Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Dpto. Matemática Aplicada

Didáctica de la geometría plana en la Enseñanza Secundaria Para Adultos a Distancia. Líneas de tiempo.

Trabajo Final del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumna: Beatriz Alonso Román
Tutora: Mª Encarnación Reyes Iglesias

Valladolid, Julio 2020

Yo, Beatriz Alonso Román, como alumna del Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato, en la especialidad de Matemáticas, y bajo la tutela de Mª Encarnación Reyes Iglesias, concluyo la presente formación con el siguiente Trabajo Fin de Máster, titulado: ***"Didáctica de la geometría plana en la Enseñanza Secundaria Para Adultos a Distancia. Líneas de tiempo.".***

Índice

1. Introducción y declaración de intenciones.

La finalidad por la que se realiza este trabajo es desarrollar una propuesta didáctica para la enseñanza del tema ***Geometría plana***, que forma parte del módulo III de enseñanza para personas adultas a distancia (ESPAD) del ámbito científico - tecnológico (este nivel equivale al curso de 3º de ESO). Se ha escogido este curso debido a que mis prácticas se desarrollaron en la modalidad de ESPAD y como consecuencia, me surgió la inquietud de conocer de manera más detallada algunas tareas que realiza el profesorado en su día a día. Otras acciones que cualquier profesor debería realizar con el objetivo de mejorar su enseñanza y el posterior aprendizaje de los alumnos serían las siguientes: la preparación de materiales y recursos varios, el análisis del alumnado para realizar una adaptación de la didáctica a sus necesidades o la creación de actividades innovadoras que mejoren la motivación.

Adicionalmente, se busca desarrollar la propuesta didáctica desde un punto de vista histórico, realizando un desarrollo de la *Geometría Plana* a lo largo de la historia. Por tanto, el trabajo de fin de Máster se estructura en cuatro bloques:

- En el primer bloque se detalla la *Legislación Educacional Vigente* en la que se enmarca la unidad didáctica que se va a desarrollar a lo largo del documento. Este punto se realiza debido a que es imprescindible conocer el marco legislativo para que el desarrollo de la docencia sea coherente con la Normativa.

- En segundo lugar, se realiza un *Análisis Didáctico* del bloque de *Geometría Plana.* En este bloque se hace un estudio de la evolución histórica (especialmente importante porque con el estudio de este tema se persigue motivar a los alumnos), de las capacidades cognitivas de los alumnos y, además, se realiza un análisis de una posible instrucción docente.

- En el tercer punto, se realiza un desarrollo de una Unidad Didáctica teniendo en cuenta el estudio realizado previamente que será esencial para el desarrollo de la unidad.

- Por último, se realiza un estudio del grado en qué se satisface la formación de los futuros docentes con este Máster, así como una reflexión sobre el cumplimiento de los objetivos fijados en este Máster y sobre el desarrollo de las competencias que deben alcanzar los alumnos.

2. Marco normativo. Fundamentación de la unidad didáctica.

2.1. Educación para adultos. Preámbulo. Educación Secundaria Para Adultos a Distancia (ESPAD).

2.1.1 Preámbulo.

En los últimos tiempos se está prestando más atención a la educación de adultos. Paulatinamente van apareciendo investigaciones, artículos, estudios, etc., en el marco de la enseñanza y el aprendizaje de personas adultas.

Malcolm Knowles (1913-1997), teórico estadounidense de la educación de adultos, popularizó y desarrolló el concepto de Andragogy (Andragogía). El primero en utilizar este término fue el alemán Alexander Kapp en 1833, haciendo alusión a la escuela de Platón.

Andragogía se definió como el conjunto de métodos y principios de enseñanza, orientados a facilitar el aprendizaje significativo de los adultos. La necesidad por la que surge esta nueva modalidad de pedagogía se debe a que los educadores son conscientes de que los adultos no aprenden al mismo ritmo, ni del mismo modo que los niños y los adolescentes y, por tanto, necesitan unas metodologías específicas.

Las principales características de la andragogía son:

- La consideración de las experiencias del alumno en el aprendizaje como un recurso valioso.
- El aprendizaje está orientado hacia tareas y problemas y no hacia cada una de las asignaturas.
- La motivación de las personas adultas para aprender suele estar basada en incentivos internos y curiosidad propia.
- Esta ciencia está enormemente orientada al proceso de aprendizaje del adulto.

Además, la andragogía está basada en tres principios principales:

- Participación del estudiante. Se busca la interacción del alumno tratando de intercambiar experiencias que enriquezcan el aprendizaje.

- Horizontalidad. Este principio se basa en la igualdad de adultez y experiencia que existe entre el profesor y el alumno.
- Flexibilidad. Como es lógico las personas adultas tienen una carga mayor de experiencias previas que los niños o los adolescentes, además de cargas familiares o económicas, por tanto, es necesario diseñar un aprendizaje que esté en sintonía con las aptitudes y las destrezas del alumno.

En conclusión, esta disciplina vinculada a la Pedagogía y a la Psicología, especializada en la educación de personas adultas, se fundamenta en alcanzar el aprendizaje más provechoso por parte del alumno, que se siente motivado por enfrentarse a nuevos retos, además de adquirir nuevas destrezas para mejorar profesionalmente su futuro.

2.1.2. Educación Secundaria Para Adultos a Distancia (ESPAD).

La Enseñanza Secundaria para Adultos a Distancia (ESPAD) es una modalidad de enseñanza secundaria enfocada a que los adultos también puedan obtener el título de ESO sin la necesidad de una presencialidad obligatoria.

Esta modalidad está preparada para tener una duración de dos años, divididos en cuatro módulos de un cuatrimestre de duración cada uno (dos en el primer curso y dos en el segundo curso). Cada módulo equivale a cada uno de los cuatro cursos de la ESO, es decir:

Tabla 1: Relación módulos y cursos.

Nivel I	Módulo I	1º ESO
	Módulo II	2º ESO
Nivel II	Módulo III	3º ESO
	Módulo IV	4º ESO

A su vez, cada módulo está dividido en tres ámbitos:

- Ámbito de comunicación (Lengua castellana y Literatura. Primera Lengua extranjera).

- Ámbito científico-tecnológico (Matemáticas. Tecnologías. Ciencias de la Naturaleza. Aspectos relacionados con la salud y el medio ambiente en Educación Física).

- Ámbito social (Ciencias Sociales. Educación para la Ciudadanía. Educación Ético-cívica).

Además, el nivel II cuenta con algunos módulos optativos, como Ampliación de Biología o Geología y Educación Artística I (módulo III) y Ampliación de Tecnología o Ampliación de Física y Química (módulo IV).

No obstante, de acuerdo con el Decreto 4/2017, de 23 de marzo, donde se establece el currículo específico de la enseñanza secundaria para personas adultas en la Comunidad de Castilla y León, cada centro podrá decidir la duración de los módulos en cursos académicos enteros en lugar de cuatrimestrales.

La unidad de Geometría Plana se establece en la parte de Matemáticas del ámbito científico - tecnológico del módulo III de ESPAD. Analizando la Normativa del Decreto 4/2017, de 23 de marzo, se extraen de ella todas las referencias que hacen alusión al tema en cuestión.

2.2 Objetivos básicos y específicos en 3º de ESPAD.

Se definen a continuación los objetivos básicos que se han de conseguir de manera general en la enseñanza secundaria para personas adultas, de acuerdo con el artículo 11 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato:

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, *contribuyendo a su conservación y mejora.*

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Por otro lado, los objetivos didácticos establecidos por el BOCYL para el Bloque de Geometría plana para el módulo III de ESPAD son los siguientes:

1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas.

2. Utilizar el teorema de Tales para el cálculo de medidas indirectas de elementos inaccesibles, objetos de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o para la resolución de problemas geométricos.

3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.

4. Utilizar el teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes, áreas y resolución de problemas geométricos.

5. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

2.3. Contenidos didácticos de la unidad Geometría, en 3º de ESPAD.

Se detallan a continuación los contenidos mínimos de cada uno de los cuatro módulos para la unidad de Geometría de ESPAD que establece la ley:

Módulo I:

- *Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad.*

- *Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.*

- *Clasificación de triángulos. Rectas y puntos notables del triángulo. Clasificación de cuadriláteros. Propiedades y relaciones.*

- *Circunferencia y círculo.*

- *Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas elementales. La superficie y sus unidades de medida. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.*

Módulo II:

- *Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.*

- *Circunferencia, círculo y sectores circulares.*

- *Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.*

- *Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.*

- *Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.*

- *Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes en el mundo físico.*

- *Revisión de las unidades del sistema métrico decimal.*

Módulo III:

- *Geometría del plano: perímetro y área de figuras elementales.*

- *Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas.*

- *Aplicación a la resolución de problemas en contextos reales.*

- *Teorema de Pitágoras. Aplicación a la resolución de problemas.*

- *El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.*

Módulo IV:

- *Teoremas de Tales y Pitágoras.*

- *Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes.*

- *Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.*

- *Resolución de problemas geométricos en el mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de diferentes cuerpos. Prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.*

- *Visualización mediante programas informáticos de geometría dinámica adecuados, la representación de cuerpos geométricos, comprobando gráficamente sus propiedades geométricas.*

Aunque este trabajo se centra fundamentalmente en los contenidos referentes al módulo III, es necesario citar los contenidos que se incluyen en el resto de los módulos debido a que el grupo de alumnos puede ser muy diverso y es fundamental tener en cuenta, tanto los contenidos vistos anteriormente, como los que se verán en el futuro. En este trabajo se han considerado los contenidos del módulo IV a la hora de definir las actividades de ampliación.

3. Análisis didáctico.

A lo largo de este trabajo lo que se pretende es llevar a cabo una propuesta didáctica para la enseñanza de la *Geometría Plana*. Para cumplir el objetivo de adecuar la docencia a la búsqueda de un aprendizaje relevante para el alumno, se llevará a cabo el siguiente análisis previo:

- *El contenido matemático e histórico del tema.* Obviamente el docente debe dominar con profundidad y ampliados los contenidos que va a explicar a los alumnos. Adicionalmente, es importante que amplíe sus conocimientos incluyendo temas históricos para que los alumnos entiendan la utilidad de las matemáticas en la resolución de problemas prácticos desde la Antigüedad hasta nuestros días. Los conocimientos históricos se pueden utilizar como recurso para motivar al alumnado y por eso, se trata de un punto esencial en el desarrollo de este trabajo.

- *La capacidad cognitiva de los alumnos.* Acorde a las capacidades de los alumnos se considerarán algunas tipologías de enseñanza para lograr un aprendizaje de calidad. Para llevar a cabo la mejor docencia posible se intentará incidir en las posibles dificultades que presentan los alumnos para solventarlas.

- *La instrucción que se realizará.* Se buscará por parte del docente que el aprendizaje sea significativo, y con este objetivo se utilizarán diferentes actividades que ayuden a que el alumno asimile los conceptos de la manera más provechosa.

3.1. Análisis de contenido.

En este punto, se realiza un estudio de manera exhaustiva del tema que se presenta en la propuesta didáctica. En primer lugar, se lleva a cabo el estudio de la evolución histórica de la Geometría plana, para posteriormente proseguir con una explicación matemática rigurosa de algunos contenidos.

3.1.1. Perspectiva histórica. La geometría plana: líneas de tiempo.

A continuación, se presenta una línea de tiempo que recoge la evolución histórica de la geometría plana.

En historia en general, y en historia de las matemáticas en particular, los cambios de periodos no están exactamente definidos.

GEOMETRÍA PLANA. ANTIGUAS CIVILIZACIONES

Aproximadamente 3000 a.C.

- ***MESOPOTAMIA***

  - La geometría se centra en problemas de cultivo fundamentalmente.
  - Realizaron cálculos aproximados de áreas y perímetros.
  - Debido a las tablillas cuneiformes que se conservan, se sabe que contemplaron problemas relacionados con el Teorema de Pitágoras.

- ***ANTIGUO EGIPTO***

  - El estudio de la geometría se usa para reconstruir el terreno tras las sucesivas inundaciones del Nilo.
  - Realizaron cálculos aproximados del área del círculo.
  - Gracias a los papiros que se conservan, se sabe que trataron diversos problemas geométricos.

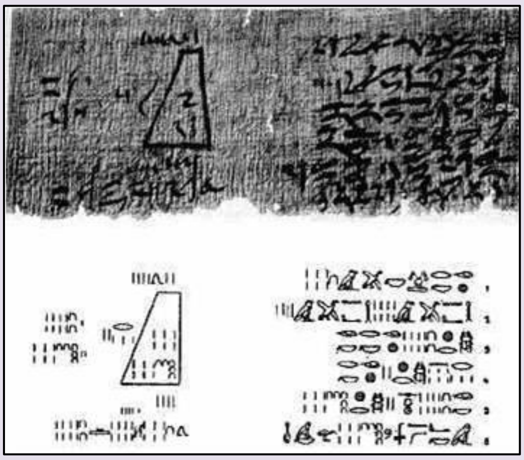
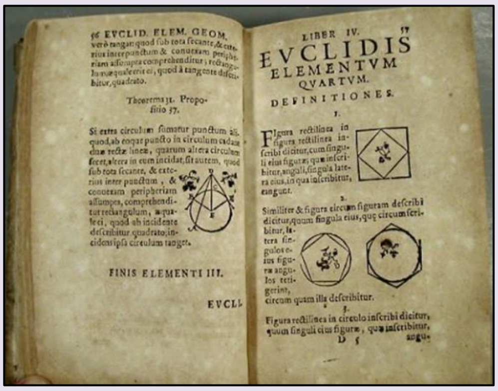


Figura 3.1.1. Papiro de Moscú.

GEOMETRÍA PLANA EN LA ANTIGUA GRECIA

700 a.C. hasta 500 d.C.

- La geometría comienza a definirse mediante axiomas, definiciones, postulados y demostraciones tal y como se puede leer en el libro de los Elementos de Euclides.
- Nacen los tres problemas clásicos: cuadratura del círculo, trisección del ángulo y duplicación del cubo.
- Tales, Pitágoras, Apolonio y Arquímedes son algunos de los matemáticos más representativos de esta época.



EVCLID. ELEM. GEOM.

LIBER IV.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

FINIS ELEMENTI III.

Figura 3.1.2. Libro de los Elementos**.**

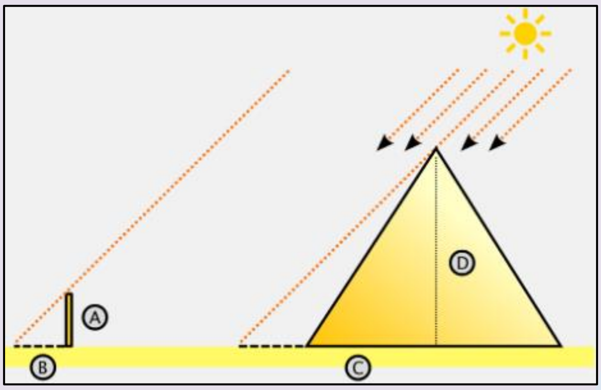


Figura 3.1.3. Aplicación del teorema de Tales**.**

GEOMETRÍA PLANA EN LA EDAD MEDIA

S. IV-V hasta S. XIV - XV

- No hay grandes avances en geometría. En las incipientes universidades se estudia el libro de los Elementos de Euclides.
- Los artesanos musulmanes desarrollan una geometría plana basada en transformaciones geométricas, para decoración y recubrimientos de superficies.

- Leonardo de Pisa (Fibonacci) y Nicolás Oresme fueron los matemáticos más representativos de esta época.

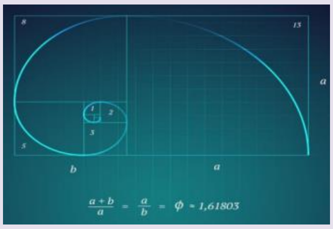
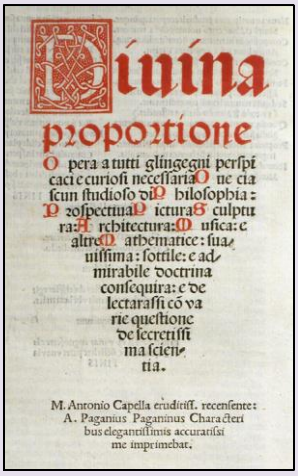


Figura 3.1.4. Relación sucesión de Fibonacci con número de oro.

GEOMETRÍA PLANA EN EL RENACIMIENTO

S. XIV, XV y XVI

- Piero della Francesca (1415 - 1492), pintor, geómetra, maestro de la perspectiva, de la composición y de la geometría euclidiana. Una de sus obras es: *De prospectiva pingendi* («Sobre la perspectiva para la pintura»). Escribió también *De corporibus regularibus,* donde aparece que las diagonales de un pentágono se cortan siguiendo la "*divina proportione*".
- Luca Paccioli (1445 - 1514) matemático, publicó: *Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalita*, así como su famoso libro: *De divina proportione*, con ilustraciones de leonardo da Vinci, sobre proporciones (en particular la aúrea) y sus aplicaciones a la geometría y a las artes visuales y plásticas mediante la perspectiva.



Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria Oue ciascun studioso di Philosophia: Prospectiua Pictura Sculptura: Architectura: Musica: e altre Mathematice: suauissima: sottile: e admirabile doctrina consequira: e delectarassi co varie questione de secretissima scientia.

M. Antonio Capella eruditiss. recensente: A. Paganius Paganinus Characteribus elegantissimis accuratissime imprimebat.

Figura 3.1.5. De Divina proportione.

- Estos geómetras renacentistas junto con Bruneleschi, Alberti, Durero, Da Vinci, etc., sentarían las bases de lo que sería la Geometría Proyectiva.

GEOMETRÍA PLANA EN LA EDAD MODERNA

S. XVI hasta S. XVIII

- Con Desargues (1591 - 1661), matemático e ingeniero francés, nace la Geometría Proyectiva, siendo estudiada también por Blaise Pascal (1623 - 1662).
- Esta época también está marcada por la aparición de la geometría analítica de la mano de Descartes y con la ayuda de Fermat, y que sirvió para representar las figuras geométricas mediante expresiones algebraicas, dando un paso más en la representación clásica de la regla y compás.
- Fermat enunció la conjetura que lleva su nombre y que no fue demostrada hasta 1994 por Andrew Wiles.

Figura 3.1.6. Andrew Wiles.

- Newton y Leibniz, de forma paralela, pero independiente, describen el cálculo integral y diferencial. El primero consiguió hallar de manera analítica los extremos de una curva y el segundo calculó, mediante integración, el área encerrada bajo una curva.

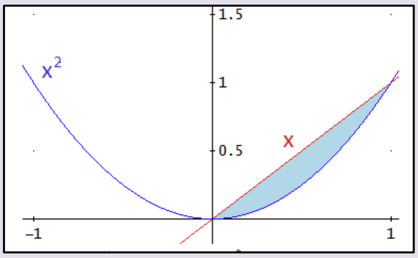


Figura 3.1.7. Área encerrada entre dos curvas.

- Euler y Gauss sentaron los fundamentos de la Topología y la Geometría Diferencial. Consiguen representar en dos dimensiones figuras tridimensionales, demostrando que las secciones cónicas se pueden representar con dos únicas variables.
- Otros matemáticos importantes de la época fueron Clairaut y Monge.

GEOMETRÍA PLANA EN LA EDAD CONTEMPORÁNEA

Finales del S. XVIII hasta la actualidad

- La geometría en esta época está marcada por la creación de las geometrías no euclidianas de la mano de Gauss (1777 - 1855), Lobachevsky (1792 - 1856) y Bolyai (1802 - 1860).
- Galois (1811 - 1832) creó la teoría de grupos.
- Riemann (1826 - 1866). Fue un matemático excepcional en el campo de la geometría: superficies de Riemann y geometría Riemanniana.
- Klein (1849 - 1925) propuso el Programa de Erlangen que significó una visión unificada de las geometrías. Se preocupó de la enseñanza de las matemáticas en secundaria y escribió varios volúmenes al respecto.
- Poincaré (1854 - 1912) famoso por sus trabajos en topología y ecuaciones diferenciales. Es conocido el llamado "Disco de Poincaré", como modelo de una geometría hiperbólica.

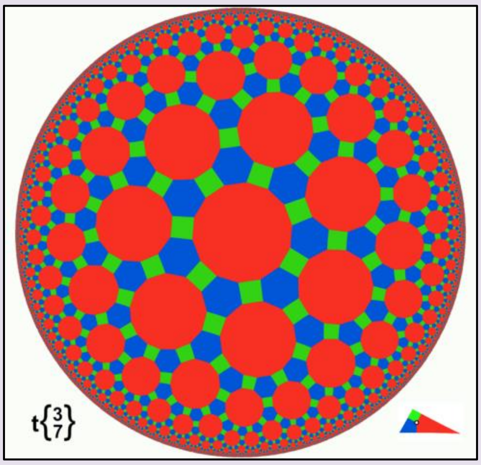


Figura 3.1.8. Disco de Poincaré.

