UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de las Ciencias Sociales, Experimentales y de la Matemática

MATERIALES MANIPULATIVOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN ÁLGEBRA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Alberto Pozo Álvarez

Tutor: Edgar Martínez Moro

Valladolid, junio de 2020

Índice general

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Capítulo 1

Introducción

1.1 Justificación

El presente Trabajo Fin de Máster pertenece al Máster Oficial en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, impartido en la Universidad de Valladolid durante el curso académico 2019-2020.

Este trabajo, que ha sido dirigido y supervisado por el Dr. Edgar Martínez Moro, está enmarcado en la especialidad de Matemáticas y tratará de mostrar las ventajas del aprendizaje manipulativo en Matemáticas, concretamente en Álgebra.

Al tratarse de un Trabajo Fin de Máster, conviene analizar los objetivos generales y competencias generales y específicas que se desarrollarán o que son necesarias para su elaboración.

Se distinguen los siguientes **objetivos generales** (OG) asociados al TFM:

- *OG1: Que los estudiantes sepan aplicar, como profesionales docentes, los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con la especialidad cursada.*

  En este caso el objetivo consiste en aplicar los conocimientos adquiridos al proceso de enseñanza del Álgebra en Matemáticas dentro de la educación secundaria.

- *OG2: Que los estudiantes sean capaces, como profesionales docentes, de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación en los centros escolares de sus conocimientos y juicios.*

  El desarrollo de las prácticas y del TFM constituye una primera aproximación a la futura labor docente, donde se debe tener en cuenta la responsabilidad social en la vida de los alumnos.

- *OG3: Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones, conocimientos y razones últimas en las que se sustentan como profesionales docentes, tanto a públicos especializados como a no especializados, de un modo claro y sin ambigüedades.*

  Se materializa con la síntesis de lo que se considera más relevante de este TFM y su posterior exposición ante un tribunal especializado.

- *OG4: Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando y formándose como profesionales docentes, de un modo en gran medida autodirigido o autónomo.*

  Este TFM supone un primer paso para desarrollar la futura labor docente, en la que el profesor debe estar continuamente aprendiendo también de forma autónoma.

Se han desarrollado las siguientes **competencias generales** (CG):

- *CG1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.*

  Se ha realizado un conocimiento exhaustivo de las asignaturas y su contenido curricular, para que los conocimientos y contenidos planteados sean adecuados.

- *CG3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.*

  La búsqueda y procesamiento de información es esencial para la transmisión adecuada del conocimiento durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

- *CG4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.*

  Esta competencia se desarrolla en la elaboración de una Unidad Didáctica para un curso de educación secundaria.

- *CG6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.*

  La aplicación de los materiales manipulativos en las clases de Matemáticas supone un acercamiento para que el estudiante pueda mejorar su motivación y autonomía.

- *CG7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.*

  Se ha tenido en cuenta para un correcto diseño de la metodología y de las actividades planteadas en la unidad didáctica.

- *CG8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.*

  Algunas de las actividades planteadas conllevarán su desarrollo no sólo en clase de Matemáticas, sino también fuera del aula fomentando la participación y colaboración.

Además, se han desarrollado las siguientes **competencias específicas** (CE) del módulo específico:

- *CE1: Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas.*

  Se refiere a la capacidad para demostrar la importancia de las Matemáticas a los estudiantes de educación secundaria.

- *CE2: Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.*

  Esta competencia está ampliamente desarrollada en la asignatura del Máster *Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia*. Además, en este TFM ha sido necesario conocer cómo y cuándo se han ido introduciendo los materiales manipulativos en la enseñanza.

- *CE3: Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.*

  Se procura siempre que sea posible, en las actividades propuestas en la Unidad Didáctica, relacionar los conceptos matemáticos teóricos con situaciones de la vida cotidiana.

- *CE7: Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo.*

  La Unidad Didáctica es el principal instrumento para transformar los currículos en actividades, trabajos o tareas.

- *CE8: Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos.*

  Ha sido necesario para realizar una correcta adecuación de las actividades y materiales manipulativos utilizados a la Unidad Didáctica correspondiente.

- *CE10: Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza aprendizaje.*

  Se fomenta el empleo de recursos virtuales, TIC y otros programas que posibiliten al alumno su uso fuera del aula.

- *CE11: Conocer estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo.*

  Se han usado diversos instrumentos de evaluación para que la calificación que reciba el estudiante sea lo más objetiva y justa posible teniendo en cuenta su esfuerzo y los conocimientos adquiridos.

1.2 Objetivos específicos

El objetivo principal es mostrar la importancia de los materiales manipulativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en educación secundaria, concretamente en Álgebra.

Está claro que si se habla de otras disciplinas como Biología o Física y Química, se asimilan mejor los conceptos cuando se trabajan en un laboratorio, cuando se pueden tocar, ver, mover e interpretar. Del mismo modo sucede con las Matemáticas cuando se crean objetos matemáticos. Cuando se tocan, se mueven o se modifican, es decir, cuando se están manipulando, se comprueba que existen en ellos muchos de los conceptos que se explican en las aulas.

Se realizará un esfuerzo por transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas y por estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas, más allá de la mera transmisión de recetas adecuadas.

Se pretende buscar una estrategia para un aprendizaje como investigación con: planteamiento de situaciones, estudio cualitativo de las situaciones problemáticas, orientación para el tratamiento científico de los problemas y sistematización de los nuevos conocimientos.

Además, otro de los objetivos es desarrollar una Unidad Didáctica del Bloque de Álgebra para el curso de 3º de la ESO de Mtemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas.

1.3 Contenido

La memoria del presente Trabajo Fin de Máster está compuesta por los siguientes capítulos:

- **Capítulo 1: Introducción.** Constituye una presentación del trabajo realizado desde una visión general. Se exponen la motivación, objetivos y estructura de este trabajo.

- **Capítulo 2: Marco teórico.** Se muestran los potenciales beneficios para la comunidad educativa del uso de los materiales manipulativos en Matemáticas y del uso del trabajo cooperativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

- **Capítulo 3: Materiales manipulativos en Álgebra.** Se presentan de una forma general los materiales manipulativos que se pueden utilizar en la educación secundaria dentro del bloque de Álgebra.

- **Capítulo 4: Juegos en Álgebra.** Se describen las distintas actividades lúdicas que se pueden aplicar a un aula de Matemáticas para trabajar conceptos del bloque de Álgebra.

- **Capítulo 5: Unidad Didáctica de 3º de ESO**. Se ha elegido el bloque de Álgebra del curso de 3º de la ESO de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas para desarrollar la Unidad Didáctica correspondiente a Ecuaciones que promueva el uso de materiales manipulativos.

- **Capítulo 6: Conclusiones** Se establecen las conclusiones sobre el trabajo realizado y una reflexión sobre el período de prácticas en un centro de educación secundaria.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1 Materiales manipulativos en Matemáticas

2.1.1 Métodos de enseñanza en Matemáticas

Se utilizan principalmente dos métodos de enseñanza de conceptos matemáticos, el enfoque basado en la transmisión y el enfoque basado en la interacción, siendo este último el que ha resultado más efectivo según las investigaciones (Fletcher, 2010).

El enfoque basado en la transmisión es el método de enseñanza tradicional, relacionado con la clase magistral, en el que el docente actúa como la única fuente de conocimiento y toma el control de casi todas las actividades del proceso de enseñanza y aprendizaje. Su deber es transmitir o explicar hechos y procedimientos a los alumnos. Solo se les pide a los estudiantes que verifiquen si están siguiendo los procedimientos enseñados. Tal enfoque crea aburrimiento en la clase, fomenta la pasividad entre los alumnos y les hace sentir que no tienen nada que aportar (Fletcher, 2010). La lección se lleva a cabo mediante una explicación explícita y demostraciones dirigidas por el docente, por eso también se denomina método de enseñanza no participativo.

La instrucción matemática típica suele consistir en escuchar las explicaciones del profesor, verlo resolver problemas en la pizarra usando un libro de texto de Matemáticas y trabajar individualmente para resolver problemas. Más de la mitad de los estudiantes informaron que nunca trabajaron en grupos pequeños para resolver problemas matemáticos y más del 80% afirmó que nunca habían trabajado en proyectos independientes o de investigación en la clase de Matemáticas (Thornton, 1995).

Esto contradice totalmente la visión de la instrucción matemática indicada por los estándares durante la reforma educativa en los Estados Unidos de América. Se quería pasar de "saber" Matemáticas a "hacer" Matemáticas (Crosswhite et al., 1989).

Por otro lado, el enfoque interactivo es la situación en la que el alumno se coloca en el centro del proceso de aprendizaje y busca el conocimiento o la información para resolver un problema. El docente que usa este enfoque cree que el conocimiento es construido por el alumno. Por lo tanto, el deber del profesor es elegir las tareas de aprendizaje apropiadas para los alumnos, dejar en claro el propósito de las actividades y alentarlos a explorar y a verbalizar su pensamiento matemático. Este proceso activo es totalmente diferente a simplemente dominar hechos y procedimientos (Larbi and Mavis, 2016).

Las técnicas de instrucción son importantes pero el uso de materiales manipulativos influye en los logros de los estudiantes. Además les ayuda a utilizar ambas habilidades en el proceso de aprendizaje y transferirlo a otras situaciones ya que estos medios físicos atraen los sentidos de los estudiantes y les acercan mucho más a su entorno (Blosser, 1985).

2.1.2 Origen de los materiales manipulativos

Entre los muchos de los estudios teóricos que proporcionaron la base para el uso de manipuladores matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje se encuentra el de Piaget (1952), que creía que los alumnos no podían comprender matemáticas abstractas solo a través de explicaciones teóricas, y que necesitaban experiencias con modelos e instrumentos para comprender los conceptos matemáticos que se enseñan. Bruner (1960) pensaba que las primeras experiencias e interacciones de los estudiantes con los objetos físicos constituían la base para adentrarse en el aprendizaje en un nivel más abstracto. Este tipo de aprendizaje práctico a menudo se conoce como constructivismo, y es la base para integrar los materiales manipulativos en las clases de matemáticas. Estas investigaciones han servido de fundamento y guía para el uso de manipuladores matemáticos en las aulas.

Los elementos manipulativos en Matemáticas no suponen una novedad actual ya que un buen ejemplo de ello son las Escuelas Montessori, que han abogado durante mucho tiempo por la enseñanza utilizando objetos concretos. George Cuisenaire (1891–1975), un educador belga, es famoso por el desarrollo de las regletas de Cuisenaire, que se usan hoy en día para ayudar a enseñar múltiples conceptos matemáticos, como pueden ser las cuatro operaciones aritméticas básicas, las fracciones y la búsqueda de divisores. En la década de 1950, Caleb Gattegnopero popularizó su uso. A partir de entonces, empezaron a surgir diversas corrientes didácticas de las Matemáticas que se interesaron por el uso de materiales manipulativos (Furner and Worrell, 2017).

Existen investigaciones acerca de cómo los profesores usan materiales manipulativos en sus lecciones de Matemáticas. Moyer and Jones (2004) afirman que algunos maestros usan elementos manipulativos en un esfuerzo por reformar su enseñanza de las matemáticas sin reflexionar sobre cómo el uso de las representaciones puede cambiar su propia instrucción matemática. Baroody (1989) afirma que la teoría de Piaget no establece que los estudiantes deben operar sobre algo concreto para construir el significado, aunque sí sugiere que deben manipular algo familiar y reflexionar sobre estas acciones físicas o mentales. El pensamiento activamente comprometido es el componente imprescindible para el aprendizaje del estudiante. Ball (1992) postula que el uso manipulativo es ampliamente aceptado como una forma efectiva de enseñar matemáticas, aunque hay que hacer hincapié en la necesidad de que los profesores garanticen que los estudiantes hagan las conexiones correctas entre los materiales y los conceptos matemáticos subyacentes.

2.1.3 Importancia de los materiales manipulativos

Los materiales manipulativos matemáticos son objetos físicos que están diseñados para representar explícita y concretamente ideas matemáticas abstractas (Moyer, 2001).

Alsina (2010) establece una pirámide de la educación matemática usando la idea de pirámide de nutrición saludable. En ella, los materiales manipulativos y los juegos ocupan una parte fundamental de la "dieta" que deben seguir los estudiantes durante el proceso de enseñanza y aprendizaje para adquirir la competencia matemática, como se observa en la Figura 2.1.

Fig. 2.1 Pirámide de la educación matemática (Alsina, 2010)

Aunque se aconseja el uso de elementos manipulativos matemáticos en todos los niveles (NCTM, 1989), Heddens (1997) advierte que debe usarse con cuidado, de lo contrario los estudiantes pueden llegar a creer que existen dos mundos matemáticos: el mundo manipulativo y el simbólico. También afirma que una de las mejores formas de desarrollar ideas matemáticas es a través de actividades con materiales físicos ya que los estudiantes aprenden mejor cuando son participantes activos en el proceso de aprendizaje. Asimilan el conocimiento cuando se les da la oportunidad de explorar, investigar preguntas, registrar, compartir y hablar sobre descubrimientos.

Numerosos estudios (Munger, 2007) (Fletcher, 2010) (Larbi and Mavis, 2016) (Furner and Worrell, 2017) coinciden en señalar que el uso de elementos manipulativos facilita la adquisición y la retención de nuevos conocimientos, lo que unido a un mayor interés y participación en clase ocasiona un mejor rendimiento. El aprendizaje ocurre básicamente cuando los alumnos interactúan con el entorno y encuentran algunas experiencias a través de las que realizan descubrimientos y relaciones entre conceptos. Además los materiales manipulativos también proporcionan un lenguaje común con el que comunicar estos modelos al docente y a otros estudiantes (Sowell, 1989).

Los métodos de enseñanza deberían permitir a los alumnos participar en algunos de los procesos creativos que los matemáticos han disfrutado a través de los siglos a partir de los cuales pudieron descubrir ciertas generalizaciones y principios (Resnick and Ford, 1981).

Según Heddens (1997), los docentes recibirán más información sobre la comprensión matemática de los estudiantes mediante el uso de manipulativos al:

1. Escuchar a los estudiantes hablar sobre su pensamiento matemático.
2. Observar a los estudiantes trabajando individualmente y en grupos cooperativos.
3. Preguntar por qué y cómo en lugar de preguntar para obtener respuestas directas (sí/no) o para resultados de cálculo de actividades.
4. Hacer que los estudiantes escriban una solución a un problema en lugar de responder solo con valores correctos o incorrectos.

El motivo detrás del uso de materiales manipulativos es que cada estudiante aprende de diferente manera. Cuando se usan estos materiales, los sentidos se incorporan al aprendizaje y también actúan como representación visual de conceptos matemáticos. Además de satisfacer las necesidades de los estudiantes que aprenden mejor de esta manera, los materiales manipulativos le brindan al docente nuevas formas de presentar un tema. La incorporación de varias técnicas de instrucción aumenta la posibilidad de que todos los estudiantes alcancen la comprensión matemática a través de al menos un método. Cuando se utilizan materiales manipulativos y los alumnos se colocan en el centro del proceso de aprendizaje, el papel del profesor cambia de transmisor de conocimiento a ser un facilitador del descubrimiento de los alumnos (Fletcher, 2010).

2.1.4 Efectividad de los materiales manipulativos en Álgebra

Los materiales manipulativos suponen una de las estrategias que mejoran el aprendizaje matemático, concretamente en Álgebra (Rakes et al., 2010). Se han realizado estudios para comprobar la efectividad de los materiales manipulativos en Álgebra. Entre ellos se puede destacar el de Larbi and Mavis (2016), en el que investigan la eficacia del uso de las llamadas tabletas algebraicas en el rendimiento de estudiantes de secundaria. Los estudiantes del estudio pertenecían a la misma localidad y estaban formados por dos grupos, el experimental y el de control. A cada grupo se le enseñaron las mismas unidades de álgebra durante un período de cuatro semanas. Sin embargo, al grupo experimental se le enseñó utilizando tabletas algebraicas, mientras que al grupo de control se le enseñó usando el método tradicional.

Los resultados del estudio mostraron que a quienes se les enseñó a través de tabletas algebraicas tuvieron un rendimiento significativamente mejor. A pesar de que el estudio fue realizado en únicamente dos centros, extrajeron las siguientes recomendaciones:

- Se deberían usar tabletas algebraicas para enseñar la propiedad distributiva y que todos los estudiantes descubran el patrón discernible al eliminar los paréntesis de una expresión. Al hacerlo, se debe hacer hincapié en el proceso y no en el producto.

- En la medida de lo posible, los profesores de Matemáticas deberían usar materiales manipulativos como baldosas algebraicas para una enseñanza efectiva de todas las unidades de Álgebra del currículo.

En el Capítulo 3 se describe detalladamente cómo funcionan las tabletas algebraicas.

2.2 Trabajo cooperativo

El aprendizaje cooperativo es muy importante dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que uno de los cuatro pilares de la educación es aprender a vivir juntos en sociedad y qué mejor manera que trabajando en equipo. El trabajo cooperativo unido al uso de los elementos manipulativos puede ser una combinación que albergue un gran potencial para enseñar Matemáticas.

Dentro del aprendizaje cooperativo se pueden destacar varias definiciones de algunos autores:

- Método de aprendizaje basado en el trabajo en equipo de los estudiantes. Incluye diversas y numerosas técnicas en las que los alumnos trabajan conjuntamente para lograr determinados objetivos comunes de los que son responsables todos los miembros del equipo (Rodríguez Barreiro and Fernández Manzanal, 2007).

- El aprendizaje cooperativo se refiere a una serie de estrategias instruccionales que incluyen a la interacción cooperativa de estudiante a estudiante, sobre algún tema, como una parte integral del proceso de aprendizaje (Kagan and Kagan, 1994).

- Aprendizaje cooperativo es el uso instructivo de grupos pequeños para que los estudiantes trabajen juntos y aprovechen al máximo el aprendizaje propio y el que se produce en la interrelación (Johnson et al., 1998).

Teniendo en cuenta las definiciones de diversos autores se puede entender el aprendizaje cooperativo como las técnicas de enseñanza que comprenden la organización de los estudiantes en grupos pequeños y heterogéneos donde trabajan conjuntamente de forma coordinada para profundizar en su propio aprendizaje y resolver tareas académicas.

Prácticamente no existen diferencias entre el aprendizaje cooperativo y el aprendizaje colaborativo y la mayoría de autores los utilizan indistintamente. Sin embargo, existen algunos autores que sí emplean estos términos de manera diferenciada en cuanto al grado de estructura de la tarea y de las interacciones entre los estudiantes. La diferencia básica consiste en que el aprendizaje cooperativo necesita de mucha estructuración para la realización de la actividad por parte del docente mientras que el aprendizaje colaborativo necesita de mucha más autonomía del grupo y muy poca estructuración de la tarea por parte del profesor (Zañartu Correa, 2000).

Si se profundiza en el tema se puede advertir que en el aprendizaje colaborativo los alumnos son quienes diseñan su estructura de interacciones y mantienen el control sobre las diferentes decisiones que repercuten en su aprendizaje, mientras que en el aprendizaje cooperativo es el profesor quien diseña y mantiene casi por completo el control en la estructura de interacciones y de los resultados que se han de obtener (Panitz, 1997).

El aprendizaje cooperativo es una metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje donde los alumnos se distribuyen en grupos heterogéneos para aprovechar al máximo la interacción generada entre ellos, tanto social como cognitiva. Estos grupos además deben ser reducidos (de 3 a 5 personas).

Los alumnos desempeñan el papel principal generando así una motivación por aprender y transmitir sus conocimientos al resto de los compañeros aunque el educador sea la persona encargada de coordinar el aula. Asimismo, es necesario destacar que no se busca favorecer la competitividad entre ellos sino que se apoyen y colaboren para conseguir el objetivo final, además de generar lazos emocionales y sociales entre ellos. La utilización del aprendizaje cooperativo permite obtener un beneficio conjunto a nivel académico, social y personal dentro del aula.

- **Ventajas académicas**.
  - Favorece el interés por la investigación por parte de los estudiantes.
  - Potencia la creatividad y el razonamiento, de modo que se fomente el pensamiento crítico en cada uno de los alumnos.
  - Facilita a los alumnos poder construir su propio aprendizaje. De esta manera se favorece el trabajo autónomo.
  - Aumenta los logros académicos.
- **Ventajas sociales**.
  - Crea un clima de cooperación en clase que hace que los estudiantes estén más motivados, pudiéndose reducir el absentismo escolar.
  - Aumenta el compromiso tanto a nivel personal como grupal en los alumnos
  - Se genera un sentimiento de confianza dentro del grupo al haber un sentido de pertenencia a este.
- **Ventajas personales**.
  - Mejora de la autoestima y el autoconcepto.
  - Respeto a los diferentes puntos de vista e interés por aprender de las opiniones de los demás.

