esa dimensión se dice que tiene estructura de espacio vectorial.

A partir de ahí se comenta que las matrices comparten con los vectores los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal y base y se pone un ejemplo de una matriz expresada como combinación lineal de otras dos.

En la **sección 3** aparece la operación de producto de matrices. Se introduce mediante el producto de una matriz fila por una matriz columna y luego se define el producto general. Se dan las propiedades del producto (asociativa; distributivas, $A(B + C) = AB + AC$ y $(B + C)A = BA + CA$; y traspuesta del producto) y se hace hincapié en la no existencia de conmutatividad y en sus consecuencias (no se puede sacar factor en situaciones $AB + CA$ y no se dan las identidades notables).

En la **sección 4** se define el rango de la matriz y se explica el procedimiento de Gauss-Jordan para su cálculo. Primero se da una interpretación de las filas y columnas de la matriz como matrices fila

y matrices columna para enlazar con su dependencia lineal y con la definición de rango como número de filas (o columnas linealmente independientes). Se describen las transformaciones elementales que conservan el rango de la matriz introduciendo la noción de matriz equivalente. Por último, se aplican estas transformaciones en el algoritmo de Gauss-Jordan para lo cual se define matriz escalonada reducida. Se da este algoritmo por filas, mencionando la posibilidad de trabajar en función de las columnas.

En la **sección 5** se define matriz inversa y se explica el procedimiento de Gauss-Jordan para su cálculo. Se da primero una justificación de la necesidad de la inversa para ecuaciones del tipo $AX = B$, donde A es cuadrada. Después se define matriz invertible, se concluye que A es invertible, si y sólo si, $rg(A) = n$ y se ofrece un ejemplo para su cálculo en una matriz 2×2 de forma directa, es decir, usando incógnitas para los elementos de la matriz inversa y llegando a un sistema lineal de ecuaciones. Se dan las propiedades de la matriz inversa (producto de inversas, inversa de la traspuesta e inversa de la inversa) y se incide en la imposibilidad de afirmar $AB = AC \Rightarrow B = C$ si la matriz A no es invertible. Por último se ofrece el algoritmo de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa de una matriz.

En la **sección 6** se describen dos aplicaciones de las matrices, en teoría de grafos y en los movimientos en el plano. Para la primera aplicación se definen grafo, vértice, arista y camino y se distingue el caso particular de grafo dirigido. Se asocian los grafos con la matriz de adyacencia, cuyas entradas $a_{i,j}$ representan el número de aristas que van del i -ésimo vértice del grafo al j -ésimo. Se da una interpretación de A^n como la matriz cuyas entradas son el número de caminos posibles de n aristas del vértice i -ésimo al vértice j -ésimo. Para la segunda aplicación se deducen las ecuaciones de un giro de ángulo α asociando estas con su representación matricial. Luego se dan directamente las matrices que representan las ecuaciones de las principales simetrías (respecto al origen, respecto a la recta $y = x$ y respecto a los ejes de coordenadas) y la matriz que representa una traslación.

Las páginas de exposición de contenido vienen acompañadas de ejemplos tras la mayoría de definiciones y resultados, notas y apuntes históricos en los márgenes de las páginas y una serie de actividades (de 4 a 8) para practicar. Además de las secciones de contenido existe una introducción al tema (primeras dos páginas), un resumen (una página), ejercicios tipo de cada apartado teórico resueltos (3 páginas), una serie de actividades (ejercicios, cuestiones, problemas) finales (5 páginas) y una serie de ejercicios de autoevaluación (1 página).

En las restantes unidades de álgebra, además de los contenidos relativos a determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, se incluyen el cálculo del rango y de la inversa de una matriz usando determinantes, las matrices con parámetros y las ecuaciones matriciales (unidad de determinantes) y la representación matricial de sistemas (unidad de sistemas de ecuaciones lineales).

Tareas

Sin contar los ejemplos y los ejercicios de autoevaluación se tienen un total 134 actividades.

Los ejemplos que aparecen a lo largo de la exposición del contenido son tareas cuyo objetivo es que el alumno tenga una primera toma de contacto con los nuevos conceptos, asegurarse de que está entendiendo. Como tal, son tareas de baja demanda cognitiva, en su mayoría tareas de memorización (nivel I) según Smith y Stein.

Uno de los ejemplos: *Determina el rango de las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

Las actividades para practicar en cada sección de contenido suelen estar ordenadas en orden creciente de dificultad. Su objetivo es el de aplicar los conceptos y los algoritmos recientemente expuestos y, en algunos casos, profundizar en alguno de los conceptos. Aquellas en las que se pretende esto último requieren una comprensión mayor y se podrían catalogar como tareas de procedimientos con conexión (nivel III). En el resto de los casos se tienen procedimientos sin conexión (nivel II), es decir, una

aplicación directa de los contenidos que requiere de un mejor manejo de los mismos pero que no deja de consistir en la puesta en práctica de algoritmos sin profundizar en la argumentación matemática de los mismos.

Ejemplo de actividad nivel II: 22. *Calcula los valores de x e y para que se verifique la igualdad:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de actividad nivel III: 43. *Traza un grafo dirigido para el que la matriz de adyacencia sea una matriz triangular superior de dimensión 5×5 cuyos elementos distintos de 0 son $a_{i,j} = 1$.*

Las actividades finales se dividen en cinco partes: ejercicios, actividades de síntesis, cuestiones, problemas y actividades de profundización. Los primeros se dividen a su vez en función de las secciones teóricas, en cada una de las cuales los ejercicios aparecen ordenados en orden creciente de dificultad. Ocurre lo mismo en las otras cuatro partes, las tareas se ordenan en orden creciente de dificultad. En los ejercicios y las actividades de síntesis las tareas corresponden a los niveles más bajos de demanda cognitiva. En las otras partes se alternan procedimientos sin conexión y con conexión. De entre estos últimos algunos están basados en interpretar una información dada en forma de tabla y trabajar con ella (aplicación de las matrices a la vida real) y otros en cuestiones que ahondan en la estructura de las matrices como espacio vectorial o en el método de inducción para el cálculo de potencias de matrices.

Ejemplo de actividad nivel III: 131. *Considera el espacio vectorial de las matrices de orden 2.*

- (a) *Escribe la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de las matrices $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.*
- (b) *Halla una matriz que no se pueda escribir como combinación lineal de B_1 y B_2 .*
- (c) *Encuentra cuatro matrices del espacio vectorial tales que cualquier matriz se pueda expresar como combinación lineal de ellas.*

2. Matemáticas II. 2º de bachillerato. Editorial Vicens Vives. Acceso online gratuito (dadas las circunstancias provocadas por la pandemia de COVID-19). Autores: L. Pancorbo y G. Ruiz. ISBN: 9788468235844.

Ubicación de la unidad de matrices

Tema 6. Tras los 5 temas del bloque de análisis.

Contenido y organización

El contenido del tema se distribuye en 8 secciones: *Matrices de números reales; Operaciones con matrices; Potencias de una matriz cuadrada; Matriz inversa; Dependencia lineal e independencia lineal; Rango de una matriz; Ecuaciones matriciales; y Aplicaciones de las matrices.*

En la **sección 1** se define el concepto de matriz.

En matemáticas, se denomina matriz a un conjunto de elementos dispuestos en filas y columnas en forma de tabla rectangular.

A partir de ahí se establece que se entiende por dimensión, se introduce la notación matricial y se da el criterio para afirmar que dos matrices son iguales. Después se define la matriz traspuesta y se clasifican los tipos característicos de matrices: matriz fila, matriz columna, matriz cuadrada, matriz simétrica, matriz antisimétrica, matriz diagonal, matriz triangular superior, matriz triangular inferior y matriz nula.

En la **sección 2** se define la suma de matrices y se dan sus propiedades (asociativa, conmutativa, elemento neutro y elemento opuesto); se define la diferencia de dos matrices como la suma de la primera y la matriz opuesta de la otra; se define el producto de una matriz por un número real y se dan sus propiedades (asociativa, distributivas y producto por la unidad, aunque se dan sin nombre, expresando directamente la propiedad); se introduce el producto de matrices a partir de una matriz fila por una matriz columna y se generaliza al producto de matrices “multiplicables”.

Vicens Vives explicita brevemente en la **sección 3** qué se entiende por potenciación de matrices y explica cómo se calculan ciertas potencias n -ésimas aplicando el método de inducción.

En la **sección 4** se da la definición de matriz inversa y las definiciones de matriz invertible o regular y de matriz singular que derivan de esta; se describen las propiedades de la matriz inversa (inversa de la inversa, inversa del producto e inversa de la traspuesta); y se mencionan los tres métodos para calcular la inversa de una matriz (cuando es posible): aplicar directamente la definición, el método de Gauss-Jordan y el uso de determinantes. Se explican los dos primeros.

La **sección 5** consiste en una breve explicación de la dependencia lineal e independencia lineal de las filas de una matriz, previa a la introducción del rango, y motivada quizá por el hecho de no haber hablado previamente de la estructura vectorial de las matrices.

En la **sección 6** se define el rango de una matriz y se expone ahora sí la equivalencia matriz invertible-rango máximo. Se describen las transformaciones que no alteran el rango de una matriz y el método de Gauss-Jordan para el cálculo del rango a partir de las anteriores.

La **sección 7** introduce las ecuaciones matriciales. Simplemente se explica lo que se entiende por ecuación matricial y se dan unas pautas para su resolución (el papel de la división lo desempeña ahora la inversa, el orden de multiplicación es importante, si A es singular $AX = B$ tiene la solución trivial o no tiene solución).

En la **sección 8** se dan dos aplicaciones de las matrices: los grafos y los movimientos en el plano. En el caso de los grafos se introducen los conceptos de vértice o nodo y de arco o arista y se habla de la matriz del grafo como la matriz cuyo elemento $a_{i,j}$ adquiere el valor 0 si los nodos i, j no están conectados o 1, si sí lo están.

La unidad de matrices incluye una introducción, una serie de ejemplos y actividades en cada sección teórica, un apartado de ejercicios resueltos, las actividades finales, y una evaluación de estándares.

Además, en las unidades siguientes aparece el cálculo del rango y de la inversa por menores (determinantes) y la representación matricial de un sistema de ecuaciones.

Tareas

Las tareas consisten en una serie de ejemplos y actividades a lo largo de la exposición de los contenidos, ejercicios resueltos al término de la teoría, las actividades finales y las actividades de la evaluación de estándares (concepto análogo al de autoevaluación).

Las secciones teóricas incluyen varios ejercicios (de 1 a 8). En este caso todos ellos se corresponden con un nivel bajo de demanda cognitiva, fundamentalmente son procedimientos sin conexión, con los que se busca poner en práctica de forma inmediata los conceptos y los algoritmos expuestos en teoría. Los ejemplos, asimismo de baja demanda cognitiva, sirven como puesta en práctica inmediata de la teoría para garantizar su comprensión.

Ejemplo de actividad: *Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ es igual a su inversa.*

Los ejercicios resueltos representan ejercicios tipos de cada apartado y se pueden considerar como

procedimientos sin conexión.

Las actividades finales están compuestas de una primera serie de ejercicios de repaso de la teoría de la unidad para comprobar que el alumno es consciente de todos los conceptos que se manejan en la unidad. Son tareas asociadas al nivel de memorización. A partir de ahí las actividades están clasificadas en función de la sección teórica que se trabaja y en base a tres niveles de dificultad. Se incluyen muchos ejercicios de aplicación correspondientes a procedimientos sin conexión pero también aparecen algunos de mayor demanda cognitiva. Entre estos, de nuevo son típicos aquellos que asocian la matriz con la representación en forma de tabla de datos de algún fenómeno de la realidad y aquellos que ahondan en la estructura de la matriz como objeto matemático relacionando distintas características asociadas a esta.

Ejemplo 1: 103. Una empresa dispone de tres restaurantes X, Y y Z , en cada uno de los cuales se consume a diario carne (C), pescado (P) y fruta (F). En el restaurante X cada día se consumen 45 kg de carne, 60 kg de pescado y 80 kg de fruta. En el restaurante Y se consumen a diario 55 kg de carne, 40 kg de pescado y 60 kg de fruta. En el restaurante Z se consumen a diario 32 kg de carne, 38 kg de pescado y 46 kg de fruta. Resume esta información en una matriz y calcula el consumo mensual de cada producto en cada restaurante.

Ejemplo 2: 104. Sea $A \in \mathcal{M}_3$ (matriz columna), $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ y definimos la matriz P_{12} como:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Multiplica la matriz $P_{12} \cdot A$ ¿Qué ha ocurrido con A ?
- (b) Multiplica la matriz $P_{12} \cdot B$ ¿Qué ha ocurrido con B ?
- (c) Define una matriz P_k , tal que, al hacer el producto $P_k \cdot A$, la matriz resultante sea la matriz que resulta al multiplicar la fila 2 de la matriz A por k .
- (d) ¿Qué ocurre si multiplicamos $A \cdot P_{12}$?
- (e) Si deseamos reemplazar la fila 3 de la matriz A por la obtenida al sumar a la fila 3 el resultado de multiplicar la primera fila por 2 y la segunda por -1 , ¿qué matriz debemos definir?

La conclusión es que las diferencias entre uno y otro libro de texto no son notables, aunque en algunos casos merecen algún comentario. En la sección 2, SM aísla primero la suma y el producto por un número real para hacer mención a la estructura de espacio vectorial e introducir los conceptos ligados con esta estructura en las matrices. Vicens Vives, en cambio, engloba las tres operaciones sin dar ninguna noción referente a espacios vectoriales. La sección 3 de Vicens Vives es bastante novedosa. Hace un tratamiento especial a la potenciación e incluye en las secciones teóricas una aplicación del método de inducción. SM, por su parte, no incluye nada referente a la potenciación y el método de inducción en la teoría, pero en las actividades finales se encuentran diversos ejercicios en las que se pide el cálculo de potencias de exponente elevado que requieren de un razonamiento inductivo. Otra diferencia apreciable es el orden de introducción del rango y de la inversa. SM introduce primero el rango y Vicens Vives lo hace al revés. Por otra parte en la aplicación de las matrices a los grafos Vicens Vives ofrece una interpretación similar a la que hacía SM con las diferencias de que no se consideran los grafos dirigidos ni la posibilidad de múltiples aristas uniendo dos vértices. También se da la interpretación de la potencia de la matriz del grafo. En cuanto a los movimientos, se dan las ecuaciones de los principales movimientos y de la homotecia en su forma matricial. Por último, respecto a las tareas, la disposición de las mismas y el grado de demanda cognitiva según su ubicación (las tareas de mayor dificultad se localizan en las actividades finales) es muy similar. Quizá las actividades que propone SM en la sección teórica llegan a alcanzar una demanda cognitiva más alta (nivel III) mientras que Vicens Vives se limita aún a ejercicios de aplicación sin conexión con otros conceptos.

En cualquier caso en ambos libros el contenido se ciñe a la estructura de la matriz como objeto, tal y como establece el currículo, con un guión bastante marcado y que continúa con los determinantes y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, ahondando en su representación matricial. Se observa, no obstante, un

intento de contextualización con la última sección teórica de aplicaciones de las matrices y con algunas actividades finales que da pie al profesor de la asignatura a profundizar en la utilidad de las matrices en diversos ámbitos. Por sí solo es un apartado demasiado breve como para apreciar este potencial de las matrices.

1.3 Experiencia como docente en prácticas

Durante la fase de observación de la asignatura de Prácticas Externas se tuvo la posibilidad de apreciar una puesta en práctica de la unidad de matrices de la que también se pueden extraer algunas conclusiones sobre cómo se suele afrontar la enseñanza de este tema en 2º de bachillerato. El libro de texto utilizado es precisamente el de la editorial SM recientemente analizado.

Además del libro el profesor utiliza como otros recursos una hoja de actividades, unos apuntes complementarios sobre *teoría de espacios vectoriales* y la pizarra como medio de exposición. La organización de la teoría sigue el guión planteado por el libro de SM y salvo alguna diferencia mínima por preferencias del profesor se toman las definiciones y los resultados según están presentados en el mismo. Las explicaciones teóricas se acompañan siempre de pequeños ejemplos y de ejercicios de aplicación directa. La única sección que no se aborda es la de aplicación de matrices, debido a las limitaciones temporales y a que no se contempla como un contenido principal. La secuenciación es la siguiente:

- Sesión 1: Definición de matriz. Tipos de matrices. Suma y producto de una matriz por un número real.
- Sesión 2: Propiedades de la suma y el producto de matrices por un número real. Espacio vectorial de las matrices. Producto de matrices (se introduce primero como producto de una fila por una columna y después se generaliza).
- Sesión 3: Propiedades del producto. Matriz traspuesta. Propiedades de la trasposición. Matriz inversa: cálculo por Gauss-Jordan.
- Sesión 4: Propiedades de la matriz inversa. Dependencia e independencia lineal de las filas y columnas de una matriz.
- Sesión 5: Rango de una matriz: cálculo por Gauss-Jordan.
- Sesión 6: Ecuaciones matriciales. Realización de ejercicios.
- Sesión 7: (solo 4 alumnos van a clase debido a las circunstancias provocadas por la huelga de estudiantes del 6 de marzo) Realización de ejercicios.
- Sesión 8: Potencia de una matriz. Método de inducción. (se comienza la unidad de determinantes).

Los apuntes complementarios sobre espacios vectoriales y la hoja de actividades se encuentran en el moodle personal del profesor para la asignatura. Los primeros sirven de profundización para aquellos alumnos que tengan interés pero no se tratan en las sesiones lectivas. La hoja de actividades por su parte, sirve como trabajo individual en casa y para incidir en algunos conceptos o procedimientos durante las sesiones. Incorpora también ejercicios del mismo carácter que los de las pruebas de acceso a la universidad con vistas a que los alumnos se vayan haciendo una idea de lo que se les va a exigir. Un ejemplo de los ejercicios de la hoja de actividades requerido como tarea para casa y corregido en una de las sesiones incide en el método de inducción para calcular la potencia n -ésima.

Ejercicio 11 de la hoja de actividades:

- (a) Calcula A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$.
- (b) Calcula $A^{34} - 2A^{17}$.

A parte de la preparación de la EBAU y de la insistencia en algún tipo de ejercicios estas actividades complementarias no ofrecen ningún nuevo enfoque o persiguen algún otro objetivo que permita contextualizar las matrices.

1.4 Conclusión del análisis normativo y documental

El enfoque de la enseñanza de las matrices que se deduce del análisis normativo y documental es el de un estudio bastante amplio de la estructura algebraica de las matrices que, sin embargo, no queda justificado a partir de las aplicaciones que, dentro de las propias matemáticas y fuera de ellas, las matrices tienen. Esto ocurre de manera similar con los determinantes, que tienen una clara interpretación para el cálculo de áreas y volúmenes. Ambos objetos tan solo se emplean en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en el tercer tema del bloque de álgebra. Así, en el análisis normativo se observa como ambas, LOE y LOMCE, hablan de aplicación de las matrices a contextos reales, aunque la segunda, y actualmente en vigor, da un paso atrás en cuanto a la conexión de las matrices con la geometría y se ciñe solo a la representación de datos en forma matricial. Por su parte, los libros de texto analizados ofrecen una última sección teórica y algunas actividades a la aplicación de las matrices. Si bien se trata de una sección breve y más bien anecdótica y ponen todo su empeño en el análisis de la matriz como objeto propio. En esta misma línea se sitúa la enseñanza de las matrices experimentada en las prácticas externas, donde se ha seguido la estructura que da el libro de texto de la editorial de SM y no se ha aportado ninguna contextualización.

2 Marco conceptual

El marco conceptual construirá las bases de la propuesta didáctica que se pretende realizar a partir de las teorías e investigaciones previas a este trabajo y de las ideas propias. Se ha decidido dividirlo en tres partes: marco didáctico, marco teórico-matemático y marco tecnológico; que conjugan los fundamentos de las respectivas tres vertientes: didáctica (de la matemática en particular), matemáticas y tecnología.

2.1 Marco didáctico

Los objetivos generales que se han marcado en la introducción para la propuesta didáctica alternativa que se va a extraer son aspectos ya valorados previamente por muchas investigaciones en didáctica de la matemática o que están muy relacionados con ciertas teorías del aprendizaje. A raíz de las ideas obtenidas de ellas y de las propias creencias y aspiraciones personales en la enseñanza de las matemáticas en general, y del álgebra de matrices en particular, se van a sentar aquí las bases didácticas en las que se sustentará la propuesta que se pretende.

En OG1 (ver los objetivos generales planteados en la introducción) se planteaba la ruptura con las matemáticas procedimentales, entendiendo estas como unas matemáticas basadas en la memorización de definiciones y la aplicación de algoritmos a situaciones creadas para tal fin, donde la mayor dificultad está quizá en una implementación ordenada del procedimiento para evitar la aparición de errores. Lamentablemente esta forma de entender las matemáticas es paradigmática en las etapas de ESO y bachillerato en España y como señala Goñi en [16] es la causa del distanciamiento con la alfabetización matemática o competencia matemática que define PISA (Program for International Student Assessment) [20]. PISA se refiere con esta terminología a *las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o enuncian problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones* y partiendo de esta definición divide la actividad matemática en tres fases. La primera, *matematización horizontal*, consiste en la traducción en términos matemáticos de un problema del mundo real, la cual conlleva una interpretación, una modelización, una relación entre el lenguaje natural y formal, una identificación de regularidades, etc. La segunda fase, *matematización vertical*, consiste en el uso de las estructuras matemáticas para resolver el problema ya matematizado. Esto implica un uso del lenguaje simbólico, una representación, una argumentación, etc. Por último, la fase de reflexión sobre el proceso, que bien podría concluir el mismo o bien podría replantearlo desde el principio y repetir el ciclo. Aquí es fundamental una crítica del proceso, una comprensión de los resultados, etc. Así las matemáticas que se desarrollan en el currículo del sistema educativo español se centran casi exclusivamente en la matematización vertical, siendo la matematización horizontal y la reflexión prácticamente inexistentes. Goñi hace la comparativa directamente con los ejes del marco evaluador de PISA: contenidos, procesos y contextos y situaciones. Argumenta que “lo habitual en nuestro medio educativo es que los currículos de matemáticas tengan un único eje explícito, que son los contenidos, o para ser más precisos, el conocimiento, por defecto, asociado a los mismos: recuerdo de datos, memorización de definiciones, aplicación de procedimientos algorítmicos y resolución de problemas *ad hoc*; esto supone un uso implícito de un segundo eje, los procesos. Por otra parte la aplicación del conocimiento a contextos de uso no suele utilizarse ni explícita ni implícitamente de

manera sistemática. Por lo tanto, tenemos en la práctica curricular habitual un eje explícito y fundamental, los contenidos, otro implícito, los procesos, y otro inexistente, los contextos y situaciones, para la práctica sistemática”. En [11] se hace un análisis basado en los resultados a nivel nacional y regional en PISA y las conclusiones son similares. “Los alumnos españoles en PISA muestran la necesidad de incidir sobre la aplicación de las competencias a resolver problemas de la vida real”.

PISA no deja de establecer unos criterios propios a la hora de evaluar la alfabetización matemática con

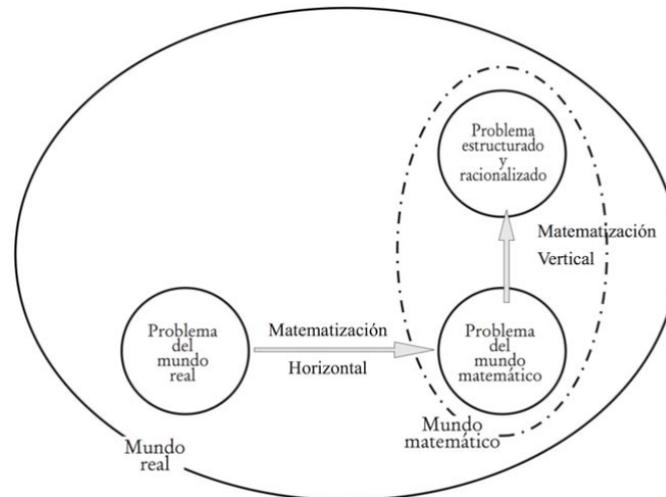


Figura 1: Competencia matemática en PISA[20]

los que se puede estar más o menos de acuerdo. Lo que sí es indiscutible es que su paso por las aulas destapa ciertas carencias en el sistema educativo español. Una de ellas es la que se señalaba al término del párrafo anterior, la falta de aplicación de las matemáticas al mundo exterior. La intención de romper las barreras académicas y reconectar con el exterior será por lo tanto una de las bases de la propuesta didáctica, como ya se expresaba en OG4. En este sentido conviene adaptar algunas de las ideas de la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal [10]. La concepción realista que defiende Freudenthal interpreta las matemáticas como una actividad humana que trata de describir los fenómenos que se producen en la realidad. Con este fin se construyen objetos abstractos que ayudan a explicar y relacionar fenómenos dando lugar a toda una estructura formal bien organizada. El error en didáctica de la matemática está, según Freudenthal, en enseñar a los estudiantes directamente el sistema formal, aislado de la interpretación de la realidad de la que ha surgido. Esta concepción que nace de la escuela matemática holandesa en los años 80 ha recibido numerosas aportaciones desde entonces y hoy se considera una teoría de la educación matemática bien definida y sustentada en seis principios fundamentales [1]:

- **Principio de actividad.** Las matemáticas son una actividad humana. Su finalidad es *matematizar* el mundo que nos rodea. Se entiende por *matematización* la actividad de búsqueda y resolución de problemas pero también la actividad de organización de un tema.
- **Principio de realidad.** Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales, entendiendo por estos problemas de la vida cotidiana y también problemas en la mente de los alumnos.
- **Principio de niveles.** Los alumnos pasan por cuatro niveles de comprensión: situacional, referencial, general y formal.
- **Principio de reinención guiada.** Se basa en el redescubrimiento del conocimiento matemático.
- **Principio de interacción.** La enseñanza de las matemáticas es una actividad social. La reflexión conjunta lleva a niveles más altos de comprensión.
- **Principio de interconexión.** Los bloques de contenido matemático no pueden ser tratados como compartimentos aislados.

La EMR no solo se plantea por lo tanto la mera aplicación de las matemáticas a la vida real sino que busca dar toda una contextualización a las matemáticas. La teoría iniciada por Freudenthal está relacionada con muchas otras. Los niveles de comprensión de la EMR son muy similares a los tres mundos del desarrollo del pensamiento matemático que establece David Tall: mundo encarnado, mundo simbólico y mundo formal [23]. Tall sostiene que los alumnos se sienten más cómodos en alguno de los mundos que en otro y por lo tanto conviene trabajar en todos ellos. En particular afirma que las matemáticas formales no surgen de manera aislada y que cada mundo tiene sus ventajas [15]:

- El mundo encarnado es donde el alumno interactúa con el mundo físico, no solo con las percepciones que hace de los objetos sino con las estructuras internas que incluyen la visión espacial. Da las bases para traducir la realidad humana en un simbolismo flexible.
- El mundo simbólico es donde las acciones, los procesos y sus correspondientes objetos se representan de manera simbólica. Es una herramienta potente para un procesamiento preciso y para hallar soluciones simbólicas.
- El mundo formal comprende los objetos definidos y presentados por sus propiedades, de las que se deducen otras nuevas a través de la prueba formal. Ofrece una deducción lógica válida para cualquier contexto en el que se satisfagan los axiomas y las definiciones necesarias.

Tall defiende la enseñanza de unas matemáticas que no abusen del mundo formal y que potencien la visualización a través de representaciones de la realidad. Además la visualización matemática se suele considerar una habilidad que se puede adquirir y que mejora la intuición y el entendimiento [24]. Por eso se considera como un objetivo (OG3) para la propuesta didáctica, teniendo en cuenta además que muchos de los alumnos del grupo de 2º de bachillerato al que va dirigida van a precisar en su futuro académico-profesional de destrezas correspondientes fundamentalmente a los dos primeros mundos que se plantea Tall. Pero la visualización no solo se considera fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Zimmermann y Cunningham citan en [24] este prólogo del matemático alemán David Hilbert (1862-1943).

“En matemáticas... encontramos dos tendencias. Por un lado, la tendencia hacia la abstracción busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes en el basto material que ha sido estudiado, y correlacionar el material de forma sistemática y ordenada. Por otro lado, la tendencia hacia el entendimiento intuitivo persigue un entendimiento más inmediato de los objetos que uno estudia, una viva conexión con ellos, es decir, que destaque el significado concreto de sus relaciones... Con la ayuda de la visualización podemos iluminar la variedad de problemas de geometría, y más allá de esto, es posible en muchos casos trazar el contorno de los métodos de investigación y prueba... De esta manera, siendo la geometría tan polifacética como es y estando relacionada con las más diversas ramas de las matemáticas, podemos incluso obtener un estudio resumido de las matemáticas como un todo, y una idea válida de la variedad de sus problemas y la riqueza de las ideas que contienen ”.

En este prólogo de Hilbert está muy presente además el principio de interconexión entre bloques de la EMR. La propuesta didáctica se centrará en particular en la relación entre el álgebra y la geometría (OG2), dos ramas de las matemáticas con una relación muy estrecha. Cuando las ideas del álgebra lineal nacen de la geometría familiar de dos o tres dimensiones los estudiantes las asimilan mejor. Muchas nociones de álgebra lineal ya ocurren en estas dimensiones de una manera no trivial y el estudiante con un buen entendimiento de las mismas encontrará poca dificultad en extenderlas a dimensiones superiores y sistemas algebraicos más abstractos [4].

Otro principio de la EMR que integra otras teorías del aprendizaje de las matemáticas y de manera más general de las ciencias es el principio de reinención guiada, que defiende las mismas ideas que el llamado aprendizaje por descubrimiento. Se trata de una teoría de índole constructivista, es decir que parte de que el motor del conocimiento está en la interacción del sujeto con el entorno impulsada por la curiosidad y, por lo tanto, el aprendizaje no es solo una actividad interna sino que está muy relacionada con el contexto [6]. Piaget y sobre todo Bruner fueron los impulsores del aprendizaje por descubrimiento. La teoría del aprendizaje por descubrimiento de Bruner de los años 60 sostiene que el aprendizaje ha de producirse a través de un descubrimiento guiado en el que el papel del profesor no es exponer unos contenidos acabados sino proporcionar los materiales y estímulos adecuados para guiar al alumno en su descubrimiento. Desde entonces se ha escrito mucho acerca de esta teoría y ha derivado en un método de enseñanza que se asocia

con un aprendizaje profundo. En matemáticas se considera un método muy válido ya que la actividad matemática nace del descubrimiento de los patrones que se dan en los fenómenos reales impulsado por el afán de entender el mundo que nos rodea y, sin embargo, las matemáticas académicas dan la impresión de que la actividad matemática consiste en el uso de unas estructuras ya inventadas e inamovibles. Como expresa Domínguez Muro en [7] este método entiende la formalización del conocimiento matemático como una meta y no como el punto de partida. Domínguez Muro concreta algunas indicaciones para llevar a la práctica este método. Se basa en cuatro pilares fundamentales: el alumno, que pasa a ser sujeto activo; el material, adquieren mayor relevancia los trabajos prácticos y los materiales manipulativos; el profesor, que ha de actuar como guía; y, la evaluación, que ha de tener más en cuenta otros criterios e instrumentos. Se habla también de un papel relevante de la motivación inicial de las lecciones, de la utilidad de hacer simulaciones y de la importancia del cuaderno u otros instrumentos de registro.

Goñi apunta a la evaluación como la fuerza más poderosa de las varias disponibles a la hora de modelar el sistema educativo [16] y dice que la enseñanza de las matemáticas en las etapas preuniversitarias en España gira entorno a las pruebas de ingreso a la universidad (actualmente EBAU). La finalidad de los currículos es la adquisición del conocimiento matemático necesario para la superación de esta prueba, lo cual provoca daños colaterales en todo el sistema educativo. Por eso una de las medidas que propone para mejorar los resultados en las pruebas PISA de matemáticas va encaminada hacia una reforma del examen de la EBAU y del currículo. Otra de las fuerzas que señala Goñi con posibilidad de cambiar el sistema educativo son los materiales. Los materiales, en particular las tareas que se asignan a los estudiantes, tienen gran poder para incidir en un aprendizaje matemático más profundo que enfatice los razonamientos y la argumentación. En este sentido será vital para el logro de OG1 la selección de tareas apropiadas. Para tal fin conviene destacar las investigaciones de Smith y Stein y la clasificación que hacen de las tareas en función de cuatro niveles de demanda cognitiva [22]. Los resultados de sus investigaciones en el proyecto QUASAR (Quantitive Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning) indican que la adquisición de un aprendizaje más elevado está estrechamente relacionado con la habilidad con la que las tareas están implementadas para enganchar a los alumnos en actividades de alta demanda cognitiva y de razonamiento. A la hora de catalogar una tarea como válida en este sentido es necesario tener en cuenta en primer lugar una serie de factores: edad, curso académico, conocimiento previo, experiencias y expectativas de trabajo de la clase; y en segundo lugar, qué clase de pensamiento les exige esta tarea a los estudiantes. Este segundo criterio da lugar a la clasificación de las tareas en función del nivel de demanda cognitiva de Smith y Stein (Tabla 3). La creación de una buena tarea de alta demanda cognitiva no es suficiente para lograr el aprendizaje profundo que se pretende. Es preciso llevar a cabo un proceso progresivo a través de los diferentes niveles de demanda cognitiva para que los alumnos estén preparados para enfrentarse a una tarea de “hacer matemáticas”. Por lo tanto, la clave no solo está en un buen diseño sino en una buena secuenciación de las tareas.

