



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Investigación en Matemáticas

Diagramas de Betti de ideales de aristas

Autor:

Elvira Pérez Callejo

Tutor/es:

Philippe Gimenez

Agradecimientos

Este Trabajo de Fin de Máster está dedicado a mis padres y hermanos, por la paciencia que han tenido conmigo todos estos años.

Agradecimientos a mi tutor de TFM Philippe Gimenez por toda la ayuda y el tiempo dedicado y a todos los compañeros que he tenido durante el Grado y el Máster por el apoyo y la compañía en todo este tiempo.

Resumen

Se estudiarán algunos métodos combinatorios y computacionales para obtener resoluciones libres graduadas de ideales monomiales, centrándose en el caso de los ideales de aristas.

Se manejará, en particular, la fórmula de Hochster que relaciona los números de Betti del ideal con las homologías de algunos complejos simpliciales. También se implementará un algoritmo de poda que permite eliminar el exceso de información contenido en la conocida resolución de Taylor para obtener una resolución mucho más cercana a la minimal.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Introducción | 1 |
| 1. Conceptos iniciales | 5 |
| 1.1. Base algebraica | 5 |
| 1.2. Base combinatoria | 9 |
| 1.3. Resolución libre de un ideal | 11 |
| 1.4. Números de Betti | 15 |
| 2. Ideales monomiales | 21 |
| 2.1. Fórmula de Hochster | 21 |
| 2.2. Resolución de Taylor | 35 |
| 2.3. Poda de la resolución de Taylor | 41 |
| 3. Ideales de aristas | 47 |
| 3.1. Base combinatoria | 47 |
| 3.2. Grafo completo | 48 |
| 3.3. Grafo completo bipartito | 50 |
| 3.4. Grafo completo multipartito | 53 |
| 3.5. Ciclos | 57 |
| 3.6. Cadenas | 60 |
| 3.7. Complementario de un ciclo | 61 |
| 3.8. Complementario bipartito de un ciclo par | 65 |
| Apéndice: Implementación | 69 |
| Resolución de Taylor | 69 |
| Algoritmo de poda | 72 |
| Bibliografía | 77 |

Introducción

En este Trabajo de Fin de Máster se estudian las resoluciones libres, en concreto las resoluciones libres graduadas, tanto minimales como no de algunas familias de ideales. Para ello se presenta la relación que existe entre el álgebra conmutativa y algunos objetos combinatorios, que se puede establecer de forma sencilla sobre todo si los ideales son libres de cuadrados. Esta relación permite calcular las resoluciones libres graduadas de algunas familias de ideales por vías que combinan propiedades de los elementos algebraicos y de los combinatorios. El Trabajo se centra sobre todo en el cálculo de los números de Betti de la resolución libre graduada minimal de un ideal homogéneo, ya que estos contienen mucha información geométrica valiosa de la variedad algebraica que define el ideal, como puede ser la dimensión de este o la función de Hilbert.

Todos los resultados se presentan en el anillo de polinomios en n variables con coeficientes en un cuerpo \mathbb{K} , es decir, en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, que se denotará R . Todos los ideales y módulos considerados en el trabajo son no-nulos.

El trabajo consta de cuatro partes:

- I El objetivo del primer capítulo es conocer lo que es una resolución libre graduada minimal, y se verá, en particular la relación que hay entre las resoluciones libres graduadas de un ideal homogéneo $I \subseteq R$ y las del anillo cociente R/I .

Para ello primero se definen los conceptos, tanto algebraicos como combinatorios que se emplean a lo largo de todo el trabajo, con especial hincapié en las distintas graduaciones que se manejarán sobre R .

A continuación se definen las resoluciones libres de módulos, centrándose en las resoluciones graduadas ya que R es un anillo graduado y en las minimales.

Por último, se presentan los números de Betti, que almacenan la información numérica de la resolución libre graduada minimal de un ideal o R -módulo finitamente generado. Con ello se define el diagrama de Betti, que además de ser la forma en la que se muestran los números de Betti de I , proporciona información sobre la complejidad de la resolución libre graduada

minimal de I . Se pueden extender estos conceptos a resoluciones libres no minimales, en cuyo caso no se dispone de unicidad y se denotan como números o diagramas de Betti de la resolución sobre la que se calculan.

- II En el segundo capítulo, centrándose ya el trabajo en los ideales monomiales, se presentan tres métodos para obtener resoluciones libres graduadas.

El primero, a través de la fórmula de Hochster, permite calcular la resolución libre graduada minimal de $I(\Delta)$, el ideal de Stanley-Reisner de un complejo simplicial Δ dado, y por tanto, un ideal libre de cuadrados de R . Además, junto a la fórmula se define la homología simplicial de un complejo simplicial, un concepto de topología algebraica muy interesante, ya que permite relacionar la dimensión de la homología reducida de un subcomplejo Δ_W con las caras huecas de ese subcomplejo, lo que se puede aplicar al cálculo de los números de Betti de la resolución libre graduada minimal de un ideal de Stanley-Reisner. Este proceso es largo y tedioso y se restringe a los ideales libres de cuadrados pero tiene consecuencias teóricas interesantes, como se muestra en el capítulo 3.

A continuación, se presenta la resolución de Taylor, una resolución muy lejana a la minimal pero que se puede construir para ideales monomiales cualesquiera y no solo para los libres de cuadrados. Esto se debe a que el complejo de Taylor (el complejo simplicial en el que se apoya la resolución) se puede construir para cualquier ideal monomial. Además, a partir de la resolución de Taylor se pueden extraer otras resoluciones libres graduadas mucho más cercanas a la minimal.

Para finalizar, se muestra un proceso de poda de la resolución de Taylor anterior, que proporciona una resolución libre mucho más cercana a la minimal suprimiendo información redundante de esta resolución. Esta información redundante se encuentra buscando los monomios que no varían al calcular su imagen por alguna de las aplicaciones de la resolución. Por tanto, este método depende fuertemente del orden de los generadores elegidos para aplicar esta búsqueda de redundancia.

- III El último capítulo muestra la expresión general de los números de Betti de algunas familias de ideales de aristas, que son los que dentro de la combinatoria se pueden relacionar con los grafos. Se añade además un ejemplo del cálculo de los números de Betti de cada una de estas familias. La mayoría de estos resultados se obtienen a partir de la fórmula de Hochster descrita en el capítulo 2.
- IV A mayores, se ha implementado en MATLAB el cálculo de la resolución de Taylor y el algoritmo de poda de dicha resolución definidos en las secciones

2.2 y 2.3. Estas implementaciones, que se usan a lo largo del trabajo para ilustrar algunos resultados, se muestran en el apéndice con el que finaliza el trabajo.

Capítulo 1

Conceptos iniciales

El objetivo de este capítulo es presentar los distintos objetos que se utilizan a lo largo del trabajo: los ideales monomiales, los complejos simpliciales, los ideales de Stanley-Reisner así como la relación que hay entre los objetos combinatorios y los algebraicos, el concepto de una resolución libre graduada minimal de un ideal monomial, que está definido para módulos, pero en el trabajo se considerarán ideales monomiales, por lo que se detallará ese caso particular, y los números de Betti.

1.1. Base algebraica

Definición 1.1.1. Un *ideal monomial* en R es un ideal de R que puede ser generado exclusivamente por monomios.

Definición 1.1.2. Un monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in R$ es *libre de cuadrados* si $\alpha \in \{0, 1\}^n$.

Un ideal monomial $J \subseteq R$ es *libre de cuadrados* si tiene un sistema de generadores formado por monomios libres de cuadrados.

Se define la graduación estándar en R como $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$ donde R_i es el \mathbb{K} -espacio vectorial engendrado por los monomios de grado i .

Para mostrar que $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$ es una graduación solo hay que fijarse en que la condición de que $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$ equivale a $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

Nota 1.1.3. El anillo R es graduado, ya que existen subgrupos $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq R$ que cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$.
2. $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$.

Cada una de las componentes R_i se denomina *componente homogénea i -ésima* de R . Y sus elementos $f \in R_i$ se denominan *elementos homogéneos* de grado i .

En la nota anterior se considera la graduación del anillo sobre el monoide \mathbb{N} , que es la más común, por lo que se trabajará únicamente con grados ≥ 0 , aunque se podría considerar la graduación sobre otros monoides, por ejemplo, sobre \mathbb{Z} , donde se puede trabajar con elementos con grados negativos, pero no es el objetivo del trabajo.

Más adelante, se trabajará con la graduación definida sobre \mathbb{N}^n , que es mucho más fina.

Se tiene entonces que todo elemento $f \in R$ se puede escribir de forma única como $f = \sum f_i$ con $f_i \in R_i$, donde solo una cantidad finita de los f_i es no nula. Se dice que f_i es la componente homogénea de grado i de f y el grado de f es $\deg(f) = \max\{i \mid f_i \neq 0\}$.

De la segunda propiedad de los anillos graduados se deduce que R_0 es un subanillo de R y R_i es un R_0 -módulo.

Definición 1.1.4. Un monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in R$ tiene *grado*

$$|\alpha| = \sum_k \alpha_k.$$

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

Definición 1.1.5. Un polinomio $f \in R$ es *homogéneo* de grado k si todos los monomios que lo forman son de grado k .

Un ideal $J \subseteq R$ es *homogéneo* si tiene un sistema de generadores formado por polinomios homogéneos.

Nota 1.1.6. Todos los ideales monomiales son homogéneos.

Proposición 1.1.7. Sea I un ideal de $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Si $f \in I$, $f_i \in I$, para toda componente homogénea de f .
2. $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} I_i$, siendo $I_i = I \cap R_i$.
3. I está generado por sus elementos homogéneos.
4. I tiene un sistema de generadores homogéneos.

Demostración. Las implicaciones $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ son triviales. Solo falta demostrar que $4 \Rightarrow 1$:

Sea $I = \langle f_1, \dots, f_t \rangle$, siendo f_i homogéneo de grado α_i para todo i . Entonces, para todo $f \in I$, se tiene que $f = \sum_i a_i f_i$, siendo a_i un elemento de R para todo i . Como R es graduado, $a_i = \sum_j a_{i,j}$, con $a_{i,j} \in R_j$ un elemento homogéneo de R . Entonces se tiene que $f = \sum_{i,j} a_{i,j} f_i$.

Agrupando los sumandos de la expresión anterior que tienen el mismo grado,

$$b_k = \sum_{\deg(a_{i,j} f_i) = k} a_{i,j} f_i, \quad 0 \leq k \leq \deg(f)$$

se tiene que $f = \sum_k b_k$ es la descomposición de f en sus componentes homogéneas, y como $a_{i,j} f_i \in I$, para todos i, j , entonces $b_k \in I$ para todo k , como queríamos demostrar. \square

Se ha definido un ideal homogéneo como aquel que cumple la última de las afirmaciones anteriores, luego todo ideal homogéneo cumple todas las propiedades de la proposición anterior.

De la misma forma que se ha hablado de graduación con los ideales, se pueden definir los módulos graduados.

Definición 1.1.8. Sea M un R -módulo. Se dice que M es *graduado* si existen subgrupos $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M$ que cumplen las siguientes afirmaciones:

1. $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$.
2. $R_i M_j \subset M_{i+j}, \forall i, j \in \mathbb{N}$.

Y de forma equivalente a los ideales se tiene:

Proposición 1.1.9. Si M es un R -módulo graduado entonces admite un sistema de generadores homogéneos, que será finito si M es finitamente generado.

A continuación se explica como se puede modificar la graduación de un módulo, y por tanto, los elementos homogéneos que lo componen.

Definición 1.1.10. Sea $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$ un R -módulo graduado. Se define la graduación de M *desplazada* o *trasladada* como $M = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} M(p)$, donde $M(p) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M(p)_i$, con $M(p)_i = M_{i+p}$. Al elemento $p \in \mathbb{Z}$ se le denota *desfase* (*shift*).

Los desfases que se tratan a lo largo del trabajo son de la forma $M(-p)$, con $p > 0$. Se tiene que $M(-p)_p = M_0$, por lo que, si $p > 0$, los elementos homogéneos de $M(-p)$ tienen grados mayores o iguales que p .

Se puede extender el concepto de graduación en \mathbb{N} , a una multigraduación en \mathbb{N}^n , mucho más minuciosa:

Definición 1.1.11.

- Un monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in R$ tiene *multigrado* α .
- Un polinomio $f \in R$ es *homogéneo de multigrado* α si es de la forma cx^α , con $c \in \mathbb{K}$.
- El anillo R es \mathbb{N}^n -graduado, con componentes graduadas:

$$R_\alpha = \begin{cases} \mathbb{K}x^\alpha & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}_+^n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- Un R -módulo M es \mathbb{N}^n -graduado si $M = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} M_\alpha$ y $R_\alpha M_\beta \subset M_{\alpha+\beta}$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.
- Se define la multigraduación de M *desplazada* o *trasladada* como $M = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}^n} M(\beta)$, donde $M(\beta) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} M(\beta)_\alpha$, donde $M(-\beta)_\alpha = M_{\beta+\alpha}$. Al elemento $\beta \in \mathbb{Z}^n$ se le denota *desfase* (*shift*).

Cuando no dé lugar a confusión, se llamará simplemente grado, en vez de multigrado, entendiendo que se trata de un elemento de \mathbb{N}^n .

Definición 1.1.12. Sean M, N dos R -módulos graduados. Dado $i \in \mathbb{N}$, se dice que un homomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ es *graduado de grado* i (o simplemente *de grado* i) si la imagen de un elemento homogéneo es un elemento homogéneo y $\deg(\phi(f)) = i + \deg(f)$, para todo elemento homogéneo $f \notin \text{Ker}(\phi)$. Si ϕ es de grado 0, se dice que ϕ es *graduado*.

El siguiente teorema afirma que si M es un R -módulo graduado y libre, entonces tiene una base formada por elementos homogéneos, es decir, todas las graduaciones de R^s son de la forma $R(-p_1) \oplus \cdots \oplus R(-p_s)$. Una prueba de este teorema se puede encontrar en [14].

Teorema 1.1.13. *Sea M un R -módulo graduado libre finitamente generado y $\mathcal{M} = \{m_1, \dots, m_s\}$ un sistema minimal de generadores homogéneos de M . Entonces \mathcal{M} es una base de M , y además la aplicación*

$$\phi : R(-p_1) \oplus \cdots \oplus R(-p_s) \rightarrow M$$

tal que $\phi(e_i) = m_i$, siendo $e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0)^T$ el elemento i -ésimo de la base canónica de $R(-p_1) \oplus \dots \oplus R(-p_s)$, es un isomorfismo graduado (de grado 0).

Todo esto se puede generalizar a submódulos finitamente generados de R^s .

Cuando $s = 1$, se tiene que un submódulo de R es un ideal de R .

Sea $\{e_1, \dots, e_s\}$ la base canónica de R^s , es decir $e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0)^T$.

Definición 1.1.14. Un *monomio* en R^s es un elemento de R^s de la forma

$$x^\alpha e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posición } i$$

donde $x^\alpha \in R$.

Entonces, un polinomio en R^s es un vector polinomial de R^s de la forma

$$q_1 e_1 + \dots + q_s e_s = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix},$$

donde $q_1, \dots, q_s \in R$. Es decir, todo elemento de R^s es una combinación \mathbb{K} -lineal finita de monomios de R^s .

Se puede definir una graduación sobre R^s dotando a cada elemento de la base $\{e_1, \dots, e_s\}$ de un grado.

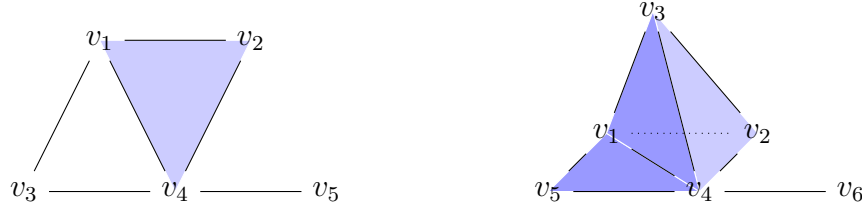
1.2. Base combinatoria

Definición 1.2.1. Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto finito. Un *complejo simplicial* Δ sobre V es un conjunto de subconjuntos de V tales que $\{v_1\}, \dots, \{v_n\} \in \Delta$ y si $F \in \Delta$ y $G \subseteq F$ entonces $G \in \Delta$. Los elementos de Δ se llaman *caras*.

Una cara de la forma $\{v_i\}$ se llama un *vértice* de Δ .

Una cara de la forma $\{v_i, v_j\}$ se llama una *arista* de Δ .

Un elemento maximal de Δ respecto a la inclusión es una *faceta* de Δ .

Ejemplo 1.2.2.

Definición 1.2.3. Sea Δ un complejo simplicial sobre $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

- Sea $W \subseteq V$. Se define el *subcomplejo* Δ_W de Δ como el complejo simplicial $\Delta_W = \{F \in \Delta \mid F \subseteq W\}$.
- La *dimensión* de una cara $F \in \Delta$ es $|F| - 1$.
- La dimensión de Δ , denotada $\dim(\Delta)$, es la mayor de las dimensiones de las caras de Δ , es decir, la mayor de las dimensiones de las facetas de Δ .
- El complejo simplicial Δ es *puro* si todas sus facetas tienen la misma dimensión.
- Para $i = -1, 0, \dots, \dim(\Delta)$, el número de caras i -dimensionales de Δ se denota por $f_i(\Delta)$, y el f -vector de Δ es el vector

$$f(\Delta) = (f_0(\Delta), f_1(\Delta), \dots, f_{\dim(\Delta)}(\Delta)).$$

- El $(n - 1)$ -*símplice* de Δ es el subcomplejo simplicial Δ_{n-1} , formado por todos los subconjuntos de V .

Se puede establecer una relación entre el conjunto de los complejos simpliciales y el conjunto de los ideales monomiales libres de cuadrados (es decir, aquellos en los que las potencias de las variables únicamente son 0 o 1). Se establece relacionando de forma unívoca el vértice v_i del complejo simplicial con la variable x_i , de forma que la cara $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ del complejo simplicial corresponde al monomio $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ del ideal.

Notación 1.2.4. Sea $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto finito. Para cada subconjunto $V' \subseteq V$:

- Sea $P_{V'} \subseteq R$ el ideal generado por las variables correspondientes a los elementos de V' , es decir $P_{V'} = \langle x_i \mid v_i \in V' \rangle$.
- Sea $\underline{x}^{V'} \in R$ el monomio producto de las variables correspondientes a los elementos de V' , es decir $\underline{x}^{V'} = \prod_{v_i \in V'} x_i$.

Definición 1.2.5. Sea Δ un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$. Sea $R(\Delta) = K[x_1, \dots, x_n]$, el anillo de polinomios en n variables, donde K es un cuerpo.

El ideal de Stanley-Reisner de Δ , $I(\Delta)$ es el ideal de $R(\Delta)$ generado por todos los monomios libres de cuadrados $x_{i_1} \cdots x_{i_j}$ tales que no existe ninguna cara de Δ que contiene a todos los vértices v_{i_1}, \dots, v_{i_j} , es decir:

$$I(\Delta) = \langle \underline{x}^{V'} \mid V' \subseteq V \text{ y } V' \notin \Delta \rangle.$$

El anillo de Stanley-Reisner de Δ se define como el anillo cociente

$$K[\Delta] = R(\Delta)/I(\Delta).$$

Nota 1.2.6. Es sencillo identificar los ideales que son de la forma $I(\Delta)$ para algún complejo simplicial Δ sobre el conjunto de vértices V , ya que son precisamente los ideales monomiales libres de cuadrados.

Por definición, se tiene que todo ideal de Stanley-Reisner es libre de cuadrados, pero además, se puede observar que todo ideal libre de cuadrados se puede identificar como el ideal de Stanley-Reisner de un complejo simplicial:

Si I es un ideal monomial libre de cuadrados en R , se toma $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y se puede escribir I en función de su sistema minimal de generadores monomiales como $I = \langle \underline{x}^{V_1}, \dots, \underline{x}^{V_d} \rangle$ para algunos conjuntos $V_1, \dots, V_d \subseteq V$.