Con el trabajo cooperativo se persigue desarrollar las denominadas dimensiones del aprendizaje cooperativo (Suárez-Guerrero, 2010):

- Responsabilidad individual y de equipo
- Interdependencia positiva
- Interacción estimuladora
- Gestión interna de equipo
- Evaluación interna de equipo

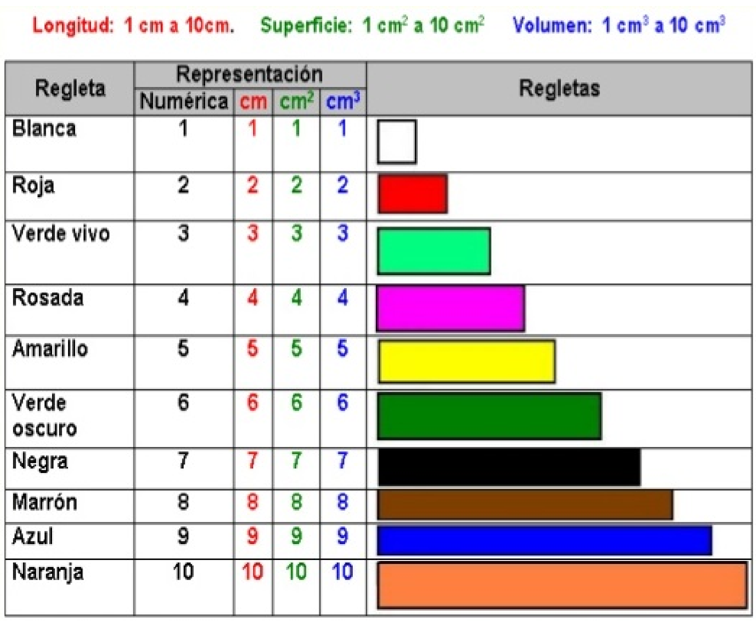
Capítulo 3

Materiales manipulativos en Álgebra

3.1 Regletas de Cuisenaire

Las regletas de Cuisenaire son un recurso manipulativo matemático muy versátil que se puede empezar a usar con niños a partir de los 3 años. Aunque en principio su aplicación práctica pueda estar más destinada a educación primaria ya que se pueden utilizar para enseñar las cuatro operaciones aritméticas básicas, fracciones, áreas, volúmenes, etc... también pueden resultar útiles para educación secundaria en el cálculo de ráices cuadradas, resolución de ecuaciones lineales o incluso cuadráticas[1].

Existen diez regletas distintas que se corresponden con los 10 primeros números naturales. Cada una de ellas posee una longitud y un color determinados, como se puede consultar en la Figura 3.1.



Longitud: 1 cm a 10cm. Superficie: 1 cm^2 a 10 cm^2 Volumen: 1 cm^3 a 10 cm^3

Regleta	Representación				Regletas
	Numérica	cm	cm^2	cm^3	
Blanca	1	1	1	1	
Roja	2	2	2	2	
Verde vivo	3	3	3	3	
Rosada	4	4	4	4	
Amarillo	5	5	5	5	
Verde oscuro	6	6	6	6	
Negra	7	7	7	7	
Marrón	8	8	8	8	
Azul	9	9	9	9	
Naranja	10	10	10	10	

Fig. 3.1 Descripción de las regletas de Cuisenaire
Fuente: *https://es.slideshare.net/alfil19042/*

Pueden estar fabricadas en plástico o madera, como las de la Figura 3.2. Aunque la gracia reside en poder tocar con las manos el material, también se puede acceder a unas regletas virtuales desde la página web desarrollada por José Antonio Cuadrado (2020): *http://regletas.joseantoniocuadrado.com/*. Algunas de las imágenes mostradas a continuación de operaciones con regletas han sido obtenidas usando esta la aplicación web.

[1]Tocamates: el blog sobre matemáticas y creatividad de José Ángel Murcia (2020). Recuperado de: *http://www.tocamates.com/category/regletas/*. Consultado por última vez el 16 de marzo de 2020.

Fig. 3.2 Caja de regletas de Cuisenaire de madera
Fuente: *https://jugueteotoys.com/producto/regletas-de-cuisenaire/*

3.1.1 Operaciones aritméticas básicas

Suma y resta

Cuando se suma con regletas, éstas se disponen una a continuación de la otra y la suma queda representada en una dimensión como suma de longitudes. En el ejemplo de la Figura 3.3(a) se debe buscar una regleta que tenga el mismo valor que la suma de las dadas. En cambio para la resta, se debe buscar una regleta equivalente a la diferencia de las dos dadas, como en la Figura 3.3(b).

Multiplicación

La multiplicación de dos factores a y b es una operación que resulta en una figura de dos dimensiones. Además, el resultado de la multiplicación es el área del rectángulo cuyos lados tienen longitudes a y b respectivamente.

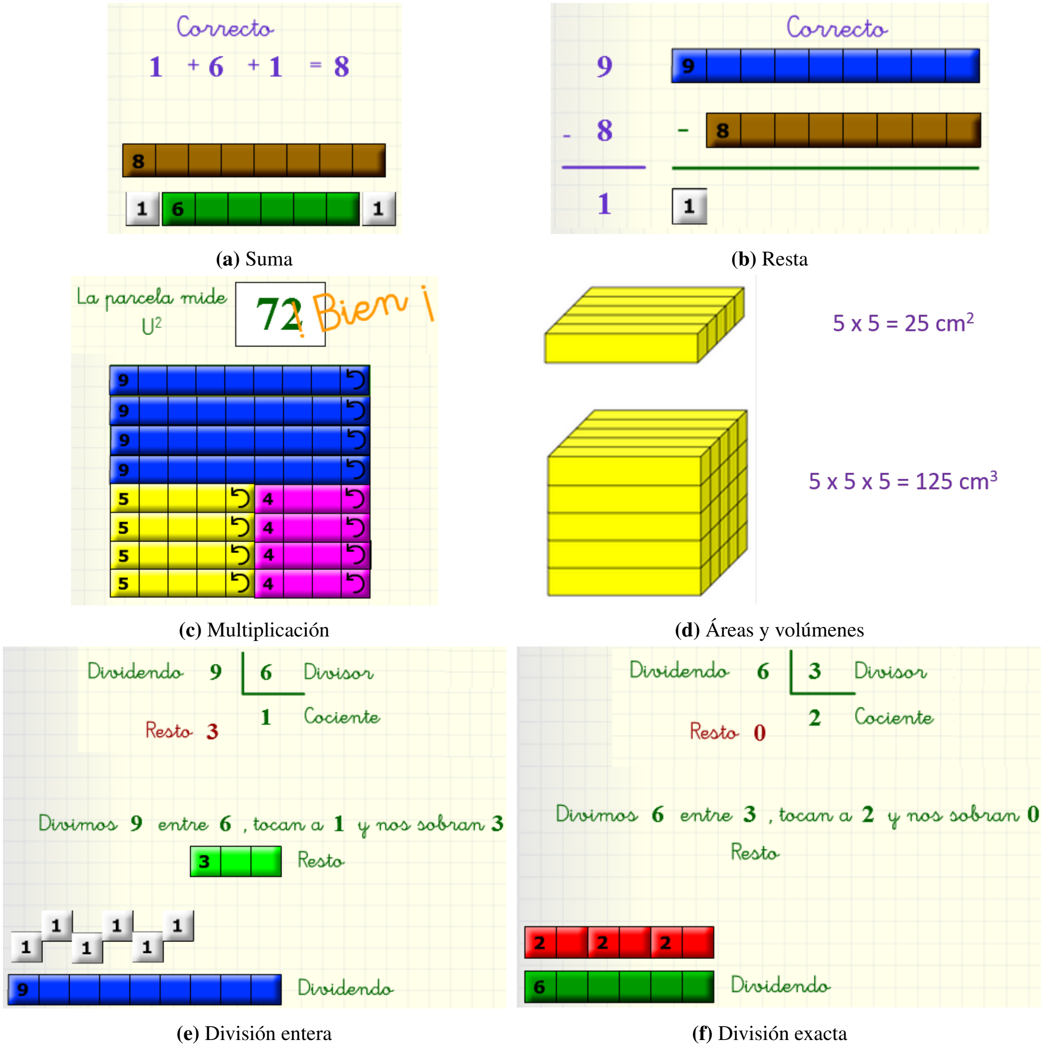
En la Figura 3.3(c) se muestra cómo se calcularía la superficie de una parcela con regletas.

En cambio, si se realiza una multiplicación de tres factores se construye un modelo tridimensional cuyo resultado el volumen de un prisma recto de base rectangular, como se puede ver en la Figura 3.3(d).

División

Dividir equivale a repartir la longitud de una regleta en partes iguales. En la Figura 3.3(e) se puede visualizar cómo se obtiene el cociente y el resto de una división entera con regletas.

En la Figura 3.3(f) se puede ver que 3 es divisor de 6 porque el resto es nulo. Esto puede ser muy útil para construir el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos números con regletas.



(a) Suma
(b) Resta
(c) Multiplicación
(d) Áreas y volúmenes
(e) División entera
(f) División exacta

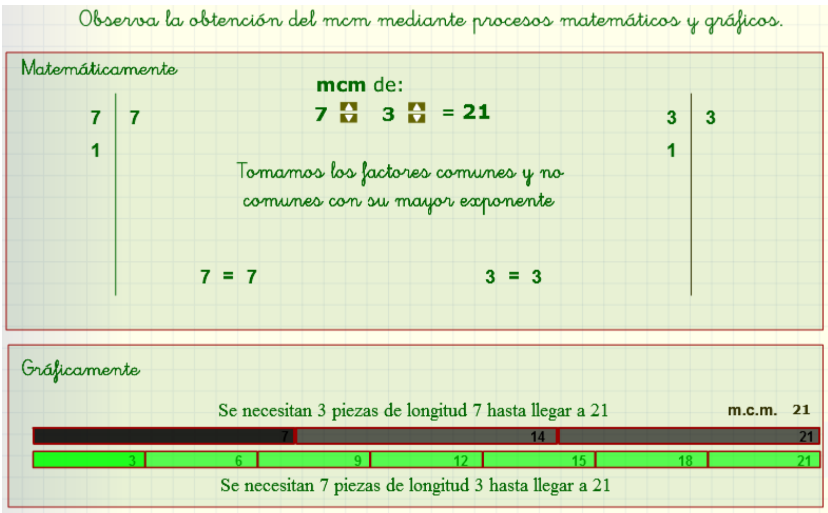
Fig. 3.3 Operaciones aritméticas con regletas
Fuente: *http://regletas.joseantoniocuadrado.com/*

Los conceptos anteriores están relacionados con educación primaria pero son necesarios para entender cómo se opera con regletas. En los próximos apartados aparecen conceptos que ya pueden ser aplicables a los primeros cursos de educación secundaria.

3.1.2 Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor

En la Figura 3.4 se puede observar cómo se calcularía el mínimo común múltiplo con regletas.

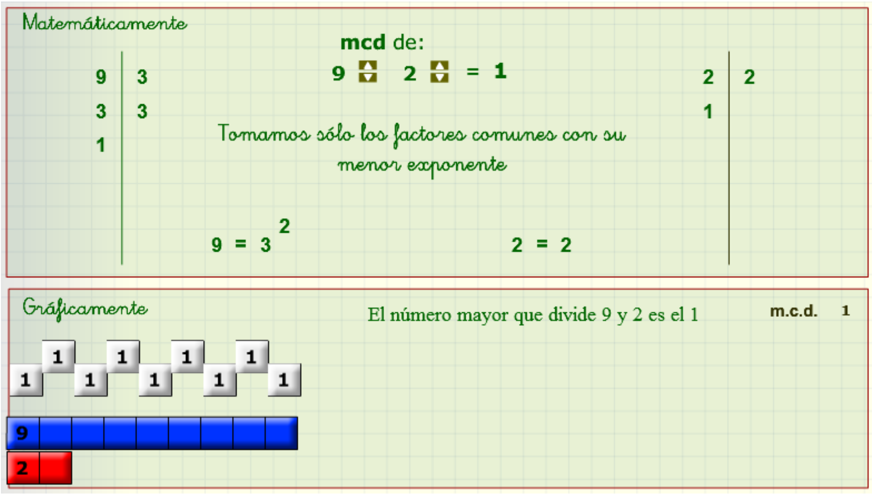
(a)



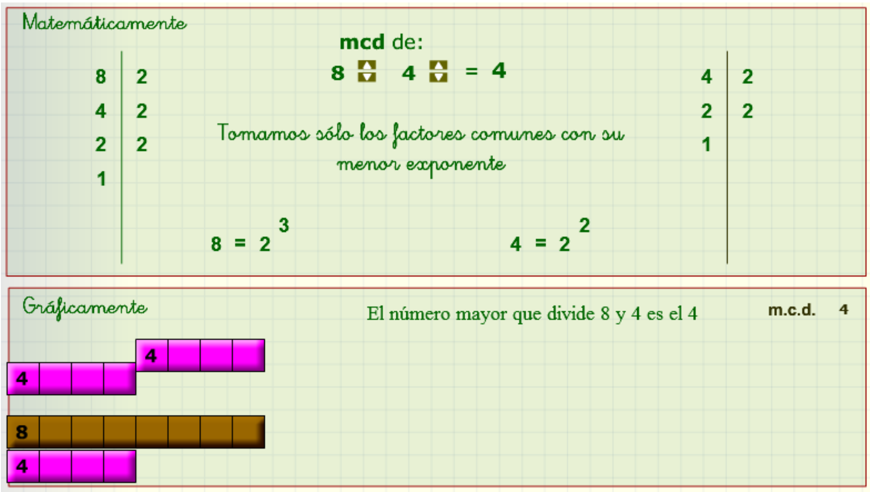
(b)

Fig. 3.4 Cálculo de mínimo común múltiplo mediante regletas
Fuente: *http://regletas.joseantoniocuadrado.com/*

En la Figura 3.5 se puede observar cómo se calcularía el máximo común divisor con regletas.



(a)

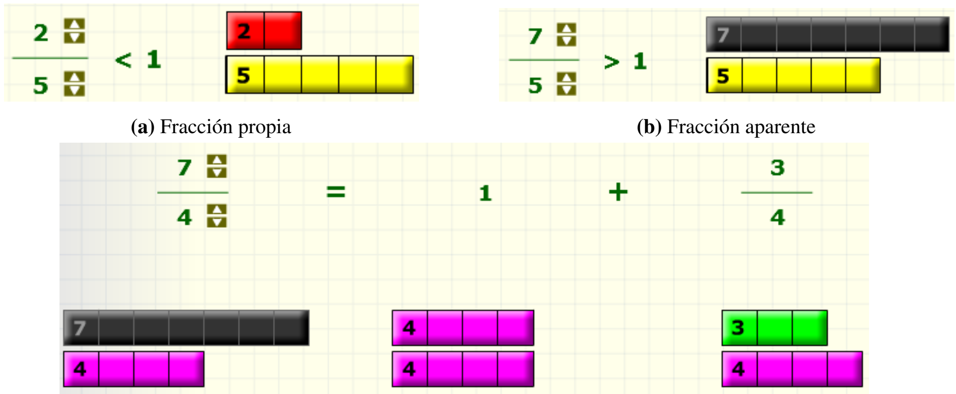


(b)

Fig. 3.5 Cálculo de máximo común divisor mediante regletas
Fuente: *http://regletas.joseantoniocuadrado.com/*

3.1.3 Fracciones

También se pueden utilizar las regletas de Cuisenaire para representar fracciones tal y como se indica en la Figura 3.6. La fracción mixta es aquella que está formada por un número entero y una fracción. Se genera por la descomposición de una fracción impropia en un número entero y una fracción propia.



(a) Fracción propia

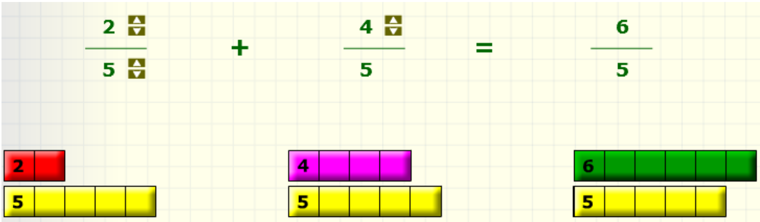
(b) Fracción aparente

(c) Fracción mixta

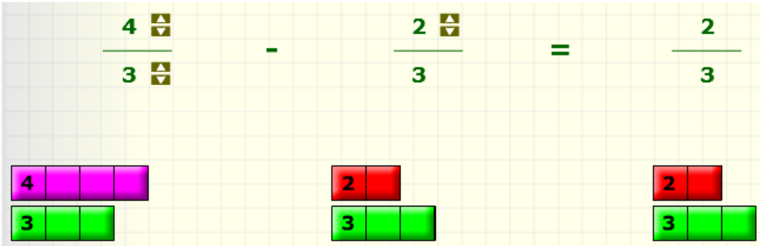
Fig. 3.6 Representación de fracciones con regletas
Fuente: *http://regletas.joseantoniocuadrado.com/*

Se pueden realizar las siguientes operaciones con fracciones:

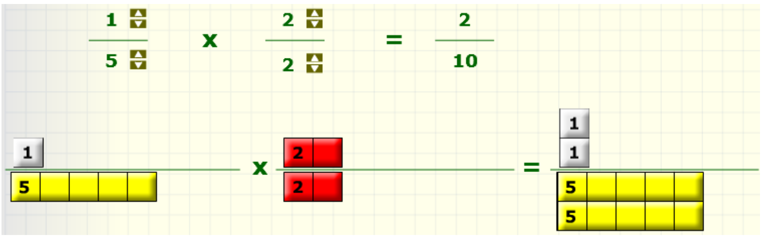
- **Suma de fracciones**. Si tienen el mismo denominador se suman los numeradores y se mantiene el denominador, como en el caso de la Figura 3.7(a). En caso contrario habría que calcular el m.c.m. de los denominadores como se ha visto anteriormente y seguir operando.
- **Resta de fracciones**. Si tienen el mismo denominador se restan los numeradores y se coloca el mismo denominado, rcomo en el caso de la Figura 3.7(b). En caso contrario habría que calcular el m.c.m. de los denominadores como se ha visto anteriormente y continuar operando.
- **Multiplicación de fracciones**. Se multiplican los numeradores y se obtiene el numerador del producto, para obtener el denominador del producto se multiplican los denominadores (ver Figura 3.7(c)).
- **División de fracciones**. La división de fracciones es equivalente a la multiplicación de la primera fracción por la inversa de la segunda. Por eso en la Figura 3.7(d) para obtener el numerador de la división se ha multiplicado el numerador de la primera por el denominador de la segunda y para obtener el denominador de la división, el denominador de la primera por el numerador de la segunda.



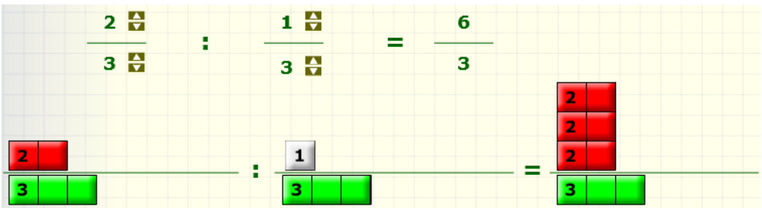
(a) Suma



(b) Resta



(c) Multiplicación



(d) División

Fig. 3.7 Operaciones de fracciones con regletas
Fuente: *http://regletas.joseantoniocuadrado.com/*

3.1.4 Operaciones con números enteros

Muchos estudiantes de 1º de la ESO tienen dificultades para operar con números enteros. Para que entiendan mejor este concepto abstracto de números negativos y lo que sucede cuando se suman o se restan se puede realizar una práctica con regletas. Lo primero que habría que construir sería un eje en el que situar los números positivos hacia arriba y los números negativos hacia abajo, como sucede en la Figura 3.8. También se podrían situar en horizontal pero he considerado más conveniente esta disposición al poderse aplicar más fácilmente a los ascensores y los pisos que se encuentran por encima y por debajo del nivel del suelo.

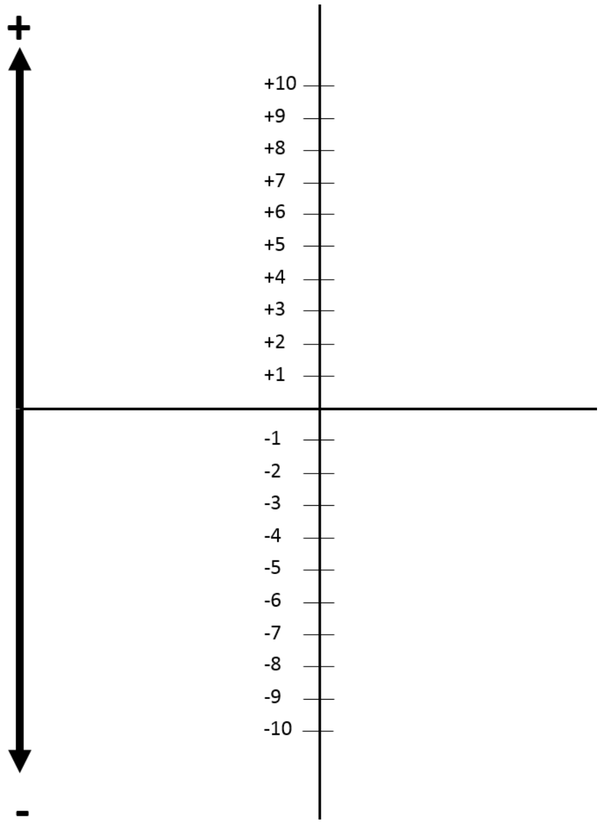


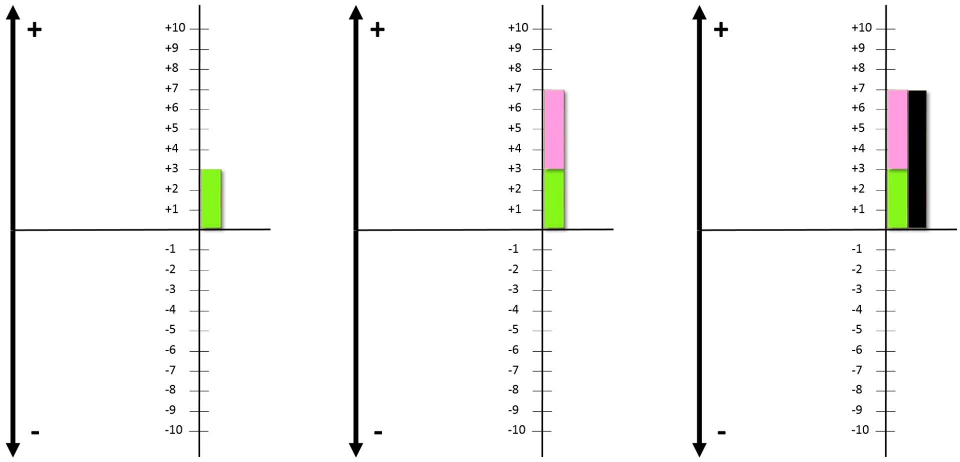
Fig. 3.8 Plantilla para realizar operaciones de números enteros con regletas

A continuación se van a realizar una serie de ejemplos de operaciones con números enteros.