Otra clasificación de los dominios cognitivos es la taxonomía de Bloom. Se trata también de una clasificación jerárquica en la que el paso a niveles cognitivos superiores precisa del dominio de los niveles inferiores. La versión original fue publicada por Bloom en 1956 aunque actualmente se utiliza la versión revisada para la nueva era de su pupilo Anseron [3]. Los niveles cognitivos consisten en seis verbos clasificados a su vez en dos categorías. En orden creciente de demanda cognitiva son: Recordar, Comprender, Aplicar (habilidades de pensamiento de orden inferior, LOTS), Analizar, Evaluar, Crear (habilidades de pensamiento de orden superior, HOTS). Cada uno de estos elementos taxonómicos verbales está compuesto por una serie de verbos con los que se expresan las acciones propias de cada nivel. La taxonomía de Bloom es frecuentemente empleada como marco referencial para la creación de actividades en didáctica de la lengua y la literatura y es, en cambio, poco usual en matemáticas, donde las HOTS pueden resultar muy complejas dado el nivel de abstracción y dominio de las matemáticas que requieren. Sin embargo, dada la intención de la propuesta didáctica de aplicar el conocimiento de matrices y transformaciones geométricas a los filtros de fotografía es posible la utilización de las HOTS en un ámbito que se sale de lo puramente formal, incluso acceder a tareas de creación. Precisamente, como arrojan los resultados de [9] sobre la taxonomía de Bloom aplicada a la resolución de problemas matemáticos, “el peor resultado se obtuvo en los objetivos de creación matemática...la actuación de los estudiantes fue mejor en las preguntas de aplicación de las matemáticas que en las preguntas de comprensión ya que los estudiantes pueden resolver los problemas sin entender los conceptos”.

Baja demanda cognitiva	
Memorización	<ul style="list-style-type: none"> • Reproducción de hechos ya aprendidos, reglas, fórmulas y definiciones o la aplicación de los mismos de memoria. • No conllevan un procedimiento. • No admiten ambigüedad. • No tienen conexiones más profundas con el significado de estos hechos, reglas, fórmulas y definiciones.
Procedimientos sin conexión	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de procedimientos algorítmicos requeridos de manera más o menos evidente por las instrucciones previas, por la propia experiencia o por el contexto de la tarea. • No tienen conexiones más profundas con el significado del procedimiento. • Están centradas en la resolución de una tarea y no en el desarrollo de la comprensión matemática. • No requieren explicaciones o solo requieren explicaciones que simplemente describen el proceso.
Alta demanda cognitiva	
Procedimientos con conexión	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de procedimientos con el objetivo de desarrollar niveles más profundos de comprensión de las ideas y conceptos matemáticos. • Sugieren conexiones entre distintos conceptos matemáticos. • Suelen usar diferentes representaciones para enfatizar las conexiones en el significado de los conceptos.
Hacer matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Pensamiento complejo y no algorítmico. • No hay un camino explícitamente sugerido para completar la tarea. • Requieren la exploración de la naturaleza y relación de los distintos objetos matemáticos. • Requieren una regulación de las propias capacidades y la activación de conocimientos previos.

Tabla 3: Clasificación de las tareas matemáticas de Smith y Stein.

Por otra parte es importante considerar el aprendizaje basado en competencias que se plantea en OG6. No solo porque el marco legislativo del sistema educativo español contempla desde hace años las competencias clave en el currículo oficial sino porque se consideran un pilar fundamental en el desarrollo del individuo en lo personal y lo social y en un aprendizaje dinámico que no contempla las asignaturas como habitáculos del conocimiento aislados e independientes sino como habilidades o saberes interrelacionados. Se entienden como una reacción que emerge de la complejidad de la sociedad actual, la cual requiere de la adquisición de destrezas más que de la adquisición de conocimientos. El nuevo enfoque competencial afecta a todos los ámbitos de la acción educativa. La forma de disponer los contenidos, los objetivos que se plantean, las metodologías utilizadas y la evaluación del aprendizaje serán distintas. En el caso particular de las matemáticas toda redefinición de la competencia matemática adquiere una perspectiva funcional y habla de contextos sociales, naturales, culturales, etc. De la traducción de los contextos reales a los objetos matemáticos surge la modelización, que también suele estar considerada en las diversas concepciones de la competencia matemática. Además, dado el carácter multidisciplinar de las competencias ninguna de ellas suele trabajarse de manera aislada, así, la competencia matemática vendrá acompañada en ocasiones de la necesidad de comunicar, de trabajo en equipo, de componentes tecnológicos, de connotaciones culturales e históricas, del emprendimiento de acciones o de la convivencia con valores sociales y cívicos. Por último, es importante entender que la competencia se desarrolla en acciones que tienen un carácter funcional -sirven para algo- y finalista -finaliza con éxito la tarea o resuelve el problema- [14]. Estas consideraciones serán tenidas en cuenta para que cada elemento del diseño curricular de la propuesta favorezca el desarrollo de las siete competencias clave.

Taxonomía de Bloom Era Digital
Taxonomía de Bloom – Revisada 2001

Habilidades de pensamiento	Orden superior (HOTS)
Crear	Diseñar, construir, planear, producir, idear, trazar, elaborar.
Evaluar	Revisar, formular hipótesis, criticar, experimentar, juzgar, probar, detectar, monitorear.
Analizar	Comparar, organizar, deconstruir, atribuir, delinear, encontrar, estructurar, integrar.
Aplicar	Implementar, desempeñar, usar, ejecutar.
Comprender	Interpretar, resumir, inferir, parafrasear, clasificar, comparar, explicar, ejemplificar.
Recordar	Reconocer, listar, describir, identificar, recuperar, denominar, localizar, encontrar.
Habilidades de pensamiento	Orden inferior (LOTS)

Figura 2: Taxonomía revisada de Bloom. Habilidades cognitivas[3]

Un último aspecto que se ha señalado como objetivo general, OG5, es el de la inclusión de entornos de programación. Se considera una carencia en el currículo actual la ausencia de al menos una introducción a los lenguajes de programación en la rama científico-tecnológica cuando a los futuros trabajadores o investigadores se les va a requerir, en un alto porcentaje de los casos, el buen manejo de algún entorno de programación. En otros países ya se han introducido en el currículo, incluso Google ha desarrollado el proyecto CS4HS (Computer Science for High School), un programa de formación en ciencias de la computación a profesores de centros educativos de educación secundaria de más de 50 países impartido por profesionales. Como dice [13] “el aprendizaje de lenguajes de programación se puede plantear como un objetivo curricular en sí mismo o como un medio para alcanzar otro objetivo curricular”. Aquí se optará por la segunda opción. En cualquier caso se insiste una vez más en la importancia de empezar a manejar los entornos de programación en niveles preuniversitarios, que por otra parte, pueden potenciar actitudes cuyo desarrollo perseguimos como es el razonamiento lógico.

2.2 Marco teórico-matemático

El objetivo de este marco teórico es exponer la teoría matemática de la que se van a extraer los contenidos de la propuesta didáctica. Se parte de un conocimiento sobre álgebra de matrices correspondiente al que se alcanza en segundo de bachillerato y, en algunos puntos, de un conocimiento mínimo de álgebra y geometría lineales de primer curso de un grado de matemáticas, física o algunas ingenierías. Dado que el fin último del trabajo es de carácter didáctico se trata de que esta teoría no sea excesivamente rigurosa (no se van a definir todos los conceptos y exponer todos los resultados y demostraciones de manera sistemática), pero sí lo suficiente como para obtener de ella unos contenidos adecuadamente sustentados.

En la noción de transformación geométrica del plano confluyen tres ramas de las matemáticas como son el álgebra, la geometría analítica (también la geometría plana, sin uso de coordenadas) y la teoría de grupos. Dado que la propuesta didáctica está centrada en ofrecer una aplicación a la noción de matriz se concederá gran importancia a la primera de las tres, pero sin descuidar las otras. La segunda, porque es la más cercana a la observación del mundo real y como tal la más intuitiva y el primer paso hacia la matematización de la realidad. La tercera, porque las transformaciones geométricas forman un grupo con una serie de subgrupos interesantes no solo desde el punto de vista matemático, pues, por ejemplo, los musulmanes de la Edad Media ya eran conscientes de la existencia de diecisiete grupos cristalográficos y los usaban para decorar todo tipo de construcciones.

Por otra parte cuando se habla de geometría conviene señalar a qué geometría se está haciendo referencia. En el caso de la educación secundaria y bachillerato esto parece supérfluo, ya que los estudiantes de esta

etapa solo conocen la geometría euclídea y ni siquiera son conscientes de la existencia de otros tipos de geometría. Sin embargo, adoptando la descripción de geometría de Felix Klein en su *Erlangen Program* se pretende definir la geometría euclídea y mostrar otro ejemplo de geometría, como es la afín, analizando el espacio que manejan, las propiedades que poseen las figuras y las transformaciones que conservan estas propiedades, de acuerdo con la idea de Klein.

El estudio se va a limitar al plano \mathbb{R}^2 y, teniendo en cuenta estas consideraciones, se va a definir en primer lugar el concepto de transformación afín y se van a probar las propiedades básicas de las transformaciones afines y el teorema fundamental de la geometría afín que dan lugar a la geometría homónima. A continuación se va a hacer lo propio con las transformaciones euclídeas o movimientos (se conocen por cualquiera de estos dos nombres), llegando a la geometría euclídea. En este caso se va a realizar una clasificación de los movimientos y se va a analizar tanto su estructura de grupo como la de los subgrupos que se pueden obtener, en especial los grupos ornamentales (rosetones, frisos y mosaicos).

2.2.1 El grupo de las transformaciones

Se va a entender el concepto de **transformación** como una biyección f de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , es decir, como una correspondencia del plano en sí mismo que cumple las dos siguientes propiedades:

- Es **inyectiva**: Si dos puntos P y Q son tales que $f(P) = f(Q)$, entonces necesariamente $P = Q$.
- Es **sobreyectiva**: Para todo punto P existe un punto Q tal que $f(Q) = P$.

La transformación más sencilla es la propia identidad, que denotaremos por la letra griega ι . El hecho de haber definido las transformaciones como biyecciones permite, para cualquier transformación f considerar su inversa f^{-1} que también será una transformación. Podría resultar interesante aplicar dos transformaciones f y g de forma consecutiva al plano \mathbb{R}^2 . Esta operación se conoce como composición de funciones y se denota por $g \circ f$. Ocurre que $g \circ f$ es también una transformación, pues si $g(f(P)) = g(f(Q))$, entonces $f(P) = f(Q)$, por la inyectividad de g , y $P = Q$ por la inyectividad de f . En consecuencia, $g \circ f$ es inyectiva. Dado P existe Q tal que $g(Q) = P$, por ser g sobreyectiva, y existe R tal que $f(R) = Q$, por ser f sobreyectiva. Por lo tanto, $g \circ f(R) = g(Q) = P$ y $g \circ f$ es una transformación. Esta última propiedad se expresa diciendo que el conjunto de las transformaciones es **cerrado para la composición**. Además, $f \circ \iota = \iota \circ f = f$, es decir, componer una transformación con ι no produce ningún efecto. A ι se le conoce como **elemento neutro** para la composición de transformaciones. Por otro lado, dada cualquier transformación f , $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \iota$, es decir, si se realiza una transformación y a continuación su inversa se ‘deshace’ la transformación inicial. Para cada transformación f existe un **elemento inverso** f^{-1} . Por último, la composición de funciones, y por tanto de transformaciones, cumple la **propiedad asociativa**, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Estas cuatro propiedades dotan al conjunto de las transformaciones en el plano, $\mathcal{T}(2)$, de una estructura de **grupo** con la composición.

2.2.2 Las transformaciones afines

Para entender completamente un sistema matemático debes entender las transformaciones de ese sistema y, especialmente, aquellas que conservan algún aspecto particular del sistema [5]. El conjunto de las transformaciones es demasiado amplio como para resultar interesante, además, en este trabajo se busca conectar con la noción de matriz. Así pues, es necesario limitar el conjunto de transformaciones a ciertos grupos de las mismas.

La primera limitación pasa por considerar solo las transformaciones afines.

Definición 1. Una transformación afín de \mathbb{R}^2 es una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma

$$f(x) = Ax + b, \quad (2.1)$$

donde A es una matriz invertible 2×2 y $b \in \mathbb{R}^2$. El conjunto de transformaciones afines en el plano se denota por $\mathcal{A}(2)$.

Las transformaciones afines son aplicaciones afines que, por lo tanto, llevan una aplicación lineal asociada. Sea una transformación afín f y sea f_O la aplicación lineal dada por $f_O(\vec{u}) = f(O + \vec{u}) - f(O)$. Si $O = (O_1, O_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$ entonces

$$f_O(\vec{u}) = A \begin{pmatrix} O_1 + u_1 \\ O_2 + u_2 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Es decir, que f_O es precisamente la aplicación lineal asociada a la transformación lineal f . Además, de (2.2), se deduce que si $f_O(\vec{u}) = 0$ necesariamente $\vec{u} = \vec{0}$, luego f_O es un endomorfismo inyectivo de \mathbb{R}^2 como espacio vectorial y por ende un isomorfismo. Se puede probar fácilmente también que f_O no depende del punto O elegido. De hecho, si f está definida por (2.1) y $O = (0, 0)$ se tiene $f_O(\vec{u}) = f(\vec{u}) - b$.

Proposición 1. Sea una transformación afín f y $O \in \mathbb{R}^2$. Sea $f_O : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $f_O(\vec{u}) = f(O + \vec{u}) - f(O)$. Entonces

1. f_O es un isomorfismo de \mathbb{R}^2 como espacio vectorial.
2. f_O es independiente del punto O elegido.

Recíprocamente una aplicación afín de \mathbb{R}^2 con una aplicación lineal asociada cumpliendo estas dos condiciones es una transformación afín.

$\mathcal{A}(2)$ forma asimismo un grupo con la composición de funciones y, en consecuencia, es un subgrupo de $\mathcal{T}(2)$. Para comprobarlo solo hace falta probar que es cerrado para la composición y que dada una transformación afín su inversa es también una transformación afín pues, en ese caso, si $f \in \mathcal{A}(2)$ entonces $\iota = f \circ f^{-1} \in \mathcal{A}(2)$ y la asociatividad de la composición de funciones siempre se da. Pero dada una transformación afín por (2.1) la transformación definida por $g = A^{-1}x - A^{-1}b$ es afín y tal que $g \circ f = i$, es decir, la inversa de una transformación afín es también una transformación afín. Dadas dos transformaciones afines $f_1 = A_1x + b_1$ y $f_2 = A_2x + b_2$ $f_2 \circ f_1 = A_2A_1x + (A_2b_1 + b_2)$ es también una transformación afín, pues el producto de dos matrices invertibles es invertible, luego $\mathcal{A}(2)$ es cerrado para la composición.

Proposición 2. $\mathcal{A}(2)$ es un grupo con la composición de funciones.

La razón de considerar las transformaciones afines es que, además de formar un grupo, existen una serie de propiedades que permanecen invariantes al aplicar una transformación. Como no puede ser de otra forma estas propiedades reciben el nombre de *propiedades afines*. Son las siguientes:

Propiedades básicas de las transformaciones afines.

Las transformaciones afines:

1. Transforman rectas en rectas.
2. Transforman rectas paralelas en rectas paralelas.
3. Conservan proporciones de longitudes en una recta dada.

Es sencillo justificar las tres propiedades básicas de la geometría afín. Basta utilizar la expresión dada en (2.1) y la ecuación de la recta en forma vectorial para las dos primeras. Para la tercera se usa también la norma de un vector. Por ejemplo, para probar la propiedad 1, se considera la recta r que pasa por un punto P y tiene vector director \vec{d} . Esta recta se puede ver como el conjunto de puntos

$$r = \{P + \lambda\vec{d} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sea f una transformación dada por (2.1) imagen de un punto arbitrario de la recta es:

$$\begin{aligned} f(P + \lambda\vec{d}) &= A(P + \lambda\vec{d}) + b \\ &= (AP + b) + \lambda A\vec{d} \\ &= f(P) + \lambda A\vec{d}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la imagen de la recta r es la recta que pasa por $f(P)$ y tiene como vector director $A\vec{d}$.

$$f(r) = \{f(P) + \lambda A\vec{d} : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

La propiedad 3 es particularmente característica de la geometría afín. La geometría euclídea, como se verá más adelante, comparte con la anterior las propiedades 1 y 2 pero difiere de esta precisamente en la propiedad 3. Al igual que en la prueba de la propiedad 1, una recta cualquiera y su imagen por la aplicación afín dada por (2.1), que como se ha visto es una recta, vienen dadas por $r = \{P + \lambda\vec{d} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $f(r) = \{f(P) + \lambda A\vec{d} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ respectivamente.

Sean dos puntos de r , $P + \lambda_1\vec{d}$ y $P + \lambda_2\vec{d}$, la distancia entre ellos es

$$\|(P + \lambda_2\vec{d}) - (P + \lambda_1\vec{d})\| = |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot \|\vec{d}\|.$$

Las respectivas imágenes de los puntos son $f(P) + \lambda_1 A\vec{d}$ y $f(P) + \lambda_2 A\vec{d}$, y la distancia entre ambas

$$\|(f(P) + \lambda_2 A\vec{d}) - (f(P) + \lambda_1 A\vec{d})\| = |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot \|A\vec{d}\|.$$

Dado que el vector director \vec{d} tiene una longitud fija el cociente de distancias entre dos puntos y sus imágenes es constantemente igual a $\frac{\|A\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$.

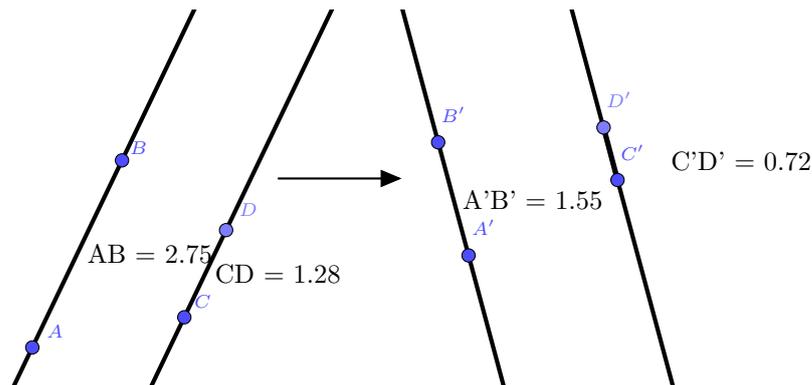


Figura 3: Una transformación afín conserva proporciones de longitudes: $AB/CD = A'B'/C'D'$

Se tiene por lo tanto un espacio, \mathbb{R}^2 , con un grupo de transformaciones, las transformaciones afines, que conservan una serie de propiedades, las propiedades afines. Se dice por lo tanto que las transformaciones afines de \mathbb{R}^2 generan la **geometría afín** de \mathbb{R}^2 . Se podría definir la geometría afín como el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes por el grupo de transformaciones afines. De acuerdo con esto, si existe una transformación afín que transforma una figura en otra, estas dos figuras son **congruentes** en la geometría afín.

Definición 2. Una figura F_1 es **afín-congruente** a una figura F_2 si existe una transformación afín que lleve una a la otra.

Pero ¿Qué figuras son congruentes en la geometría afín? Para responder a ello supóngase que se tiene un triángulo cuyos vértices son los puntos del plano $P = (0, 0)$, $Q = (-1, 3)$ y $R = (2, 1)$ ¿existirá una transformación afín que lo lleve al triángulo con vértices en $P' = (3, 1)$, $Q' = (2, -1)$ y $R' = (5, 0)$?

En primer lugar, si se definen las imágenes de los puntos $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$ la transformación afín (que es

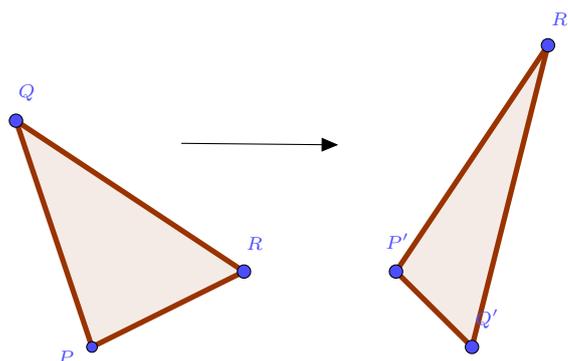


Figura 4: Transformación afín entre dos triángulos

un caso particular de aplicación afín) queda unívocamente determinada como se ve a continuación.

Si, en este caso, P, Q y R son tres puntos no alineados cualesquiera, veáse que existe una transformación afín que lleva $(0, 0)$ a P , $(1, 0)$ a Q y $(0, 1)$ a R .

Dicha transformación f viene dada por

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

donde a, b, c, d, e y f son inicialmente desconocidos pero quedan determinados por las condiciones impuestas ya que

$$\begin{aligned} P &= f(0, 0) = (e, f) && \text{luego } (e, f) = P \\ Q &= f(1, 0) = (a, c) + (e, f) && \text{luego } (a, c) = Q - P \\ R &= f(0, 1) = (b, d) + (e, f) && \text{luego } (b, d) = R - P \end{aligned}$$

Como los puntos no están alineados, (a, c) y (b, d) son linealmente independientes, la matriz que forman es invertible y por lo tanto f es una transformación afín.

Ahora si lo que se pretende es enviar cualquier terna de puntos no alineados P, Q y R a otra terna de puntos no alineados P', Q' y R' bastaría con obtener las transformaciones f_1 que lleva $(0, 0), (1, 0)$ y $(0, 1)$ a P, Q y R y f_2 la que hace lo propio de $(0, 0), (1, 0)$ y $(0, 1)$ a P', Q' y R' , puesto que la composición $f_2 \circ f_1^{-1}$ es una transformación afín que envía P, Q y R a P', Q' y R' . $f = f_2 \circ f_1^{-1}$ es además la única transformación afín con esta propiedad. Si hubiera otra, pongamos g , tanto $f \circ f_1$ como $g \circ f_1$ envían la terna $(0, 0), (1, 0)$ y $(0, 1)$ en P', Q' y R' , entonces son idénticas y componiendo ambas con f_1^{-1} se obtiene que $f = g$. Se ha llegado así a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 1. Teorema fundamental de la geometría afín Sean P, Q, R y P', Q', R' dos conjuntos de puntos no alineados en \mathbb{R}^2 . Entonces hay una única transformación que lleva P, Q y R respectivamente en P', Q' y R' .

En el ejemplo del que se partía se puede comprobar ahora que f_1 dada por

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$$

lleva el conjunto de puntos $(0, 0), (1, 0)$ y $(0, 1)$ a $P = (0, 0), Q = (-1, 3)$ y $R = (2, 1)$, y que f_2 definida como sigue

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lleva el conjunto de puntos $(0, 0), (1, 0)$ y $(0, 1)$ a $P' = (3, 1), Q' = (2, -1)$ y $R' = (5, 0)$. Por lo tanto, la transformación afín que lleva el triángulo formado por la primera terna de puntos al triángulo formado por la segunda es

$$f(x) = \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y en cuanto a la pregunta ¿qué figuras son congruentes en la geometría afín? Ha quedado claro que cualquier par de triángulos son congruentes, sea cual sea el tamaño de sus lados y ángulos.

Corolario 1. Todos los triángulos son afín-congruentes.

Es más, en base al teorema fundamental de la geometría afín y a las propiedades básicas de las transformaciones afines, no todos los cuadriláteros son afín-congruentes pero sí los paralelogramos. Así, por ejemplo, en la figura 5, el rectángulo $\square ABCD$ no es afín-congruente al trapecio $\square PQRS$. Cualquier aplicación afín que enviara uno en el otro estaría determinada por la imagen de tres puntos, sin embargo cualquier terna de parejas vértice-imagen que se tome define una aplicación afín de $\square ABCD$ a otro cuadrilátero distinto. Por ejemplo, tomando $P = f(A), Q = f(B)$ y $R = f(C)$, por la segunda propiedad

básica de las transformaciones afines debería de ser $\overrightarrow{f(D)P} \parallel \overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{Rf(D)} \parallel \overrightarrow{QR}$ y la imagen de $\square ABCD$ no es el trapecio $\square PQRS$ sino el romboide $\square PQRT$.

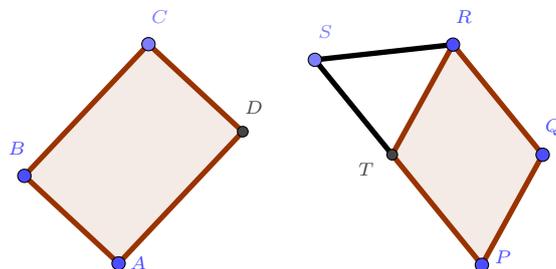


Figura 5: Cuadriláteros afines

Se podría estudiar también la congruencia afín de las cónicas y se llegaría a que todas las elipses (incluyendo a la circunferencia como caso particular de la elipse) son afín-congruentes entre sí y lo mismo ocurre con todas las hipérbolas y todas las parábolas. No se pretende demostrar todo esto, sino hacerse a la idea de las figuras que se conservan bajo transformaciones afines y, por lo tanto, de las propiedades que estudia la geometría afín. En un lenguaje informal se diría que la geometría afín se centra en el estudio de la ‘forma’ de las figuras.

Un último apunte que se hará en este subapartado, aunque no es especialmente relevante para el caso que se está tratando, es que la afín-congruencia es una relación de equivalencia. Los triángulos, los paralelogramos, las elipses, las hipérbolas y las parábolas son distintas clases de equivalencia.

2.2.3 Las transformaciones euclídeas

La idea ahora es la de limitar aún más el grupo de transformaciones que se van a estudiar para conseguir una geometría que no solo tenga en cuenta propiedades de las figuras tales como la ‘forma’ sino también el ‘tamaño’. De esta forma se va a llegar a la que se conoce como geometría euclídea, que no es otra que la geometría clásica, y única desde su sistematización por parte de Euclides hasta el siglo XIX. Es además la que toda persona con un nivel no muy avanzado en matemáticas asume como geometría de manera inconsciente. Las transformaciones de las que se sirve esta geometría, es decir, las *transformaciones euclídeas* se conocen también como *movimientos*. Esta denominación hace referencia al hecho de que dos figuras en la geometría euclídea son congruentes si pueden mover una para que ocupe el espacio de la otra. Se usará indistintamente una u otra denominación para referirse al mismo concepto.

Definición 3. Un movimiento α es una aplicación de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que conserva distancias, es decir, tal que para cada par de puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, $d(P, Q) = d(\alpha(P), \alpha(Q))$. El conjunto de movimientos o transformaciones euclídeas en el plano se denota por $\mathcal{E}(2)$.

Sea $\alpha_O = \alpha(O + \vec{u}) - \alpha(O)$ como en la proposición 1 y sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Sean $P = O + \vec{u}$, $Q = O + \vec{v}$, $R = \alpha(O)$, $S = \alpha(P)$ y $T = \alpha(Q)$. Entonces $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, y utilizando que para cada par de vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 \right], \quad (2.3)$$

se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\alpha_O(\vec{u}) &= \alpha(O + \vec{u}) - \alpha(O) = \alpha(P) - \alpha(O) = S - R = \vec{RS} \\ \alpha_O(\vec{v}) &= \alpha(O + \vec{v}) - \alpha(O) = \alpha(Q) - \alpha(O) = T - R = \vec{RT}.\end{aligned}$$

Y, en consecuencia, también

$$\alpha_O(\vec{u}) \cdot \alpha_O(\vec{v}) = \vec{RS} \cdot \vec{RT} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{RS}\|^2 + \|\vec{RT}\|^2 - \|\vec{RS} - \vec{RT}\|^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\|\vec{RS}\|^2 + \|\vec{RT}\|^2 - \|\vec{ST}\|^2 \right].$$

Como $\vec{RS} = d(R, S)^2 = d(\alpha(O), \alpha(P))^2 = d(O, A)^2 = \|\vec{OP}\| = \|\vec{u}\|^2$ y análogamente $\|\vec{RT}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$ y $\|\vec{ST}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ entonces

$$\alpha_O(\vec{u}) \cdot \alpha_O(\vec{v}) = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2] = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Esto quiere decir que la aplicación α_O conserva el producto escalar de vectores. Haciendo uso de nuevo de (2.3) se prueba que $\|\alpha_O(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \lambda\alpha_O(\vec{u}) - \mu\alpha_O(\vec{v})\|^2 = 0$. Además si $\alpha_O(\vec{u}) = 0$ entonces $0 = \alpha_O(\vec{u}) \cdot \alpha_O(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = 0$. Es decir, α_O cumple las condiciones de la proposición 1 y α es por lo tanto una transformación afín cuya aplicación lineal asociada se caracteriza por conservar el producto escalar.

Proposición 3. Un movimiento α es una transformación afín cuya aplicación lineal asociada α_0 cumple lo siguiente:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \alpha_O(\vec{u}) \cdot \alpha_O(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Es decir, α_O conserva el producto escalar de vectores.

De hecho, si un movimiento se representa matricialmente por $\alpha(x) = Mx + b$ como en (2.1), M es la matriz de la aplicación lineal asociada a α_0 respecto a la base canónica, por lo que $f(1, 0) = (m_{11}, m_{21})$, $f(0, 1) = (m_{12}, m_{22})$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}M^T M &= \begin{pmatrix} \|f(1, 0)\|^2 & \langle f(1, 0), f(0, 1) \rangle \\ \langle f(1, 0), f(0, 1) \rangle & \|f(0, 1)\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|(1, 0)\|^2 & \langle (1, 0), (0, 1) \rangle \\ \langle (1, 0), (0, 1) \rangle & \|(0, 1)\|^2 \end{pmatrix} = \mathcal{I}_2\end{aligned}$$

La matriz M tiene por inversa precisamente a su traspuesta, luego también $MM^T = \mathcal{I}_2$. Este tipo de matrices se llaman **matrices ortogonales**.

Proposición 4. Un movimiento de \mathbb{R}^2 es una función $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\alpha(x) = Mx + b \tag{2.4}$$

donde M es una matriz ortogonal 2×2 y $b \in \mathbb{R}^2$.

El producto de dos matrices ortogonales M_1 y M_2 es ortogonal puesto que $M_1 M_2 (M_1 M_2)^T = M_1 M_2 M_2^T M_1^T = M_1 M_1^T = \mathcal{I}$ y, como la traspuesta de la traspuesta de una matriz es la propio matriz, si M es ortogonal también M^{-1} es ortogonal.

Proposición 5. $\mathcal{E}(2)$ es un grupo con la composición de funciones.

Se ha llegado de nuevo a un espacio, \mathbb{R}^2 , con un grupo de transformaciones, las transformaciones euclídeas (o movimientos) y con una serie de propiedades, *las propiedades euclídeas* que quedan invariantes al aplicar esas transformaciones. Pero ¿Cuáles son las propiedades euclídeas?

La primera está clara dada la definición de movimiento. Las transformaciones euclídeas preservan la distancia entre puntos. De esta se deducen muchas otras. Sea α un movimiento y sean A, B, C tres puntos no alineados y $A' = \alpha(A)$, $B' = \alpha(B)$, $C' = \alpha(C)$. Si $AB + BC = AC$ entonces $A'B' + B'C' = A'C'$ pues $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $AC = A'C'$. Por lo tanto $A - B - C$ implica $A' - B' - C'$, es decir, si un punto está entre otros dos la imagen de este por α está entre las imágenes de los otros. Particularmente, si $AB = BC$ también $A'B' = B'C'$ y α *conserva los puntos medios*. \overline{AB} es la unión de A, B y de todos los puntos que están entre A y B , por lo que $\alpha(\overline{AB})$ es la unión de $\alpha(A), \alpha(B)$ y todos los puntos entre $\alpha(A)$ y $\alpha(B)$. α *conserva segmentos*. De manera similar, $\alpha(\overrightarrow{AB})$ es la unión de $\overrightarrow{A'B'}$ y de los puntos C' tales que $A' - B' - C'$, luego α *conserva semirrectas*. Como \overleftrightarrow{AB} es la unión de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BA} también $\overleftrightarrow{A'B'}$ es la unión de $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{B'A'}$ y α *conserva líneas rectas*. Como $\triangle ABC$ es la unión de los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CA} se deduce que $\alpha(\triangle ABC)$ es simplemente $\triangle A'B'C'$, y α *conserva triángulos*. Además, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ por la propiedad LLL. α *conserva ángulos* por definición de estos y *la medida de ángulos*, ya que $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{A'B'C'})$ debido a que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. De la medida de ángulos se deduce que α *conserva la perpendicularidad* y dado que las rectas paralelas tienen una perpendicular común, también *conserva el paralelismo*. Resumidamente, y de manera informal, las propiedades euclídeas son aquellas que conserva una figura rígida que se mueve por el plano. Como se ha dicho anteriormente las dos primeras propiedades básicas de la transformaciones afines son compartidas con la transformaciones euclídeas pero, respecto a la tercera propiedad, estas son más restrictivas pues no solo conservan la proporción de longitudes en una recta, conservan de hecho esas longitudes.

Propiedades básicas de las transformaciones euclídeas.

Las transformaciones euclídeas:

1. Transforman rectas en rectas.
2. Transforman rectas paralelas en rectas paralelas.
3. * Conservan longitudes en una recta dada. *

De manera análoga al caso afín, la **geometría euclídea** se podría definir como el estudio de las figuras que permanecen invariantes por transformaciones euclídeas. Estas figuras, de nuevo hablando de manera informal, son las que tienen igual forma y tamaño.

Definición 4. Una figura F_1 es congruentes a una figura F_2 en la geometría euclídea si existe una transformación euclídea que lleva F_1 a F_2 .

Un ejemplo de figuras congruentes en la geometría euclídea es el de dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ cuyos lados, y por lo tanto también sus ángulos, tienen la misma medida.

- Si ninguno de los vértices del primer triángulo coincide con el correspondiente del segundo se aplica la traslación de vector \overrightarrow{AP} sobre el primer triángulo, obteniendo un triángulo semejante de vértices P, B', C' (en azul en la figura 6).