- Julio Rey Pastor (1888 - 1962) destacó por su estudio sintético de curvas con grupos de transformaciones y axiomática.
- Mandelbrot (1924 - 2010) principal creador de la geometría fractal.
- El ruso Grigori Perelmán (1966 -) demostró en 2003 la conjetura formulada por Poincaré en 1904 sobre una propiedad topológica de una 3 – esfera.
- Robert Laglands recibió el premio Abel de las Ciencias 2018 por su "Gran teoría unificada de las matemáticas".

3.1.2. Perspectiva histórica. La geometría plana: desarrollo histórico.

El mundo de las matemáticas abarca dos dominios principales: el continuo y el discreto. Las matemáticas discretas tratan con cantidades y con todo aquello que es posible contar. La prueba más antigua del uso de las matemáticas discretas es el hueso de Ishango tallado con muescas agrupadas de tal forma que hace pensar que se utilizó para realizar algún tipo de cálculo.

Sin embargo, no todo es posible contar, por ejemplo, la tierra, el aceite... son cantidades continúas que es preciso hacerlas mensurables.

El ser humano necesitó observar la naturaleza y todo lo que le rodeaba con el fin de poder comprenderla. Así fueron apareciendo formas, figuras, cuerpos, líneas, ... que dieron origen a la parte de la matemática que designamos con el nombre de **geometría**.

A continuación, se trata, tanto los orígenes, como el desarrollo de la geometría a lo largo de la historia.

Antiguas civilizaciones

Hubo circunstancias que conducirían al hombre a encontrar cierta cantidad de descubrimientos geométricos de manera inconsciente. Uno de los primeros conceptos descubiertos es la noción de distancia. Por ejemplo, la estimación del tiempo para realizar un viaje condujo a la observación de que la trayectoria recta determina la distancia más corta entre dos puntos.

La necesidad de delimitar terrenos produjo la noción de figuras geométricas simples, por ejemplo, rectángulos, cuadrados, triángulos. Otros conceptos, como por ejemplo rectas paralelas y perpendiculares, se descubren por la necesidad de la construcción de viviendas.

Geometría en Mesopotamia

La región de Mesopotamia (en griego significa “entre ríos”) es uno de los primeros centros de civilización urbana; está situada entre los ríos Tigris y Éufrates, en la zona que en la actualidad ocupan los estados de Irak (principalmente), Irán y Siria.

Figura 3.1.9. Mapa de Mesopotamia.

El estudio de la geometría en la antigua Mesopotamia se centra en el problema de la medida. Se registran así algunos avances destacados, como el cálculo de áreas, del cuadrado, del círculo (con un valor aproximado de 3 para el número π), semejanza de figuras, etc. Algunos autores afirman que en esta cultura se conocía el teorema de Pitágoras en problemas particulares, no como un principio general. Este hecho se deduce de la tablilla Plimpton 322, de alrededor de 1800 a.C. La tablilla consta de cuatro columnas y quince filas de números tallados en escritura cuneiforme. En ella se pueden identificar ternas pitagóricas (números enteros a, b y c tales que $a^2 + b^2 = c^2$).

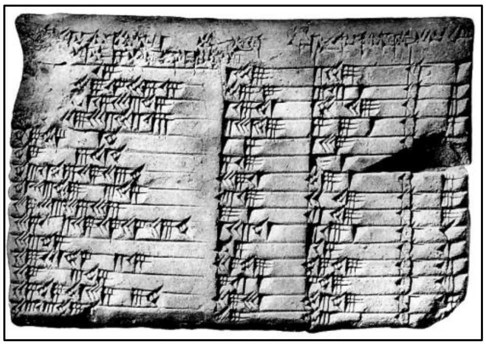


Figura 3.1.10. Tablilla Plimpton 322

La necesidad de defenderse, puesto que la riqueza de la zona siempre ha atraído a pueblos vecinos más empobrecidos, y la necesidad de obtener riego, debido a que se trata de una zona dónde la lluvia es escasa, pero, sin embargo, el terreno es muy fértil, llevó a los antiguos mesopotámicos a organizar y construir asentamientos fortificados y canales de riego. El desarrollo de una administración también estimuló la invención de la forma de escritura cuneiforme, ya mencionada.

El imperio de Babilonia se asentó en la región central-sur de Mesopotamia con epicentro en la ciudad de Babilonia y que llegó a extenderse por Acad y Sumeria. Su historia se divide en dos etapas principales: el imperio paleobabilónico (1792 a. C.–1595 a. C.) y el imperio neobabilónico (626 a. C.–539 a. C.). Este imperio fue sucedido por el persa, cuando Ciro el Grande de Persia en el año 539 a. C., quien había conquistado Media, capturó Babilonia.

El pueblo babilonio estaba familiarizado con las reglas para calcular el área de triángulos isósceles y equiláteros, así como el área de rectángulos, el área del trapecio especial (con uno de sus lados perpendicular a los paralelos). Como a esta civilización se le atribuye la invención de la rueda, fueron capaces de tomar la longitud de la circunferencia como tres veces (aproximación del número π) su diámetro (3·2·r) y el área como 1/12 del cuadrado de la longitud de la circunferencia (volviendo a tomar de nuevo la aproximación del número π a 3), es decir, $\frac{(3\cdot 2\cdot r)^2}{12}$. De este modo, consideraron que la longitud de la circunferencia era un valor intermedio entre los perímetros de los cuadrados inscrito y circunscrito a la misma. Conocían también la raíz y la potencia, y calcularon áreas de las figuras geométricas básicas. Además, crearon el sistema de numeración sexagesimal que aún se conserva hoy día.

Los sumerios destacaron en el área de la astronomía. Descubrieron cómo diferenciar entre planetas y estrellas. Es decir, entre objetos móviles y objetos inmóviles. Posteriormente los babilonios, fueron capaces de prever fenómenos astronómicos con antelación. Este conocimiento astronómico les llevó a adoptar un calendario lunar muy preciso, inventando un calendario de 12 meses y 360 días.

Adicionalmente, las culturas Mesopotámicas fueron pioneras en muchas de las ramas de conocimiento; desarrollaron la escritura cuneiforme, en principio pictográfica y más adelante la fonética, crearon los primeros códigos de leyes, desarrollaron importantes avances como la bóveda y la cúpula, etcétera.

Geometría en el Antiguo Egipto.

El pueblo egipcio destacó por sus estudios en los campos de la astronomía, las matemáticas y la medicina. En 1799, se encuentra la piedra de Rosetta que fue la clave para descifrar la escritura jeroglífica del antiguo Egipto. Esta piedra ha permitido conocer muchos aspectos de esta civilización.

La principal causa del desarrollo de los conceptos geométricos y los instrumentos de medición (tanto del terreno como del tiempo, ya que fueron muy precisos) en la cultura egipcia se debe a los periódicos desbordamientos del río Nilo. De este modo, fue necesario remarcar los límites para volver a construir las parcelas de la ribera anualmente y construir diques para encauzar las aguas del río. Por tanto, el desarrollo de la geometría está altamente ligado a la agricultura.

Por otro lado, destaca especialmente la perfección simétrica de las construcciones egipcias. En la actualidad el principal conocimiento del antiguo Egipto es debido al gran legado de monumentos.

El Papiro de Ahmes (también llamado papiro de Rhind), descubierto en el siglo XIX, es un documento en el que se pueden encontrar 87 problemas matemáticos sobre aritmética básica, fracciones, cálculo de áreas, progresiones, repartos proporcionales, regla de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. La mayoría de los problemas provienen de las fórmulas de medición necesarias para computar áreas de terreno. El problema 50 del papiro dice: "*Calcular el área de un campo circular cuyo diámetro es 9 khet.*". Como solución aparece escrito: "*Resta al diámetro 1/9 del mismo, que es 1. La diferencia es 8. Ahora multiplica 8 veces 8, que da 64. Este es el área del círculo.*" Este cálculo conlleva a tomar una aproximación de π de 3,16.

Conocían el triángulo rectángulo de lados de 3, 4 y 5 unidades, por ser usual para ellos la cuerda de los 12 nudos, anticipándose así al Teorema de Pitágoras.

Figura 3.1.11. Papiro de Rhind

Geometría en la Antigua Grecia.

La civilización griega tomó como referencia los elementos matemáticos de los pueblos babilonios y egipcios. Para los griegos la geometría y la matemática regían la estructura del universo, el pueblo griego afirmaba que el universo debía cumplir con los principios de proporción y simetría. La innovación griega más importante fue la creación de las matemáticas abstractas que se basan en la lógica de definiciones, axiomas y demostraciones, es decir, la abstracción y el razonamiento deductivo. Este avance comenzó con Tales de Mileto y Pitágoras de Samos.

La geometría de la Antigua Grecia fue la primera en tener un carácter formal. Los problemas dan un paso a la abstracción considerando los objetos como entes ideales que pueden manipularse solamente con la ayuda de la regla y el compás. Algunos de los problemas clásicos que nacieron en este periodo histórico y que no se demostraron hasta mucho tiempo después fueron:

1. El problema de la cuadratura del círculo (construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado).

2. La trisección de un ángulo (usando regla y compás).

3. La duplicación del cubo (construir un cubo cuyo volumen es doble del de un cubo dado).

A continuación, se detallan algunos de los matemáticos griegos más destacados en la historia del estudio de la geometría.

Tales de Mileto (624 a.C.-546 a.C.)

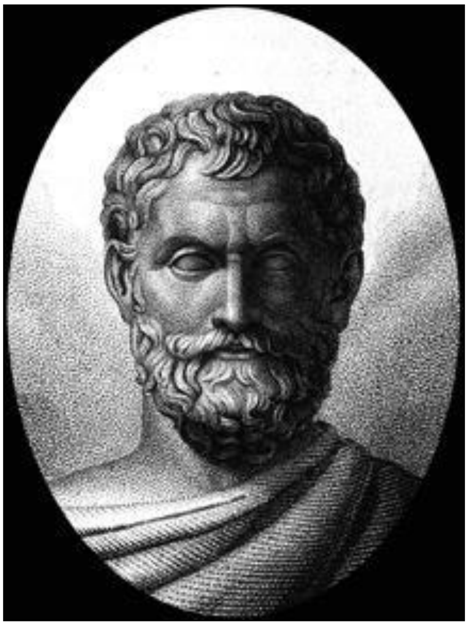


Figura 3.1.12. Tales de Mileto

Se atribuye a Tales el haber introducido en Grecia los conocimientos y herramientas elementales de la geometría, puesto que fue instruido en Egipto. Concibió la posibilidad de explicar diferentes principios geométricos a partir de verdades simples y evidentes.

Tales predijo un eclipse de Sol en el 585 a.C. Así mismo es conocida la leyenda acerca de un método de comparación de sombras que Tales habría utilizado para medir la altura de las pirámides egipcias, aplicándolo luego a otros fines prácticos de la navegación. Para calcular la altura de la Gran Pirámide midió su propia altura, y cuando su sombra medía exactamente su altura, marcó la sombra del vértice de la Gran Pirámide y la medida de esta sombra era exactamente la altura de la Pirámide.

Los teoremas que se atribuyen a Tales están relacionados con el empleo de la circunferencia y la medida de los ángulos y son los siguientes:

1. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.

2. Los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales.

3. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas son iguales.

4. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.

5. Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Pitágoras de Samos (572-497 a.C.)

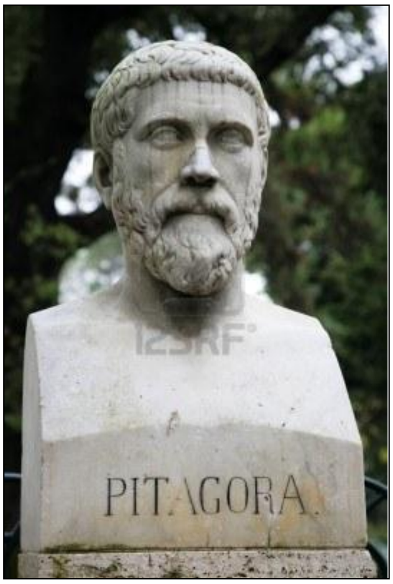


Figura 3.1.13. Pitágoras de Samos

Pitágoras demostró varias leyes de la geometría empírica que se pueden deducir como conclusiones lógicas de un número limitado de postulados considerados como verdades evidentes. Así mismo, un conjunto de teoremas sobre las propiedades de puntos, líneas, ángulos, planos, etc.

Pitágoras fundó una importante escuela en Crotona: La escuela Pitagórica. En esta escuela se asienta definitivamente el concepto de demostración formal en Geometría.

Entre los descubrimientos matemáticos que se atribuyen a la escuela de Pitágoras se encuentran:

- *El teorema de Pitágoras*. En un triángulo rectángulo: "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". Aunque se trata de un concepto que ya se conocía, fueron los primeros en establecer una demostración formal. Esta demostración se encuentra en "*Los Elementos de Euclides*". También demostraron el inverso: "si los lados a, b, c de un triángulo satisfacen la ecuación $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es rectángulo".

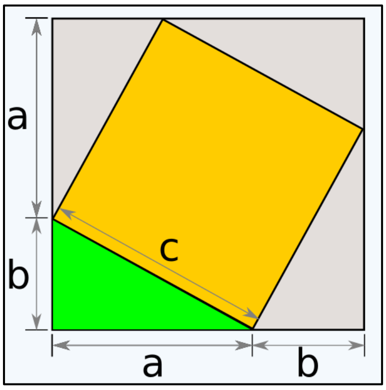


Figura 3.1.14. Descripción gráfica del enunciado del teorema de Pitágoras.

- *Un triángulo inscrito en un semicírculo es un triángulo rectángulo.*

- *Medias*. Analizaron las razones y proporciones entre los números enteros, estableciendo diez medias, entre ellas la aritmética, la geométrica y la armónica.

- *La irracionalidad de la raíz cuadrada de 2.* Descubrieron que la diagonal de un cuadrado de lado la unidad no puede expresarse como un cociente de números enteros. Este hecho marca el descubrimiento de los números irracionales. Así mismo, la inconmensurabilidad de la diagonal de un pentágono regular respecto a su lado produjo una profunda decepción en la escuela pitagórica que tenía como símbolo el pentagrama o estrella pentagonal 5/2.

Euclides (325 – 265 a.C.)

Figura 3.1.15. Euclides

Euclides es conocido como "El Padre de la Geometría". Escribió "*Los Elementos*", conjunto de trece libros que se toma como modelo de sistema axiomático-deductivo. Estos libros contienen la mayoría del conocimiento matemático existente a finales del siglo IV a.C., en diferentes áreas de las matemáticas.

"Los Elementos" es una de las obras científicas más conocidas del mundo. Euclides parte de cinco postulados para presentar de manera formal el estudio de las formas regulares. Aunque muchos de los resultados que se exponen en la obra eran ya conocidos, el rigor, la claridad, la estructura y el orden lógico en la exposición de las demostraciones, hacen de esta obra un resultado superior a cuantos se habían escrito antes.

Esta gran obra de Euclides ha perdurado como única verdad geométrica hasta bien entrado el siglo XIX. Actualmente, una versión modificada de sus primeros libros podría constituir la base de la enseñanza de la geometría plana en los centros de Secundaria. La obra se compone de los siguientes libros:

- *Libro I: Fundamentos de la Geometría. Teoría de triángulos, paralelas y el área.*
- *Libro II: Álgebra geométrica.*
- *Libro III: Teoría de la circunferencia.*
- *Libro IV: Figuras inscritas y circunscritas.*
- *Libro V: Teoría de las proporciones abstractas.*

- *Libro VI: Figuras geométricas semejantes y proporcionales.*
- *Libro VII: Fundamentos de la teoría de los números.*
- *Libro VIII: Continuación de proporciones a la teoría de números.*
- *Libro IX: Teoría de los números.*
- *Libro X: Clasificación de los inconmensurables.*
- *Libro XI: Geometría de los sólidos.*
- *Libro XII: Medición de figuras.*
- *Libro XIII: Sólidos regulares.*

En el primer libro se puede encontrar 23 definiciones, 48 proposiciones y los 5 postulados de Euclides, sobre los que se sientan las bases de la Geometría Euclídea.

Los cinco famosos postulados (sobre el plano) en los que se apoya son los siguientes:

- *Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.*
- *Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.*
- *Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.*
- *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*
- *Postulado de las paralelas: Si una recta que cae sobre dos rectas forma con ellas ángulos interiores del mismo lado cuya suma sea menos que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que la suma de los ángulos sea menor que dos rectos.*

De estos postulados, el quinto ha traído controversia desde que se enunció. No se dudaba que fuese verdad, sino que, tal como aparece expresado, algunos consideran que podría deducirse del resto de postulados. Uno de los principales problemas de la Geometría durante los siguientes siglos fue determinar si el V postulado es o no independiente de los otros cuatro; en caso de no ser independiente, se podría considerar como un teorema, y así incluirlo dentro de los resultados de la obra.

Arquímedes de Siracusa (287 – 212 a.C.)

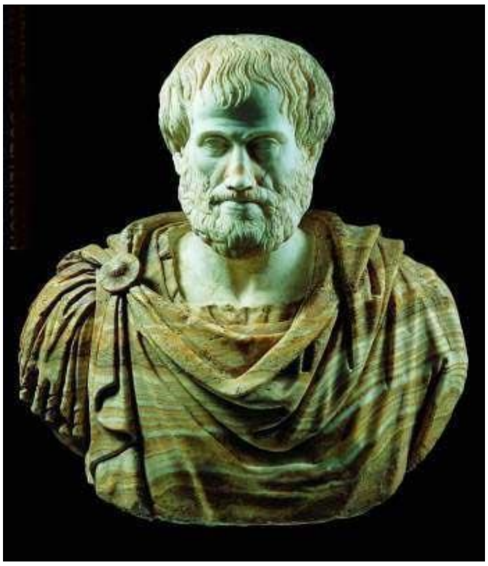


Figura 3.1.16. Arquímedes de Siracusa

Arquímedes fue uno de los matemáticos más grandes de la antigüedad. Científico de la escuela de Euclides, escribió obras que tuvieron gran importancia sobre geometría plana, aritmética y mecánica. En matemáticas, se anticipó a algunos descubrimientos de la ciencia moderna, por ejemplo, el cálculo integral, con resultados de áreas de figuras planas.

Arquímedes realizó grandes contribuciones a la matemática teórica, aplicando además la ciencia a la vida diaria. Entre sus logros se encuentran: la demostración mediante el uso del método exhaustivo para calcular el área bajo el arco de una parábola por medio de una serie infinita, y aproximó de manera muy precisa el número π ($3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ o lo que es lo mismo $3.1408 < \pi < 3.1428$). Probó también que el área del círculo era igual a π multiplicado por el cuadrado del radio del círculo. Además, postuló lo que ahora se conoce como la propiedad arquimediana de los números reales, que afirma que cualquier magnitud sumada a sí misma un número de veces puede exceder de cualquier otra magnitud.

Escribió *Sobre la medida de un círculo* y *Sobre las espirales* definiendo en este último la espiral que lleva su nombre.

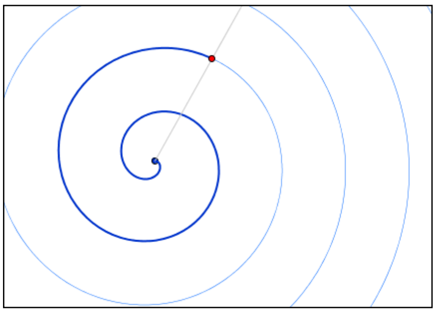


Figura 3.1.17. Espiral de Arquímedes

Apolonio de Perga (262- 190 a.C.)

Apolonio es discípulo y profesor de la escuela de Euclides, fue conocido con el sobrenombre de "*El gran Geómetra*". Se hizo famoso por su obra sobre las secciones cónicas, tratado en ocho tomos sobre las cónicas que fue la base del estudio de la Geometría hasta el siglo XVII. Dio los nombres de elipse, parábola e hipérbola, descubriendo además muchas de sus propiedades fundamentales.

Figura 3.1.18. Apolonio de Perga

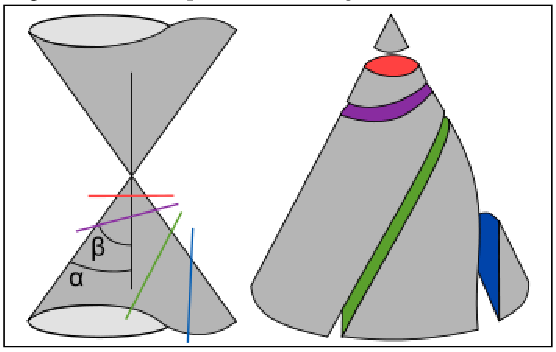


Figura 3.1.19. Cono de Apolonio

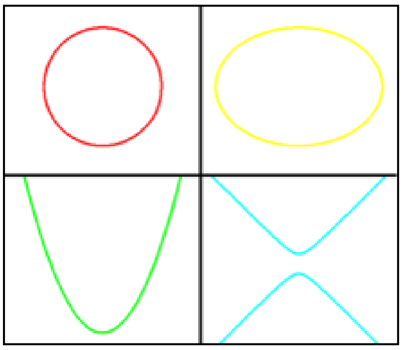


Figura 3.1.20. Secciones del cono

Geometría en la Edad Media

La geometría avanzó muy poco desde finales de la era griega hasta el fin de la Edad Media; apenas hay nuevas aportaciones en este periodo. En Occidente, se limitan a enseñar "Los Elementos" de Euclides. El comercio y los viajes favorecieron el conocimiento matemático de obras que habían sido conservadas, traducidas e incluso ampliadas por los árabes e hindúes.