Si el número es positivo se pone a continuación hacia arriba porque está sumando, en cambio si el número es negativo se coloca al mismo nivel de la primera regleta pero hacia abajo al ser menor que 0.

Hay casos como el de la Figura 3.11 en los que se requiere un doble cambio de signo.

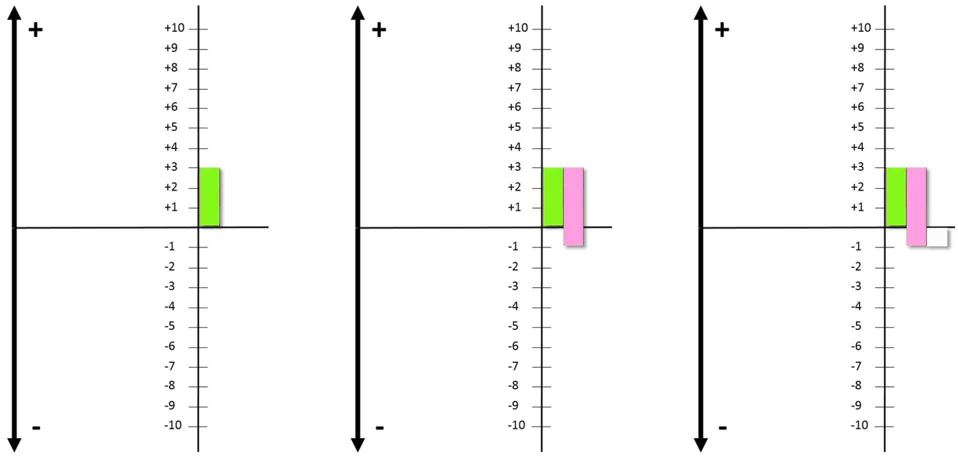
Ejemplo 1: $3+4$



(a) **(b)** **(c)**

Fig. 3.9 Resolución con regletas de $3+4=7$

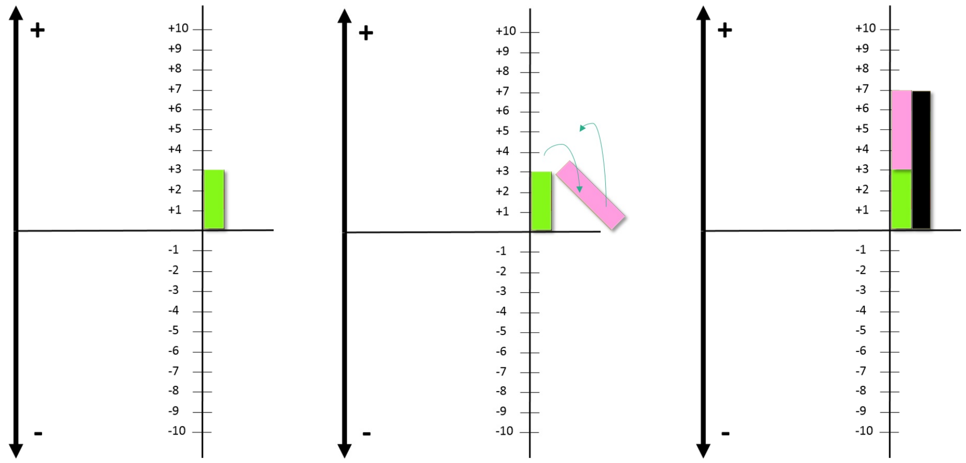
Ejemplo 2: $3-4$



(a) **(b)** **(c)**

Fig. 3.10 Resolución con regletas de $3-4=-1$

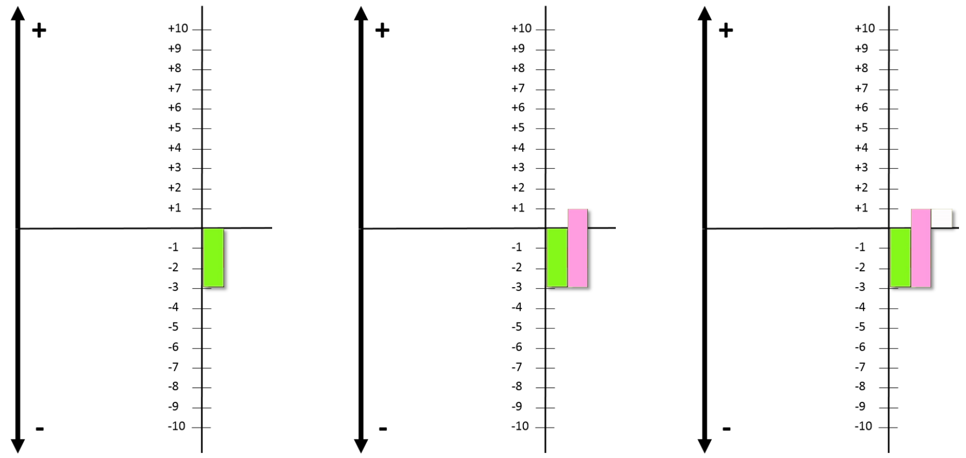
Ejemplo 3: $3-(-4)$



(a) **(b)** **(c)**

Fig. 3.11 Resolución con regletas de $3-(-4)=7$

Ejemplo 4: $-3+4$



(a) **(b)** **(c)**

Fig. 3.12 Resolución con regletas de $-3+4=1$

3.1.5 Demostraciones por inducción

Supongamos que se tiene una progresión aritmética como la de la Ecuación 3.1, la suma de los n primeros números naturales.

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.1}$$

Si se quiere demostrar por inducción que esta expresión es cierta, es necesario realizar los siguientes pasos:

- Paso 1: base de la inducción. Consiste en demostrar que se cumple para el primer número natural de la progresión, es decir, el 1.

- Paso 2: paso inductivo. Se parte de la suposición, llamada hipótesis de inducción, de que un número natural cualquiera k cumple la fórmula dada. Posteriormente se procede a demostrar que, en consecuencia, el número $k+1$ también cumple la ecuación.

Para realizar demostraciones por inducción con regletas de Cuisenaire no se pueden utilizar exactamente los pasos anteriores, sino que habría que ir comprobando que se verifica la expresión para varios términos de la sucesión.

Se va a demostrar por inducción con regletas la Ecuación 3.2:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3.2}$$

Demostración para n=1

El primer paso sería demostrar que se cumple para $n = 1$.

Se desarrolla el lado izquierdo de la igualdad y se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 = 1 \tag{3.3}$$

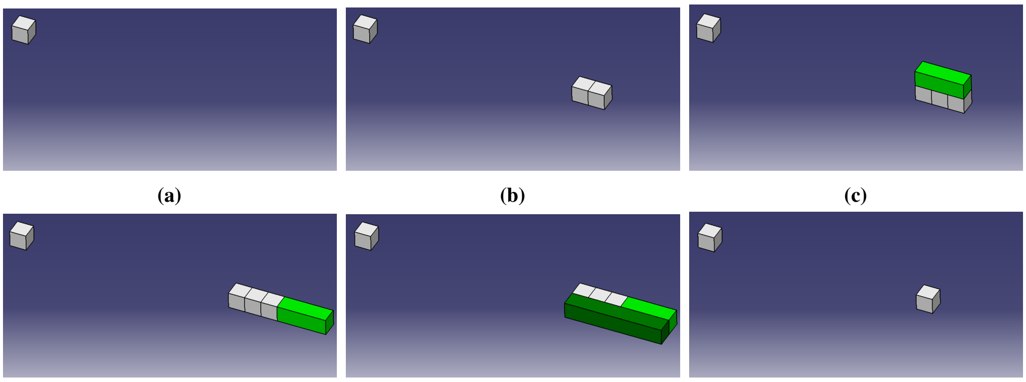
Por lo tanto se obtendría la Figura 3.13(a).

Si se desarrolla el lado derecho de la igualdad para $n = 1$ se tiene:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \tag{3.4}$$

En el numerador aparece la multiplicación de tres factores. El producto de los dos primeros constituye el área de la derecha de la Figura 3.13(b), pero como se tiene que multiplicar por 3 se obtiene un volumen, como el de la Figura 3.13(c). Las regletas de ese volumen se pueden colocar al nivel del suelo para conocer el valor del volumen (Figura 3.13(d)).

Es necesario realizar la división por 6, para ello se debe averiguar cuántas regletas de 6 son necesarias para repartir la longitud anterior (Figura 3.13(e)). Finalmente, el número de regletas a la derecha y a la izquierda es el mismo, por lo que queda demostrado que para $n = 1$ se cumple la expresión.



(a) **(b)** **(c)** **(d)** **(e)** **(f)**

Fig. 3.13 Pasos para la demostración con regletas para $n = 1$

Demostración para n=2

El segundo paso sería demostrar que se cumple para $n = 2$.

Se desarrolla el lado izquierdo de la igualdad y se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 \tag{3.5}$$

Por lo tanto se obtendría la Figura 3.14(a).

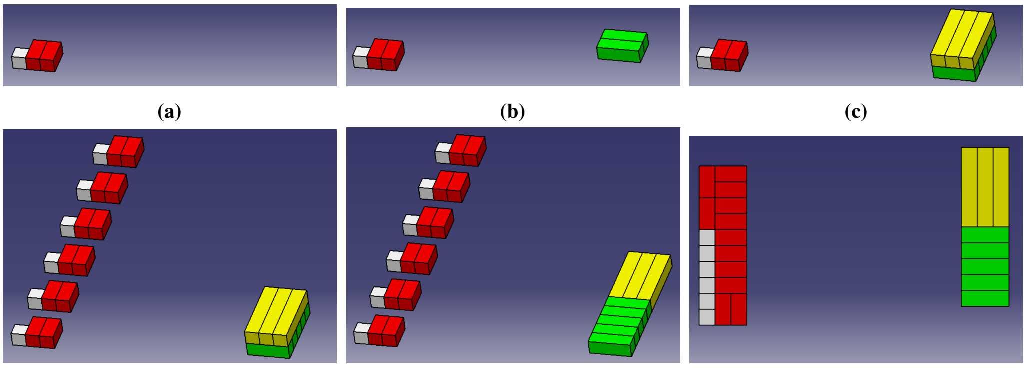
Si se desarrolla el lado derecho de la igualdad para $n = 2$ se tiene:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} \tag{3.6}$$

En el numerador aparece la multiplicación de tres factores. El producto de los dos primeros constituye el área de la derecha de la Figura 3.14(b), pero como se tiene que multiplicar por 5 se obtiene un volumen, como el de la Figura 3.14(c).

Ahora habría que dividir por 6 ese volumen, pero existe otra posibilidad que sería la siguiente: como el 6 está dividiendo en el lado derecho podría pasar al lado izquierdo de la igualdad multiplicando. Se ha optado por esa opción y se ha multiplicado por 6 el lado izquierdo, obteniendo la Figura 3.14(d).

Se agrupan las regletas del lado derecho de manera que ocupen una superficie resultando la Figura 3.14(e). Finalmente, en la Figura3.14(f) se comprueba que las superficies formadas a la derecha y a la izquierda son exactamente iguales, por lo que queda demostrado que para $n = 2$ también se cumple la expresión.



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Fig. 3.14 Pasos para la demostración con regletas para $n = 2$

Demostración para n=3

El tercer paso, en este caso el último, sería demostrar que se cumple para $n = 3$.

Se desarrolla el lado izquierdo de la igualdad y se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \tag{3.7}$$

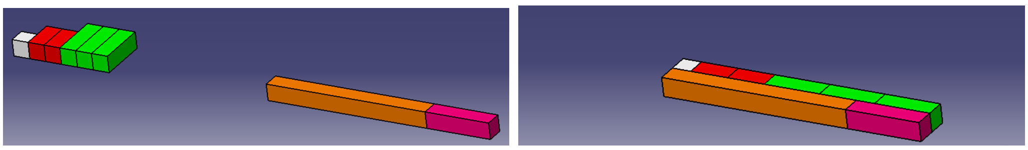
Por lo tanto se obtendría la disposición de la izquierda de la Figura 3.15(a).

Si se desarrolla el lado derecho de la igualdad para $n = 3$ se tiene:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \tag{3.8}$$

En este caso se han omitido los pasos de la multiplicación de tres factores que daría un volumen de 84 cm^3 y que posteriormente se debe dividir por 6, dando lugar a 14 como se indica en la zona derecha de la Figura 3.15(a). Sólo queda comparar la longitud de las regletas del lado derecho e izquierdo como si se tratara de una carrera de regletas, como se puede ver en la Figura 3.15(b).

Como también se ha cumplido para $n = 3$ queda demostrado con regletas que la Ecuación 3.2 se cumpliría cualquier n.



(a) (b)

Fig. 3.15 Pasos para la demostración con regletas para $n = 3$

3.2 Tabletas algebraicas

Este material manipulativo supone una alternativa para la enseñanza del proceso de factorización. Permite establecer una conexión entre la noción de área y la expresión de algunos polinomios de la forma $ax^2+by^2+cx+dy+exy+f$ con $a,b \in \mathbb{N}$ y $c,d,eyf \in \mathbb{Z}$, como producto de factores. Se debe hacer especial énfasis en reducir a la mínima expresión los factores cuyo producto determina el polinomio que representa el área del rectángulo formado por las tabletas, buscando conceptualizar el significado del proceso de factorización (Jiménez, 2011).

Las tabletas algebraicas son un material manipulativo derivado de los bloques multibase o bloques de Dienes. Son fichas rectangulares conformadas por seis modelos básicos, un cuadrado de lado a, otro de lado b, otro de lado unidad, un rectángulo de lados a y b, otro de lados a y 1, un tercer rectángulo de lados b y 1, como puede verse en la Figura 3.16.

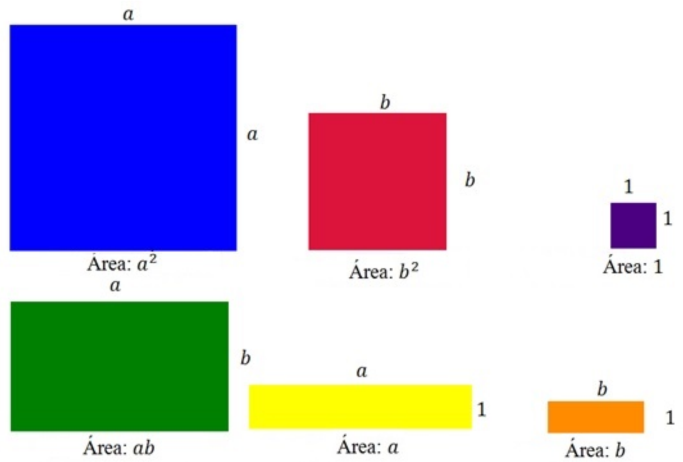


Fig. 3.16 Descripción de las fichas algebraicas

Este material se puede construir con medidas arbitrarias pero es importante que las medidas de las longitudes a y b no sean divisibles entre sí, e incluso, que estas dos medidas no tengan tampoco factores en común con la medida de longitud unidad. Jiménez (2011) usó las siguientes longitudes: $a = 6cm$, $b = 4cm$ y $unidad = 1,5cm$.

3.2.1 Reglas de manejo del material

- **Unión de fichas**. Sólo se pueden ubicar fichas consecutivas cuando los lados compartidos sean de la misma longitud.

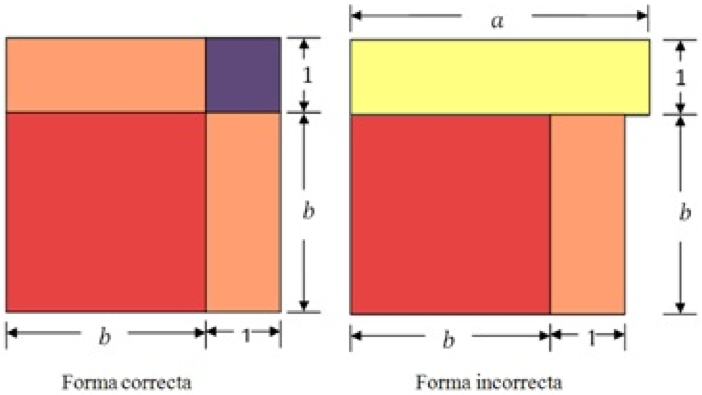


Fig. 3.17 Ejemplo de unión de fichas (Jiménez, 2011)

- **Construcción de configuraciones**. El objetivo es formar rectángulos de tal manera que no queden huecos en el interior del rectángulo. Una vez formado correctamente, se deben interpretar las longitudes de la base y la altura.

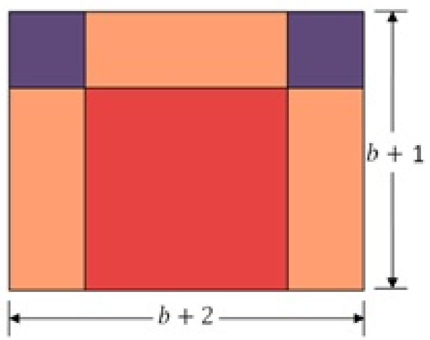
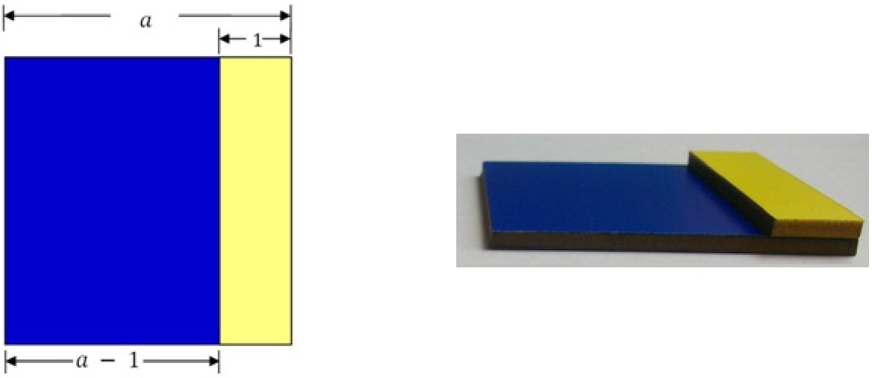


Fig. 3.18 Ejemplo de interpretación de longitudes de las fichas
Fuente: *http://ciaem-redumate.org/memorias-icemacyc/*

El caso de la Figura 3.18 posee 6 fichas y se corresponde con el polinomio b^2+3b+2. Si nos fijamos, la base y la altura de ese rectángulo son, respectivamente, $b+2$ y $b+1$, los factores de ese polinomio.

- **Superposición de fichas**. Para indicar que un término del polinomio es negativo se colocará sobre otra ficha de mayor área, siempre y cuando compartan, al menos, la longitud de uno de sus lados. Por ejemplo en el caso de $a^2 - a$ se coloca una ficha de área a encima de una de superficie a^2, tal y como indica la Figura 3.19.



(a) Interpretación de longitudes de los lados

(b) Superposición de las fichas

Fig. 3.19 Ejemplo de interpretación de longitudes de lados donde aparecen términos negativos (Jiménez, 2011)

3.3 Explorador de ecuaciones

Se trata de una balanza virtual proporcionada por la Universidad de Colorado en Boulder (2020). Puede servir como una introducción para resolver ecuaciones, sistemas de ecuaciones y conocer las desigualdades en ecuaciones.