- Si B' no coincide con Q entonces se aplica al nuevo triángulo un giro de centro P que lleva B' a Q (esto es posible porque $AB = PB' = PQ$). Se obtiene un triángulo semejante a los anteriores (en amarillo en la figura 6) de vértices P (no se ha movido por ser el centro de giro), Q y C'' .
- Por último, si C'' no coincide con R , se aplica la simetría de eje \overleftrightarrow{PQ} . Como $C''P = C'P = CP = CA = RP$ y $m(\widehat{QPC''}) = m(\widehat{QPR})$, aplicando una cadena análoga de igualdades, \overleftrightarrow{PQ} es perpendicular a $\overline{C''R}$ y el corte de ambas es el punto medio de $\overline{C''R}$. Por lo tanto, esta última transformación lleva C'' en R y deja P y Q invariantes.

Se ha conseguido llegar del triángulo $\triangle ABC$ a $\triangle PQR$ aplicando traslaciones, giros y simetrías, que como se detallará pronto son transformaciones euclídeas, por lo que son congruentes en la geometría euclídea.

Se han analizado hasta ahora las propiedades euclídeas y las figuras congruentes en la geometría euclídea, se

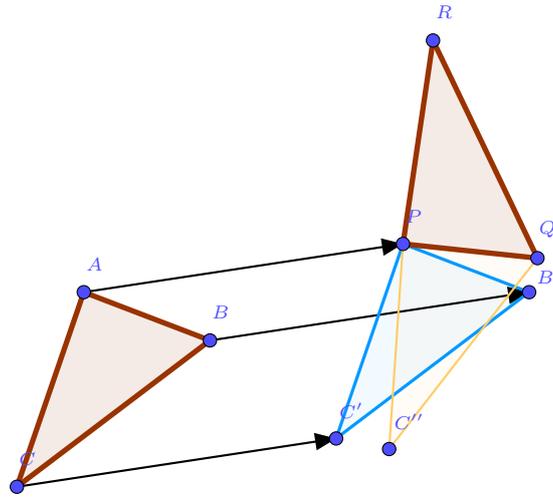


Figura 6: Transformación euclídea entre triángulos de igual forma y tamaño

pondrá el foco de atención a continuación en las transformaciones euclídeas. Se podrían estudiar directamente a partir de su matriz y llegar a la conclusión de que sorprendentemente solo hay cuatro movimientos en el plano. Esto se hará, pero antes sería conveniente que quede clara su interpretación geométrica, pues aunque por un lado las matrices facilitan el estudio y la clasificación de los movimientos, por el otro hacen que su visualización sea menos nítida. En [18] se lleva a cabo la construcción del grupo de los movimientos a partir exclusivamente de argumentos de geometría analítica y teoría de grupos. Este proceso es particularmente enriquecedor para esa visualización geométrica de las transformaciones euclídeas y, a pesar de que no se reproducirá el proceso al completo porque se extendería en exceso el trabajo, es apropiado comentar algunas propiedades de cada una de las transformaciones euclídeas y los resultados de las composiciones entre los distintos tipos de las mismas a los que se llega en [18].

Hay tres transformaciones euclídeas que se han utilizado desde hace miles de años para la decoración de todo tipo de objetos y edificios, teniendo su esplendor en el arte musulmán de la Edad Media y en los artistas del Renacimiento. Para completar el grupo de las mismas se precisa además de un cuarto movimiento.

Traslaciones

Las **traslaciones** consisten en mover cada punto del plano en la dirección y con el módulo dados por un vector fijo. Quedan unívocamente determinadas por la imagen de un punto, por eso la traslación que lleva P en Q se denota por $\mathcal{T}_{P,Q}$ y \overrightarrow{PQ} se llama *vector de traslación*. Si $\overrightarrow{PQ} = (a, b)$ entonces las ecuaciones que definen la traslación $\mathcal{T}_{P,Q}$, donde $(x', y') = \mathcal{T}_{P,Q}(x, y)$ son

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Las traslaciones **no dejan fijo ningún punto** y solo **dejan fijas aquellas rectas paralelas al vector**

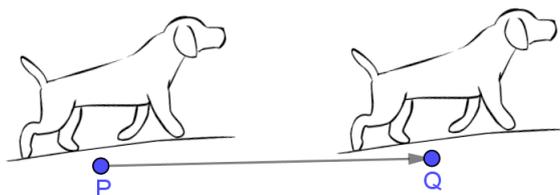


Figura 7: Traslación de P a Q

de traslación. Una recta y su imagen por la traslación son paralelas y la composición de traslaciones es una nueva traslación que verifica además

$$\tau_{P,Q}\tau_{R,S} = \tau_{P,Q'}, \text{ donde } Q' = Q + \vec{RS}$$

A partir de ahora, con el ánimo de simplificar la notación, se escribirá la composición de funciones $f \circ g$ como fg .

Dado que la composición de traslaciones es una traslación y que la inversa de la traslación de vector \vec{PQ} es la traslación de vector opuesto \vec{QP} (se puede comprobar con las ecuaciones), **las traslaciones en el plano con la composición forman un grupo.**

Antes de pasar al siguiente movimiento clásico será conveniente tener claros algunos términos relacionados con la teoría de grupos. Un grupo que tiene exactamente n elementos se dice que es un grupo **finito** de **orden** n . Si un grupo no es finito se dice que es **infinito**. Sea α un elemento cualquiera del grupo, ι el elemento neutro y la potencia α^n el producto (operación del grupo) de n veces α . Análogamente, se dice que α tiene **orden** n si n es el primer natural tal que $\alpha^n = \iota$. Si este natural no existe se dice que α tiene **orden infinito**. Si todo elemento de un grupo es una potencia de α , se dice que el grupo es **cíclico** con **generador** α y se denota el grupo por $\langle \alpha \rangle$. Esta notación se puede generalizar. Si $\mathcal{G} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \rangle$ cada elemento del grupo \mathcal{G} está **generado** por $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$ y se puede expresar como un producto de potencias de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Los elementos de orden 2 son particularmente interesantes y reciben el nombre de **involuciones**. Si α es una involución entonces $\alpha^2 = \iota$ y dicho elemento coincide con su inverso, $\alpha = \alpha^{-1}$.

Giro

Los **giros** rotan cada punto del plano alrededor de un punto fijo, el centro del giro, con un ángulo también fijo. El giro de centro C y ángulo Θ se denota por $\rho_{C,\Theta}$.

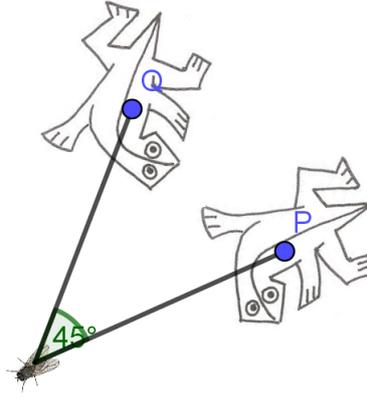


Figura 8: Giro de ángulo 45°

Hay un tipo especial de giro, el giro de 180° o **medio giro**. Este tiene unas propiedades particulares que se asemejan a las de una simetría, por eso se denota por σ_C al medio giro de centro C en lugar de usar $\rho_{C,180^\circ}$.

Un medio giro es una **involución** que **deja fijo un único punto, el centro** de giro, y **deja fijas aquellas rectas que pasan por dicho punto**. La propiedad que caracteriza al medio giro σ_C es que para todo punto P , C es el punto medio del segmento \overline{PQ} , donde Q es la imagen de P por el medio giro. Teniendo en cuenta esta se obtienen las ecuaciones de un medio giro de centro $C = (a, b)$.

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases} \quad (2.5)$$

Antes se ha analizado la composición de traslaciones, se hará lo propio con la composición de medios giros y de medios giros y traslaciones. Para ello basta tener en cuenta dos resultados.

- Si Q es el punto medio de los puntos P y R entonces

$$\sigma_Q \sigma_P = \tau_{P,R} = \sigma_R \sigma_Q$$

- Un producto de tres medios giros es un medio giro. En particular si los puntos P, Q, R no están alineados, entonces $\sigma_R \sigma_Q \sigma_P = \sigma_S$ donde $\square PQRS$ es un paralelogramo.

Del primero se sigue que **el producto de dos medios giros es una traslación** y que toda traslación se escribe como producto de dos medios giros. De esto último y del segundo se concluye que **el producto de una traslación y un medio giro es un medio giro**. Se puede generalizar que el producto de cualquier número de traslaciones y medios giros es, o bien una traslación, o bien un medio giro. Como además el inverso de un medio giro es él mismo y la inversa de una traslación es una traslación, **las traslaciones y los medios giros en el plano con la composición forman un grupo**.

Por otra parte, es sencillo obtener las ecuaciones de un giro centrado en el origen y de ángulo θ , es decir $\rho_{O,\theta}$.

$$\begin{cases} x' = \cos \theta x - \sin \theta y \\ y' = \sin \theta x + \cos \theta y \end{cases}$$

Un concepto interesante es el de **conjugado**. En general, $\alpha\beta\alpha^{-1}$ se denomina conjugado de β por α . La anterior definición es válida para cualquier grupo. En el caso de los movimientos en función del tipo de movimiento (se analizarán todos aunque aún no se hayan presentado) al que corresponda β se dan los siguientes resultados:

- $\alpha\tau_{P,Q}\alpha^{-1} = \tau_{\alpha(P),\alpha(Q)}$.

- $\alpha\rho_{C,\Theta}\alpha^{-1} = \rho_{\alpha(C),\pm\Theta}$. El signo \pm será $+$ si α es un movimiento par, y será $-$ si α es un movimiento impar.
- $\alpha\sigma_r\alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(r)}$.
- Si γ es una simetría con deslizamiento de eje r , entonces $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ es una simetría con desplazamiento de eje $\alpha(r)$.

En particular, gracias al conjugado es posible obtener fácilmente las ecuaciones de un giro $\rho_{C,\theta}$ de centro $C = (a, b)$, ya que $\rho_{C,\Theta} = \mathcal{T}_{O,C}\rho_{C,O}\mathcal{T}_{O,C}^{-1}$.

$$\begin{cases} x' = \cos \Theta(x - a) - \sin \Theta(y - b) + a \\ y' = \sin \Theta(x - a) + \cos \Theta(y - b) + b \end{cases} \quad (2.6)$$

Si además se consideran $r = a(1 - \cos \Theta) + b \sin \Theta$ y $s = -a \sin \Theta + b(1 - \cos \Theta)$ se consiguen unas ecuaciones más prácticas ya que permiten su escritura en forma matricial, como se verá más adelante.

$$\begin{cases} x' = \cos \Theta x - \sin \Theta y + r \\ y' = \sin \Theta x + \cos \Theta y + s \end{cases}$$

Un giro $\rho_{C,\Theta}$ con $\Theta \neq 180^\circ$ **deja fijo un único punto, el centro, y no deja ninguna recta fija**. Además si $\Theta = \frac{360^\circ}{n}$ para algún natural n , tendrá orden n ; de otra manera, tendrá orden infinito.

Un giro de ángulo Θ° compuesto con un giro de Φ° es un giro de $(\Theta + \Phi)^\circ$ a no ser que $(\Theta + \Phi) = 0^\circ$, en cuyo caso es una traslación. Una traslación compuesta con un giro de Θ° es un giro de Θ° . Un giro de Θ° compuesto con una traslación es un giro de Θ° . Un giro de 0° es la identidad, que no se está considerando ahora.

Estos resultados se pueden recoger bajo el nombre de *Teorema de la suma de ángulos*, y la manera más sencilla de obtenerlos es escribiendo giros y traslaciones como productos de simetrías. La conclusión a la que se llega es que se ha generado un nuevo grupo. **Las traslaciones y los giros en el plano forman un grupo con la composición.**

Simetrías

La **simetría axial** (o simetría, se usa aquí al apellido axial para dejar claro que se está considerando la simetría respecto de una recta y no de un punto, pues entonces se podría usar esta última notación para el medio giro dadas sus propiedades) mueve un punto P del plano al punto Q tal que \overline{PQ} es perpendicular a una recta dada y tal que P y Q equidistan de dicha recta. Una simetría se denota por σ_r donde r es la recta o eje de simetría. Queda definida de la siguiente manera:

$$\sigma_r = \begin{cases} P, & \text{si } P \text{ está en } r \\ Q, & \text{si } P \text{ está fuera de } r \text{ y } r \text{ es la mediatriz de } PQ \end{cases}$$

Una simetría es una involución que intercambia los semiplanos en los que r divide al plano. La simetría σ_r **fija la recta r punto por punto** (en particular fija la recta r) y **fija la recta s tal que $r \perp s$** .

Sea $P = (x, y)$ un punto cualquiera y sea $Q = (x', y')$ su imagen por la simetría σ_r , donde r es la recta de ecuación $aX + bY + c = 0$. La recta que pasa por P y Q es perpendicular a r , luego

$$b(x - x') = a(y' - y)$$

Además el punto medio de \overline{PQ} pertenece a la recta r

$$a\left(\frac{x + x'}{2}\right) + b\left(\frac{y + y'}{2}\right) + c = 0$$

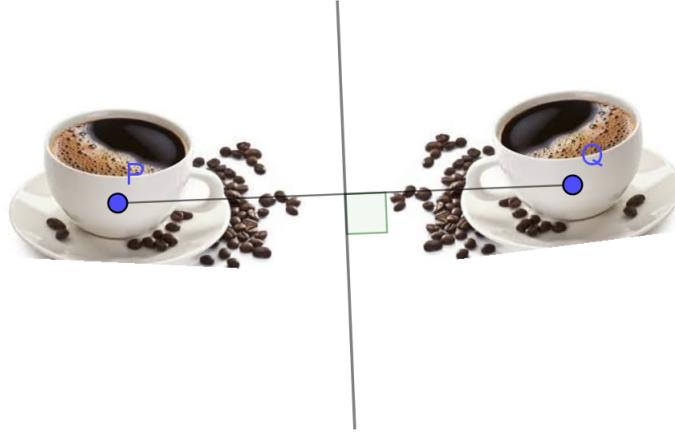


Figura 9: Simetría axial

A partir de ambas expresiones se obtiene un sistema lineal de dos ecuaciones con incógnitas x', y' del que se obtienen las ecuaciones de σ_r

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2} \\ y' = y - \frac{2b(ax+by+c)}{a^2+b^2} \end{cases} \quad (2.7)$$

Tanto las traslaciones como los giros como las simetrías son movimientos en el plano, pero estas últimas tienen una característica fundamental. Las simetrías generan todas los posibles movimientos. Este resultado se conoce por el nombre de *Teorema de Cartan-Dieudonné*.

- Un movimiento que fija dos puntos es una simetría o la identidad.
- Un movimiento que fija un único punto es el producto de dos simetrías.
- Un movimiento que no fija ningún punto es el producto de dos o tres simetrías.

Es decir, el producto de simetrías es obviamente un movimiento, pero además, cada movimiento es el producto de como mucho tres simetrías. De aquí se puede deducir que los movimientos forman un grupo con la composición, como ya se había probado. De hecho ese grupo es el grupo generado por las simetrías. Pero, ¿qué clase de movimiento son el producto de dos o de tres simetrías?

- Si las rectas r y s son paralelas $\sigma_r \sigma_s$ es una **traslación**. El vector de traslación es el que tiene módulo $2 \cdot d(r, s)$ en la dirección de r hacia s .
- Si las rectas r y s se cortan en un punto C formando un ángulo de r a s igual a Ω , $\sigma_r \sigma_s$ es un **giro** de centro C y ángulo 2Ω .

Recíprocamente, una traslación $\tau_{P,Q}$ se puede escribir como producto de dos simetrías tomando dos rectas paralelas que disten el doble de la distancia de P a Q y escribiendo el producto de simetrías en el orden apropiado para respetar la dirección de \vec{PQ} . Dado un giro $\rho_{C,\Theta}$ el producto de simetrías se puede conseguir tomando dos rectas que se corten en C y de tal forma que el ángulo de la recta de simetría que se aplica en primer lugar a la que se aplica en segundo lugar sea exactamente Θ .

Los productos de dos simetrías en el plano con la composición son un grupo, precisamente el mismo que el de las traslaciones y los giros. Nótese que el producto de cuatro simetrías es en realidad el producto de dos simetrías. Sean las rectas r, s, l, m . Si las cuatro son paralelas la composición de las cuatro simetrías cuyos ejes son dichas rectas es una traslación que se puede escribir como producto de solo dos simetrías. Si dos de ellas se cortan en un punto, supóngase que son l y m sin pérdida de generalidad, entonces $\sigma_l \sigma_m = \sigma_s \sigma_t$

siendo t la recta que pasa por el punto de corte de l y m y corta a s formando el mismo ángulo de las rectas l y m . Por lo tanto, $\sigma_r\sigma_s\sigma_l\sigma_m = \sigma_r\sigma_t$. De la misma forma el producto de un número par de simetrías se puede reducir al producto de dos isometrías

Un movimiento que se puede escribir como producto de dos simetrías se le llama movimiento **par**. Los movimientos pares forman un grupo con la composición como se deduce de lo anterior.

¿Y qué ocurre con el producto de tres simetrías?

- Si r , s y t son rectas paralelas, $\sigma_r\sigma_s\sigma_t$ **es una traslación**.
- Si r , s y t son rectas concurrentes, $\sigma_r\sigma_s\sigma_t$ **es un giro**.

Sin embargo, faltan dos casos por considerar, bien que dos de las rectas sean paralelas y la tercera sea concurrente con estas dos, o bien que las rectas se corten dos a dos pero no sean concurrentes. Estos casos darán lugar a un movimiento que no se corresponde a ninguno de los tres considerados por el momento.

Simetría con deslizamiento

La **simetría con deslizamiento** es la composición de una traslación con una simetría siendo el vector de traslación paralelo a la recta de simetría. Se denota por γ .

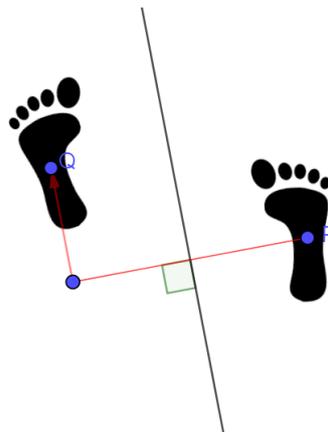


Figura 10: Simetría con deslizamiento

Supóngase que la recta de simetría es c . La traslación se puede escribir como producto de dos simetrías, que además son perpendiculares al vector de traslación y, por lo tanto, perpendiculares a c . Sean a y b las rectas de simetría correspondientes a tales simetrías. Entonces, **la simetría con deslizamiento γ de eje c es el producto $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$** .

Ahora bien, sea un punto P cualquiera y sea l la recta que pasa por P y es perpendicular al eje de simetría c . Se puede elegir otra recta m perpendicular a c de tal manera que $\sigma_b\sigma_a = \sigma_m\sigma_l$ como se observa en la figura 11. Si M es la intersección de m y c , entonces

$$\sigma_c\sigma_b\sigma_a(P) = \sigma_c\sigma_m\sigma_l(P) = \sigma_c\sigma_m(P) = \sigma_M(P)$$

La última igualdad viene del hecho de que c y m son rectas perpendiculares que se cortan en M , por lo que el producto $\sigma_c\sigma_m$ es un medio giro.

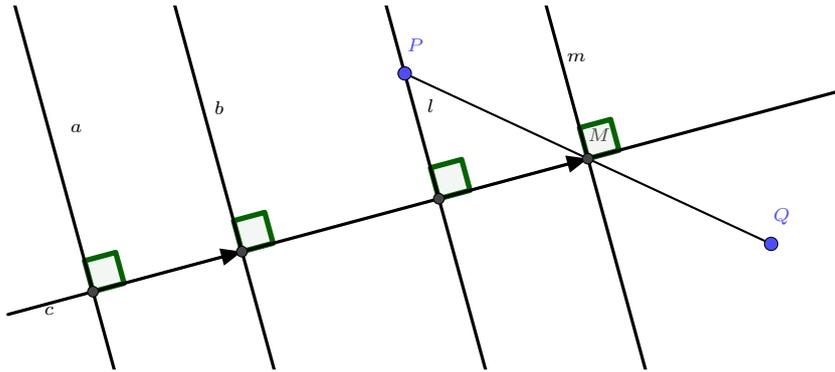


Figura 11: Simetría con deslizamiento como producto de simetrías

Este resultado muestra que las simetrías con deslizamiento y las simetrías comparten la propiedad de que **el punto medio de todo punto P y su imagen está en el eje de simetría**. Además de esta propiedad, las simetrías con deslizamiento **no dejan fijo ningún punto y solo fijan una recta, el eje de simetría**

De este último resultado también se intuye otra propiedad, y es que la composición de un medio giro con una simetría, tal que el centro del medio giro no pertenece a la recta de simetría, es una simetría con deslizamiento. Esta propiedad es importante porque permite concluir que cualquier producto de tres simetrías cuyos ejes no sean ni concurrentes ni paralelos es una simetría con desplazamiento. Ya se ha visto para el caso en que dos ejes son paralelos entre sí y perpendiculares a un tercero. Supóngase que las rectas a y b se cortan en un punto Q y que la recta c corta a a y b en otros puntos. Sea P el pie de la perpendicular trazada desde Q a c y r la propia recta perpendicular. Existe una recta s tal que $\sigma_b\sigma_a = \sigma_r\sigma_s$. Como $a \neq b$, entonces $r \neq s$ y $P \notin s$. En consecuencia, $\sigma_c\sigma_b\sigma_a = \sigma_c\sigma_r\sigma_s = \sigma_P\sigma_s$ es una simetría con deslizamiento. Solo quedaría por analizar el caso en el que a y b son paralelas y entre sí y secantes, pero no perpendiculares, a c . Procediendo de una manera muy similar se prueba que este último caso de producto de tres simetrías es también una simetría con deslizamiento y se concluye que **el producto de tres simetrías con ejes no concurrentes ni paralelos es una simetría con deslizamiento**.

Las simetrías y las simetrías con deslizamiento no pueden expresarse como un producto par de simetrías. Se dice que son movimientos **impares**. Los movimientos impares no forman un grupo como sí ocurriría con los pares, pues ya se ha visto que el producto de simetrías puede dar lugar a traslaciones y giros.

MOVIMIENTOS EN EL PLANO			
Pares		Impares	
Traslación	Giro	Simetría	Simetría con deslizamiento
Es producto de dos simetrías de ejes paralelos.	Es producto de dos simetrías cuyos ejes se cortan en un punto.	Es producto de una simetría.	Es producto de tres simetrías cuyos ejes no son concurrentes ni paralelos.
No fija ningún punto.	Fija el centro.	Fija cada punto del eje r .	No fija ningún punto.
Fija todas las rectas paralelas al vector de traslación.	Un medio giro fija todas las rectas que pasan por centro. El resto de giros no fijan ninguna.	Fija el eje de simetría y rectas perpendiculares a él.	Fija el eje de simetría.

Tabla 4: Clasificación de los movimientos. Puntos y rectas fijos.

Es posible construir las transformaciones euclídeas y analizar sus propiedades, como se ha visto, a partir de argumentos de geometría analítica y teoría de grupos, sin acudir en ningún momento a la noción de matriz. Este acercamiento aporta de hecho una mayor visualización de los conceptos que se manejan. Sin embargo, el tratamiento algebraico de las transformaciones geométricas, en particular, de las transformaciones euclídeas, a través de las matrices permite clasificarlas, estudiar sus propiedades y operar con ellas con suma facilidad.

En primer lugar, sea M la matriz ortogonal de una isometría

$$1 = \det(\mathcal{I}) = \det(MM^T) = \det(M)\det(M^T) = \det(M)^2 \Rightarrow \det(M) = \pm 1$$

Las matrices ortogonales solo admiten dos valores para su determinante. Se denota por \mathcal{O}_2 al conjunto de las matrices ortogonales 2×2 . Se dice que las matrices de \mathcal{O}_2 cuyo determinante es 1 son **directas** y se denota \mathcal{O}_2^+ el conjunto de las mismas. Análogamente se dice que las matrices de \mathcal{O}_2 cuyo determinante es -1 son **inversas** y se denota por \mathcal{O}_2^- el conjunto de las mismas.

En segundo lugar, Dada una matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonal se tiene que

$$\mathcal{I}_2 = MM^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $\exists \Theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos \Theta$ y $b = \sin \Theta$; de la segunda, $\exists \Phi \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos \Phi$ y $b = \sin \Phi$; y, de la tercera, $\cos \Theta \cos \Phi + \sin \Theta \sin \Phi = \cos(\Phi - \Theta) = 0$.

Si M es directa se añade a las anteriores una nueva ecuación, $ad + bc = 1$, es decir, $\cos \Theta \sin \Phi + \sin \Theta \cos \Phi = \sin(\Phi - \Theta) = 1$. En este caso $\Phi - \Theta = \frac{\pi}{2}$. Entonces $\Phi = \Theta + \frac{\pi}{2}$ y

$$\begin{aligned} c &= \cos \Phi = \cos\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \Theta \\ d &= \sin \Phi = \sin\left(\Theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \Theta \end{aligned}$$

Si M es inversa se añade a las tres primeras una nueva ecuación, $ad + bc = -1$, es decir, $\cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi = \sin(\phi - \theta) = -1$. En este caso $\phi - \alpha = -\frac{\pi}{2}$. Entonces $\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$ y

$$\begin{aligned} c &= \cos \Phi = \cos\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \Theta \\ d &= \sin \Phi = \sin\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \Theta \end{aligned}$$

Teorema 2. Teorema de clasificación de las matrices ortogonales. Sea $M \in \mathcal{O}_2$. Entonces

1. Si $M \in \mathcal{O}_2^+$ existe $\Theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}$
2. Si $M \in \mathcal{O}_2^-$ existe $\Theta \in [0, 2\pi)$ tal que $M = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ \sin \Theta & -\cos \Theta \end{pmatrix}$

Recíprocamente, las matrices del teorema son ortogonales y su determinante es respectivamente 1 y -1 . Este resultado nos da mucha información sobre la matriz asociada a las ecuaciones de un movimiento.

Corolario 2. Las ecuaciones de un movimiento α son

$$\alpha(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \text{sen}\Theta \\ -\text{sen}\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \text{ o } A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \text{sen}\Theta \\ \text{sen}\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix}$$

Es más estudiando los puntos fijos de los movimientos que representan estas matrices es posible determinar a que movimiento corresponde cada una.

Si $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría de matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$ entonces:

- Si $\cos\Theta = 1$ y $(a, b) \neq (0, 0)$, $\forall P \in \mathbb{R}^2$ $\alpha(P) = P + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$
- Si $\cos\Theta = 1$ y $(a, b) = (0, 0)$, $\forall P \in \mathbb{R}^2$ $\alpha(P) = P$
- Si $\cos\Theta \neq 1$, $\exists! P \in \mathbb{R}^2$ con $\alpha(P) = P$

Si $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría de matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix}$ entonces:

- Si $b = -a \tan \frac{\Theta}{2}$, los puntos fijos de α forman una recta de ángulo $\frac{\alpha}{2}$ con el eje de abscisas.
- Si $b \neq -a \tan \frac{\Theta}{2}$, α no tiene puntos fijos.

De acuerdo con esto y con el análisis previo sobre traslaciones, giros y simetrías, se pueden clasificar las transformaciones euclídeas en función de la matriz asociada al movimiento. Recuérdese que en todo momento se está suponiendo que el sistema de referencia es el dado por el origen $(0, 0)$ y por la base canónica de \mathbb{R}^2 .

Toda transformación euclídea está asociada a una matriz ortogonal de \mathcal{O}_2 . Los movimientos pares están asociados a una matriz de \mathcal{O}_2^+ (por eso se les llama también movimientos directos), es decir, a una matriz del primer tipo del teorema 2.

Traslación

La traslación que lleva $O = (0, 0)$ al punto $P = (a, b)$ queda determinada por

$$\tau_{O,P}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Giro

El giro de centro $O = (0, 0)$ y ángulo Θ queda determinada por

$$\rho_{O,\Theta}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Los movimientos impares están asociados a una matriz de \mathcal{O}_2^- (por eso también reciben el nombre de movimientos inversos), es decir, a una matriz del segundo tipo teorema 2.

Simetría

La simetría que tiene por eje la recta r que forma un ángulo de $\frac{\Theta}{2}$ con el eje de abscisas queda determinada por

$$\sigma_r(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Theta & -\cos\Theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ con } b = -a \tan \frac{\alpha}{2}$$

Simetría con deslizamiento

La simetría con deslizamiento que tiene por eje la recta r que forma un ángulo de $\frac{\Theta}{2}$ con el eje de abscisas queda determinada por

$$\gamma(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta \\ \sin \Theta & -\cos \Theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \text{con } b \neq -a \tan \frac{\alpha}{2}$$

Como se decía anteriormente es sumamente sencillo ahora comprobar las propiedades que describen cada uno de los cuatro tipos de transformaciones euclídeas, obtener el movimiento resultante de componer cualquiera dos de ellos y probar que todo movimiento es producto de una, dos o tres simetrías. Todas estas comprobaciones se resumen en productos entre matrices ortogonales (las descritas en el teorema 2) y productos de estas matrices 2×1 correspondientes a puntos del plano. Es en la posibilidad de traducir la geometría y trabajar con ella con tanta facilidad donde radica la importancia del álgebra, y en particular, de las matrices. La definición y estudio de este objeto matemático, de sus operaciones, y de otros conceptos asociados al mismo (inversa, rango, determinante, etc) adquieren ahora total sentido.

2.2.4 Los grupos ornamentales

Sea F una figura plana. Se dice que una recta r es un **eje de simetría** de F si $\sigma_r(F) = F$, es decir si F queda invariante por la simetría de eje r . Análogamente se dice que P es un **punto de simetría** si $\sigma_P(F) = F$, es decir, si F queda invariante por un medio giro de centro P . Por último, un movimiento α es una **simetría** para la figura F si $\alpha(F) = F$, y de nuevo esto equivale a que F queda invariante por el movimiento α . Estos tres conceptos, que se van a utilizar con frecuencia en esta subsección, se han definido con la rigurosidad propia de las matemáticas pero no son para nada artificiosos. Las simetrías aparecen en la naturaleza y en las construcciones realizadas por los seres humanos desde la Prehistoria.

Dos orejas y dos ojos situados a la misma distancia de una línea longitudinal que divide una nariz y una boca en dos partes iguales. La simetría se encuentra en los propios seres humanos. Los pétalos de las flores, una mariposa que abre sus alas, una estrella de mar... los ejemplos de simetría en la naturaleza son interminables, pero además los seres humanos han trasladado a sus obras esta noción porque de alguna manera, y sin entrar en disquisiciones filosóficas sobre qué es la belleza, les resulta agradable. Algunos ejemplos los muestra Du Sautoy en [8]. El autor y matemático británico narra en uno de los capítulos la visita que realiza junto a su hijo al Museo Británico con el afán de encontrar los objetos simétricos más antiguos posibles. El resultado son los dados tetraédricos del denominado *Juego real de Ur*, que data del 2600 a.C y unas bolas de piedra talladas de tal manera que dan lugar a formas simétricas. Del 2500 a.C y halladas en Escocia, se ubican actualmente en el museo Ashmolean de Oxford.

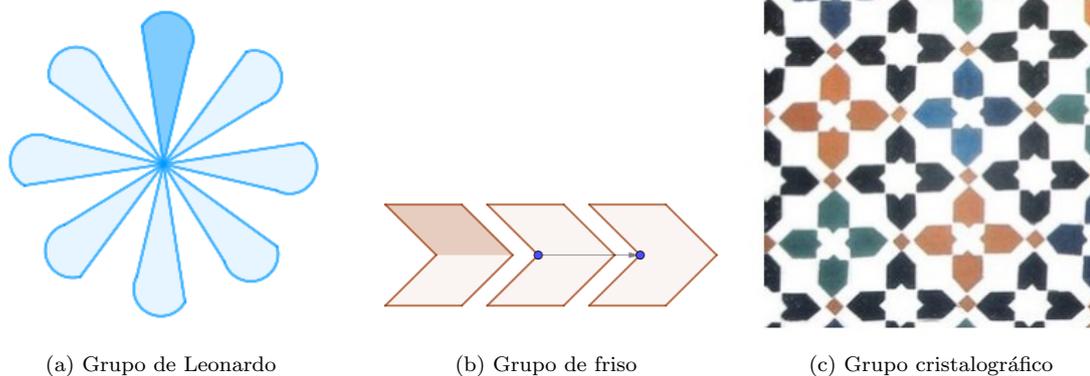
Parece que los griegos fueron los primeros en tomar conciencia de este gusto innato en el hombre por la simetría. De hecho, etimológicamente la palabra *simetría* procede del latín y a su vez del griego y significa *con medida*. Y es que para los griegos la belleza estaba en la regularidad y el orden, en el cuidado de la medida. Por otra parte, los artistas musulmanes tenían prohibido representar figuras humanas o animales para decorar sus templos. Este hecho, lejos de suponer un obstáculo, dio rienda suelta a su creatividad y su estudio de las simetrías hasta el punto de utilizar los 17 grupos cristalográficos. Hay muestras para cada uno de los 17 en la Alhambra de Granada.

Retornando a la descripción matemática de las simetrías ocurre que si se componen dos simetrías α y β de la figura F el resultado $\alpha\beta$ es una nueva simetría de F , pues $\alpha\beta(F) = \alpha(\beta(F)) = \alpha(F) = F$ por la condición de ser ambas simetrías. El inverso α^{-1} de α es también una simetría dado que $\alpha^{-1}(F) = \alpha^{-1}(\alpha(F)) = F$. **Las simetrías para una figura** forman por lo tanto **un grupo con la composición** de funciones. El grupo de simetrías para una determinada figura F se denota por G_F . Toda figura simétrica (cualquiera que tenga una simetría a parte de la identidad) se puede obtener a partir de una figura primitiva K llamada



Figura 12: Bolas de piedra talladas - Escocia 2500 a.C [8]

motivo aplicando sobre esta las traslaciones, rotaciones y simetrías del grupo G_F . Estos grupos se llaman **grupos ornamentales** y se dividen en tres categorías en función de las traslaciones que contengan. Si solo contienen la identidad como traslación se llaman **grupos de Leonardo** o **rosetones**; si además de la identidad contienen traslaciones en una dirección se llaman **grupos de friso**; y si contienen traslaciones en dos direcciones distintas se llaman **grupos cristalográficos** o **mosaicos**. Nótese que el grupo de friso representado en la figura 13b se extendería en la dirección marcada por el vector infinitamente en los dos sentidos. En la figura 13c el mosaico se extendería por todo el plano a través de dos direcciones. A continuación se describirán con más detalle cada uno de los tres grupos ornamentales.