Tomando $\Delta = \{V' \mid V_k \not\subseteq V', \forall k \in \{1, \dots, d\}\}$, se tiene por definición que

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \langle \underline{x}^{V'} \mid V' \subseteq V \text{ y } V' \notin \Delta \rangle = \langle \underline{x}^{V'} \mid V' \subseteq V \text{ y } \exists k \in \{1, \dots, d\}, V_k \subseteq V' \rangle \\ &= \langle \underline{x}^{V'} \mid V' \subseteq V \text{ y } \underline{x}^{V'} \in I \rangle = I. \end{aligned}$$

La mayoría de los conceptos de esta sección y de la anterior, se encuentran explicados con más detalle en [18].

1.3. Resolución libre de un ideal

En esta sección se define, en un contexto más general, la noción de resolución libre de un módulo y se trata el tema en concreto de las resoluciones libres de ideales homogéneos. Se definirán a partir de ella la resolución libre minimal y/o graduada de un módulo o ideal homogéneo.

Definición 1.3.1. Sea M un R -módulo. Una *resolución libre* de M es una sucesión de módulos libres

$$\cdots \xrightarrow{\psi_{n+1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\psi_n} \cdots \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{\psi_0} M \longrightarrow 0,$$

que es exacta, es decir cumple que $\text{Ker}(\psi_i) = \text{Im}(\psi_{i+1})$.

Se dice que una resolución libre es *graduada* si el anillo es graduado (R se sabe que lo es), cada \mathcal{F}_i es un módulo libre graduado y las aplicaciones ψ_i son homogéneas de grado 0.

Una resolución libre *finita* de longitud n , es aquella en la que se tiene que $\mathcal{F}_i = 0, \forall i \geq n + 1$, y $\mathcal{F}_i \neq 0 \forall i \leq n$.

Como R es un anillo graduado, durante todo el trabajo, cuando se trate la resolución libre de un ideal homogéneo o de un módulo graduado, se tratará la resolución libre graduada de este.

Definición 1.3.2. Se dice que dos resoluciones libres

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\psi_{n+1}} & \mathcal{F}_n & \xrightarrow{\psi_n} & \dots & \xrightarrow{\psi_2} & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathcal{F}_0 \\ \dots & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & \mathcal{G}_n & \xrightarrow{\varphi_n} & \dots & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathcal{G}_0 \end{array}$$

son *isomorfas* si existen isomorfismos graduados (de grado 0) $\phi_k : \mathcal{F}_k \rightarrow \mathcal{G}_k, \forall k$, tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{k+1} & \xrightarrow{\psi_k} & \mathcal{F}_k \\ \phi_{k+1} \downarrow & & \downarrow \phi_k \\ \mathcal{G}_{k+1} & \xrightarrow{\varphi_k} & \mathcal{G}_k \end{array}$$

conmuta.

Definición 1.3.3. Una *resolución libre graduada minimal* de un R -módulo M graduado es aquella que tiene la menor longitud posible y cada uno de los módulos libres que forman parte de la resolución son lo menor posible, es decir, dado M un R -módulo graduado,

$$\dots \xrightarrow{\psi_{n+1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\psi_n} \dots \xrightarrow{\psi_2} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{F}_0$$

es una resolución libre graduada minimal de M , si cualquier otra resolución libre graduada de M ,

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{m+1}} \mathcal{G}_m \xrightarrow{\varphi_m} \dots \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{G}_0$$

cumple que $m \leq n$ y, si $\mathcal{F}_k = R^s$, entonces $\mathcal{G}_k = R^t$ con $t \geq s, \forall k$.

Proposición 1.3.4. La resolución libre graduada minimal de un R -módulo M graduado es única salvo isomorfismos.

El siguiente teorema garantiza la existencia de las resoluciones libres graduadas, que implica la existencia de la resolución libre graduada minimal.

Teorema 1.3.5 (Teorema de las Sicigias de Hilbert graduado). *Sea $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Todo R -módulo M graduado finitamente generado tiene una resolución libre finita graduada cuya longitud es, a lo sumo, el número de variables del anillo.*

El Teorema de la Base de Hilbert afirma que si un anillo A es noetheriano, entonces $A[x]$ también lo es, lo cual implica directamente que si A es noetheriano, entonces $B = A[x_1, \dots, x_n]$ lo es. En particular, como $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es noetheriano, cualquier submódulo de R^t , y en particular cualquier ideal de R , es finitamente generado.

Definición 1.3.6. Sea M un R -módulo y $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ un sistema de generadores de M . Se define una *sicigia* de F como una relación de grado 1 polinomial entre los elementos de F , es decir, una sicigia es un elemento

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_t \end{pmatrix} \in R^t \text{ tal que } q_1 f_1 + \dots + q_t f_t = 0.$$

Se define como el *primer módulo de sicigias* de F al conjunto de todas las sicigias de F , y se denota como $\text{Sic}(F)$ o $\text{Sic}_1(F)$ cuando, más adelante, se hable de i -ésimas sicigias.

$$\text{Sic}(F) = \{(q_1, \dots, q_t) \in R^t \mid q_1 f_1 + \dots + q_t f_t = 0\}.$$

Haciendo abuso de notación, si M es un R -módulo y $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ es un sistema de generadores de M , se denota el primer módulo de sicigias de M a $\text{Sic}(M) = \text{Sic}(F)$. De la misma manera, si I es un ideal de R y $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ es un sistema de generadores de I , se denota el primer módulo de sicigias de I a $\text{Sic}(I) = \text{Sic}(F)$. Pero hay que tener en cuenta que el módulo de sicigias es dependiente del sistema de generadores F escogido, no es único para I .

$\text{Sic}(F)$ es un R -módulo, de hecho es un submódulo de R^t y es finitamente generado por el Teorema de la Base de Hilbert. Se puede definir la aplicación $\phi : R^t \rightarrow M$ tal que $\phi(e_i) = f_i$ para $i = 1, \dots, t$. Se cumple entonces que $\text{Sic}(F) = \text{Ker}(\phi)$.

Además, si f_1, \dots, f_t son homogéneos de grado p_1, \dots, p_t respectivamente, entonces se puede definir el homomorfismo graduado de módulos $\phi : R(-p_1) \oplus \dots \oplus R(-p_t) \rightarrow M$, de grado 0 y se tiene que $\text{Sic}(F)$ es un R -módulo graduado.

Si se retoma la definición de resolución libre graduada dada al principio de esta sección se puede ver que, la aplicación anterior es un paso de una resolución libre graduada de un módulo M , y si M es un R -módulo graduado generado por $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ homogéneos, se puede ver que la aplicación ϕ anterior coincide con ψ_0 , el primer paso de una resolución libre graduada de M :

$$\dots \xrightarrow{\psi_1} R(-p_1) \oplus \dots \oplus R(-p_t) \xrightarrow{\psi_0} M \longrightarrow 0,$$

con $\text{Im}(\psi_1) = \text{Ker}(\psi_0) = \text{Sic}(F) \subseteq R(-p_1) \oplus \cdots \oplus R(-p_t)$, el primer módulo de sicigias de M .

Este proceso se puede hacer iterativo, es decir, si

$$\text{Sic}(M) = \left\langle \left(\begin{array}{c} q_1^1 \\ \vdots \\ q_t^1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} q_1^s \\ \vdots \\ q_t^s \end{array} \right) \right\rangle,$$

el segundo módulo de sicigias de M , $\text{Sic}_2(M)$ es el generado todos los polinomios

$$\left(\begin{array}{c} s_1 \\ \vdots \\ s_s \end{array} \right) \in R^s \text{ tal que } b_1 \left(\begin{array}{c} q_1^1 \\ \vdots \\ q_t^1 \end{array} \right) + \cdots + b_s \left(\begin{array}{c} q_1^s \\ \vdots \\ q_t^s \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right).$$

Por el Teorema de las Sicigias de Hilbert (1.3.5), este procedimiento termina, es decir, se llega a un módulo libre en el que solo existe la relación trivial. Se tiene que una resolución libre graduada de un R -módulo es una sucesión de módulos libres graduados a través de aplicaciones ψ_i que cumplen que el núcleo de ψ_i es el i -ésimo módulo de sicigias de M . Una resolución libre graduada de $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es de la forma:

$$0 \longrightarrow R^{\beta_p} \xrightarrow{\psi_p} \cdots \xrightarrow{\psi_2} R^{\beta_1} \xrightarrow{\psi_1} R^{\beta_0} \xrightarrow{\psi_0} I \longrightarrow 0,$$

donde en cada iteración se tiene $\text{Im}(\psi_i) = \text{Ker}(\psi_{i-1})$, el i -ésimo módulo de sicigias de I .

Utilizando las bases de Gröbner, como se puede observar en [5], se tiene un método para calcular el módulo de sicigias de un conjunto F . Gracias a eso y al proceso iterativo de construcción de sicigias, se dispone de un método para calcular una resolución libre graduada de un ideal homogéneo I . Dados unos generadores homogéneos de I , se calcula el primer módulo de sicigias de I , y se construye ψ_0 tal que $\text{Ker}(\psi_0) = \text{Sic}(I)$. A continuación se calcula el primer módulo de sicigias de $\text{Sic}(I)$, que es el segundo módulo de sicigias de I , y se construye ψ_1 de forma que $\text{Im}(\psi_1) = \text{Ker}(\psi_0) = \text{Sic}(I)$ y $\text{Ker}(\psi_1) = \text{Sic}_2(I)$. Este proceso se repite hasta llegar a un módulo libre en el que solo existe la relación trivial entre sus generadores, ya que el Teorema de las Sicigias de Hilbert nos garantiza que el proceso termina y que lo puede hacer en un número de pasos que es a lo sumo el número de variables del anillo. Pero la resolución libre graduada que se obtiene no tiene por qué ser minimal (de hecho F puede no ser un sistema minimal de generadores).

Nota 1.3.7. Se puede establecer una relación entre una resolución libre graduada de un ideal $I \subseteq R$, que es de la forma:

$$0 \longrightarrow R^{\beta_p} \xrightarrow{\psi_p} \cdots \xrightarrow{\psi_2} R^{\beta_1} \xrightarrow{\psi_1} R^{\beta_0} \xrightarrow{\psi_0} I \xrightarrow{\epsilon} 0,$$

y una resolución libre graduada del anillo cociente R/I visto como R -módulo, que es:

$$0 \longrightarrow R^{\beta_p} \xrightarrow[\varphi_{p+1}]{\psi_p} \dots \xrightarrow[\varphi_3]{\psi_2} R^{\beta_1} \xrightarrow[\varphi_2]{\psi_1} R^{\beta_0} \xrightarrow[\varphi_1]{\psi_0} R \xrightarrow[\varphi_0]{\pi} R/I \xrightarrow{\epsilon} 0,$$

donde todas las aplicaciones entre los módulos que forman la sucesión coinciden excepto π , es decir, $\psi_i = \varphi_{i+1}$ para $0 \leq i \leq p$.

Además, como se tiene en la resolución libre graduada del ideal que $\text{Im}(\psi_0) = I = \text{Ker}(\epsilon)$, y $I \subseteq R$, al tomar la aplicación de paso al cociente $\pi : R \rightarrow R/I$ que cumple que $\text{Ker}(\pi) = I$, se mantiene la condición de sucesión exacta para la resolución libre del anillo cociente, puesto que $\text{Im}(\psi_0) = I = \text{Ker}(\pi)$.

Por tanto, dada una de las dos resoluciones la otra se obtiene sin problema. Sin embargo hay que tener en cuenta la resolución con la que se está trabajando ya que, la longitud de la resolución de R/I es una unidad mayor que la de I . Esto implica que todas las aplicaciones, los módulos y las propiedades que se extraen de esta resolución se encuentran “una unidad desplazada” respecto de esa misma información extraída de la resolución libre de I .

Como el trabajo se centra en las resoluciones libres graduadas de ideales homogéneos (de hecho se trabaja sobre los ideales monomiales), se trabajará indistintamente con la resolución libre graduada del ideal $I \subseteq R$ o la del anillo cociente R/I . Esto dependerá del método que se esté usando, sin dar lugar a confusión ya que se puede obtener una a partir de la otra y ambas proporcionan la misma información.

1.4. Números de Betti

Los números de Betti de un ideal I o de un R -módulo M finitamente generados almacenan la información numérica de la resolución libre graduada minimal de ese ideal o módulo. Esta información puede ser tan detallada como se precise, por lo que se definen tres tipos de números de Betti: los multigraduados, los graduados y los globales, en función de la situación, como se puede ver en [16].

Por la Proposición 1.3.4, que afirma que la resolución libre graduada minimal de un ideal homogéneo es única (salvo isomorfismos), se tiene que los números de Betti están bien definidos. Sin embargo este concepto se puede extender para cualquier resolución libre graduada, siempre y cuando se especifique la resolución libre en la que se están calculando, ya que se pierde la unicidad. En este caso se hablará de los números de Betti de la resolución, no del ideal.

Los números de Betti de un ideal homogéneo I son por tanto los números de Betti **de la resolución libre graduada minimal** de I , que son únicos, puesto que lo es la resolución.

Las definiciones se presentan sobre un ideal homogéneo $I \subseteq R$ pero son equivalentes, y se considerarán conocidas, sobre un R -módulo graduado, en particular sobre R/I . La primera definición, en cambio, solo es válida para ideales multigraduados, es decir, ideales monomiales.

Definición 1.4.1. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal monomial. Para $i \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, se define el i -ésimo número *multigraduado* de Betti de grado α , $\beta_{i,\alpha}(I)$, como el número de generadores de grado α que aparecen en el i -ésimo paso de una resolución libre multigraduada minimal de I .

Se puede describir también el i -ésimo número multigraduado de Betti de grado α como el mínimo número de generadores de multigrado α en el i -ésimo módulo de sicigias de I .

Definición 1.4.2. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo. Para $i, j \in \mathbb{N}$, se define el i -ésimo número de Betti *graduado* de grado j , $\beta_{i,j}(I)$ como el número de generadores de grado j en el i -ésimo paso de una resolución libre graduada minimal de I .

Si I es monomial, se tiene que $\beta_{i,j}(I) = \sum_{|\alpha|=j} \beta_{i,\alpha}(I)$.

Se puede describir también el i -ésimo número graduado de Betti de grado j como el mínimo número de generadores de grado j en el i -ésimo módulo de sicigias de I .

Definición 1.4.3. Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo. Para $i \in \mathbb{N}$, se definen el i -ésimo número de Betti *global*, $\beta_i(I)$ como el número de generadores en el i -ésimo paso de una resolución libre graduada minimal de I .

Se tiene que $\beta_i(I) = \sum_j \beta_{i,j}(I)$.

Se puede describir también el i -ésimo número de Betti global como el mínimo número de generadores en el i -ésimo módulo de sicigias de I .

Si se tiene una resolución libre graduada minimal de un ideal I \mathbb{N}^n -graduado

$$0 \longrightarrow F_p \xrightarrow{\psi_p} \dots \xrightarrow{\psi_2} F_1 \xrightarrow{\psi_1} F_0 \xrightarrow{\psi_0} I \xrightarrow{\epsilon} 0,$$

y $F_i = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} R(-\alpha)^{\beta_{i,\alpha}}$, entonces el i -ésimo número de Betti en el grado α es el invariante $\beta_{i,\alpha} = \beta_{i,\alpha}(I)$. El i -ésimo número de Betti en el grado j es el invariante $\beta_{i,j} = \sum_{|\alpha|=j} \beta_{i,\alpha}$. El i -ésimo número de Betti es el invariante $\beta_i = \sum_j \beta_{i,j}$.

Proposición 1.4.4. *Los números de Betti globales asociados a una resolución libre graduada minimal del anillo cociente R/I siendo I un ideal homogéneo de R cumplen la siguiente propiedad:*

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \beta_i = 0,$$

siendo p la longitud de la resolución.

Es decir, la suma alternada de los números globales de Betti de R/I es nula.

Este resultado se probará para los ideales monomiales después de describir la resolución de Taylor, ya que la prueba se apoya en la estructura de esa resolución pero se extiende a todos los ideales homogéneos.

En la Nota 1.3.7 se ha mostrado cómo se puede relacionar la resolución libre graduada minimal de un ideal I con la del anillo cociente R/I . Si se traslada ese resultado a los números de Betti obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.4.5. *Si I es un ideal monomial, dado un vector $\alpha \in \mathbb{N}^n$, el i -ésimo número de Betti de I y de R/I en el grado α se pueden relacionar como*

$$\beta_{i,\alpha}(I) = \beta_{i+1,\alpha}(R/I).$$

Para un ideal I homogéneo, se tiene que dado $j \in \mathbb{N}$, el i -ésimo número de Betti de I y de R/I en el grado j se pueden relacionar como

$$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i+1,j}(R/I),$$

y de forma equivalente, el i -ésimo número de Betti global de I y de R/I se pueden relacionar como

$$\beta_i(I) = \beta_{i+1}(R/I).$$

De esta forma se puede formular el resultado de la Proposición 1.4.4 para los números de Betti de una resolución libre graduada minimal de I :

Proposición 1.4.6. *Los números de Betti globales asociados a una resolución libre graduada minimal de un ideal $I \subseteq R$ homogéneo cumplen la siguiente propiedad:*

$$\sum_{i=0}^p (-1)^i \beta_i = 1,$$

siendo p la longitud de la resolución.

El conjunto de los números de Betti graduados y globales de un R -módulo graduado M se muestra en una tabla, cuyas columnas corresponden a los pasos de la resolución libre graduada minimal de M , y cuyas filas corresponden a los grados de los generadores de cada uno de los módulos que aparecen en la resolución de M .

Se puede considerar la minimalidad de una resolución libre graduada como el hecho de que la imagen de una base de uno de los R -módulos de la resolución es un conjunto minimal de generadores del siguiente módulo o como que

$$\text{Im}(\psi_i) \subset (x_1, \dots, x_n) \left(\bigoplus_j R(-j)^{\beta_{i-1,j}} \right),$$

gracias al Lema de Nakayama (que se puede encontrar en [4]). Por tanto, los números de Betti cumplen lo siguiente:

Proposición 1.4.7. Sean $\{\beta_{i,j}\}$ los números de Betti graduados de un ideal homogéneo $I \subseteq R$. Dado un índice i , si existe $J \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_{i,j} = 0, \forall j < J$, entonces se tiene que $\beta_{i+1,j+1} = 0, \forall j < J$.

Este resultado sugiere guardar los números de Betti de un ideal homogéneo I en una tabla que tenga en la posición $a_{i,j}$ el número de Betti $\beta_{i,i+j}(I)$, para $0 \leq i \leq p$ siendo p el número de pasos de la resolución y $0 \leq j \leq r$ donde r es la etiqueta de la última fila de la tabla con alguna entrada no-nula y así evitar almacenar demasiados ceros superfluos. Esta tabla se llama *diagrama de Betti* de I :

| | 0 | ... | i | ... | p |
|------------|----------------------|-----|------------------------|-----|------------------------|
| j_{\min} | $\beta_{0,j_{\min}}$ | ... | $\beta_{i,i+j_{\min}}$ | ... | $\beta_{p,p+j_{\min}}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| j | $\beta_{0,j}$ | ... | $\beta_{i,i+j}$ | ... | $\beta_{p,p+j}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| r | $\beta_{0,r}$ | ... | $\beta_{i,i+r}$ | ... | $\beta_{p,p+r}$ |
| Global | β_0 | ... | β_i | ... | β_p |

Nota 1.4.8. Dado un ideal homogéneo I , se han definido los números de Betti y el diagrama de Betti de I (o de $M = R/I$) para una resolución libre graduada minimal del ideal (o del anillo cociente por ese ideal) puesto que son invariantes. Pero se pueden calcular para una resolución libre graduada cualquiera de I (aunque como se ha dicho, entonces se hablará de números de Betti y diagrama de Betti de dicha resolución, no del ideal). En ese caso, dado que no se cumple el resultado de la proposición anterior, puede que no se puedan mostrar en el diagrama sin utilizar filas que correspondan a índices negativos, ya que pueden aparecer generadores de grado j en el i -ésimo paso de la resolución libre graduada, con $j < i$. En la sección 2.2, se ilustrará este fenómeno en el Ejemplo 2.2.4 con el cálculo de la resolución de Taylor.

Definición 1.4.9. Si el diagrama de Betti de la resolución libre graduada minimal de un ideal está formado por una única fila, entonces se dice que la resolución libre graduada minimal es *lineal*. En particular, si el diagrama de Betti está formado solo por la fila j , entonces la resolución libre graduada minimal es j -*lineal*.