Será a partir del siglo XIII, cuando se comienza de nuevo a desarrollar la geometría.

Leonardo de Pisa (Fibonacci) (1170-1240) Italia.

Figura 3.1.21. Fibonacci

Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, fue un matemático que se encargó de recopilar y divulgar el conocimiento matemático que se había heredado de grecorromanos, árabes e hindúes, realizando también aportaciones en álgebra y la teoría de números. Fibonacci fue el encargado de introducir los números arábigos en Europa, mejorando las técnicas de cálculo comercial, y extendiendo la obra de los escritores matemáticos clásicos, como los griegos Diofanto y Euclides.

Entre los libros que escribió Fibonacci se encuentran:

- *Practica Geometriae (Geometría práctica):* La obra está dividida en siete capítulos. Es el libro más avanzado de la época en Europa. En sus capítulos se abordan problemas de geometría dimensional que hacen referencia a figuras planas y sólidas.

- *Liber Abaci (libro del ábaco o libro de los cálculos).* En esta obra se muestra la importancia que tiene el nuevo sistema de numeración. En el libro se aplica dicho sistema a la contabilidad comercial, conversión de pesos y medidas, cálculo, intereses, cambio de moneda, y otras numerosas aplicaciones. En estas páginas describe el cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos, los criterios de divisibilidad, etcétera. Esta obra tuvo un gran impacto en el pensamiento matemático de Europa en esa época.

Aunque se sabe que escribió sobre la teoría de números, además de problemas de matemáticas comerciales, de álgebra y matemáticas recreativas, no se conservan muchas obras de Fibonacci. Sus escritos sobre matemáticas fueron convertidos en retos clásicos del siglo XIII. Por ejemplo, la sucesión recurrente de orden dos que lleva su nombre: $k_n = k_{n-1} + k_{n-2}$, $n > 2$, $a_1 = a_2 = 1$. Así los primeros términos de la sucesión son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13....

Geometría en el Renacimiento

Desde el principio del Renacimiento, la geometría se comienza a cultivar de nuevo en Europa. Kepler realizó grandes estudios sobre la geometría de la elipse y obtuvo una aproximación para la longitud de la misma. Se le considera el fundador de la astronomía moderna. Introdujo también el concepto de infinito en geometría.

El estudio de la cartografía y la astronomía, intentando determinar las posiciones de estrellas y planetas en la esfera celeste, fue una gran fuente de resolución de problemas geométricos.

Geometría en la Edad Moderna

La aparición de la Geometría Analítica marca el desarrollo de la geometría en la Edad Moderna.

René Descartes (1596 - 1650) Francia.

Figura 3.1.22. René Descartes

René Descartes se centró en problemas de filosofía y de matemáticas. Su contribución más importante al área de las matemáticas fue la sistematización de la Geometría Analítica. Fue el primero en intentar clasificar las curvas en función del tipo de ecuación que las gobernaba y colaboró en el estudio de la teoría de las ecuaciones.

Trabajó en los campos del álgebra y de la geometría, abriendo una etapa nueva, desarrollando las curvas planas de manera que se pudiesen representar de manera analítica (con funciones y ecuaciones). Destinó las últimas letras del alfabeto para designar las incógnitas y las primeras para designar los valores conocidos. Inventó también la notación exponencial (cuadrado, cubo...) para denotar las potencias numéricas.

En el apéndice *"La Géométrie"* de *"El Discurso del Método"* estableció la conexión existente entre la geometría y el álgebra. Las figuras geométricas se representan con expresiones algebraicas, cambiando así la regla y el compás (instrumentos clásicos) por representaciones numéricas que se pueden expresar en los ejes de coordenadas cartesianas, creados por él para la representación de los puntos geométricos en un plano. Un punto del plano está determinado unívocamente por las distancias de ese punto a cada uno de los ejes. Estos dos números se llamarían "coordenadas".

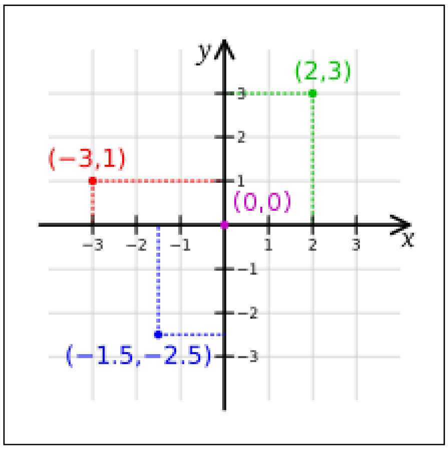


Figura 3.1.23. Eje de coordenadas cartesianas

Se establece así un método novedoso para resolver problemas geométricos puesto que se crea la relación entre objetos geométricos y ecuaciones; además, se definen los lugares geométricos en el plano. Estos hechos suponen la base de la geometría moderna.

Pierre de Fermat (1601 -1665) Francia.

Figura 3.1.24. Fermat

Pierre de Fermat trabajó en la reconstrucción de las demostraciones que se habían perdido relativas a los lugares geométricos del griego Apolonio.

También estuvo desarrollando junto con René Descartes el método algebraico descrito anteriormente que se usaba para tratar las cuestiones geométricas a partir de un sistema de coordenadas.

Por otro lado, consiguió diseñar un algoritmo por el que pudo determinar los valores máximos y mínimos de una curva polinómica. Consiguió demostrar que un rayo luminoso que está unido por dos puntos es aquel más corto. De este principio que se llama principio de Fermat se pueden deducir las leyes de la refracción y la reflexión.

En otro de los campos que destacó fue en el de la teoría de números puesto que se interesó por la Aritmética desarrollada por Diofanto. Enunció el siguiente teorema: "Es imposible encontrar la forma de convertir un cubo en la suma de dos cubos, una potencia cuarta en la suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado, en la suma de dos potencias de la misma clase" que se llamó la conjetura de Fermat y que no fue resuelta hasta 1994 por Andrew Wiles.

Isaac Newton (1643 - 1727) Inglaterra.

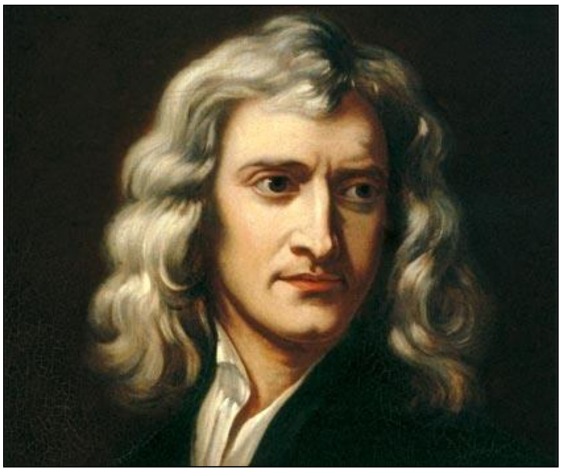


Figura 3.1.25. Isaac Newton

Isaac Newton fue uno de los fundadores del cálculo infinitesimal; también hizo importantes descubrimientos en el área de álgebra. Newton escribe un documento titulado "*Analysis"* en el que describe el cálculo integral y el cálculo diferencial (la inclinación de las curvas en un punto dado, el cálculo de los puntos mínimos y máximos en las funciones o el cálculo de las áreas encerradas por curvas). Desarrolló también el teorema del binomio (fórmula $(a+b)^n$).

Isaac Newton destaca especialmente en el ámbito de la óptica pues se interesó en gran medida por el comportamiento que tenía la luz. Usando un prisma transparente observó que la luz del sol se fragmentaba en varios rayos de luz de diferentes colores. A estos rayos los llamó espectros.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemania.

Figura 3.1.26. Leibniz

Leibniz es conocido como "*El último genio universal*". Paralelamente a Newton, pero de forma independiente, fundó el cálculo infinitesimal enunciando sus principios fundamentales.

Fue el primero en calcular el área bajo la gráfica de una función utilizando el cálculo integral. La notación usada por Leibniz se adoptó mundialmente y prevaleció hasta la actualidad. Adicionalmente, utilizó las funciones explícitamente para algunos conceptos geométricos derivados de una curva (por ejemplo, abscisa, ordenada o tangente.)

Leibniz también desarrolló el sistema binario, base de todos los sistemas informáticos actuales y construyó una máquina que era capaz de realizar multiplicaciones, divisiones y hacer raíces cuadradas.

Leonard Euler (1707-1783) Suiza.


Figura 3.1.27. Euler

Leonhard Euler es uno de los principales matemáticos del siglo XVIII.

Ha sido uno de los matemáticos que más aportaciones ha realizado, calculándose entre 60 y 80 los volúmenes por él dejados. Escribió el libro *"Introducción al análisis de los infinitos"* en el que desarrolla las series de funciones y realiza la regla por la que las series convergentes infinitas se pueden evaluar de manera adecuada. Además, en esta obra estudió también las superficies tridimensionales, demostrando que las secciones cónicas se pueden representar por la ecuación de segundo grado general en dos variables. Otros títulos de sus libros son: "*Instituciones del cálculo diferencial*", "*Instituciones del cálculo integral*" e "*Introducción al álgebra* ".

Euler también popularizó las notaciones usadas en sus obras, por ejemplo, el uso del concepto de función matemática, puesto que fue el primero en usar la notación f(x) para referirse a la función f aplicada a la variable x. Mejoraba así los instrumentos aportados por Newton y Leibniz para el cálculo infinitesimal. También fue el encargado de introducir las funciones trigonométricas, función logaritmo y logaritmo neperiano, así como de popularizar las letras Σ, i y π para denotar los sumatorios, la unidad imaginaria y el número que relacionaba la longitud de la circunferencia con la de su diámetro, respectivamente. Es famosa su fórmula $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Alejo Claude Clairaut (1713-1765) Francia.


Figura 3.1.28. Clairaut

Alejo Claude Clairaut, considerado un niño prodigio, presentó una memoria sobre cuatro curvas geométricas de cuarto grado con tan sólo 12 años. Cuatro años después, publicó la obra *"Investigaciones sobre las curvas con doble curvatura".*

Clairaut desarrolló conceptos sugeridos por Descartes mucho antes, por ejemplo, los asociados al estudio de curvas del espacio considerando las proyecciones sobre los ejes de coordenadas. Llamó a estas curvas "curvas con doble curvatura" debido a que su curvatura estaba determinada por las curvaturas de las curvas obtenidas por las proyecciones de las curvas originales en dos planos perpendiculares. De este modo, fue capaz de precisar un gran número de curvas diferentes en el espacio mediante la intersección de superficies. Como consecuencia, relacionó algunas superficies con sus ecuaciones y consiguió demostrar que estas ecuaciones son necesarias a la hora de describir las curvas en el espacio. También dio la fórmula de la tangente de curva del espacio.

Estableció las fórmulas de la distancia para dos y tres dimensiones y ecuaciones de cuádricas.

Con grandes cualidades pedagógicas y un lenguaje sencillo e intuitivo, escribió las obras *"Elementos de geometría"* y *"Elementos de Álgebra"*, que tuvieron gran influencia en la enseñanza de las matemáticas en Francia.

Gaspar Monge (1746 -1818) Francia.

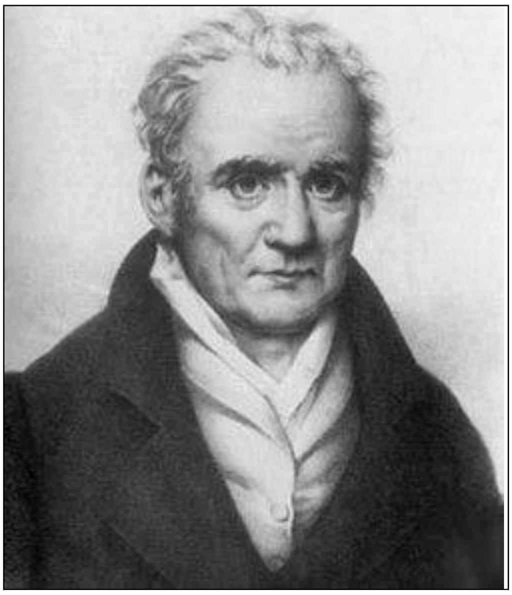


Figura 3.1.29. Gaspar Monge

Gaspar Monge, con una capacidad extraordinaria de visión espacial, es considerado el inventor de la geometría descriptiva.

Publicó "*Geometrie descriptive*" donde realiza el análisis de la representación de objetos tridimensionales mediante su proyección sobre planos. Con esta finalidad existen diferentes sistemas de realizar la representación (por ejemplo, la perspectiva cónica o el sistema de planos acotados) pero la que destaca es el sistema diédrico. Dicho sistema se desarrolla por Monge en la obra mencionada.

La teoría que desarrolló acerca de la curvatura de las superficies geométricas sentó la base fundamental para el posterior estudio del alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en este campo.

Geometría en la Edad Contemporánea

Desde el principio del siglo XIX, la geometría sufre un cambio de dirección. Los matemáticos Gauss, Lobachevsky y Bolyai desarrollan las geometrías no euclidianas que surgen a raíz de tratar de demostrar el quinto postulado de Euclides. Antes de los mencionados, el primero en intentarlo fue Saccheri (1667- 1733) por reducción al absurdo. Gauss comprendió que podrían existir geometrías más allá de la geometría euclídea, pero nunca publicó sus resultados. Posteriormente, estas nuevas geometrías serían desarrolladas por Bolyai y Lobachevsky.

La aparición de las geometrías no euclidianas supone una crisis en la Matemática del siglo XIX, marcando la geometría en la edad Contemporánea.

Nicolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856) Rusia.

Figura 3.1.30. Lobachevski

Nikolái Ivánovich Lobachevski, aunque no fue el primero en intentar deducir el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro axiomas, sí lo fue en obtener frutos del estudio, pues consiguió desarrollar una geometría donde el quinto postulado puede no ser válido. Esta nueva geometría es la llamada geometría no euclidiana, que resulta de dar un tratamiento crítico a los postulados enunciados por Euclides.

Sus obras más importantes son: “*Sobre los principios de la geometría*” y “*Geometría imaginaria* “.

Lobachevsky obtuvo este mismo resultado de manera simultánea e independiente a Bolyai.

Bernhard Riemann (1826-1866). Alemania.

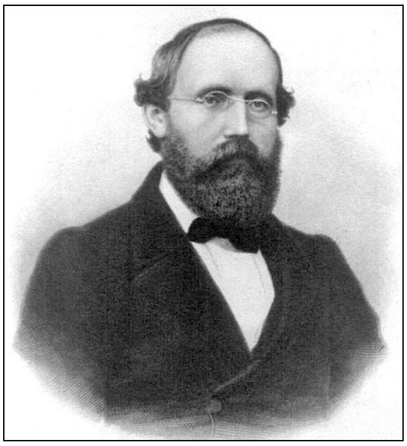


Figura 3.1.31. Riemann

Riemann ejerció una influencia considerable en el pensamiento matemático en los campos de geometría no euclidiana y en números primos.

Discípulo aventajado de Gauss, dentro del campo de la geometría, está conectado con las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Introdujo el concepto de variedad diferenciable, siendo la geometría de Riemann el estudio de las variedades diferenciales con métricas de Riemann.

Su trabajo fue utilizado por Einstein en sus estudios sobre la relatividad general.

Felix Christian Klein (1849 – 1925). Alemania.

Figura 3.1.33. Felix Klein

Klein demostró que las geometrías métricas (euclidianas o no euclidianas) constituyen casos particulares de la geometría proyectiva.

Fue el autor del Programa de Erlangen, en el que presentó una notable clasificación de las geometrías donde el concepto de grupo desempeñó un papel fundamental, ya que el objeto de cada geometría se convierte en el estudio del grupo de transformaciones que la caracteriza.

Henri Poincaré (1854-1912) Francia.


Figura 3.1.32. Henri Poincaré

Henri Poincaré fue uno de los principales matemáticos del siglo XIX, puesto que fue capaz de realizar contribuciones en prácticamente todas las áreas de las matemáticas.

Su tesis está basada en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Presentó un método que serviría para estudiar las propiedades de estas ecuaciones. Estudió la forma de integrar dichas ecuaciones y además analizó sus propiedades geométricas. Por otro lado, manifestó que las propiedades geométricas de las ecuaciones diferenciales se pueden utilizar para modelar la forma en la que se comportan los cuerpos del Sistema Solar.

Descubrió el plano hiperbólico que se trata de un modelo específico de geometría no euclidiana en dos dimensiones. Actualmente, este plano es conocido como "Disco de Poincaré".

Por otro lado, formuló la llamada conjetura de Poincaré, un conocido problema topológico que finalmente fue demostrado por el ruso Grigori Perelmán en 2003.

Julio Rey Pastor (1888-1962) España


Figura 3.1.34. Julio Rey Pastor

Rey Pastor investigó en los ámbitos de la geometría proyectiva superior y la geometría algebraica sintética.

Elaboró unas memorias en las que trataba el estudio sintético de curvas, incorporando grupos de transformaciones y axiomática.

En 1915, se creó el Laboratorio y Seminario Matemático, donde trabajó desarrollando historia de la matemática, geometría sintética real y compleja, representación conforme, teoría de Galois y métodos numéricos.

En el año 2000 Sir Michael Atiyah, pronunció una conferencia de título: *"Las matemáticas del siglo XX"*, que fue traducida y publicada en la revista Números. Ver [8].

Atiyah habla de algunas tendencias o características de las matemáticas del siglo XX, entre ellas: el paso de dimensiones pequeñas a dimensiones grandes; antes se estudiaron curvas y superficies y ahora n-variedades. Las curvas y superficies son visibles en el espacio de 3 dimensiones, sin embargo, las variedades n dimensionales solo se manejan matemáticamente. El paso de lo lineal a lo no lineal. En la geometría euclídea predomina la linealidad o su transformación a la linealización, sin embargo, en el siglo XX, los fenómenos no lineales aumentan: de la geometría euclídea se pasó a las geometrías no euclídeas y después a la geometría de Riemann donde los problemas son fundamentalmente no lineales. Otro rasgo característico del siglo XX es la matemática aplicada a la física (Teoría Cuántica de Campos, teoría de cuerdas, etcétera).

Relativo al siglo XXI, Atiyah dijo que este siglo podría ser el de las matemáticas infinito-dimensionales.

Algunos resultados, conceptos o campos recientes en geometría plana.

- *Teorema de Cartan-Dieudonné:* Destacan los matemáticos franceses Élie Cartan (1869 - 1951) y Jean Deudonné (1906-1992) por las investigaciones que llevaron a cabo sobre los movimientos del plano y el teorema que lleva su nombre: "*Todo movimiento en el plano se puede descomponer en producto de a lo más tres simetrías respecto a rectas*".

- *Teorema de los cuatro colores*: Se demuestra en 1976 de la mano de Kenneth Appel (EE.UU., 1932 - 2013) y Wolfgang Haken (Alemania, 1928 -). Esta demostración supuso un hito en la historia de las matemáticas debido a que la demostración se realizó utilizando como herramienta un ordenador. El teorema dice lo siguiente: "*Todo mapa plano puede colorearse con, a lo máximo, cuatro colores con la condición de que regiones con frontera común tengan colores distintos*."

- *Conjetura de Poincaré*: En 2003, se demuestra la conjetura formulada por Poincaré en 1904 sobre una propiedad topológica de una 3 – esfera por el ruso Gregori Perelman (1966 -).

- *Geometría fractal.* El polaco Benoît Mandelbrot (1924-2010) es conocido por ser el principal creador de esta geometría. Se refirió al impacto de ella en los patrones e interpretación de la naturaleza plasmado en su libro *Fractal Geometry of Nature* escrito en 1982.

- Otros campos de especial interés del siglo XX han sido la Teoría matemática de la comunicación, en la que destaca el estadounidense Claude E. Shannon (1916-2001) y el Diseño Asistido por Ordenador (CAGD), en el que sobresalen los franceses Pierre E. Bézier (1910-1999) y Paul de Casteljau (1930-).

Premios Abel recientes en geometría plana.