(a) Grupo de Leonardo

(b) Grupo de friso

(c) Grupo cristalográfico

Figura 13: Grupos ornamentales

Grupos de Leonardo

Reciben este nombre en honor a Leonardo Da Vinci (1452-1519), quien determinó todas las posibles simetrías de un edificio y estudió como añadir capillas y nichos sin romper la simetría del conjunto. Si bien, los propósitos de Leonardo eran prácticos o estéticos, por lo que no empleaba el lenguaje matemático que se usará aquí para hablar de estos grupos. Existen infinitos grupos de Leonardo pero todos ellos son o bien un grupo dihedral \mathcal{D}_n o bien un grupo cíclico \mathcal{C}_n para algún $n \in \mathbb{N}$. Este resultado que se probará en este apartado recibe precisamente el nombre de **teorema de Leonardo**.

En primer lugar sea un n -ágono regular y supóngase que se desean estudiar todas las simetrías del mismo. En la figura 14 se ha tomado el pentágono para visualizar este proceso. Si se sitúa centrado en el origen de coordenadas y con uno de sus vértices sobre el eje de abscisas dos simetrías que se ven a primera vista son el giro $\rho = \rho_{O, \Theta}$, con $\Theta = \frac{360}{n}$, y la simetría respecto al propio eje de abscisas, que se denotará por $\sigma = \sigma_H$. La identidad $\iota = \rho^4 = \sigma^2$ forma parte trivialmente del grupo de simetrías de cualquier figura. Por composición de las simetrías previas $\rho^2, \rho^3, \dots, \rho^{n-1}, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma$ son también simetrías del n -ágono, y

además son distintas entre sí (basta pensar en cómo mueve cada una de ellas los vértices). Por lo tanto, hay al menos $2n$ simetrías. Pero como mucho también hay $2n$. Para que un movimiento sea una simetría del n -ágono ha de conservar el conjunto de vértices. Así, si se fija la atención en los vértices adyacentes V_1 y V_2 , para la imagen de V_1 por la simetría hay n posibilidades y, dado que se ha de mantener la distancia entre ellos, para cada uno de estas n elecciones de la imagen de V_1 hay dos posibilidades para la elección de la imagen de V_2 . En total hay $2n$ posibilidades, no más, y por lo anterior se cumplen todas ellas. El grupo de simetrías correspondiente al n -ágono regular \mathcal{D}_n se llama **grupo dihedral** de orden n y tiene exactamente $2n$ elementos.

Definición 5. Se denomina grupo dihedral de orden n y se denota por \mathcal{D}_n al grupo de simetrías del polígono regular de n lados.

Sería preciso añadir además dos grupos dihedrales que se están excluyendo en esta definición. \mathcal{D}_2 es el grupo de simetrías del rectángulo, y está generado por un giro de 180° y una simetría. \mathcal{D}_1 es el grupo de simetrías de un triángulo isósceles, y está generado por una simetría. \mathcal{D}_2 y \mathcal{D}_1 tienen respectivamente 4 y 2 elementos.

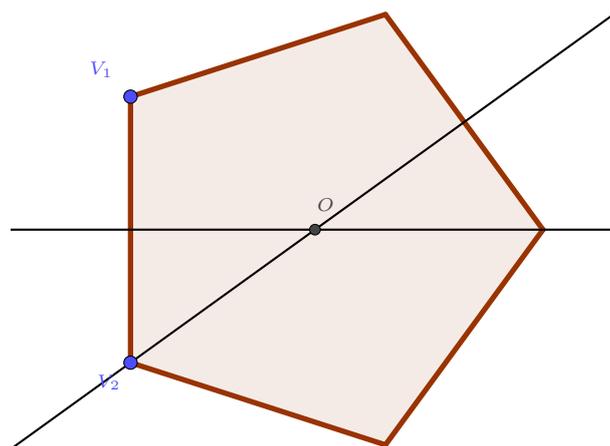


Figura 14: Grupo dihedral \mathcal{D}_5

En teoría de grupos, cuando se trabaja con grupos finitos (como son los dihedrales) se utilizan las tablas de Cayley para representar todas las posibles composiciones de dos elementos cualesquiera del grupo. Permiten ver de un vistazo, por ejemplo, si el grupo es abeliano, pero lo más importante es que permiten reconocer el grupo. Si dos grupos finitos con idéntico número de elementos comparten la misma tabla de Cayley se puede establecer entre ellos un isomorfismo de grupos, es decir, una aplicación biyectiva de un grupo a otro que respeta la operación del grupo. Si el producto (entendido aquí como cualquier operación) del primer grupo de dos g_1 y g_2 da como resultado un tercer elemento g_3 , entonces el producto del segundo grupo de la imagen de g_1 y la imagen de g_2 da como resultado la imagen de g_3 . Esto quiere decir que tienen la misma estructura como grupos. Aunque tanto sus elementos como la operación entre ellos se denoten de manera distinta actúan de la misma forma. Por ejemplo, ya se ha visto que el grupo de matrices invertibles con el producto de matrices y el grupo de transformaciones afines con la composición son isomorfos como grupos, si bien, en este caso, se está hablando de dos grupos de orden infinito. La tabla de Cayley para el grupo dihedral del pentágono sería la representada en la tabla 5.

	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	ρ^4	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^4\sigma$
ι	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	ρ^4	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^4\sigma$
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ι	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^4\sigma$	σ
ρ^2	ρ^2	ρ^3	ρ^4	ι	ρ	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^4\sigma$	σ	$\rho\sigma$
ρ^3	ρ^3	ρ^4	ι	ρ	ρ^2	$\rho^3\sigma$	$\rho^4\sigma$	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
ρ^4	ρ^4	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	$\rho^4\sigma$	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$
σ	σ	$\rho^4\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	ι	ρ^4	ρ^3	ρ^2	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^4\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	ρ	ι	ρ^4	ρ^3	ρ^2
$\rho^2\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^4\sigma$	$\rho^3\sigma$	ρ^2	ρ	ι	ρ^4	ρ^3
$\rho^3\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^4\sigma$	ρ^3	ρ^2	ρ	ι	ρ^4
$\rho^4\sigma$	$\rho^4\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ^4	ρ^3	ρ^2	ρ	ι

Tabla 5: Tabla de Cayley del grupo \mathcal{D}_5

En el caso del pentágono σ_H no es la única simetría axial del grupo \mathcal{D}_5 . En la figura 14 se ha añadido otro eje de simetría (cualquier recta que vaya desde un vértice al punto medio del lado opuesto es un eje de simetría del pentágono), que por lo tanto ha de corresponder a uno de los 10 elementos de \mathcal{D}_5 . Si se observa como actúa esta simetría sobre V_1 y V_2 se llega a la conclusión de que es el mismo movimiento que $\sigma\rho$, que a su vez es igual a $\rho^4\sigma$, uno de los diez elementos con los que se ha construido la tabla de Cayley.

Se podría haber considerado solo el caso de las simetrías del n -ágono que se corresponden con un giro. Estas formarían a su vez un grupo, subgrupo de \mathcal{D}_n puesto que la composición de giros centrados en un mismo punto, así como el inverso, son un nuevo giro centrado en dicho punto. Este grupo, llamado grupo cíclico, estaría compuesto por n elementos, la mitad que los de \mathcal{D}_n .

Definición 6. El subgrupo de las simetrías de un polígono regular de n lados formado solo por los giros se denomina grupo cíclico de orden n y se denota por \mathcal{C}_n .

Los grupos cíclicos \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_1 se corresponden respectivamente a los subgrupos de giros de \mathcal{D}_2 y \mathcal{D}_1 .

El grupo cíclico \mathcal{C}_n no solo representa el subgrupo de giros de \mathcal{D}_n , también representa el grupo de simetrías de un polígono (de infinitos polígonos en realidad). Basta realizar para cada n una construcción análoga a la hecha en la figura 15 en el caso del hexágono.

Esto prueba que cada grupo \mathcal{D}_n y \mathcal{C}_n es el grupo de simetrías de un polígono. Pero es que además,

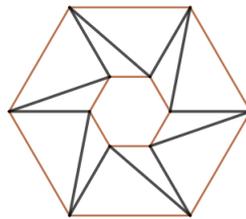


Figura 15: Grupo cíclico \mathcal{C}_6

recíprocamente, cada polígono tiene como grupo de simetrías un grupo \mathcal{D}_n o \mathcal{C}_n . Sea G un grupo finito de movimientos, G no puede contener una traslación distinta de la identidad o una simetría con deslizamiento, pues sino no sería finito. Así pues, G solo contiene giros y simetrías. Se considera primero el caso en el que G solo está compuesto por giros. Si el único giro es la propia identidad entonces $G = \mathcal{C}_1$. En otro caso,

sean dos rotaciones de G distintas de la identidad y de distinto centro $\rho_{A,\Theta}$ y $\rho_{B,\Phi}$. G contiene entonces al movimiento $\rho_{B,\Phi}^{-1}\rho_{A,\Theta}^{-1}\rho_{B,\Phi}\rho_{A,\Theta}$, pero por el teorema de la suma de ángulos, mencionado en la subsección anterior, se puede probar que este movimiento es una traslación, lo cual quiere decir que G solo contiene giros centrados en el mismo punto. Si A es el único centro de giro y $\rho_{A,\Theta} \in G$ también $\rho_{A,\Theta}^{-1} \in G$. Supóngase que Θ es el ángulo de giro mínimo en G (alguno tiene que ser mínimo sino el grupo sería infinito) y sea $\Psi > \Theta$. $\Psi - k\Theta$ no puede ser positivo y menor que Θ para ningún natural k , entonces ha de ser $\Psi = k\Theta$ para alguno de ellos y $\rho_{A,\Psi} = \rho_{A,\Theta}^k$. En conclusión G es un grupo cíclico, pues está generado únicamente por un giro.

Considérese que G contiene al menos una simetría σ . El subgrupo formado por los movimientos pares es finito de acuerdo con lo anterior (podría ser que el único movimiento par fuera ι , en cuyo caso este subgrupo sería \mathcal{C}_1). Así, si este subgrupo es \mathcal{C}_n se tienen exactamente n giros en el grupo G : $\rho, \rho^2, \dots, \rho^n$. Si G tiene m simetrías, como $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma$ están en G , entonces $n \leq m$. Sin embargo si se multiplica por σ a cada una de las m simetrías se obtienen m movimientos pares distintos, por lo que $m \leq n$, es decir, $n = m$ y G está generado únicamente por ρ y σ por lo que es el grupo dihedral \mathcal{D}_n .

Teorema 3. Teorema de Leonardo. Un grupo finito de movimientos es o bien un grupo cíclico \mathcal{C}_n , o bien un grupo dihedral \mathcal{D}_n .

Para llegar a la definición de grupo dihedral se advirtió que un polígono con n vértices tiene como mucho $2n$ simetrías, es decir, el grupo de simetrías de cualquier polígono es finito y, por lo tanto, es \mathcal{C}_n o \mathcal{D}_n para algún n .

Corolario 3. El grupo de simetrías de un polígono es o bien un grupo cíclico \mathcal{C}_n , o bien un grupo dihedral \mathcal{D}_n .

Grupos de friso

En definitiva, un grupo de friso es un grupo de movimientos que dejan fija una recta y cuyas traslaciones forman un grupo cíclico finito.

Definición 7. Sea r una recta del plano y sea \mathcal{F} un subgrupo de movimientos del plano. Se dice que \mathcal{F} es un grupo de friso para r si:

1. $\forall \alpha \in \mathcal{F}, \alpha(r) = r$
2. $\exists \tau \in \mathcal{F} - \{\iota\}$ tal que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \{\alpha \in \mathcal{F} / \alpha \text{ es una traslación}\} = \{\tau^n / n \in \mathbb{Z}\}$

El hecho de admitir traslaciones en una única dirección limita el tipo de movimientos incluidos en el grupo. De los giros solo los medios giros con centro en la la recta centro del friso dejan fija la misma; de las simetrías solo se podrán considerar aquellas cuyo eje es la propia recta centro del friso o perpendicular a la misma; y, de las simetrías con deslizamiento, aquellas cuyo eje es también la recta centro. Por otro lado, recuperando el concepto de conjugado de un movimiento, de la subsección anterior, si los movimientos α y σ_C pertenecen a un grupo G de movimientos, entonces $\sigma_{\alpha(C)}$ también pertenece a G porque $\alpha\sigma_C\alpha^{-1}$ está en G . Análogamente, si los movimientos α y σ_r pertenecen a G entonces $\sigma_{\alpha(r)}$ pertenece a G porque $\alpha\sigma_r\alpha^{-1}$ está en G . Como las simetrías de una figura forman un grupo se deduce lo siguiente:

Teorema 4. Si C es un punto de simetría de la figura F y α es una simetría de F , entonces $\alpha(C)$ es un punto de simetría para F . Si r es un eje de simetría para la figura F y α es una simetría de F , entonces $\alpha(r)$ es un eje de simetría para F .

También de la noción de conjugado y de lo expresado en el párrafo anterior se deduce que si \mathcal{F} es un grupo de friso para una recta r y α es un movimiento tal que $\alpha(r) = r'$ entonces $\alpha\mathcal{F}\alpha^{-1}$ es un grupo de friso para la recta r' . Es decir, que un grupo de friso para una recta se puede trasladar fácilmente a otra recta.

Al contener traslaciones el número de elementos de los grupos de friso es infinito, a diferencia de los grupo de Leonardo; y, a diferencia de estos también, el número de grupos de friso distintos que se pueden formar fijada la recta centro no es infinito, de hecho, es exactamente siete. Para probar esto basta empezar por el grupo finito más sencillo, \mathcal{F}_1 , generado por la traslación mínima (la que genera el grupo cíclico de traslaciones) que por lo tanto coincide con el grupo cíclico de las traslaciones. A partir de ahí se amplía el conjunto generador con aquellos medios giros, simetrías de ejes la recta centro o perpendiculares a ella y simetrías con deslizamiento de eje la recta centro que sea posible añadir sin alterar el conjunto de traslaciones del friso incluyendo alguna no generada por la traslación mínima. Se llevará a cabo este proceso para describir cada uno de los siete grupos de friso y se construirá cada uno de ellos con un motivo idéntico para visualizar cómo son estos grupos.

Para ello se elegirá un punto A en la recta centro del friso de la siguiente manera: si \mathcal{F} contiene medios giros A será uno de sus centros; si no es así pero contiene simetrías de eje perpendicular a la recta centro se elegirá A en la intersección de alguno de esos ejes con la recta centro; si tampoco contiene simetrías de este tipo A será un punto cualquiera. Además se tomará $A_i = \tau^i(A)$, donde τ es la traslación mínima. Así, $\tau^n(A_i) = \tau^{n+i}(A)$ y cualquier traslación de \mathcal{F} lleva cada uno de los A_i en otro A_j con $j \neq i$. M denotará el punto medio de $A = A_0$ y A_1 , y $M_i = \tau^i(M)$, el de A_i y A_{i+1} . τ denotará a partir de ahora a la traslación mínima del grupo de friso.

- $\mathcal{F}_1 = \langle \tau \rangle$ es el grupo de friso más sencillo. Solo contiene las traslaciones generadas por τ . No hay puntos ni ejes de simetría.

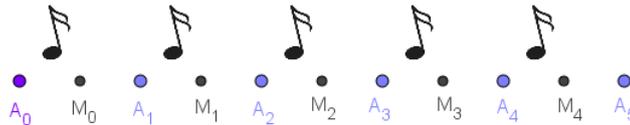


Figura 16: Grupo de friso \mathcal{F}_1

Si se incluye el medio giro σ_A en el grupo de friso, como $\sigma_M = \tau\sigma_A$, también σ_M está en el grupo y por el teorema 4 todos los medios giros de centro cualquier A_i y cualquier M_i pertenecen al grupo de friso. Además no puede haber medios giros centrados en otros puntos pues $\sigma_P\sigma_A$ es una traslación que lleva A al otro extremo del segmento \overline{AQ} del que P es el punto medio, por lo tanto, P ha de ser uno de los A_i o uno de los M_i .

- $\mathcal{F}_2 = \langle \tau, \sigma_A \rangle$ es el grupo de friso formado por las traslaciones y por medios giros con centro en cada A_i y cada M_i . Los puntos de simetría de \mathcal{F}_2 son todos los A_i y M_i , pero no contiene ejes de simetría. Dado que $\sigma_M\tau = \sigma_A$ también $\mathcal{F}_2 = \langle \sigma_A, \sigma_M \rangle$.

\mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 son los dos grupos de friso que contienen solo movimientos pares. El resto de grupos contendrán también movimientos impares. Se denotará por c a la recta centro del grupo de friso.

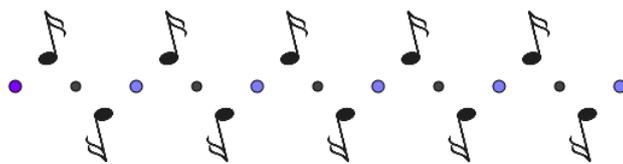


Figura 17: Grupo de friso \mathcal{F}_2

- $\mathcal{F}_1^1 = \langle \tau, \sigma_c \rangle$ es el grupo formado por el grupo cíclico de las traslaciones y la simetría con eje la recta centro. Contiene por lo tanto un eje de simetría en c y no contiene puntos de simetría.



Figura 18: Grupo de friso \mathcal{F}_1^1

- $\mathcal{F}_2^1 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_c \rangle$ es el grupo formado por el grupo cíclico de las traslaciones, la simetría con eje la recta centro y los medios giros. Sus puntos de simetría son todos los A_i y M_i y su única recta de simetría es c .

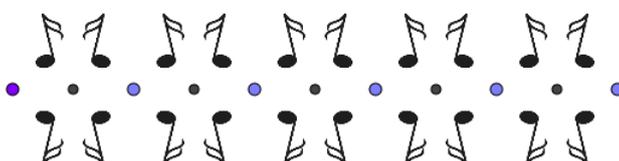


Figura 19: Grupo de friso \mathcal{F}_2^1

Si a \mathcal{F}_1 no se le añaden medios giros ni la simetría de eje la recta centro pero se le añade una simetría de eje la perpendicular a c ocurre algo similar a lo que sucedía con los medios giros. Si llamamos a a la recta perpendicular a c en A (recuérdese que cuando no hay medios giros en el grupo de friso, si hay simetrías como las anteriores, se toma A en la intersección de una de estas perpendiculares con c) entonces σ_a es una simetría del grupo de friso $\tau\sigma_a$ es la simetría de eje perpendicular a c en M por lo que σ_m está en el grupo y, por el teorema 4, todas las simetrías de eje perpendicular a c en cualquier A_i y M_i pertenecen al grupo de friso. Sin embargo, no hay más simetrías de eje perpendicular a c pues $\sigma_a\sigma_b$ es la traslación de vector $\overleftrightarrow{2AB}$ (siendo B el corte de b con c) por lo que ha de ser B igual a algún A_i o M_i .

- $\mathcal{F}_1^2 = \langle \tau, \sigma_a \rangle$ es el grupo formado por el grupo cíclico de las traslaciones y las simetrías de ejes perpendiculares a c . Sus ejes de simetría son todas las perpendiculares a c en los A_i y M_i y no tiene puntos de simetría.



Figura 20: Grupo de friso \mathcal{F}_1^2

El siguiente grupo surge de incluir en el grupo de friso medios giros y simetrías de ejes perpendiculares a c . Si estos ejes cortaran a c en los centros de los medios giros se obtendría de nuevo el grupo \mathcal{F}_2^1 . Es posible, sin embargo, considerar σ_l donde l es perpendicular a c en el punto medio de A y M . No se podrían considerar otras simetrías de ejes perpendiculares pues por el teorema 4 con $\alpha = \sigma_l$ se obtiene que $\sigma_a(A)$ es punto de simetría y ya se ha visto que no pueden estar en el grupo medios giros centrados en otros puntos. Además, se puede comprobar que no se pueden incluir σ_a y σ_l a la vez, pues se tendrían traslaciones más pequeñas a la mínima, y, como $\sigma_l \sigma_a = \sigma_l \sigma_c \sigma_a$, tampoco se pueden incluir a la vez σ_c y σ_l . De todas estas consideraciones surge el grupo $\mathcal{F}_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_l \rangle$, y dado que $\sigma_l \sigma_A$ es una simetría con deslizamiento de eje c , que se denotará por γ , y que $\tau = \gamma^2$ y $\sigma_l = \gamma \sigma_A$, entonces también $\mathcal{F}_2^2 = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$.

- $\mathcal{F}_2^2 = \langle \tau, \sigma_A, \sigma_l \rangle = \langle \gamma, \sigma_A \rangle$ es el grupo formado por el grupo cíclico de las traslaciones, los medios giros, las simetrías con ejes perpendiculares a c en los puntos medios de los segmentos $\overline{A_i M_i}$ y la simetría con deslizamiento de eje c . Tiene como puntos de simetría todos los A_i y M_i y como ejes de simetría las rectas perpendiculares a c en los puntos medios de cada segmento $\overline{A_i M_i}$.

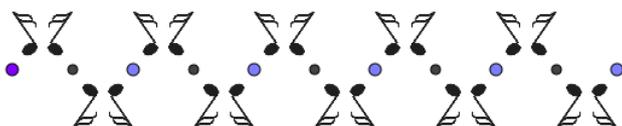


Figura 21: Grupo de friso \mathcal{F}_2^2

Se han agotado las posibilidades de grupos en los que no hay simetrías con deslizamiento. Aquellos en los que sí hay, a parte del ya analizado, se reducen a un último grupo que, de hecho, solo contiene el grupo cíclico de traslaciones y la simetrías con deslizamiento de eje c y vector de traslación \overrightarrow{AM} .

- $\mathcal{F}_1^3 = \langle \gamma \rangle$ es el grupo de friso formado por el grupo cíclico de traslaciones y la simetría con deslizamiento de eje c y vector de traslación \overrightarrow{AM} . No tiene ni puntos ni ejes de simetría.



Figura 22: Grupo de friso \mathcal{F}_1^3

En las figuras con las que se ha ilustrado cada grupo de friso se ha partido de un motivo al que se le han aplicado los movimientos del grupo para generar el friso completo (o al menos la parte de él visible en una

hoja de papel). Recíprocamente si se trata de descifrar que grupo de friso corresponde a una figura concreta basta responder a tres o cuatro preguntas según el siguiente esquema:

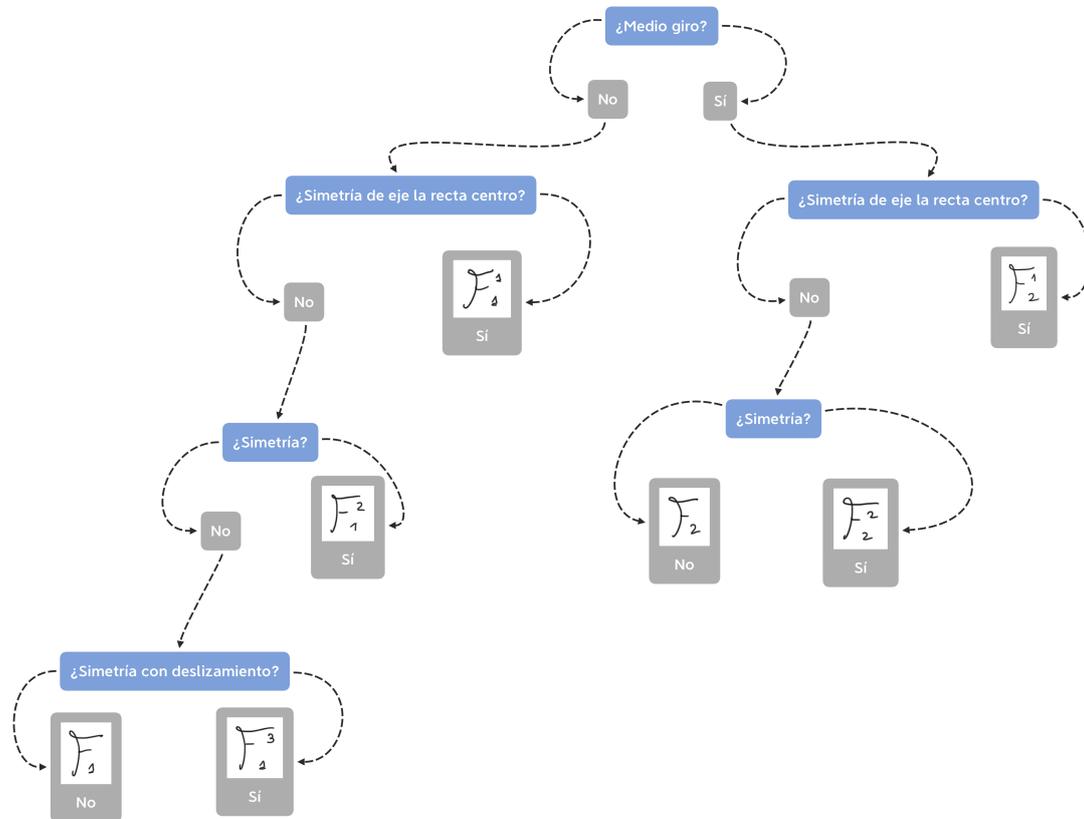


Figura 23: Esquema de clasificación de los grupos de friso

Grupos cristalográficos

Los grupos cristalográficos, conocidos comúnmente como grupos de mosaico, incluyen dos traslaciones de direcciones distintas que generan el subgrupo de traslaciones. Esto hace que el mosaico tessele el plano y enriquece el tipo de movimientos que se pueden considerar. Al igual que los frisos, al incorporar traslaciones, son grupos de orden infinito, sin embargo también hay un número limitado de grupos cristalográficos, en concreto 17. Este resultado fue demostrado en 1891 por Fedorov, quien estudiaba las formas de cristalizar los cristales naturales (de ahí el nombre de estos grupos). Es curioso entonces que los artistas musulmanes que decoraban templos y otras construcciones fueran capaz de representar los 17 grupos sin conocer este resultado. La Alhambra de Granada es el único edificio en el que se pueden observar los 17 grupos cristalográficos. El proceso para llegar al teorema de Fedorov es similar al seguido para obtener los 7 grupos de friso. Apoyándose en unos resultados previos uno puede partir del grupo más sencillo (\mathcal{W}_1 o $p1$, según la notación) e ir ampliando el grupo de movimientos hasta agotar las posibilidades. Este marco teórico se va a limitar a enumerar las definiciones y resultados previos, describir cada grupo de mosaico acompañado de su representación correspondiente (generada con Geogebra a partir de motivos iniciales muy similares) y ofrecer un esquema para distinguir el grupo cristalográfico que se esconde en una representación de un mosaico.

Definición 8. Un grupo cristalográfico \mathcal{W} es un subgrupo de movimientos del plano tal que

$$\exists \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \text{ tales que } \mathcal{T}_{\mathcal{W}} = \{\alpha \in \mathcal{W} / \alpha \text{ es una traslación}\} = \langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle,$$

donde si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{A,B}$ y $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{A,C}$ entonces A, B, C no están alineados.

Sea A un punto cualquiera y sea $A_{i,j} = \mathcal{T}^i \mathcal{T}^j$, el conjunto de los $A_{i,j}$, siendo $A = A_{0,0}$, forma la **mall**a de **traslación** de \mathcal{W} determinada por el punto A . Una cuaterna dada por $A_{i,j}, A_{i,j+1}, A_{i+1,j}, A_{i+1,j+1}$ es una **celda primitiva** de \mathcal{W} con respecto al punto A . Aplicando las traslaciones del grupo \mathcal{W} al paralelogramo determinado por los puntos de una celda se obtiene el mosaico completo. Los primeros resultados que se dan antes de describir los grupos de mosaico relacionan estos conceptos con los movimientos impares que pueden aparecer en \mathcal{W} .

- Cuando el grupo cristalográfico \mathcal{W} incluye algún movimiento impar la celda primitiva es rómbica o rectangular (o cuadrada). Además si una simetría con deslizamiento deja fija la mall
a de traslación de \mathcal{W} , entonces \mathcal{W} contiene una simetría.

Un punto P es un **n -centro de un grupo G** si las rotaciones con centro P forman un subgrupo cíclico finito C_n . En particular un punto P es un **n -centro de una figura F** si es un n -centro del grupo de simetrías de F . El estudio de los n -centros es fundamental para la clasificación de los grupos cristalográficos. En primer lugar se puede extrapolar y ampliar el teorema 4 utilizado para la clasificación de frisos (un 2-centro es en particular un centro de simetría).

Teorema 4* Si C es un n -centro de la figura F y α es una simetría de F , entonces $\alpha(C)$ es un n -centro para F . Si r es un eje de simetría para la figura F y α es una simetría de F , entonces $\alpha(r)$ es un eje de simetría para F .

Además, a raíz de este se enuncian otros resultados relativos a los n -centros de un grupo cristalográfico.

- Si $\rho_P, \frac{360}{n}$ y $\rho_Q, \frac{360}{n}$ con $P \neq Q$ y $n > 1$ están en el grupo de mosaico \mathcal{W} , entonces $2PQ$ es mayor o igual que la longitud de la traslación más corta de \mathcal{W} distinta de ι . Es decir, dos n -centros distintos no pueden estar ‘demasiado próximos’ entre sí.
- **Restricción cristalográfica:** Si P es un n -centro del grupo cristalográfico \mathcal{W} , entonces n es 2, 3, 4, o 6.
- Si en un grupo cristalográfico hay un 4-centro, entonces el grupo no contiene 3-centros ni 6-centros.

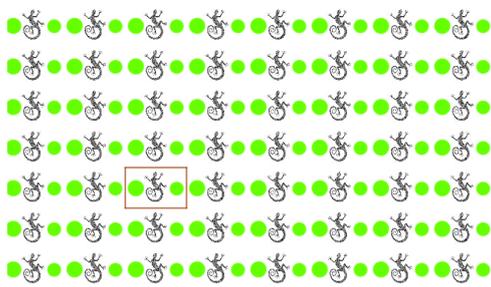
Con estos resultados se puede probar la existencia de los 17 grupos cristalográficos de nuevo mediante un proceso constructivo agotando las posibilidades. Existen diversas nomenclaturas para designar cada grupo cristalográfico. La que usa la letra W fue introducida por el matemático húngaro Fejes Tóth, al igual que la que se ha usado en los grupos de friso con la letra \mathcal{F} . Se continuará usando su notación en este marco teórico aunque también se acompañará de la nomenclatura internacional abreviada, pues su uso está más extendido.

- **Grupo cristalográfico p1 (W_1).** $W_1 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}} \rangle$, con $\vec{u} = \overrightarrow{AA_{1,0}}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AA_{0,1}}$, es el grupo más sencillo. No tiene ningún n -centro, simetría o simetría con deslizamiento. Su celda primitiva es un paralelogramo cualquiera. Se distinguirá en las figuras la celda de cada grupo cristalográfico, como en 24a.
- **Grupo cristalográfico pm (W_1^2).** $W_1^2 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías de ejes en una misma dirección, paralelos a uno de los vectores de traslación y perpendiculares al otro.

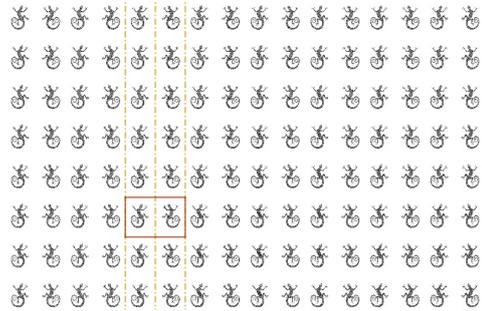
No tiene ningún n -centro. Su celda primitiva es un rectángulo. En la figura 24b se han señalado los ejes de simetría que cortan a la celda en amarillo, se hará lo propio para el resto de grupos.