Nota 1.4.10. La definición anterior permite apreciar la complejidad de la resolución libre graduada minimal del ideal I , ya que si todos los números de Betti se encuentran en la j -ésima fila del diagrama de Betti, entonces todas las aplicaciones entre los R -módulos de la resolución libre graduada minimal se representan con matrices cuyas entradas no nulas son polinomios de grado 1. Por ejemplo, si la resolución libre graduada minimal de I es j -lineal, entonces el diagrama de Betti de I es de la forma

| | | | | | | |
|--------|---------------|-----------------|-----|-----------------|-----|-----------------|
| | 0 | 1 | ... | i | ... | p |
| j | $\beta_{0,j}$ | $\beta_{0,j+1}$ | ... | $\beta_{i,i+j}$ | ... | $\beta_{p,p+j}$ |
| Global | β_0 | β_1 | ... | β_i | ... | β_p |

con $\beta_i = \beta_{i,i+j}$ para todo i . Por lo que la resolución libre graduada minimal de I es de la forma

$$0 \longrightarrow R(-(j+p))^{\beta_p} \xrightarrow{\psi_p} \cdots \xrightarrow{\psi_2} R(-(j+1))^{\beta_1} \xrightarrow{\psi_1} R(-j)^{\beta_0} \xrightarrow{\psi_0} I \xrightarrow{\epsilon} 0.$$

Capítulo 2

Ideales monomiales

A partir de ahora se trabajará con ideales monomiales, los cuales se sabe que tienen un sistema de generadores minimal generado exclusivamente por monomios, y por tanto, son homogéneos. Todas las nociones vistas en el capítulo anterior son aplicables a este caso, y además, gracias a propiedades de estos ideales, como el poder relacionarlos con complejos simpliciales, se dispone de herramientas combinatorias para su estudio.

En la primera sección se considerarán únicamente los ideales monomiales libres de cuadrados ya que son ideales de Stanley-Reisner asociados a algún complejo simplicial Δ , que es lo que precisa la fórmula de Hochster. En [10], se muestra un proceso, llamado “polarización” que consiste en asignar a un ideal monomial arbitrario $I \subseteq R$, un ideal monomial libre de cuadrados $J \subseteq S$, siendo S un anillo de polinomios sobre otro conjunto de variables. Se cumple que $\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}(J)$, para todos i, j . Este proceso permite por tanto calcular los números de Betti de un ideal monomial arbitrario I , aplicando la fórmula de Hochster a su polarización J . El coste computacional es muy alto, por lo que el interés de este proceso es sobre todo teórico.

2.1. Fórmula de Hochster

Esta sección, requiere de algunos conceptos sobre topología algebraica, en concreto sobre homología simplicial, que se pueden encontrar en [12].

Definición 2.1.1. Sea Δ un complejo simplicial sobre el conjunto de vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$. Se definen:

$F_i(\Delta)$ como el conjunto de caras i -dimensionales de Δ .

$\mathbb{K}^{F_i(\Delta)}$ como el espacio vectorial sobre \mathbb{K} cuyos elementos de la base, e_σ corresponden a las i -caras $\sigma \in F_i(\Delta)$.

Definición 2.1.2. Se define el *complejo de cadenas* de Δ sobre \mathbb{K} como:

$$0 \longleftarrow \mathbb{K}^{F_{-1}(\Delta)} \xleftarrow{\partial_0} \dots \longleftarrow \mathbb{K}^{F_{i-1}(\Delta)} \xleftarrow{\partial_i} \mathbb{K}^{F_i(\Delta)} \longleftarrow \dots \xleftarrow{\partial_{d-1}} \mathbb{K}^{F_{d-1}(\Delta)} \longleftarrow 0$$

siendo $d = \dim(\Delta)$ donde las *aplicaciones frontera* (*boundary maps*) ∂_i son los homomorfismos definidos como

$$\partial_i(e_\sigma) = \sum_{j \in \sigma} \text{sign}(j, \sigma) e_{\sigma \setminus j},$$

siendo $\text{sign}(j, \sigma) = (-1)^{r-1}$ si j es el r -ésimo elemento de $\sigma \subseteq \{1, \dots, n\}$, es decir, $\text{sign}(j, \sigma) = -1$ si j está en una posición par de σ y $\text{sign}(j, \sigma) = 1$ si j está en una posición impar (escritos los índices en orden creciente).

Se sabe que esto define un complejo de cadenas por [17], es decir, que se cumple que $\partial_{i+1} \circ \partial_i = 0$.

Los conceptos anteriormente definidos quedarán más claros en el ejemplo mostrado al final de la sección.

Definición 2.1.3. Dado un entero i , se define la *i -ésima homología reducida* de Δ sobre \mathbb{K} en el *grado homológico* i como el \mathbb{K} -espacio vectorial

$$\tilde{H}_i(\Delta, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\partial_i) / \text{Im}(\partial_{i+1}).$$

Para algunos grados homológicos, se dispone de una fórmula más sencilla para su homología reducida cuya demostración es directa:

Lema 2.1.4. $\tilde{H}_{d-1}(\Delta, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\partial_{d-1})$.

Lema 2.1.5. Si $\Delta \neq \emptyset$:

$$\tilde{H}_{-1}(\Delta, \mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{si } \Delta = \{\emptyset\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Lema 2.1.6. $\tilde{H}_i(\Delta, \mathbb{K}) = 0$ para $i < -1$ o $i > d - 1$.

Demostración. Esto es debido a que el complejo de cadenas correspondiente es:

$$\xleftarrow{\partial_i} 0 \xleftarrow{\partial_{i+1}},$$

donde se tiene $\text{Ker}(\partial_i) = \text{Im}(\partial_{i-1})$. □

Proposición 2.1.7. La *dimensión* de $\tilde{H}_0(\Delta, \mathbb{K})$ es una menos que el número de *componentes conexas* de Δ .

La prueba de ese resultado se deduce de los Teoremas 7,1 y 7,2 de [17].

Definición 2.1.8. Los elementos de $\text{Ker}(\partial_i)$ se llaman *i-ciclos* y los elementos de $\text{Im}(\partial_i)$ se llaman *i-fronteras*.

Ya estamos en disposición de enunciar el resultado que será la herramienta principal del trabajo:

Teorema 2.1.9 (Fórmula de Hochster). *Sea Δ un complejo simplicial en $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y sea $I(\Delta)$ el ideal de Stanley-Reisner asociado a Δ en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Entonces, se pueden expresar los números de Betti graduados de $I(\Delta)$ como:*

$$\beta_{i,j}(I(\Delta)) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W, \mathbb{K}),$$

donde $\dim_{\mathbb{K}}$ hace referencia a la dimensión de Krull de un anillo.

Una demostración de este teorema, que se puede ver en [11] y se apoya en una serie de resultados de [2] que precisan de conceptos de topología algebraica no mostrados en el trabajo.

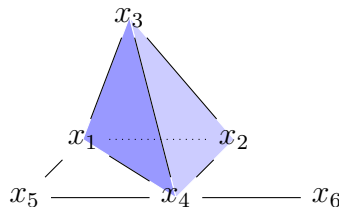
Corolario 2.1.10. *Si $j > |V|$, entonces $\beta_{i,j} = 0$.*

Demostración. Como no existe ningún $W \subseteq V$ tal que $|W| = j > |V| = n$, aplicando la fórmula de Hochster, $\beta_{i,j} = 0$. \square

De esta forma, se pueden calcular los números de Betti graduados de un ideal libre de cuadrados, ya que estos son los que se pueden representar como ideales de Stanley-Reisner, y entonces aplicar la Fórmula de Hochster al complejo simplicial de ese ideal.

Veamos un ejemplo completo de todo lo expuesto anteriormente:

Ejemplo 2.1.11. Sea Δ el complejo simplicial siguiente:



Este complejo simplicial consiste en un tetraedro hueco, un triángulo hueco (sin contar los que delimitan el tetraedro) y una arista (sin contar las que delimitan tanto el triángulo como el tetraedro).

1. Primero calculamos las facetas de Δ :

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}, \{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_5\}, \{x_4, x_5\}, \{x_4, x_6\}.$$

Esto implica que la dimensión de Δ es

$$\dim(\Delta) = \max\{\dim(F) \mid F \in \Delta\} = 2 = |\{x_1, x_2, x_3\}| - 1.$$

Así se puede calcular el f -vector de Δ : $f(\Delta) = (f_0, f_1, f_2) = (6, 9, 4)$.

2. Como se va a calcular la resolución a través de la fórmula de Hochster, se calcula antes el complejo de cadenas de Δ .

Para ello se calculan primero los $F_i(\Delta)$:

$$F_{-1}(\Delta) = \{\emptyset\}$$

$$F_0(\Delta) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$$

$$F_1(\Delta) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}$$

$$F_2(\Delta) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

Luego el complejo de cadenas de Δ es:

$$0 \longleftarrow \mathbb{K} \xleftarrow{\partial_0} \mathbb{K}^6 \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{K}^9 \xleftarrow{\partial_2} \mathbb{K}^4 \longleftarrow 0.$$

Se añade un ejemplo detallado de como se calcularía una aplicación frontera, ∂_2 , para ello primero ordenamos los elementos de la base de \mathbb{K}^4 y de \mathbb{K}^9 :

$$\mathbb{K}^4 = \langle e_{\{1,2,3\}}, e_{\{1,2,4\}}, e_{\{1,3,4\}}, e_{\{2,3,4\}} \rangle$$

$$\mathbb{K}^9 = \langle e_{\{1,2\}}, e_{\{1,3\}}, e_{\{1,4\}}, e_{\{1,5\}}, e_{\{2,3\}}, e_{\{2,4\}}, e_{\{3,4\}}, e_{\{4,5\}}, e_{\{4,6\}} \rangle$$

$$\begin{aligned} \partial_2(e_{\{1,2,3\}}) &= \text{sign}(1, \{1, 2, 3\})e_{\{2,3\}} + \text{sign}(2, \{1, 2, 3\})e_{\{1,3\}} + \text{sign}(3, \{1, 2, 3\})e_{\{1,2\}} \\ &= e_{\{2,3\}} - e_{\{1,3\}} + e_{\{1,2\}} \end{aligned}$$

$$\partial_2(e_{\{1,2,4\}}) = e_{\{2,4\}} - e_{\{1,4\}} + e_{\{1,2\}}$$

$$\partial_2(e_{\{1,3,4\}}) = e_{\{3,4\}} - e_{\{1,4\}} + e_{\{1,3\}}$$

$$\partial_2(e_{\{2,3,4\}}) = e_{\{3,4\}} - e_{\{2,4\}} + e_{\{2,3\}}$$

Luego

$$\partial_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Ahora se calcula el ideal de Stanley-Reisner asociado a Δ :

$$\begin{aligned} I(\Delta) &= \langle x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mid \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \notin \Delta \rangle \\ &= \langle x_1x_6, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_5, x_3x_6, x_5x_6, x_1x_4x_5, x_1x_2x_3x_4 \rangle. \end{aligned}$$

Y la dimensión de Krull del anillo Stanley-Reisner $R/I(\Delta)$ es

$$d = \dim_{\mathbb{K}}(R/I(\Delta)) = \dim(\Delta) + 1 = 3.$$

4. Ahora, se calcula la resolución libre graduada minimal del ideal $I(\Delta)$, que para mayor comodidad en la lectura, se denotará I :

Como I es un ideal homogéneo de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_6]$, se ha mostrado anteriormente que el ideal tiene una resolución libre graduada minimal de la forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_l \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0,$$

con $l \leq 6 = n$ y $\mathcal{F}_i = R(-d_{i,1}) \oplus \cdots \oplus R(-d_{i,t_i})$. Se recuerda que $\beta_{i,j}(I)$ es el número de veces que aparece $R(-j)$ en \mathcal{F}_i .

■ Paso 0: Encontrar \mathcal{F}_0 .

Para calcular el 0-ésimo número de Betti graduado, $\beta_{0,j}(I)$ solo se necesita conocer los generadores de I , ya que $\beta_{0,j}(I)$ es el número de generadores de I de grado j . Se tiene entonces:

$$\beta_{0,2}(I) = 6 \quad \beta_{0,3}(I) = 1 \quad \beta_{0,4}(I) = 1 \quad \beta_{0,j}(I) = 0 \text{ si } j > 4 \text{ o } j < 2.$$

Entonces, $\mathcal{F}_0 = R(-2)^6 \oplus R(-3) \oplus R(-4)$.

- Paso 1: Encontrar \mathcal{F}_1 . Aplicando la fórmula de Hochster, se tiene que

$$\beta_{1,j}(I) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-1-2}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-3}(\Delta_W, \mathbb{K}).$$

Por el Lema 2.1.6 se tiene que para todo $j < 2 \Rightarrow j - 3 < -1$, y para todo $j > 5 \Rightarrow j - 3 > d - 1 = 2$ entonces $\tilde{H}_{j-3}(\Gamma, \mathbb{K}) = 0$ para todo Γ subcomplejo simplicial de Δ , luego se tiene $\beta_{1,j} = 0$. Por lo tanto hay que comprobar los casos $j = 2, 3, 4, 5$.

- $j=2$.

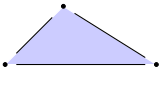
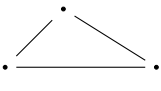
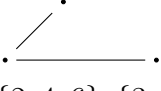
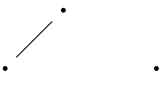
Sea $W \subseteq V$ con $|W| = 2$. Entonces $\Delta_W \neq \{\emptyset\}$ ya que Δ_W contiene al menos los dos vértices de W . Por el Lema 2.1.5,

$$\tilde{H}_{2-3}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_{-1}(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0 \Rightarrow \beta_{1,2} = 0.$$

Como se tiene que $\beta_{0,1} = 0$, aplicando la Proposición 1.4.7 también se llega a este resultado.

- $j=3$.

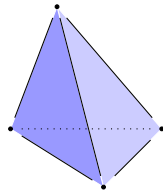
$\tilde{H}_{3-3}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$, y por la Proposición 2.1.7 se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = \#\{\text{componentes conexas de } \Delta_W\} - 1$. Veamos como son los $\binom{6}{3} = 20$ subconjuntos $W \subseteq V$, con $|W| = 3$. Hay cuatro tipos de subconjuntos W , que se relacionan con los subcomplejos simpliciales Δ_W siguientes:

-  , cuando $W \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$, Δ_W tiene una componente conexa luego $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0$.
-  , cuando $W = \{1, 4, 5\}$, Δ_W tiene una componente conexa luego $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0$.
-  , cuando $W \in \{\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 6\}, \{2, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}\}$, Δ_W tiene una componente conexa luego $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0$.
-  , cuando $W \in \{\{1, 2, 6\}, \{1, 3, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}\}$, Δ_W tiene dos componentes conexas luego se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = 1$.

- • • • , cuando $W \in \{\{2, 5, 6\}, \{3, 5, 6\}\}$, Δ_W tiene tres componentes conexas luego $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = 2$.

Se tiene que $\beta_{1,3}(I) = \sum_{\substack{|W|=3 \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = 9$.

- $j=4$.
 $\tilde{H}_{4-3}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\partial_1) / \text{Im}(\partial_2)$, siendo ∂_1 y ∂_2 aplicaciones frontera del complejo de cadenas asociado a Δ_W , no a Δ , pero se calcula de la misma forma de como se ha calculado el de Δ . Veamos como son los $\binom{6}{4} = 15$ subconjuntos $W \subseteq V$, con $|W| = 4$. No se añaden los cálculos de todos los complejos de cadenas ya que hay ocho tipos de subconjuntos W y se ha mostrado anteriormente como se calculan los complejos de cadenas:

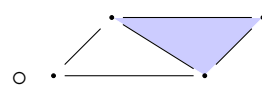


- , $W = \{1, 2, 3, 4\}$, calculando se tiene:

$$\partial_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ker}(\partial_1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \in \text{Im}(\partial_2) \Rightarrow \tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0.$$

Luego $\dim(\tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K})) = 0$.



- , $W = \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}$, calculando

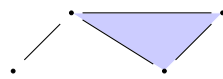
se tiene:

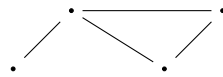
$$\partial_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \partial_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

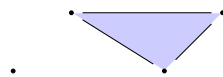
$$\text{como } \text{Ker}(\partial_1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \text{Ker}(\partial_1)/\text{Im}(\partial_2) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

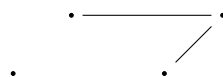
$$\Rightarrow \dim(\tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K})) = 1,$$


que es no-nula porque proviene del triángulo hueco de Δ_W .

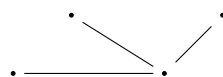
-  , $W \in \{\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}\}$, de la misma manera que para los anteriores se calculan ∂_1 y ∂_2 , y se obtiene que $\dim(\tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K})) = 0$.

-  , $W = \{1, 4, 5, 6\}$ y $\dim(\tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K})) = 1$, que proviene del triángulo hueco de Δ_W .

-  , $W \in \{\{1, 2, 3, 6\}\}$ y $\dim(\tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K})) = 0$.

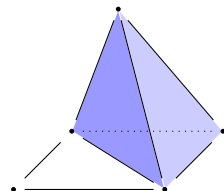
-  , $W \in \{\{1, 2, 5, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}\}$ y $\dim(\tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K})) = 0$.

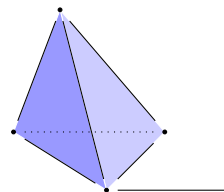
-  , $W = \{2, 3, 5, 6\}$ y $\dim(\tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K})) = 0$.

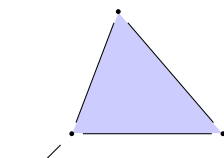
-  , $W \in \{\{2, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$ y $\dim(\tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K})) = 0$.

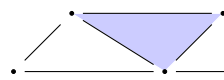
Luego se tiene que $\beta_{1,4}(I) = \sum_{\substack{|W|=4 \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K}) = 3$.

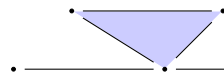
- $j=5$.
 $\tilde{H}_{5-3}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_2(\Delta_W, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\partial_2)/\text{Im}(\partial_3)$ del complejo de cadenas asociado a Δ_W . Se tiene que $2 = d - 1$, luego por el Lema 2.1.4 $\tilde{H}_2(\Delta_W, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\partial_2)$. Veamos como son los $\binom{6}{5} = 6$ subconjuntos $W \subseteq V$, con $|W| = 5$. No se añaden los cálculos de ∂_2 , pero como se ha visto en los anteriores casos, las homología reducida no nulas provienen de los “huecos” de dimensión 3, en este caso, de aquellos complejos simpliciales Δ_W que tengan un tetraedro vacío. Hay cinco tipos de subconjuntos W :

○  , cuando $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tras calcular ∂_2 se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_2(\Delta_W, \mathbb{K}) = 1$, por el tetraedro hueco.

○  , cuando $W = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_2(\Delta_W, \mathbb{K}) = 1$, por el tetraedro hueco.

○  , cuando $W = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_2(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0$.

○  , cuando $W \in \{\{1, 2, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 4, 5, 6\}\}$, se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_2(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0$.

○  , cuando $W = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_2(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0$.

Luego se tiene que $\beta_{1,5}(I) = \sum_{\substack{|W|=5 \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_2(\Delta_W, \mathbb{K}) = 2$.

Por tanto:

$$\beta_{1,3}(I) = 9 \quad \beta_{1,4}(I) = 3 \quad \beta_{1,5}(I) = 2 \quad \beta_{1,j}(I) = 0 \text{ si } j > 5 \text{ o } j < 3.$$

Entonces, $\mathcal{F}_1 = R(-3)^9 \oplus R(-4)^3 \oplus R(-5)^2$.

- Paso 2: Encontrar \mathcal{F}_2 . Aplicando la fórmula de Hochster:

$$\beta_{2,j}(I) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-2-2}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-4}(\Delta_W, \mathbb{K}).$$

Por el Lema 2.1.6 se tiene que para todo $j < 3 \Rightarrow j - 4 < -1$, y para todo $j > 6 \Rightarrow j - 4 > d - 1 = 2$ entonces $\tilde{H}_{j-4}(\Gamma, \mathbb{K}) = 0$ para todo Γ subcomplejo simplicial de Δ , luego se tiene $\beta_{2,j} = 0$. Hay entonces que comprobar los casos $j = 3, 4, 5, 6$.