La Academia Noruega de Ciencias y Letras concedió a John Griggs Thompson *(EE. UU., 1932-)* y Jacques Tits *(Francia, 1930-)* el premio Abel en el año 2008 como consecuencia de la investigación que habían desarrollado relacionada con las simetrías en teoría de grupos.

El canadiense Robert Langlands (1936 -) fue galardonado con el premio Abel en el año 2018 como reconocimiento por su *"Gran teoría unificada de las matemáticas" o Programa Langlands.* En este programa adquiere un gran protagonismo la Teoría de los grupos de Galois, además de la teoría de números, el análisis armónico y la física matemática.

3.2. Análisis cognitivo

Este análisis se realiza con el objetivo de reconocer las capacidades de aprendizaje que tienen los alumnos para planificar una docencia que se adapte a los mismos. Se estudian algunas dificultades que encuentra el alumnado en el estudio de la geometría plana.

3.2.1. Expectativas de aprendizaje.

En la unidad de la geometría plana del módulo III de ESPAD, se realizará un análisis centrado en cada uno de los objetivos didácticos de aprendizaje marcados por el BOCYL y que describen en cursiva los siguientes ítems:

1. *Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas.*

1. Identificar las figuras planas.

2. Aplicar las propiedades características de las figuras planas y cuerpos elementales en la resolución de problemas.

3. Analizar y justificar geométricamente algunas de las fórmulas dadas de los perímetros y áreas.

2. *Utilizar el teorema de Tales para el cálculo de medidas indirectas de elementos inaccesibles, objetos de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o para la resolución de problemas geométricos.*

4. Interpretar relaciones de proporcionalidad geométrica entre segmentos.

5. Interpretar relaciones de proporcionalidad geométrica y semejanza entre figuras planas.

6. Utilizar el teorema de Tales para relacionar figuras planas.

7. Identificar y reconocer el uso de la proporcionalidad geométrica presente en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

8. Aplicar el teorema de Tales en la resolución de problemas geométricos aplicados a la vida real.

3. *Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.*

9. Utilizar e interpretar correctamente el uso de la escala.

10. Manejar escalas en la resolución de problemas geométricos aplicados a la vida real.

4. *Utilizar el teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes, áreas y resolución de problemas geométricos.*

11. Reconocer un triángulo rectángulo, así como los catetos y la hipotenusa del triángulo.

12. Interpretar geométricamente el teorema de Pitágoras.

13. Reconocer y analizar casos en los que se pueda aplicar el Teorema de Pitágoras en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

14. Hacer uso del Teorema de Pitágoras en la obtención de fórmulas de áreas de planas.

15. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas geométricos aplicados a la vida real.

5. *Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.*

16. Interpretar geométricamente el significado de las coordenadas geográficas.

17. Hacer uso de las coordenadas geográficas en problemas aplicados a la vida real.

Una vez se han fijado los objetivos específicos, se relacionarán con las Competencias Clave para buscar el aprendizaje óptimo por parte de los alumnos. Es importante que el desarrollo de las Competencias en los alumnos sea favorable pues esta práctica ayuda al aprendizaje significativo.

A continuación, se muestra una tabla en la que se asocian los objetivos enumerados anteriormente con las competencias clave que se definen en el currículo de la Enseñanza Secundaria para Personas Adultas, de acuerdo con el artículo 2.2 del Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.

Competencias Clave:
Competencia Lingüística (**CCL)**
C. Matemática y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología (**CMCT)**
Competencia Digital (**CD)**
Competencia de Aprender a Aprender (**CAA)**
Competencia Sociales y Cívicas (**CSC)**
Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor. (**SIEE**)
Conciencia y expresiones culturales. (**CEC**)

OBJETIVOS	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC
1. Identificar las figuras planas.		X					
2.Aplicar las propiedades características de las figuras planas y cuerpos elementales en la resolución de problemas.	X	X		X			
3. Analizar y justificar geométricamente algunas de las fórmulas dadas de los perímetros y áreas.		X	X	X			
4. Interpretar relaciones de proporcionalidad geométrica entre segmentos.		X		X			
5. Interpretar relaciones de proporcionalidad geométrica y semejanza entre figuras planas.		X		X			
6. Utilizar el teorema de Tales para relacionar figuras planas.		X					
7. Identificar y reconocer el uso de la proporcionalidad geométrica presente en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.		X	X	X	X	X	X
8. Aplicar el teorema de Tales en la resolución de problemas geométricos aplicados a la vida real.	X	X	X	X			
9. Utilizar e interpretar correctamente el uso de la escala.		X		X			
10. Manejar escalas en la resolución de problemas geométricos aplicados a la vida real.	X	X	X				
11. Reconocer un triángulo rectángulo, así como los catetos y la hipotenusa del triángulo.		X					
12. Interpretar geométricamente el teorema de Pitágoras.		X	X	X			
13. Reconocer y analizar casos en los que se pueda aplicar el Teorema de Pitágoras en diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.	X	X		X	X	X	X
14. Hacer uso del Teorema de Pitágoras en la obtención de fórmulas de áreas de planas.		X					
15. Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas geométricos aplicados a la vida real.	X	X					
16. Interpretar geométricamente el significado de las coordenadas geográficas.		X					
17. Hacer uso de las coordenadas geográficas en problemas aplicados a la vida real.	X	X	X	X	X	X	X

Si recogemos los resultados por objetivo didáctico descrito anteriormente obtenemos la siguiente relación directa entre objetivos y competencias:

	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SIEE	CEC
Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas.	1	3	1	2	0	0	0
Utilizar el teorema de Tales para el cálculo de medidas indirectas de elementos inaccesibles, objetos de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o para la resolución de problemas geométricos.	1	5	2	4	1	1	1
Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	1	2	1	1	0	0	0
Utilizar el teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes, áreas y resolución de problemas geométricos.	2	5	1	2	1	1	1
Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	1	2	1	1	1	1	1
TOTAL	6	17	6	10	3	3	3

Como es lo lógico, la competencia matemática es la más desarrollada en los objetivos que se han definido ya que en la asignatura de Matemáticas se trata esta competencia de manera directa y continuamente. En segundo lugar, se encuentra la competencia de aprender a aprender, esto se debe a que se trata de una competencia que debe desarrollar el alumno mediante la reflexión de los conceptos y el aprendizaje significativo para que el alumno sea autónomo a la hora del aprendizaje, el estudio y el desarrollo personal. Posteriormente, se encuentran las competencias lingüística y digital. La primera, se desarrolla cuando se fija el objetivo de la comprensión de enunciados y de elaboración de razonamientos. La segunda, se incentiva con el uso de herramientas como el programa GeoGebra, con el que el alumno puede visualizar de manera clara y sencilla las figuras geométricas. Por último, se encuentran la competencia social y cívica, el sentido de iniciativa y espíritu emprendedor y la conciencia y expresiones culturales. La primera y la tercera se favorecen a medida que se explica la introducción del tema y con el uso de ejemplos aplicados a la vida real; la segunda, se estimula con el uso de actividades que invitan al alumno a buscar información por sí mismos.

Teniendo en cuenta este análisis confirmamos que es muy importante realizar prácticas con los alumnos para que se puedan impulsar las competencias necesarias para su desarrollo. Se sugiere proponer lecturas adicionales y juegos con los que se puedan generar habilidades en los alumnos para el uso de las nuevas tecnologías, del desarrollo cultural y del desarrollo de las relaciones con los demás.

3.2.2. Limitaciones de aprendizaje.

En el estudio de la geometría (como en otras unidades de la asignatura de Matemáticas) hay conceptos que requieren cierta abstracción y, por tanto, aparecen dificultades en el aprendizaje. Por esta razón, el profesor debe identificar previamente las dificultades que se presentan para intentar incidir sobre ellas y conseguir que el alumno adquiera un aprendizaje eficaz.

Algunas dificultades que se han identificado en el estudio de la geometría plana son:

1. <u>Falta de comprensión del lenguaje matemático</u>: la realización de una incorrecta compresión del lenguaje se deriva, por ejemplo, en el no reconocimiento de términos específicos ni figuras de geométricas.

2. <u>Falta de comprensión lectora:</u> este hecho dificulta la comprensión correcta de los enunciados de los problemas, por esto es necesario fomentar la lectura entre los alumnos.

3. <u>Escasa visión espacial</u>: las dificultades de tipo visual están muy presentes en el contexto geométrico, debido a los cambios de orientación de las figuras tal y como los alumnos están acostumbrados a verlas provocando en ellos la no identificación correcta de las figuras. De este modo, el alumno excluye de manera muy temprana la intuición ligada al conocimiento geométrico.

4. <u>Falta de capacidad de memoria a la hora del uso de símbolos:</u> la dificultad a la hora de usar símbolos para dar nombre y representar las diferentes figuras, provoca una tendencia a la memorización de los conceptos y propiedades.

Una vez identificados estos puntos, es necesario hacer foco sobre ellos para que no se conviertan en posibles errores. Por este hecho, el profesor debe adaptar la didáctica para solucionar estas dificultades y la comprensión completa de la unidad por parte del alumno.

3.3. Análisis de instrucción

Para realizar una unidad didáctica adaptada al alumnado es necesario realizar un análisis de instrucción, es decir, debe comprobarse el grado de aprendizaje que tiene el alumno en el momento de comenzar la unidad. Se escogerán tareas relacionadas con los objetivos que se han establecido previamente con la finalidad de minimizar las dificultades y los posibles errores y buscando la motivación de los alumnos sobre el tema de la geometría plana.

Dividiremos el estudio de la siguiente manera:

1. **Contenido matemático.** En este punto se presentarán al alumno actividades que estén relacionadas con contenidos matemáticos anteriores y con contenidos de la unidad presente de geometría plana.

2. **Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana.** Se propondrán actividades en el contexto de la vida real buscando que el alumno se pueda enfrentar a situaciones similares en su vida diaria.

3. **Implicación en el razonamiento personal.** El profesor propone actividades con diferente nivel de demanda cognitiva. Comenzando por actividades que no requieren un alto nivel hasta actividades que requieren un cierto nivel de abstracción y reflexión de la unidad por parte del alumno. Estas actividades se proponen dentro del marco del modelo de Van Hiele para el aprendizaje de la geometría plana.

4. **Aprendizaje adaptado mediante actividades de ampliación:** El profesor propone varias actividades de ampliación en un contexto de geometría, unas veces serán problemas con historia y otras no necesariamente, para satisfacer la diversidad del alumnado, despertar curiosidad y motivar para el aprendizaje de la geometría plana.

5. **Plan de fomento a la lectura:** en este punto se facilitarán opciones de libros que estén relacionadas con contenidos de la unidad de geometría plana o relacionados con matemáticos que hicieron grandes aportaciones en esta área con el fin de mejorar sus competencias matemática y lingüística.

3.3.1. Contenido matemático.

Estas actividades estarán relacionadas con el tema tratado en la unidad, que es la geometría plana, aunque requerirá que el alumno haga uso de conocimientos que han sido tratados en la asignatura previamente. Algunos ejemplos de posible actividad serían los siguientes:

1. Actividad extraída de [4]. Coge una hoja de papel, recórtala de forma que obtengas un triángulo cualquiera. A continuación, realiza estos pasos:

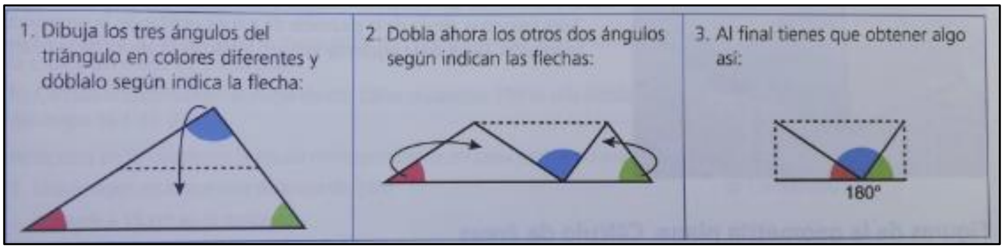


Figura 3.3.1. La suma de los ángulos de un triángulo mide 180º

Escribe la propiedad de los triángulos que acabas de comprobar haciendo esta construcción geométrica.

2. Deduce el área de un polígono regular en función del lado L y la apotema a.

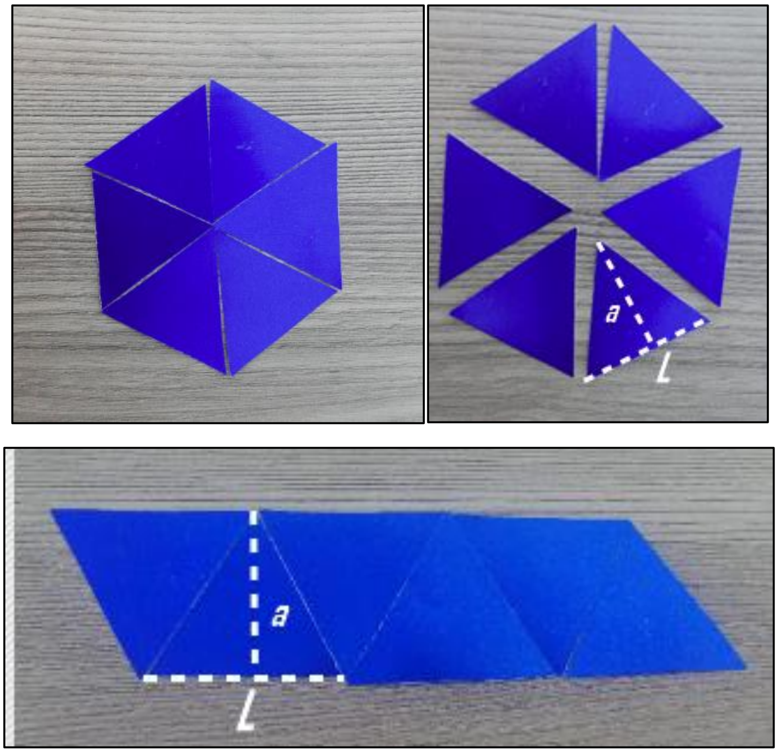


Figura 3.3.2. Comprobación de la fórmula del área de un polígono regular

3. Mediante doblado de papel de un formato DIN se obtiene la siguiente descomposición:

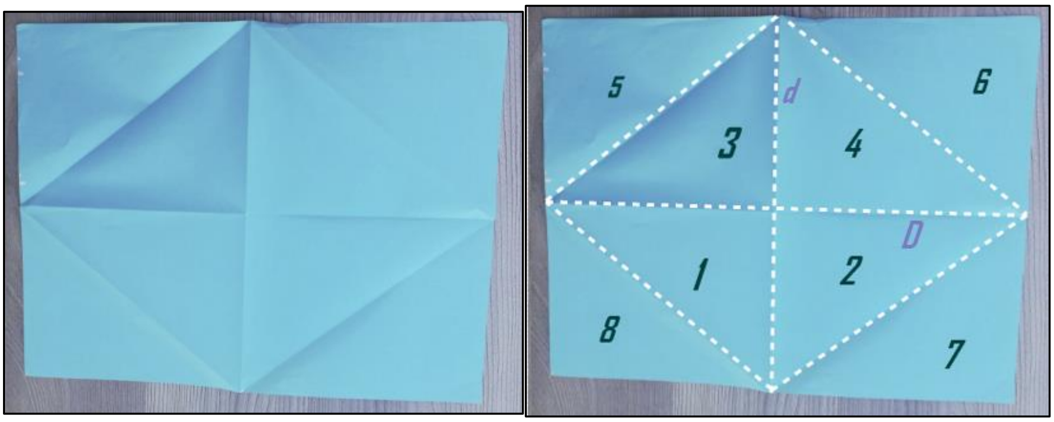


Figura 3.3.3. Deducción del área del rombo

A partir de ella deduce la fórmula del área de un rombo de diagonales D y d.

4. ¿Son los siguientes triángulos semejantes? ¿Por qué? (El recurso Geomag se presentará en el aula, tal como se muestra en las imágenes)

a) b)

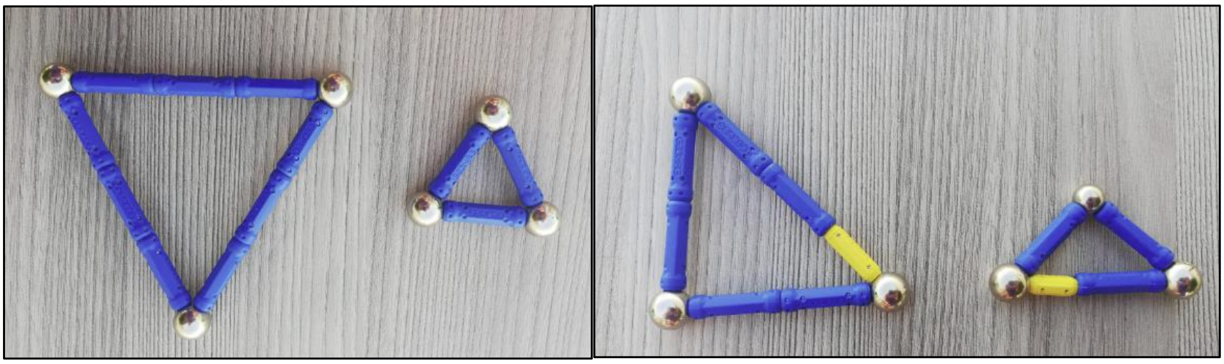


Figura 3.3.4. Triángulos semejantes con Geomag

3.3.2. Relación con el contexto y aproximación a situaciones de la vida cotidiana.

Los contenidos de la unidad de geometría plana son susceptibles de ser relacionados con situaciones del mundo real. Por tanto, el profesor podrá aprovechar este hecho para presentar actividades con escenarios que se encuentran en la vida real, de cara a mejorar la motivación de los alumnos, mostrar la importancia de la geometría plana y afianzar los contenidos que se han explicado a lo largo de la unidad.

Además, también se animará al alumno a buscar situaciones de su entorno cotidiano donde se puedan aplicar los contenidos que se han ido explicando en el aula.

Algún ejemplo que puede proponer el profesor:

1. Actividad extraída de [4]. Para calcular la altura de un árbol, Enrique ve la sombra de la copa reflejada en un charco del suelo. Con la ayuda de Sara toma las medidas que indica el dibujo. ¿Cuál es la altura del árbol? ¿Cuántas veces es más alto el árbol que Enrique?

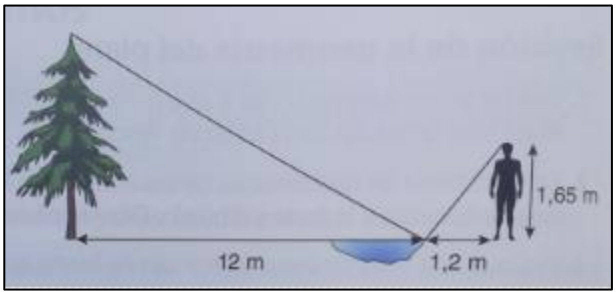


Figura 3.3.5. Ilustración del problema 1.

2. El siguiente viaducto se encuentra en el sur de Francia:

Figura 3.3.6. Viaducto de Millau

Se trata de un puente que se construyó para cruzar el valle de un río, el río Tarn, y requirió trece años de estudios técnicos, debido entre otras muchas cosas, al viento, pues puede soplar a más de 200 km/h. En este puente podemos observar muchos triángulos rectángulos formados por los pilares verticales, la carretera y cada uno de los cables que soportan la carretera. Supongamos que el cable más exterior mide 50 m. y está fijado a la base a una distancia del pilar de 40 m. ¿A qué altura está fijado el cable en el pilar? Si deseamos representar a una escala 1:50 el viaducto, ¿cuánto medirán los lados del triángulo rectángulo?

3. Actividad extraída de [5]. Un arco se compone de las siguientes partes: dovelas, clave y arranques y tiene por elementos: luz (L), flecha (f), esbeltez (e). Se define la esbeltez como la razón entre la flecha y la luz de un arco. E = $\frac{f}{L}$.

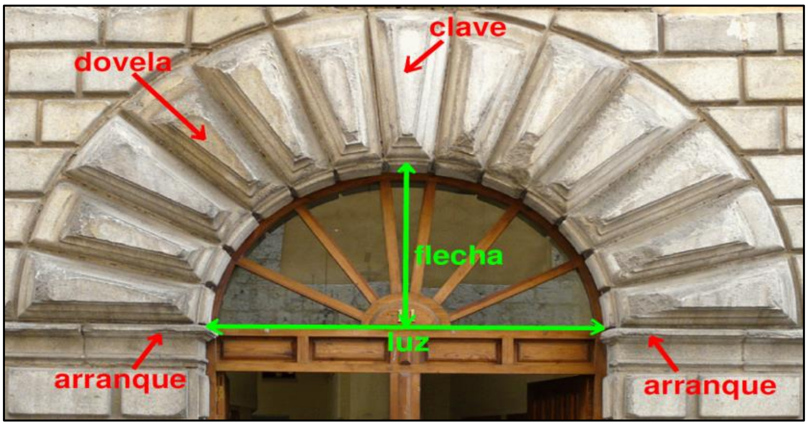


Figura 3.3.7. Partes de un arco

¿Cuánto mide la esbeltez de un arco de medio punto? ¿y de un arco ojival perfecto o equilátero? Calcula la esbeltez de dos arcos de tu entorno.