- **Grupo cristalográfico pg (\mathcal{W}_1^3).** $\mathcal{W}_1^3 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \gamma \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías con deslizamiento de ejes en una dirección, paralelos a uno de los vectores de traslación y perpendiculares al otro. No tiene ningún n -centro. Su celda primitiva es un rectángulo. Se distingue en la figura 24c que los ejes de las simetrías con deslizamiento en azul, se hará lo propio para el resto de grupos.
- **Grupo cristalográfico cm (\mathcal{W}_1^1).** $\mathcal{W}_1^1 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías y simetrías con deslizamiento de ejes paralelos a la diagonal de la celda rómbica. No presenta ningún n -centro.
- **Grupo cristalográfico p2 (\mathcal{W}_2).** $\mathcal{W}_2 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \rho_{180^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, 2-centros o medios giros. La celda primitiva es un paralelogramo. En la figura 24e se han marcado los centro de giro (2-centros en este caso) de la celda primitiva. Se seguirá esta pauta en los siguientes grupos cuando existan giros de algún orden. No hay ejes de simetría ni simetrías con deslizamiento.
- **Grupo cristalográfico pgg (\mathcal{W}_2^4).** $\mathcal{W}_2^4 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \gamma, \rho_{180^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías con deslizamiento y 2-centros o medios giros. La celda primitiva es un rectángulo. Los ejes de las simetrías con deslizamiento tienen dos direcciones, unos son paralelos a un lado del rectángulo y los otros al otro, por lo tanto son perpendiculares entre sí.
- **Grupo cristalográfico pmg (\mathcal{W}_2^3).** $\mathcal{W}_2^3 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma, \rho_{180^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías, simetrías con deslizamiento y 2-centros o medios giros. La celda primitiva es un rectángulo. Los ejes de simetría van en la misma dirección y son paralelos a un lado del rectángulo. Los ejes de las simetrías con desplazamiento van también en una dirección y son paralelos a las anteriores.
- **Grupo cristalográfico pmm (\mathcal{W}_2^2).** $\mathcal{W}_2^2 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma, \rho_{180^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías y 2-centros o medios giros. La celda primitiva es un rectángulo. Los ejes de simetría van ahora en dos direcciones, paralelas a cada uno de los lados no congruentes del rectángulo respectivamente y, por lo tanto perpendiculares entre sí.
- **Grupo cristalográfico cmm (\mathcal{W}_2^1).** $\mathcal{W}_2^1 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma, \rho_{180^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías, simetrías con desplazamiento y 2-centros o medios giros. La celda primitiva es un rectángulo. Hay ejes de simetría en dos direcciones perpendiculares entre sí y paralelas a cada uno de los lados no congruente del rectángulo respectivamente. Los ejes de las simetrías con desplazamiento son también perpendiculares entre sí y paralelos a cada uno de los lados no congruente del rectángulo respectivamente.
- **Grupo cristalográfico p3 (\mathcal{W}_3).** $\mathcal{W}_3 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \rho_{120^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, 3-centros. La celda primitiva es un paralelogramo. En la figura 25b se han marcado los centro de giro de la celda primitiva de forma triangular para distinguirlos del resto de n -centros cuando los haya. Se seguirá esta pauta en los siguientes grupos cuando existan giros de algún orden. No hay ejes de simetría ni simetrías con deslizamiento.
- **Grupo cristalográfico p3m1 (\mathcal{W}_3^1).** $\mathcal{W}_3^1 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma, \rho_{120^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías, simetrías con deslizamiento y 3-centros. La celda primitiva es un rombo. Los ejes de simetría forman ángulos de 60° entre sí al igual que los ejes de las simetrías con deslizamiento, como se ve en la figura 25c.
- **Grupo cristalográfico p31m (\mathcal{W}_3^2).** $\mathcal{W}_3^2 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma, \rho_{120^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías, simetrías con deslizamiento y 3-centros. La celda primitiva es un rombo. Los ejes de simetría forman ángulos de 60° entre sí al igual que los ejes de las simetrías con deslizamiento. La diferencia con el grupo anterior es la disposición de los ejes.
- **Grupo cristalográfico p4 (\mathcal{W}_4).** $\mathcal{W}_4 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \rho_{90^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, 4-centros. La celda primitiva es un paralelogramo. En la figura 25e se han marcado los centro de giro (4-centros en este caso) de la celda primitiva. Se marcarán con un cuadrado en el resto de grupos para no confundirlos con otros n -centros.

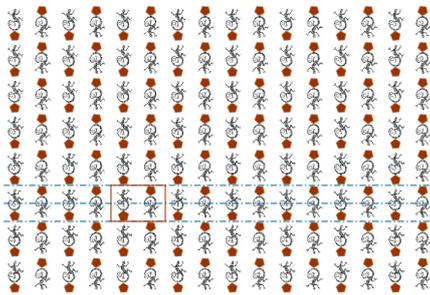
- **Grupo cristalográfico p4m (\mathcal{W}_4^1).** $\mathcal{W}_4^1 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma, \rho_{90^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías y 4-centros. La celda primitiva es un cuadrado. Los ejes de simetría forman ángulos de 45° entre sí.
- **Grupo cristalográfico p4g (\mathcal{W}_4^2).** $\mathcal{W}_4^2 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma, \rho_{90^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías, simetrías con deslizamiento, 2-centros o medios giros y 4-centros. La celda primitiva es un cuadrado. Los ejes de simetrías se dan en dos direcciones perpendiculares entre sí, lo mismo ocurre con los ejes de las simetrías con deslizamiento.
- **Grupo cristalográfico p6 (\mathcal{W}_6).** $\mathcal{W}_6 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \rho_{60^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, 6-centros. La celda primitiva es un paralelogramo. En la figura 25h se han marcado los centro de giro de la celda primitiva con un círculo hueco. Se seguirá esta pauta en los siguientes grupos cuando existan giros de algún orden. No hay ejes de simetrías ni simetrías con deslizamiento.
- **Grupo cristalográfico p6m (\mathcal{W}_6^1).** $\mathcal{W}_6^1 = \langle \mathcal{T}_{\vec{u}}, \mathcal{T}_{\vec{v}}, \sigma, \rho_{60^\circ} \rangle$ contiene, además de las traslaciones, simetrías, simetrías con deslizamiento, 2-centros o medios giros, 3-centros y 6-centros. La celda primitiva es un rombo. Los ejes de simetría forman ángulos de 30° entre sí, lo mismo ocurre con los ejes de las simetrías con deslizamiento.



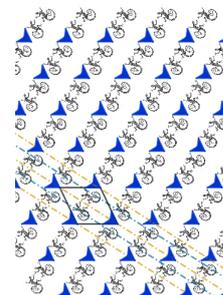
(a) p1



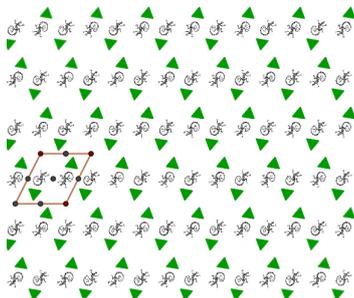
(b) pm



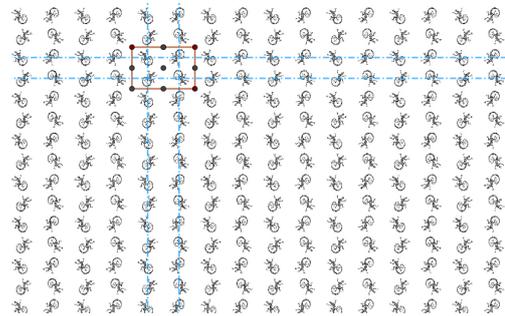
(c) pg



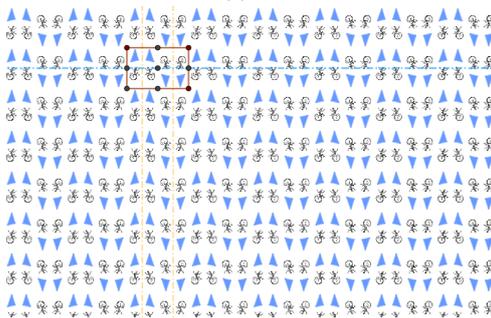
(d) cm



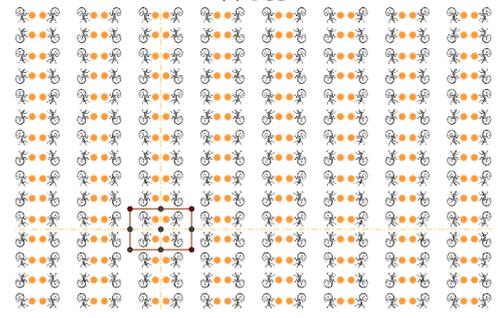
(e) p2



(f) pgg



(g) pmg



(h) pmm

Figura 24: Grupos cristalógraficos (1)

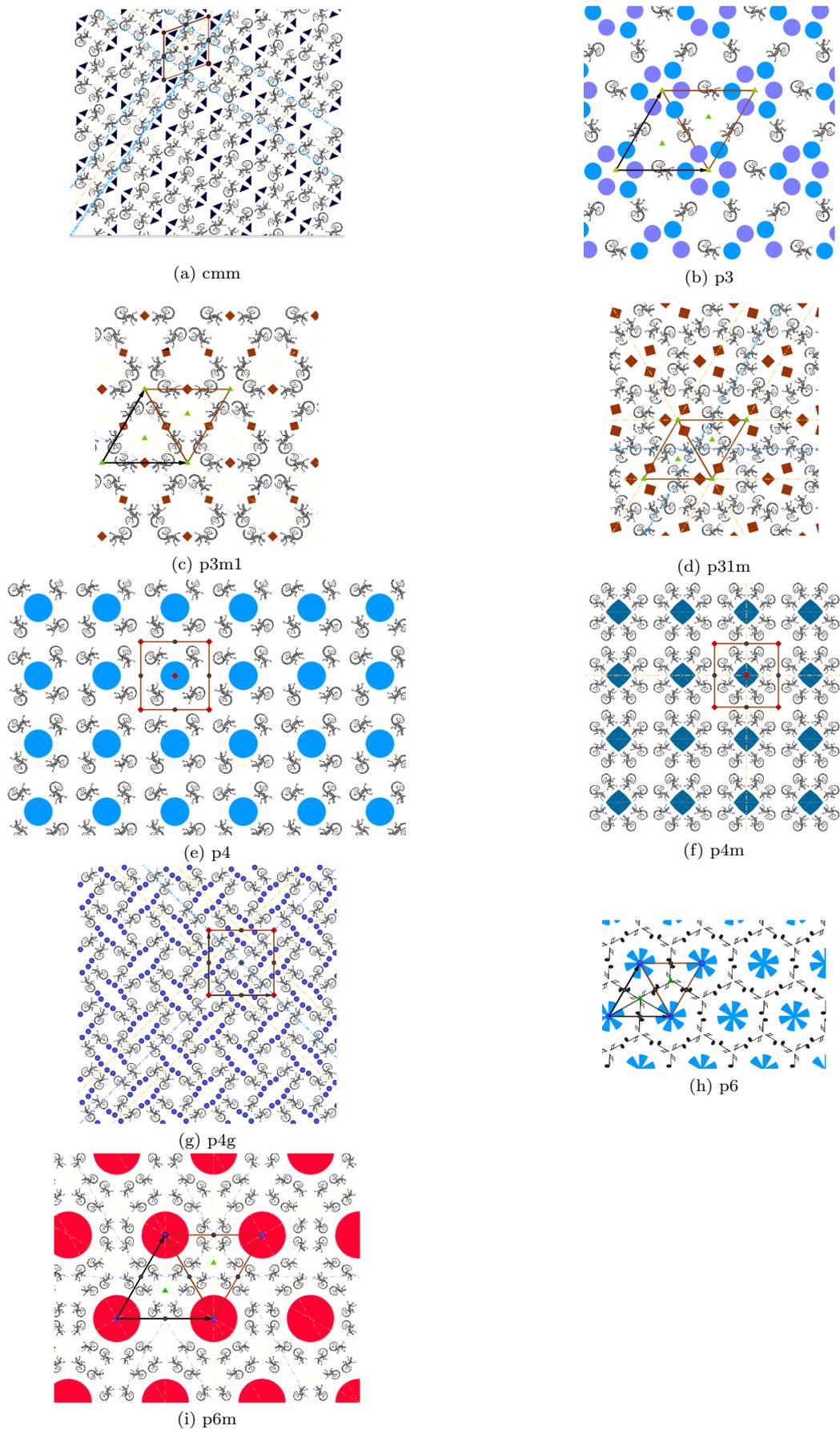


Figura 25: Grupos cristalógraficos (2)

Simetría en la Alhambra

Algoritmo de Reconocimiento de Grupos Cristalográficos Planos

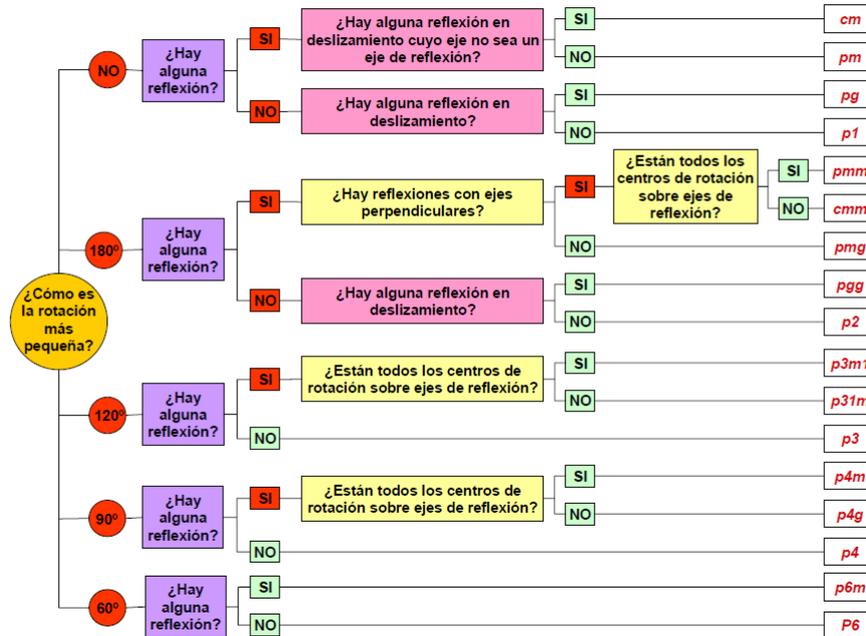


Figura 26: Clasificación de los grupos cristalográficos [29]

2.3 Marco tecnológico

El avance de la tecnología y la globalización han supuesto un crecimiento de la utilización y de la manipulación de imágenes hasta el punto de que cualquier persona no sería capaz de contar el número de imágenes a las que se expone a lo largo del día. Además prácticamente cualquiera lleva a cabo esta actividad con diferentes motivos de uso y con distintos grados de complejidad. A pesar de todo ello pocos se paran y se preguntan qué son las imágenes que manejan o cómo es posible que se capten esos instantes de realidad en un dispositivo electrónico. La representación de imágenes digitales está estrechamente relacionada con las matemáticas, al igual que el tratamiento de las mismas. Puesto que la propuesta didáctica que se está planteando va a dar una aplicación de las matrices a los filtros de fotografía es conveniente exponer qué se entiende por una imagen digital y qué relación tiene esta y los filtros que se le pueden aplicar con las matrices y las transformaciones en el plano. Dado que también se va a emplear un lenguaje de programación para este fin es necesario incluir algunas explicaciones sobre las características y funciones del mismo que se van a tener en cuenta. En concreto el lenguaje de programación que se utilizará es Python a través de su paquete *openCV*, diseñado para el procesamiento de imágenes.

2.3.1 Imágenes digitales

“Desde el punto de vista físico-matemático una imagen se define como una función bidimensional de intensidad de luz; cada punto del plano de la imagen tiene un valor de intensidad luminosa. La luz que emite o refleja un punto es una onda con un espectro, en función del cual se percibe el color”[19]. Para que el ojo humano perciba los colores de la imagen digital como colores “casi reales” en el cine, la fotografía, la televisión, las pantallas, etc se utiliza una combinación de tres colores básicos. Estos colores son rojo, verde y azul (RGB) para los dispositivos emisores y azul cian, magenta y amarillo (CMY) para la impresión. Las imágenes digitales se representan fundamentalmente de dos formas: imágenes en mapa de bits e imágenes vectoriales. Aunque se explicarán las dos la que se interesa en este caso pues es la que se empleará en la propuesta es la primera.

Las imágenes digitales en mapa de bits también conocidas como imagen raster o imagen de píxeles surgen de la discretización en coordenadas espaciales y en intensidad luminosa de la imagen analógica (real) correspondiente. El resultado es una gran matriz que representa una cuadrícula de *píxeles*. Cada píxel es un elemento con un valor discreto de luminosidad (color o tonalidad de gris). Están caracterizadas por su altura y anchura en píxeles y por su profundidad de color (bits por píxel). Si estos parámetros son los adecuados se consigue una representación que el ojo humano percibe como una fotografía “real”, donde el color se extiende de manera continua. En [21] se sitúa el origen de las imágenes en mapa de bits en Lester Hill, que propuso en 1929 un método matricial para cifrar un mensaje de texto y luego lo generalizó a otros objetos como las imágenes digitales.

Las imágenes digitales en mapa de bits pueden representarse en escala de grises. En este caso cada píxel contiene un solo canal de color, es decir, un número en binario de 0 a 255, donde el 0 se corresponde con la ausencia de color, el negro, y el 255 con la saturación de color, el blanco. Entre medias hay toda una serie de grises de más oscuro a más claro. Si se desea añadir color a la imagen usualmente se utilizan los tres canales correspondientes a RGB, por lo que la imagen se corresponde con la superposición de tres matrices en las que los píxeles tienen de nuevo valores de 0 a 255 que indican la intensidad de rojo, verde o azul.

Las imágenes digitales vectoriales están compuestas por elementos gráficos primarios como rectas, curvas, polígonos o círculos y no por puntos. Estos elementos se denominan *vectores* y están definidos por sus propiedades matemáticas en vez de por la alineación de píxeles. Para su presentación, es necesario utilizar programas que sinteticen una imagen en mapa de bits.

Las imágenes digitales en mapa de bits y vectoriales tienen distintos formatos y distintos usos. Las segundas son imágenes más simples pero permiten ampliar la imagen sin sufrir los problemas de escala que sí padecen las imágenes rasterizadas. Las primeras por su parte ofrecen una mejor representación de la realidad. Así, se usan en ilustraciones y fotografías digitales, mientras que los gráficos vectoriales son más idóneos para la creación de logos, los gráficos o los videojuegos.

2.3.2 Filtros de fotografía

Otra consecuencia de los avances tecnológicos, esta dentro del propio mundo de la fotografía, es la de la aparición de toda una serie de aplicaciones y programas para la creación de imágenes y la manipulación de las fotografías que se toman de la realidad. En cuanto a estas últimas, quizá anteriormente se invertían más tiempo y esfuerzos en tratar de capturar la fotografía perfecta y, sin embargo ahora, es muy habitual la aplicación de filtros que le otorgan a la imagen una mayor calidad o que de alguna manera le proporcionan un efecto deseado. Esta concepción amplia del término *filtro de fotografía* es la que se adoptará en este trabajo. En particular para la propuesta se buscará la aplicación de las transformaciones en el plano para la creación de un filtro de mosaico, es decir, un pequeño programa que a partir de una imagen original cree el mosaico correspondiente a uno de los grupos de mosaico estudiados en el marco teórico tomando como motivo.

2.3.3 Procesamiento de imágenes en Python

Python es un lenguaje de programación interpretado (no necesita compilar el código fuente para interpretarlo) que cuenta con una licencia de código abierta y que se caracteriza por su legibilidad y por su versatilidad, es decir, es un lenguaje de gran simpleza en su escritura y que puede emplearse en numerosas aplicaciones. Por ello se ha convertido en un lenguaje popular y ampliamente utilizado como lenguaje de iniciación.

Una de las numerosas librerías con las que cuenta Python es OpenCV-Python. OpenCV es una librería de licencia gratuita que ofrece una gran variedad de algoritmos sobre visión artificial y que admite distintos lenguajes, entre los que se encuentran C++, Python y Java.

La facilidad de uso de Python, su compatibilidad con OpenCV, y la posibilidad de usar ambos abiertamente son las tres razones que llevan a considerar este lenguaje de programación en la propuesta para dar una aplicación de las matrices a la creación de filtros de imágenes digitales. Se hará en este punto un breve análisis de los algoritmos y funciones proporcionados por la librería OpenCV que serán utilizados en la propuesta. Esta junto a Numpy, básica para operaciones vectoriales y matriciales, serán las dos únicas librerías necesarias.

La lectura de una imagen genera una matriz. Si la imagen está en escala de grises las entradas de la matriz son valores entre 0 y 255. El caso habitual es el de una imagen a color en el modo RGB. En este caso se genera una matriz cuyas entradas son vectores tridimensionales. Las tres coordenadas del vector toman valores entre 0 y 255 y simbolizan en este orden la intensidad de azul, la intensidad de verde y la intensidad de rojo. Existen otros muchos modos de color, los cuales también tienen una representación matricial similar. Para leer una imagen de nombre “image”, en formato png en este caso, y guardar la matriz generada en la variable “img” se escribe

```
In [1]: img = cv.imread('image.png')
```

Se pueden comprobar las dimensiones de la imagen.

```
In [2]: img.shape
Out[2]: (225, 225, 3)
```

En este caso “image” es una imagen de 225×225 píxeles. El modo de color se compone de tres colores primarios pues se trata de una imagen RGB. Es posible acceder al valor de cada píxel, por ejemplo, al que ocupa la posición (123,45). Este píxel tiene una composición (238,212,242) que se traduce en el color de [27a](#). También se puede acceder al valor de cada uno de los colores por separado y modificar el valor de un píxel manualmente. En la línea 7 de código se ha cambiado el color del píxel (123, 45) de [27a](#) a [27b](#).

```
In [3]: img[123,45]
Out[3]: array([238, 212, 242], dtype=uint8)
In [4]: azul = img[123,45,0]
In [5]: verde = img[123,45,1]
In [6]: rojo = img[123,45,2]
In [7]: img[123,45] = [34,60,200]
```

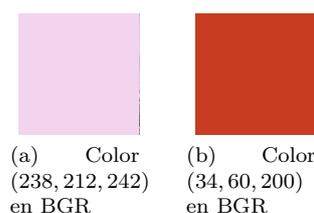


Figura 27: Colores RGB

Para acceder a la posición de un píxel y modificarla OpenCV incluye una función que optimiza el tiempo empleado. Por ejemplo, se accede al valor de rojo del píxel anterior y luego se modifica su valor al original.

```
In [9]: img.item(123,45,2)
Out [9]: 200
In [8]: img.itemset((123,45,2), 242)
```

Dos aspectos muy a tener en cuenta son primero que Python numera las posiciones de un vector o matriz empezando por la posición 0; y, en segundo lugar, la referencia que toma Python para ubicar un píxel en una imagen es la dada en la figura 28. El origen se sitúa en el píxel superior izquierda; el eje de abscisas crece positivamente hacia la derecha tomando los valores discretos desde 0 hasta $\text{img.shape}[1] - 1$, que es el

ancho de la imagen disminuido en una unidad (se empieza a contar desde 0); y, el eje de ordenadas, crece positivamente hacia abajo desde 0 hasta `img.shape[0] - 1`, que es el alto de la imagen disminuido en una unidad. Para ver la imagen sobre la que se está trabajando por pantalla se usan las siguientes líneas.

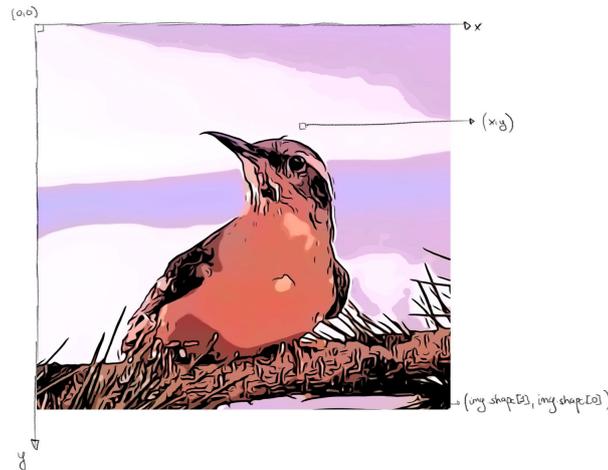


Figura 28: Sistema de referencia en imágenes de OpenCV-Python

```
In [10]: cv.imshow('image',img)
In [11]: cv.waitKey(0)
In [12]: cv.destroyAllWindows()
```

`cv.waitKey` tiene por parámetro el número de milisegundos que espera el programa para para ejecutar la siguiente línea de código. El valor 0 significa que espera “para siempre”, es decir, hasta que el usuario cierre manualmente la ventana de la imagen. `cv.destroyAllWindows()` reinicia las ventanas de imágenes.

La operación de suma de imágenes consiste en la suma de las matrices que representan estas imágenes, es decir, la matriz de la imagen resultante tiene como elemento azul de la entrada de la fila i -ésima, j -ésima la suma de los elementos azules de las entradas i -ésima, j -ésima de las matrices de las imágenes que se suman. Sin embargo, hay que recordar que estos valores están comprendidos entre 0 y 255. Así hay dos formas de sumar. Si se utiliza la función `cv.add` de OpenCV a cualquier resultado que sea mayor 255 se le asocia el valor 255. Los que están comprendidos entre 0 y 255 mantienen, obviamente, su valor. La suma habitual de Python, en cambio, realiza la suma y toma el resultado en módulo 256. Para visualizarlo se suman en este caso píxeles de la misma imagen.

```
In [13]: img[32,67]
Out[13]: array([235, 202, 236], dtype=uint8)
In [14]: img[145,59]
Out[14]: array([217, 203, 251], dtype=uint8)
In [15]: img[32,67]+img[145,59]
Out[15]: array([196, 149, 231], dtype=uint8)
In [16]: cv.add(img[32,67],img[145,59])
Out[16]:
array([[255],
       [255],
       [255]], dtype=uint8)
```

OpenCV ofrece una serie de funciones para realizar transformaciones afines sobre una imagen. Estas serán útiles para la creación del filtro de mosaico. Una de ellas es `cv.resize` que sirve para cambiar de escala las imágenes, es decir, realiza la transformación dada por

$$\begin{cases} x' = k_1x \\ y' = k_2y \end{cases} \quad (2.8)$$

La primera entrada de `cv.resize` es la imagen a escalar y la tercera y la cuarta son k_1 y k_2 de (2.8). La quinta es el tipo de interpolación que se utiliza para el proceso de escalado (no es preciso analizar este último aspecto).

```

In [17]: imgres = cv.resize(img,[500,500],fx=2, fy=2, interpolation = cv.INTER_CUBIC)
In [17]: # o
In [18]: alto, ancho = img.shape[:2]
In [18]: #que toma los dos primeros valores de img.shape: el alto y el ancho de la imagen
In [19]: imgres = cv.resize(img,(2*width, 2*height), interpolation = cv.INTER_CUBIC)

```

La función `cv.getAffineTransform` toma como argumentos de entrada dos ternas de puntos (entendiendo puntos como píxeles en este caso) y produce la matriz $M = [A|b]$ donde A y b son las matriz 2×2 y la matriz 1×2 respectivamente de la transformación afín $xA+b$ (x es la matriz 1×2 del punto del dominio al que se aplica la transformación) que envía los puntos de la primera terna en los puntos correspondientes de la segunda terna. Tanto en el marco teórico como se hará en la propuesta se escribe la ecuación de una transformación como $Ax + b$ con x y b matrices 2×1 y A una matriz 2×2 . Ambas formas de escribir la ecuación son equivalentes. La matriz A de la transformación en la primera forma es la traspuesta de la matriz en la segunda forma. Hay que tener esto muy presente en todo momento. Así para la imagen tomada se realiza la transformación que lleva los puntos $(0,0), (0, \text{img.shape}[0]), (\text{img.shape}[1], 0)$ en $(50,50), (20,150), (\text{img.shape}[1], 0)$. La matriz que genera Python es

$$\begin{pmatrix} 0.78 & -0.13 & 50 \\ -0.23 & 0.44 & 50 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la forma en la que se ha decidido escribir su ecuación la transformación afín que se está aplicando es

$$\begin{pmatrix} 0.78 & -0.23 \\ -0.13 & 0.44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

La función `cv.warpAffine` crea la matriz que resulta de aplicar sobre una imagen dada la transformación representada por una matriz M . Su primer argumento es la matriz original, el segundo la matriz de transformación y el tercero el número de filas y columnas de la matriz que da como resultado. La figura 29 muestra el resultado de aplicar la transformación anterior a la la imagen “image.png” introducida.

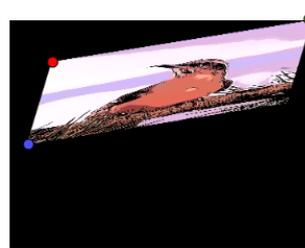
```

In [20]: rows, cols, channels = img.shape
In [21]: pts1 = np.float32 ([[0, 0], [0, img.shape[0]], [img.shape[1], 0]])
In [22]: pts2 = np.float32 ([[50, 50], [20, 150], [img.shape[1], 0]])
In [23]: M = cv.getAffineTransform(pts1, pts2)
In [24]: transformada = cv.warpAffine(img, M, (cols, rows))
In [25]: cv.imshow('image', transformada)
In [26]: cv.waitKey(0)
In [27]: cv.destroyAllWindows()

```



(a) Imagen original



(b) Imagen transformada

Figura 29: Transformación afín sobre una imagen

En el caso de una traslación es fácil definir directamente la matriz M de la transformación. Por ejemplo, la que traslada la imagen 50 posiciones hacia la derecha y 50 posiciones hacia abajo.

```

In [28]: M = np.float32 ([[1, 0, 50], [0, 1, 50]])
In [29]: trasladada = cv.warpAffine(img, M, (cols, rows))
In [30]: cv.imshow('image', trasladada)
In [31]: cv.waitKey(0)
In [32]: cv.destroyAllWindows()

```

En el caso de los giros OpenCV tiene la función `cv.getRotationMatrix2D` definida. Esta crea la matriz de un giro de ángulo θ y aproxima el centro de giro al centro de la imagen. Además incluye un tercer argumento que permite aplicar una homotecia a la vez que el giro sobre la imagen, de factor k . Si $k = 1$ se renuncia a escalar la imagen.

```
In [33]: M = cv.getRotationMatrix2D((( cols -1)/2.0,( rows-1)/2.0),90,1)
In [34]: rotacion = cv.warpAffine(img,M,( cols ,rows))
In [35]: cv.imshow('image',rotacion)
In [36]: cv.waitKey(0)
In [37]: cv.destroyAllWindows()
```

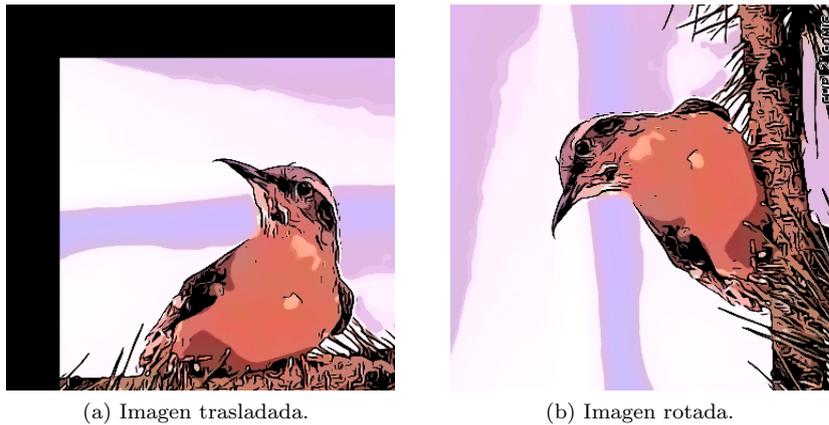


Figura 30: Traslación y rotación de imágenes

Como se aprecia en las figuras 29b y 30a al tomar el número de filas y de columnas de la matriz original en la matriz resultante se pierde información. Hay que tener en cuenta por lo tanto este argumento. También se observa que los píxeles de la nueva imagen a los que no se envía ningún punto de la imagen original toman el valor $(255, 255, 255)$, es decir, se les atribuye el color negro.

Las funciones y algoritmos de OpenCV-Python son una muestra mínima de las aplicaciones de esta librería pero no se precisa de más para la creación del filtro de mosaico que se pretende en la propuesta. El resto se pueden encontrar en [28].

2.3.4 Creación del filtro de mosaico

Para la creación de un mosaico a partir de una imagen digital se considerarán solo aquellos grupos cuya celda primitiva (tesela) y cuyo motivo para engendrarlo sean rectangulares o cuadrados. De otra manera el proceso se complicaría bastante ya que se está trabajando en un subespacio de \mathbb{R}^2 discreto en el que la distancia entre dos puntos (píxeles) solo es una línea recta si se encuentran en la misma paralela o perpendicular al eje X . Por lo tanto, los grupos de mosaico que se pueden crear de manera sencilla son $p1$, pm , pg , pmm , pmg , pgg y $p4$. Elegido el grupo de mosaico de entre los anteriores la idea es la siguiente:

Se elige una imagen que servirá de motivo del mosaico. Si el mosaico precisa de un motivo cuadrado, o bien se elige una imagen cuadrada (mismas dimensiones de altura y anchura), o bien en el propio código se selecciona una región cuadrada de interés de la misma. Se crea un fondo negro sobre el que se va a trazar el mosaico. El hecho de considerar el fondo negro (otra buena elección es considerarlo blanco) es que para superponer una imagen en la región deseada basta sumarle al fondo esa imagen por cualquiera de los dos procedimientos vistos (un píxel negro sumado a otro de color da como resultado este segundo). Se añade al fondo la imagen original y a la imagen resultante se le aplican las transformaciones necesarias para crear el paralelogramo fundamental. Cada imagen resultante de aplicar las transformaciones, que se denominará auxiliar, se le va sumando al fondo negro con la imagen original para ir rellenando el paralelo fundamental. Después se aplican las traslaciones horizontales y verticales para continuar rellenando el fondo negro hasta

completarlo.

Por ejemplo, si se toma el grupo $p4$. La celda primitiva y el motivo con el que se genera están dados en la figura 31, al igual que los 2-centros y 4-centros. Para crear la celda primitiva a partir del motivo basta, por ejemplo, girarlo 90° respecto al 4-centro que es a su vez centro del cuadrado tres veces consecutivas.