- $j=3$.

Sea $W \subseteq V$ con $|W| = 3$. Entonces $\Delta_W \neq \emptyset$ ya que Δ_W contiene al menos los tres vértices de W . Por el Lema 2.1.5, se tiene que $\tilde{H}_{3-4}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_{-1}(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0 \Rightarrow \beta_{2,3} = 0$.

- $j=4$.

$\tilde{H}_{4-4}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$, y por la Proposición 2.1.7 se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = \#\{\text{componentes conexas de } \Delta_W\} - 1$. Se sabe como son los 15 subconjuntos $W \subseteq V$, con $|W| = 4$, ya que son los del apartado \mathcal{F}_1 , $j = 4$. Al comprobar sus componentes conexas se tiene que $\beta_{2,4}(I) = \sum_{\substack{|W|=4 \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = 5$, ya que hay 4 subconjuntos W tales que Δ_W tiene 2 componentes conexas, y un subconjunto que tiene tres componentes conexas.

- $j=5$.

$\tilde{H}_{5-4}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K})$. Se sabe como son los 6 subconjuntos $W \subseteq V$, con $|W| = 5$, ya que son los del apartado \mathcal{F}_1 , $j = 5$, se omiten las cuentas, pero se ha observado en los pasos anteriores que aquellos complejos simpliciales cuya homología reducida es no nula son los que contienen “huecos” de dimensión 2, es decir, los que tienen algún triángulo vacío, ya que se está realizando el cociente $\text{Ker}(\partial_1)/\text{Im}(\partial_2)$. Se obtiene que $\beta_{2,5}(I) = \sum_{\substack{|W|=5 \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_1(\Delta_W, \mathbb{K}) = 3$, ya que hay 3 subconjuntos W tales que Δ_W contiene un triángulo hueco.

- $j=6$.

Se tiene que en este caso, que el único subconjunto $W \subseteq V$, tal que $|W| = 6$, es $W = V$, luego solo hay que tratar el caso de $\Delta_W = \Delta$. $\tilde{H}_{6-4}(\Delta, \mathbb{K}) = \tilde{H}_2(\Delta, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\partial_2)/\text{Im}(\partial_3)$ del complejo de cadenas asociado a Δ . Se tiene que $2 = d - 1$, luego por el Lema 2.1.4, $\tilde{H}_2(\Delta, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\partial_2)$, ∂_2 está ya calcu-

lado anteriormente, y se quiere remarcar que la homología reducida es no nula debido al tetraedro vacío de Δ . Luego $\beta_{2,6}(I) = \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_2(\Delta, \mathbb{K}) = 1$.

Por tanto:

$$\beta_{2,4}(I) = 5 \quad \beta_{2,5}(I) = 3 \quad \beta_{2,6}(I) = 1 \quad \beta_{2,j}(I) = 0 \text{ si } j > 6 \text{ o } j < 4.$$

Entonces, $\mathcal{F}_2 = R(-4)^5 \oplus R(-5)^3 \oplus R(-6)$.

- Paso 3: Encontrar \mathcal{F}_3 . Aplicando la fórmula de Hochster:

$$\beta_{3,j}(I) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-3-2}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-5}(\Delta_W, \mathbb{K}).$$

Por el Lema 2.1.6 se tiene que para todo $j < 4 \Rightarrow j - 5 < -1$, entonces $\tilde{H}_{j-4}(\Gamma, \mathbb{K}) = 0$ para todo Γ complejo simplicial, luego se tiene $\beta_{2,j} = 0$, y por el Corolario 2.1.10 se tiene que si $j > 6$, $\beta_{3,j} = 0$. Habría entonces que comprobar los casos $j = 4, 5, 6$.

- $j=4$.

Sea $W \subseteq V$ con $|W| = 4$. Entonces $\Delta_W \neq \emptyset$ ya que Δ_W contiene al menos los cuatro vértices de W . Aplicando el Lema 2.1.5, se tiene que $\tilde{H}_{4-5}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_{-1}(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0 \Rightarrow \beta_{3,4} = 0$.

- $j=5$.

$\tilde{H}_{5-5}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$, y por la Proposición 2.1.7 se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = \#\{\text{componentes conexas de } \Delta_W\} - 1$. Se conocen ya como son los 6 subconjuntos $W \subseteq V$, con $|W| = 5$. Al comprobar sus componentes conexas se tiene que, como $W = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ es el único subconjunto de V tal que Δ_W tiene más de una componente conexa, $\beta_{3,5}(I) = \sum_{\substack{|W|=5 \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = 1$.

- $j=6$.

$\Delta_W = \Delta$. $\tilde{H}_{6-5}(\Delta, \mathbb{K}) = \tilde{H}_1(\Delta, \mathbb{K})$. Se omiten las cuentas, pero se quiere mencionar que la homología reducida es no nulas debido al triángulo hueco de Δ . Luego $\beta_{3,6}(I) = \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_1(\Delta, \mathbb{K}) = 1$.

Por tanto:

$$\beta_{3,5}(I) = 1 \quad \beta_{3,6}(I) = 1 \quad \beta_{3,j}(I) = 0 \text{ si } j > 6 \text{ o } j < 5.$$

Entonces, $\mathcal{F}_3 = R(-5) \oplus R(-6)$.

- Paso 4: Encontrar \mathcal{F}_4 . Aplicando la fórmula de Hochster:

$$\beta_{4,j}(I) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-4-2}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-6}(\Delta_W, \mathbb{K}).$$

Por el Lema 2.1.6 se tiene que para todo $j < 5 \Rightarrow j - 6 < -1$, entonces $\tilde{H}_{j-6}(\Gamma, \mathbb{K}) = 0$ para todo Γ complejo simplicial, luego se tiene $\beta_{4,j} = 0$, y por el Corolario 2.1.10 se tiene que para todo $j > 6$, $\beta_{4,j} = 0$. Habría entonces que comprobar los casos $j = 5, 6$. Pero se sabe que ambos son nulos, puesto que para $j = 5$ es el caso de $\tilde{H}_{-1}(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0$, ya que Δ_W es no vacío para todo $W \subseteq V$ con $|W| = 5$, y para el caso $j = 6$, como Δ es conexo, $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta, \mathbb{K}) = \#\{\text{componentes conexas de } \Delta\} - 1 = 0$.

Luego $\mathcal{F}_4 = 0$.

- Para $i \geq 5$, se tiene que $\mathcal{F}_i = 0$. Por la fórmula de Hochster,

$$\beta_{i,j}(I) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-(i+2)}(\Delta_W, \mathbb{K}), \text{ donde } i + 2 \geq 7.$$

Si $j \leq 6 \Rightarrow j - i - 2 \leq -1$, entonces por el Lema 2.1.6 y por el hecho de que Δ es no vacío se tiene $\beta_{i,j} = 0$, y si $j > 6$, por el Corolario 2.1.10 se tiene que $\beta_{i,j} = 0$.

Luego $\beta_{i,j} = 0 \forall j \in \mathbb{N}, i \geq 5$.

La resolución libre graduada minimal de I es:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \begin{array}{c} R(-5) \\ \oplus \\ R(-6) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} R(-4)^5 \\ \oplus \\ R(-5)^3 \\ \oplus \\ R(-6) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} R(-3)^9 \\ \oplus \\ R(-4)^3 \\ \oplus \\ R(-5)^2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} R(-2)^6 \\ \oplus \\ R(-3) \\ \oplus \\ R(-4) \end{array} \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

5. Se puede entonces presentar el diagrama de Betti del ideal

$$I = I(\Delta) = \langle x_1x_6, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_5, x_3x_6, x_5x_6, x_1x_4x_5, x_1x_2x_3x_4 \rangle:$$

| | | | | |
|---------------|---|----|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 6 | 9 | 5 | 1 |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| Global | 8 | 14 | 9 | 2 |

Para comprobar que el resultado es correcto, tomando

$$I = \langle x_1x_6, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_5, x_3x_6, x_5x_6, x_1x_4x_5, x_1x_2x_3x_4 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6],$$

se calcula en *Singular* su diagrama de Betti:

```
ring r=0, x(1..6), dp;
ideal ilambda=x(1)*x(6), x(2)*x(5), x(2)*x(6), x(3)*x(5), x(3)*x(6),
           x(5)*x(6), x(1)*x(4)*x(5), x(1)*x(2)*x(3)*x(4);
list rilambda=mres(ilambda, 0);
print(betti(rilambda), "betti");
```

Y el resultado obtenido es:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|---|---|----|---|---|
| 0: | 1 | - | - | - | - |
| 1: | - | 6 | 9 | 5 | 1 |
| 2: | - | 1 | 3 | 3 | 1 |
| 3: | - | 1 | 2 | 1 | - |
| total: | 1 | 8 | 14 | 9 | 2 |

La diferencia de los diagramas de Betti anteriores (el que proporciona *Singular* tiene una columna a mayores) radica en que la resolución libre graduada minimal que se ha calculado a mano es la del ideal $I = I(\Delta)$, y la que proporciona *Singular* es la de $R/I(\Delta)$, que ya se había comentado que eran iguales con la diferencia de que la asociada a $R/I(\Delta)$ tiene un paso más.

Como curiosidad, se puede observar en el diagrama de Betti de la resolución de R/I el resultado de la Proposición 1.4.4, ya que $1 - 8 + 14 - 9 + 2 = 0$.

Nota 2.1.12. Se puede observar a partir del ejemplo, que para todo ideal monomial libre de cuadrados I (es decir un ideal de Stanley-Reisner para algún complejo simplicial Δ) en el anillo de polinomios en n variables, los números de Betti situados en la primera fila del diagrama de Betti de I ($\beta_{0,2}(I)$, $\beta_{1,3}(I)$, etc.), como son los que corresponden a la 0-ésima homología reducida, y se tiene que la dimensión de $\tilde{H}_0(\Delta, \mathbb{K})$ es una menos que el número de componentes conexas de Δ , no dependen de la característica del cuerpo.

En cambio, para el resto de filas como se tratan las i -ésimas homologías reducidas y $\tilde{H}_i(\Delta, \mathbb{K}) = \text{Ker}(\partial_i)/\text{Im}(\partial_{i+1})$, los números de Betti que corresponden al resto de filas sí pueden depender de la característica del cuerpo.

Ejemplo 2.1.13. Para mostrar el resultado comentado en la nota anterior, se toman cuerpos \mathbb{K}_1 y \mathbb{K}_2 , de características 0 y 2 respectivamente (podemos considerar $\mathbb{K}_1 = \mathbb{R}, \mathbb{K}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Sean $R_1 = \mathbb{K}_1[x_1, \dots, x_6]$ y $R_2 = \mathbb{K}_2[x_1, \dots, x_6]$ los anillos de polinomios asociados a esos cuerpos.

Sean los ideales

$$\begin{aligned} I_1 &= \langle x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_5, x_1x_5x_6, x_1x_4x_6, x_2x_3x_6, \\ &\quad x_2x_5x_6, x_2x_4x_5, x_3x_4x_5, x_3x_4x_6 \rangle \subset R_1 \\ I_2 &= \langle x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_5, x_1x_5x_6, x_1x_4x_6, x_2x_3x_6, \\ &\quad x_2x_5x_6, x_2x_4x_5, x_3x_4x_5, x_3x_4x_6 \rangle \subset R_2 \end{aligned}$$

Se calculan los diagramas de Betti de ambos ideales, que se representan mediante el mismo complejo simplicial, pero al no estar sobre cuerpos de la misma característica, sus diagramas de Betti no tienen por qué coincidir:

Para I_1 :

```
ring r=0,x(1..6),dp;
ideal i=x(1)*x(2)*x(3),x(1)*x(2)*x(4),x(1)*x(3)*x(5),
      x(1)*x(5)*x(6),x(1)*x(4)*x(6),x(2)*x(3)*x(6),
      x(2)*x(5)*x(6),x(2)*x(4)*x(5),x(3)*x(4)*x(5),
      x(3)*x(4)*x(6);
list ri=mres(i,0);
print(betti(ri),"betti");
```

Y el resultado obtenido es:

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|--------|---|----|----|---|
| 0: | 1 | - | - | - |
| 1: | - | - | - | - |
| 2: | - | 10 | 15 | 6 |
| total: | 1 | 10 | 15 | 6 |

Para I_2 :

```
ring s=2,x(1..6),dp;
ideal i=x(1)*x(2)*x(3),x(1)*x(2)*x(4),x(1)*x(3)*x(5),
      x(1)*x(5)*x(6),x(1)*x(4)*x(6),x(2)*x(3)*x(6),
      x(2)*x(5)*x(6),x(2)*x(4)*x(5),x(3)*x(4)*x(5),
      x(3)*x(4)*x(6);
list ri=mres(i,0);
print(betti(ri),"betti");
```

Y el resultado obtenido es:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|---|----|----|---|---|
| 0: | 1 | - | - | - | - |
| 1: | - | - | - | - | - |
| 2: | - | 10 | 15 | 6 | 1 |
| 3: | - | - | - | 1 | - |
| total: | 1 | 10 | 15 | 7 | 1 |

Se observa que los diagramas de Betti de R_1/I_1 y de R_2/I_2 no coinciden, lo cual implica que los diagramas de los ideales tampoco, así como su resolución libre graduada minimal, aunque ambos son el ideal de Stanley-Reisner del mismo complejo simplicial, puesto que varía la característica del cuerpo sobre el que se crean.

2.2. Resolución de Taylor

En esta sección se describe de forma constructiva la resolución de Taylor del anillo R/I , que se puede encontrar, por ejemplo, en [3] o en [15], siendo I un ideal monomial, esta resolución está muy lejos de ser la minimal, pero el cálculo es sencillo y a partir de ella se obtiene otras resoluciones mucho más próximas a la minimal, como se mostrará en la sección siguiente. El cálculo de esta resolución, se ha implementado en MATLAB y en *Singular*, y se puede observar el algoritmo de construcción de la resolución en el apéndice del trabajo.

La resolución de Taylor tiene asociado un complejo simplicial que, a diferencia de los complejos simpliciales asociados a ideales de Stanley-Reisner, puede construirse para ideales monomiales cualesquiera, no necesariamente libres de cuadrados.

Sea $I \subset R$ un ideal monomial, y sea $\{x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_t}\}$ un sistema minimal de generadores monomiales de I .

Para cada subconjunto $J \subseteq \{1, \dots, t\}$, se define

$$m_J = \text{mcm}(x^{\alpha_i} \mid i \in J).$$

Hay 2^t subconjuntos de $\{1, \dots, t\}$, por lo que se toma el conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_{2^t}\}$ cuyos vértices v_i se etiquetan como los vectores exponentes de los elementos m_J descritos anteriormente (o con los propios m_J cuando no de lugar a equivoco).

Puede darse el caso, y es de hecho en lo que se basa la poda de la siguiente sección, que v_i se etiquete como α_J , el exponente de m_J , v_j se etiquete como

α_K , el exponente de m_K , con $J \neq K$, y que se tenga que $\alpha_J = \alpha_K$ aunque $v_i \neq v_j$, es decir, pueden existir vértices distintos, etiquetados con el mismo vector exponente, porque coincide el valor del mínimo común múltiplo de dos conjuntos de generadores de I distintos.

Sea F_s el R -módulo libre cuyos elementos de la base son e_J , siendo J un subconjunto de $\{1, \dots, t\}$ de s elementos.

Para cada par de subconjuntos $J, K \subseteq \{1, \dots, t\}$, tal que $J = \{i_1, \dots, i_s\}$ suponiéndose ordenados, se define:

$$c_{J,K} = \begin{cases} (-1)^k \frac{m_J}{m_K} & \text{si } K = J \setminus \{i_k\} \text{ para algún } k \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Se define el complejo de Taylor $T(I)$ sobre el conjunto de vértices V , como el complejo simplicial cuyas aristas unen el vértices m_J con el vértice m_K , si $c_{J,K} \neq 0$. Por lo que solo existen aristas que relacionan elementos de F_s con F_{s-1} , y entonces se define

$$\psi_s : F_s \rightarrow F_{s-1}$$

como

$$\psi_s(e_J) = \sum_K c_{J,K} \cdot e_K.$$

De esta forma se obtiene la sucesión de módulos

$$0 \rightarrow F_t \xrightarrow{\psi_t} \dots \xrightarrow{\psi_1} F_0 \xrightarrow{\psi_0} R/I \rightarrow 0,$$

que es una resolución libre graduada de R/I como se puede observar en [6] o en [10].

La resolución de Taylor no suele ser minimal, ya que su longitud es exactamente t , el número de generadores de I , y su rango, el número de elementos que la forman, es 2^t . Esta resolución contiene siempre en su interior otras mucho más cercanas a la minimal, incluida la propia resolución libre graduada minimal de R/I , y en la sección siguiente se explica una forma de “podar” el exceso de información que se tiene en esta resolución.

La información de la resolución de Taylor se puede leer en el complejo de Taylor definido, ya que cada vértice m_J corresponde a un elemento de la base de F_s si J es un subconjunto de $\{1, \dots, t\}$ de s elementos. De hecho m_J representa el mínimo común múltiplo de los s elementos de la base cuyos índices son los elementos de J . El conjunto de aristas que une los vértices de F_s con los vértices de F_{s-1} corresponde a la aplicación ψ_s de la resolución, y en ese caso se dice que la arista *corresponde a la dirección s* , o lo que es lo mismo, la arista *corresponde a la dirección dada por el generador x^{α_s}* .

Una forma de observar la cantidad de información innecesaria que contiene la resolución de Taylor, es el hecho de que hay aristas que unen elementos con la misma etiqueta, lo cual no aporta información relevante.

Es importante entender la relación entre el complejo de Taylor y la resolución de Taylor, ya que en el programa de MATLAB, realmente lo que se realiza es la construcción de $T(I)$ y además, en la sección siguiente, para podar el exceso de información de la resolución de Taylor, se trabajará con este complejo.

Nota 2.2.1. Se puede observar gracias a la resolución de Taylor el resultado de la Proposición 1.4.4 para resoluciones libres graduadas de anillos cociente R/I cuando I es un ideal monomial, ya que por el Teorema del binomio de Newton se tiene que

$$0 = (1-1)^t = \binom{t}{0} - \binom{t}{1} + \dots + (-1)^s \binom{t}{s} + \dots + (-1)^{t-1} \binom{t}{t-1} + (-1)^t \binom{t}{t},$$

y el número de elementos de F_s es

$$\beta_s = \binom{t}{s},$$

luego la suma alternada de los números de Betti globales asociados a la resolución de Taylor de R/I siendo I un ideal monomial es

$$\sum_{i=0}^t (-1)^i \beta_i = \sum_{i=0}^t (-1)^i \binom{t}{i} = (1-1)^t = 0.$$

Además, este resultado es válido para cualquier otra resolución libre graduada de R/I contenida en la resolución de Taylor, en particular para la resolución libre graduada minimal de R/I . Esto se debe a que al eliminar el exceso de información de la resolución de Taylor para obtener otra resolución de R/I , cuyos números globales de Betti se denotan β'_i , suprimiendo un generador de F_s redundante, se debe eliminar otro de F_{s+1} , ya que, por la forma en la que se generan las aplicaciones, se tiene que alguno de los generadores de F_{s+1} se podría escribir como combinación lineal del resto. Por tanto, se tiene que $\beta'_s = \beta_s - 1$, y $\beta'_{s+1} = \beta_{s+1} - 1$, luego se mantiene la igualdad $\sum_{i=0}^t (-1)^i \beta'_i = 0$.

Este resultado se extiende al caso de una resolución libre graduada de R/I siendo I un ideal homogéneo cualquiera de R , no necesariamente monomial, al poderse relacionar la resolución libre graduada minimal del ideal inicial de I , que es monomial, con la resolución libre graduada minimal de I .

Este proceso no se detalla puesto que el trabajo está centrado en los ideales monomiales.