4. *Área general de la vésica piscis.* La vésica piscis, o su traducción literal del latín, vejiga de pez, es un símbolo de la geometría sagrada muy conocido históricamente. Se ha empleado fundamentalmente en el arte románico y en el gótico para esculpir o pintar un Pantocrátor.

Su trazado se obtiene al intersecarse dos circunferencias del mismo radio, cada una pasando por el centro de la otra. En la Proposición primera del Libro Primero de los Elementos de Euclides, aparece la figura vésica piscis al trazar un triángulo equilátero con regla y compás, por medio de dos arcos de circunferencia centrados en los extremos de un segmento (lado del triángulo) y de radio la longitud del mismo.

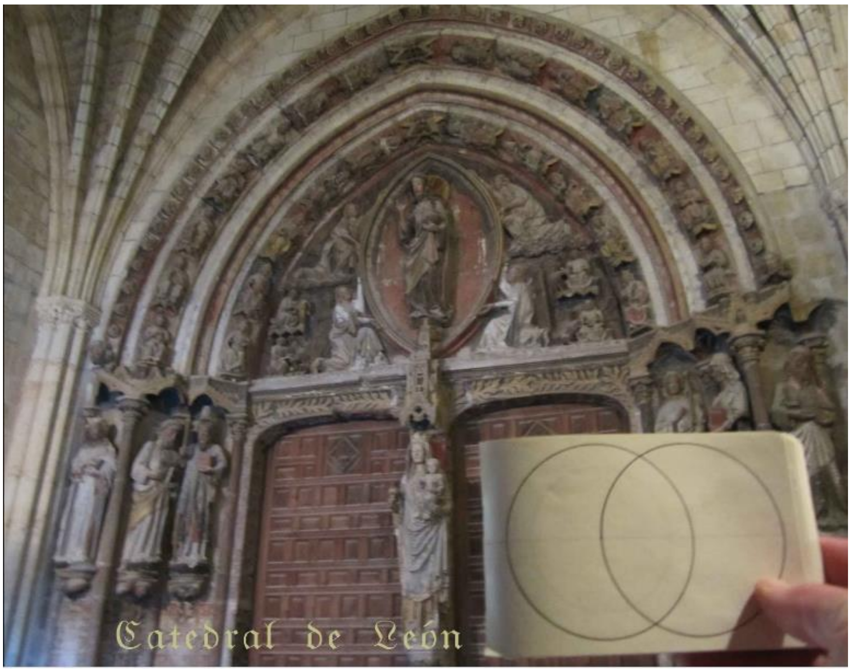


Figura 3.3.8. Vésica piscis en la catedral de León

Este símbolo siempre se ha considerado una figura fundamental en la geometría sagrada ya que simboliza la dualidad. En el caso de la catedral de León la dualidad se encuentra entre dos elementos opuestos puesto que el interior de la vésica representa el cielo y el exterior la tierra.

La vésica puede inscribirse en un rectángulo de proporción $\sqrt{3}$.

El área que encierra la vésica piscis puede obtenerse de muchas formas, como por ejemplo a partir de las imágenes siguientes:

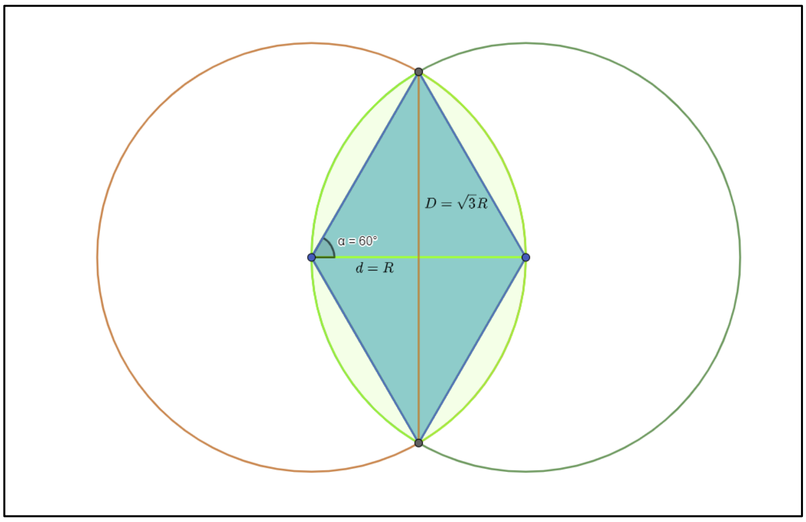


Figura 2.3.9. Vésica piscis con GeoGebra

El área total es la suma del área del rombo azul (compuesto por los dos triángulos equiláteros) y de los cuatro segmentos circulares que completan la vésica. (obtenidos como diferencia de un sector circular de ángulo 60º y de radio la anchura de la vésica R y del triángulo equilátero de lado R), es decir,

$$A_{\text{vésica piscis}} = A_{\text{rombo}} + 4\,(A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo equilátero}})$$

El área de la vésica piscis en función del radio *R* de las circunferencias es:

$$A_{\text{vésica piscis}} = \frac{\sqrt{3}R^2}{2} + 4\left(\frac{\pi\cdot R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4}\right) = \frac{R^2}{6}\,(4\,\pi - 3\sqrt{3})$$

A partir de la siguiente figura:

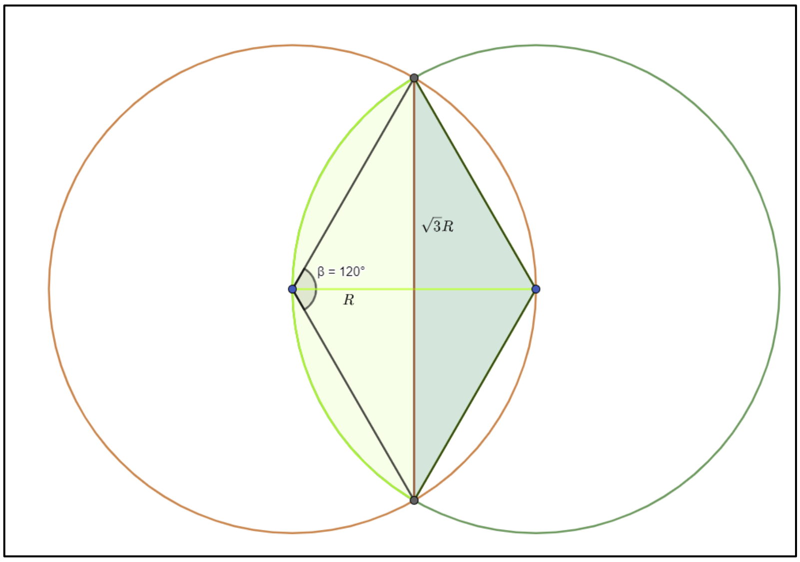


Figura 3.3.10. Vésica piscis con GeoGebra

El área total será dos veces la diferencia entre el sector circular de ángulo 120º y el triángulo isósceles coloreado en azul. Es decir:

$$A_{\text{vésica piscis}} = 2\,(A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo isósceles}})$$

El área de la vésica piscis en función del radio de las circunferencias es:

$$A_{\text{vésica piscis}} = 2\left(\frac{\pi\cdot R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}R^2}{4}\right) = \frac{R^2}{6}\,(4\,\pi - 3\sqrt{3})$$

3.3.3. Implicación en el razonamiento personal.

Las actividades presentarán diferentes niveles de dificultad. Se comenzará por aplicar los conocimientos aprendidos con ejercicios sencillos y se irá aumentando la dificultad de las actividades gradualmente. Esta casuística de actividades se basará principalmente en los niveles cognitivos del modelo de Van Hiele. Este modelo se basa en la evolución del razonamiento geométrico mediante cinco niveles cada uno de ellos supone una abstracción geométrica mayor. Los niveles son los siguientes:

1. Reconocimiento: El alumno no es capaz de diferenciar las partes de las figuras geométricas. Debe conseguir reconocer las figuras como un todo, siendo capaz de producir una copia de la figura particular.

2. Análisis: El estudiante es capaz de identificar y analizar partes y propiedades particulares de la figura geométrica, consiguiendo reproducir copias de las figuras mediante las propiedades, pero no consigue establecer relaciones entre las diferentes figuras.

3. Clasificación: El alumno es capaz de identificar las figuras a través de sus propiedades, aunque su razonamiento está basado en la manipulación, en la propia experiencia.

4. Deducción formal: El estudiante consigue realizar demostraciones lógicas con una naturaleza axiomática debido a que consigue comprender las relaciones entre las propiedades.

5. Rigor: Este punto se trata de un nivel alcanzado por estudiantes con grandes aptitudes geométricas, por tanto, se acostumbra a omitir en la enseñanza secundaria puesto que las aptitudes avanzadas son alcanzadas por el alumno en un nivel de estudios más avanzado, como por ejemplo el universitario. Son alumnos que consiguen describir la geometría de forma abstracta y analítica, capaces de describir con un grado rigor avanzado los sistemas de deducción.

En el aula se propondrán únicamente actividades de los cuatro primeros niveles. Un ejemplo podría ser el que se describe a continuación.

1. Actividad de Reconocimiento: ¿Qué figuras geométricas conocéis? ¿Dónde podemos apreciarlas en el entorno? Mostrar diferentes figuras geométricas donde se pueden reconocer conceptos como lado, diagonal, polígono regular e irregular, etc. Posteriormente, se complementará la explicación dando la definición de estos conceptos.

2. Actividad de Análisis: El profesor entrega un polígono regular, cortado en goma EVA, diferente a cada alumno. El estudiante deberá completar la siguiente tabla:

Tabla 2: Actividad de análisis

Número de lados	**¿Es cóncavo o convexo?**	**Medida del ángulo interior**	**Medida del ángulo central**	**Suma de los ángulos interiores**	**Número de diagonales**

¿Cuál es el nombre del polígono que has analizado? ¿qué características geométricas tiene?

3. Actividad de clasificación: En el aula, se pide dibujar con Geogebra la construcción con regla y compás de polígonos regulares de diferente número de lados. Con apoyo del programa, los alumnos responderán preguntas del tipo siguiente: ¿Calcular cuánto mide el ángulo interior y el ángulo central de cada polígono? ¿Cuáles son las medidas de sus diagonales?

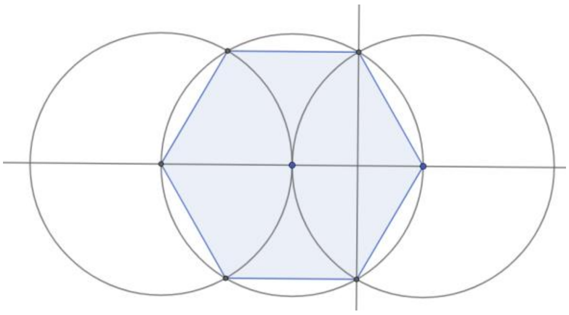


Figura 3.3.11. Construcción del hexágono regular con regla y compás.

4. Actividad de Deducción formal: Deducir la formula del ángulo interior de un polígono regular en función de número de lados del polígono. Como consecuencia, escribir los valores de los ángulos interiores de los polígonos regulares desde tres hasta ocho lados.

Estas cuatro cuestiones incluyen los cuatro niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele. La primera se podría responder simplemente identificando las figuras en el entorno, pero sin ser necesario el conocimiento de saber de qué figura se trata exactamente.

En la segunda actividad, el estudiante comprende cuales son las propiedades de cada figura y puede probarlo para un ejemplo concreto.

Para los dos últimos niveles, el alumno tiene que conocer el uso y la formulación de definiciones, de este modo, la pregunta adquiere un significado para el profesor, que será capaz de clasificar a los alumnos según el nivel de razonamiento en que se encuentran adaptándose a las necesidades de los discentes para pasar posteriormente al siguiente nivel y así sucesivamente.

3.3.4. Actividades de ampliación.

Con el objetivo de que los alumnos puedan reforzar sus conocimientos y su motivación hacia la asignatura, se proponen algunas actividades de ampliación sobre geometría plana. A continuación, se enuncian algunos ejemplos.

1. Transformaciones geométricas. Frisos. Se propone a los alumnos realizar un estudio de las transformaciones geométricas, en particular de los movimientos del plano.
   Como aplicación del uso de determinados movimientos se definirán los Frisos y se establecerá su clasificación en los siete grupos existentes. Finalmente, se pide realizar un apartado de fotografía matemática, en la que se incluyan cenefas que se pueden encontrar en la vida cotidiana, haciendo la clasificación de estas, al ser consideradas como partes de frisos.

Figura 3.3.12. Reja de una un balcón.

2. Fórmula de Herón. Se propone al alumno realizar un estudio de la fórmula de Herón desde un punto de vista histórico. Se partirá de la escuela matemática de Alejandría citando a los matemáticos más significativos de esta escuela y los logros que alcanzaron. Adicionalmente, se propone realizar la demostración de esta fórmula que nos permite conocer el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus lados.

3. Ternas Pitagóricas. Como ya se ha comentado en el desarrollo histórico, las ternas pitagóricas eran conocidas ya en tiempos de los pueblos babilonios. Se propone a los estudiantes buscar alguna tablilla conocida históricamente en la que es posible identificar ternas pitagóricas (número enteros a, b y c tales que $a^2 + b^2 = c^2$). Otras ternas serían la de Pitágoras y la de Platón.

4. Tangram mínimo de Brugner. [11], [15], [34]. El tangram mínimo de Brugner se obtiene al trazar una diagonal de un rectángulo y el segmento perpendicular desde un vértice del rectángulo a tal diagonal. Con estos trazados el rectángulo queda diseccionado en tres piezas, que componen el tangram.

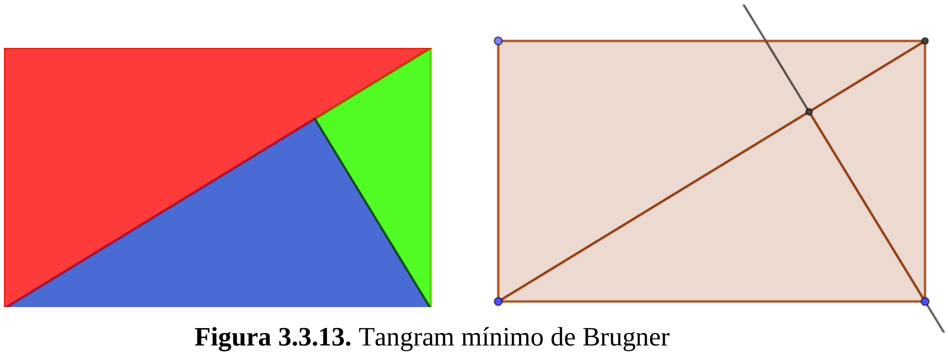


Figura 3.3.13. Tangram mínimo de Brugner

Se pueden hacer una gran variedad de ejercicios o actividades respecto a este tangram, por ejemplo:

¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo para que al trazar la perpendicular desde un vértice a la diagonal, ésta quede dividida en dos segmentos, uno de los cuales mide la longitud del lado menor del rectángulo?

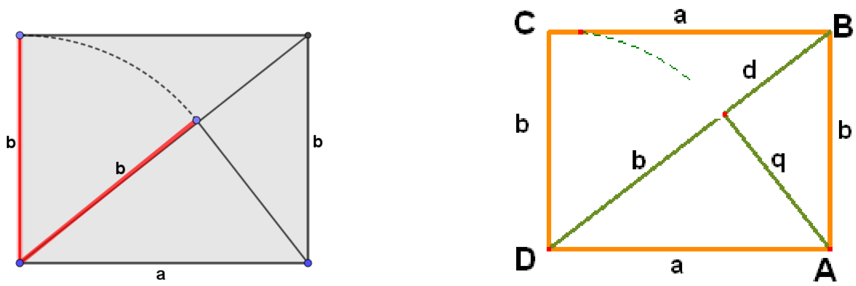


Figura 3.3.14. Tangram mínimo de Brugner

Aplicando el teorema de Pitágoras y el teorema del cateto al triangulo BAD se obtiene que:

$$\frac{a}{b}=\sqrt{\Phi}, \text{ siendo } \Phi \text{ el número de oro.}$$

5. Árbelos de Arquímedes o cuchilla de zapatero. [5], [10]. Se conoce con el nombre de árbelos la región plana limitada por tres semicircunferencias tangentes dos a dos y cuyos centros y puntos de tangencia están alineados.

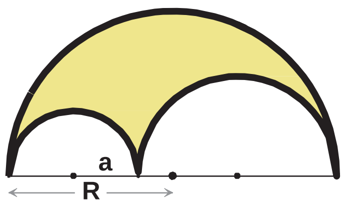


Figura 3.3.15. Árbelos de Arquímedes

Si se denota por a y b, con $a < b$ los radios de las semicircunferencias interiores y por R el de la circunferencia exterior, $R = a + b$.

El área del árbelos es πab o sea el área de una elipse de semiejes a y b. El perímetro del árbelos es $\pi(a+b)$.

6. Más allá del número π. Estudio de los números metálicos, número plástico y proporción cordobesa. Se puede proponer a los alumnos realizar un estudio de los números metálicos. Una de las actividades que se podría llevar a cabo sería, por ejemplo, realizar una construcción con el uso de la regla y el compás de un rectángulo áureo (el cociente entre el lado mayor del rectángulo y el lado menor es igual a la razón áurea).

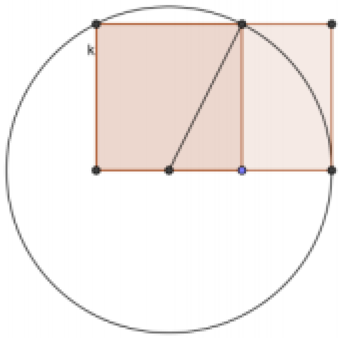


Figura 3.3.16. Construcción de un rectángulo áureo.

7. Actividad extraída de [7]. Área de un polígono regular: en función de su lado, en función de su radio y en función de su número de lados.

   Sea P_n un polígono regular de n lados. Denotaremos por β al ángulo central del polígono, α al ángulo interior, L el lado, r el radio del polígono o radio de su circunferencia circunscrita, y por a, la apotema.

   El ángulo central del polígono mide: $\beta = \frac{2\pi}{n}$, es decir, $\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{n}$.

Área de un polígono regular en función del lado.

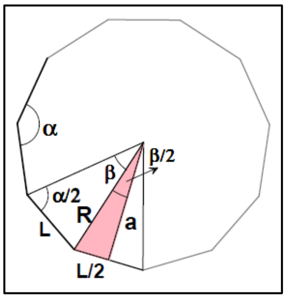


Figura 3.3.17. Polígono regular

Se parte de la fórmula del área del polígono (más habitual) en función del perímetro y la apotema y se expresa ésta en función del lado del polígono.

Haciendo uso de la trigonometría (que se encuentra en los contenidos del módulo IV de ESPAD) tenemos que:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\frac{L}{2}}{a}$$

Por tanto, $a = \frac{L}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$. Como el perímetro del polígono es la suma de sus lados, $P = n \cdot L$, estamos en condiciones de dar la fórmula general del área de un polígono regular en función del lado:

$$\boxed{A(P_n) = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{n \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n} = = \frac{n}{4} \cdot L^2 \cdot \operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.}$$

Área de un polígono regular en función de su radio.

En este caso expresamos la apotema en función del radio del polígono regular.

Por trigonometría expresamos el seno y el coseno de $\frac{\beta}{2}$ en función del radio:

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{L}{2}}{R} \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\pi}{n} = \frac{a}{R}$$

Obtenemos entonces:

$$A(P_n) = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{n \cdot L}{2} \cdot R \cdot \cos\frac{\beta}{2} = \frac{n}{2} \cdot \left(2R \cdot \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(R \cdot \cos\frac{\beta}{2}\right).$$

Y teniendo en cuenta que $2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} = \operatorname{sen}\beta$.

$$\boxed{A(P_n) = \frac{n}{2} \cdot \left(2R \cdot \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(R \cdot \cos\frac{\beta}{2}\right) = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\beta = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}.}$$

Área de un polígono regular en función del número de lados del polígono regular.