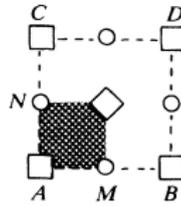


Figura 31: Celda primitiva grupo cristalográfico $p4$ [18].

```

import cv2 as cv
import numpy as np

#Tomamos la imagen original y la mostramos por pantalla
img = cv.imread('JordanLS.jpg')
cv.imshow('image',img)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()
height, width = img.shape[:2]

#Reescalamos la imagen
img = cv.resize(img,(width//4, height//4), interpolation = cv.INTER_CUBIC)
cv.imshow('image',img)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()

#PRIMERA TRANSFORMACION: ROTACION 90
rows, cols, channels = img.shape
#Los puntos y sus respectivas imagenes que definen la transformacion
pts1 = np.float32 ([[img.shape[1]-1, img.shape[0]-1], [0, 0], [img.shape[1]-1, 0]])
pts2 = np.float32 ([[img.shape[1]-1, img.shape[0]-1], [2*(img.shape[1]-1), 0],
[2*(img.shape[1]-1), img.shape[0]-1]])
I = cv.getAffineTransform(pts1, pts1)
M = cv.getAffineTransform(pts1, pts2)
#Creamos un fondo para el mosaico y colocamos la imagen en la esquina superior izquierda
img=cv.warpAffine(img, I, (5*cols, 5*rows))
aux = cv.warpAffine(img, M, (5*cols, 5*rows))
img=img+aux
cv.imshow('image',img)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()

#SEGUNDA TRANSFORMACION: ROTACION 90
#La matriz de la transformacion es la misma que la anterior
aux = cv.warpAffine(aux, M, (5*cols, 5*rows))
img=img+aux
cv.imshow('image',img)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()

#TERCERA TRANSFORMACION: ROTACION 90
#La matriz de la transformacion es la misma que la anterior
aux = cv.warpAffine(aux, M, (5*cols, 5*rows))
img=img+aux
cv.imshow('image',img)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()

#CUARTA TRANSFORMACION: TRASLACION HORIZONTAL
aux=img

```

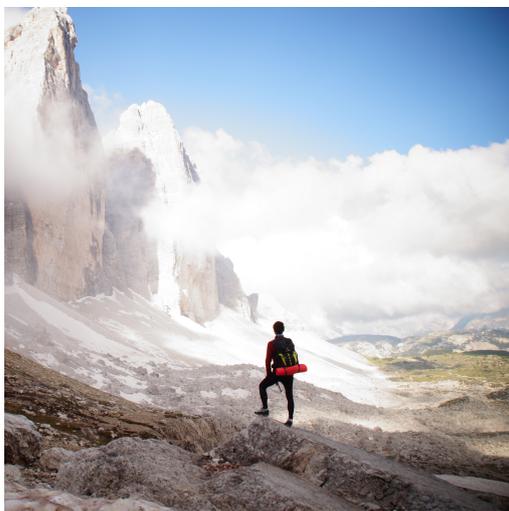
```

M = np.float32 ([[1, 0, 2*(cols-1)], [0, 1, 0]])
for i in range(5):
    aux = cv.warpAffine(aux, M, (5*cols, 5*rows))
    img=img+aux
cv.imshow('image', img)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()

#TRASLACION VERTICAL
aux=img
M = np.float32 ([[1, 0, 0], [0, 1, 2*(rows-1)])])
for i in range(5):
    aux = cv.warpAffine(aux, M, (5*cols, 5*rows))
    img=img+aux
cv.imshow('image', img)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()

#GUARDAMOS EL MOSAICO CREADO
cv.imwrite("mosaico.png", img)

```



(a) Imagen original



(b) Celda primitiva



(c) Mosaico

Figura 32: Imágenes resultantes

3 Análisis didáctico

La teoría matemática que se ha expuesto en el marco teórico pone de manifiesto la relación que tienen las matrices y su estructura de grupo con el producto con las transformaciones geométricas y su estructura de grupo con la composición. Por su parte el marco tecnológico ha servido para comprender el papel de las matrices en las imágenes digitales así como la utilidad de las transformaciones geométricas en la aplicación de filtros. No obstante, se debe dar ahora un paso fundamental y bien medido de cara a extraer de la teoría unos contenidos y una forma de organizarlos y de impartirlos en un grupo de 2º de bachillerato respetando las metas que se han establecido desde el principio. Como un sucinto recordatorio de estas metas, se busca justificar el estudio de la matriz como objeto específico (OE1) a partir de un contenido geométrico visual como es el de las transformaciones geométricas en el plano (OE2) y a su vez motivarlo con aplicaciones de la matriz y de las transformaciones geométricas en contextos reales (OE4), específicamente a través de filtros de fotografía que utilizaran nociones de grupos ornamentales (OE3). De todo este proceso, y dado que se incluyen una serie de contenidos recuperados de cursos anteriores (3º de ESO) y de contenidos nuevos, se extraerán finalmente unos contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluable para la propuesta didáctica. Además se analizará en detalle en apartados sucesivos la contribución a las competencias clave, la selección de las actividades de aprendizaje apropiadas para complementar estos contenidos y las herramientas de evaluación, y se harán algunas consideraciones para el resto de elementos del diseño curricular.

3.1 Organización del contenido

A continuación se explica cómo se va a enfocar la teoría matemática y tecnológica de cara a su presentación en el grupo de 2º de bachillerato.

1. Generalización del concepto de función.

Hasta el momento los estudiantes de 2º de bachillerato conciben el concepto de función como una relación entre dos variables numéricas de la forma $y = f(x)$ que a cada valor de x , la variable independiente, le asocia un único valor de y , la variable dependiente (de x). Así les fue introducido en 4º de ESO y se ha mantenido desde entonces. Sin embargo, dado que las transformaciones afines en el plano que se van a estudiar en la propuesta son un caso especial de funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , será conveniente ampliar la definición de función como una relación entre dos conjuntos cualesquiera de forma que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto. Hasta este curso ambos conjuntos de los que se habla en la definición han sido siempre \mathbb{R} pero ¿por qué no considerar otros como los vectores de \mathbb{R}^2 que ya han estudiado? Como concepto

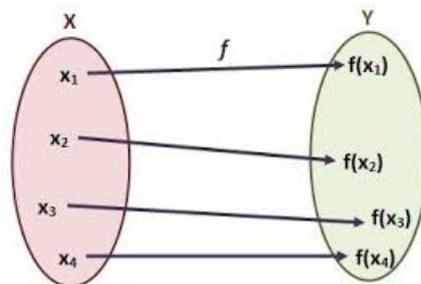


Figura 33: Representación de una función como relación entre conjuntos

general tan solo se insistirá en que la relación dada por una función no puede, por definición, asociar un elemento del conjunto de partida con dos elementos del conjunto de llegada, pero sí que es posible que dos elementos del conjunto de llegada estén asociados con un mismo elemento del conjunto de llegada. Para aclarar estas ideas se utilizarán diagramas como los de la figura 33 así como gráficas de funciones reales de variable real a las que están acostumbrados. Se puede hablar también de

inyectividad y sobreyectividad en este punto, aunque no es absolutamente necesario para los propósitos de la propuesta. Si no se da el caso de que dos elementos distintos del conjunto de llegada tengan la misma imagen, entonces la función es inyectiva. Si todos los elementos del conjunto de llegada están asociados con alguno de los del conjunto de partida entonces la función es sobreyectiva. Si se dan las dos condiciones la función es biyectiva. En este caso además es posible definir la función inversa. De nuevo, estos conceptos se visualizan nítidamente empleando los diagramas. Es particularmente interesante esta concepción de la función inversa y de cuándo se puede definir la misma.

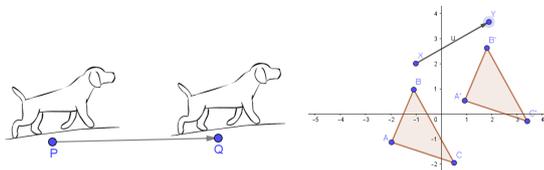
Tras este tratamiento general de la noción de función el foco se pone en las funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 . Estas asocian un punto de coordenadas (x, y) en otro punto de coordenadas (x', y') , donde x' e y' estarán dados por una expresión en términos de x e y . Conviene estandarizar esta notación para no dar pie a confusiones. Hay que tener en cuenta que hasta el momento para ellos y era la imagen de la función aplicada a un punto y ahora y denota la segunda coordenada del punto de partida, por lo que deben habituarse a ello. A partir de las funciones reales de variable real que ya conocen se pueden dar innumerables funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , basta aplicar a cada coordenada del punto de partida esas funciones. Por ejemplo, $(x, y) \rightarrow (2x, y^2)$ o $(x, y) \rightarrow (\ln(x), 2^y)$. No tiene por qué ocurrir que x' sea función solo de x e y' , de y en absoluto: $(x, y) \rightarrow (y^3, x)$, $(x, y) \rightarrow (x + e^y, 3x) \dots$

Con lo anterior simplemente se busca que se hagan una idea de las nuevas funciones que pueden aparecer pero las que se van a estudiar son las transformaciones afines (afinidades), que tienen la forma lineal $(x, y) \rightarrow (ax + cy + e, bx + dy + f)$ y que se caracterizan por que envían rectas en rectas. Esto no ocurre con cualquiera otra función que se considere. Se enfatizará esta idea. Una buena manera de hacerlo es observar cómo transforman el plano las transformaciones afines y cómo lo hacen otras funciones. Por ejemplo a través de estos vídeos de la Khan Academy: <https://youtu.be/2xKaXDHDGsA> y <https://youtu.be/x1dGfxBdD1M>.

2. Estudio geométrico de las principales transformaciones en el plano.

El primer paso consiste en recordar las transformaciones en el plano más intuitivas: los movimientos (traslación, rotación o giro y simetría respecto de una recta) y las homotecias. Se trata de que esta primera aproximación sea totalmente visual por lo que se introducirán las transformaciones geométricas a partir de una descripción y por medio de su aplicación a objetos de la vida cotidiana y a objetos matemáticos como los polígonos. Se deducirán algunas de las propiedades de las transformaciones como los puntos y rectas invariantes. Es un paso inmediatamente previo a la obtención de las ecuaciones que describen las transformaciones. Será muy útil el empleo de herramientas tecnológicas como Geogebra para aplicar las transformaciones.

Traslación



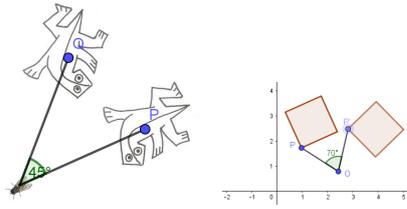
Descripción: Transformación que consiste en mover cada punto del plano en la dirección y sentido dados por un vector fijo. A este vector se le llama *vector de traslación*.

Puntos fijos: Ninguno.

Rectas fijas: Ninguna.

Propiedades: La distancia entre un punto y su imagen es constante e igual al módulo del vector. La distancia entre dos puntos cualesquiera y sus respectivas imágenes permanece constante.

Giro o rotación



Descripción: Transformación que consiste en girar cada punto del plano alrededor de un punto fijo llamado *centro* y con un ángulo también fijo (el ángulo de giro se da en sentido antihorario).

Puntos fijos: El centro de giro.

Rectas fijas: En giros de ángulo distinto de 180° no hay rectas fijas. En giros de 180° , todas aquellas que pasan por el centro de giro.

Propiedades: Las distancias entre un punto y el centro y entre la imagen del punto y el centro son iguales. La distancia entre dos puntos cualesquiera y sus respectivas imágenes permanece constante. Los medios giros (giros de 180°) tienen una propiedad característica que les hace similares a las simetrías respecto de una recta por eso también se les conoce como simetrías respecto de un punto: El centro de un medio giro es el punto medio del segmento que une un punto con su imagen.

Simetría respecto de una recta



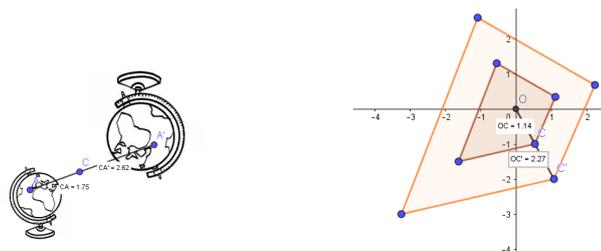
Descripción: Transformación que envía cada punto del plano en el punto situado a la misma distancia de una recta fija llamada *eje de simetría* que el dado pero en sentido contrario.

Puntos fijos: Todos los del eje de simetría.

Rectas fijas: El eje de simetría y las rectas perpendiculares al mismo.

Propiedades: El eje de simetría es el lugar geométrico del plano de los puntos medios de los segmentos de extremos un punto y su imagen. La distancia entre dos puntos cualesquiera y sus respectivas imágenes permanece constante.

Homotecia



Descripción: Transformación que multiplica todas las distancias a partir de un punto fijo llamado *centro* proporcionalmente por una cantidad k llamada razón. La razón puede ser negativa (figura de

la izquierda, $k = -1.5$) o positiva (figura de la derecha, $k = 2$).

Puntos fijos: El centro de homotecia.

Rectas fijas: Todas las rectas que pasan por el centro de homotecia.

Propiedades: La proporción de la distancia de un punto al centro de homotecia y la distancia de su imagen respectiva al centro de homotecia es constantemente igual a la razón k .

Las propiedades que se han dado en cada transformación se deducirán a partir de la visualización gráfica primero. Cómo afecta la transformación a la distancia entre puntos será la clave para distinguir entre transformaciones euclídeas o movimientos y transformaciones afines. Como ejemplo de estas últimas solo se ha considerado la homotecia pero se puede incluir alguna otro como la dilatación horizontal, que multiplica las diferencias absolutas de las primeras coordenadas de los puntos respecto a un punto fijo (centro) por una cantidad constante (razón) k , y la dilatación vertical, análoga pero actuando sobre la segunda coordenada.

3. Dedución de las ecuaciones de las transformaciones.

Se da un paso ahora hacia la geometría analítica. Representando los puntos por sus coordenadas en el sistema de referencia cartesiano por $P = (x, y)$ y a sus imágenes de la misma forma por $P' = (x', y')$ se trata de hallar unas ecuaciones para cada transformación que den x' e y' en función de x e y . No se hablará en ningún momento de espacios vectoriales o afines sino que se tomará la referencia dada por los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y el origen de coordenadas sin entrar en este tipo de cuestiones.

Se espera una pronta deducción por parte de los alumnos de las ecuaciones de la traslación de vector (a, b)

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

y de la homotecia de centro el origen de coordenadas y de razón k .

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

Es más complicado que algún alumno sea capaz de deducir en primera instancia las ecuaciones de la homotecia de centro un punto cualquiera (a, b)

$$\begin{cases} x' = k(x - a) + a \\ y' = k(y - b) + b \end{cases}$$

Sería trivial esta deducción aplicando un cambio de referencia pero hemos descartado el uso de argumentos del álgebra lineal de espacios vectoriales y afines ya que o bien no se introducen en este curso, o bien no se ven con suficiente profundidad como para que los alumnos los manejen sin problemas. Aún así se puede justificar la idea que subyace bajo el cambio de referencia: se traslada el punto por el vector que lleva el centro de la homotecia al origen, se aplica la homotecia de razón k pero de centro el origen y se aplica sobre el punto obtenido la traslación inversa (la de O al centro). Se puede comprobar que las ecuaciones anteriores satisfacen la definición de homotecia. La razón es que se está aplicando aumentando la distancia en rectas paralelas: la que pasa por C, P y P' y la que pasa por sus trasladados por el vector $(-a, -b)$, es decir, por O, P_t y P'_t . En consecuencia la imagen de P por la homotecia original es el trasladado de $P'_t = (k(x - a), k(y - b))$ por el vector (a, b) (figura 34).

Otras transformaciones que se pretenden deducir fácilmente son las simetrías más sencillas. La acción de las simetrías respecto de una recta (o también simetrías axiales) se puede introducir como el intercambio de los semiplanos en que la recta divide al plano. Más aún, una experiencia muy visual es la de doblar un folio transparente (de papel de calcar, por ejemplo), que representa el plano y sobre el que se han

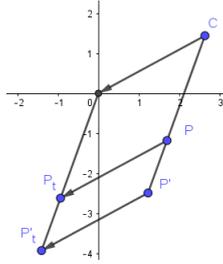


Figura 34: Homotecia de centro C y razón k .

dibujado los ejes coordenados, por el eje de simetría. Al hacer esto la imagen de los objetos de uno de los semiplanos queda representada en el otro (figura 35, en azul el vector $(1,0)$ y en rojo el resultado que se transparenta al doblar el papel). Así las simetrías respecto de las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x = y$ que pasan por el origen y los medios giros (simetrías puntuales) son fácilmente deducibles. Sus ecuaciones son respectivamente:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

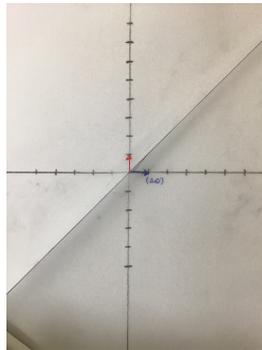


Figura 35: simetría respecto a $y = x$

Los casos generales de una simetría de eje una recta cualquiera (que ni siquiera pasa por el origen) y de un medio giro que no está centrado en el origen corresponden respectivamente a las ecuaciones 2.7 y 2.5 que se dieron en el marco teórico respectivamente. Ambas se dedujeron además a partir de sencillos argumentos geométricos que se pueden aplicar en este curso. Además se pueden concebir como una tarea de investigación dirigida (ver actividades A3 en el apartado 3.4).

Una última transformación de la que se obtendrán sus ecuaciones es el giro centrado en el origen y de ángulo α . Basándose en la figura 36 basta emplear las fórmulas del seno y del coseno del ángulo doble:

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\alpha + \beta) = r(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = (r \cos \beta) \cos \alpha - (r \sin \beta) \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' &= r \sin(\alpha + \beta) = r(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = (r \cos \beta) \sin \alpha + (r \sin \beta) \cos \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

Es importante destacar que el objetivo de este punto es analizar cómo se pueden deducir para el nivel de 2° de bachillerato las ecuaciones de las principales transformaciones en el plano. Esto no implica que al poner en práctica la propuesta se pretendan deducir todas. En función de los conocimientos

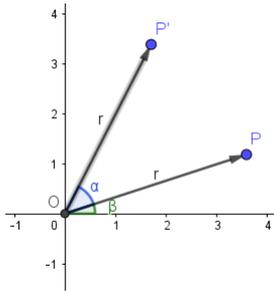


Figura 36: Giro de centro O y ángulo α

previos del grupo y de su nivel se decidirá si deducir solo aquellas más inmediatas o si además se tratará de obtener alguna otra mediante tareas de investigación dirigida o durante la exposición del propio profesor.

4. Representación matricial de las transformaciones.

El siguiente paso es lógicamente dar las ecuaciones de las transformaciones en forma matricial. Una primera idea, que puede parecer trivial, para que los alumnos visualicen esta representación es escribir los puntos del plano como matrices columna 2×1 . Así, el punto al que se aplica la transformación será $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y el punto imagen, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, y se buscará una matriz A de dimensión 2×2 y una matriz b de dimensión 2×1 de tal forma que la transformación esté dada por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{b} \quad (3.1)$$

Se empezará trabajando por las transformaciones que tienen una representación más sencilla. Por ejemplo, para la simetría respecto de $y = x$ se puede obtener la imagen del punto $(2, 3)$ de la siguiente forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, o incluso la imagen de un triángulo dado por sus vértices $(2, 3)$, $(0, 5)$, $(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que se visualizaría mediante un dibujo, bien a mano o bien con ordenador.

Estudiadas las representaciones matriciales de las transformaciones que se han ido viendo hay que transmitir una idea fundamental. La posibilidad de utilizar la escritura $A\vec{x} + \vec{b}$ viene de la linealidad de las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = ax + cy + e \\ y' = bx + dy + f \end{cases} \quad (3.2)$$

en las que solo encontramos expresiones polinómicas lineales (todos los coeficientes de grado 1). Por otro lado, cabe preguntarse por el rango y por la posibilidad de invertir las matrices de las transformaciones que se están considerando. Si el rango de la matriz A fuese 0 obsérvese que se estaría transformando el plano en un único punto, $\vec{b} = (e, f)$. Si el rango de la matriz A fuese 1 cuando el sistema (3.2) admitiera solución no solo admitiría una sino infinitas soluciones, es decir, para cada punto imagen (x', y') habría infinitos puntos (x, y) que la transformación estaría enviando a (x', y') (de hecho lo que ocurriría es que la transformación estaría enviando todos los puntos de una misma recta a un mismo punto). Las transformaciones en el plano llevan cada punto del plano en otro punto del plano de tal manera que dos imágenes de puntos distintos nunca coinciden, por lo tanto el rango de las matrices en las transformaciones en el plano siempre es máximo y son invertibles. Se pueden introducir los conceptos de inyectividad y sobreyectividad que subyacen en estos argumentos si el nivel del grupo es muy bueno y los avances hasta el momento han sido satisfactorios, pero no es necesario

Movimiento	Ecuaciones analíticas	Forma matricial	Representación
Traslación de vector guía (a, b)	$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	$(x' \ y') = (x \ y) + (a \ b)$	
Simetría respecto del eje X	$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$(x' \ y') = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	
Simetría respecto del eje Y	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$(x' \ y') = (x \ y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Simetría respecto del origen	$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	$(x' \ y') = (x \ y) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	
Giro de centro O y ángulo α	$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$	$(x' \ y') = (x \ y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$	
Homotecia de centro O y razón $k \neq 0$	$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$	$(x' \ y') = (x \ y) \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	

Figura 37: Representación matricial de las transformaciones. SM (Ed. previa. ISBN: 978-84-675-3472-6).

(se estaría pidiendo que asimilaran demasiados conceptos nuevos para ellos; lo cual puede resultar abrumador).

Ahora se puede formalizar la idea de transformación afín o transformación en el plano como una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 de la forma (3.1), donde A es invertible. Es en este punto donde se ve la necesidad de la ampliación del concepto de función que estaban manejando.

5. Obtención de la ecuación de una transformación dados tres puntos no alineados.

Una observación fundamental es que si la transformación considerada deja fijo el origen de coordenadas entonces b en (3.1) es directamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y las columnas de la matriz A son las imágenes de $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Por lo tanto, basta conocer las imágenes de estos dos puntos para obtener la ecuación de la transformación. De no ser así la imagen de $(0, 0)$ es $\vec{b} = (e, f)$, conocida esta y conocidas las imágenes de $(1, 0)$ y $(0, 1)$ también se conoce la ecuación del movimiento aunque de forma no tan directa. Si (λ_1, λ_2) es la imagen de $(1, 0)$ y (μ_1, μ_2) la de $(0, 1)$ entonces las columnas (a, c) y (b, d) de la matriz A son respectivamente $(\lambda_1 - e, \lambda_2 - f)$ y $(\mu_1 - e, \mu_2 - f)$. Esto se puede comprobar fácilmente por (3.1) y se puede transmitir muy fácilmente a los alumnos. La función de esta observación es doble; entender cómo actúa una transformación a partir de las imágenes de $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, y dar el teorema fundamental de la geometría afín (no se le llamará así) que está incluido en el marco teórico como teorema 1; es decir, la transformación que actúa sobre el plano se comprende a partir de cómo actúa sobre la referencia usual (figura 38) y queda definida por la imagen de un triángulo (dados dos triángulos la transformación que lleva uno en otro es única, figura 4). La justificación de este resultado requiere, como se vio en el marco teórico, de la inversa de una transformación. Por lo tanto, no se dará tal justificación aquí pero se puede explicar o tratar como tarea una vez introducida la composición y la inversa de las transformaciones (punto 5).

6. Composición de transformaciones y transformación inversa.

La posibilidad de componer transformaciones, es decir, de aplicar una transformación tras otra, y la de la transformación inversa, la que “deshace” una transformación previa, surgen de manera muy

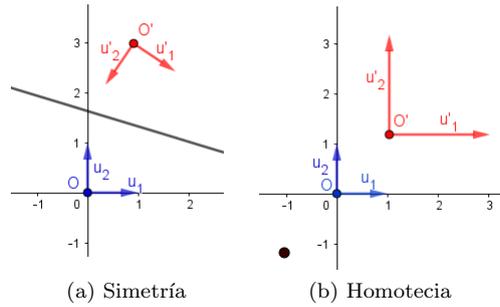


Figura 38: Resultados de transformaciones sobre la referencia usual

natural. Su introducción se hará como hasta ahora de forma gráfica y después se formalizará la idea analíticamente con las ecuaciones matriciales que ya se manejan. La composición vista como la aplicación sucesiva de transformaciones les es familiar pues ya conocen la composición de funciones en una variable real. Se está haciendo ahora lo mismo, solo que la variable es bidimensional. La transformación se puede denotar como $t(x)$ donde x es un punto de \mathbb{R}^2 . Gráficamente se intuye que la composición de transformaciones es una transformación y analíticamente es sencillo de probar (un ejercicio que se les puede requerir). No solo eso sino que es sencillo de obtener la ecuación de la composición de transformaciones. Siendo $t_1(x) = A_1x + b_1$ y $t_2(x) = A_2x + b_2$ entonces $t_2 \circ t_1(x) = A_2A_1x + A_2b_1 + b_2$. Lo mismo se puede decir para la transformación inversa de una dada. Esta es de nuevo una transformación, $t_1^{-1}(x) = A_1^{-1}x - A_1^{-1}b_1$. La existencia de A^{-1} está garantizada por el comentario hecho en el punto anterior. Las ecuaciones de la composición y de la inversa ya se dedujeron con detalle en el marco teórico.

7. El concepto de grupo.

No se pretende explicar teoría de grupos ni siquiera ahondar en este concepto, pero es conveniente recordar (es probable que se les haya dado la definición de grupo anteriormente) o introducir la definición de grupo. Un grupo es un conjunto (de números u otros objetos matemáticos) con una operación interna que cumple la propiedad asociativa, la existencia de elemento neutro y la existencia de elementos inverso o simétrico. Es importante en este caso destacar lo de “la operación interna” puesto que se va a considerar el grupo de los movimientos dentro del grupo de las transformaciones afines (aunque en este no se va a hablar de su estructura de grupo). La conmutatividad puede darse, y hablar de un grupo conmutativo o abeliano (como los números reales con la suma o el producto), o no (como en las matrices con el producto). Se usarán los ejemplos de grupos de los números con la suma y el producto y de las matrices con la suma y el producto precisamente.

8. El grupo de los movimientos.

Salvo las homotecias y las dilataciones verticales y horizontales todas las transformaciones afines que se introdujeron de inicio son en particular movimientos. Sería interesante llegados a este momento dar unos primeros pasos hacia la concepción de la existencia de geometrías distintas de la euclídea. En principio la propuesta que se propone se limita a incidir en la idea de que los movimientos son un caso especial de transformaciones en el plano que mantienen la forma y el tamaño de los objetos, en cambio, otras transformaciones que no son movimientos alteran el tamaño de los objetos aún manteniendo su forma. Si se está ante un grupo de 2º de bachillerato especialmente avanzado quizá se pueda ir un poco más allá y hablar de geometría afín y transformaciones afines y de geometría euclídea y transformaciones euclídeas o movimientos, bajo las ideas de Klein que se expusieron en el marco teórico. Para que comprendan qué es lo que hace especiales a los movimientos dentro de las transformaciones en el plano hay que hablar de distancia y del determinante de la matriz asociada al movimiento. En el paso 1 se vio que todos los movimientos (traslaciones, giros y simetrías)

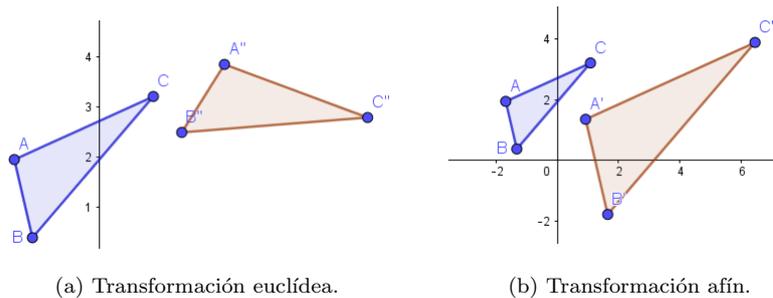


Figura 39: Efecto de las transformaciones sobre la forma y tamaño de las figuras

compartían la propiedad de que la distancia entre dos puntos coincidía con la distancia entre sus imágenes. Esta propiedad es la que caracteriza a los movimientos y en particular a la matriz asociada a los movimientos. ¿Cómo es el determinante de la matriz asociada a los movimientos? Siempre es 1 o -1 porque son matrices ortogonales. Se explicará qué es una matriz ortogonal si no se ha hecho anteriormente. Las matrices de los movimientos son siempre ortogonales, es decir, su inversa coincide con su traspuesta. A raíz de esto se introduce el Teorema 2 del marco teórico y su corolario sobre la clasificación de las matrices ortogonales y, por ende, de los movimientos. Este resultado no se asume de manera tan intuitiva y puede ser buena idea justificarlo, en clase o como tarea, pues los argumentos que emplea son conocidos. Esto se hará o no en función del tiempo disponible y de las necesidades específicas del grupo. No es indispensable probarlo, ya que en este curso no aporta tanto en el sentido didáctico. En el teorema de clasificación de los movimientos se dividen estos en movimientos directos (su determinante es 1) e inversos (su determinante es -1). Informalmente los primeros son aquellos que mueven el plano sin levantarlo a diferencia de los segundos, lo cual es muy visible utilizando una hoja de papel (está relacionado también con la noción de orientación).

Por otra parte los movimientos forman un grupo con la composición. De las propiedades de la inversa y de la trasposición de una matriz ortogonal son fácilmente deducibles las condiciones que se han de cumplir para tal afirmación. La aplicación de movimientos consecutivos sobre una determinada figura no altera ni la forma ni el tamaño de la misma. Ídem para el movimiento inverso a uno dado y, por descontado, para la propia identidad. Esta es la idea que se tratará de transmitir para concebir los movimientos como un grupo, más allá de la justificación analítica.

9. La composición de movimientos.

Aunque se ha hablado de forma general sobre la composición de transformaciones en el plano y se ha obtenido la representación matricial de estas y, en particular de los movimientos, es relevante hacer un tratamiento específico de las composiciones de movimientos y del movimiento inverso a uno dado. La razón vuelve a radicar en la comprensión geométrica del resultado de la composición. Dados dos movimientos en forma matricial se podría obtener la matriz de la composición resultante y clasificar el mismo, pero esto provoca la pérdida de visibilidad de cómo están actuando los movimientos en el plano. De ahí, que sin pretender obtener geoméricamente el resultado de la composición de dos movimientos cualesquiera o el teorema de Cartan-Dieudonné, sí que se marque como meta didáctica la deducción de algunos de ellos, que pueden ser, por ejemplo:

- La composición de traslaciones es una traslación de vector la suma de los vectores de las traslaciones.
- La composición de giros centrados en el mismo punto es un giro que comparte el centro de los anteriores y de ángulo la suma de los ángulos de estos. Si el centro de los giros no es el mismo el resultado también es un giro y el ángulo, la suma de los ángulos (a no ser que la suma de los ángulos sea 360° , en cuyo caso es una traslación)
- La composición de un giro y una traslación es un giro que conserva el ángulo de giro.

- La composición de medios giros es una traslación de vector el vector que va del centro del primer medio giro al segundo y cuyo módulo es el doble de la distancia entre ambos.
- La composición de simetrías con el mismo eje es la identidad. Si los ejes son distintos y paralelos el resultado es una traslación y si son concurrentes, un giro.
- Las simetrías con deslizamiento son la composición de una simetría con una traslación cuyo vector es paralelo al eje de simetría.

La respuesta del grupo ante la propuesta marcará la insistencia que se hará en esta parte del contenido, pues se puede limitar este a las composiciones más elementales o ir más allá con la generación de movimientos a partir de simetrías o con la existencia de subgrupos dentro del grupo de los movimientos.

10. Los grupos de simetría y los grupos ornamentales.

Se definirá el grupo de simetría de una figura como el grupo de los movimientos que aplicados sobre la misma no altera su forma, su tamaño o su posición. Estos movimientos se llaman simetrías de la figura F . Informalmente: Si uno está observando una figura, cierra los ojos y se aplica un movimiento a esa figura, y cuando los abre está observando la misma figura exactamente en la misma posición, entonces el movimiento aplicado es una simetría. En la figura 40 si aplicamos sobre el mandala un giro de 30° , 60° , 90° , 120° , 150° , 180° , 210° , 240° , 270° , 300° o 330° con centro en el propio centro del mandala; una simetría de eje cualquiera de las rectas que se muestran en la imagen; o la propia identidad, el mandala permanece invariante. El hecho de que este conjunto de movimientos forme un grupo deriva de que la composición de simetrías de una figura, es decir la aplicación de dos movimientos que la dejan invariante, es claramente una nueva simetría de la figura. Del mismo modo la inversas de una simetría de la figura es una simetría de la figura.

Si en lugar de una figura entendida como un conjunto cerrado por rectas o curvas se considera una franja del plano limitada por dos rectas paralelas se extiende la idea de grupo de simetría al de grupo de friso. Lo que se entiende por friso es el propio área limitado entre las dos rectas paralelas. Los movimientos que dejan invariante ese área forman parte del grupo de friso. Análogamente si se extiende esta idea a todo el plano se habla de grupo de mosaico. Los grupos de simetría no pueden admitir traslaciones o simetrías con deslizamiento porque se estaría alterando su posición; los frisos solo admiten traslaciones en una dirección, la de las rectas que lo delimitan; y, los mosaicos, admiten traslaciones en dos direcciones. Los frisos se generan trasladando en la dirección dada un motivo y los mosaicos, por la traslación en las dos direcciones de una tesela.

Esto es lo que se pretende transmitir en cuanto a grupos de simetría y grupos ornamentales. A raíz de ahí se observará que existen siete grupos de friso y 17 grupos de mosaico y se trabajará la identificación de los movimientos que forman parte de los grupos de simetría, de los grupos de friso y de los grupos mosaicos de figuras, frisos y mosaicos dados e incluso se dirá cuál es el grupo de friso o de mosaico aplicando los esquemas de clasificación (figura 23). Todo ello sin entrar en definiciones formales de rosetón, friso y mosaico ni en cómo se generan los 7 grupos de friso y los 17 grupos de mosaico o en conceptos de grupos dihedrales y grupos cíclicos.