Ejemplo 2.2.2. Se parte del ideal monomial $I = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ que, como se verá en el capítulo siguiente, corresponde al ideal de aristas del ciclo de 3 vértices. Se pueden calcular todos los elementos m_J , con $J \subseteq \{1, 2, 3\}$:

- Si $|J| = 0$, solo existe el elemento $m_{\{\emptyset\}} = 1$, etiquetado como $\{0, 0, 0\}$, que es el generador de F_0 .
- Si $|J| = 1$, se tiene que el conjunto de elementos m_J coincide con el conjunto de generadores de I , es decir

$$m_{\{1\}} = x_1x_2, \quad m_{\{2\}} = x_2x_3, \quad m_{\{3\}} = x_1x_3,$$

por lo que los elementos que corresponden a F_1 se etiquetan como $\{1, 1, 0\}$, $\{0, 1, 1\}$ y $\{1, 0, 1\}$.

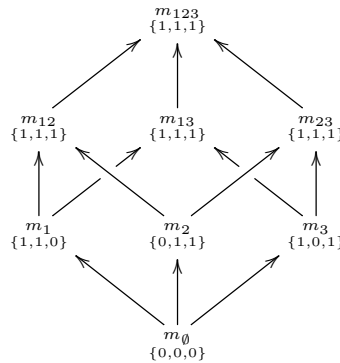
- Si $|J| = 2$, hay tres elementos de la forma m_j :

$$m_{\{1,2\}} = x_1x_2x_3, \quad m_{\{1,3\}} = x_1x_2x_3, \quad m_{\{2,3\}} = x_1x_2x_3,$$

por lo que los elementos que corresponden a F_2 se etiquetan todos con $\{1, 1, 1\}$.

- Si $|J| = 3$, solo existe el elemento $m_{\{1,2,3\}} = x_1x_2x_3$, el único generador de F_3 , etiquetado como $\{1, 1, 1\}$.

El complejo de Taylor de este ideal, $T(I)$ es



donde las aristas, que unen elementos de F_{s-1} y de F_s , están orientadas, teniendo como origen el elemento $m_K \in F_{s-1}$ y como destino es elemento $m_J \in F_s$ tales que $c_{J,K} \neq 0$. El elemento k que cumple que $J = K \cup \{k\}$ es la dirección a la que corresponde esa arista.

El diagrama de Betti de la resolución de Taylor de R/I es por tanto:

| | | | | |
|--------|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 3 | 3 | 0 |
| Global | 1 | 3 | 3 | 1 |

y se puede en *Singular* que el diagrama de Betti de R/I es:

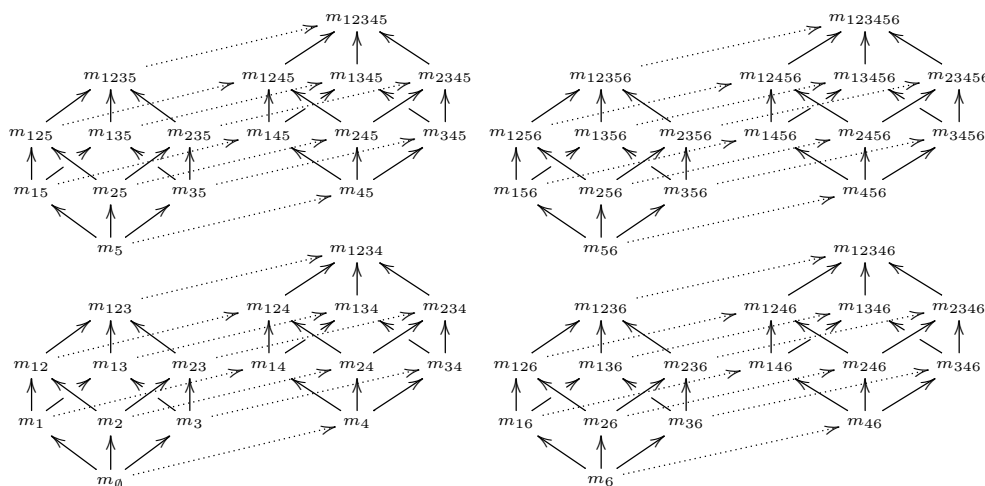
| | | | |
|--------|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 |
| 0: | 1 | - | - |
| 1: | - | 3 | 2 |
| total: | 1 | 3 | 2 |

luego la resolución de Taylor no es la resolución libre graduada minimal de R/I .

La resolución de Taylor de R/I es de la forma

$$0 \rightarrow R \rightarrow R^3 \rightarrow R^3 \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0.$$

Ejemplo 2.2.3. Se parte un ideal monomial $I = \langle x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, x^{\alpha_3}, x^{\alpha_4}, x^{\alpha_5}, x^{\alpha_6} \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$, es decir, un ideal generado por 6 monomios cualesquiera. El complejo simplicial $T(I)$ de este ideal es



en el que se ha omitido la escritura de algunas aristas para que sea más legible, y se ha simplificado la notación, de forma que $m_{\{i_1, \dots, i_j\}}$ se ha sustituido por $m_{i_1 \dots i_j}$, pero se debe entender que, de la misma forma que existe la arista $m_{\{\emptyset\}} \rightarrow m_{\{4\}}$, existe $m_{\{\emptyset\}} \rightarrow m_{\{5\}}$ y $m_{\{\emptyset\}} \rightarrow m_{\{6\}}$, y esto mismo ocurre con el resto de los vértices, de forma que cada elemento m_J de F_{s-1} está unido con $6 - (s - 1) = 7 - s$ elementos de F_s que corresponden a las direcciones k tales que $k \notin J$.

La resolución de Taylor de R/I es de la forma

$$0 \rightarrow R \rightarrow R^6 \rightarrow R^{15} \rightarrow R^{20} \rightarrow R^{15} \rightarrow R^6 \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0.$$

Con los ejemplos anteriores se observa que la resolución de Taylor depende del número de generadores del ideal, y crece de forma exponencia, si I tiene t generadores, el complejo de Taylor tiene 2^t vértices. Se añade a continuación un ejemplo, utilizando la implementación de MATLAB realizada, en la que se obtiene el diagrama de Betti de la resolución de Taylor.

Ejemplo 2.2.4. Sea $I = \langle x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_4, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_5, x_3x_6, x_4x_6 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$, sobre el que se volverá en el ejemplo 3.7.5, ya que corresponde al ideal de aristas del complementario de un ciclo de 6 vértices. En MATLAB, la ejecución de:

```
>> complementarioCiclo6vertices=[1 0 0 1 0 0;
    0 0 1 0 0 1;
    1 0 1 0 0 0;
    0 1 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0;
    1 0 0 0 1 0;
    0 0 1 0 1 0;
    0 0 0 1 0 1;
    0 1 0 0 0 1];
>> [C,s,mcm]=ResolucionTaylor(complementarioCiclo6vertices);
```

da como resultado:

```
T =
7x10 table
      0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
      -  -  -- -- -- -- -- -- --
-3    0  0  0  0  0  0  0  0  0  1
-2    0  0  0  0  0  0  0  0  9  0
-1    0  0  0  0  0  0  6 36  0  0
 0     1  0  0  2  9 36 78  0  0  0
 1     0  9 18 36 72 90  0  0  0  0
 2     0  0 18 42 45  0  0  0  0  0
 3     0  0  0  4  0  0  0  0  0  0

glob =
      1  9 36 84 126 126 84 36 9 1
```

A mayores, el programa devuelve los siguientes datos:

- En la variable C se ha guardado $T(I)$.
- En la variable s se almacena, para cada elemento, el orden de sicigia que ocupa, es decir m_J se almacena con $s = k$, si $|J| = k$.
- En la variable mcm se ha guardado el mínimo común múltiplo de los generadores de I dados.

Estos valores se devuelven puesto que son los necesarios para poder aplicar el algoritmo de poda que se definirá en la siguiente sección sin tener que repetir cálculos.

T es el diagrama de Betti asociado a la resolución de Taylor de R/I , que muestra que esta resolución es muy lejana a la minimal, ya que precisa de tres filas de números negativos, cuando se sabe que la minimal no precisa de ninguna fila de números negativos. Además el número de pasos de la resolución de Taylor es 9, el número de generadores, que es mayor que el número de variables de R , la cota dada por el Teorema de las Sicigias de Hilbert, (Teorema 1.3.5).

$glob$ contiene los números de Betti globales asociados a la resolución de Taylor de R/I , que, por otra parte, sabemos que se corresponde con la novena fila del triángulo de Tartaglia. Entonces la resolución de Taylor de R/I es:

$$0 \rightarrow R \rightarrow R^9 \rightarrow R^{36} \rightarrow R^{84} \rightarrow R^{126} \rightarrow R^{126} \rightarrow R^{84} \rightarrow R^{36} \rightarrow R^9 \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0.$$

2.3. Poda de la resolución de Taylor

Como se ha comentado en la sección anterior, la resolución de Taylor está muy lejos de ser la minimal, es decir, contiene mucha información innecesaria, pero hay varias resoluciones libres graduadas conocidas, como la de Lyubeznik ([13]), que se obtienen a partir de ella. En esta sección, se parte de la resolución de Taylor, para obtener una resolución libre graduada mucho más cerca de la minimal “podando” gran parte del exceso de información. Usando los resultados obtenidos en [1], esto se realiza con un algoritmo, que a cada paso, elimina el exceso de información redundante entre algunos de los R -módulos que forman la resolución. Cuando el algoritmo termina, se obtiene una resolución libre graduada, que aunque en general no es la minimal, es mucho menor que otras resoluciones libres graduadas conocidas, como la de Lyubenik.

Algoritmo 2.3.1 ([1]). Sea $I = \langle x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_t} \rangle \subseteq R$ un ideal monomial.

- **INPUT:** Se parte del conjunto de aristas del complejo de Taylor $T(I)$ calculado en la sección anterior.

- **para s desde 1 hasta t hacer** para toda arista E en la dirección de s :

Si E une el vértice m_J con etiqueta α_J , con el vértice m_K con etiqueta α_K , tal que $\alpha_J = \alpha_K$, se suprime E del conjunto de aristas de $\mathbf{T}(\mathbf{I})$ y se suprimen los dos vértices m_J y m_K del conjunto de vértices de $\mathbf{T}(\mathbf{I})$ (teniendo en cuenta de que ninguno de ellos se haya eliminado en un paso anterior), y todas las aristas que tuvieran alguno de esos vértices como adyacentes .

fin

- **OUTPUT:** $\mathbf{T}(\mathbf{I})$, complejo, *irreducible* en el sentido de que no existe ninguna arista que una dos vértices con la misma etiqueta.

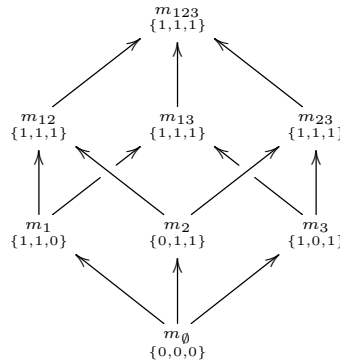
Nota 2.3.2. El algoritmo propuesto, realiza la poda siguiendo el mismo orden que el de los generadores de I , por lo que se pueden obtener distintas resoluciones en función del orden en el que se den los generadores del ideal. Puede ocurrir de hecho que para algún orden se obtenga la resolución libre graduada minimal de I , pero para otro orden distinto no.

La resolución libre graduada obtenida es aquella que tiene r pasos, siendo

$$r = \max_J \{s \mid \exists v_i \sim m_J, \text{ con } J \subseteq \{1, \dots, t\} \text{ de } s \text{ elementos.}\}$$

y cada módulo F_s está generado por los elementos $v_i \sim m_J$ que no se han eliminado en el algoritmo tales que J es un subconjunto de s elementos.

Ejemplo 2.3.3. Se parte del ideal $I = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_3]$, del ejemplo 2.2.2, cuyo complejo de Taylor $T(I)$ es:

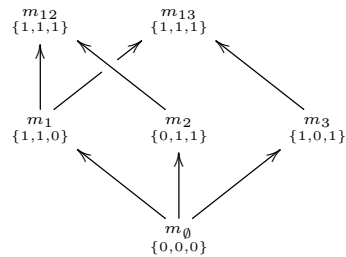


Se toma la dirección 1, es decir, la dada por el primer monomio generador de I , x_1x_2 . Gráficamente esta dirección es la que corresponde a la arista $m_\emptyset \rightarrow m_1$ y a sus paralelas.

Se podan las aristas cuyos vértices adyacentes tienen la misma etiqueta, que en este caso solamente es la arista $E : m_{23} \rightarrow m_{123}$.

Al eliminar esta arista, se eliminan también los vértices adyacentes y todas las aristas incidentes sobre ellos.

El nuevo complejo de Taylor $T(I)$ es:



que ya no puede ser podado, puesto que aunque m_{13} y m_{12} tienen la misma etiqueta, no existe ninguna arista entre ellos, ya que ambos se encuentran en F_2 .

La resolución obtenida tras la poda es:

$$0 \rightarrow R^2 \rightarrow R^3 \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0.$$

que además coincide con la minimal como ya se ha observado en el ejercicio 2.2.2.

Ejemplo 2.3.4. Se parte del ideal

$$I = \langle x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_4, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_5, x_3x_6, x_4x_6 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6],$$

del ejemplo 2.2.4, y del resultado obtenido en MATLAB al ejecutar esas líneas. Se ejecuta

```
>> AlgoritmoDePoda(complementarioCiclo6vertices , C,s,mcm);
```

Y proporciona el resultado:

T =

3x5 table

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|-----|---|---|
| | - | - | --- | - | - |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 9 | 16 | 9 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

glob =

| | | | | |
|---|---|----|---|---|
| 1 | 9 | 16 | 9 | 1 |
|---|---|----|---|---|

T es como en el ejemplo anterior el diagrama de Betti de la resolución libre graduada obtenida. Se puede ver en esta ocasión, que de hecho, tras realizar la poda, las filas y columnas de T están dentro de los márgenes de minimalidad de la resolución libre graduada (aunque eso no implica que sea la resolución libre graduada minimal de R/I).

glob contiene los números de Betti globales de la resolución libre graduada de R/I obtenida tras la poda de la resolución de Taylor, luego esta resolución es:

$$0 \rightarrow R \rightarrow R^9 \rightarrow R^{16} \rightarrow R^9 \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0,$$

que es una resolución mucho menor que la de Taylor y de hecho coincide con la minimal.

Esto se sabe ya que el diagrama de Betti de R/I , obtenido al ejecutar en *Singular*:

```
ring r=0,x(1..6),dp;
ideal ilambda=x(1)*x(3),x(1)*x(4),x(1)*x(5),x(2)*x(4),x(2)*x(5),
           x(2)*x(6),x(3)*x(5),x(3)*x(6),x(4)*x(6);
list rilambda=mres(ilambda,0);
print(betti(rilambda),"betti");
```

Es:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|---|---|----|---|---|
| 0: | 1 | - | - | - | - |
| 1: | - | 9 | 16 | 9 | - |
| 2: | - | - | - | - | 1 |
| total: | 1 | 9 | 16 | 9 | 1 |

Por lo que la resolución obtenida tras realizar la poda a la resolución de Taylor de R/I coincide con la resolución libre graduada minimal de R/I .

Nota 2.3.5. Se ha observado en ambos ejemplos que la resolución obtenida tras la poda de la resolución de Taylor coincide con la minimal. Este resultado no es cierto en general, ya que la resolución obtenida depende en parte del orden en el que se toman los generadores, que es el orden en el que se toman las direcciones en se ejecuta la poda. Para mostrar esto, tomamos el ideal del ejemplo 2.2.4, $I = \langle x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_4, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_5, x_3x_6, x_4x_6 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6]$, que al implementar la poda en la resolución de Taylor:

```

>> complementarioCiclo6vertices=[1 0 0 1 0 0;
    0 0 1 0 0 1;
    1 0 1 0 0 0;
    0 1 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0;
    1 0 0 0 1 0;
    0 0 1 0 1 0;
    0 0 0 1 0 1;
    0 1 0 0 0 1];
>> [C,s,mcm]=ResolucionTaylor(complementarioCiclo6vertices);
>> AlgoritmoDePoda(complementarioCiclo6vertices , C,s,mcm);

```

se obtiene la resolución libre graduada minimal de I .

Pero si se reordenan los generadores, considerando en este caso

$$I = \langle x_1x_4, x_1x_3, x_1x_5, x_2x_4, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_5, x_3x_6, x_4x_6 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_6],$$

es decir, ejecutando

```

>> OrdenNoMinimal=[1 0 0 1 0 0;
    1 0 1 0 0 0;
    1 0 0 0 1 0;
    0 1 0 1 0 0;
    0 1 0 0 1 0;
    0 1 0 0 0 1;
    0 0 1 0 1 0;
    0 0 1 0 0 1;
    0 0 0 1 0 1];
>> [C,s,mcm]=ResolucionTaylor(OrdenNoMinimal);
>> AlgoritmoDePoda(OrdenNoMinimal ,C,s, mcm);

```

que es el mismo procedimiento que el anterior pero cambiando el orden de las direcciones por las que se realiza la poda, se obtiene como resultado:

T =

3x5 table

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|----|---|---|
| | - | - | -- | - | - |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 9 | 16 | 9 | 3 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | 1 |

glob =

| | | | | |
|---|---|----|----|---|
| 1 | 9 | 16 | 12 | 4 |
|---|---|----|----|---|

Que se sabe, gracias al ejercicio 2.3.4 no es la resolución libre graduada minimal de R/I . Esto muestra que el orden que se toma para realizar la poda es determinante para obtener la resolución más cercana a la minimal posible.

La búsqueda de buenas estrategias a la hora de elegir el orden de la poda explicada en esta sección es un problema abierto.

Capítulo 3

Ideales de aristas

En este capítulo, se da una la fórmula general para calcular los números de Betti (y por tanto las resoluciones libres graduadas minimales) de algunas familias de ideales de aristas. Se empezará definiendo los ideales de aristas, y luego, para distintas familias de grafos, se darán las fórmulas explícitas para los números de Betti del ideal de aristas asociado.

3.1. Base combinatoria

Definición 3.1.1. Un *grafo* sobre un conjunto de vértices V es un par ordenado $G = (V, E)$, donde E es un conjunto de pares no ordenados $v_i v_j$, con $v_i \neq v_j$.

Un elemento v_i es un *vértice* de G .

El conjunto E es el *conjunto de aristas* de G .

Dada una arista $e = v_i v_j$, los *puntos finales* de e son v_i y v_j .

Dos vértices son *adyacentes* si existe una arista e que les tiene como puntos finales. En este caso se dice que la arista $v_i v_j$ es *incidente* en v_i y v_j .

Nota 3.1.2. Los grafos son casos particulares de complejos simpliciales en los que todas las caras tienen dimensión 1.

Definición 3.1.3. El ideal de aristas del grafo G es el ideal $I_G \subseteq R$ que está generado por los monomios correspondientes a las aristas de G :

$$I_G = \langle \{x_i x_j \mid v_i v_j \text{ es una arista en } G\} \rangle.$$

Por definición, el ideal de aristas I_G es cuadrático y libre de cuadrados. De hecho, cualquier ideal cuadrático y libre de cuadrados es un ideal de aristas.

Al ser los grafos complejos simpliciales de dimensión 1, se pueden relacionar los ideales de aristas con los ideales de Stanley-Reisner.

Nota 3.1.4. El ideal de aristas de un grafo G coincide con el ideal de Stanley-Reisner del complejo simplicial $\Delta(G)$, que es el complejo simplicial cuyas caras son

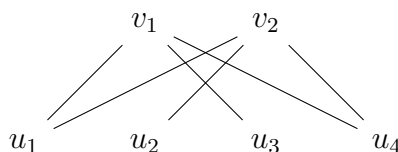
$$\{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_l}\} \mid \{x_{i_j}, x_{i_k}\} \text{ no es ninguna de las aristas de } G, \forall 1 \leq j, k \leq l\}.$$

Definición 3.1.5. Sea $G = (V, E)$. Se dice que G es un *grafo bipartito* si existen $V_1 \subseteq V$ y $V_2 \subseteq V$ tales que $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y

$$\forall e = v_i v_j \in E, v_i \in V_1, v_j \in V_2.$$

En ese caso, se suele denotar $V_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $V_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$. Luego un grafo G es un grafo bipartito sobre $V = V_1 \cup V_2$ si todas sus aristas son de la forma $v_i u_j$.

Ejemplo 3.1.6.