3.3.1 Explorador de igualdades

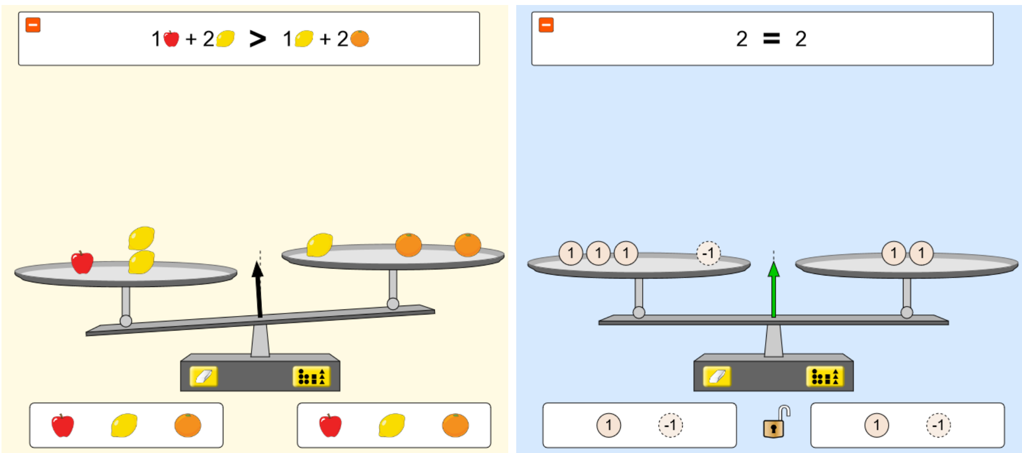
Esta herramienta se encuentra accesible desde la siguiente página web:

https://phet.colorado.edu/es/simulation/equality-explorer

Sirve para resolver y manipular ecuaciones algebraicas aplicando las propiedades inversas de la adición y la multiplicación de forma intuitiva. También se puede utilizar para sustituir diferentes valores de una variable en una ecuación hasta dar con la solución, al mismo tiempo que se puede entender el concepto de desigualdad en una expresión matemática al no estar equilibrada la balanza.

Se puede comenzar con el explorador de igualdades más básico, consistente en una balanza a la que se pueden ir añadiendo diferentes piezas de fruta a un lado y a otro. A medida que se añaden más frutas al lado izquierdo la balanza se va a desequilibrar ya que ese lado pesa más. Simultáneamente se va a mostrar en la parte superior de la pantalla la desigualdad matemática que estaría teniendo lugar, tal y como se puede ver en la Figura 3.20(a).

De forma análoga, se podría trabajar con números en lugar de frutas hasta conseguir una igualdad como la de la Figura 3.20(b).



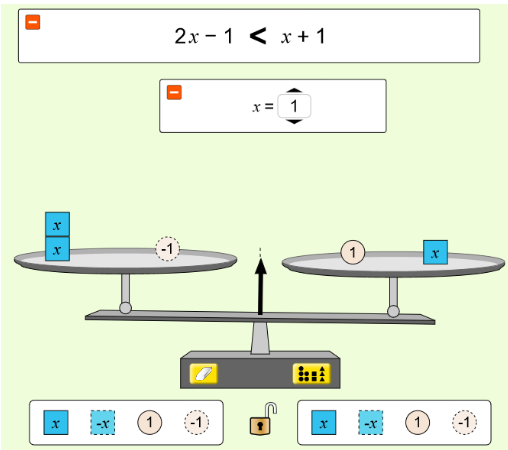
(a) Desigualdad con piezas de fruta

(b) Igualdad con números

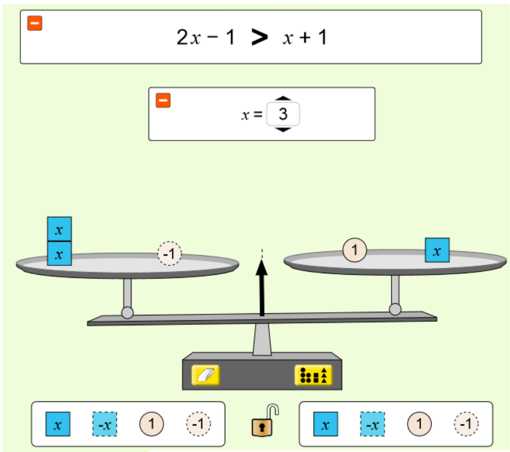
Fig. 3.20 Ejemplo de explorador de igualdades básico

El siguiente explorador de igualdades ya constituye una aplicación directa para resolver ecuaciones de primer grado. Se trabaja con la incógnita x y números enteros que se pueden colocar en ambos lados de la balanza.

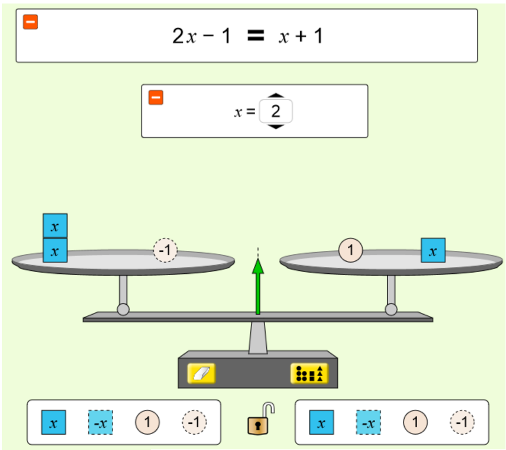
Como ejemplo se va a plantear la ecuación $2x-1=x+1$. En la Figura 3.21(a) se ha introducido el valor de $x=1$ y como consecuencia la balanza está en desequilibrio ya que es mayor el lado derecho. En cambio, para $x=3$ el lado izquierdo de la balanza es el que pesa más, como muestra la Figura 3.21(b). Finalmente, para $x=2$ se cumple la igualdad y la balanza está equilibrada (Figura 3.21(c)).



(a) Desigualdad con $x=1$



(b) Desigualdad con $x=3$



(c) Igualdad con $x=2$

Fig. 3.21 Ejemplo de explorador de igualdades para resolver ecuaciones

3.3.2 Explorador de igualdades de dos variables

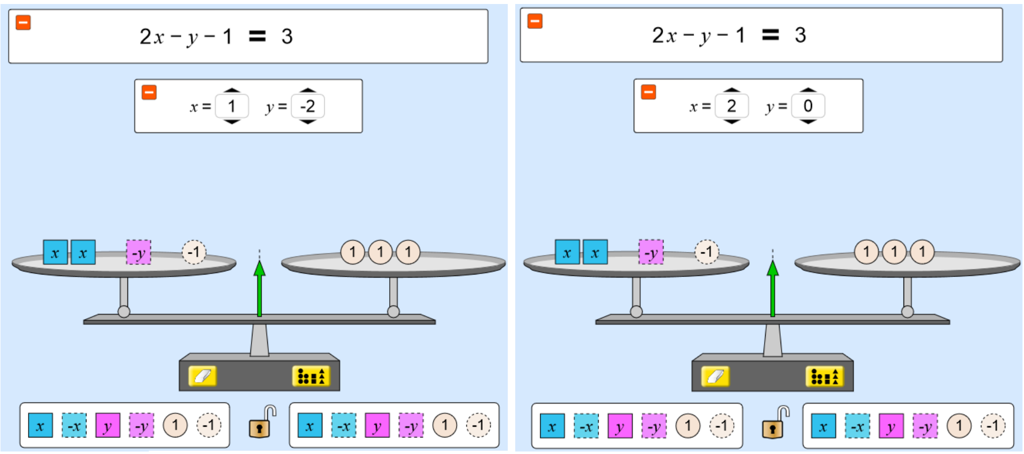
Esta herramienta, también desarrollada por la Universidad de Colorado Boulder (2020), se encuentra accesible desde la siguiente página web:

https://phet.colorado.edu/es/simulation/equality-explorer-two-variables

Además de poder interactuar con enteros, se puede interactuar con hasta dos variables, x e y, de manera que se pueden manipular ecuaciones algebraicas sustituyendo los diferentes valores de las variables en una balanza virtual.

Supone un acercamiento a los sistemas de ecuaciones ya que se puede observar que no basta con una única ecuación para obtener un único par de valores de x e y que la verifiquen, sino que existen más posibles soluciones (infinitas). De ahí la necesidad de añadir otra ecuación para construir un sistema de ecuaciones.

Como ejemplo se plantea la ecuación $2x - y - 1 = 3$ y en la Figura 3.22 se proponen dos pares de valores de x e y que la verifican, es decir, para los que la balanza está equilibrada.



(a) Igualdad con $x = 1$, $y = -2$ **(b)** Igualdad con $x = 2$, $y = 0$

Fig. 3.22 Ejemplo de explorador de igualdades de dos variables

3.4 Sistemas de ecuaciones lineales con Geogebra

Existen fundamentalmente tres métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de forma analítica: sustitución, igualación y reducción. Sin embargo, estos métodos son muy mecánicos y muchas veces los estudiantes no saben realmente cuál es la interpretación geométrica de lo que están haciendo al resolver un sistema de ecuaciones.

Además, es interesante que los estudiantes vean que los bloques en los que se suele dividir la asignatura de Matemáticas, como Álgebra y Geometría en este caso, están totalmente relacionados y no son independientes.

3.4.1 Sistemas de ecuaciones 2x2

Al ser el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, cada ecuación del sistema se corresponde gráficamente con una recta. Por lo tanto la intersección de las dos rectas se corresponderá con la solución del sistema. Existen tres casos posibles:

- **El sistema tiene solución única.** Las ecuaciones son consistentes o compatibles y además linealmente independientes. Gráficamente, las rectas se cortan, así que las coordenadas x e y del punto de intersección de estas dos rectas se corresponden con la solución del sistema.

- **El sistema tiene infinitas soluciones.** Las ecuaciones son consistentes o compatibles, pero son linealmente dependientes. Si se representa gráficamente, las rectas son iguales así que la solución del sistema la constituyen todos los puntos de la recta.

- **El sistema no tiene solución.** En este caso las ecuaciones son inconsistentes o incompatibles. Las rectas son paralelas, por lo que el sistema no tiene solución.

También es muy adecuado el método gráfico para resolver sistemas de inecuaciones, como se puede ver con uno de los ejemplos que se van a realizar para mostrar cuál sería el procedimiento de resolución mediante Geogebra.

Ejemplo 1

Resolución gráfica del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} y-2x=0 \\ y+x=3 \end{array} \right\}$$

Lo primero que se debe hacer es despejar la y en ambas ecuaciones:

$y-2x=0 \rightarrow y=2x$

$y+x=3 \rightarrow y=3-x$

Como para representar una recta únicamente se necesitan dos puntos, se construye una tabla para cada una de las funciones utilizando $x=0$ y $x=2$.

x	$y=2x$	Punto	x	$y=3-x$	Punto
0	0	(0,0)	0	3	(0,3)
2	4	(2,4)	2	1	(2,1)

En la Figura 3.23 se han representado estas dos rectas mediante Geogebra y la solución del sistema de ecuaciones es el punto de corte de ambas funciones, en este caso $x=1$ e $y=2$.

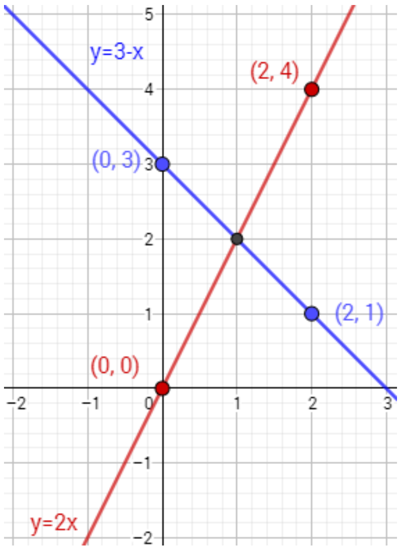


Fig. 3.23 Resolución gráfica mediante Geogebra del ejemplo 1 de un sistema de ecuaciones lineales 2x2

Ejemplo 2

Resolución gráfica del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} y-2x=2 \\ y-1=2x \end{array} \right\}$$

Lo primero que se debe hacer es despejar la y en ambas ecuaciones:

$y-2x=2 \rightarrow y=2x+2$

$y-1=2x \rightarrow y=2x+1$

Como para representar una recta únicamente se necesitan dos puntos, se construye una tabla para cada una de las funciones utilizando $x=1$ y $x=-1$.

x	$y=2x+2$	Punto	x	$y=2x+1$	Punto
1	4	(1,4)	1	3	(1,3)
-1	0	(-1,0)	-1	-1	(-1,-1)

En la Figura 3.24 se han representado estas dos rectas mediante Geogebra. La solución del sistema de ecuaciones sería el punto de corte de ambas funciones, pero como no se cortan al ser paralelas (tienen la misma pendiente) el sistema no tiene solución.

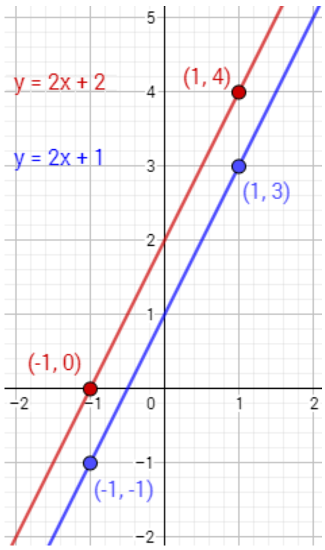


Fig. 3.24 Resolución gráfica mediante Geogebra del ejemplo 3 de un sistema de ecuaciones lineales 2x2

Ejemplo 3

Resolución gráfica del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} 3y-5x=3 \\ 9y-9=15x \end{array} \right\}$$

No es necesario despejar la y en ambas ecuaciones, por lo que se puede construir la tabla para cada una de las funciones utilizando los puntos de corte con los ejes, $x=0$ e $y=0$.

x	$y(ec.1)$	Punto	x	$y(ec.2)$	Punto
0	1	(0,1)	0	1	(0,1)
-0.6	0	(-0.6,0)	-0.6	0	(-0.6,0)

Los dos puntos de corte con los ejes obtenidos para cada función son exactamente los mismos. Esto significa que ambas ecuaciones representan la misma recta, como se puede ver en la Figura 3.25.

Como los puntos de corte de una recta con la otra son infinitos al ser coincidentes, el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

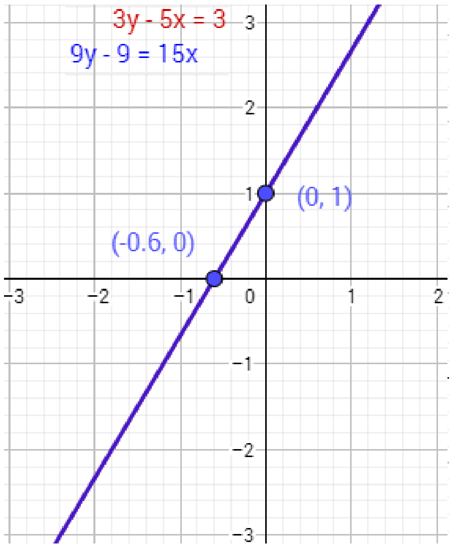


Fig. 3.25 Resolución gráfica mediante Geogebra del ejemplo 3 de un sistema de ecuaciones lineales 2x2

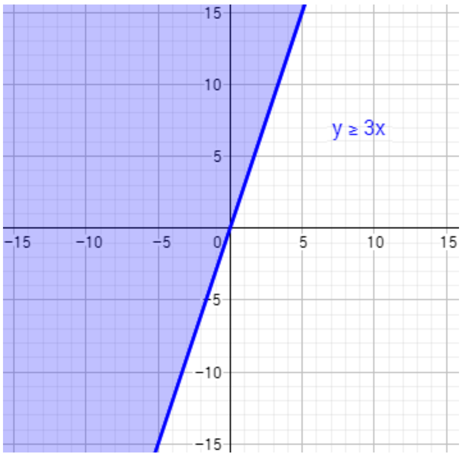
Ejemplo 4

Resolución gráfica del siguiente sistema de inecuaciones:

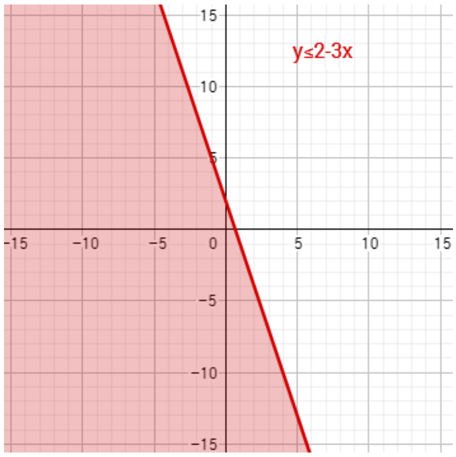
$$\left\{ \begin{array}{c} y \geq 3x \\ y \leq -3x+2 \end{array} \right\}$$

En este ejercicio aparecen dos desigualdades. Cada una de las desigualdades representa una región del plano. La solución del sistema es la intersección de ambas regiones. Por tanto, el primer paso es representar las dos regiones por separado y posteriormente determinar la región en la que se cortan.

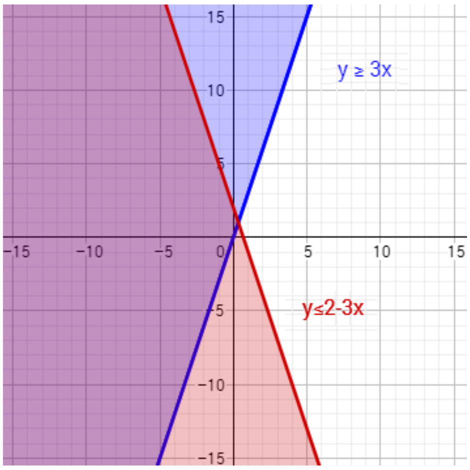
Primero se representa la región $y \geq 3x$ en azul en la Figura 3.26(a). Posteriormente se representa la región $y \leq -3x+2$ en rojo en la Figura 3.26(b). Finalmente, la región intersección de las regiones anteriores es la solución del sistema de inecuaciones, representada en morado en la Figura 3.26(c).



(a) Región $y \geq 3x$



(b) Región $y \leq -3x+2$

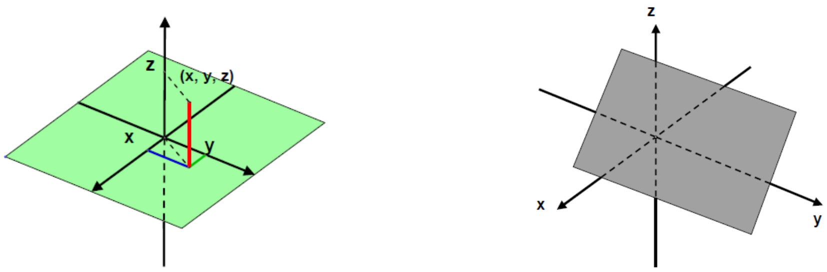


(c) Solución del sistema de inecuaciones

Fig. 3.26 Resolución gráfica mediante Geogebra del ejemplo 4 de un sistema de inecuaciones lineales 2x2

3.4.2 Sistemas de ecuaciones 3x3

Como se ha visto anteriormente, las ecuaciones lineales de dos incógnitas se pueden representar gráficamente como rectas. De la misma manera, las ecuaciones lineales que poseen tres incógnitas se pueden representar en un sistema tridimensional como un plano infinito, como se puede ver en la Figura 3.27.



(a) Ubicación de un punto en el espacio **(b)** Representación gráfica de una ecuación lineal 3x3

Fig. 3.27 Representación en el espacio de un punto y un plano
Fuente: *http://132.248.87.5/areas/matematicas/mate3/*

Un sistema de ecuaciones lineales 3x3 estaría representado en el espacio por tres planos. Así que dependiendo de la posición relativa de estos planos, existen, al igual que sucede con los sistemas de ecuaciones lineales 2x2, tres casos posibles para los sistemas 3x3:

- **El sistema tiene solución única.** Este caso se produce únicamente cuando la intersección de los tres planos es un único punto. En la Figura 3.28 se puede ver un ejemplo de sistema de ecuaciones lineales 3x3 con solución única en el punto (x,y,z).

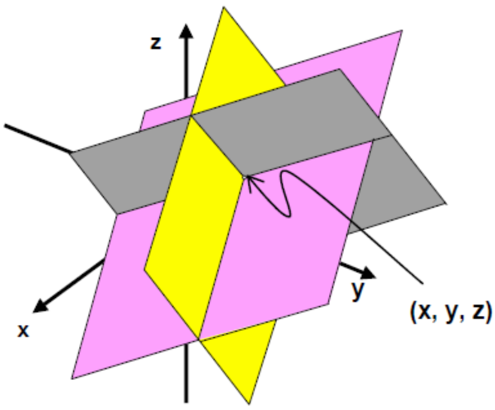
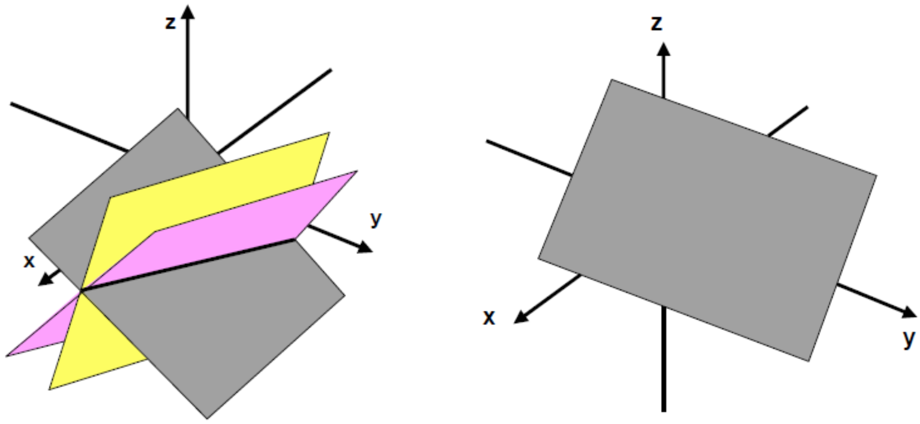


Fig. 3.28 Sistema de ecuaciones lineales 3x3 con solución única
Fuente: *http://132.248.87.5/areas/matematicas/mate3/*

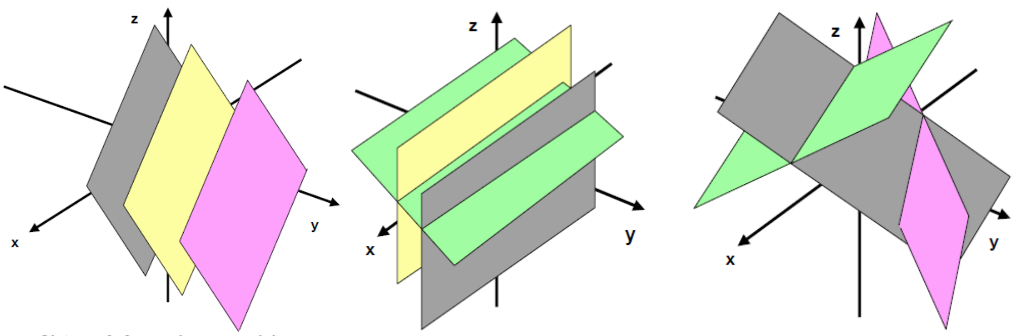
- **El sistema tiene infinitas soluciones.** Esto sucede cuando los tres planos se intersecan en una recta (Figura 3.29(a)) o cuando los tres planos son coincidentes (Figura 3.29(b)).