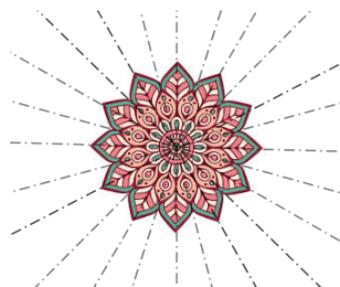


Figura 40: Concepto de grupo de simetría

11. Concepto de imagen digital.

Aunque se ha ubicado tras el contenido matemático, la relación de las matrices con las imágenes digitales y el mundo de la fotografía puede introducirse en cualquier momento y quizá en la propuesta didáctica sea idóneo hacerlo al inicio del tema como motivación hacia los contenidos. Los estudiantes probablemente tengan vagas nociones sobre un píxel como elemento que origina las imágenes digitales y se busca formalizar esta idea en cierta medida ¿Qué es una imagen digital? ¿Qué es un píxel? si los ordenadores solo entienden de números (binarios además) de alguna manera la respuesta tendrá que tener una relación con las matemáticas. Una imagen digital es una gran matriz en la que cada elemento es un píxel y un píxel contiene información sobre el color de la imagen en la diminuta región que ocupa dentro de la imagen. La información sobre el color es un número que va de 0 (negro) a 255 (blanco) si la imagen está en escala de grises. Si la imagen está a color el formato habitual es RGB. En este formato la información sobre el color está dada por una terna de números ordenada. Estos números van de nuevo de 0 a 255 y miden la intensidad de rojo, verde y azul respectivamente. La combinación de estos tres colores a distintas intensidades da una variedad de colores muy variada. Conviene visualizar estas ideas con ejemplos de combinaciones de colores RGB como los de 27a y 27b y los de la figura 41b; y alguna representación matricial de una imagen ingenua creada para que sirva como ejemplo (figura 41a).

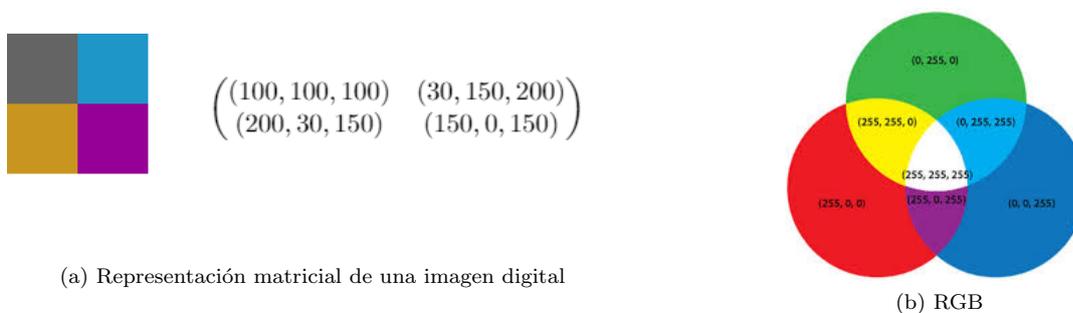


Figura 41

12. Creación de frisos y mosaicos.

Aunque cuando se trabaja con un lenguaje de programación (en este caso Python) es posible mostrar la imagen por pantalla, esto conlleva un gasto de memoria computacional y de tiempo, con lo cual no se hace a menudo y es inevitable que se pierda la visualización de las operaciones que se están realizando sobre la imagen. Por tal motivo conviene llevar a cabo una creación de un grupo de friso o de mosaico de manera más visual antes de pasar al abstracto lenguaje computacional y asimilar los conceptos de motivo y de tesela de un mosaico sin entrar en definiciones formales. Simplemente basta entender que una vez obtenida la tesela basta trasladarla en las dos direcciones para completar todo el plano y que para definir la tesela basta con definir una porción de la misma, el motivo, y aplicar las transformaciones presentes en el grupo de mosaico correspondiente. Cada grupo de mosaico tiene un tipo de celda primitiva característica con los centros de los giros presentes en el grupo y las rectas de simetría distribuidos de una manera característica. Una buena forma de generar un mosaico partiendo de su motivo y definiendo su tesela es, por ejemplo, a través de Geogebra ya que entre sus múltiples opciones están las de aplicar traslaciones, giros y simetrías sobre los propios objetos matemáticos de Geogebra o sobre imágenes insertadas. Además es una herramienta que se ha utilizado ya en la propuesta y que se supone que ha sido utilizada en el presente curso y en cursos anteriores.

Por ejemplo, para la creación de un mosaico $p6m$ se ha de generar la celda primitiva 42. En ella se han señalado con distintos símbolos los centros de giros de ángulo 60° (6-centros, en las cuatro esquinas), de ángulo 120° (3-centros, hay dos en el interior del paralelogramo) y de ángulo 180° (2-centros, en los puntos medios de cada lado y en el centro del paralelogramo). Toda la información del mosaico está en uno de los triángulos como el señalado. Los objetos definidos en su interior se van a repetir por

todo el plano según las simetrías admitidas en el grupo.

Así a los objetos del motivo se les aplican las simetrías y giros necesarios para engendrar la tesela y

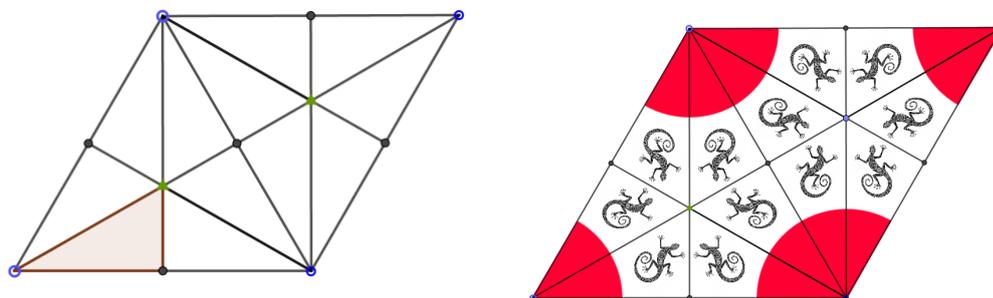


Figura 42: Motivo y celda primitiva del grupo $p6m$

esta se expande mediante traslaciones por todo el plano (figura 43).

13. El lenguaje de programación de OpenCV-Python.

No son muchos los conocimientos de Python que se han de introducir partiendo de que ya se tiene un conocimiento muy básico sobre algún lenguaje de programación en el que se han trabajado operaciones básicas con vectores. Basta introducir las nuevas funciones de la misma manera y en el mismo orden que en el marco tecnológico. No obstante, se espera tener que resolver dificultades en diferentes puntos:

- Lectura de imágenes. Las imágenes que se leen han de estar almacenadas en el directorio en el que se trabaja.
- Acceso a la información de la matriz que se precisa. Hasta ahora han trabajado con un argumento, la posición en el vector. Con las matrices de imágenes se tienen los dos argumentos de acceso a la posición del píxel y un tercer argumento que solo toma tres valores para seleccionar el color.
- Orientación en el sistema de referencia de imágenes de OpenCV-Python. El origen está en la parte superior izquierda, además la dimensión primera de la matriz (la altura/ $img.shape[0]$) acota el valor máximo de la segunda variable (Y) de la posición del píxel; y la dimensión segunda de la matriz (la anchura/ $img.shape[1]$) acota el valor máximo de la primera variable (X) de la posición del píxel. De inicio esto genera complicaciones.

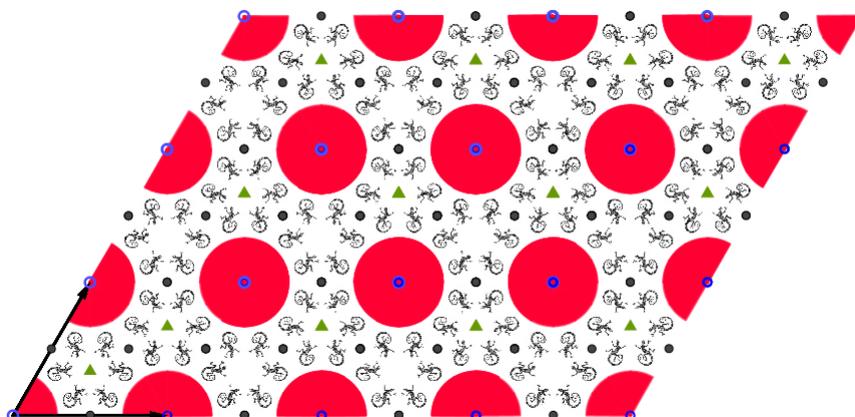


Figura 43: Grupo cristalográfico $p6m$ obtenido con Geogebra

- Generar las matrices de dimensiones adecuadas para crear el fondo de la imagen-mosaico y para sumar las matrices de las imágenes que se superponen. En este punto se les ofrecerá especial ayuda y se les facilitará algún comando.
- Mostrar imágenes por pantalla. Simplemente hay que ejecutar al mismo tiempo los comandos `cv.imshow` y `cv.waitKey`.

De cara a atenuar estas dificultades se realizarán pequeños ejercicios de lectura de imágenes, de acceso a píxeles en una matriz dada, de aplicación de una determinada transformación a una imagen mostrando el resultado por pantalla, de generación de fondos en negro del tamaño deseado y de suma de matrices. Se detallarán algunas de ellas en las actividades del apartado 3.3.

El objetivo final de la propuesta consistirá en la generación de un código similar al expuesto en el marco tecnológico para la aplicación de un filtro de un grupo de mosaico a una imagen. La idea es que los alumnos lo lleven a cabo en pequeños grupos y en horario lectivo para que el profesor esté presente para solventar todas las posibles dudas y que partan de un ejemplo previo que se haya analizado con ellos en clase de la generación para uno de los grupos.

Con estas premisas se cree posible producir la tarea con éxito, no obstante si el grupo de 2º de bachillerato con el que se está trabajando no tiene ninguna noción previa de un lenguaje de programación se podría limitar la generación de un mosaico a la reproducida con Geogebra.

3.2 Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluable

Teniendo en cuenta el apartado anterior se extrean los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluable para la propuesta didáctica.

Contenidos conceptuales

- Función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 .
- Transformación afín en el plano.
- Traslaciones, giros, simetrías, homotecias y dilataciones.
- Puntos y rectas invariantes.
- Movimiento o transformación euclídea.
- Grupo.
- Simetría de una figura plana y grupo de simetrías.
- Grupos ornamentales. Rosetones, frisos y mosaicos.
- Imagen digital y píxel.

Contenidos procedimentales

- Distinción de los puntos y rectas invariantes y de las propiedades de las principales transformaciones en el plano.
- Deducción de las ecuaciones de las principales transformaciones en el plano.
- Operaciones con las transformaciones en el plano a partir de su representación matricial.
- Obtención de una transformación a partir de las imágenes de tres puntos no alineados.
- Obtención del movimiento resultante de la composición de otros dos.

- Distinción de las simetrías y los movimientos de los grupos ornamentales.
- Generación de un grupo de mosaico o de friso a partir de sus elementos principales.
- Creación y manejo de matrices en Python y uso de algunas funciones de procesamiento de imágenes de OpenCV-Python.
- Generación de un filtro de mosaico en Python.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluable
<p>1- Transformaciones geométricas en el plano.</p> <p>1.1. Concepto general de función. 1.2. Principales transformaciones afines en el plano. 1.3. Descripción. Aplicación. Propiedades y objetos invariantes.</p>	<p>1. Comprender el concepto de función de manera general.</p> <p>2. Conocer las principales transformaciones geométricas (afines y euclídeas) y sus propiedades.</p> <p>3. Aplicar a objetos las principales transformaciones geométricas.</p>	<p>1. Diferencia qué asociaciones entre conjuntos representan una función. 2. Conoce las diferencias en expresión y propiedades entre una transformación afín y otra función del plano. 3. Reconoce la transformación (movimiento, homotecia o dilatación) realizada de una figura a otra y aplicar la transformación correspondiente a una figura. 4. Distingue los puntos y rectas invariantes por una transformación así como sus propiedades.</p>
<p>2- Ecuaciones de las transformaciones afines</p> <p>2.1. Deducción y estudio de algunas de las ecuaciones. 2.2. Representación matricial. 2.3. Obtención a partir de las imágenes de puntos. 2.4. Composición de transformaciones y transformación inversa.</p>	<p>4. Obtener las ecuaciones de las transformaciones y trabajar con ellas.</p>	<p>5. Deduce las ecuaciones de transformaciones sencillas. 6. Representa una transformación en forma matricial. 7. Opera con las transformaciones a nivel geométrico y matricial.</p>
<p>3. Estudio de la estructura de grupo.</p> <p>3.1. Concepto de grupo. 3.2. El grupo de los movimientos. Composición de movimientos. 3.3. Grupos de simetría y grupos ornamentales. Reconocimiento en figuras e imágenes.</p>	<p>5. Comprender la estructura del grupo de los movimientos y de los grupos ornamentales.</p> <p>6. Reconocer movimientos en los grupos ornamentales y clasificarlos.</p> <p>7. Generar alguno de los grupos de friso o de mosaico a partir de los elementos principales (motivo, tesela, centro de giro).</p>	<p>8. Distingue entre transformaciones afines y euclídeas (movimientos). 9. Determina el tipo de movimiento obtenido de la composición de dos movimientos. 10. Reconoce las simetrías de una figura dada. 11. Reconoce los elementos principales de un friso o mosaico (motivo, tesela, centro de giro), los movimientos que lo dejan invariante y el grupo de friso o de mosaico a partir de dichos movimientos. 12. Genera un friso o mosaico dados sus elementos principales.</p>
<p>4- Aplicación tecnológica de las matrices a las imágenes digitales.</p> <p>4.1. Representación matricial de una imagen digital. 4.2. Uso de OpenCV-Python para la aplicación de transformaciones geométricas en imágenes. Creación de filtros.</p>	<p>8. Emplear un lenguaje de programación (Python) para trabajar con imágenes digitales y aplicar los conocimientos matriciales y las transformaciones geométricas.</p>	<p>13. Utiliza un lenguaje de programación (Python) para leer una imagen, acceder a los valores de sus píxeles, modificarlos y crear imágenes y fondos de imagen. 14. Realiza transformaciones geométricas sobre imágenes y generar frisos y mosaicos.</p>

3.3 Selección de actividades

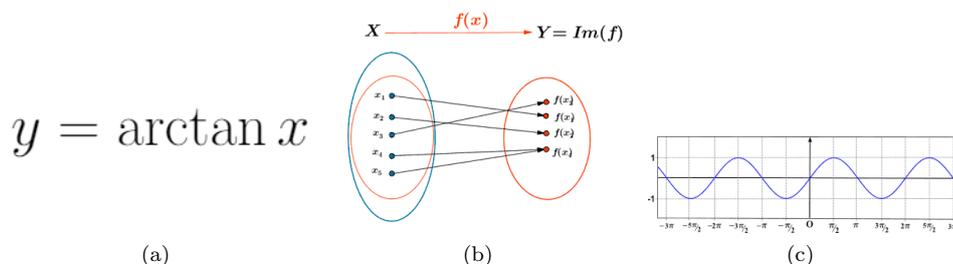
La elección de las actividades oportunas y su secuenciación a lo largo de la propuesta en función de las capacidades y de la respuesta del grupo es clave para la consolidación de los conocimientos y destrezas que

se pretenden transmitir. Se establecen aquí el tipo de actividades que conviene emplear para cada una de las secciones de contenido consideradas en 3.1 y se analiza cuál es su nivel de demanda cognitiva según Smith y Stein [22] y en qué momento se piensa emplearlas.

A1 Actividades sobre la generalización del concepto de función

- Ejemplos y preguntas para asegurar la asimilación del nuevo concepto (nivel I). Para garantizar que los alumnos han comprendido la generalización de una función se utilizan diversos diagramas como en la figura 33 que asocian los elementos de dos conjuntos, gráficas que relacionan puntos de la recta entre sí e incluso expresiones analíticas que pueden ser o no funciones y, que de serlo, pueden ser biyectivas, inyectivas pero no sobreyectivas, sobreyectivas pero no inyectivas o ninguna de las dos. Se les pregunta por estas cuestiones o incluso se les pide que ellos mismos pongan los ejemplos.

A1.1 Determinar si son funciones o no las asociaciones entre conjuntos aquí representadas. En caso de serlo determinar si son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.



- Ejercicios para distinguir entre transformaciones afines y otro tipo de funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 (nivel II). Pueden realizarse durante la sesión lectiva o como tarea para casa.

A1.2 Sean la función $f(x, y) = (y, x^2)$ y la recta $r : 2x - y = 1$ ¿es la imagen de r también una recta?

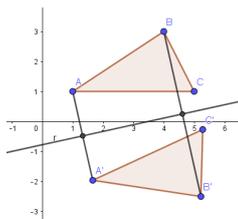
Solución: Las imágenes de los puntos de la recta $(0, -1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(1, 1)$ son respectivamente los puntos $(-1, 0)$, $(0, \frac{1}{4})$ y $(1, 1)$ que no están alineados. La imagen de r no puede ser una recta.

A2 Actividades sobre la visualización de las transformaciones afines en el plano

Para esta primera toma de contacto con las transformaciones afines desde 3º de ESO se realizará una rápida revisión sobre cómo actúan sobre objetos y qué propiedades caracterizan a cada cual a través de una serie de preguntas que se completarán durante la clase alternando con la exposición del profesor y haciendo uso de Geogebra y se entregarán como tarea al término de la misma (nivel II).

A2.1 ¿Cuál es la imagen del triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (4, 3)$ y $C = (5, 1)$ por la simetría de recta $-2x + 9y = -7$? Halla la recta de que pasa por los puntos medios de los segmentos $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ (A' y B' son respectivamente las imágenes de A y B).

Solución:



La idea es completar un esquema como el expuesto en el segundo punto de la organización de contenido (3.2) con una descripción de cada transformación afín, los puntos y rectas que deja invariantes y otras propiedades.

A3 Actividades sobre la deducción de las ecuaciones de las principales transformaciones afines

Algunas de las ecuaciones de las principales transformaciones afines (movimientos, homotecias y dilataciones) se deducen de manera inmediata a partir de la representación (3.2), como puede ser el caso de la traslación o de la homotecia centrada en el origen. Otras en cambio se pueden obtener a partir de propiedades geométricas y dar lugar a tareas de investigación dirigida (nivel III). Por ejemplo, para el caso de la simetría axial:

A3.1 Dados la recta r de ecuación general $aX + bY + c = 0$, el punto $P = (x, y)$. Su reflejado por la recta se denota $P' = (x', y')$.

- Dar los vectores directores de la recta r y de la recta s , que pasa por P y P' (solución esperada: (a, b) y $(x - x', y - y')$).
- ¿Cuánto vale el producto escalar de los vectores directores? Deducir una igualdad de incógnitas x' e y' (solución: $b(x - x') = a(y' - y)$).
- Obtener el punto medio M del segmento PP' y dar la igualdad que se deduce del hecho de que r pasa por M . (solución: $a(\frac{x+x'}{2}) + b(\frac{y+y'}{2}) + c = 0$).
- Las dos igualdades que se han obtenido forman un sistema de dos ecuaciones y de incógnitas x', y' . Resolver el sistema.
- Dar las ecuaciones de la simetría de eje la recta r . (solución: se esperan obtener unas ecuaciones equivalentes a 2.7, probablemente sin llegar a tal simplificación).

A4 Actividades sobre transformaciones afines y su representación matricial

- Ejercicios de aplicación directa para practicar en el tiempo de clase la con la representación matricial de las matrices (nivel II).

A4.1 Dar la imagen de la recta $y - 2x + 1 = 0$ por el giro de 30° centrado en el punto $(-1, 1)$.

La ecuación de un giro de centro $C = (a, b)$ viene dada por 2.6. Su deducción se hizo en el marco teórico-matemático a partir del conjugado de un giro centrado en el origen por la traslación de vector \vec{OC} . En el curso de 2º de bachillerato su deducción se realiza de la misma manera que la de la homotecia en la figura 34: Se traslada el punto (x, y) por el vector que lleva C al origen, se realiza el giro de 30° y el resultado se traslada por el vector anterior en sentido inverso.

Solución: El giro de 30° centrado en $C = (-1, 1)$ viene dado por la ecuación en forma matricial:

$$\rho_{C,30^\circ} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(1 - \sqrt{3}) + 1 \\ -1 + (1 - \sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

Las transformaciones afines llevan rectas en rectas así que la imagen de la recta $y - 2x + 1 = 0$ es una recta que queda determinada por la imagen de dos de sus puntos. Dos puntos de la recta son $(0, -1)$ y $(1, 1)$.

$$\begin{aligned} \rho_{C,30^\circ} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \rho_{C,30^\circ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} + 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La recta imagen tiene como vector director $(2 + \sqrt{3}, 1)$ y pasa por el punto $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1, 0)$. Su ecuación en forma continua es $y = \frac{x - \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)}{2 + \sqrt{3}}$. Equivalentemente $y = \frac{(2 - \sqrt{3})}{7}x + \frac{(5 - 3\sqrt{3})}{14}$.

- Ejercicios para aplicar la composición y la inversión de transformaciones afines (nivel II).

A4.2 Realizar sobre el cuadrado $\square ABCD$ ($A = (-1, 1)$, $B = (-1, -1)$, $C = (1, -1)$, $D = (1, 1)$) una dilatación horizontal de centro $(1, 0)$ y razón $k = 2$ seguido de una simetría de eje $x = 0$ y representar la transformación obtenida. ¿Hubiera dado el mismo resultado la composición en el orden inverso?

Solución: Una dilatación horizontal de razón k centrada en (a, b) tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} x' = k(x - a) + a \\ y' = y \end{cases}$$

Denotamos por d_h a la dilatación y por σ a la simetría. $d_h(x) = A_1x + b_1$ y $\sigma(x) = A_2x + b_2$, donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

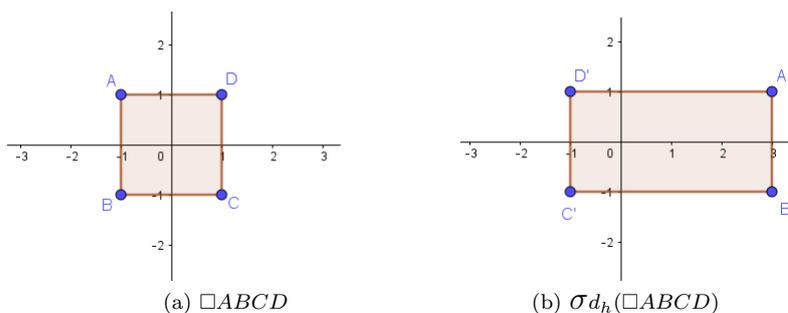
Por lo tanto,

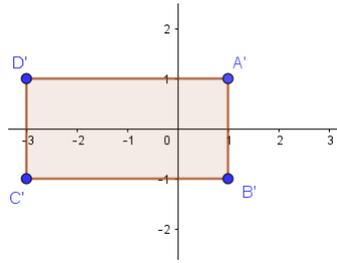
$$\sigma d_h(x, y) = A_2 A_1 x + A_2 b_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y la imagen del cuadrado $\square ABCD$ es

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La composición no es conmutativa pues aunque la matriz de la transformación es la misma en los dos





casos no lo es así la imagen del origen. Una de las composiciones es una traslación de la otra.

$$d_h\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ejercicios para consolidar el procedimiento para obtener la matriz de una transformación afín a partir de las imágenes de tres puntos no alineados (nivel II).

A4.3 Determina la ecuación matricial de la transformación afín que envía los puntos $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$ respectivamente en $(0, 1)$, $(3, 5)$, $(4, 2)$.

Solución: El procedimiento es el expuesto en el marco teórico-matemático. Se determinan primero la transformación t_1 que lleva $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ en $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$ y la transformación t_2 que lleva $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ en $(0, 1)$, $(3, 5)$, $(4, 2)$. La transformación requerida es $t_2t_1^{-1}$. Así pues,

$$t_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t_2(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar la ecuación de t_1^{-1} se calculan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y se obtiene la transformación requerida

$$t_2t_1^{-1}(x, y) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A5 Actividades sobre el concepto de grupo

Aunque no se pretende incidir en teoría de grupos se pueden incluir cuestiones sobre si determinado conjunto con una operación definida es o no un grupo con el fin de afianzar este concepto (nivel III).

A5.1 Probar que estas cuatro matrices junto con la multiplicación forman un grupo conmutativo

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: El conjunto formado por estas cuatro matrices cumple la asociatividad con el producto, por ser un subconjunto de las matrices 2×2 ; y tiene elemento neutro, el elemento \mathcal{I} . El producto es una operación

\times	\mathcal{I}	\mathcal{A}	\mathcal{B}	\mathcal{C}
\mathcal{I}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
\mathcal{A}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
\mathcal{B}	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
\mathcal{C}	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

interna del grupo y todos los elementos tienen inversa como se puede comprobar en la tabla. Dado que la tabla es simétrica se deduce que el grupo es además conmutativo.

A6 Actividades sobre el grupo de los movimientos Estas actividades buscan, de manera tanto geométrica como matricial, explorar cómo son los productos de diversos movimientos.

- A6.1 Experiencias con papel (nivel II-III). Este tipo de actividad puede ayudar a entender mejor las simetrías a la vez que a hacer conjeturas sobre el resultado de la composición de las mismas. Una hoja de papel (preferiblemente papel de calcar), un lápiz y una regla son todos los objetos de los que se precisa. Se dobla la hoja de papel y se traza la recta m sobre la doblez. Ahora en uno de los semiplanos definidos por m se dibujan diversos objetos (puntos, rectas, números...). Para obtener la imagen de estos por la simetría de eje m basta doblar la hoja de papel marcando los objetos por ambas caras y desdoblar después la hoja. El resultado se observa en la figura 44. Más allá de la

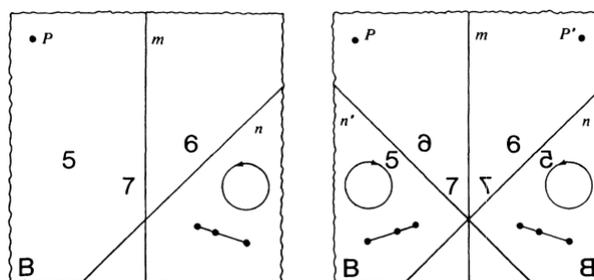


Figura 44: Experiencias con papel I[18]

comprensión de las simetrías, estas experiencias con papel pueden ser muy útiles para hacer conjeturas sobre el producto de simetrías. Se pueden conjeturar, en concreto, los resultados que ofrece el Teorema de Cartan-Dieudonné (ver marco teórico matemático). Aplicando de nuevo dobleces y marcando las figuras de las que se desea obtener la imagen se puede intuir que la composición $\sigma_m\sigma_l$ es una traslación de vector $2\vec{u}$, que la composición $\sigma_n\sigma_u$ es un giro de $2\cdot 90^\circ$ y que la composición $\sigma_m\sigma_l\sigma_u$ es una simetría con deslizamiento de eje u y vector de traslación $2\vec{u}$, tal y como se muestra en la figura 45. A partir de ahí se pueden generalizar estos resultados dando lugar al teorema. Además se pueden conjeturar otros resultados. Por ejemplo, $\sigma_n\sigma_m\sigma_l$ es una simetría de recta t , paralela a n por el vector $-\vec{u}$ (basta ver que la recta t queda fija por tal composición: $\sigma_m\sigma_l$ la desplaza por $2\vec{u}$, por lo deducido anteriormente; y ahora, la devuelve a su posición inicial).

- Ejercicios para estudiar geoméricamente la composición de movimientos. Sobre todo a partir de las consecuencias de la experiencia anterior, es decir, de la escritura de los movimientos como producto de simetrías, se pueden obtener los productos de otros movimientos y propiedades de estos productos. Esto, antes de volver al estudio matricial de los movimientos, aporta un sentido geométrico y una

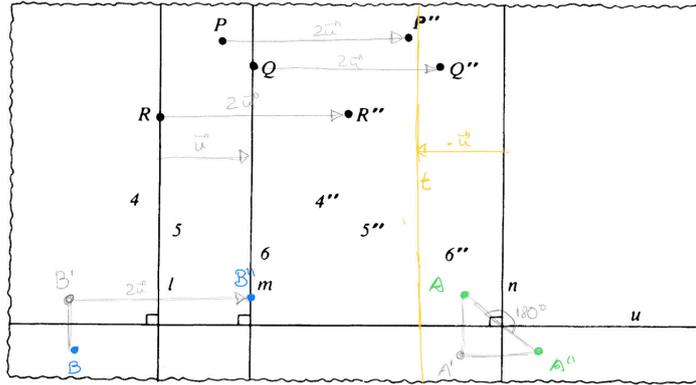
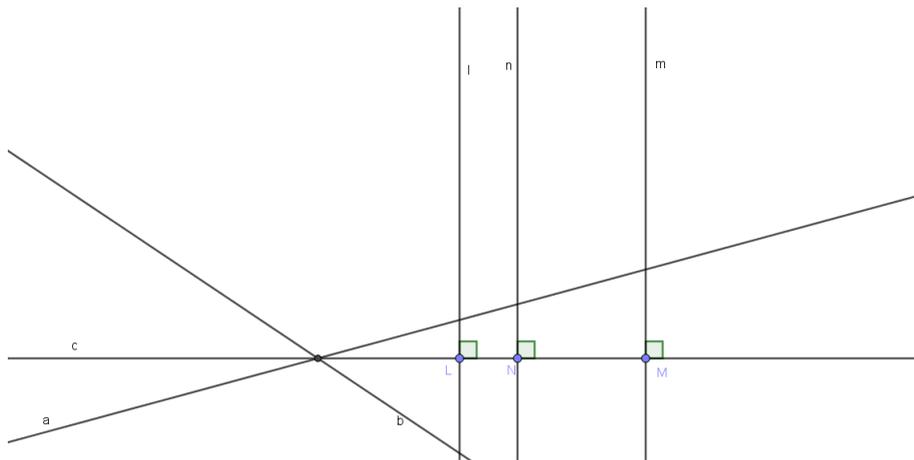


Figura 45: Experiencias con papel II

visualización del contenido. (nivel III)

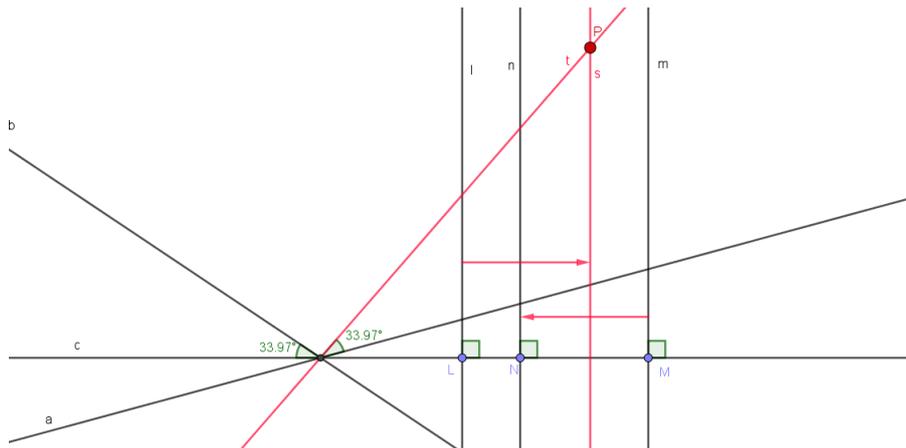
A6.2 En la siguiente figura encuentra el punto fijo de $\sigma_t\sigma_s$ donde $\sigma_s = \sigma_n\sigma_m\sigma_l$ y $\sigma_t = \sigma_c\sigma_b\sigma_a$.
Fuente: [18]



Solución: $\sigma_n\sigma_m$ es la traslación de vector $\overrightarrow{2NM}$ por lo que $\sigma_n\sigma_m\sigma_l$ deja fija la recta s paralela a ella a través de \overrightarrow{NM} (la aplicación de la simetría con eje en l lleva a s a la paralela a l a través de $-\overrightarrow{NM}$ y la aplicación conjunta de las simetrías de ejes n y m respectivamente la traslada a través de $\overrightarrow{2NM}$, devolviéndola a su posición inicial) y no deja fijos otros puntos, por lo tanto es la simetría σ_s .

Por otra parte, $\sigma_c\sigma_b$ es un giro con centro en el punto de corte de b y c y de ángulo el doble del ángulo de b a c ($2 \cdot 33.97^\circ$). $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ deja fija la recta t que consiste en girar a en 33.97° alrededor del punto de corte donde coinciden las tres rectas (al aplicar la simetría de eje a se desplaza t a la recta consistente en girar a alrededor del punto de corte en un ángulo de -33.97° y la aplicación conjunta de las simetrías de ejes b y c respectivamente gira la nueva recta alrededor del mismo punto en un ángulo de $2 \cdot 33.97^\circ$ devolviéndola a su posición inicial) y no deja fijos otros puntos, por lo tanto es la simetría σ_t .

El punto de corte P de s y t queda fijo por $\sigma_t\sigma_s$ ya que la primera simetría fija todos los puntos de la recta s y la segunda, todos los puntos de la recta t . La composición de ambas es un giro, así que no hay más puntos fijos.

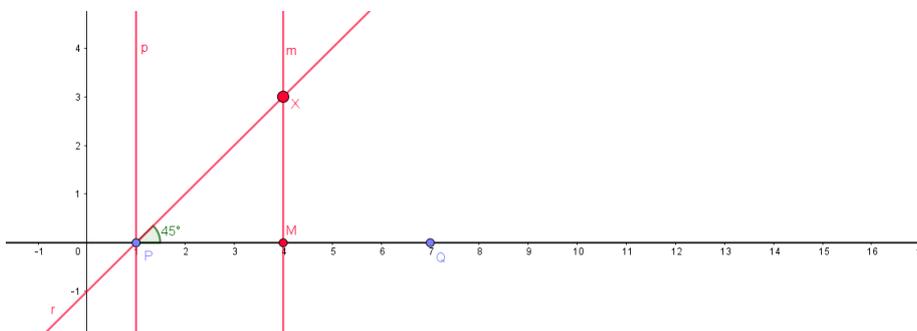


A6.3 Dados los puntos del plano P y Q halla el punto del plano que queda fijo por la composición de movimientos $\mathcal{T}_{P,Q}\rho_{P,45^\circ}$. Fuente: [18]

Solución: Se traza el segmento PQ y el punto medio M del mismo. A continuación se trazan las perpendiculares p y m a \overleftrightarrow{PQ} desde P y M respectivamente y la recta r que forma un ángulo de 45° con p desde P . Así, escribiendo los movimientos como producto de simetrías se tiene que $\mathcal{T}_{P,Q} = \sigma_m\sigma_p$ y $\rho_{P,45^\circ} = \sigma_p\sigma_r$. Por lo tanto,

$$\mathcal{T}_{P,Q}\rho_{P,45^\circ} = \sigma_m\sigma_p\sigma_p\sigma_r = \sigma_m\sigma_r$$

que es un giro de centro el punto de corte X de m y r . Este es entonces el punto fijo requerido.