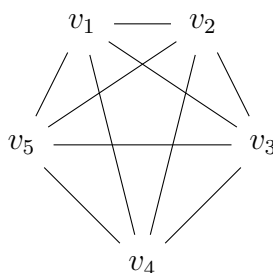
Definición 3.1.7. Dado un grafo bipartito $G = (V, E)$ con $V = V_1 \cup V_2$ siendo $V_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $V_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$, se define la *matriz biadyacente* de G como

$$M(G) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m} \quad \text{tal que } a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i u_j \in E \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

3.2. Grafo completo

Para cada entero $n \geq 2$, el grafo completo en n vértices (denotado K_n) es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, \dots, v_n\}$, y cuyo conjunto de aristas es $\{v_i v_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Ejemplo 3.2.1. Por ejemplo, K_5 es de la forma:



Se tiene que el ideal de aristas del grafo completo K_n es

$$I = I_{K_n} = \langle x_i x_j \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

El complejo simplicial $\Delta(K_n)$ que cumple que el ideal de Stanley-Reisner asociado a él coincide con el ideal de aristas del grafo completo de n vértices es

$$\Delta(K_n) = \{\{1\}, \dots, \{n\}\},$$

el complejo simplicial que solo tiene n vértices aislados.

Gracias al Teorema 2.1.9, se pueden describir con exactitud los números de Betti del ideal de aristas del grafo completo I_{K_n} .

Teorema 3.2.2 ([11, Thm. 5.1.1]). *Sea I_{K_n} el ideal de aristas del grafo completo en n vértices. Los números de Betti graduados de I_{K_n} son independientes de la característica del cuerpo sobre el que se forma el ideal y el diagrama de Betti de I_{K_n} es*

| | | | | |
|---|---------------|---------------|-----|-----------------|
| | 0 | 1 | ... | $n-2$ |
| 2 | $\beta_{0,2}$ | $\beta_{1,3}$ | ... | $\beta_{n-2,n}$ |

siendo

$$\beta_i(I_{K_n}) = \beta_{i,i+2}(I_{K_n}) = (i+1) \binom{n}{i+2} \text{ para todo } 0 \leq i \leq n-2.$$

En particular, la resolución libre graduada minimal de I_{K_n} es 2-lineal.

Demostración. Por el Teorema 2.1.9 se sabe que

$$\beta_{i,j}(I_{K_n}) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W, \mathbb{K}),$$

donde $\Delta = \Delta(K_n) = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$.

Sea $W \subseteq V$ tal que $W \neq \emptyset$, entonces se tiene que Δ_W es un complejo simplicial formado sólo por vértices aislados (caras de dimensión cero). Por ello, la única homología reducida no-nula de estos complejos simpliciales es aquella en la posición 0-ésima, $\tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$, es decir, que la resolución libre de I_{K_n} es 2-lineal. Por la Nota 2.1.12, los números de Betti de I_{K_n} no dependen de la característica del cuerpo. Por otra parte, $\tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$ es exactamente el número de vértices de Δ_W . Se tiene entonces que cuando $j-i-2=0$, es decir $j=i+2$, $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = |W| - 1 = j - 1$, y cuando $j-i-2 \neq 0$, $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W, \mathbb{K}) = 0$.

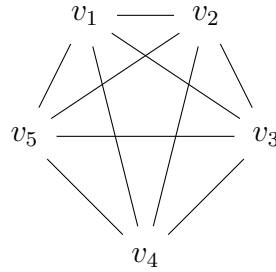
Se tiene que existen $\binom{n}{j} = \binom{n}{i+2}$ subconjuntos $W \subseteq V$ tales que $|W| = j$, luego el i -ésimo número de Betti de grado j de $I_{K_n} = I(\Delta(K_n))$ es

$$\beta_{i,j}(I_{K_n}) = \begin{cases} \binom{n}{i+2}(j-1) = \binom{n}{i+2}(i+1) & \text{si } j = i+2 \\ 0 & \text{si } j \neq i+2 \end{cases}$$

□

Nota 3.2.3. Debido a que $\binom{a}{b} = 0$ si $b > a$, el último número de Betti no nulo de I_{K_n} es $\beta_{n-2,n}$.

Ejemplo 3.2.4. Sea K_5 , el grafo completo en 5 vértices,



entonces, se tiene que el ideal de aristas del grafo K_5 es:

$$I_{K_5} = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_4, x_3x_5, x_4x_5 \rangle,$$

y aplicando la fórmula del Teorema 3.2.2, el diagrama de Betti de I_{K_5} es:

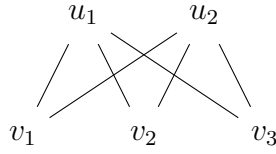
| | | | | |
|---|----|----|----|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 10 | 20 | 15 | 4 |

Se puede comprobar con *Singular* que es el correspondiente a la resolución libre graduada minimal de I_{K_5} .

3.3. Grafo completo bipartito

Dados $n, m > 1$, el grafo completo bipartito $K_{n,m}$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ y cuyo conjunto de aristas es $\{u_i v_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

Ejemplo 3.3.1. Por ejemplo, $K_{2,3}$ es de la forma:



En el caso particular del ideal de aristas de un grafo completo bipartito, para facilitar la lectura, se considera $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ sin pérdida de generalidad y que el conjunto de vértices sobre el que se encuentra el grafo es $V = V_1 \cup V_2$, siendo $V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $V_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Se tiene que el ideal de aristas del grafo completo bipartito $K_{n,m}$ es

$$I = I_{K_{n,m}} = \langle x_i y_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \rangle.$$

El complejo simplicial $\Delta(K_{n,m})$ que cumple que el ideal de Stanley-Reisner asociado a él coincide con el ideal de aristas del grafo completo bipartito de $n + m$ vértices es el formado por la unión disjunta de dos símlices, un $(n - 1)$ -símplice y un $(m - 1)$ -símplice. Es decir,

$$\Delta(K_{n,m}) = \Delta_{n-1} \cup \Delta_{m-1},$$

donde Δ_{n-1} es el subcomplejo simplicial de la Definición 1.2.3. Aplicando de nuevo la fórmula de Hochster, se pueden describir los números de Betti del ideal de aristas del grafo completo bipartito $I_{K_{n,m}}$.

Teorema 3.3.2 ([11, Thm. 5.2.4]). *Sea $I_{K_{n,m}}$ el ideal de aristas de un grafo completo bipartito con $n + m$ vértices. Los números de Betti graduados de $I_{K_{n,m}}$ son independientes de la característica del cuerpo sobre el que se forma el ideal. El diagrama de Betti de $I_{K_{n,m}}$ es*

| | | | | |
|---|---------------|---------------|-----|---------------------|
| | 0 | 1 | ... | $n + m - 2$ |
| 2 | $\beta_{0,2}$ | $\beta_{1,3}$ | ... | $\beta_{n+m-2,n+m}$ |

siendo

$$\beta_i(I_{K_{n,m}}) = \beta_{i,i+2}(I_{K_{n,m}}) = \sum_{\substack{k+l=i+2, \\ k,l \geq 1}} \binom{n}{k} \binom{m}{l} \text{ para todo } 0 \leq i \leq n + m - 2.$$

En particular, la resolución libre graduada minimal de $I_{K_{n,m}}$ es 2-lineal.

Demostración. Por el Teorema 2.1.9 se sabe que

$$\beta_{i,j}(I_{K_{n,m}}) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W, \mathbb{K}),$$

donde $\Delta = \Delta(K_{n,m}) = \Delta_{n-1} \cup \Delta_{m-1}$.

Sea $W \subseteq V$ tal que $W \neq \emptyset$. Si $W \subseteq V_1$ o $W \subseteq V_2$, entonces Δ_W es un $(|W| - 1)$ -símplice, lo que implica que cualquier homología reducida de Δ_W es nula.

Sea $W \subseteq V$ tal que $W \cup V_1 \neq \emptyset$ y $W \cup V_2 \neq \emptyset$, entonces Δ_W es la unión disjunta de dos símlices. Esto implica que la única homología reducida no-nula de estos complejos simpliciales es aquella en la posición 0-ésima, $\tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$. Por la Proposición 2.1.7 se tiene que la dimensión de $\tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$ no depende del cuerpo de coeficientes del anillo de polinomios donde se encuentra el ideal, ya que solo depende del número de componentes conexas de Δ_W . Por tanto los números de Betti de un ideal de aristas de un grafo completo bipartito no dependen de la característica del cuerpo sobre el que se define el anillo de polinomios.

Se tiene que $\tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$ cuando $j - i - 2 = 0$, es decir $j = i + 2$, por lo que solo son no-nulos los números de Betti de la forma $\beta_{i,i+2}$. Además, como Δ_W es la unión disjunta de dos símlices, se tiene que en ese caso $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$ es el número de componentes conexas de Δ_W menos 1, es decir $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = 1$.

Se sabe que

$$\begin{aligned} \beta_{i,i+2} &= \sum_{\substack{|W|=i+2 \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) = \sum_{\substack{|W|=i+2 \\ W \subseteq V_1 \\ W \subseteq V_2}} 1 \\ &= \#\{W \mid |W| = i + 2, W \subseteq V_1, W \subseteq V_2\}. \end{aligned}$$

Falta calcular por tanto cuantos subconjuntos de V existen cuya intersección tanto con V_1 como con V_2 es no-nula y tengan $i + 2$ elementos para obtener el valor del número de Betti $\beta_{i,i+2}(I_{K_{n,m}})$.

Se obtiene un subconjunto W válido si se escoge un elemento de V_1 y $i + 1$ elementos de V_2 , hay $\binom{n}{1} \binom{m}{i+1}$ subconjuntos de esa forma.

Si se toman 2 elementos de V_1 , i elementos de V_2 , el subconjunto también es válido y existen $\binom{n}{2} \binom{m}{i}$ subconjuntos de esa forma.

De forma genérica, con $1 \leq k < n$ elementos en V_1 y $1 \leq l < m$ elementos en V_2 , con $k + l = i + 2$ se tiene otro subconjunto de la forma que se busca, y existen $\binom{n}{k} \binom{m}{l}$ subconjuntos de esa forma.

Sumando la cantidad de subconjuntos W que se pueden formar tales que $|W| = i + 2$, $W \subseteq V_1$, $W \subseteq V_2$ se tiene que existen

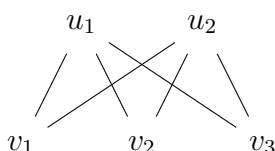
$$\binom{n}{1} \binom{m}{i+1} + \binom{n}{2} \binom{m}{i} + \cdots + \binom{n}{i+1} \binom{m}{1} = \sum_{\substack{k+l=i+2 \\ k,l \geq 1}} \binom{n}{k} \binom{m}{l}.$$

Entonces el i -ésimo número de Betti de grado j de $I_{K_{n,m}} = I(\Delta(K_{n,m}))$ es

$$\beta_{i,j}(K_{n,m}) = \begin{cases} \sum_{\substack{k+l=i+2 \\ k,l \geq 1}} \binom{n}{k} \binom{m}{l} & \text{si } j = i + 2 \\ 0 & \text{si } j \neq i + 2 \end{cases}$$

□

Ejemplo 3.3.3. Sea $K_{2,3}$, el grafo completo bipartito en $2 + 3$ vértices,



entonces, se tiene que el ideal de aristas del grafo $K_{2,3}$ es:

$$I_{K_{2,3}} = \langle x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3, x_2y_1, x_2y_2, x_2y_3 \rangle,$$

y aplicando la fórmula del Teorema 3.3.2, el diagrama de Betti de $I_{K_{2,3}}$ es:

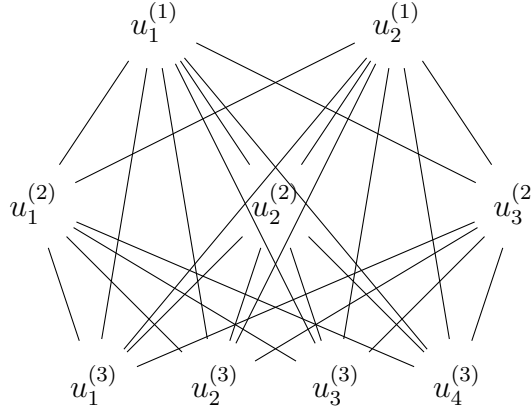
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 6 | 9 | 5 | 1 |

Se puede comprobar con *Singular* que es el correspondiente a la resolución libre graduada minimal de $I_{K_{2,3}}$.

3.4. Grafo completo multipartito

Dados $n_1, \dots, n_t > 1$, el grafo completo multipartito K_{n_1, \dots, n_t} es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}, u_1^{(2)}, \dots, u_{n_2}^{(2)}, \dots, u_1^{(t)}, \dots, u_{n_t}^{(t)}\}$, es decir $V = \{u_j^{(i)} \mid 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n_i\}$, y cuyo conjunto de aristas es $\{u_k^{(i)}u_l^{(j)} \mid i \neq j, 1 \leq k \leq n_i, 1 \leq l \leq n_j\}$.

Ejemplo 3.4.1. Por ejemplo, $K_{2,3,4}$ es de la forma:



En el caso particular del ideal de aristas de un grafo completo multipartito, para facilitar la lectura, se considera sin pérdida de generalidad que $R = \mathbb{K}[x_1^{(1)}, \dots, x_{n_1}^{(1)}, \dots, x_1^{(t)}, \dots, x_{n_t}^{(t)}]$ y que el conjunto de vértices es $V = \bigcup_{1 \leq i \leq t} V_i$, donde $V_i = \{u_1^{(i)}, \dots, u_{n_i}^{(i)}\}$, $\forall 1 \leq i \leq t$. Se denotará $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_t\}$ el conjunto de estos subconjuntos de V definidos.

Se tiene que el ideal de aristas del grafo completo multipartito K_{n_1, \dots, n_t} es

$$I = I_{K_{n_1, \dots, n_t}} = \langle x_k^{(i)} x_l^{(j)} \mid 1 \leq i, j \leq t, i \neq j, 1 \leq k \leq n_i, 1 \leq l \leq n_j \rangle.$$

El complejo simplicial $\Delta(K_{n_1, \dots, n_t})$ que cumple que el ideal de Stanley-Reisner asociado a él coincide con el ideal de aristas del grafo completo multipartito de $n_1 + \dots + n_t$ vértices es el formado por la unión disjunta de t símlices de la forma $(n-1)$ -símplice, para $n = n_1, \dots, n_t$.

$$\Delta(K_{n_1, \dots, n_t}) = \bigcup_{n \in \{n_1, \dots, n_t\}} \Delta_{n-1}.$$

Es decir, aquel cuyas facetas son los t conjuntos V_i definidos anteriormente. Aplicando de nuevo la fórmula de Hochster, se pueden describir con exactitud los números de Betti del ideal de aristas del grafo completo multipartito $I_{K_{n_1, \dots, n_t}}$.

Teorema 3.4.2 ([11, Thm. 5.3.8]). *Sea $I_{K_{n_1, \dots, n_t}}$ el ideal de aristas de un grafo completo multipartito con $n_1 + \dots + n_t$ vértices. Los números de Betti graduados de $I_{K_{n_1, \dots, n_t}}$ son independientes de la característica del cuerpo sobre el que se forma el ideal. Sea $N = \sum_{i=1}^t n_i$. El diagrama de Betti de $I_{K_{n_1, \dots, n_t}}$ es*

| | | | | |
|---|---------------|---------------|-----|-----------------|
| | 0 | 1 | ... | $N-2$ |
| 2 | $\beta_{0,2}$ | $\beta_{1,3}$ | ... | $\beta_{N-2,N}$ |

siendo, para todo $0 \leq i \leq N - 2$,

$$\beta_i(I_{K_{n_1, \dots, n_t}}) = \beta_{i, i+2}(I_{K_{n_1, \dots, n_t}}) = \sum_{k=2}^t (k-1) \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_k = i+2, \\ l_1 < \dots < l_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 1}} \binom{n_{l_1}}{\alpha_1} \dots \binom{n_{l_k}}{\alpha_k}.$$

En particular, la resolución libre graduada minimal de $I_{K_{n_1, \dots, n_t}}$ es 2-lineal.

Demostración. Por el Teorema 2.1.9 se sabe que

$$\beta_{i,j}(I_{K_{n_1, \dots, n_t}}) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W, \mathbb{K}),$$

donde $\Delta = \Delta(K_{n_1, \dots, n_t}) = \bigcup_{n \in \{n_1, \dots, n_t\}} \Delta_{n-1}$.

Sea $W \subseteq V$ tal que $W \neq \emptyset$. Si $W \subseteq V_i$, para algún $V_i \in \mathcal{V}$, y $W \not\subseteq V_j$, para $V_j \in \mathcal{V} \setminus V_i$, entonces Δ_W es un $(|W| - 1)$ -símplice, lo que implica que cualquier homología reducida de Δ_W es nula.

Sea $W \subseteq V$ tal que $W \subseteq V_i$, $W \subseteq V_j$, para al menos dos subconjuntos $V_i, V_j \in \mathcal{V}$, entonces Δ_W es la unión disjunta de entre 2 y t símlices. Esto implica, como en el caso de los grafos completos bipartitos, que la única homología reducida no-nula de estos complejos simpliciales es aquella en la posición 0-ésima, $\tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$. Por la Proposición 2.1.7 se tiene que la dimensión de $\tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$ no depende del cuerpo de coeficientes del anillo de polinomios donde se encuentra el ideal, ya que solo depende del número de componentes conexas de Δ_W . Por tanto los números de Betti de un ideal de aristas de un grafo completo multipartito no dependen de la característica del cuerpo sobre el que se define el anillo de polinomios.

Se tiene que $\tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$ cuando $j - i - 2 = 0$, es decir $j = i + 2$, por lo que solo son no-nulos los números de Betti de la forma $\beta_{i, i+2}$. Falta calcular su valor. Se sabe que

$$\begin{aligned} \beta_{i, i+2} &= \sum_{\substack{|W|=i+2 \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) \\ &= \sum_{\substack{|W|=i+2 \\ W \subseteq V}} \#\{\text{número de componentes conexas de } \Delta_W\} - 1. \end{aligned}$$

Falta calcular cuantos subconjuntos de V existen cuya intersección con más de un subconjunto $V_i \in \mathcal{V}$ es no-nula y tengan $i + 2$ elementos, y ver cual es el número de componentes conexas que tiene cada uno de esos subconjuntos.

De la misma forma que se ha observado en el caso del grafo bipartito (que es un caso particular del multipartito), se tiene que los subconjuntos $W \subseteq V$ que tienen k componentes conexas son precisamente los que tienen intersección no nula con k elementos de \mathcal{V} distintos. Al contar todas las posibilidades como se hizo en la prueba del caso bipartito, se obtiene que el número de subconjuntos $W \subseteq V$ tales que tienen intersección no nula con k subconjuntos $V_i \in \mathcal{V}$ es

$$\sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_k = i+2, \\ l_1 < \dots < l_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 1}} \binom{n_{l_1}}{\alpha_1} \dots \binom{n_{l_k}}{\alpha_k},$$

Cada uno de ellos tiene k componentes conexas, es decir, aporta $k - 1$ al valor del número de Betti. Luego

$$\beta_{i,i+2} = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = i+2, \\ l_1 < l_2 \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 1}} \binom{n_{l_1}}{\alpha_1} \binom{n_{l_2}}{\alpha_2} + \dots + \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_t = i+2, \\ \alpha_1, \dots, \alpha_t \geq 1}} (t-1) \cdot \binom{n_{l_1}}{\alpha_1} \dots \binom{n_{l_t}}{\alpha_t}.$$

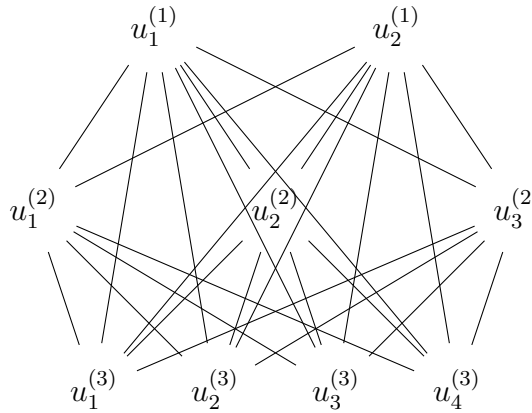
Entonces el i -ésimo número de Betti de grado j de $I_{K_{n_1, \dots, n_t}} = I(\Delta(K_{n_1, \dots, n_t}))$ es

$$\beta_{i,j}(I_{K_{n_1, \dots, n_t}}) = \begin{cases} \sum_{k=2}^t (k-1) \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_k = i+2, \\ l_1 < \dots < l_k \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 1}} \binom{n_{l_1}}{\alpha_1} \dots \binom{n_{l_k}}{\alpha_k} & \text{si } j = i+2 \\ 0 & \text{si } j \neq i+2 \end{cases}$$

□

Nota 3.4.3. En los tres casos mostrados hasta ahora, como se ha indicado en los Teoremas 3.2.2, 3.3.2 y 3.4.2, al ser resoluciones lineales, los números de Betti graduados de los ideales de aristas coinciden con los números de Betti globales.