(a) Sistema 3x3 con tres planos coincidiendo en una recta **(b)** Sistema con 3 ecuaciones que representan un mismo plano

Fig. 3.29 Sistema de ecuaciones 3x3 con infinitas soluciones
Fuente: *http://132.248.87.5/areas/matematicas/mate3/*

- **El sistema no tiene solución.** Para que se de este caso existen diversas posibilidades, como se puede ver en la Figura 3.30, aunque se pueden resumir en dos casos fundamentalmente:
  - Que dos de los tres planos sean paralelos basta para que no haya solución.
  - Que los tres planos coincidan a pares, pero no tengan simultáneamente una recta o un punto en común los tres planos.



(a) Sistema 3x3 con tres planos paralelos **(b)** Sistema 3x3 con dos planos paralelos **(c)** Tres planos coincidentes a pares

Fig. 3.30 Sistema de ecuaciones lineales 3x3 sin solución
Fuente: *http://132.248.87.5/areas/matematicas/mate3/*

Capítulo 4

Juegos en Álgebra

4.1 Pista de Álgebra

Es un juego para cuatro personas cuyo principal objetivo es ejercitar la evaluación de expresiones algebraicas. Cada jugador lanza el dado para posicionarse en la casilla que le corresponda según el número obtenido. Empieza a jugar el de mayor puntuación. Lanza el dado y sustituye x por el valor del dado. Avanza o retrocede según el valor numérico obtenido[1].

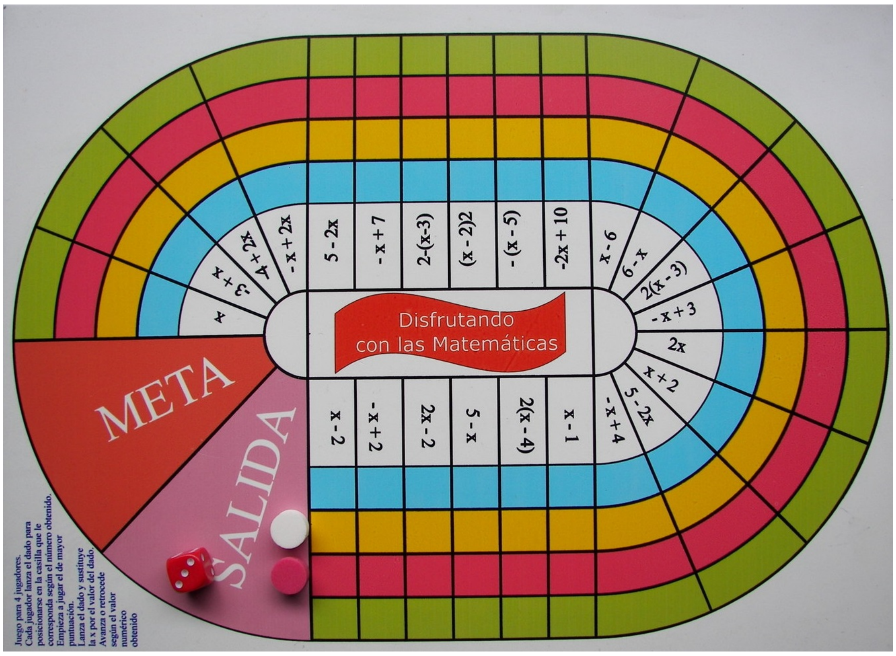


Fig. 4.1 Pista de Álgebra
Fuente: *http://matematizarse.blogspot.com*

Gana el que llega primero a la meta sin pasarse. Aunque la victoria depende fundamentalmente del azar existe una variación que puede hacerlo más interesante.

Existe también una versión virtual de la pista algebraica, que se encuentra accesible desde:

http://matemath.com/juegos1.php?cadena=2-3

Se puede añadir un segundo dado de tal manera que se juega con dos: un dado blanco que representa los números positivos y un dado rojo que representa los números negativos. En su turno cada jugador debe decidir si va a usar el dado blanco o el dado rojo según le convenga, dependiendo de la expresión algebraica en la que se encuentra situado.

[1] Matesymas: página web creada por José María Vázquez de la Torre y Raimundo Alba. Recuperado de: *https://www.matesymas.es/pista-de-algebra-1/*. Consultado por última vez el 4 de mayo de 2020.

4.2 Subir al cero

Es un juego para dos jugadores. Se necesita un tablero como el de la Figura 4.2, un dado y dos fichas diferentes, una para cada jugador. Para decidir quién comienza los jugadores tiran el dado.

El primer jugador lanza el dado, y con el resultado del dado calcula el valor de la expresión de alguno de los caminos que salen de la casilla inferior de salida. De ese modo sube a alguna de las tres primeras casillas apuntando en la Tabla 4.1 como puntuación el valor numérico de la expresión utiliza para subir. Para que sea válido ese valor numérico debe ser un número entero. A continuación, el segundo jugador hace lo mismo.

Las casillas pueden ser ocupadas por dos fichas. Al cabo de 5 turnos, los jugadores llegan al último nivel antes del cero, e intentan sacar con el dado el valor que permite anular la función $x-1$, $x-2$ o $x-3$ según corresponda. El juego acaba cuando uno de los jugadores ha subido al cero, además dicho jugador obtiene 10 puntos adicionales por eso hecho. Gana el que más puntuación ha acumulado a lo largo de las jugadas (Flores et al., 2011).

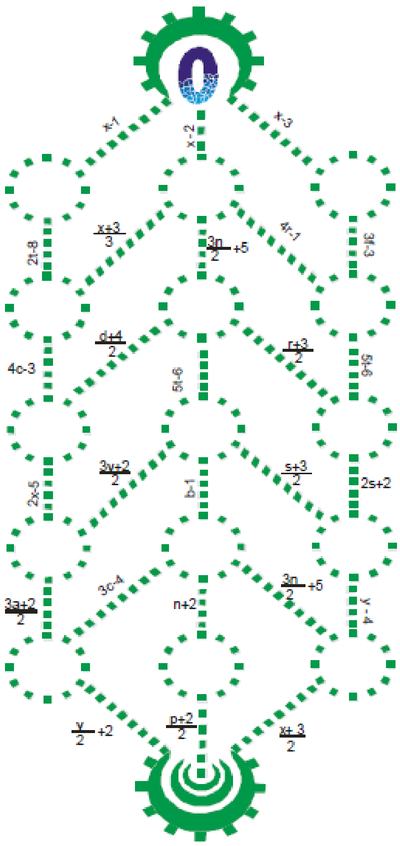


Fig. 4.2 Juego de subir al cero (Flores et al., 2011)

Tabla 4.1 Tabla de puntuaciones del juego de subir al cero (Flores et al., 2011)

Jugada nº	Puntos jugador 1	Puntos jugador 2
1		
2		
3		
4		
5		
Puntos adicionales		
Total		

4.3 Liga de Campeones

Se trata de un juego para dos, tres o cuatro jugadores. El orden de salida se hace por turno en cada partida. Para empezar es necesario sacar una carta con una ecuación de solución 6. Cada jugador saca una carta por turno, y la repone a continuación en la baraja, avanzando su ficha las casillas que le indiquen la solución (1, 2, 3, 4, 5 o 6) de la ecuación que aparece (Flores et al., 2011).

- Si se cae en un círculo con un futbolista, se debe interpretar el dibujo para avanzar o retroceder.
- Si se cae en una casilla amarilla, se debe de dejar de jugar durante una vuelta.
- Si se cae en un balón, se avanza dos casillas.
- Si se cae en la casilla roja se debe volver a empezar.

Gana el jugador que primero consiga marcar un gol. En la Figura 4.3 se puede ver un ejemplo de tablero y cartas de este juego.

(a) Tablero (b) Cartas

Fig. 4.3 Juego de liga de campeones (Flores et al., 2011)

4.4 Dominó de traducción de álgebra

Consiste en un dominó original creado por Ana García Azcárate que permite trabajar de forma más lúdica la traducción de frases del lenguaje natural al lenguaje algebraico para faciliar la resolución de problemas de ecuaciones de primer grado. Este dominó tiene 24 fichas (se incluyen en el Anexo A) en lugar de las 28 de un dominó clásico. Se ha formado con 22 frases que dan lugar a 22 ecuaciones de primer grado cuando se traducen al lenguaje algebraico. Los estudiantes deben asociar, encadenando las fichas de dominó, cada frase con el número de la solución de la ecuación correspondiente [2].

En la Figura 4.4(a) se puede ver cómo encadenar las fichas y en la Figura 4.4(b) se muestran algunas de las frases con su ecuación y solución correspondiente.

(a) Ejemplo de unión de tres fichas

FRASE	ECUACIÓN	SOL^n
Un número mas 13 da 15	n + 13 = 15	2
Su mitad es 4	n / 2 = 4	8
Su cuarta parte es 3	n / 4 = 3	12
Sumo 10 a un número y da 17	n + 10 = 17	7
La suma de un número y 5 es 14	n + 5 = 14	9
3 menos que un número es 11	n - 3 = 11	14
8 mas que un número es 9	n + 8 = 9	1
5 menos que un número es 14	n - 5 = 14	19
Si sumo un número y 2 da 5	n + 2 = 5	3
El doble de un número es 30	2 n = 30	15
La suma de un número y 7 da 17	n + 7 = 17	10
Si le quito 2 da 6	n - 2 = 6	8

(b) Frases

Fig. 4.4 Cadena de dominós de traducción de álgebra

Fuente: *https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2020/01/11/*

[2] Blog sobre juegos y matemáticas de Ana García Azcárate (2020). Recuperado de: *https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2020/01/11/*. Consultado por última vez el 6 de mayo de 2020.

4.5 Sopa polinómica

Este recurso ha sido elaborado por el Grupo-Alquerque (2001), compuesto por varios profesores de educación secundaria de centros de Sevilla.

Pueden jugar desde uno hasta cuatro jugadores y cada grupo debe tener un tablero como el de la Figura 4.5(a) y dieciséis tarjetas con polinomios como las que aparecen en la Figura 4.5(c).

$x - 1$	$x + 1$	$x - 2$	$2x + 3$	$1 - x$
$x - 1$	x	$x - 7$	$x - 2$	$x + 4$
$x + 2$	$5x + 2$	$x + 3$	$x + 1$	$x - 2$
$x + 6$	x	$x^2 + 1$	$3x - 2$	$2x^2 + 1$
$3x^2 + 2$	x	$-2x - 1$	$x + 1$	$-x^2 - 1$
$x - 3$	$4x - 1$	$x + 2$	$x - 2$	$3 - x$

(a) Sopa de factores

1	-1	2	-3/2	1
1	0	7	2	-4
-2	-2/5	-3	-1	2
-6	0	-1	2/3	-1/2
-2/3	0	-1/2	-1	-1
3	1/4	-2	2	3

(b) Sopa de raíces

1 $x^3 - 2x^2 - x + 2$	2 $x^3 + 3x^2 + x + 3$
3 $2x^3 + x^2 - 7x - 6$	4 $x^3 - 3x + 2$
5 $x^3 + 2x^2 - 3x$	6 $6x^3 - 4x^2 + 3x - 2$
7 $-x^3 + 7x - 6$	8 $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
9 $4x^3 - x^2$	10 $5x^3 + 7x^2 + 2x$
11 $-2x^3 - 5x^2 - 2x$	12 $-2x^3 - 5x^2 - 23x + 6$
13 $3x^3 - 9x^2 + 2x - 6$	14 $-x^3 + 3x^2 + 4x - 12$
15 $3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$	16 $x^3 + x$

(c) Tarjetas

Fig. 4.5 Sopa polinómica (Grupo-Alquerque, 2001)

4.5.1 Objetivos del juego

Los objetivos que se pretenden trabajar con este juego son los siguientes (Grupo-Alquerque, 2001):

- Factorizar polinomios de grado tres con dificultades de todo tipo (raíces reales simples, raíces dobles o triples, factores del tipo (ax + b), factor x, factores (x ± a)), usando factores comunes o la regla de Ruffini.
- Comprobar de una forma razonada que hay polinomios que no pueden factorizarse totalmente en factores de grado 1.
- Trabajar el cálculo mental.
- Trabajar la relación de la raíz (solución o cero) de un polinomio con la de factor y viceversa.
- Resolver ecuaciones.

4.5.2 Reglas del juego

Las reglas del juego original son las siguientes:

1. Se barajan las 16 tarjetas y se colocan boca abajo sobre la mesa y cada jugador, por turno, elige una tarjeta hasta tener cuatro de ellas.
2. Los jugadores factorizan sus polinomios, y buscan, en la sopa de factores que aparece en el tablero, los factores consecutivos de cada factorización y los marcan.
3. Gana el jugador que consigue marcar primero las descomposiciones de sus cuatro polinomios en un tiempo fijado previamente. Si nadie lo ha conseguido en dicho tiempo el ganador será aquel que haya descompuesto más polinomios.

Existe otra modalidad con una dinámica del juego diferente:

1. Las tarjetas se barajan y se colocan boca abajo sobre la mesa.
2. El jugador que tiene el turno toma una tarjeta y descompone el polinomio, señalando los factores en la sopa. Si lo hace correctamente se anota un punto y pasa el turno al siguiente jugador y la tarjeta utilizada se elimina del juego.
3. Si el jugador no sabe descomponer el polinomio pierde su turno y no se anota ningún punto. Como rebote, el siguiente jugador tiene la oportunidad de descomponer el polinomio ganando un punto extra. En caso de no hacerlo pasaría al siguiente.
4. Si un jugador se equivoca en su descomposición en su turno y algún contrincante lo descubre, el jugador pierde el turno y el contrario se anota un punto por haber hecho la descomposición correctamente.

5. La partida finaliza después de que hayan transcurrido cuatro rondas, pasando por todos los jugadores. Gana quien haya obtenido más puntuación.

El Grupo-Alquerque (2001) presenta una última variante del juego. Tras consolidar la factorización y una vez conocidas las reglas del juego, éstas se pueden cambiar para trabajar el concepto de raíz de un polinomio, y relacionarlo con los factores de ese mismo polinomio, de manera que en vez de buscar en la sopa los factores del polinomio correspondiente se busquen sus raíces reales en la Figura 4.5(b).

Por ejemplo, al descomponer el primer polinomio se tendrían que señalar sus raíces en la sopa de raíces, que serían 1, -1 y 2:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2) \tag{4.1}$$

Hay polinomios en el tablero que sólo tienen una raíz real, como el segundo, así que en ese caso sólo se marcaría una casilla en la sopa. En cambio hay otros como el noveno que tienen raíces múltiples, entonces se marcaría la misma raíz tantas veces como su multiplicidad.

4.6 Matgram de ecuaciones de primer grado

Se trata de un tangram elaborado por José María Vázquez de la Torre (2019) en el que aparecen ecuaciones de primer grado y sus soluciones. Se deben unir los lados de cada una de las piezas de forma que coincida la ecuación con su solución para formar una figura[3].

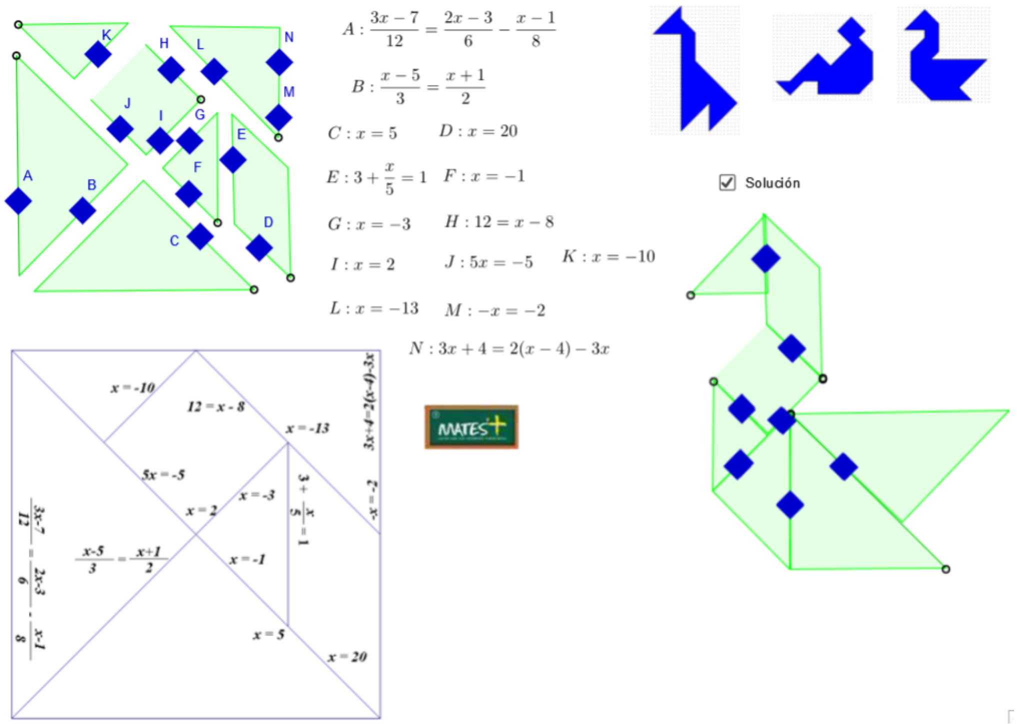


Fig. 4.6 Tangram de ecuaciones de primer grado
Fuente: *https://www.geogebra.org/m/EkZm8pp8*

Existe también una versión virtual realizada con Geogebra del matgram algebraico, que se encuentra accesible desde la siguiente página:

https://www.geogebra.org/m/EkZm8pp8

[3]Matesymas: página web creada por José María Vázquez de la Torre y Raimundo Alba. Recuperado de: *https://www.matesymas.es/materiales-manipulativos-3a-entrega-algebra/*. Consultado por última vez el 7 de mayo de 2020.

4.7 Sudomates de álgebra

Aprovechando el interés de muchos de los estudiantes en la realización de sudokus, Ana García Azcárate publicó en su blog una modificación de este juego que permitiera trabajar sistemas de ecuaciones lineales a sus alumnos.

Este Sudomates da lugar a un sudoku clásico de 81 casillas que se deben rellenar como siempre con números del 1 al 9, pero al mismo tiempo se quiere que se familiaricen con el uso de letras para representar números, que expresen condiciones mediante ecuaciones con varias incógnitas y que combinen estas ecuaciones para resolverlas[4]. La actividad se debe desarrollar en dos fases:

- **Primera Fase**. Los alumnos deben rellenar las casillas, hallando primero los valores que esconde cada letra del tablero de sudoku de la Figura 4.7.

  Las letras que aparecen en el tablero tienen la propiedad de sumar en horizontal y en vertical los números que aparecen a la derecha y en la parte inferior del tablero respectivamente. Es importante resaltar que los números que aparecen en el tablero no participan en las ecuaciones.

  Por ejemplo, la primera fila del tablero da lugar a la ecuación: $c+m+h=19$

  La primera columna a la izquierda da lugar, a su vez, a la ecuación: $c+g+k=17$

c		m				h			19
	f		4			8	e		10
1			m					3	
			k		g	m	c		23
g		9		p	8			1	11
4			1				h	f	14
	g				m				13
	a			e			k	h	11
k		4	c		f	a			22
17	19		16	5	22	14	16	14	

Fig. 4.7 Sudomates de álgebra
Fuente: *https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2018/11/06/*

  El estudiante debe escribir las 16 ecuaciones que presenta el sudoku y obtener los valores que esconden las letras.

- **Segunda Fase**. Se acaban de rellenar las casillas siguiendo las reglas clásicas de los sudokus.

En el Anexo A se incluye la resolución completa de este Sudomates de álgebra.

[4] Blog sobre juegos y matemáticas de Ana García Azcárate. Recuperado de: *https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2018/11/06/*. Consultado por última vez el 8 de mayo de 2020.

Capítulo 5

Unidad Didáctica de 3º de ESO: Ecuaciones

5.1 Introducción contextual

La Unidad Didáctica que se expone en este capítulo pertenece a la asignatura de Matemáticas para las Enseñanzas Académicas del tercer curso de educación secundaria.