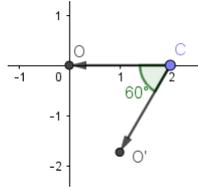
- Ejercicios para estudiar matricialmente el grupo de los movimientos. En estos ejercicios se utiliza los productos de matrices representando la composición de movimientos y las matrices inversas representando los movimientos inversos. Entra en juego también el Teorema de clasificación de las matrices ortogonales.

A6.4 (nivel II) Determinar la ecuación matricial del giro de 60° y de centro $C = (2, 0)$.

Solución: Si la ecuación del giro $\rho_{C,60^\circ}$ es $\rho_{C,60^\circ}(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para determinar b se calcula la imagen $O' = (O_1, O_2)$ de $(0, 0)$ por $\rho_{C, 60^\circ}$. Basta tener en cuenta que la distancia de O' a C es la misma que la de O a C y que el ángulo de giro del vector \overrightarrow{CO} al vector $\overrightarrow{CO'}$ es 60° .



Es decir,

$$O_1^2 + O_2^2 = 4 \quad (3.3)$$

$$\frac{(O_1, -2) \cdot (-2, 0)}{4} = \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

De (3.4) se tiene que $O_1 = 1$ y de (3.3) se tiene que $O_2 = \pm\sqrt{3}$. Como el ángulo del giro es directo (en sentido antihorario) el valor de O_2 es $-\sqrt{3}$. Por lo tanto, la ecuación del movimiento es

$$\rho_{C, 60^\circ}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

A6.5 (nivel III) Sean

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ y } B_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}$$

Comprobar que $A_\theta A_\phi = A_{\theta+\phi}$, $A_\theta B_\phi = B_{\theta+\phi}$, $B_\theta A_\phi = B_{\theta-\phi}$ y $B_\theta B_\phi = A_{\theta-\phi}$. Fuente: [2]

Solución: (solo para el últimos caso $B_\theta B_\phi = A_{\theta-\phi}$).

Teniendo en cuenta las fórmulas del seno y el coseno de la diferencia de ángulos

$$\begin{aligned} \cos(\theta - \phi) &= \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \\ \sin(\theta - \phi) &= \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \end{aligned}$$

$$B_\theta B_\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \phi) & \sin(\theta - \phi) \\ -\sin(\theta - \phi) & \cos(\theta - \phi) \end{pmatrix}$$

Se deduce que la composición de dos movimientos inversos, bien sean simetrías o simetrías con deslizamiento, da como resultado un movimiento directo. Si los ejes de las simetrías (con o sin deslizamiento) forman ángulos de θ° y ϕ° respectivamente con el eje horizontal y $\theta - \phi \neq 0$ entonces la composición de los movimientos inversos es un giro de ángulo $\theta - \phi$. En caso contrario, es una traslación.

A7 Actividades sobre grupos de simetría

Se busca sobre todo una visualización geométrica mediante ejercicios de búsqueda de simetría en figuras, aunque también se relacionarán los grupos de simetría con la representación matricial.

A7.1 (nivel II) Los puntos $(1, -\sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3})$ y $(-2, 0)$ determinan un triángulo equilátero. Encuentra las matrices que representan las simetrías del triángulo. Haz lo mismo para el hexágono regular cuyos vértices son $(2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(-1, \sqrt{3})$, $(-2, 0)$, $(-1, -\sqrt{3})$ y $(1, -\sqrt{3})$. Fuente: [2]

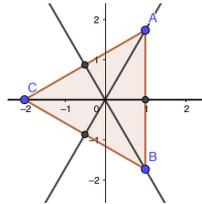
Solución: (solo para el triángulo equilátero).

Los ejes de simetría del triángulo equilátero son las tres medianas, mediatrices, bisectrices o alturas (en este caso coinciden).

Recta 1: De C a $M_1 = (1, 0)$ (punto medio de AB): $y = 0$. Forma un ángulo de 0° con el eje horizontal.

Recta 2: De B a $M_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (punto medio de AC): $y = -\sqrt{3}x$. Forma un ángulo de 240° con el eje horizontal.

Recta 3: De A a $M_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (punto medio de BC): $y = \sqrt{3}x$. Forma un ángulo de 60° con el eje horizontal.



Las matrices que representan cada una de las simetrías son, en el mismo orden,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A7.2 (nivel III) Encuentra las simetrías presentes en cada una de las letras del alfabeto y clasifica las letras en diez grupos en función de las simetrías que contengan (nota: las simetrías que están presentes en las letras del alfabeto son la identidad id , la simetría de recta horizontal σ_h , la simetría de recta vertical σ_v , la simetría de recta la diagonal principal σ_{d_1} , la simetría de recta la diagonal secundaria σ_{d_2} , el medio giro o simetría respecto al centro O , el giro de centro O y Angulo 120° y el giro de centro O y ángulo 90° ; además de las infinitas simetrías y giros presentes en la letra O).

Handwritten classification of letters based on symmetry groups:

- $\{id\}$: F, G, J, P, R
- $\{id, \sigma_v\}$: A, M, T, U, V, W
- $\{id, \sigma_h\}$: B, C, D, E, K
- $\{id, \sigma_h, \sigma_v\}$: H, I
- $\{id, \sigma_{d_1}\}$: Q
- $\{id, \sigma_{d_2}\}$: L
- $\{id, \sigma_{d_1}, \sigma_{d_2}, \sigma_v\}$: N, S, X
- $\{id, \sigma_v, \rho_{0, 120, 240}\}$: Y
- $\{id, \sigma_v, \sigma_h, \sigma_{d_1}, \sigma_{d_2}, \sigma_v, \rho_{0, 120, 240}\}$: O
- $\{id, \text{cualquier giro de centro } O, \text{ cualquier simetría que pase por } O\}$: O

A8 Actividades sobre grupos ornamentales

Básicamente se distinguen dos tipos de actividades en este punto: de reconocimiento de grupos ornamentales en figuras y de creación de grupos ornamentales a partir de los elementos principales.

- Reconocimiento de grupos ornamentales. No se pretende que los alumnos memoricen los grupos de friso o de mosaico pero sí que a partir de la descripción de los mismos y de la ayuda de los esquemas 23 y 26 sean capaces de diferenciar los movimientos presentes en unos y otros y de identificar en base a ello el grupo correspondiente. Será particularmente interesante utilizar los mosaicos de la Alhambra y los mosaicos de Escher (nivel II-III).

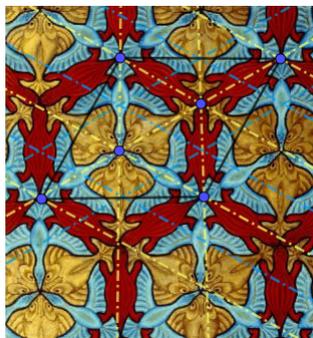
A8.1 Identifica el grupo de friso que se muestra en las siguientes figuras indicando los ejes o centros de simetría que te han permitido hacerlo. Fuente: [18]

Figuras y solución:

<p>2-centro y simetría de eje la recta centro F_2'</p>	<p>(a) </p>
<p>2-centro y simetría de eje distinto a la recta centro F_2</p>	<p>(b) </p>
<p>2-centro y simetría de eje la recta centro F_2'</p>	<p>(c) </p>
<p>2-centro y simetría de eje distinto F_2 a la recta centro</p>	<p>(d) </p>
<p>2-centro y simetría de eje distinto a la recta centro F_1'</p>	<p>(e) </p>
<p>2-centro simetría hay simetría con desplazamiento F_3</p>	<p>(f) </p>
<p>2-centro simetría de eje la recta centro F_1'</p>	<p>(g) </p>
<p>2-centro y simetría de eje la recta centro F_2'</p>	<p>(h) </p>
<p>2-centro simetría hay simetría con desplazamiento F_3</p>	<p>(i) </p>

A8.2 Determinar el grupo cristalográfico correspondiente al siguiente mosaico de Escher. Dibujar la celda primitiva y los ejes y centros de simetrías que aparecen en ella.

Figura y solución: (grupo $p3m1$ tomado de la figura 25. Los ejes amarillos corresponden a simetrías, los ejes azules a simetrías con deslizamiento y los puntos a 3-centros).



- Generación de mosaicos. Como se ha mostrado ya en la organización de contenido, una actividad consistirá en la creación de un mosaico en Geogebra a partir de su celda primitiva. Lo que se pide es que el alumno genere el motivo del mosaico y lo distribuya alrededor del plano utilizando los movimientos correctos, los que pertenecen al grupo de mosaico que le corresponde (nivel III).

A9 Actividades con el lenguaje de programación (Python-OpenCV)

El objetivo del empleo del lenguaje de programación es llegar a la creación de un filtro de mosaico con la guía del profesor y con un ejemplo de partida. Este será el proyecto final de la propuesta. Para que tal fin se logre de manera eficaz es adecuada además la introducción de algunos ejercicios que ayuden a los alumnos a adquirir un cierto dominio de Python y, en especial, de las funciones y algoritmos que se van a emplear.

- Ejercicios de práctica de Python-OpenCV (nivel II).

A9.1 Leer la imagen guardada en el fichero 'image.jpg', crear un fondo de dos veces el alto y dos veces el ancho de la imagen y colocar en la esquina superior izquierda la propia imagen y en la esquina inferior derecha la imagen rotada 180° . Mostrar la imagen por pantalla y guardarla en un fichero de nombre 'imagenrotada.png'.

Solución:

```
import cv2 as cv
import numpy as np

#Tomamos la imagen original
img = cv.imread('image.jpg')
cv.imshow('image',img)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()

rows,cols,channels = img.shape
pts1 = np.float32 ([[0,0],[img.shape[1]-1,img.shape[0]-1],[img.shape[1]-1,0]])
pts2 = np.float32 ([[2*(img.shape[1]-1),2*(img.shape[0]-1)],
[img.shape[1]-1,img.shape[0]-1],[img.shape[1]-1,2*(img.shape[0]-1)]])
M = cv.getAffineTransform(pts1,pts2)
imgrot = cv.warpAffine(img,M,(2*cols,2*rows))
```

```

cv.imshow('image',imgrot)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()

I= np.float32([[1,0,0],[0,1,0]])
img = cv.warpAffine(img,I,(2*cols,2*rows))
img=img+imgrot
cv.imshow('image',img)
cv.waitKey(0)
cv.destroyAllWindows()
cv.imwrite("imagenrotada.png",img)

```



- A9.2 Proyecto final. La idea del proyecto final es que sea una tarea por parejas o grupal (grupos de tres o a lo sumo cuatro personas), que se desarrolle en una doble sesión (dos sesiones preferiblemente consecutivas de 50 minutos) y en la que el profesor puede resolver las dudas y dificultades que les surjan a los alumnos. Ya se ha descrito en varias ocasiones el contenido del proyecto. Se trata de crear a partir de una imagen inicial un filtro de mosaico a partir de uno de los grupos *pm*, *pg*, *pmm*, *pmg*, *pgg* y *p4* como se ha realizado en el marco tecnológico. El profesor puede utilizar el grupo más sencillo *p1* como ejemplo y asignar a las parejas o grupos el grupo cristalográfico que van a utilizar para desarrollar su filtro de imagen. Al final se realizará una breve presentación ante el resto de los compañeros explicando cómo se ha desarrollado el código y qué movimientos aparecen en el mosaico (nivel IV).

3.4 Contribución a las competencias clave

Una de las máximas que se extrae del marco didáctico es el aprendizaje basado en las competencias clave. En esta propuesta se logra en menor o mayor medida desarrollar cada una de las siete competencias clave del currículo.

Competencia matemática y competencias en ciencia y tecnología (CMCT)

Es por razones obvias la más desarrollada en la propuesta. Se incide fundamentalmente en algunos aspectos: la estructura y elementos simbólicos que subyacen bajo ciertos fenómenos de la realidad, como las imágenes digitales; la argumentación lógico-matemática, mediante deducciones de algunos resultados; y la visualización geométrica, clave para reinterpretar el lenguaje simbólico empleado e intuir nuevas propiedades o regularidades.

Competencia en comunicación lingüística (CCL)

En el ámbito de las matemáticas como en el de la ciencia en general es clave la comunicación y divulgación de los resultados para la consecución de logros comunes, sobre todo si estos depende de diferentes disciplinas. Por ello es importante trabajar cuanto antes, y más en estos alumnos cuyas perspectivas académico-profesionales están estrechamente relacionadas con la ciencia, aspectos comunicativos. Así, en la puesta en práctica de la propuesta se hará hincapié en el buen uso del lenguaje matemático para expresar ideas, opiniones o dudas al profesor o al resto de los compañeros de manera oral y escrita. La introducción de presentaciones como la que se pretende en el proyecto final constituye un buen instrumento de cara a

cumplir estas expectativas.

Competencia digital (CD)

El empleo de las herramientas tecnológicas facilita la realización eficaz de muchas tareas: buscar y compartir información, procesar datos, realizar cálculos, presentar resultados... Su inclusión en el estudio académico repercutirá en el manejo responsable y eficaz de los presentes alumnos. En esta propuesta, en particular, se ha apostado con fuerza por el manejo de entornos de programación, pues actualmente son uno de los motores del desarrollo científico-tecnológico; se ha dado una introducción formal al mundo de las imágenes digitales y a su procesamiento, un objeto que está presente en el día a día de toda persona; y, se ha incentivado el uso de otras herramientas para la representación geométrica del contenido matemático a través de Geogebra.

Aprender a aprender (AA)

A través de los diferentes elementos de la propuesta didáctica se pretende potenciar ciertas actitudes y habilidades de los alumnos de cara a que asuman responsabilidades en su aprendizaje y adquieran autonomía en el estudio, especialmente en lo que se refiere a las matemáticas: autocrítica con el propio aprendizaje, toma de conciencia de los ritmos de aprendizaje de cada cual, planificación de tiempos, cultura del error (aprender de los errores) y aplicación de estrategias para una mejor comprensión.

Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE)

La creatividad, la capacidad de asumir proyectos, la capacidad de planificación y organización y la gestión de emociones entre otras son cualidades muy valoradas y de gran enriquecimiento personal que se pretenden asumir a partir de algunos de los requerimientos de la propuesta como puede ser el proyecto final de programación o tareas de investigación.

Competencia social y cívica (CSC)

La cooperación y el trabajo conjunto son primordiales de cara al progreso científico y va perdiendo fuerza la concepción de las matemáticas como una disciplina de carácter solitario. Así, tienen un papel protagonista una serie de valores como el trabajo en equipo y el respeto hacia los demás y sus opiniones. Estos valores se trabajarán en todo momento durante las sesiones lectivas y especialmente en aquellas en las que se desempeñe un trabajo colaborativo bien por grupos o bien por parejas.

Conciencia y expresiones culturales (CEC)

El conocimiento de cómo se han gestado y cómo se han puesto en común las diversas teorías matemáticas a lo largo de la historia es más valioso de lo que uno se puede imaginar a priori, especialmente en la enseñanza de las matemáticas, pues aporta una visión de cómo el ser humano ha ido aprendiendo a hacer matemáticas desde la nada, qué es lo primero que ha aprendido y cómo ha ido construyendo a partir de ahí. Además, las matemáticas han contribuido en la sociedad, en la cultura y en el arte a lo largo de la historia. En esta propuesta se tiene un buen ejemplo, pues la búsqueda del ser humano de la simetría es casi una obsesión y la importancia de los grupos ornamentales como decoración de las construcciones queda patente en muchos edificios que aún se conservan. Se tratarán de transmitir en la medida de lo posible estas ideas para desarrollar una apreciación histórico-cultural a través de las matemáticas.

3.5 Evaluación del aprendizaje

La evaluación es muy influyente en el aprendizaje del alumno, pues el ideal de aprender por aprender no es para nada frecuente y, por lo general, el alumno se mueve por los requerimientos que vienen impuestos por la evaluación. El foco de esta en unos aspectos particulares determinará que el alumno también los conciba como más importantes y que ponga en su consecución su mayor empeño en detrimento de otros. Por este motivo es más delicado de lo que puede parecer la elección de los criterios y las herramientas de evaluación. Los primeros ya se han determinado en el apartado 3.2 y en cuanto a los segundos se tendrá

muy en cuenta lo que se desea enfatizar en esta propuesta en vistas a que el alumno también lo priorice. Así, el empeño por incidir en la contextualización tecnológica de las matrices convertirá al proyecto final en la herramienta de evaluación de mayor peso. La insistencia en la relación algebraico-geométrica y en la argumentación lógico-matemática que se trabajan con diversas actividades a lo largo de las sesiones lectivas asimismo implica que estos dos aspectos sean valorados en la evaluación otorgando un porcentaje notable al trabajo diario, que puede medirse a partir de la entrega de determinadas actividades como tarea. La participación del alumno durante las clases será indicio de que se está logrando motivar el aprendizaje de las matrices a partir de los nuevos elementos introducidos y por lo tanto tendrá su papel. La creciente valoración de estas tres primeras herramientas resta protagonismo a la clásica prueba escrita que, no obstante también será considerado, ya que es clave para determinar de manera individualizada el aprendizaje obtenido por el alumno. Teniendo en cuenta estas consideraciones la distribución de la nota final en base a estas herramientas de evaluación puede variar a la que aquí se va a proponer, pero cabe reflexionar y tener en cuenta estas ideas.

En resumen las cuatro herramientas de evaluación que se proponen para evaluar eficazmente esta propuesta son las siguientes:

Proyecto final

El proyecto final no solo está estrechamente relacionado con el objetivo de aplicación tecnológica que se pretende sino que conjuga los diversos conocimientos que se han desarrollado durante toda la unidad en una tarea más compleja y de aplicación a la realidad social y tecnológica. En el proyecto final se valorará:

- La aplicación correcta de los movimientos que forman parte del grupo de mosaico.
- El uso adecuado de las funciones y algoritmos de OpenCV estudiados.
- La originalidad y el empleo de ideas propias.
- La limpieza y el orden en el código.
- El manejo de los conceptos teóricos en la exposición oral.
- La claridad de la exposición.

Entrega de actividades

La entrega de actividades será fundamental para valorar el interés que ha mostrado el alumno y la comprensión que demuestra sobre los contenidos. Las actividades que se requerirán para la evaluación se caracterizan por una complejidad un poco mayor que permitirá determinar el esfuerzo y la capacidad de razonamiento de los alumnos. Entre ellas se incluyen:

- La deducción guiada de alguna de las ecuaciones de las transformaciones afines (A3.1).
- El análisis sobre un conjunto para determinar si es un grupo (A5).
- El estudio geométrico de la composición de movimientos (A6.2, A6.3).
- La identificación de movimientos en figuras de frisos y mosaicos así como del grupo que a estos les corresponde (A8.1, A8.2).
- La generación de un mosaico o friso con Geogebra (A8.3).

Esta herramienta de evaluación se valorará de acuerdo con los siguientes ítems:

- El manejo de los conceptos teóricos.
- La argumentación y el razonamiento matemático.
- El uso de un lenguaje y notación matemático adecuado.
- El orden y la claridad de las ideas.

- La originalidad y el empleo de ideas propias.
- La limpieza y claridad en la presentación.

Prueba escrita

La prueba escrita medirá el grado en el que los alumnos desarrollan los estándares de aprendizaje planteados para la propuesta en cuanto al contenido puramente matemático (con el proyecto final ya se ha dado el peso suficiente a la aplicación tecnológica y a la programación). Será una prueba realizada durante una sesión lectiva (50 minutos) en la que el alumno tendrá que resolver sin ningún material de apoyo una serie de actividades sobre contenidos que se consideran clave para el aprendizaje del alumno en esta propuesta.

- Aplicar geométrica y analíticamente una transformación afín sobre una figura (A4.1, A4.2).
- Determinar la ecuación matricial de una transformación afín por la imagen de tres puntos no alineados (A4.3).
- Determinar el movimiento resultante de la composición o la inversión de otros. (A6.4, A6.5)
- La identificación de simetrías en una figura plana (A7).

Cada una de las actividades o ejercicios planteados en el examen se valorará de acuerdo a unos determinados criterios de evaluación propios.

Participación en clase La participación activa del alumno durante las sesiones lectivas enriquecerá su aprendizaje así como el de sus compañeros y, por ello, es otro aspecto que constará en la evaluación. Se tendrán en cuenta:

- La respuesta a las preguntas y actividades requeridas.
- Las preguntas y la manifestación de dudas cuando las haya.
- La actitud de respeto y el buen comportamiento.
- El interés mostrado en las clases.

Así, la distribución de la calificación final en función de las cuatro herramientas que se propone es la siguiente:

Proyecto final: 40%

Entrega de actividades: 25%

Prueba escrita: 25%

Participación en clase: 10%

La propuesta didáctica planteada en este trabajo está desligada de un contexto de aplicación (características socio-económicas de una comunidad o centro y de funcionamiento de este) por lo que no se hablará de la calificación mínima exigida y ni sobre los criterios de recuperación, que probablemente estén en correspondencia con los de otras unidades didácticas o se consideren a nivel trimestral. En el caso de plantearse una recuperación específica para esta propuesta quizá sería conveniente realizarla en base a una entrega de actividades (en las que puede incluirse algún ejercicio de programación) y de una prueba escrita.

3.6 Otros elementos del diseño curricular

De manera más o menos explícita se han abordado los elementos fundamentales de un diseño curricular: los objetivos, que se han planteado desde el principio en la introducción; las metodologías, que se deducen del marco didáctico; y, las competencias clave, los contenidos, la secuenciación temporal, las actividades

de aprendizaje y la evaluación, que se han analizado en el presente capítulo. En cuanto a los elementos restantes (análisis del entorno, recursos, atención a la diversidad, planes complementarios y autoevaluación de la unidad) se darán algunos breves apuntes pero no se entrará en detalles al carecer esta propuesta, como se exponía al término del apartado de evaluación, de un contexto de aplicación.

Obviamente no es posible dar una **introducción contextual** en lo que se refiere al entorno social y cultural pero sí sobre el contenido dentro de la asignatura de matemáticas. No se está hablando de una unidad contemplada en el currículo de bachillerato por lo que no se puede situar en el mismo con exactitud, pero es claro que la propuesta está concebida para suceder a las unidades de matrices y determinantes del bloque de álgebra. Este es el segundo bloque del curso después del bloque de análisis y precede al bloque de geometría, en el que se introduce la geometría analítica en tres dimensiones. El uso de la geometría analítica en dos dimensiones de esta propuesta será, por lo tanto, apropiado para recordar las nociones del curso anterior y de 4º de ESO y manejarlas con un dominio suficiente en el bloque de geometría de 2º de bachillerato. La propuesta tiene además otros dos fuertes nexos de unión con las matemáticas de la etapa de educación secundaria y bachillerato. El primero es claramente la recuperación de las transformaciones geométricas que se introducen de manera desconectada en 3º de ESO y el segundo es la generalización de un concepto como es el de función, que se amplía más allá del considerado sobre una única variable real de salida y de llegada. Sobre el grupo de alumnos solo se ha planteado una característica a tener en cuenta: el conocimiento mínimo de algún lenguaje de programación; pues de otra manera el proyecto final requeriría de una introducción a entornos de programación más extensa que no se pretende.

Los **recursos** empleados dependerán en gran medida de los disponibles en el centro en el que desarrolle la propuesta. Para el proyecto final será imprescindible contar con un aula de informática.

La **atención a la diversidad** está muy ligada al grupo de alumnos y a las necesidades específicas que estos puedan tener. Se tendrán en cuenta las necesidades de refuerzo de algunos alumnos ideando para ellos una serie de actividades que se centren en potenciar las destrezas en las que muestran menor desarrollo. En el caso opuesto, se ampliará el elenco de actividades con otras de mayor demanda cognitiva para quienes muestren altas capacidades. Otra característica a considerar, dado que se está hablando del curso de 2º de bachillerato en su ámbito científico-tecnológico son las perspectivas académico-profesionales que se estén planteando los alumnos de cara a insistir en contenidos más aplicados o más formales dentro de los límites que se marca la propuesta.

Entre los **planes complementarios** se podría considerar la visita a La Alhambra de Granada, que es habitual incluir como plan complementario en unidades didácticas sobre geometría y que, en este caso particular, es un complemento ideal al estudio de los grupos cristalográficos, pues es el único edificio en el que se pueden encontrar representados los 17 grupos. En esta misma línea un ‘paseo’ por la localidad en la que se sitúe el centro en busca de elementos decorativos en los que se observen frisos y mosaicos es también apropiada. Por otro lado, una charla de algún experto sobre imágenes digitales o sobre la aplicación de las matrices a la tecnología aportaría una mayor perspectiva a la contextualización de las matrices. Se podrían contemplar innumerables planes complementarios, estas son solo las sugerencias que se creen más adecuadas a los objetivos que se pretenden.

Por último, en cuanto a la **autoevaluación de la unidad**, además de los ítems que habitualmente se valoran: adecuación de los contenidos, adecuación de las metodologías, etc; cabe reflexionar fundamentalmente sobre dos cuestiones: si el aprendizaje mostrado por los alumnos sobre las matrices en particular y sobre las matemáticas en general ha sido más profundo y si los elementos introducidos en la propuesta han conseguido el efecto motivador que pretendían. La respuesta a estas dos cuestiones constituye el indicador sobre la idoneidad de la propuesta didáctica aquí planteada.

4 Conclusiones finales

Dado que las necesidades de la sociedad cambian y que las ciencias progresan con nuevos descubrimientos la didáctica, en general, aunque manteniendo una base y unos fines constantes, no puede permanecer inmutable con el paso del tiempo. Cada una de las especialidades de la didáctica ha de reflexionar continuamente sobre su propia enseñanza y eventualmente reformularse qué conocimientos y destrezas enseñar y cómo enseñarlos.

Con esta visión paradigmática profundamente transformativa nace el presente trabajo. En el caso particular de la didáctica de las matemáticas posiblemente cabe replantearse la enseñanza de diversos contenidos: qué interpretación tienen, cómo surgen, cómo se aplican a la realidad, etc. Uno de ellos, y el que ha dado pie a la propuesta didáctica que constituye este trabajo, es el tema de matrices de bachillerato. Se ha considerado que el estudio de las matrices como un objeto con una estructura algebraica propia ha de acompañarse de una contextualización apropiada que aproveche todo su potencial como instrumento de las propias matemáticas y de representación de fenómenos reales. Quizá otros objetos estudiados a lo largo de las etapas de la ESO y bachillerato, como el del propio número (natural, racional o real), tienen una interpretación y una aplicación tan clara y evidente que justifica por sí sola la necesidad de su estudio formal. Sin embargo, no es este el caso de las matrices. Muchos alumnos superan el bachillerato científico-tecnológico, incluso de forma brillante, sin ni siquiera intuir la utilidad de este objeto matemático que se les ha introducido por primera vez en el último curso de su etapa preuniversitaria y al que han dedicado numerosas sesiones lectivas (al menos dos unidades didácticas incluyendo la de determinantes que está estrechamente vinculada e igualmente descontextualizada). De ahí la motivación de esta propuesta, que, en concreto, ha dado una interpretación a las matrices como transformaciones geométricas en el plano y una aplicación de las mismas a la tecnología a partir de la creación de filtros de imágenes digitales. A raíz de esto se han perseguido una serie de objetivos que, desde un punto de vista personal y bajo la fundamentación teórica dada en el marco didáctico, pueden repercutir en un aprendizaje más sustancial de las matemáticas en general, y así se han tratado de enfatizar en la propuesta. De esta manera se ha incidido en la argumentación y el razonamiento matemático, en declive de la mera aplicación de algoritmos prefijados; se han conectado el álgebra y la geometría, que en estos niveles no pueden concebirse la una sin la otra; y, se ha tratado, bajo el enfoque de la Educación Matemática Realista, de recuperar la concepción de las matemáticas como instrumento de estudio del mundo que nos rodea, en detrimento de las matemáticas como un saber alejado de la realidad y accesible solo para unos pocos privilegiados.

Con estos propósitos se ha tratado de diseñar la propuesta didáctica, seleccionando los contenidos, las actividades y la forma de evaluar el aprendizaje de los alumnos que se ha considerado más adecuada. Y aunque se tiene constancia, en primer lugar, de que esta elección puede haber sido más o menos exitosa, y, en segundo lugar, de que las dificultades que entraña la inclusión de unos contenidos completamente nuevos en el currículo, y mas aún, de una forma novedosa de enfocarlos, no son pocas; se considera, por encima de estas cuestiones, el intento por mejorar la enseñanza de las matemáticas en el terreno concreto de las matrices. Probablemente, la elección de los elementos curriculares más adecuados para esta propuesta solo sea posible tras la experimentación con diversos grupos y tras varias reformulaciones, pero en este trabajo se ha tratado de aportar una primera aproximación como parte un proyecto mayor.

Referencias bibliográficas

- [1] Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. *M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII, 119-127. Santander: SEIEM.* 16
- [2] Armstrong, M.A. (1988). *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag New York Inc. 81
- [3] Anderson, L.W., y Krathwohl, D.R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing: a Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Longman, New York. 3, 18, 20
- [4] Banchoff, T. y Wermer, J. (1992). *Linear algebra through geometry (2ª ed.)*. Springer. 17
- [5] Brannan, D.A., Esplen, M.F. y Gray, J.J. (2012). *Geometry (2ª ed.)*. Cambridge University Press. 21
- [6] Carretero, M. (1994) Constructivismo y Educación. Buenos Aires. Aique. 17
- [7] Domínguez Muro, M. (1991). El aprendizaje por descubrimiento aplicado a la enseñanza de las matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, ISSN 1130-488X, N° 7, 39-42.* 18
- [8] Du Sautoy, M. (2008). *Symmetry. A journey into the Patterns of Nature*. Harpin Collins e-books. 3, 38, 39
- [9] Fardin, D. y Radmehr, F. (2013). A Study on K5 students' mathematical problem solving based on Revised Bloom Taxonomy and psychological factors contribute to it. *European Journal of Child development, Education and Psychopathology, Vol. 1, N° 3, 97-123.* 18
- [10] Freudenthal, H. (1999). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Springer. 16
- [11] García Perales, R. (2015). La competencia matemática en las evaluaciones PISA. *Investigar con y para la sociedad, Vol. 2, 2015 (Volumen 2), ISBN 978-84-686-6905-2, págs. 1237-1246.* 16
- [12] Gómez Alfonso, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. *Las matemáticas del siglo XX una mirada en 101 artículos / coord. por Antonio Martínón Cejas, ISBN 84-95599-03-1, 77-80* 8
- [13] González Torquemada, L. (2012). *Enseñanza en Bachillerato de Geometría a través del aprendizaje de un lenguaje de programación orientado a objetos.* (Trabajo de fin de Máster). Universidad Internacional de La Rioja. 20
- [14] Gutiérrez Ocerín, L., Martínez Rosales, E. y Nebreda Saiz, T. (2008). Las competencias básicas en el área de matemáticas. *Cuadernos de educación de Cantabria ISBN: 978-84-95302-29-8* 19
- [15] Hannah, J., Thomas, M.O.J. y Sepideh, S. (Junio, 2013). Emphasizing language and visualization in teaching linear algebra. *International Journal in mathematical education.* 17
- [16] Luna, F., Goñi Zábala, J.M., Gil Martín, A. y González Aguado, E. (Junio, 2011). ¿Qué mide PISA y cómo hay que darle respuesta?, *Cuadernos de pedagogía, 58-70.* 15, 18
- [17] Rodríguez Silvestre, M. (2010). *Generación de teselaciones periódicas: grupos cris* (Trabajo de fin de carrera). Universidad Politécnica de Madrid (Facultad de informática).
- [18] Martin, G.E. (1982). *Transformation Geometry. An introduction to simmetry*. Springer-Verlag New York Inc. 3, 29, 58, 78, 79, 80, 83
- [19] Martínez Sánchez, J.M. (1997). Introducción a las imágenes digitales: creación y utilización. *Museo, N°2, 137-147.* 52
- [20] Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1(2), 47-66.* 3, 15, 16
- [21] Rojas Matas, A. y Cano Rojas, A. (Enero, 2011). Trabajando con imágenes digitales en clase de matemáticas. *La Gaceta de la RSME Vol.13, Num. 2, 317-336.* 53
- [22] Smith, M.S. y Stein, M.K. (February 1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School 3, 344-50.* 8, 18, 74

- [23] Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press. 17
- [24] Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991): *Visualization and the Nature of Mathematics* in W. Zimmermann y S. Cunningham (eds): *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America. 17
- [25] Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Recuperado de <https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2007-238>. 7
- [26] Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Recuperado de <https://www.boe.es/eli/es/rd/2007/11/02/1467/con>. 5
- [27] Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Recuperado de <https://www.boe.es/buscar/pdf/2015/BOE-A-2015-37-consolidado.pdf>. 5, 7
- [28] *OpenCV Source Computer Vision*. Recuperado de https://docs.opencv.org/master/d6/d00/tutorial_py_root.html. 57
- [29] *Web del Grupo de Investigación "ANILLOS Y MÓDULOS", Universidad de Granada*. (28 de noviembre de 2010). Recuperado de https://www.ugr.es/~anillos/verano2009/090709_cla.pdf. 3, 52