Ejemplo 3.4.4. Sea $K_{2,3,4}$, el grafo completo multipartito en $2 + 3 + 4$ vértices,



entonces, se tiene que el ideal de aristas del grafo $K_{2,3,4}$ es:

$$I_{K_{2,3,4}} = \langle x_1y_1, x_1y_2, x_1y_3, x_2y_1, x_2y_2, x_2y_3, x_1z_1, x_1z_2, x_1z_3, \\ x_1z_4, x_2z_1, x_2z_2, x_2z_3, x_2z_4, y_1z_1, y_1z_2, y_1z_3, y_1z_4, \\ y_2z_1, y_2z_2, y_2z_3, y_2z_4, y_3z_1, y_3z_2, y_3z_3, y_3z_4 \rangle,$$

y aplicando la fórmula del Teorema 3.4.2, el diagrama de Betti de $I_{K_{2,3,4}}$ es:

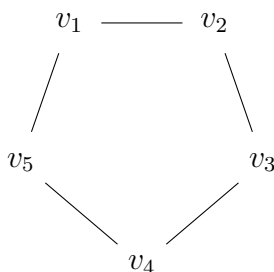
| | | | | | | | | |
|---|----|-----|-----|-----|-----|----|----|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 26 | 103 | 197 | 224 | 160 | 71 | 18 | 2 |

Se puede comprobar con *Singular* que es el correspondiente a la resolución libre graduada minimal de $I_{K_{2,3,4}}$.

3.5. Ciclos

Para cada entero $n \geq 3$, un n -ciclo (denotado C_n) es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, \dots, v_n\}$ y cuyo conjunto de aristas es $\{v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$.

Ejemplo 3.5.1. Por ejemplo, C_5 es de la forma:



Se tiene que el ideal de aristas del n -ciclo C_n es

$$I = I_{C_n} = \langle x_i x_j \mid j > i \text{ y } j - i = 1 \text{ o } j - i = n - 1 \rangle.$$

El complejo simplicial $\Delta(C_n)$ que cumple que el ideal de Stanley-Reisner asociado a él coincide con el ideal de aristas

$$\Delta(C_n) = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i \text{ no es adyacente a } v_j \text{ en } C_n\}.$$

Definición 3.5.2. Sea $W \subsetneq V = \{v_1, \dots, v_n\}$. El *grafo inducido* de C_n en los elementos de W consiste en el grafo $G = (W, E_W)$. Es decir, el grafo cuyo conjunto de vértices es W y cuyas aristas son las aristas de C_n que tienen de puntos finales a vértices de W .

Se denotará como un *camino de longitud m* a una componente conexas del grafo inducido de C_n que tiene longitud m , es decir, que tiene m vértices ($m - 1$ aristas).

Proposición 3.5.3. *El i -ésimo número de Betti de I_{C_n} de grado $j = 2(i + 1)$, $\beta_{i,2(i+1)}(I_{C_n})$, es el número de subgrafos inducidos de C_n que contienen $i + 1$ caminos de longitud 2.*

Teorema 3.5.4 ([11, Thm. 7.6.28]). *Sea I_{C_n} el ideal de aristas de un n -ciclo. Los números de Betti graduados de I_{C_n} son independientes de la característica del cuerpo sobre el que se forma el ideal pero sí dependen del valor $n \bmod 3$:*

Si $n \equiv 1 \pmod 3$:

$$\beta_{i,j}(I_{C_n}) = \begin{cases} \frac{n}{n-2(j-i-1)} \binom{j-i-1}{2i-j+2} \binom{n-2(j-i-1)}{j-i-1} & \text{si } j < n, 2i \geq j - 2 \\ 1 & \text{si } j = n, i = \frac{2n+1}{3} - 1 \end{cases}$$

Si $n \equiv -1 \pmod 3$:

$$\beta_{i,j}(I_{C_n}) = \begin{cases} \frac{n}{n-2(j-i-1)} \binom{j-i-1}{2i-j+2} \binom{n-2(j-i-1)}{j-i-1} & \text{si } j < n, 2i \geq j - 2 \\ 1 & \text{si } j = n, i = \frac{2n-1}{3} - 1 \end{cases}$$

Si $n \equiv 0 \pmod 3$:

$$\beta_{i,j}(I_{C_n}) = \begin{cases} \frac{n}{n-2(j-i-1)} \binom{j-i-1}{2i-j+2} \binom{n-2(j-i-1)}{j-i-1} & \text{si } j < n, 2i \geq j - 2 \\ 2 & \text{si } j = n, i = \frac{2n}{3} - 1 \end{cases}$$

La prueba de este resultado consiste en aplicar al caso $k = j - i - 1$ y $l = 2i - j + 2$ los resultados siguientes, cuyas pruebas se encuentra en [11].

Proposición 3.5.5. *Para $2k + l \neq n$,*

$$\beta_{k+l,2k+l} = \binom{k}{l} \left\{ \binom{n-2k}{k} + 2 \binom{n-2k-1}{k-1} \right\}.$$

Proposición 3.5.6. *El último número graduado de Betti no-nulo del ideal de aristas asociado al n -ciclo, I_{C_n} , depende del valor $n \bmod 3$ de la siguiente manera:*

1. *Si $n \equiv 1 \pmod 3$, $\beta_{\frac{2n+1}{3}-1,n}(I_{C_n}) = 1$.*
2. *Si $n \equiv -1 \pmod 3$, $\beta_{\frac{2n-1}{3}-1,n}(I_{C_n}) = 1$.*
3. *Si $n \equiv 0 \pmod 3$, $\beta_{\frac{2n}{3}-1,n}(I_{C_n}) = 2$.*

Nota 3.5.7. Se tiene que

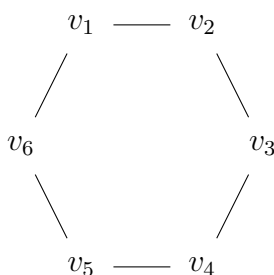
$$\binom{k}{l} \left\{ \binom{n-2k}{k} + 2 \binom{n-2k-1}{k-1} \right\} = \frac{n}{n-2k} \binom{k}{l} \binom{n-2k}{k}.$$

No se muestran en el trabajo las demostraciones de estos resultados puesto que se apoyan en conceptos que quedan lejos del ámbito estudiado. Cabe destacar, que aunque el grafo pueda parecer más simple, la resolución libre graduada minimal del ideal de aristas asociado a un n -ciclo no es lineal. Esto indica que las aplicaciones que aparecen en la resolución libre graduada minimal de I_{C_n} son aplicaciones más complejas, puesto que no se pueden representar con matrices cuyas entradas no nulas sean polinomios de grado 1.

El número de filas y columnas del diagrama de Betti de I_{C_n} depende de la longitud del ciclo C_n . De hecho, por la proposición 3.5.6 se tiene que el número de Betti que se encuentra en la última fila y en la última columna del diagrama de Betti es exactamente $\beta_{2q+r-1,n}$, siendo $n = 3q + r$ la división entera de n por 3 con $r \in \{-1, 0, 1\}$. Esto se puede ver en [11, Cor. 7.6.30]. Por tanto:

Corolario 3.5.8. *La etiqueta de la última columna del diagrama de Betti del ideal de aristas correspondiente a un n -ciclo es $2q + r - 1$ y la etiqueta de la última fila es $q + 1$.*

Ejemplo 3.5.9. Sea C_6 , el ciclo de 6 vértices,



entonces, se tiene que el ideal de aristas del grafo C_6 es:

$$I_{C_6} = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_6x_1 \rangle,$$

y aplicando la fórmula del Teorema 3.5.4, el diagrama de Betti de I_{C_6} es:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 6 | 6 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 2 |

que se puede comprobar en *Singular* que es el correspondiente a la resolución libre graduada minimal de I_{C_6} .

3.6. Cadenas

Para cada $n \geq 1$ se define la n -cadena o n -camino P_n como el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, \dots, v_n\}$ y cuyo conjunto de aristas es $\{v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n\}$.

Ejemplo 3.6.1. Por ejemplo, P_5 es de la forma:

$$v_1 \text{ --- } v_2 \text{ --- } v_3 \text{ --- } v_4 \text{ --- } v_5$$

Los números de Betti de una n -cadena se calculan por métodos similares a los ciclos ya que P_n es el subgrafo de C_n que contiene todos los vértices de C_n y todas sus aristas menos $\{1, n\}$.

Se tiene que el ideal de aristas de la n -cadena P_n es

$$I = I_{P_n} = \langle x_i x_j \mid j > i \text{ y } j - i = 1 \rangle.$$

Igual que se ha visto en el caso de los n -ciclos, aunque el grafo de una n -cadena pueda parecer sencillo, la resolución libre graduada minimal del ideal de aristas asociado a una n -cadena no lo es ya que no es lineal. El número de filas y columnas del diagrama depende de la longitud de la cadena P_n . Esto indica que las aplicaciones que aparecen en la resolución libre graduada minimal de I_{P_n} son más complejas.

El complejo simplicial $\Delta(P_n)$ que cumple que el ideal de Stanley-Reisner asociado a él coincide con el ideal de aristas

$$\Delta(P_n) = \{ \{v_i, v_j\} \mid v_i \text{ no es adyacente a } v_j \}.$$

Proposición 3.6.2. *El valor de $\beta_{i-1, 2i}(I_{P_n})$ es el número de subgrafos inducidos de P_n que contienen i caminos de longitud 2. Entonces*

$$\beta_{i-1, 2i}(I_{P_n}) = \binom{n - 2i + 1}{i}.$$

Teorema 3.6.3 ([11, Thm. 7.7.34]). *Sea I_{P_n} el ideal de aristas de una n -cadena. Los números de Betti graduados de I_{P_n} son independientes de la característica del cuerpo sobre el que se forma el ideal y se pueden escribir como*

$$\beta_{i,j}(I_{P_n}) = \binom{j-i-1}{2i-j+2} \binom{n-2(j-i-1)}{j-i-1} + \binom{j-i-2}{2i-j+2} \binom{n-2(j-i-1)}{j-i-2}.$$

Nota 3.6.4. El número de filas y columnas del diagrama de Betti de I_{P_n} depende de la longitud de la cadena P_n . De hecho, se puede observar en [11] que el número de Betti que se encuentra en la última fila y en la última columna del diagrama de Betti de I_{P_n} es:

- $\beta_{2q-1,3q}$, si $n = 3q + 1$ o $n = 3q$. Por tanto la etiqueta de la última columna del diagrama de Betti es $2q - 1$ y la etiqueta de la última fila es $q + 1$.
- $\beta_{2q,3q+2}$, si $n = 3q + 2$. Por tanto la etiqueta de la última columna del diagrama de Betti es $2q$ y la etiqueta de la última fila es $q + 2$.

Esto se puede ver en [11, Cor. 7.7.35].

Ejemplo 3.6.5. Sea P_8 , la cadena de 8 vértices,

$$v_1 \text{ --- } v_2 \text{ --- } v_3 \text{ --- } v_4 \text{ --- } v_5 \text{ --- } v_6 \text{ --- } v_7 \text{ --- } v_8$$

entonces, se tiene que el ideal de aristas del grafo P_8 es:

$$I_{P_8} = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_6x_7, x_7x_8 \rangle,$$

y aplicando la fórmula del Teorema 3.6.3, el diagrama de Betti de I_{P_8} es:

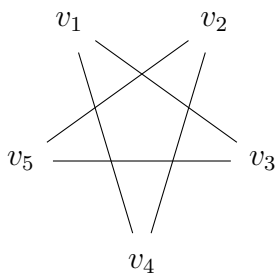
| | | | | | |
|---|---|----|----|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 7 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 10 | 16 | 6 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 |

que se puede comprobar en *Singular* que es el correspondiente a la resolución libre graduada minimal de I_{P_8} .

3.7. Complementario de un ciclo

Para cada entero $n \geq 4$, el complementario de un n -ciclo (denotado C_n^c) es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\{v_1, \dots, v_n\}$ y cuyo conjunto de aristas es $\{v_i v_j, \mid 1 < j - i < n - 1\}$, es decir, contiene todas las aristas del grafo completo K_n menos las correspondientes al ciclo C_n .

Ejemplo 3.7.1. Por ejemplo, C_5^c es de la forma:



Se tiene que el ideal de aristas del grafo complementario del n -ciclo C_n^c es

$$I = I_{C_n^c} = \langle x_i x_j \mid 1 \leq i < j \leq n, 1 < j - i < n - 1 \rangle.$$

El complejo simplicial $\Delta(C_n^c)$ que cumple que el ideal de Stanley-Reisner asociado a él coincide con el ideal de aristas del grafo complementario del ciclo de n vértices es precisamente el n -ciclo C_n . Es decir, aquel cuyas facetas son los n conjuntos:

$$\{x_i, x_j\} \quad 1 \leq i < j \leq n, j - i = 1 \text{ o } j - i = n - 1.$$

Aplicando de nuevo la fórmula de Hochster, se pueden describir con exactitud los números de Betti del ideal de aristas del grafo complementario del n -ciclo $I_{C_n^c}$.

Antes de definir los números de Betti del ideal de aristas del grafo complementario de un n -ciclo, se enuncian dos lemas, cuya demostración se puede encontrar en [7].

Lema 3.7.2. *Sean $i, k, n \in \mathbb{N}$ tales que $0 < k \leq i < n$. Entonces el número de subgrafos de C_n con i vértices y k componentes conexas es*

$$\frac{n}{k} \binom{i-1}{k-1} \binom{n-i-1}{k-1}.$$

Lema 3.7.3. *Sean $a, m \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq a < m$. Entonces*

$$\sum_{k=1}^a \frac{k}{k+1} \binom{m-a}{k} \binom{a}{k} = \frac{a}{m-a+1} \binom{m}{a+1}.$$

Teorema 3.7.4 ([7, Thm. 2.3.3]). *Sea $I_{C_n^c}$ el ideal de aristas de un grafo complementario de un ciclo con $n \geq 4$ vértices. Los números de Betti graduados de $I_{C_n^c}$ son independientes de la característica del cuerpo sobre el que se forma el ideal. El diagrama de Betti de $I_{C_n^c}$ es*

| | | | | | |
|---|---------------|---------------|-----|-------------------|-------|
| | 0 | 1 | ... | $n-4$ | $n-3$ |
| 2 | $\beta_{0,2}$ | $\beta_{1,3}$ | ... | $\beta_{n-4,n-2}$ | 0 |
| 3 | 0 | 0 | ... | 0 | 1 |

siendo

$$\beta_i(I_{C_n^c}) = \beta_{i,i+2}(I_{C_n^c}) = n \frac{i+1}{n-i-2} \binom{n-2}{i+2} \text{ para todo } 0 \leq i \leq n-4.$$

Demostración. Por el Teorema 2.1.9 se sabe que

$$\beta_{i,j}(I_{C_n^c}) = \sum_{\substack{|W|=j \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W, \mathbb{K}),$$

donde $\Delta = \Delta(C_n^c) = C_n$.

Lo primero que se muestra es una idea de la demostración del único número de Betti que aparece en la fila 3 del diagrama de Betti, que se puede ver más detallado en [8]: Como Δ es un complejo simplicial de dimensión 1 por ser un grafo, el único subconjunto Δ_W de Δ cuya homología reducida es no-nula en un grado distinto de 0 es el propio Δ , que es el único que tiene algún “hueco” de dimensión 2. Esto se ha probado gracias a la fórmula de Hochster en la sección 2.1. Se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_1(\Delta, \mathbb{K}) = 1$, ya que solo tiene un “hueco” de dimensión 2, independientemente del cuerpo de coeficientes del anillo de polinomios donde se encuentra I . Entonces se tiene que $\beta_{n-3,n} = 1$, y $\beta_{i,j} = 0$, $\forall j > i + 2$.

Sea $W \subseteq V$. Por la Proposición 2.1.7 se tiene que la dimensión de $\tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$ no depende del cuerpo de coeficientes del anillo de polinomios donde se encuentra el ideal, ya que solo depende del número de componentes conexas de Δ_W .

Se tiene que los números de Betti de un ideal de aristas de un grafo complementario de un ciclo no dependen de la característica del cuerpo sobre el que se define el anillo de polinomios.

Se tiene que $\tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W, \mathbb{K}) = \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K})$ cuando $j - i - 2 = 0$, es decir $j = i + 2$, por lo que solo falta calcular el valor de los números de Betti de la forma $\beta_{i,i+2}$. Se sabe que

$$\begin{aligned} \beta_{i,i+2} &= \sum_{\substack{|W|=i+2 \\ W \subseteq V}} \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_0(\Delta_W, \mathbb{K}) \\ &= \sum_{\substack{|W|=i+2 \\ W \subseteq V}} \#\{\text{número de componentes conexas de } \Delta_W\} - 1. \end{aligned}$$

Se procede a calcular, igual que en los casos anteriores, cuantos subconjuntos de V existen con $i+2$ elementos, y ver cual es el número de componentes conexas que tiene cada uno de esos subconjuntos.

Δ_W , con $|W| = i + 2 \geq n - 1$ es conexo, por lo que $\beta_{i,i+2} = 0$, $\forall i \geq n - 3$.

Aplicando el Lema 3.7.2 a los subconjuntos Δ_W con $|W| = i + 2 < n - 1$ y el hecho de que un subconjunto con k componentes conexas aporta $k - 1$ al número

de Betti $\beta_{i,i+2}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \beta_{i,i+2} &= \sum_{\substack{|W|=i+2 \\ W \subseteq V \\ \#\{\text{c.c. } \Delta_W\}=k}} (k-1) \\
 &= \sum_{k=2}^{i+2} (k-1) \frac{n}{k} \binom{i+1}{k-1} \binom{n-i-3}{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{kn}{k+1} \binom{i+1}{k} \binom{n-i-3}{k}.
 \end{aligned}$$

Aplicando ahora la fórmula dada en el Lema 3.7.3 para $a = i+1$, $m = n-2$, se obtiene que el i -ésimo número de Betti de grado $i+2$ de $I_{C_n^c} = I(\Delta(C_n^c))$ es

$$\begin{aligned}
 \beta_{i,i+2} &= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{kn}{k+1} \binom{i+1}{k} \binom{n-i-3}{k} \\
 &= n \frac{i+1}{n-i-2} \binom{n-2}{i+2}.
 \end{aligned}$$

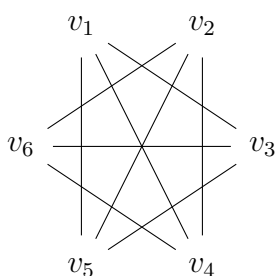
Por lo que de forma general,

$$\beta_{i,j}(I_{C_n^c}) = \begin{cases} n \frac{i+1}{n-i-2} \binom{n-2}{i+2} & \text{si } j = i+2, 0 \leq i \leq n-4 \\ 1 & \text{si } j = i+3, i = n-3 \\ 0 & \text{si } j \neq i+2 \end{cases}$$

□

La resolución libre graduada minimal de un ideal de aristas asociado al grafo complementario de un n -ciclo no es lineal, pero a diferencia de en el caso de ciclos y cadenas, se sabe con exactitud el número de filas que tiene el diagrama, puesto que todos los números de Betti están en la fila 2 del diagrama menos el último, el que corresponde a la aplicación ψ_{n-3} . Por lo que toda las aplicaciones ψ_i cumplen que se pueden representar con una matriz cuyas entradas no-nulas son polinomios de grado 1 menos ψ_{n-3} .