Las Matemáticas en la ESO están divididas en cinco bloques según la Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo del BOCyL (2015).

1. **Primer Bloque: "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas".** Posee un carácter unificador del resto de bloques y se centra en adquirir una serie de capacidades y actitudes positivas de cara a la resolución de problemas, plantear y ejecutar investigaciones, modelizar e interpretar la realidad y ser capaz de utilizar los medios tecnológicos actuales.

2. **Segundo Bloque: "Números y Álgebra".** Estudia los conjuntos de números, sus operaciones y propiedades. Además se utiliza el lenguaje algebraico para expresar propiedades, relaciones y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

3. **Tercer Bloque: "Geometría".** Comprende el estudio de figuras y objetos. En este bloque se fomenta el desarrollo de la comprensión espacial de formas y estructuras geométricas mediante su descripción, clasificación y análisis.

4. **Cuarto Bloque: "Funciones".** Se encarga de establecer relaciones entre variables y expresarlas mediante tablas, gráficas y ecuaciones que permiten describir fenómenos sociales, económicos o naturales.

5. **Quinto Bloque: "Estadística y Probabilidad".** Trata sobre la recolección y la organización de los datos para obtener conclusiones adecuadas, además de inculcar un sentido crítico al alumnado para que sea capaz de analizar la información estadística que aparece en los medios de comunicación.

La Unidad Didáctica de Ecuaciones que se va a desarrollar pertenece al Bloque II de Números y Álgebra, concretamente a la parte de Álgebra. El tercer curso de educación secundaria es el primero en el que los estudiantes tienen la posibilidad de elegir entre Matemáticas Académicas o Aplicadas, pero todos tienen un antecedente común en 2º de la ESO.

Respecto al bloque de Álgebra, que es el que nos ocupa, después de haber cursado 2º de la ESO los estudiantes ya conocen las expresiones algebraicas con una incógnita y saben cómo resolver ecuaciones de primer y segundo grado sencillas. Además también saben realizar operaciones sencillas con polinomios.

En cuanto a los sistemas de ecuaciones en 2º de la ESO se les enseña a resolver los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En 3º de la ESO se vuelven a repasar estos sistemas 2x2 pero se puede centrar más en su interpretación geométrica.

Otro punto importante es el de traducción de un enunciado al lenguaje algebraico para resolver un problema. Este contenido sí que aparece también en 2º de la ESO pero suelen tener muchas dificultades y es necesario trabajarlo en mayor profundidad.

Aunque será necesario un repaso para recordarlos o para conocer si hay algún alumno que aún no los ha adquirido o los ha olvidado, van a resultar de gran importancia ya que en 3º de la ESO se van a afianzar y a ampliar.

Serán claves para factorizar polinomios, aplicar identidades notables a polinomios, resolver ecuaciones sencillas de orden superior a dos mediante Ruffini o aplicar ecuaciones y sistemas de ecuaciones a problemas de la vida cotidiana.

Los estudiantes que llegan a este curso ya conocen el concepto de función y manejan las diferentes formas de su representación (ecuación, tabla o gráfica) y además saben representar una recta e interpretar su pendiente.

Estos conocimientos del Bloque de Funciones de 2º de la ESO son también muy importantes para 3º de la ESO ya que se pide una correcta interpretación geométrica de las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones lineales.

Los conocimientos de este Bloque van a tener una incidencia directa en el resto de bloques a desarrollar en Matemáticas Académicas de 3º de la ESO, especialmente en el Bloque de Funciones, como por ejemplo para calcular puntos de corte de funciones lineales o cuadráticas con los ejes además de su correcta representación.

Puesto que se trata de Matemática para las Enseñanzas Académicas cabe pensar que los conocimientos que los estudiantes van a adquirir van a ser esenciales para su aplicación en cursos posteriores en otras asignaturas técnicas como Física y Química. Concretamente en la parte de Álgebra aparecen con frecuencia ecuaciones de primer y segundo grado que es necesario resolver, además de sistemas de ecuaciones. Por ejemplo en Física en los problemas de movimientos o de aplicación de las Leyes de Newton, o en Química en los problemas de disoluciones.

5.2 Competencias básicas

Se tratará de desarrollar las siete competencias básicas de la LOMCE que marca el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (BOE, 2015):

- **Matemática y Ciencia y Tecnología**. Capacidades para aplicar el razonamiento matemático para resolver cuestiones de la vida cotidiana, habilidades para usar los conocimientos y métodos científicos para explicar la realidad. Al tratarse de la asignatura de Matemáticas es evidente que esta será una de las competencias que más se desarrollarán.

- **Lingüística**. Es esencial que los estudiantes conozcan y manejen la terminología y los símbolos matemáticos. Además es importante que los alumnos se refieran de forma clara e inequívoca a los conceptos matemáticos vistos en clase. Es necesario que los estudiantes comprendan correctamente los enunciados y adquieran la capacidad de expresión lingüística adecuada para argumentar las respuestas y el proceso seguido para resolver los problemas.

- **Digital**. Será desarrollada mediante la utilización de las TICs: utilización de la calculadora científica, Geogebra para los problemas geométricos o ciertos materiales manipulativos digitales.

- **Aprender a aprender**. Se desarrollan habilidades para que el alumno sea capaz de prolongar el aprendizaje a lo largo de su vida de la forma más autónoma posible. Esto se consigue fomentando el espíritu crítico cuando se cuestiona la información que se recibe. Los conocimientos matemáticos conforman la estructura de la base científica del alumno de tal forma que si se consiguen ligar estos procedimientos con la vida cotidiana se conseguirá un potente pensamiento hipotético-deductivo fundamental para el futuro. Esta competencia trata de que el alumno sea consciente de los conocimientos que tiene y de que sea capaz de extraer conclusiones y consecuencias de lo aprendido. Para desarrollar el aprender a aprender se tiene que fomentar la comprensión e identificación del problema, la investigación de los posibles métodos de resolución, la preparación y realización de experimentos para encontrar la metodología adecuada.

- **Sociales y cívicas**. Se fomentará la puesta en común de los resultados y argumentación de los procedimientos para contribuir al hábito de debate cívico y mejorar las interacciones sociales de los alumnos.

- **Iniciativa y Espíritu Emprendedor**. La participación activa en clase y la realización de los problemas servirán para fomentar la iniciativa personal de los alumnos.

- **Conciencia y Expresiones Culturales**. Se intentará mostrar a los estudiantes las diversas aplicaciones técnicas o artísticas de los conceptos matemáticos vistos en clase para que tomen conciencia de ello.

5.3 Objetivos didácticos

Los objetivos de etapa generales se pueden consultar en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (BOE, 2015) y no se incluirán aquí.

Los objetivos comunes de la asignatura de Matemáticas para las Enseñanzas Académicas de 3º de la ESO se recogen en la Orden de Educación 362/2015, de 4 de mayo del BOCyL (2015):

1. Identificar y expresar los pasos para la resolución de diferentes tipologías de problemas.
2. Conocer y utilizar diferentes estrategias para la resolución de problemas.
3. Analizar y describir distintas situaciones para poder hacer predicciones.
4. Partir de problemas resueltos y profundizar en diferentes cuestiones, contextos cercanos al alumno.
5. Conocer, identificar y desarrollar procesos de matematización en la realidad cotidiana del alumno.
6. Identificar, cultivar y desarrollar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.
7. Identificar los bloqueos emocionales ante los problemas encontrados.
8. Tomar decisiones sobre situaciones que acontecen en la vida cotidiana del alumno.
9. Conocer y utilizar las herramientas tecnológicas para realizar cálculos diferentes.
10. Emplear las Tecnologías de la Información y Comunicación en su proceso de aprendizaje desde un análisis y búsqueda de información adecuados para facilitar la interacción.
11. Utilizar las propiedades de los números racionales en operaciones a través del cálculo adecuado en la resolución de problemas.
12. Manejar expresiones simbólicas en situaciones numéricas ante casos sencillos que incluyan patrones recursivos.
13. Conocer y emplear el lenguaje algebraico para expresar enunciados sacando la información relevante y transformándola.
14. Resolver problemas del día a día a través de planteamientos de ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
15. Identificar y describir las características de las figuras planas y los cuerpos geométricos elementales con sus configuraciones geométricas.

16. Conocer y utilizar el teorema de Tales, las fórmulas para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles obteniendo las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos tomados del contexto real.

17. Hacer cálculos de las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos conociendo la escala.

18. Identificar las transformaciones de una figura a otra mediante movimiento en el plano, analizando diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones de la naturaleza.

19. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y de poliedros.

20. Conocer el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

21. Identificar los elementos del estudio de las funciones y su representación gráfica.

22. Identificar y reconocer situaciones de relación funcional de la vida cotidiana que se describen mediante funciones cuadráticas y calcular sus parámetros y características.

23. Realizar informaciones estadísticas con datos a través de tablas y gráficas adecuadas con conclusiones que representan a la población estudiada.

24. Hacer cálculos sobre los parámetros de posición y dispersión de una variable estadística para resumir datos y hacer comparaciones.

25. Hacer un análisis sobre la información estadística que aparece en los medios de comunicación desde su representatividad y fiabilidad.

26. Hacer estimaciones a partir de posibles sucesos asociados a experimentos sencillos calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol.

En cuanto al Bloque de Álgebra se pueden distinguir los siguientes objetivos didácticos:

- Ser capaz de transformar enunciados relacionados con la vida cotidiana al lenguaje algebraico.
- Dominar las operaciones elementales con polinomios (suma, resta, multiplicación y división por un monomio).
- Descomponer en factores un polinomio mediante la Regla de Ruffini.
- Reconocer adecuadamente identidades notables.
- Ser capaz de resolver ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas e interpretar geométricamente la solución.

5.4 Contenidos

Los contenidos de la Unidad Didáctica de Ecuaciones se pueden consultar en la Orden de Educación 362/2015, de 4 de mayo del BOCyL (2015). A continuación se presenta una descripción pormenorizada de ellos:

- Identidades y ecuaciones. Solución de una ecuación.
- Ecuaciones equivalentes. Transformación de una ecuación en otra equivalente.
- Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita y coeficientes racionales.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita (método algebraico y gráfico). Ecuaciones de segundo grado completas e incompletas.
- Uso de la hoja de cálculo para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones de grado superior a dos. Uso de programas de representación gráfica para resolver ecuaciones.
- Resolución de problemas con ecuaciones de primer y segundo grado. Aplicación a la vida cotidiana y a otros campos del conocimiento.

Se han considerado los siguientes **contenidos mínimos**, que el estudiante debe aprender y manejar al finalizar la unidad didáctica:

- Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado completas e incompletas con una incógnita.
- Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana mediante ecuaciones de primer y segundo grado.

5.5 Metodología

La metodología que se utilizará en el desarrollo de esta unidad didáctica buscará la motivación del alumno, resaltando la importancia de la Matemática como herramienta para otras asignaturas así como para la futura actuación del individuo en la sociedad.

La actividad constructiva del alumno es el factor decisivo en la realización de los aprendizajes escolares. Ésta exige una actividad mental que le lleve a modificar y reelaborar sus esquemas de conocimiento, y a construir su propio aprendizaje. En este proceso de adquisición de nuevos contenidos se integrarán los conocimientos y experiencias previas del alumno, fomentando así su capacidad de relación y análisis para potenciar la significatividad de su aprendizaje. Asimismo se reforzará el razonamiento inductivo a través de la experimentación.

En este apartado se describe cómo se van a abordar los contenidos. Los pilares sobre los que descansa la metodología son:

- Al principio de la clase se tratará de **detectar las ideas previas** que poseen los alumnos sobre los contenidos a impartir. Además se realizará una introducción histórica para mostrar la necesidad de conocer los nuevos conceptos.

- **Clases magistrales**. El profesor expondrá y explicará los conceptos fundamentales atendiendo las posibles dudas que puedan surgir por parte de los alumnos.

- **Clases de Resolución de Problemas y Ejemplos**. Éstas se combinarán con las clases magistrales de tal forma que los conceptos abstractos sean clarificados y concretados con ejemplos y problemas sencillos que permitan al alumno asimilar y afianzar los conceptos, así como sus diversas variantes antes de proceder con el siguiente tema. En los ejemplos y problemas más sencillos se dejará a los alumnos algún tiempo para que puedan pensarlos, a continuación ponerlos en común y comentarlos, antes de su resolución por parte del profesor o los mismos alumnos de forma voluntaria. Tanto los ejemplos como los problemas ilustrativos tratarán de mostrar a los alumnos las aplicaciones de los conceptos y técnicas aplicables en la vida cotidiana.

- **Resolución de Problemas Individual**. Se preparará una colección de problemas que el alumno resolverá de forma individual como tarea para casa y que serán corregidos en clase. El día de su corrección se elegirá aleatoriamente a tantos alumnos como problemas haya que corregir y saldrán a la pizarra a exponer su resolución. En el caso de que no lo tuvieran resuelto o la resolución no fuera correcta el profesor explicará la resolución completa del ejercicio.

- **Resolución de Problemas en Grupos** para fomentar el trabajo cooperativo. Se realizarán dos actividades de este tipo al trimestre, que servirán para repasar algún concepto visto en clase previamente. El procedimiento a seguir en este tipo de actividad sería el siguiente:

Se divide la clase en grupos heterogéneos de 4 o 5 personas (por simplicidad aquí se considerarán de 5 personas) y a cada grupo se le proporcionará un ejercicio diferente que debe resolver.

A pesar de que todos los integrantes del grupo deben colaborar activamente en la resolución del ejercicio, en cada grupo de trabajo se establecerán diferentes encargados de ciertas tareas específicas:

1. El lector: leerá el enunciado en voz alta al resto del grupo tratando de explicar a los demás lo que se está pidiendo.
2. El pensador: se encargará de proponer el método más adecuado para la resolución del problema.
3. El cronometrador: será la persona responsable de controlar el tiempo de trabajo ya que sólo se dispone de 12 minutos para resolver el ejercicio.
4. El escritor: será el encargado de ir escribiendo en una hoja los pasos y operaciones seguidos durante la resolución.
5. El calculador: es la persona encargada de realizar las operaciones y revisar que los cálculos sean correctos.

Cabe mencionar que estas responsabilidades serán rotatorias para que todos los alumnos pasen por todos los puestos. Para el próximo día de realización de actividad se le sumará 1 a todos los puestos con la salvedad de que el que había sido el 5 anteriormente pasará a ser el 1, y así para días sucesivos. En el Anexo B se incluyen las etiquetas que se proporcionarían a cada grupo.

Una vez que todos los grupos hayan terminado de resolver los ejercicios, cada grupo deberá exponer en la pizarra ante los demás cómo ha resuelto el ejercicio. Para evitar el posible miedo escénico a la hora de exponer los resultados en la pizarra, de cada grupo saldrán dos integrantes y se seguirá el siguiente procedimiento:

1. El lector leerá desde su sitio el enunciado del problema que han resuelto en grupo para que lo escuche toda la clase.
2. La persona encargada de escribir la resolución del problema en la hoja deberá ir escribiendo los cálculos en la pizarra.
3. Al mismo tiempo la persona encargada de proponer el método más adecuado para la resolución del problema (el pensador) deberá ir comentando los pasos seguidos mientras su compañero los escribe en la pizarra.

El resto de grupos estarán atentos a la resolución del problema y el profesor deberá indicar y explicar cómo debería haber sido resuelto el problema en el caso de que los alumnos no hayan dado con la solución correcta.

5.6 Recursos

Los recursos necesarios para esta Unidad Didáctica son los siguientes:

- Libro de Texto de la Editorial ANAYA (Colera Jiménez et al., 2015).
- Pizarra analógica, o digital si la hubiere.
- Proyector.
- Lápiz, papel.
- Calculadora no programable.
- Software Geogebra.

5.7 Distribución temporal y secuenciación de los contenidos

Según el calendario escolar del curso 2019/2020 se tienen 36 semanas de clase. En el caso de Matemáticas son 4 horas lectivas a la semana, lo que da un total de 144 horas.

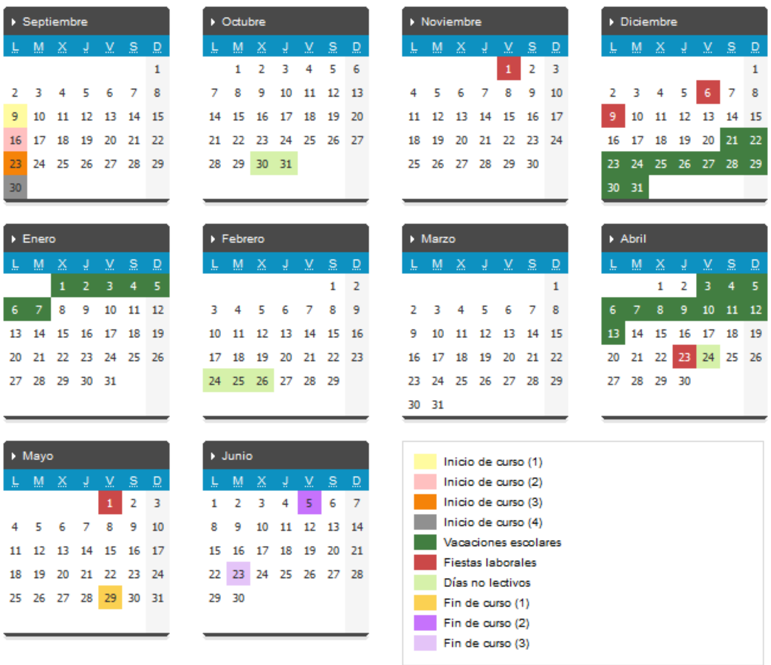


Fig. 5.1 Calendario escolar de la JCYL para el curso 2019-20

Fuente: *https://www.educa.jcyl.es/es/calendario-escolar*

De este número de horas totales hay que tener en cuenta que una hora se destina a la evaluación inicial, se realizan dos pruebas de evaluación por trimestre lo que contribuye con 6 horas, además de una prueba de recuperación por cada trimestre (3 horas). Quedarían un total de 134 horas disponibles pero se deben restar los posibles días festivos y la posibilidad de que algún día no se puede dar clase debido a alguna actividad extraescolar, con lo que finalmente se tienen **130 horas disponibles**.

Se han distribuido los contenidos del curso en 15 unidades didácticas teniendo en cuenta las relaciones entre ellas, tal y como se indica en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Secuenciación de contenidos para Matemáticas Académicas de 3º de E.S.O.

Bloque	Unidades Didácticas	Sesiones
Aritmética	1. Fracciones y decimales	9
	2. Potencias y raíces	9
	3. Problemas aritméticos	8
	4. Progresiones	9
Álgebra	5. El lenguaje algebraico	8
	6. Ecuaciones	9
	7. Sistemas de ecuaciones	7
Funciones	8. Funciones y gráficas	8
	9. Funciones lineales y cuadráticas	10
Geometría	10. Figuras planas	10
	11. Cuerpos geométricos	9
	12. Movimientos en el plano. Frisos y mosaicos	8
Estadística y Probabilidad	13. Tablas y gráficos estadísticos	9
	14. Parámetros estadísticos	8
	15. Azar y probabilidad	9

En estas sesiones no se incluyen las horas destinadas a las pruebas de evaluación, que ya han sido descontadas de las horas totales disponibles anteriormente.

Para el Bloque de Álgebra se realiza una secuenciación más detallada de cada una de las unidades didácticas correspondientes. Se han incluido en negrita los recursos manipulativos o juegos utilizados.

Tabla 5.2 Secuenciación detallada de la Unidad Didáctica 5: El lenguaje algebraico

Sesión 1	Expresión usando el lenguaje algebraico **Dominó de traducción al álgebra**
Sesión 2	Monomios: operaciones y jerarquía Polinomios: definición y elementos. Valor numérico de un polinomio.
Sesión 3	Operaciones elementales con polinomios
Sesión 4	Igualdades o Identidades notables Introducción a la factorización mediante **tabletas algebraicas**
Sesión 5	Factorización de polinomios de coeficientes enteros
Sesión 6	Cociente de polinomios División entre binomios de la forma $x-a$
Sesión 7	Regla de Ruffini Descomposición en factores de un polinomio. Distinción entre factor y raíz.
Sesión 8	Ajuste o desfase

Tabla 5.3 Secuenciación detallada de la Unidad Didáctica 6: Ecuaciones

Sesión 1	Identidades y ecuaciones. Solución de una ecuación. Ecuaciones equivalentes **Explorador de igualdades con una variable**
Sesión 2	Resolución de ecuaciones de primer grado **Pista de álgebra**
Sesión 3	Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado **Matgram de ecuaciones de primer grado**
Sesión 4	Resolución de problemas con ecuaciones de primer grado **Juego de subir al cero**
Sesión 5	Resolución de ecuaciones de segundo grado mediante **tabletas algebraicas**
Sesión 6	Ecuaciones de segundo grado completas e incompletas
Sesión 6	Resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado
Sesión 7	**Sopa polinómica**
Sesión 8	Actividad de trabajo cooperativo
Sesión 9	Ajuste o desfase

Tabla 5.4 Secuenciación detallada de la Unidad Didáctica 7: Sistemas de ecuaciones

Sesión 1	Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones. **Explorador de igualdades multivariable** Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes
Sesión 2	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales Métodos de sustitución, igualación y reducción
Sesión 3	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales **Sudomates de álgebra**
Sesión 4	Introducción a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con Geogebra
Sesión 5	**Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante Geogebra**
Sesión 6	Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales
Sesión 7	Ajuste, desfase o repaso de cara a la prueba de evaluación

5.8 Actividades de enseñanza y aprendizaje

Se puede establecer una jerarquía de tipo cognitivo para las tareas que puede realizar el estudiante en la asignatura de Matemáticas. Los cuatro niveles de demanda cognitiva de la clasificación de Smith and Stein (1998) se describen a continuación:

- **Nivel 1: Tareas y actividades de memorización**. Son aquellas en las que el alumno debe memorizar una definición o fórmula.
- **Nivel 2: Tareas y actividades de procedimientos sin conexión**. Están destinadas a afianzar un único concepto o procedimiento de forma aislada, así como a desarrollar destrezas en el cálculo matemático.
- **Nivel 3: Tareas y actividades de procedimientos con conexión**. En este tipo de tareas han de relacionarse diversos conceptos conocidos, y debidamente asimilados para la resolución del problema.
- **Nivel 4: Tareas y actividades de "hacer matemáticas"**. Constituyen las tareas más avanzadas. El procedimiento de resolución no es inmediato ni puede sistematizarse como los procedimientos del nivel anterior. Requieren cierto grado de creatividad y originalidad además de relacionar conceptos.