Usando trigonometría se tiene que $\alpha + \beta = \pi$ y por tanto, $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta) = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$. Teniendo en cuenta la expresión deducida del área respecto del radio:

$$A(P_n) = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha.$$

Y como $\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot \pi$, tenemos finalmente:

$$\boxed{A(P_n) = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{n-2}{n} \cdot \pi\right).}$$

3.3.5. Plan de fomento a la lectura.

En la ORDEN EDU/487/2017, de 15 de junio, por la que se modifica la Orden EDU/1259/2008, de 8 de julio, por la que se regula la Enseñanza Secundaria para Personas Adultas en la Comunidad de Castilla y León, en su Artículo 10, sobre Programaciones didácticas establece:

"*1. Los centros desarrollarán el currículo previsto en el Decreto 4/2017, de 23 de marzo, por el que se establece el currículo específico de la enseñanza secundaria para personas adultas en la Comunidad de Castilla y León, mediante la elaboración de programaciones didácticas de cada módulo que deberán contener al menos los siguientes elementos:*

a) Secuencia y temporalización de los contenidos.

b) Estándares de aprendizaje evaluables que se consideran básicos.

c) Decisiones metodológicas y didácticas.

d) Perfil de cada una de las competencias de acuerdo con lo establecido en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

e) Concreción de elementos transversales que se trabajarán.

f) Medidas que promuevan el hábito de la lectura.

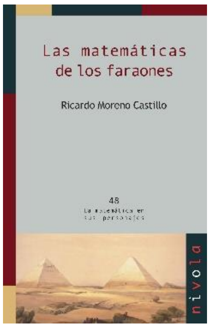
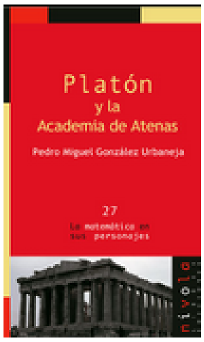
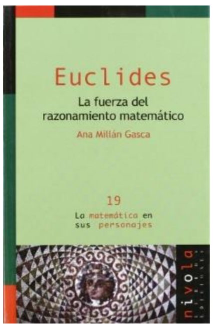
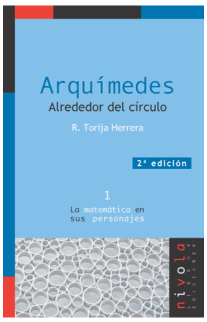
g) Estrategias e instrumentos para la evaluación de los aprendizajes del alumnado y criterios de calificación.

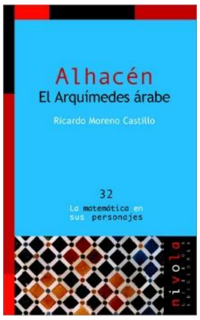
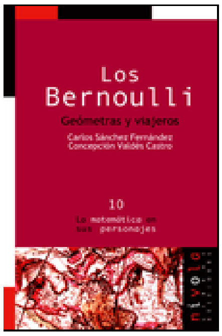
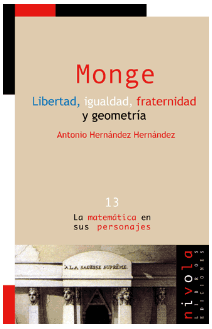
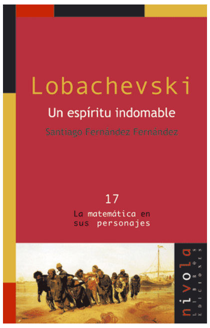
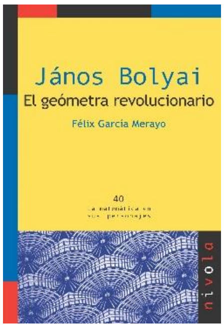
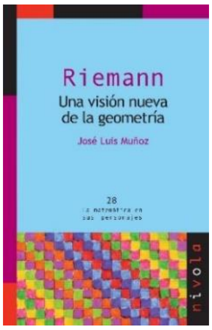
h) Actividades de recuperación de los alumnos.”

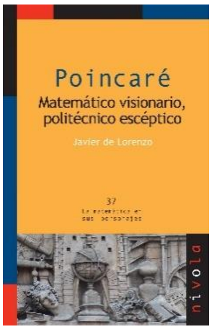
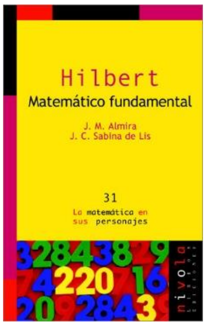
Como se observa en el punto f) se tomarán medidas que promuevan el hábito de la lectura. En este sentido y teniendo en cuenta el interés de la perspectiva histórica de las matemáticas en las unidades impartidas, se proporcionará una serie de libros para que los alumnos los lean individualmente, hagan un resumen del mismo y después (si fuera posible) lo defiendan en una presentación oral de unos ocho minutos.

Con última consulta 12/07/2020, todas las imágenes de portadas han sido obtenidas de https://drive.google.com/file/d/14OGkFJRgrBzJ_Nfz0rfFR_elEk5syYUR/view

La Editorial Nivola tiene la serie “La matemática en sus personajes” - Biografías de los grandes matemáticos, entre los cuales se extraerían los títulos relacionados con la Geometría, por ejemplo:

<table>
<tr><td>Las matemáticas de los faraones.</td><td>Pitágoras. El filósofo del número.</td><td>Platón y la Academia de Atenas.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Euclides. La fuerza del razonamiento matemático.</td><td>Arquímedes. Alrededor del círculo.</td><td>Las mil y una Hipatias.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Alhacén. El Arquímedes árabe.</td><td>Descartes. Geometría y método.</td><td>Los Bernoulli. Geómetras y viajeros.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Euler. El maestro de todos los matemáticos.</td><td>Monge. Libertad, igualdad, fraternidad y geometría.</td><td>Gauss. El príncipe de los matemáticos.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Lobachevski. Un espíritu indomable.</td><td>János Bolyai. El geómetra revolucionario.</td><td>Riemann. Una visión nueva de la geometría.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Poincaré. Matemático visionario, politécnico escéptico.	Hilbert. Matemático fundamental.
	

También pueden usarse otras fuentes como la **Colección Miradas Matemáticas: divulgación y didáctica de las matemáticas. Instituto de Ciencias Matemáticas (**ICMAT), Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y editorial *Libros de la Catarata*. Algunos títulos sobre geometría:

Demostraciones visuales en Matemáticas. Ver para pensar.	La engañosa sencillez de los triángulos.	Las matemáticas del arte.
		

La **Colección de National Geographic**: El mundo es matemático, con títulos como:

- La proporción áurea.
- Los secretos del número π. ¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo?
- Cuando las rectas se vuelven curvas. Las geometrías no euclídeas.
- Al otro lado del espejo. La simetría en matemáticas.
- Las mil caras de la belleza geométrica. Los poliedros.
- Una nueva manera de ver el mundo. La geometría fractal.

La colección: **Genios de las matemáticas** con títulos como:

- La invención del cálculo infinitesimal. Leibniz.
- Una revolución en teoría de números. Gauss.
- La descripción del universo en unas ecuaciones. Laplace.

3.4. Análisis comparativo de libros de texto.

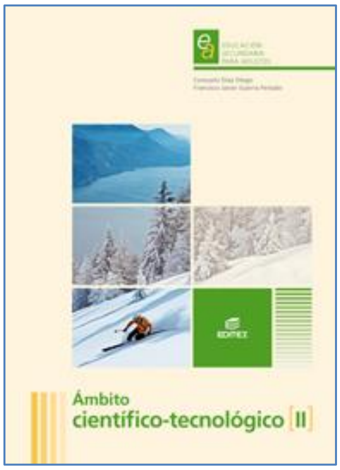
El libro de texto es un recurso muy generalizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Una gran parte de profesores se apoya continuamente en él como herramienta fundamental en su docencia. Por esta razón, se ha realizado una comparativa de dos libros de texto de la parte de geometría plana del ámbito científico tecnológico de tercero de ESPAD.

Adicionalmente, se estudiarán algunos aspectos relacionados con la parte didáctica: claridad de las explicaciones, profundidad en el tema que se está abordando, introducciones que sean motivadoras para los alumnos, actividades propuestas, atención a la diversidad o ayuda al desarrollo de las competencias clave.

Finalmente, se extraerán unas conclusiones con el análisis llevado a cabo.

3.4.1. Selección de libros de texto.

Para realizar la comparativa se han seleccionado dos libros de texto enmarcados en la misma legislación. El primero de los libros es de la editorial Editex y el segundo de ellos es el libro de ESPAD proporcionado gratuitamente por la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. La principal diferencia entre ellos es que el libro de la Consejería es relativo al módulo III de enseñanza del ámbito científico tecnológico y el libro de la editorial Editex se centra en el nivel II del ámbito científico (que corresponderían a los módulos III y IV).

<table>
<tr><td>LIBRO DE TEXTO DE LA CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN:</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>García Delgado, O. (coordinador del grupo), Estébanez Álvarez, A., Morcillo de Pablos, F.J., Romero Herrero, F.J., Sánchez Sierro, A. (2013). Enseñanza Secundaria para personas adultas Ámbito científico-tecnológico. Módulo III.</td></tr>
<tr><td>Figura 3.4.1
Portada del libro Enseñanza Secundaria para personas adultas Ámbito científico-tecnológico. Módulo III. Consejería de Educación.</td></tr>
<tr><td>LIBRO DE TEXTO DE EDITEX:</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Díaz Diego, C., Guerra Perlado, F.J., (2015) Educación Adultos: Ámbito Científico-Tecnológico II.
ISBN: 9788490785195</td></tr>
<tr><td>Figura 3.4.2.
Portada del libro Educación Adultos: Ámbito Científico-Tecnológico II.
Editorial Editex.</td></tr>
</table>

3.4.2. Análisis de libros.

- **LIBRO DE TEXTO DE LA CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN**

El bloque de geometría, del módulo III corresponde a la Unidad 6 y lleva por título: *¿Eres mi semejante?*

Descripción de la unidad:

Introducción: (Una página)

La introducción se realiza de una manera breve haciendo una comparativa entre los pensamientos de la vida real con lo que se verá más adelante en la unidad.

Índice: (Una página)

Se dedica una página al índice de la unidad.

1. Áreas de figuras planas: (Una página)

Se recuerdan las áreas de las siguientes figuras planas: cuadrado, triangulo, rectángulo, rombo, trapecio, paralelogramo, círculo, sector circular y polígono regular.

2. Semejanza: (Cuatro páginas)

Se definen figuras semejantes y los conceptos de razón y proporción. Se enuncia el teorema de Tales tanto analíticamente, como gráficamente y se ejemplifica en dos casos diferentes. Se da la definición de razón de semejanza apoyada con un ejemplo de aplicación. Se detallan aplicaciones al teorema de Tales y cómo se pueden conseguir dichas aplicaciones por medio de la regla y el compás. Se introduce el concepto de escala y se da un ejemplo de la vida real usando un mapa y una maqueta.

3. El triángulo rectángulo: (Dos páginas)

Se hace un recordatorio de lo que es un triángulo rectángulo como introducción al teorema de Pitágoras. Se dan dos ejemplos diferentes, y adicionalmente, se presenta la demostración gráfica del teorema de Pitágoras para un caso concreto.

Glosario: (Una página)

Se resumen los principales conceptos que han aparecido a lo largo de la unidad.

Actividades finales: (Dos páginas)

En cada uno de los apartados descritos anteriormente se incluyen prácticas. Adicionalmente, al final de la unidad, se proponen un total de nueve ejercicios y problemas para practicar lo visto a lo largo de la unidad.

Soluciones a las prácticas: (Dos páginas)

Se detallan las soluciones a las prácticas propuestas a lo largo de la unidad.

Bibliografía: (Una página)

Se proporciona una web-grafía donde se puede ampliar los conocimientos descritos a lo largo de la unidad.

Adecuación de Objetivos y Contenidos:

En el libro se fomentan algunos de los objetivos generales de ESPAD descritos anteriormente. Sin embargo, se trata de un libro que se centra mucho más en el contenido que es necesario alcanzar.

Teniendo en cuenta los objetivos específicos del tema de Geometría plana, vemos que se incluyen cada uno de ellos, con una explicación dada acompañada siempre de ejemplos. Hay que destacar que, quizás, de la parte de coordenadas geográficas no exista mucho detalle. Sin embargo, se adecua a los objetivos definidos por la ley.

Respecto a los contenidos mínimos, el libro detalla cada uno de ellos con prácticas asociadas (y su posterior resolución) de modo que el alumno puede intentar resolver de manera autónoma dichas actividades.

- **LIBRO DE TEXTO EDITORIAL EDITEX:**

El libro de Editex del Ámbito científico – tecnológico de Educación Secundaria para Adultos aborda la geometría en el tema 5 con el título *Geometría del plano y del espacio*.

Descripción de la unidad:

<u>Introducción: (Una página)</u>
El preámbulo al tema se realiza de una manera breve a modo de resumen de los contenidos que se estudiarán a lo largo de la unidad.
<u>1. Revisión de la geometría del plano: conceptos básicos: (Una página)</u>
Se muestra un recordatorio sobre los conceptos de punto, recta y plano, así como de segmento, semirrecta y ángulo. Incluye una clasificación de los ángulos según su amplitud.
<u>2. Lugar geométrico. Determinación de figuras: (Una página)</u>
Se aborda la noción de lugar geométrico y la construcción de la mediatriz de un segmento con regla y compás. Adicionalmente se define la cicloide acompañada de la representación de un caso particular de curva cicloidal.
<u>3. El triángulo. Teorema de Pitágoras y el Teorema de Tales: (Dos páginas)</u>
Se realiza una clasificación de los triángulos en función de los ángulos y se define la altura de un triángulo. Posteriormente, se establecen los conceptos de cateto e hipotenusa para introducir el teorema de Pitágoras, presentando un ejemplo de aplicación del mismo en la vida real. Se define la razón de proporcionalidad de dos segmentos con el objetivo de introducir el teorema del Tales. Se muestra como dibujar con regla y compás dos triángulos en posición de Tales.

4.Figuras de la geometría plana: (Una página)

En una tabla se recogen el perímetro y el área de las siguientes figuras planas: triangulo, cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio y polígono regular. Adicionalmente, se enuncia el área y el perímetro de una figura circular (circulo y circunferencia).

5. Relación de la semejanza en el plano. Escalas: (Una página)

En este apartado trata de la semejanza de figuras y se enuncia el concepto de escala, dando una clasificación de los tipos de escala que se utilizan en los mapas.

6.Movimientos en el plano: Traslaciones, simetrías y giros: (Dos páginas)

Se define movimiento en el plano, y se clasifican los movimientos en directos e inversos. Solo se consideran algunos de los movimientos en el plano, en concreto: traslación, giro y simetría axial. Se pone especial atención a la aparición de estos movimientos en la naturaleza, en el arte y en las construcciones humanas dando ejemplo de frisos en el arte y la arquitectura, de rosetones en el arte y la vida cotidiana y de simetrías axiales en la naturaleza.

7. Revisión de la geometría en el espacio: (Una página)

Se recuerda las definiciones de arista, cara y vértice y en un esquema con figuras se representan las posiciones relativas que existen entre puntos, rectas y planos en el espacio.

Este epígrafe pertenece al módulo IV.

8. Cuerpos geométricos elementales: los poliedros: (Una página)

Después de dar la definición de poliedro y alguna de sus clasificaciones, se establece la famosa relación o fórmula de Euler para poliedros. Una tabla recoge los dibujos de los cinco poliedros regulares, así como sus desarrollos planos y los polígonos de sus caras.

Este epígrafe pertenece al módulo IV.

9. Áreas y volúmenes de algunos cuerpos geométricos: (Una página)

Las fórmulas para las áreas y los volúmenes de los prismas y las pirámides aparecen sintetizadas en una tabla que se amplía a las áreas y volúmenes del cilindro, del cono y de la esfera (cuerpos de revolución).

Este epígrafe pertenece al módulo IV.

10. Coordenadas geográficas y husos horarios: (Una página)

Se habla someramente de globo terráqueo y se definen las circunferencias relevantes sobre el mismo: Ecuador, meridianos y paralelos. En el apartado de coordenadas geográficas se definen los conceptos de latitud y longitud geográficas. Finalmente, se da una pequeña explicación sobre los husos horarios.

Actividades finales: (Cuatro páginas)

En cada uno de los apartados descritos anteriormente se incluyen actividades, adicionalmente, al final de la unidad se proponen un total de 37 ejercicios y problemas para ejercitarse en la práctica de los conceptos abordados a lo largo de la unidad.

<u>Geometría dinámica: los movimientos en el plano (Una página)</u>

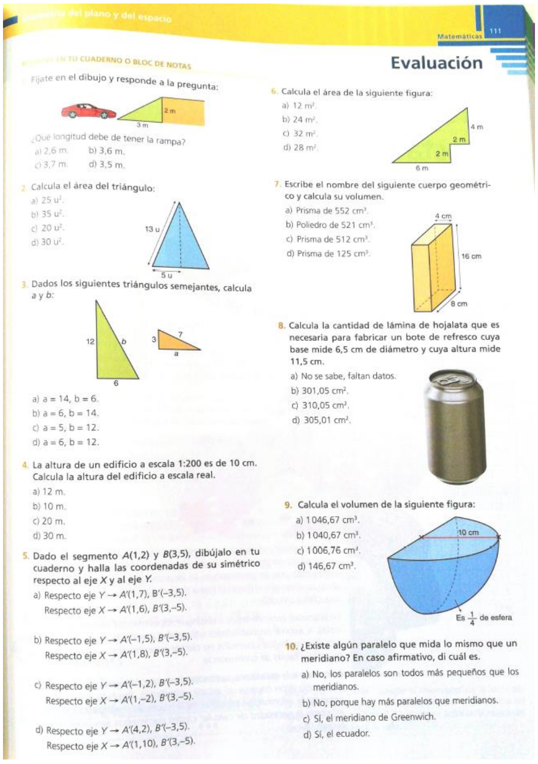
En este apartado, se muestra cómo realizar traslaciones, giros y simetrías con GeoGebra. Además, se aportan algunas webs como recursos adicionales para repasar los conceptos tratados en la unidad.

<u>Resumen (Una página)</u>

Se realiza un esquema - resumen de los conceptos principales y teoremas importantes considerados en la unidad.

<u>Evaluación: (Una página)</u>

Al finalizar el tema aparece un total de diez actividades, a modo de autoevaluación, como estrategia para reflexionar y afianzar el aprendizaje de los alumnos.



del plano y del espacio

Matemáticas 111

Evaluación

EN TU CUADERNO O BLOC DE NOTAS

Fíjate en el dibujo y responde a la pregunta:

¿Qué longitud debe de tener la rampa?

a) 2,6 m. b) 3,6 m.
c) 3,7 m. d) 3,5 m.

2. Calcula el área del triángulo:

a) 25 u^2.
b) 35 u^2.
c) 20 u^2.
d) 30 u^2.

3. Dados los siguientes triángulos semejantes, calcula *a* y *b*:

a) a = 14, b = 6.
b) a = 6, b = 14.
c) a = 5, b = 12.
d) a = 6, b = 12.

4. La altura de un edificio a escala 1:200 es de 10 cm. Calcula la altura del edificio a escala real.

a) 12 m.
b) 10 m.
c) 20 m.
d) 30 m.

5. Dado el segmento $A(1,2)$ y $B(3,5)$, dibújalo en tu cuaderno y halla las coordenadas de su simétrico respecto al eje X y al eje Y.

a) Respecto eje $Y \rightarrow A'(1,7)$, $B'(-3,5)$.
Respecto eje $X \rightarrow A'(1,6)$, $B'(3,-5)$.

b) Respecto eje $Y \rightarrow A'(-1,5)$, $B'(-3,5)$.
Respecto eje $X \rightarrow A'(1,8)$, $B'(3,-5)$.

c) Respecto eje $Y \rightarrow A'(-1,2)$, $B'(-3,5)$.
Respecto eje $X \rightarrow A'(1,-2)$, $B'(3,-5)$.

d) Respecto eje $Y \rightarrow A'(4,2)$, $B'(-3,5)$.
Respecto eje $X \rightarrow A'(1,10)$, $B'(3,-5)$.

6. Calcula el área de la siguiente figura:

a) 12 m^2.
b) 24 m^2.
c) 32 m^2.
d) 28 m^2.

7. Escribe el nombre del siguiente cuerpo geométrico y calcula su volumen.

a) Prisma de 552 cm^3.
b) Poliedro de 521 cm^3.
c) Prisma de 512 cm^3.
d) Prisma de 125 cm^3.

8. Calcula la cantidad de lámina de hojalata que es necesaria para fabricar un bote de refresco cuya base mide 6,5 cm de diámetro y cuya altura mide 11,5 cm.

a) No se sabe, faltan datos.
b) 301,05 cm^2.
c) 310,05 cm^2.
d) 305,01 cm^2.

9. Calcula el volumen de la siguiente figura:

a) 1 046,67 cm^3.
b) 1 040,67 cm^3.
c) 1 006,76 cm^3.
d) 146,67 cm^3.

10. ¿Existe algún paralelo que mida lo mismo que un meridiano? En caso afirmativo, di cuál es.

a) No, los paralelos son todos más pequeños que los meridianos.
b) No, porque hay más paralelos que meridianos.
c) Sí, el meridiano de Greenwich.
d) Sí, el ecuador.