Ejemplo 3.7.5. Sea C_6^c , el grafo complementario del 6-ciclo,



entonces, se tiene que el ideal de aristas del grafo C_6^c es:

$$I_{C_6^c} = \langle x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, x_2x_4, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_5, x_3x_6, x_4x_6 \rangle,$$

y aplicando la fórmula del Teorema 3.7.4, el diagrama de Betti de $I_{C_6^c}$ es:

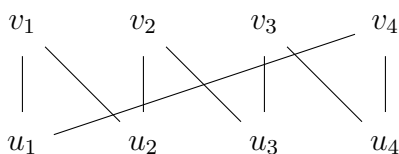
| | | | | |
|---|---|----|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 9 | 16 | 9 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |

que en el ejemplo 2.2.4 se se ha comprobado ya que es el correspondiente a la resolución libre graduada minimal de $I_{C_6^c}$.

3.8. Complementario bipartito de un ciclo par

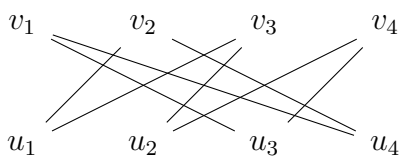
Se define el complementario bipartito de un grafo bipartito G sobre el conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\}$ como G^{bc} , el grafo bipartito sobre el mismo conjunto de vértices y cuyo conjunto de aristas es $\{v_iu_j, \mid v_iu_j \text{ no es una arista de } G\}$.

Sea un ciclo de longitud par C_{2n} para un entero $n \geq 3$, que es un grafo bipartito sobre $V = \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$, puesto que es



Se considera el complementario bipartito de C_{2n} , es decir C_{2n}^{bc} .

Ejemplo 3.8.1. Por ejemplo, C_6^{bc} es de la forma:



Igual que en el caso en el que el ideal era el ideal de aristas de un grafo completo bipartito, cuando el ideal corresponde a un ideal de aristas del complementario bipartito de un ciclo par, para facilitar la lectura, se considera sin pérdida de generalidad que $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ y que el conjunto de vértices sobre el que se encuentra el grafo es $V = V_1 \cup V_2$, donde $V_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $V_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Se tiene que el ideal de aristas del grafo complementario bipartito del $2n$ -ciclo C_{2n}^{bc} es

$$I = I_{C_{2n}^{bc}} = \langle x_i y_j \mid x_i y_j \notin I_{C_{2n}} \rangle.$$

El complejo simplicial $\Delta(C_{2n}^{bc})$ que cumple que el ideal de Stanley-Reisner asociado a él coincide con el ideal de aristas del grafo complementario bipartito del ciclo de n vértices es precisamente el $2n$ -ciclo C_{2n} . Es decir, aquel cuyas facetas son los n conjuntos:

$$\{x_i, x_j\} \quad \text{para } 1 \leq i < j \leq 2n, j - i = 1 \text{ o } j - i = n - 1.$$

Aplicando de nuevo la fórmula de Hochster, se pueden describir con exactitud los números de Betti del ideal de aristas del grafo complementario bipartito de un $2n$ -ciclo $I_{C_{2n}^{bc}}$.

Para definir los números de Betti de un ideal de aristas del grafo complementario bipartito de un $2n$ -ciclo $I_{C_{2n}^{bc}}$ el trabajo se apoya en una serie de resultados que se muestran en [7].

Teorema 3.8.2 ([7, Thm. 3.2.15]). *Sea $I_{C_{2n}^{bc}}$ el ideal de aristas de un grafo complementario bipartito de un ciclo con $2n \geq 6$ vértices. Los números de Betti graduados de $I_{C_{2n}^{bc}}$ son independientes de la característica del cuerpo sobre el que se forma el ideal. El diagrama de Betti de $I_{C_{2n}^{bc}}$ es*

| | | | | | | | |
|---|---------------|---------------|-----|-------------------|-----|---------------------|--------|
| | 0 | 1 | ... | $n-3$ | ... | $2n-5$ | $2n-4$ |
| 2 | $\beta_{0,2}$ | $\beta_{1,3}$ | ... | $\beta_{n-3,n-1}$ | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | $\beta_{1,4}$ | ... | ... | ... | $\beta_{2n-5,2n-2}$ | 0 |
| 4 | 0 | 0 | ... | 0 | ... | 0 | 1 |

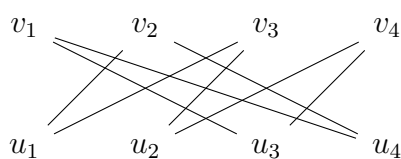
donde

$$\beta_{i,j}(I_{C_{2n}^{bc}}) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{c=1}^k \frac{n}{c} \binom{k-1}{c-1} \binom{n-k-1}{c-1} \binom{n-k-c}{j-k} & \text{si } 2 \leq j \leq n-1, i = j-2 \\ \sum_{m=2}^{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{m-1}{m} \binom{t-j-1}{m-1} \sum_{a=0}^{j-2m} \binom{j-m-a-1}{m-1} \binom{t-j-m}{a} & \text{si } 4 \leq j \leq 2n-2, i = j-3 \end{cases}$$

No se muestra la obtención de este resultado, que puede encontrarse en [7]. De hecho, la resolución libre graduada minimal de un ideal de aristas asociado

al grafo complementario bipartito de un $2n$ -ciclo no es lineal, pero como en el caso del complementario de un grafo, se ha demostrado en [7] y en [9] que todos los números de Betti del ideal de aristas del complementario bipartito de un ciclo par están en las filas 2 o 3 del diagrama menos el último, el que corresponde a la aplicación ψ_{2n-4} , que está en la fila 4.

Ejemplo 3.8.3. Sea C_8^{bc} , el grafo complementario bipartito del 8-ciclo,



entonces, se tiene que el ideal de aristas del grafo C_8^{bc} es:

$$I_{C_8^{bc}} = \langle x_1y_3, x_1y_4, x_2y_1, x_2y_4, x_3y_1, x_3y_2, x_4y_2, x_4y_3 \rangle,$$

y aplicando la fórmula del Teorema 3.8.2, el diagrama de Betti de $I_{C_8^{bc}}$ es:

| | | | | | |
|---|---|----|----|----|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 8 | 8 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 12 | 24 | 12 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Se puede comprobar con *Singular* que es el correspondiente a la resolución libre graduada minimal de I .

Además, en este caso concreto se tiene que el grafo complementario bipartito C_8^{bc} coincide con el grafo de un 8-ciclo, y por tanto, se puede ver que la fórmula mostrada en 3.5.4 proporciona el mismo diagrama de Betti pues el ideal de aristas $I_{C_8^{bc}}$ coincide con el ideal de aristas I_{C_8} .

Igual que se han mostrado los números de Betti de una serie de familias de ideales conocidas, se conoce la fórmula genérica de los números de Betti de otras familias de ideales. Una de ellas es la familia de los ideales de aristas asociados a grafos corona o corona multipartitos, como se puede ver en [19].

Apéndice

A continuación se muestran los programas de MATLAB creados para la obtención de las resoluciones de las secciones 2.2 y 2.3.

Resolución de Taylor

Se adjunta el programa diseñado en MATLAB con el que, dado un ideal monomial $I = \langle x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_t} \rangle \subseteq R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, se calcula la resolución de Taylor de R/I y se obtiene el diagrama de Betti de esta resolución.

El formato de entrada es una matriz que tiene n columnas, una por cada variable del anillo, y t filas, una por cada generador del ideal, donde $a_{i,j} = \alpha_{i,j}$ si $\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}), \forall 1 \leq i \leq t$.

Además de mostrar en pantalla el diagrama de Betti de la resolución de Taylor de R/I , el programa devuelve toda la información de la resolución de Taylor, es decir, todos los generadores de cada uno de los R -módulos que la forman, que se guarda en el complejo de Taylor $T(I)$, en la variable CUBE se almacenan los vértices m_J de $T(I)$, en orderSzg se guarda la posición del R -módulo al que pertenece cada uno de los elementos m_J (para conocer por tanto las aristas de $T(I)$), y en mcm se guarda el mínimo común múltiplo de los generadores de I proporcionados.

En el mismo programa en el que está implementado el cálculo de la resolución de Taylor (cuyo nombre es ResolucionTaylor) se ha implementado la función binSum, que calcula el mínimo común múltiplo de dos monomios dados x^{α_1} y x^{α_2} , cuya entrada son los dos vectores fila $(\alpha_{1_1}, \dots, \alpha_{1_n}) = \alpha_1$ y $(\alpha_{2_1}, \dots, \alpha_{2_n}) = \alpha_2$. Esta función está preparada para que si recibe dos matrices de tamaño $m \times n$, calcula para cada $i \leq m$, el mínimo común de los monomios dados por la i -ésima fila de la primera matriz y la i -ésima fila de la segunda matriz, y lo devuelve en la i -ésima fila de la matriz resultante.

```
1 function [CUBE, orderSzg, mcm]=ResolucionTaylor (M)
2 [nmon, nvar] = size (M) ;
3 if (nmon < 3)
```

```

4     input('No se puede realizar el algoritmo si hay
          menos de 3 monomios');
5     return;
6 end
7 ncubes = 2^(nmon-3);
8 %se calcula el primer cubo
9 auxCube= [zeros(1,nvar);
10    M(1,:);
11    M(2,:);
12    M(3,:);
13    binSum(M(1,:), M(2,:));
14    binSum(M(1,:), M(3,:));
15    binSum(M(2,:), M(3,:));
16    binSum(M(1,:), binSum(M(2,:), M(3,:)))];
17 CUBE=auxCube;
18 szg=[0,1,1,1,2,2,2,3]';
19 orderSzg= szg;
20 for i=4:nmon %se calculan del resto de cubos
21     szgN=szg+1;
22     cube=zeros(length(auxCube(:,1)),nvar);
23     for j=1:length(auxCube(:,1))
24         cube(j,:)=binSum(auxCube(j,:), M(i,:));
25     end
26     szg = [szg;szgN];
27     auxCube = [auxCube; cube];
28 end
29
30 j=9;
31 for i=2:ncubes
32     CUBE(:, :, i)=auxCube(j:j+7, :);
33     orderSzg(:, 1, i)=szg(j:j+7);
34     j=j+8;
35 end
36
37 %Diagrama de Betti
38 mcm=M(1, :);
39 lastszg=max(max(orderSzg(:, 1, :)));
40 for i=2:nmon
41     mcm=binSum(mcm, M(i, :));
42 end
43 lastdegree=sum(mcm);

```

```

44 position=0;
45 if(lastszg>lastdegree)
46     position=lastszg-lastdegree;
47 end
48
49 lastX = 0;
50 lastY=0;
51 numEltosSzg = zeros(lastdegree+1+position,lastszg+1);
52 for i=1:nmon+1
53     for j=1:ncubes
54         for k=1:8
55             if(orderSzg(k,1,j)==i-1)
56                 numUnos= sum(CUBE(k,:,j));
57                 numEltosSzg(numUnos+1+position-
58                     orderSzg(k,1,j),orderSzg(k,1,j)+1)=
59                     numEltosSzg(numUnos+1+position-
60                         orderSzg(k,1,j),orderSzg(k,1,j)+1)
61                     + 1;
62                 if (lastX<numUnos+1+position-orderSzg(
63                     k,1,j))
64                     lastX=numUnos+1+position-orderSzg(
65                         k,1,j);
66                 end
67                 if (lastY<orderSzg(k,1,j)+1)
68                     lastY=orderSzg(k,1,j)+1;
69                 end
70             end
71         end
72     end
73 end
74 varNames = [];
75 rowNames = [];
76 for i=1:lastX
77     rowNames= [rowNames, cellstr(int2str(i-1-position)
78         )];
79 end
80 for i=1:lastY
81     varNames = [varNames, cellstr(int2str(i-1))];
82 end
83 T = array2table(numEltosSzg(1:lastX,1:lastY), '
84     VariableNames',varNames);

```

```

77 T.Properties.RowNames = rowNames;
78 T
79 glob=sum(numEltosSzg(1:lastX,1:lastY));
80 glob
81 end
82
83 function sum = binSum(A,B)
84 if(size(A)~=size(B))
85     input('Los datos introducidos no tienen las
            dimensiones adecuadas para poder realizar el
            calculo del mcm.');
```

```

86     return;
87 end
88 [m,n]=size(A);
89 sum=zeros(m,n);
90 for i=1:m
91     for j=1:n
92         sum(i,j) = max(A(i,j),B(i,j));
93     end
94 end
95 end
```

Algoritmo de poda

Se muestra el programa diseñado en MATLAB con el que, dado el ideal monomial $I = \langle x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_t} \rangle \subseteq R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ en el mismo formato que en el anterior programa, y dados los datos (tal cual se devuelven en el programa anterior) de la resolución de Taylor de R/I , se poda el exceso de información contenido en esta según el procedimiento explicado en la sección 2.3 hasta llegar a una resolución libre graduada mucho menor, más cercana a la minimal.

El programa muestra por pantalla el diagrama de Betti de la resolución obtenida, aunque, igual que en el programa anterior, son calculados y se pueden extraer todos los generadores de cada R -módulo que aparece en la resolución libre graduada obtenida.

```

1 function AlgoritmoDePoda(M,CUBE, orderSzg,mcm)
2 [aux,nvar,ncubes] = size(CUBE);
3 [nmon,nvar] = size(M);
4 validCube=ones(8,1);
5 direction = zeros(8,1);
```



```

6 for i=2:ncubes
7     validCube(:,1,i)=ones(8,1);
8     direction(:,1,i)=zeros(8,1);
9 end
10
11 %PODA:
12 %primeras tres direcciones
13 START = [1,3,4,7; %D1
14          1,2,4,6; %D2
15          1,2,3,5]; %D3
16 END = [2,5,6,8; %D1
17        3,5,7,8; %D2
18        4,6,7,8]; %D3
19 for i=1:ncubes
20     for j=1:3 %Orden de direcciones
21         for k=1:4
22             if (sum(CUBE(START(j,k),:,i)==CUBE(END(j,k),:,i))
23                 == nvar && validCube(START(j,k),1,i)
24                 ~=0 && validCube(END(j,k),1,i)
25                 ~=0)
26                 CUBE(START(j,k),:,i)=zeros(1,nvar);
27                 validCube(START(j,k),1,i)=0;
28                 direction(START(j,k),1,i)=j;
29                 orderSzg(START(j,k),1,i)=0;
30                 CUBE(END(j,k),:,i)=zeros(1,nvar);
31                 validCube(END(j,k),1,i)=0;
32                 direction(END(j,k),1,i)=j;
33                 orderSzg(END(j,k),1,i)=0;
34             end
35         end
36     end
37 end
38 %Se realiza la poda en el resto de direcciones, por
39 orden
40 for i=4:nmon
41     step=i-3;
42     j=1;
43     k0=j+2^(step-1);
44     k00=j+2^(step-1);
45     k=k0;

```

```

43     while(k<=ncubes)
44         while(j<k0)
45             for s=1:8
46                 if(sum(CUBE(s, :, j)~=CUBE(s, :, k))== 0
47                     && validCube(s,1,j)~=0 && validCube
48                     (s,1,k) ~=0)
49                     CUBE(s, :, j)=zeros(1,nvar);
50                     validCube(s,1,j)=0;
51                     direction(s,1,j)=i;
52                     orderSzg(s,1,j)=0;
53                     CUBE(s, :, k)=zeros(1,nvar);
54                     validCube(s,1,k)=0;
55                     direction(s,1,k)=i;
56                     orderSzg(s,1,k)=0;
57                 end
58             end
59             j=j+1;
60             k=k+1;
61         end
62         j=k;
63         k=j+k00-1;
64         k0=k;
65     end
66     %Diagrama de Betti
67     lastszg=max(max(orderSzg(:,1,:)));
68     lastdegree=sum(mcm);
69     position=0;
70     if(lastszg>lastdegree)
71         position=lastszg-lastdegree;
72     end
73
74     lastX = 0;
75     lastY=0;
76     numEltosSzg = zeros(lastdegree+1+position,lastszg+1);
77     for i=1:nmon+1
78         for j=1:ncubes
79             for k=1:8
80                 if(orderSzg(k,1,j)==i-1 && validCube(k,1,j)
81                     ) == 1)

```

```
81         numUnos= sum(CUBE(k, :, j));
82         numEltosSzg(numUnos+1+position-
                    orderSzg(k, 1, j), orderSzg(k, 1, j)+1)=
                    numEltosSzg(numUnos+1+position-
                    orderSzg(k, 1, j), orderSzg(k, 1, j)+1)
                    + 1;
83         if (lastX<numUnos+1+position-orderSzg(
                    k, 1, j))
84             lastX=numUnos+1+position-orderSzg(
                    k, 1, j);
85         end
86         if (lastY<orderSzg(k, 1, j)+1)
87             lastY=orderSzg(k, 1, j)+1;
88         end
89     end
90 end
91 end
92 end
93 varNames = [];
94 rowNames = [];
95 for i=1:lastX
96     rowNames= [rowNames, cellstr(int2str(i-1-position)
97         )];
98 end
99 for i=1:lastY
100     varNames = [varNames, cellstr(int2str(i-1))];
101 end
102 T = array2table(numEltosSzg(1:lastX, 1:lastY), '
    VariableNames', varNames);
103 T.Properties.RowNames = rowNames;
104 T
105 glob=sum(numEltosSzg(1:lastX, 1:lastY));
106 glob
107 end
```


Bibliografía

- [1] Álvarez Montaner, Josep, Fernández-Ramos, Oscar and Gimenez, Philippe. Pruned cellular free resolutions of monomial ideals, *Journal of Algebra* **541** 126-145, (2020).
- [2] Bayer, Dave, Charalambous, Hara and Popescu, Sorin. Extremal Betti numbers and applications to monomial ideals, *Journal of Algebra* **221**, 497–512, (1999).
- [3] Bayer, Dave, Peeva, Irena and Sturmfels, Bernd. Monomial resolutions, *Mathematical Research Letters* **5**, 31-46, (1998).
- [4] Cox, David, Little, John and O’Shea, Donal. Using algebraic geometry, *Graduate Texts in Mathematics* **185**. Springer, (1998).
- [5] Cox, David, Little, John and O’Shea, Donal. Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, *Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer, 4^a edición, 2015.
- [6] Eisenbud, David. Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, *Graduate text in Mathematics* **150**, Springer, (1995).
- [7] Fernández-Ramos, Oscar. Graded Betti numbers of edge ideals, Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid, <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/1769>, (2012).
- [8] Fernández-Ramos, Oscar and Gimenez, Philippe. First nonlinear syzygies of ideals associated to graphs, *Communications in Algebra* **37**, 1921-1933, (2009).
- [9] Fernández-Ramos, Oscar and Gimenez, Philippe. Regularity 3 in edge ideals associated to bipartite graphs, *J Algebr Comb* **39**, 919-937, (2014).
- [10] Herzog, Jürgen and Hibi, Takayuki. Monomial ideals, *Graduate Texts in Mathematics* **260**, Springer (2011).

- [11] Jacques, Sean. Betti numbers of graph ideals, Tesis Doctoral, University of Sheffield, <https://arxiv.org/abs/math/0410107>, (2004).
- [12] Jonsson, Jakob. Simplicial complexes of graphs, Lecture Notes in Mathematics **1928**, Springer (2008).
- [13] Lyubeznik, Gennady. A new explicit finite free resolution of ideals generated by monomials in a R -sequence, Journal of Pure and Applied Algebra, (1988).
- [14] Martínez Peñas, Umberto. Una introducción a la teoría de las sicigias, Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Valladolid, <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/3516>, (2013).
- [15] Mermin, Jeffrey. Three simplicial resolutions. In: Progress in commutative algebra 1, (C. Francisco, L. Klingler, S. Sather-Wagstaff, J.C. Vassilev, Eds.), De Gruyter, 127-141 (2012).
- [16] Miller, Ezra and Sturmfels, Bernd. Combinatorial commutative algebra, Graduate Texts in Mathematics **227**, Springer (2005).
- [17] Munkres, James R. Elements of algebraic topology, The Benjamin/Cummings Publishing Company (1984).
- [18] Pérez Callejo, Elvira. Descomposición de ideales monomiales vía grafos y complejos simpliciales, Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Valladolid, <http://uvadoc.uva.es/handle/10324/38220>, (2019).
- [19] Rather, Shahnawaz Ahmad, Singh, Pavinder. On Betti numbers of edge ideals of crown graphs. Beitr Algebra Geom **60**, 123–136, (2019).