Se puede ver el resumen de los niveles de demanda cognitiva en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5 Clasificación de los niveles de demanda cognitiva (Smith and Stein, 1998)

Nivel 1	Tareas y actividades de memorización	Baja demanda cognitiva
Nivel 2	Tareas y actividades de procedimientos sin conexión	Baja demanda cognitiva
Nivel 3	Tareas y actividades de procedimientos con conexión	Alta demanda cognitiva
Nivel 4	Tareas y actividades de "hacer matemáticas"	Alta demanda cognitiva

5.8.1 Ejercicios para la actividad de trabajo cooperativo

Los ejercicios planteados sirven para repasar las ecuaciones con una única incógnita. En la mayoría de ellos la resolución se realiza mediante ecuaciones de primer grado, que ya han sido vistas previamente en 2º de la ESO aunque no con tanta profundidad. Además de requerir una traducción del enunciado al lenguaje algebraico, en algunos casos también es necesario relacionar varios conceptos geométricos como distancias o áreas, porcentajes o la medida del tiempo. Se ha procurado que estos problemas estén relacionados con la vida cotidiana, como marcan los estándares de PISA. Otro aspecto importante en el que hay que insistir a los alumnos es que, una vez que han llegado a una solución, comprueben que se cumple con los datos que proporciona el enunciado ya que es un método eficaz de detectar posibles fallos. En el Anexo B se incluye la resolución de estos ejercicios.

Ejercicio 1

Nos dirigimos a la pescadería y vemos que el pescado que nos gusta pesa 11 kg. A nosotros sólo nos interesa el cuerpo, pero se desconoce su peso. Sabiendo que la cola pesa la mitad que el cuerpo y la cabeza pesa 1,5 kg menos que el cuerpo. Calcular lo que tendríamos que pagar por el cuerpo si el precio de ese pescado es de 2 €/kg.

Nivel 3 de demanda cognitiva. Se tiene que traducir adecuadamente el enunciado al lenguaje algebraico para plantear la ecuación pero la resolución no implica excesivas complicaciones.

Ejercicio 2

Vamos por la calle, preguntamos la hora y un señor muy peculiar nos responde: "Las horas que quedan para que sean las 12 de la noche son igual a siete veces la quinta parte de las horas que han transcurrido hasta este momento." ¿Qué hora es?

Nivel 4 de demanda cognitiva. Plantear la ecuación a partir del enunciado del problema puede ser algo más complicado en principio ya que es necesario encontrar relación entre las horas transcurridas y las horas para que sean las 12 de la noche.

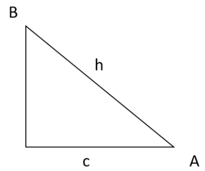
Ejercicio 3

Un maquinista conduce un tren de viajeros con 20 pasajeros por coche que sale de León hacia Madrid y realiza una parada en Valladolid donde le está esperando otro tren de 4 coches con 10 pasajeros en cada coche que también va a Madrid. Según el maquinista de este tren se ha estropeado la locomotora y van a ser remolcados hasta Madrid por el tren procedente de León. Si el nuevo tren formado por los dos trenes anteriores posee 3 veces el número de coches de viajeros que el que iba de León a Madrid y se han bajado 10 pasajeros en Valladolid ¿Cuántos pasajeros continúan en total en el nuevo tren que se dirige a Madrid?

Nivel 3 de demanda cognitiva. La parte más complicada es la comprensión y traducción al lenguaje algebraico del enunciado, que es necesario leer varias veces. La resolución final de la ecuación no tiene complicaciones.

Ejercicio 4

Para ir del punto A al punto B la gente suele cruzar por la calle en diagonal que une ambos puntos (ver Figura) para recorrer menos distancia (h=10 m). Sin embargo, esa calle ha sido cortada al paso por la realización de obras y ahora las personas tienen que recorrer el camino más largo. ¿Cuántos metros más se tienen que recorrer para llegar a B por el nuevo camino si c=8 m?



Nivel 3 de demanda cognitiva. Es un ejercicio en el que hay que plantear una ecuación incompleta de segundo grado usando conceptos geométricos, como el Teorema de Pitágoras.

Ejercicio 5

Ronaldo, el presidente del equipo de fútbol de Valladolid, quiere construir un estadio que tenga el doble de área que el actual. El actual estadio es un rectángulo con un perímetro de 300 metros y además se conoce que el largo es 1,5 veces el ancho. Calcular el área del nuevo estadio.

Nivel 4 de demanda cognitiva. La comprensión del enunciado no entraña dificultades pero sí que se requiere relacionar conceptos geométricos como área o perímetro para plantear las ecuaciones. Aunque se puede resolver sin recurrir a un sistema de dos ecuaciones lineales supone una introducción a este tipo de problemas.

Ejercicio 6

Una conocida empresa del automóvil tiene dos fábricas, una en Valladolid y otra en Palencia. De la fábrica de Valladolid salen al día 800 vehículos, de los que el 5% son *Twizy* y el resto *Captur*. En cambio, de la fábrica de Palencia únicamente salen 600 coches al día del modelo *Megane*. Independientemente del modelo, el 30% de los coches fabricados son blancos, el otro 30% son negros y el resto se lo reparten a partes iguales entre los colores rojo y azul. ¿Cuántos coches que no son *Captur* salen al día y además son azules?

Nivel 3 de demanda cognitiva. Es necesaria una lectura con detenimiento del enunciado y utilizar los conceptos aprendidos de porcentajes para plantear la ecuación, que se resuelve sin complicaciones.

5.9 Planes complementarios

El Departamento dirigirá la participación del centro en el concurso Canguro Matemático y La Olimpiada Matemática.

Asistencia a las conferencias impartidas por profesores del Grado en Matemáticas (UVa) sobre la importancia y necesidad de las Matemáticas en la sociedad actual.

Además de estas actividades programadas desde comienzo del curso, el Departamento promoverá la asistencia del alumnado a cualquier exposición, organizada en la ciudad, que tenga relación con el mundo matemático.

5.10 Evaluación

5.10.1 Criterios de evaluación

La evaluación es una parte fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje. Requiere obtener información de manera sistemática, que permita al profesor emitir un juicio valorativo sobre la marcha del proceso de aprendizaje. Evaluar la marcha global del alumno es imprescindible para orientarle en las decisiones que debe tomar sobre su futuro académico o laboral.

La evaluación debe extenderse no sólo a la adquisición de rutinas y hechos aislados, sino que debe recoger otros contenidos, como los actitudinales y los procedimentales. La información que proporciona la evaluación será tanto más útil en la medida en que sirva de instrumento para mejorar globalmente el proceso de enseñanza y aprendizaje. Estas consideraciones implican una evaluación continua y diferenciada para cada uno de los alumnos, pero también conducen a la realización de actividades específicas de evaluación.

Otro aspecto a considerar es la autoevaluación del alumno, que pretende que tome conciencia de sus avances y estancamientos y de la adecuación de su método de trabajo. La autoevaluación fomenta la autoestima y la independencia.

Para la evaluación se tendrán en consideración los criterios de evaluación que aparecen en la Orden de Educación 362/2015, de 4 de mayo del BOCyL (2015):

- Utilizar el lenguaje algebraico para expresar una propiedad o relación dada mediante un enunciado, extrayendo la información relevante y transformándola, y valorar su conveniencia.

- Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones sencillas de grado mayor que dos y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando, contrastando y comprobando los resultados obtenidos.

En cuanto a los estándares de aprendizaje evaluables de la Orden de Educación 362/2015, de 4 de mayo del BOCyL (2015) queda todo resumido en el siguiente punto:

- Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.

5.10.2 Criterios de calificación

- Al principio del curso se realizará una evaluación inicial que permitirá conocer la situación del alumno con respecto a los contenidos que se van abordar. Asimismo servirá para conocer su evolución a medida que vayamos avanzando en la programación.
- Se realizarán dos pruebas escritas en cada periodo de evaluación. Siempre y cuando la calificación obtenida en cada una de esas pruebas no sea inferior a un 3 (sobre 10), la media de estas dos pruebas supondrá el 60% de la nota final del trimestre.
- Sus contenidos estarán ajustados a los Criterios de Evaluación e involucrará tareas de todos los niveles de demanda cognitiva de acuerdo a la Tabla 5.6:

Tabla 5.6 Distribución de los niveles de demanda cognitiva en las pruebas de evaluación

Puntos	Nivel de Demanda Cognitiva	Descripción de la tarea
0-3	1 y 2	Definiciones y aplicaciones algorítmicas de ellas
3-9	3	Aplicaciones Algorítmicas y Actividades de conexión
9-10	4	Actividades de conexión y Elaboración Complejas

- En las pruebas escritas, se considerará por norma general (salvo especificado en el propio problema del examen) que el planteamiento del problema si está correcto y bien explicado supondrá el 40% del total del ejercicio, mientras que el desarrollo de la solución si está correcto y bien explicado se valorará con un 60% del ejercicio.
- En el caso de que un alumno durante una prueba objetiva escrita estuviera copiando o tratara de hacerlo, utilizando cualquiera de los métodos posibles (incluidos los teléfonos móviles) obtendría automáticamente la calificación de cero. El mismo trato en la calificación se le daría a cualquier compañero que se dejara copiar.
- La actitud, la participación y el trabajo en clase se reflejarán en la calificación del alumno con una valoración del 10%.
- La realización de las tareas para casa y su correcta resolución y explicación ante la clase constituirá el 15% de la nota final.
- El restante 15% de la calificación trimestral viene dada por la realización de un trabajo de investigación o la lectura de uno de los libros propuestos. En este último caso se comprobará que realmente se ha leído mediante un breve cuestionario.

- Los alumnos evaluados negativamente en la primera y segunda evaluación podrán recuperar las partes suspensas. Bien mediante una nueva prueba que se realizará a lo largo del curso, o bien mediante la inclusión, en pruebas posteriores de ejercicios relativos a los contenidos suspensos.
- Al finalizar la tercera evaluación se realizará una prueba global que sólo deberán realizar aquellos alumnos que no hayan superado la asignatura a lo largo del curso.
- En el mes de septiembre se realizará una única prueba de características similares a la de junio. Los alumnos que no hayan superado la asignatura en el mes de junio tendrán que realizar la totalidad del ejercicio, aunque a lo largo del curso pudieran tener alguna evaluación aprobada.

Tabla 5.7 Distribución de los porcentajes en la calificación trimestral de la asignatura

Pruebas escritas ($\geq 3/10$)	60%
Actitud, participación y trabajo en clase	10%
Tareas para casa	15%
Trabajo de investigación o Lectura de libros	15%

5.10.3 Actividades de recuperación de los alumnos con materias pendientes de cursos anteriores

El Departamento de Matemáticas establecerá unas horas de clase a la semana, siempre que haya disponibilidad del profesorado y de acuerdo con el alumnado suspenso, con el fin de que los alumnos que tengan pendiente la asignatura del curso anterior puedan trabajar, aprender y recuperar esa materia.

La jefatura de Departamento se encargará de establecer un sistema general de recuperación. En este caso, se realizarán exámenes de recuperación fuera del horario lectivo para cada una de las evaluaciones. Si el alumno no supera dichas pruebas, sólo podrá recuperar la asignatura superando una única prueba al final del curso.

5.11 Atención a la diversidad

Las medidas de atención a la diversidad están orientadas a responder a las necesidades educativas concretas del alumnado y a la adquisición de las competencias básicas y los objetivos previstos. No podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que les impida alcanzar dichos objetivos y la titulación correspondiente.

Destacan las adaptaciones del currículo para los alumnos con necesidades específicas, la escolarización de los alumnos que se incorporan tardíamente al sistema educativo y la escolarización del alumnado con altas capacidades intelectuales.

Metodológicamente y de una forma general, la atención a la diversidad se llevará a cabo de la siguiente forma:

- Se realizarán cuestiones de diagnóstico previo al inicio de cada unidad para determinar el nivel de conocimientos previos de los alumnos sobre los distintos contenidos.
- Se realizarán distintos tipos de actividades atendiendo a las diferentes capacidades del alumnado:
  - Actividades básicas que atienden a las nociones y habilidades que se consideran mínimas.
  - Actividades de refuerzo que inciden en nociones básicas para desarrollarlas hasta un nivel mínimo por medio de la repetición de procedimientos.
  - Actividades de ampliación o profundización, que responden al interés particular de algún alumno sobre algún aspecto determinado motivado por un mayor grado de facilidad de comprensión.
- Se intentará siempre que la comprensión del alumno de cada contenido sea suficiente para una mínima aplicación y se procurará que los contenidos nuevos que se enseñan conecten con los conocimientos previos.

Dentro de medidas específicas de atención a la diversidad siempre se estudiará cada caso por separado junto con el Departamento de Orientación. Se pueden considerar Adaptaciones Curriculares Significativas de los elementos del currículo dirigidas a alumnos con necesidades educativas especiales, que dependerán del diagnóstico que el alumno tenga (dislexia, TDAH, etc. . .). Algunas medidas que se podrían considerar en caso de que fuera necesario son:

- Situar al alumno con necesidades educativas especiales cerca del profesor, para que pueda estar más pendiente de él durante el desarrollo de las clases evitando que el alumno se distraiga.
- Dentro de las pruebas escritas, escribir con un tamaño de letra más grande las preguntas del examen.
- Relacionado con el punto anterior, separar los apartados claramente y dejar más espacio entre las preguntas.
- Se podrá considerar si necesita mayor tiempo para la realización de las pruebas.

5.11.1 Medidas que promueven el hábito de la lectura

Se fomentará la lectura de los ejercicios en voz alta para comprenderlos correctamente y poder utilizar así las estrategias adecuadas para su resolución.

Se utilizará la prensa como recurso didáctico con triple objetivo: motivación, desarrollo y aplicación. Las actividades irán relacionadas a promover hábitos de escucha, mejorar la comunicación oral y enriquecer las experiencias lectoras. Con ello se pretende ampliar significados matemáticos, aumentar la comprensión de problemas matemáticos con realidades de la vida cotidiana e informar del desarrollo científico-matemático. Se utilizarán tres tipos de actuaciones:

- Traer de casa artículos del periódico y comentarlos en clase.
- Lectura del periódico o revista con profundización. Esto quiere decir clasificar, buscar, describir fotografías y textos y sintetizar la información.
- Integrar en la programación diaria contenidos que aparecen en la prensa.

Se trabajará con las biografías de personajes relacionados con las Matemáticas y se impulsará la lectura de libros relacionados con las Matemáticas de su nivel.

5.12 Evaluación de la Unidad Didáctica

En este apartado el profesor realizará una autoevaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje teniendo en cuenta los resultados cosechados por los alumnos para mejorar la Unidad Didáctica de cara al siguiente curso académico. Algunas cuestiones que puede realizarse son:

1. ¿Cómo de bien se ajustan los contenidos a los objetivos generales de la asignatura y a los específicos del bloque en el que se encuadre la unidad didáctica?
2. ¿Son suficientemente ilustrativos los ejemplos expuestos durante las clases de teoría?
3. ¿Cómo de bien se ajustan los problemas propuestos a los contenidos y a los objetivos de la unidad didáctica?
4. ¿Ayudan los problemas realizados a los estudiantes de cara a preparar las pruebas de evaluación correspondientes?
5. ¿Contribuyen los problemas y explicaciones a un aprendizaje significativo y a largo plazo, más que a prepararlos para superar una prueba?
6. ¿Se ha contribuido al desarrollo de las competencias básicas?
7. ¿Son los estándares de aprendizaje evaluables consistentes con los objetivos generales y los específicos de la unidad didáctica?
8. ¿Cómo de bien se ajustan las pruebas de evaluación a los estándares de aprendizaje evaluables?
9. ¿Los alumnos que superan la prueba, incluso con la nota mínima de 5, dominan razonablemente los contenidos mínimos de la unidad didáctica?
10. ¿Es adecuado el uso que se hace de las TIC en la unidad didáctica?
11. ¿Se detallan algunas medidas específicas de atención a la diversidad dentro de la unidad didáctica?
12. ¿Ha sido adecuado el tiempo dedicado a la Unidad Didáctica?

Para tener en cuenta la opinión del estudiante, que supone una parte fundamental del proceso de enseñanza aprendizaje, una vez haya sido realizada la evaluación por parte del profesor de la asignatura, se le entregará una hoja con una serie de preguntas como pueden ser las que aparecen a continuación:

1. ¿Se promueve la participación en clase?
2. ¿La explicación de los contenidos ha sido lo suficientemente clara?
3. ¿La relación de estos contenidos con los de los otros bloques se ha reflejado claramente?
4. ¿Se ha dejado claro lo importante y lo que no lo es tanto?
5. ¿Se han utilizado estrategias metodológicas variadas?
6. ¿Los recursos prestados han sido los adecuados?
7. ¿Estaban lo suficientemente claros los criterios de evaluación?
8. ¿Los resultados son adecuados a la corrección y a las clases impartidas?
9. ¿Es el profesor objetivo?
10. ¿La cantidad de tareas para casa es adecuada?
11. ¿Ha conseguido que te guste más la materia?

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Reflexión acerca de las prácticas

La fase de prácticas ha constituido un período muy positivo en cuanto al aprendizaje de cara a ser un futuro docente. Pude conocer de primera mano cómo funciona un Departamento de Matemáticas y cómo se deben desarrollar las clases de varios niveles en un centro público, con una gran diversidad en su alumnado.

Durante este período tuve la posibilidad de impartir docencia en varios niveles de educación secundaria: Conocimiento de Matemáticas de 2º de la ESO y Matemáticas Académicas correspondientes a 3º y 4º de la ESO pero en ninguno de ellos pude poner en práctica la aplicación de materiales manipulativos en Álgebra.

En cambio, en 2º de Bachillerato de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales sí que pude impartir algunos conocimientos de Álgebra como determinantes, sus propiedades o la regla de Cramer. Sin embargo, debido a la eminente orientación del curso a la prueba de acceso a la universidad fue imposible introducir ningún elemento manipulativo en las explicaciones.

Además he podido comprobar multitud de aspectos necesarios para convertirse en un buen docente. De entre ellos se pueden destacar los siguientes:

- Dominar con soltura los contenidos que se deben transmitir a los estudiantes. Eso exige una preparación previa, especialmente si el docente se encuentra en los primeros años de su carrera profesional y carece de suficiente experiencia aunque siempre es necesario prepararse las clases con cierta antelación.

- Además de estar pendiente de realizar las explicaciones pertinentes, el docente debe estar constantemente pendiente de mantener el orden en el aula para que los estudiantes no se distraigan ni molesten al resto de los alumnos.

Combinar ambos aspectos me parece esencial para conseguir ser un buen profesor. Además, todo esto está sujeto a revisión y mejora continua, ya que tiene que haber una realimentación profesor-alumno, de manera que la temporalización de la unidad didáctica debe ser lo suficientemente flexible como para contemplar sesiones de repaso o posibles retrasos para que los estudiantes asimilen ciertos conceptos más complejos.

Por último, cabe mencionar que he podido constatar de primera mano cómo la labor del docente está condicionada por una gran cantidad de imprevistos, ya sean actividades extraescolares, huelgas u otras actividades. Por eso debe ser capaz de adaptarse a todo tipo de inconvenientes, como el caso de la pandemia originada por el COVID-19, y hacer lo posible para que sus estudiantes puedan adquirir los conocimientos necesarios también de forma telemática.

6.2 Conclusiones del trabajo

Con este Trabajo Fin de Máster se ha tratado de mostrar las ventajas que puede tener para el alumnado de educación secundaria la utilización de recursos manipulativos a la hora de aprender Matemáticas.

Estos recursos manipulativos pueden ser físicos, que tienen la ventaja de que se pueden tocar, o virtuales, que se pueden utilizar en cualquier momento o lugar.

Además, en los capítulos 3 y 4, se han descrito los principales materiales manipulativos y juegos que se pueden aplicar en un aula de educación secundaria para enseñar conceptos de Álgebra.