Figura 3.4.3. Autoevaluación del libro de Editex.

Adecuación de Objetivos y Contenidos:

Centrándonos en los objetivos generales del módulo III del ámbito científico-tecnológico, en este libro se pueden encontrar detalles de los objetivos que son necesarios cumplir de la enseñanza secundaria para personas adultas. El libro añade actividades con GeoGebra, de modo, que fomenta el uso de las Tecnologías de Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) por parte de los alumnos. Asimismo, se reflejan valores de igualdad en el lenguaje que se usa en el libro.

Si nos centramos en los objetivos específicos del tema de Geometría plana, nos damos cuenta de que se fomenta el razonamiento en las actividades propuestas a los alumnos. Además, se adecúa de manera correcta a cada uno de los objetivos que marca la ley.

Respecto a los contenidos mínimos, el libro incluye cada uno de ellos, detallados de forma que invita al alumno al pensamiento crítico por medio de una gran variedad de actividades.

3.4.3. Comparación y conclusiones.

El libro de la editorial Editex es más extenso y explícito que el libro ofrecido por la Consejería de Educación. Sin embargo, a beneficio de este último, su accesibilidad inmediata prima en ocasiones frente a la extensión de los contenidos y el número de actividades. De este modo, en mi opinión, puede complementarse los dos libros; ante la gratuidad del libro ofrecido por la Consejería de Educación, puede recomendarse siempre su uso, pero sin duda, el profesor debe, o bien usar de guía otro texto, como el que aquí se ha analizado o bien, si se decidiera como única referencia el de la Consejería, debe sin duda, completar sus contenidos con otros libros, apuntes o materiales adicionales de cara a enriquecer la enseñanza y el aprendizaje.

Por tanto, la conclusión a la que podemos llegar es que pese a la diferencia que separa a los dos libros, es necesario como profesor conocer las necesidades de los alumnos de cara a organizar o enfocar las clases. El abanico de editoriales en la modalidad de Educación Secundaria para Adultos es menor que para la Educación Secundaria Obligatoria. No obstante, el departamento de Matemáticas decidirá qué libro seguir, analizando cada una de las opciones que se encuentren disponibles. Además, cada docente será el encargado de ampliar la información que se encuentre en el libro, en concreto escogido, con nuevas informaciones o actividades didácticas que consigan motivar al alumno y completar de este modo las explicaciones llevadas a cabo para que el aprendizaje sea significativo.

Otra de las editoriales que publica libros para ESPA es la editorial Safel. Aunque no se ha analizado en este trabajo, la edición de sus libros se realiza por bloques, al igual que el libro de la editorial Editex. A diferencia de los libros analizados, en este libro se dedican cuatro unidades al estudio de la geometría: geometría y medida; rectas, ángulos y triángulos; polígonos y circunferencias; y por último, cuerpos geométricos.

4. Propuesta de unidad didáctica del módulo III de ESPAD.

Introducción.

La unidad didáctica que se desarrolla a continuación corresponde al bloque 3 del ámbito científico-tecnológico del módulo III de ESPAD. Es decir, corresponde al bloque de Geometría para la parte de Matemáticas de ámbito científico – tecnológico.

Debido a que he llevado a cabo el periodo de prácticas en el IES Leopoldo Cano de Valladolid, he escogido realizar la unidad didáctica en la modalidad de ESPAD. El IES Leopoldo Cano es un instituto público situado en el barrio de Pajarillos de Valladolid que acoge a alumnos que cursan sus estudios secundarios en la modalidad de educación a distancia para personas adultas. La mayor parte del alumnado en esta modalidad es semi-presencial. Todos los estudiantes son mayores de edad, a excepción de los mayores de dieciséis años que soliciten ingresar en esta modalidad por poseer un contrato laboral que no les permita acudir al centro educativo en régimen ordinario o que sean deportistas de alto rendimiento.

Es importante recordar, que en ESPAD las asignaturas se agrupan en ámbitos de los cuales el ámbito científico-tecnológico posee, además de la asignatura de Matemáticas, los contenidos referentes a las asignaturas de Biología y Geología, Física y Química y Tecnología.

Para desarrollar esta unidad didáctica nos apoyaremos en los conocimientos que el alumno ha adquirido en el pasado y se ampliaran dichos conocimientos con los propios de la unidad.

Objetivos didácticos.

Esta unidad didáctica contiene los siguientes objetivos:

- Reconocer y describir las figuras planas, así como sus elementos y propiedades características, para tener la capacidad de identificar en la vida real dichas figuras y poder clasificarlas.

- Utilizar técnicas asociadas a la geometría plana como el cálculo de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Ser capaz de resolver problemas geométricos usando los teoremas de Tales y de Pitágoras. Asimismo, usar el lenguaje matemático adecuado para la expresión de la resolución de cada problema.

El primer objetivo persigue que el alumno adquiera los conocimientos de la unidad de manera más teórica y el segundo se centra en la adquisición de las capacidades para enfrentarse a este tipo de problemas, teniendo en cuenta que será necesario haber obtenido previamente los conocimientos del primer objetivo.

Contenidos.

De acuerdo con el Decreto 4/2017, de 23 de marzo, donde se establece el currículo específico de la enseñanza secundaria para personas adultas en la Comunidad de Castilla y León, los contenidos que corresponden a esta unidad didáctica son los siguientes:

- Geometría del plano: perímetro y área de figuras elementales.
- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas.
- Aplicación a la resolución de problemas en contextos reales.
- Teorema de Pitágoras. Aplicación a la resolución de problemas.
- El globo terráqueo. Coordenadas geográficas y husos horarios. Longitud y latitud de un punto.

Se consideran como contenidos mínimos de la unidad:

- Conocimiento del perímetro y el área de las figuras elementales y ser capaz de calcularlo.
- Resolución de problemas haciendo uso de los teoremas de Tales y Pitágoras.

Distribución temporal y secuenciación de contenidos.

La modalidad de enseñanza de ESPAD está limitada a dos horas semanales de clase: una hora de tutoría grupal y otra hora de tutoría individual. Se detalla, a continuación, en qué consiste cada tipo de tutoría:

- Tutoría grupal: en estas sesiones se trata de explicar a los alumnos los aspectos teóricos esenciales de la unidad. La asistencia por parte de los alumnos a estas sesiones no es obligatoria. Además, el profesor se adapta al número de alumnos asistentes a cada sesión, de cara a explicar la materia, esto se debe a que el número de asistentes puede variar en gran medida entre sesión y sesión. Estas clases se pueden dividir del siguiente modo:
    - Al inicio de la clase, se realiza una pequeña exploración de los conocimientos previos de los alumnos.
    - Se da una introducción a los nuevos conceptos, acompañada de algunos ejemplos. Además, se realizan ejercicios y problemas en la pizarra.
- Tutoría individual: Puede realizarse en sesiones presenciales dentro del horario asignado para ella o se puede realizar también vía correo electrónico fuera del horario de tutoría individual asignado; en este último caso el horario es a conveniencia del alumno implicado y del profesor. El papel del profesor en estas tutorías responde a los siguientes ítems:
    - Atender las dudas que manifiestan los alumnos.
    - Resolver los problemas que ha recomendado realizar para casa, tratando de incidir en los puntos donde el alumno suele tener dificultades.
    - Realizar la corrección de modelos de exámenes de convocatorias anteriores.
    - Solventa cualquier inquietud académica que pueda tener el alumno.

Por tanto, ajustándonos a estas limitaciones temporales se hará uso de cuatro sesiones de tutorías grupales (esto equivale, a un total de 4 horas, distribuidas en 4 semanas). Cada clase se distribuirá del siguiente modo:

- Sesión 1:

Introducción:
Se realiza un breve preámbulo histórico de la unidad que se va a tratar en las próximas semanas. Se repasan, a modo recordatorio, los conceptos previos necesarios para seguir la actual unidad.

Adicionalmente, se visiona el video de Cristóbal Vila, septiembre 2019 de título Infinite Patterns (Etérea Estudios, Zaragoza, 2019) donde se relacionan Geometría, Arte y Naturaleza partiendo de las propiedades óptimas del hexágono regular, frente al cuadrado o el triángulo equilátero que también recubren el plano.

Exposición explicativa: Geometría del plano: perímetro y área de figuras elementales.
El profesor expone una visión general del tema y posteriormente se centra en este punto de la unidad. Muestra a los alumnos cómo deducir la fórmula del área de un polígono regular ayudándose de descomposiciones, en cartulina, del polígono en triángulos.

Conclusiones: Se exponen, a modo de resumen, los resultados más relevantes aparecidos en el tema.

Tareas para casa (TPC): Se indica a los alumnos una serie de tareas que es recomendable que lleven a cabo en casa para poder conseguir un aprendizaje significativo de lo visto en el aula. Se anima al alumno a construir por sí mismo la figura del polígono regular mostrada por el profesor en el aula.

- Sesión 2:

Corrección de las tareas para casa. Se corrigen las tareas asignadas en la semana anterior, tratando de fomentar la participación de los alumnos en la corrección de las mismas.

Exposición explicativa: Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Escalas.

Conclusiones: Se exponen, a modo de resumen, los resultados más relevantes aparecidos en el tema.

Tareas para casa. Además de las tareas encomendadas, se anima al alumno a la búsqueda de ejemplos de la vida real susceptibles de ser tratados aplicando el Teorema de Tales.

- Sesión 3:

Corrección de las tareas para casa. Se corrigen las tareas asignadas en la semana anterior, tratando de fomentar la participación de los alumnos en la corrección de las mismas.

Exposición explicativa: Teorema de Pitágoras. Además de realizar varias demostraciones de este famoso teorema, se muestra a los alumnos varias demostraciones sin palabras (visuales) de teorema de Pitágoras realizada por Steve Phelps con Geogebra y que se encuentran en la siguiente dirección: https://www.geogebra.org/m/jFFERBdd
Consultado el 26 de junio de 2020.
Además, con materiales manipulativos, cartulina, goma EVA, etc. Los alumnos deben hacer alguna demostración del teorema.

Conclusiones: Se exponen, a modo de resumen, los resultados más relevantes aparecidos en el tema.

Tareas para casa. Adicionalmente a las tareas propuestas, se anima al alumno a realizar un ejemplo, como el visto en clase, en cartulina o goma EVA del triángulo de lados 3, 4 y 5 (tal y como el que se ha mostrado en el aula) para motivar al alumno a crear por sí mismo la demostración del teorema de Pitágoras.

- Sesión 4:

Corrección de las tareas para casa. Se corrigen las tareas asignadas en la semana anterior, tratando de involucrar a los alumnos en la corrección de las mismas.

Exposición explicativa: Aplicación a la resolución de problemas en contextos reales. Se introducen los conceptos relacionados con el globo terráqueo desde un punto de vista de la resolución de problemas.

Esta sesión se dedica completamente a realizar problemas que aparecen en la vida real, en los cuales sea necesario usar los teoremas vistos en la unidad, así como el área y el perímetro de figuras planas. Con ello se pretende que los alumnos sean capaces de relacionar la teoría y los ejercicios aprendidos durante estas semanas en el aula con modelos de la vida real y así constatar la presencia de las matemáticas en su entorno cotidiano.

Conclusiones: Se exponen, a modo de síntesis, los resultados más relevantes aparecidos en el tema.

Tareas para casa. En este punto de la unidad, se propone una serie de tareas que requieran un mayor esfuerzo cognitivo, de este modo, con la resolución de actividades de mayor nivel se pretende saber si, realmente, el alumno ha comprendido la materia correctamente.

- Sesión Extra: Se propondrá a los alumnos la realización de una salida en horario no lectivo (puesto como ya hemos comentado los tiempos en esta modalidad son muy ajustados).

  La salida consistirá en realizar una visita a la sala permanente de Matemáticas: "*Malditas matemáticas... ¿o no?*" que se encuentra en el Museo de la Ciencia de Valladolid.

Competencias clave.

Según las instituciones de la Unión Europea, la adquisición de las Competencias Clave es una necesidad. Además, es fundamental que estas competencias se entrenen día a día puesto que se trata de habilidades que se adquieren con el tiempo. Estas habilidades tienen una importancia muy significativa pues preparan al estudiante para su evolución dentro del mundo, desarrollando su realización personal, social y profesional y desarrollando un aprendizaje continuo a lo largo de su vida.

El desarrollo de la unidad didáctica de *Geometría plana* pretende contribuir a la adquisición de las siete competencias básicas que existen:

Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y tecnología.

Esta competencia básica es la que tiene mayor presencia en la Unidad Didáctica. Está orientada al desarrollo de las destrezas del razonamiento matemático.

Competencia lingüística.

Esta competencia es fundamental de cara a comprender y expresar los enunciados y textos matemáticos correctamente, tanto oralmente, como de forma escrita en los razonamientos y en la resolución de problemas.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

En el contexto en el que se desarrolla esta unidad didáctica, de enseñanza a distancia, la competencia de autonomía e iniciativa personal tiene gran relevancia y se fomenta especialmente, ya que en una hora de tutoría presencial a la semana es imposible abarcar la totalidad de los contenidos necesarios, en consecuencia, se anima al alumno a ser autónomo y buscar información en Internet, además de todo el material colgado en el aula virtual. Por eso, el alumno ha de ser constante en la tarea y tendrá que tratar de resolver las dudas que le vayan surgiendo, juzgando si es capaz de resolver correctamente los problemas y ejercicios se plantean.

Competencia de aprender a aprender.

Esta unidad didáctica otorga a los alumnos la capacidad de aprendizaje autónomo, de reflexión e interés por aprender. Para fomentar la adquisición de esta competencia, el profesor proporcionará textos, ejercicios, problemas y en general actividades de refuerzo para ayudar al alumno a aprender por sí mismo.

Competencia digital.

En la modalidad de educación a distancia, necesariamente se favorece la adquisición de esta competencia puesto que la mayor parte de los materiales para los alumnos se encuentra en el aula virtual. En la enseñanza presencial, además, se usa la pizarra digital. Además, recursos didácticos como el programa GeoGebra para crear y visualizar figuras planas o Geomag para ilustrar la representación del área y el perímetro de las figuras elementales en el plano, videos educativos, etc., contribuirán sin duda a tener alumnos más competentes digitalmente.

Competencias sociales y cívicas.

Este es un aspecto muy importante en el desarrollo del alumno debido a que actualmente, la información relacionada con las matemáticas está cada vez más presente en la vida diaria, así que el alumno conseguirá desarrollar el sentido crítico del razonamiento matemático para aplicarlo en la realidad de su entorno.

Conciencia y expresiones culturales.

Es esencial que los alumnos comprendan que el conocimiento matemático, y la geometría plana en especial, está estrechamente ligado a la cultura, el arte, la pintura, escultura, arquitectura, diseño gráfico o industrial. El uso de la geometría plana ha sido históricamente una inspiración donde las figuras planas y sus propiedades tienen un protagonismo muy significativo.

Metodología.

En la modalidad de ESPAD donde fundamentalmente predomina el trabajo a distancia, se apuesta por metodologías activas. El profesor, mediante la herramienta de Moodle proporcionada por la Junta de Castilla y León, hace llegar a los alumnos los materiales necesarios para que puedan realizar el trabajo de manera autónoma. En caso de que alguno de los alumnos no tenga la posibilidad de acceder a dichos materiales en la plataforma (por ejemplo, debido a que no tenga un ordenador personal, o por falta de recursos económicos), el profesor acuerda con el alumno proporcionar este material de manera impresa, a ser posible en las sesiones de tutorías, fomentando así, además la asistencia de esos alumnos a dichas sesiones.

Es importante, que el profesor prepare los materiales que van a ser compartidos por Moodle de manera pautada y detallada para facilitar el trabajo autónomo del alumno. Además, se preparará dicho material intentando que el alumno se sienta atraído por la materia de manera activa. Por tanto, las principales estrategias metodológicas para que los alumnos alcancen los objetivos que se han planteado en la unidad son:

- **Exposición explicativa**. Consiste en la exposición por parte del profesor de los conocimientos teóricos, pero permitiendo las intervenciones por parte del alumno siempre que sea necesario. El docente, parte en todo momento de lo que el alumno ya sabe, con desarrollos escuetos y procedimientos muy claros, acompañando toda explicación teórica con casos prácticos. Este método será el que predomine en las clases de tutoría grupales.

- **Aprendizaje basado en problemas (ABP).** Esta práctica educativa se basa en presentar a los alumnos un problema iniciando un proceso de investigación para que el estudiante de manera autónoma busque posibles soluciones a la situación que le plantea el docente. Los problemas tendrán un papel fundamental en la unidad, debido a que será la manera de poder afianzar los conocimientos teóricos por parte del alumno. Además, el alumno podrá intervenir de manera activa en la resolución de los problemas y será el modo con el que el profesor pueda identificar cuáles son los puntos poco afianzados por los alumnos, y por tanto, donde será necesario incidir durante las tutorías (tanto grupales como individuales).

- **Aprendizaje cooperativo.** Esta metodologia activa favorece la interacción entre los alumnos. Consiste en la organización del aula en pequeños grupos heterogéneos de alumnos para que ellos puedan resolver un problema propuesto por el profesor en conjunto de forma coordinada. En las tutorias individuales, se tratará de fomentar la participación de los alumnos mediante esta estrategia, lanzando preguntas a cada grupo y permitiendo a los alumnos interactuar entre ellos para así conseguir un aprendizaje significativo de los conceptos explicados en las tutorías grupales.

- **Flipped classroom**. Esta estrategia se basa en dos partes:

    - La primera se desarrolla en casa y consiste en la asimilación por parte del alumno de los contenidos teóricos mediante la visualización de vídeos propuestos por el profesor.

    - Posteriormente en el aula, se proponen problemas que tendrán que ser resueltos por los alumnos bajo la supervisión del profesor. Se trata de un método que puede ser combinado con otras estrategias como por ejemplo el aprendizaje cooperativo, o el aprendizaje basado en problemas. Por tanto, es una práctica muy interesante para llevar a cabo en la modalidad de ESPAD, puesto que el alumno puede aprovechar la clase para resolver posibles dificultades.

Atención a la diversidad.

En la enseñanza a personas adultas, cobra el máximo sentido la atención a la diversidad, debido a que las procedencias y casuísticas del alumnado son muy variadas, debe por tanto aplicarse una atención distinta e individualizada para lograr un aprendizaje eficiente y significativo.

Además, de manera sistemática, el departamento de Matemáticas del centro se coordina con el departamento de orientación para elaborar y aplicar las adaptaciones curriculares necesarias para aquellos alumnos que tengan necesidades educativas especiales. Esto debe ser una tarea constante por parte del profesorado con el objetivo de que los alumnos adquieran las competencias básicas de la asignatura. Entre las actuaciones que se podrían llevar a cabo, en caso de que fuese necesario, se encuentran las siguientes:

- **Medidas generales u ordinarias de atención educativa.** Se trata de las acciones que se toman a nivel de la dirección del centro y que no modifican el currículo de la asignatura. Algunos ejemplos podrían ser:
    - La acción tutorial.
    - Los planes de acogida en el Proyecto Educativo del Centro (PEC).
    - La elección de materias y opciones.
- **Medidas específicas de atención educativa**. Son las medidas que implican la modificación del currículo para adecuarlo a los alumnos con necesidades especiales, la intervención de profesores especialistas, etc., Dentro de este grupo podemos encontrar:
    - El apoyo del profesor de Pedagogía Terapéutica en el aula con el profesor de la materia, de cara a reforzar el papel en el aula de los alumnos con necesidades educativas especiales (ACNEE).
    - En cada unidad didáctica se podrían señalar los contenidos mínimos de la unidad, de cara a los alumnos con dificultades de aprendizaje que se encuentren siguiendo el curso académico.

- En todo el material que se proporcione a los alumnos, se podría diferenciar debidamente cuáles son las preguntas de contenidos mínimos, para que resulte más sencillo reconocer las actividades de contenidos mínimos en el caso de alumnos con dificultades de aprendizaje (DA).

- En caso de existir un profesor de apoyo de compensatoria en el centro, este profesor junto con el profesor de la asignatura y el PT, prestarán especial atención y harán seguimiento personalizado a los alumnos con necesidades de compensación educativa (ANCE).

- **Medidas extraordinarias de atención a la diversidad.** Son las medidas que coinciden con la flexibilización temporal sobre el desarrollo curricular con el objetivo de adquirir las competencias básicas por completo, así como los objetivos. Algunos ejemplos serían los siguientes:
  - La escolarización en cursos anteriores para alumnos con una incorporación tardía y que presenten desfases curriculares de más de un curso.

  - La prolongación de la escolaridad en una etapa para alumnos con necesidades educativas especiales con el objetivo de mejorar su integración socioeducativa y a adquisición de los objetivos de dicha etapa.

  - La aceleración y ampliación de partes específicas del currículo para la atención sobre el alumnado con altas capacidades.

  - La flexibilización del periodo de estancia en una etapa para el alumnado con altas capacidades.