Por último, se ha realizado una Unidad Didáctica del Bloque de Álgebra para el curso de Matemáticas Académicas de 3º de la ESO, en la que se promueve la aplicación de algunos de los recursos manipulativos y juegos que se han descrito en capítulos anteriores. Se ha tratado de incluir un alto grado de flexibilidad en esta Unidad Didáctica, pero debido a la limitación horaria y la extensión del temario, las sesiones se han tenido que ajustar y se ha reducido el número de materiales manipulativos o juegos previstos para la realización en el aula. Sin embargo, se ha considerado conveniente incluirlos en los capítulos anteriores para conocimiento del profesorado.

Por las razones expuestas en el apartado anterior, las actividades expuestas en este Trabajo Fin de Máster no se han podido poner en práctica pero se ha pretendido realizar un acercamiento a la futura labor docente.

Referencias

Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, (189):12–16.

Ball, D. L. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator: the professional journal of the American Federation of Teachers*, 16(2).

Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don’t come with guarantees. *The arithmetic teacher*, 37(2):4.

Blosser, P. E. (1985). Research related to instructional materials for science. eric/smeac science education digest no. 2.

BOCyL (8 de mayo de 2015). *Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.*

BOE (3 de enero de 2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.*

Bruner, J. S. (1960). On learning mathematics. *The Mathematics Teacher*, 53(8):610–619.

Colera Jiménez, J., Oliveira González, M. J., Gaztelu Albero, I., and Colera Cañas, R. (2015). *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO*. Grupo ANAYA.

Crosswhite, F. J., Dossey, J. A., and Frye, S. M. (1989). NCTM standards for school mathematics: Visions for implementation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5):513.

Cuadrado, J. A. (2020). Matemáticas manipulativas: regletas virtuales. Recuperado de: `http://regletas.joseantoniocuadrado.com/`.

Fletcher, J. (2010). Developing algebraic thinking through group discussion. *Mathematics Connection*, 7(1).

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A., and Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Furner, J. and Worrell, N. (2017). The Importance of Using Manipulatives in Teaching Math Today. *Transformations - The Journal of Inclusive Scholarship and Pedagogy*, 3(1):2.

García Azcárate, A. (2020). Blog de Ana García Azcárate sobre juegos y matemáticas. Recuperado de: `https://anagarciaazcarate.wordpress.com/`.

Grupo-Alquerque (2001). Sopa polinómica. *Revista SUMA*, (36):109–111.

Heddens, J. W. (1997). Improving mathematics teaching by using manipulatives. *Kent State University*.

Jiménez, S., G. D. S. D. (2011). Taller: uso de las tabletas algebraicas como alternativa de enseñanza del proceso de factorización. *Memorias 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, (2), 574-584*.

Johnson, D., Johnson, R., and Smith, K. (1998). Active learning: Cooperation in the college classroom. *The Annual Report of Educational Psychology in Japan*, 47.

Kagan, S. and Kagan, M. (1994). The structural approach. *S. Sharan, Handbook of Cooperative Learning Methods, Westport*.

Larbi, E. and Mavis, O. (2016). The Use of Manipulatives in Mathematics Education. *Journal of Education and Practice*, 7(36):53–61.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? how teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2):175–197.

Moyer, P. S. and Jones, M. G. (2004). Controlling choice: Teachers, students, and manipulatives in mathematics classrooms. *School Science and Mathematics*, 104(1):16–31.

Munger, D. (2007). Children learn and retain math better using manipulatives. *ScienceBlogs*.

Murcia, J. Á. (2020). Tocamates: el blog sobre matemáticas y creatividad. Recuperado de: `http://www.tocamates.com/category/regletas/`.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series. National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics.

Panitz, T. (1997). Collaborative versus Cooperative Learning: A Comparison of the Two Concepts Which Will Help Us Understand the Underlying Nature of Interactive Learning. *Cooperative Learning and College Teaching*, 8(2):13.

Piaget, J. (1952). The origins of intelligence in children. *Journal of Consulting Psychology*, 17(6):467–467.

Rakes, C. R., Valentine, J. C., McGatha, M. B., and Ronau, R. N. (2010). Methods of instructional improvement in algebra. *Review of Educational Research*, 80(3):372–400.

Resnick, L. B. and Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction*. Routledge.

Rodríguez Barreiro, L. and Fernández Manzanal, R. (2007). TIC y aprendizaje cooperativo. *Revista Padres y Maestros / Journal of Parents and Teachers*, (308):29–31.

Smith, M. S. and Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5):344–350.

Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5):498.

Suárez-Guerrero, C. (2010). Aprendizaje cooperativo e interacción asíncronica textual en contextos educativos virtuales. *Pixel-Bit: Revista de medios y educación, ISSN 1133-8482, Nº. 36, 2010, pags. 53-67*.

Thornton, G. J. (1995). Algebra tiles and learning styles. *Simon Fraser University - Institutional Repository*.

Universidad de Colorado Boulder (2020). Explorador virtual de igualdades multivariable. Recuperado de: `https://phet.colorado.edu/es/simulation/equality-explorer-two-variables`.

Universidad de Colorado en Boulder (2020). Balanza virtual de ecuaciones. Recuperado de: `https://phet.colorado.edu/es/simulation/equality-explorer`.

Vázquez de la Torre, J. M. (2019). Matesymas: página web creada por José María Vázquez de la Torre Prieto y Raimundo Alba. Recuperado de: `https://www.matesymas.es/materiales-manipulativos-3a-entrega-algebra/`.

Zañartu Correa, L. M. (2000). Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de Diálogo Interpersonal y en Red. *Revista digital en Educación y Nuevas Tecnologías*.

Anexo A

Material para los juegos algebraicos

A.1 Fichas del Dominó de traducción de álgebra

Fig. A.1 Fichas del dominó de traducción de álgebra
Fuente: *https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2020/01/11/*

A.2 Resolución del Sudomates de álgebra

En la Figura A.2 se presenta el Sudomates a resolver.

c		m				h			19
	f		4			8	e		10
1			m					3	
			k		g	m	c		23
g		9		p	8			1	11
4			1				h	f	14
	g				m				13
	a			e			k	h	11
k		4	c		f	a			22
17	19		16	5	22	14	16	14	

Fig. A.2 Sudomates de álgebra
Fuente: *https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2018/11/06/*

En la primera fase se deben plantear las siguientes ecuaciones empezando por las filas y siguiendo con las columnas:

$$c+m+h=19 \tag{A.1}$$

$$f+e=10 \tag{A.2}$$

$$k+g+m+c=23 \tag{A.3}$$

$$g+p=11 \tag{A.4}$$

$$h+f=14 \tag{A.5}$$

$$g+m=13 \tag{A.6}$$

$$a+e+k+h=11 \tag{A.7}$$

$$k+c+f+a=22 \tag{A.8}$$

$$c+g+k=17 \tag{A.9}$$

$$f+g+a=19 \tag{A.10}$$

$$m+k+c=16 \tag{A.11}$$

$$p+e=5 \tag{A.12}$$

$$g+m+f=22 \tag{A.13}$$

$$h+m+a=14 \tag{A.14}$$

$$e+c+h+k=16 \tag{A.15}$$

$$f+h=14 \tag{A.16}$$

Se puede comenzar utilizando las ecuaciones 3 y 11 para obtener el valor de g:

$\left\{ \begin{array}{c} k+g+m+c=23 \\ k+m+c=16 \end{array} \right\} \rightarrow g=7$

$g+m=13 \rightarrow m=6$

$g+m+f=22 \rightarrow f=9$

$f+e=10 \rightarrow e=1$

$p+e=5 \rightarrow p=4$

$h+f=14 \rightarrow h=5$

$c+m+h=19 \rightarrow c=8$

$k+g+m+c=23 \rightarrow k=2$

$f+g+a=19 \rightarrow a=3$

Después de obtener todos los valores de las incógnitas el sudoku quedaría como en la Figura A.3(a).

Finalmente, después de realizar la segunda fase, se muestra en la Figura A.3(b) la solución final.

8		6				5		
	9		4			8	1	
1			6					3
			2		7	6	8	
7		9		4	8			1
4			1				5	9
	7				6			
	3			1			2	5
2		4	8		9	3		

(a) Después de la primera fase

8	4	6	9	3	1	5	7	2
5	9	3	4	7	2	8	1	6
1	2	7	6	8	5	4	9	3
3	5	1	2	9	7	6	8	4
7	6	9	5	4	8	2	3	1
4	8	2	1	6	3	7	5	9
9	7	5	3	2	6	1	4	8
6	3	8	7	1	4	9	2	5
2	1	4	8	5	9	3	6	7

(b) Solución final

Fig. A.3 Solución del Sudomates de álgebra

Fuente: *https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2018/11/06/*

Anexo B

Material para la actividad de trabajo cooperativo

B.1 Etiquetas para los grupos

En el anverso de todas las etiquetas se dispone de un espacio para que el estudiante escriba su nombre. En el reverso de las etiquetas aparecerá el grupo de pertenencia y la función asignada para el trabajo cooperativo. Se han considerado 6 grupos de 5 personas por grupo.

Fig. B.1 Etiquetas para los grupos de trabajo cooperativo

B.2 Resolución de los ejercicios

B.2.1 Ejercicio 1

Nos dirigimos a la pescadería y vemos que el pescado que nos gusta pesa 11 kg. A nosotros sólo nos interesa el cuerpo, pero se desconoce su peso. Sabiendo que la cola pesa la mitad que el cuerpo y la cabeza pesa 1,5 kg menos que el cuerpo. Calcular lo que tendríamos que pagar por el cuerpo si el precio de ese pescado es de 2 €/kg.

El primer paso consiste en comprender adecuadamente el enunciado del problema. Hacer un pequeño esquema como el de la Figura B.2 puede ayudar.

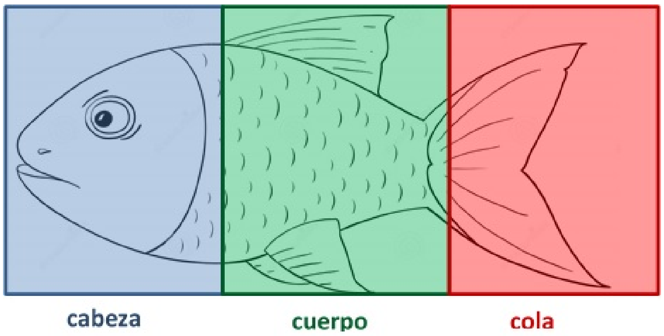


Fig. B.2 Esquema para el ejercicio 1

Se pide el precio del cuerpo, pero primero se debe calcular cuánto pesa el cuerpo del pescado.

Se plantea la ecuación de la masa del pescado:

$m_{total} = m_{cabeza} + m_{cuerpo} + m_{cola}$

Como la masa del cuerpo es lo que se desconoce, se llamará x, y se pone todo en función de x para tener una única incógnita:

$11 = (x - 1,5) + x + \frac{x}{2}$

Se procede a resolver la ecuación de primer grado planteada anteriormente. Como hay un denominador que es 2, se puede multiplicar todo por 2 para eliminarlo:

$22 = 2(x - 1,5) + 2x + x$

Se opera y se despeja la x:

$22 = 2x - 3 + 2x + x$
$22 + 3 = 5x$
$x = \frac{25}{5} = 5$ kg

Ya se conoce lo que pesa el cuerpo, así que ahora se multiplica por el precio de cada kilogramo:

$Precio_{cuerpo} = 5$ kg $\cdot 2$ €/kg $= 10$ €

B.2.2 Ejercicio 2

Vamos por la calle, preguntamos la hora y un señor muy peculiar nos responde: “Las horas que quedan para que sean las 12 de la noche son igual a siete veces la quinta parte de las horas que han transcurrido hasta este momento.” ¿Qué hora es?

El primer paso consiste en comprender adecuadamente el enunciado del problema y tomar adecuadamente los datos.

Se llamará x a las horas que quedan para que sean las 12 de la noche.

Se plantea la ecuación teniendo en cuenta lo que dice el enunciado y sabiendo que las horas que han transcurrido hasta ese momento son $(24-x)$ ya que el día tiene 24 horas.

$x = 7 \cdot \frac{1}{5} \cdot (24-x)$

Se resuelve la ecuación planteada anteriormente.

$5x = 7 \cdot 24 - 7x$

$12x = 7 \cdot 24$

$x = \frac{7 \cdot 24}{12} = 7 \cdot 2 = 14$ horas

Como las horas que quedan para que sean las 12 de la noche son 14, las que llevamos de día serán:

$24 - x = 24 - 14 = 10$ horas

Son las 10 de la mañana.

Ejercicio 3

Un maquinista conduce un tren de viajeros con 20 pasajeros por coche que sale de León hacia Madrid y realiza una parada en Valladolid donde le está esperando otro tren de 4 coches con 10 pasajeros en cada coche que también va a Madrid. Según el maquinista de este tren se ha estropeado la locomotora y van a ser remolcados hasta Madrid por el tren procedente de León. Si el nuevo tren formado por los dos trenes anteriores posee 3 veces el número de coches de viajeros que el que iba de León a Madrid y se han bajado 10 pasajeros en Valladolid ¿Cuántos pasajeros continúan en total en el nuevo tren que se dirige a Madrid?

El primer paso consiste en comprender adecuadamente el enunciado del problema. Hacer un esquema ayuda a ponerse en situación.

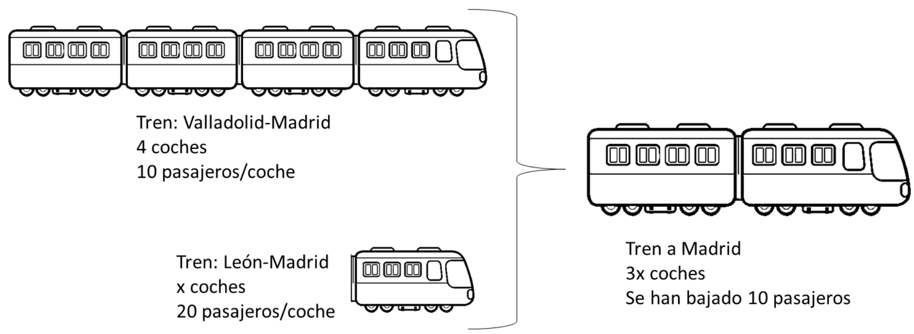


Fig. B.3 Esquema para el ejercicio 3

Lo primero que se debe calcular es el número de coches del tren que va desde León hasta Madrid. A esta incógnita la llamaremos x.

Se plantea la ecuación de los coches del nuevo tren teniendo en cuenta que se ha llamado x al número de coches del tren de León a Madrid.

Coches nuevo tren = coches tren León-Madrid + coches tren Valladolid-Madrid

$3x = x + 4$

Se resuelve la ecuación planteada anteriormente.

$3x - x = 4$

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2} = 2$ coches

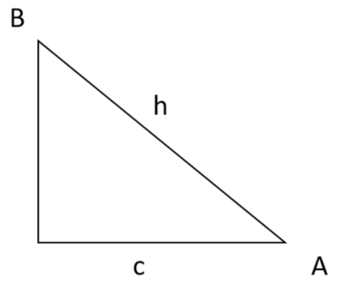
Una vez que se sabe el número de coches, se plantea la misma expresión pero con los pasajeros. Hay que sumar los pasajeros que van desde León, los del tren estropeado desde Valladolid y restar los que se han bajado en Valladolid:

Pasajeros= 2 coches·20 pasajeros/coche $+$ 4 coches·10 pasajeros/coche $-$ 10 pasajeros

Pasajeros= $2 \cdot 20 + 4 \cdot 10 - 10 = 40 + 40 - 10 = 70$ pasajeros

Ejercicio 4

Para ir del punto A al punto B la gente suele cruzar por la calle en diagonal que une ambos puntos (ver Figura) para recorrer menos distancia (h=10 m). Sin embargo, esa calle ha sido cortada al paso por la realización de obras y ahora las personas tienen que recorrer el camino más largo. ¿Cuántos metros más se tienen que recorrer para llegar a B por el nuevo camino si c=8 m?



El primer paso consiste en identificar que se trata de un triángulo rectángulo y se conocen uno de sus catetos y la hipotenusa, así que este problema requiere la aplicación del Teorema de Pitágoras.

Se llamará x a la longitud del lado desconocido del rectángulo por lo que se tiene que:

$h^2 = c^2 + x^2$

Se despeja la incógnita x de la ecuación anterior:

$x^2 = h^2 - c^2$

$x = \sqrt{h^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$ m

La distancia que se deberá recorrer actualmente para ir de A a B es:

$x + c = 6 + 8 = 14$ m

Si se resta la distancia del camino más corto, que era el usado anteriormente queda la distancia que se recorre de más al cortar la calle:

$(x+c) - h = (6+8) - 10 = 4$ m

Por lo tanto **se recorren 4 metros más por el nuevo camino**.

Ejercicio 5

Ronaldo, el presidente del equipo de fútbol de Valladolid, quiere construir un estadio que tenga el doble de área que el actual. El actual estadio es un rectángulo con un perímetro de 300 metros y además se conoce que el largo es 1,5 veces el ancho. Calcular el área del nuevo estadio.

El primer paso consiste en hacer un pequeño dibujo para ayudar a tomar los datos.

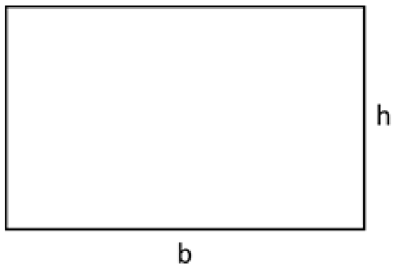


Fig. B.4 Esquema para el ejercicio 5

El perímetro del estadio viejo es de 300 metros y la base es 1,5 veces la altura

$b = 1,5h$

Se necesita calcular el área del viejo estadio para después calcular la del nuevo.

El primer paso es calcular la base y la altura para obtener el área.

El perímetro de un rectángulo es la suma de todos sus lados:

$P = b+b+h+h = 2b+2h = 300$ m

Se tiene que el largo b es 1,5 veces el ancho h:

$b = 1,5h$

Por lo que ya se puede despejar de P el valor de h:

$P = 2b+2h = 2\cdot 1,5h+2h = 3h+2h = 5h = 300$ m
$h = \frac{300}{5} = 60$ m

Una vez que se conoce h, se obtiene también la base b:

$b = 1,5h = 1,5\cdot 60 = 90$ m

Ya se puede obtener el área del antiguo estadio como:

$A_{estadioviejo} = b\cdot h = 90\cdot 60 = 5400\ m^2$

Como se sabe que la superficie del nuevo estadio es el doble:

$A_{estadionuevo} = 2\cdot A_{estadioviejo} = 2\cdot 5400 = 10800\ m^2$

Ejercicio 6

Una conocida empresa del automóvil tiene dos fábricas, una en Valladolid y otra en Palencia. De la fábrica de Valladolid salen al día 800 vehículos, de los que el 5% son *Twizy* y el resto *Captur*. En cambio, de la fábrica de Palencia únicamente salen 600 coches al día del modelo *Megane*. Independientemente del modelo, el 30% de los coches fabricados son blancos, el otro 30% son negros y el resto se lo reparten a partes iguales entre los colores rojo y azul. ¿Cuántos coches que no son *Captur* salen al día y además son azules?

En este problema es esencial tener un mapa conceptual como el de la Figura B.5 para tomar los datos.

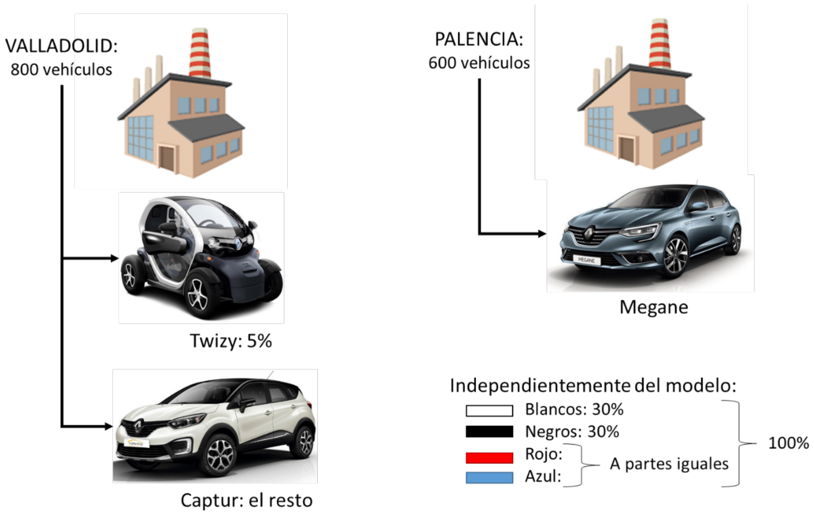


Fig. B.5 Esquema para el ejercicio 6

La manera más sencilla de resolverlo consiste en calcular primero todos los coches fabricados al día que no son Captur:

coches Twizy$= 5100 \cdot 800 = 40$ coches

coches Megane$=$ 600 coches

coches NO Captur = Twizy + Megane $= 40 + 600 = 640$ coches

El objetivo es calcular el número de coches azules. Se plantea la ecuación de porcentajes de los colores de los coches para calcular el porcentaje de coches azules, x, respecto al total de coches fabricados:

$100\% = 30\% + 30\% + x + x$

$100 - 60 = 2x \rightarrow x = \frac{40}{2} = 20\%$

Como este porcentaje es independiente del coche fabricado se puede aplicar directamente:

coches azules NO Captur$= 20100 \cdot 640 =$**128 coches**