Más específicamente, aunque las medidas que se llevan a cabo para el alumnado de ESPAD (pues requiere igualmente un tratamiento específico de atención personal) varían mucho dependiendo del centro, se citan algunas que podrían ser útiles:

- Realizar un seguimiento que motive al alumno en su aprendizaje cada vez más autónomo, tratando de fomentar su autoestima.

- Adaptación del ritmo de las tutorías grupales e individuales a las necesidades del grupo, proponiendo actividades diferenciadas en función del interés de cada alumno.

- Elaboración de recursos para obtener una adecuada atención a la diversidad pues es necesario considerar los distintos tipos y ritmos de aprendizaje, dada la heterogeneidad del alumnado. Algunos ejemplos de los distintos tipos de recursos pueden ser los siguientes:

  - Fichas de trabajo de consolidación de los contenidos curriculares más relevantes.

  - Fichas de trabajo de profundización para aquellos alumnos que muestran un especial interés más allá de los contenidos propios de la unidad o módulo.

  - Tareas de trabajo cooperativo.

  - Aprendizaje basado en problemas.

  - Videos, animaciones y actividades visuales dinámicas, habida cuenta de la modalidad no presencial de la enseñanza a adultos, esto se hace especialmente útil.

  - Diseño de programación de actividades de ampliación para aquellos alumnos que deseen ampliar su aprendizaje o en caso de que deseen continuar con sus estudios a Bachillerato.

Criterios de evaluación.

Se mencionan los estándares del bloque 3 de Geometría recogidos en el Decreto 4/2017, ya citado:

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTANDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES	COMPETENCIAS BÁSICAS
1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas.	1.1 Conoce y sabe trazar los elementos notables de un triángulo.	1. Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y tecnología. 2. Competencia de aprender a aprender. 3. Competencias digitales.
	1.2. Reconoce las siguientes figuras planas: Triángulo, cuadrado, rectángulo, hexágono, círculo.	1. Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y tecnología. 2. Competencia de aprender a aprender. 3. Competencias digitales.
2. Utilizar el teorema de Tales para el cálculo de medidas indirectas de elementos inaccesibles, objetos de la vida real, representaciones artísticas, como pintura o arquitectura, o para la resolución de problemas geométricos.	2.1. Divide un segmento en partes proporcionales a otros segmentos dados. Establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.	1. Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y tecnología. 2. Competencia en comunicación lingüística. 3. Competencias sociales y cívicas. 4. Competencias digitales.
	2.2. Reconoce triángulos semejantes. Utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes.	1. Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y tecnología. 2. Competencia en comunicación lingüística. 3. Competencias sociales y cívicas. 4. Competencias digitales.
3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.	3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes conociendo su medida a escala.	1. Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y tecnología. 2. Competencias sociales y cívicas. 3. Competencia en comunicación lingüística. 4. Competencia de aprender a aprender. 5. Competencias digitales.

4. Utilizar el teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes, áreas y resolución de problemas geométricos.	4.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos básicos, el área del círculo y la longitud de la circunferencia.	1. Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y tecnología. 2. Competencia de aprender a aprender. 3. Competencias sociales y cívicas. 4. Competencia en la autonomía y la iniciativa personal. 5. Competencias digitales.
	4.2. Resuelve problemas geométricos utilizando el teorema de Pitágoras.	1. Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y tecnología. 2. Competencia de aprender a aprender. 3. Competencias sociales y cívicas. 4. Competencia en la autonomía y la iniciativa personal. 5. Competencias digitales.
5. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.	5.1. Es capaz de ubicar en el globo terráqueo: ecuador, polos, meridianos y paralelos, así como puntos conociendo su longitud y latitud.	1. Competencia matemática y competencias básicas en Ciencia y tecnología. 2. Competencia de aprender a aprender. 3. Competencias sociales y cívicas. 4. Competencias digitales.

Evaluación.

La evaluación inicial en ESPAD cobra un sentido esencial debido a que a menudo acuden alumnos con apenas conocimientos previos (por ejemplo, alumnos que hace algunos años dejaron sus estudios o alumnos inmigrantes) por lo que es importante que el profesor tenga una visión inicial de los conocimientos de cada alumno sobre la materia que se va a explicar ese día.

Por otra parte, la evaluación debe ser un proceso flexible, puesto que pueden surgir muchos imprevistos por parte del alumno a lo largo del curso. Por tanto, las pruebas de evaluación se fijan a criterio del profesor, con características de flexibilidad y adaptación a la diversidad y circunstancias que presenta el alumnado. El fin último es motivar a los alumnos para que continúen asistiendo a clase y consigan un aprendizaje satisfactorio.

La evaluación continua queda marcada por el examen que se realizará al final de cada evaluación que tendrá un peso del 70 % de la asignatura. El 30 % restante será el resultado del trabajo autónomo del alumno, pues tendrá que ir entregando al profesor diferentes tareas, ya sea vía Moodle o en las propias tutorías. Además, en este segundo punto también se engloba el interés mostrado por el alumno en la asignatura y su asistencia a clases y tutorías personales o grupales.

En caso de que el alumno por cualquier circunstancia no consiguiese superar la asignatura, se realizaría un examen final con un nivel equivalente a la prueba libre de ESO. Este examen tendría un valor del 100% de la nota.

Recursos.

Los recursos que se van a utilizar son los siguientes:

- Libro de texto para el desarrollo de la asignatura. El libro de texto es un recurso que puede servir de apoyo a los alumnos de cara estudiar conceptos, resolver dudas y realizar actividades, tanto procedimentales, como de contexto.

- Pizarra. Este recurso es importante, sea de rotulador, digital o de tiza, se trata de un cómodo recurso a la hora de realizar las explicaciones y resolver problemas.

- Cuaderno del alumno. Cada uno de los alumnos deberá tener un cuaderno personal donde tomar apuntes y donde realizar los ejercicios, problemas y actividades.

- Hojas de ejercicios adicionales. Se proveerá a los alumnos de hojas adicionales con listas de ejercicios y problemas para poder ampliar los recursos del libro, y así reforzar los conocimientos. Asimismo, se recomendarán libros de matemáticas de la biblioteca del centro buscando la motivación del alumno.

- Calculadora científica. Necesaria en los momentos puntuales en los que se requiera realizar cálculos largos o simplemente para comprobar las operaciones realizadas por el alumno.

- GeoGebra. Se trata de un programa de geometría dinámica de libre distribución y especialmente útil para el aprendizaje de la geometría. Mediante su uso, se pretende que los alumnos experimenten, descubran y visualicen la geometría. Si hubiese alumnos con dificultades para practicar con el programa en sus casas, lo utilizarán en el aula de informática del centro.

- Geomag. Se trata de un recurso de gran ayuda que ayuda a los alumnos a visualizar de manera manipulativa las figuras planas y espaciales (sólidos platónicos). Con Geomag también puede demostrarse el teorema de Pitágoras, o colocar dos triángulos en posición de Tales.

- Papel, cartulinas, goma EVA, tela, plástico, hilo u otros materiales similares. Es importante que los alumnos puedan construir por sí mismos y visualizar figuras geométricas, así como la deducción de algunas fórmulas asociadas a las figuras planas, usando estos recursos fáciles de adquirir y, sin embargo, potentes para fijar ideas y resultados.

Actividades de aprendizaje.

Se describe a continuación los tipos de ejercicios que se propondrán en el desarrollo de las clases de la unidad. Podemos clasificar las actividades del siguiente modo:

- Actividades cooperativas: se proponen actividades que han de ser resueltas en grupos de manera colaborativa.

- Tareas para casa (TPC) y tareas a realizar en el aula*:* Se trata de tareas que el alumno debe realizar para completar su aprendizaje. Se puede clasificar en diferentes niveles que irían desde ejercicios mecánicos hasta problemas con enunciado que ya requieren un mayor nivel de abstracción por parte del alumno y haber comprendido satisfactoriamente la materia de la unidad.

    - *Ejercicios de asimilación de contenidos*: se trata de ejercicios que serán repeticiones de actividades realizadas en el aula con el fin de que el alumno interiorice los conceptos y resultados.

    - *Problemas con enunciado contextual*: con estos problemas se busca el aprendizaje significativo de los conceptos tratados en la unidad al resolver problemas en distintos contextos y en los que debe interpretar correctamente los resultados.

Además, como se ha detallado en el Epígrafe 3.3. Análisis de instrucción, podemos clasificar las actividades en función de la implicación en el aprendizaje matemático del alumno.

Medios y criterios para evaluar la práctica docente.

El final de curso será el momento de autoevaluar la asignatura impartida de cara a mejorar en años posteriores. Para ello pueden diseñarse rúbricas de evaluación como las que se muestra en la siguiente tabla:

ASPECTOS PARA EVALUAR	A DESTACAR	A MEJORAR	PROPUESTAS DE MEJORA PERSONAL
Temporalización de la UD			
Desarrollo de los objetivos didácticos			
Manejo de los contenidos de la unidad			
Realización de tareas			
Estrategias metodológicas seleccionadas			
Recursos y materiales didácticos			
Claridad en los criterios de evaluación			
Adecuación de los estándares de aprendizaje			
Atención a la diversidad			

Del mismo modo, a final de curso se entregará a los alumnos la siguiente rúbrica dónde podrán evaluar la asignatura. Se tratará de un cuestionario anónimo del siguiente tipo:

Lee atentamente las siguientes cuestiones y valóralas con una puntuación del 1 al 5, donde:

1: Nunca/nada

2: Casi nunca/poco

3: A veces/algo

4: Casi siempre/bastante

5: Siempre/mucho

	1	2	3	4	5
Cuando alguien ha tenido alguna duda/pregunta, he respondido adecuadamente.					
Incito a que participéis en clase.					
Relaciono la materia con lo que nos ocurre en el mundo que nos rodea y/o otras materias.					
Soy respetuoso con vosotros.					
Es fácil comunicarse conmigo.					
Los exámenes se centran en lo explicado en clase y lo que se ha indicado como fundamental.					
Soy justo calificándote.					
Tenéis posibilidad de ver los exámenes y/o revisarlos.					
Se os ha informado de los criterios de calificación.					
Los criterios/normas de evaluación que os di a principio de curso se han cumplido.					
Los consejos y pautas que se os han dan para el estudio o trabajo de la materia os han resultado útiles.					
Las actividades realizadas durante el curso me han sido útiles.					
La asignatura me ha parecido interesante.					
La asignatura me ha parecido fácil.					
Creo que lo que ha aprendido me va a ser útil para entender el mundo en que vivimos.					
He conseguido que te interese algo más la materia.					

De esta manera, se puede comparar lo que piensan los alumnos con nuestras sensaciones y poder mejorar para el futuro.

5. Conclusiones

Se recogen, a continuación, las impresiones con las que, en mi opinión, el Máster contribuye a la formación como futuros docentes de los alumnos que lo cursan.

Los objetivos y las competencias especificas del Máster se pueden encontrar detallados en el Anexo. Personalmente, los objetivos fundamentales se han conseguido y competencias se han adquirido con la realización de este Máster. Además, las asignaturas cursadas han contribuido a la realización de este trabajo de Fin de Máster basado en el desarrollo de una propuesta didáctica para la enseñanza de la geometría plana. Adicionalmente, se ha buscado realizar la propuesta desde una perspectiva histórica. Seguidamente, se detalla la contribución de cada una de las asignaturas del Máster a este trabajo.

En primer lugar, la asignatura *Diseño Curricular en Matemáticas* me ha servido como herramienta para aprender a realizar una unidad didáctica. Es necesario conocer el sistema educativo, las partes que debe tener la propuesta de una unidad didáctica, así como los objetivos y las competencias que son necesarios alcanzar para una mejor adaptación.

Por otro lado, el docente ha de tener conocimientos de mayor nivel que los tratados en el aula. De este modo, el profesor podrá transmitir de manera más completa y segura los contenidos docentes, estás aptitudes se han tratado de desarrollar en la asignatura *Complementos de Matemáticas*.

En el análisis, a nivel didáctico, de las actividades más adecuadas para transmitir los conocimientos a los alumnos, para que estos desarrollen un aprendizaje significativo, se ha tenido en cuenta lo aprendido en la materia *Didáctica de la Matemática.*

En la asignatura *Modelos Matemáticos en Educación Secundaria* se han desarrollado diferentes modelos y situaciones en los que se han basado algunas de las actividades analizadas en este trabajo y que se enmarcan en contextos varios.

Para la selección de las metodologías desarrolladas en la unidad didáctica que se adecuen a los contenidos y los objetivos definidos en ESPAD se han utilizado los conocimientos aprendidos en la asignatura *Metodología y Evaluación en Matemáticas.*

En las actividades propuestas se ha intentado incluir matices innovadores que motiven a los alumnos, como la importancia del uso de las TICs en el aula, ello se ha podido analizar en la materia *Innovación Docente en Matemáticas*.

De la asignatura *Iniciación a la Investigación educativa en Matemáticas* se han tratado temas relacionados con la investigación en la docencia, lo cual es importante para el proceso de la enseñanza – aprendizaje.

Destaco especialmente la asignatura *Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia*, puesto que me ayudó a conocer otro enfoque de las matemáticas y por ello, decidirme a realizar este trabajo desde una perspectiva histórica de la geometría plana. En mi opinión, conocer la evolución histórica del contenido matemático que se va a exponer, provoca una explicación mucho más rica y a su vez, motivadora para el alumno.

Por último, recalcar la importancia *Prácticas Externas,* a pesar de que este año, por razones sanitarias, no hayamos podido finalizarlas. El tema de Geometría plana se impartió vía online, mediante la subida a Moodle de vídeos explicativos en los que tuve la oportunidad de participar. Por tanto, he podido basar la propuesta didáctica en la experiencia vivida en el IES Leopoldo Cano. Además, el periodo de asistencia al instituto ha sido muy enriquecedor para mi formación habiendo podido asistir a clases del módulo III de la modalidad de ESPAD, hecho que me ha facilitado el conocimiento de esta categoría, desconocida hasta entonces para mí. Durante el periodo de prácticas he podido observar la gran diversidad de alumnos que asisten a las clases de ESPAD y, por ello, en la propuesta didáctica, se ha intentado fomentar la motivación de los alumnos con actividades innovadoras y materiales manipulativos. Asimismo, se ha procurado detallar una propuesta que se adapte a la diversidad que se puede encontrar en un aula de ESPAD.

6. Bibliografía

- **Normativa Vigente**

[1] España. DECRETO 4/2017, de 23 de marzo, por el que se establece el currículo específico de la enseñanza secundaria para personas adultas en la Comunidad de Castilla y León. Boletín Oficial de Castilla y León, 27 de marzo de 2017, núm. 59. Consejería de Educación.

[2] España. REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del estado, 3 de enero de 2015, núm. 3. Ministerio de Educación, cultura y deporte.

- **Libros**

[3] Askew M. y Ebbut S., (2012) *Fundamentos de geometría: Desde Pitágoras hasta la carrera espacial.* Barcelona: Blume.

[4] Díaz Diego, C., Guerra Perlado, F.J., (2015) *Educación Adultos: Ámbito Científico-Tecnológico II.* Madrid: Editex.

[5] Fernández Benito, I. y Reyes Iglesias. M.E., (2018) *Periplo por la geometría de Valladolid.* Valladolid: Ayuntamiento de Valladolid.

[6] García Delgado, O., Estébanez Álvarez, A., Morcillo de Pablos, F.J., Romero Herrero, F.J., Sánchez Sierro, A. (2013). *Enseñanza Secundaria para personas adultas Ámbito científico-tecnológico. Módulo III.* Castilla y León: Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Dirección General de Formación Profesional y Régimen Especial.

[7] Reyes Iglesias. M.E. y Fernández Benito, I. (2015) *Pentágonos: Construcciones. Mosaicos. Geometría sagrada.* Valladolid: Universidad de Valladolid.

- **Artículos y trabajos académicos**

[8] Atiyah,M., (2000). *Las matemáticas del siglo XX.* Revista Números. Traducido por Flores, M. y Martinón A., Universidad de La Laguna.

Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/50/Articulo03.pdf
Última consulta 15/07/2020

[9] Barrera García, F. (2009). *Historia de la geometría*. Universidad Nacional Autónoma de México. Disponible en:
http://dcb.fic.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/GeometriaAnalitica/documents/materialadicional/historia_geom.pdf
Última consulta 15/07/2020

[10] Bellot Rosado, F. (2002) *La cuchilla del Zapatero: Lección de preparación olímpica.* Disponible en https://docplayer.es/26638177-La-cuchilla-del-zapatero-leccion-de-preparacion-olimpica-francisco-bellot-rosado.html
Última consulta 15/07/2020

[11] Brügner, G. (1984). *Three-Triangle-Tangram*. BIT.**24**, 380 – 382. Disponible en https://doi.org/10.1007/BF02136037
Última consulta 15/07/2020

[12] Pírez Bustamante, M. (2019). *Análisis del ESPAD en Castilla y León desde una perspectiva curricular (*Trabajo Fin de Máster). Universidad de Valladolid. Valladolid. Disponible en:
http://uvadoc.uva.es/handle/10324/38487
Última consulta 15/07/2020

[13] Sánchez Domenech, I. (2015). La andragogía de Malcom Knowles: Teoría y tecnología de la educación de adultos (Tesis doctoral). Universidad Cardenal Herrera – CEU. Elche. Disponible en:
https://repositorioinstitucional.ceu.es/bitstream/10637/7599/1/La%20andragog%C3%ADa%20de%20Malcom%20Knowles_teor%C3%ADa%20y%20tecnolog%C3%ADa%20de%20la%20educaci%C3%B3n%20de%20adultos_Tesis_Iluminada%20S%C3%A1nchez%20Domenech.pdf Última consulta: 15/07/2020

[14] Santos Rubio, C. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los movimientos del plano. Perspectiva histórica* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Valladolid. Valladolid. Disponible en http://uvadoc.uva.es/handle/10324/32192
Última consulta 15/07/2020

[15] Reyes, E. (2019). Divulgar las matemáticas: Un objetivo, una necesidad. Ponencia en las JAEM (Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas), A Coruña. Disponible en https://drive.google.com/file/d/14OGkFJRgrBzJ_Nfz0rfFR_elEk5syYUR/view
Última consulta 15/07/2020

[16] Venegas Perez, I. (2015). *Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele al resolver problemas geométricos: Un estudio con alumnos de 13 a 16 años en Cantabria* (Trabajo Fin Máster). Universidad de Cantabria. Cantabria. Disponible en:
https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6837/VenegasPerezIrene.pdf
Última consulta 15/07/2020

- **Apuntes académicos universitarios**

[17] González Arteaga, T., Población Sáez, J. A. y Reyes Iglesias, M. E. (2019). Apuntes Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid.

[18] Reyes Iglesias, M. E. (2020). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.

- **Páginas Web**

[19] https://matte23.blogspot.com/2014/12/la-geometria-y-su-historia.html
Ultima Consulta 14/07/2020

[20] https://www.ugr.es/~sevimeco/documentos/edu_multimedia/areas/6.htm
Última consulta 14/07/2020

[21]http://recursostic.educacion.es/descartes/web/matemagicas/pages/hist_mat/textes/h_geom.htm Última consulta 14/07/2020

[22] http://estructurasmatematicas.blogspot.com/2009/04/matematica-discreta.html
Última consulta 14/07/2020

[23] https://prezi.com/d5jy8dlowv-d/geometria-del-siglo-xx-describiendo-el-mundo-real/
Última consulta 14/07/2020

[24] https://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein
Última consulta 16/06/2020

[25] https://es.wikipedia.org/wiki/Julio_Rey_Pastor
Última consulta 16/06/2020

[26] https://es.slideshare.net/JorgeQuintero18/dificultades-en-el-aprendizaje-de-la-geometra
Última Consulta 29/06/2020

[27] https://es.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%AEt_Mandelbrot
Última consulta 11/07/2020

[28] https://www.ugr.es/~fjlopez/_private/Renacimiento
Última consulta 10/07/2020

[29] https://es.wikipedia.org/wiki/Andragog%C3%ADa
Última consulta 15/07/2020

[30] https://www.gaussianos.com/el-teorema-de-los-cuatro-colores-la-teoria-de-grafos-al-servicio-del-coloreado-de-mapas/
Última consulta 11/07/2020

[31] http://la-vesica-piscis.blogspot.com/2013/02/la-vesica-piscis-la-vesica-piscis.html
Última consulta 11/07/2020

[32] http://codi.com.ec/el-puente-mas-alto-del-mundo/
Última consulta 11/07/2020

[33] https://www.educa.jcyl.es/profesorado/es/formacion-profesorado/proyectos-relacionados-formacion-permanente-profesorado/inclusion-cambio-metodologico/documentacion/fichas-resumen-metodologias-activas
Última consulta 12/07/2020

[34] https://anagarciaazcarate.wordpress.com/2013/03/15/tangram-minimo-de-brugner/
Última consulta 09/07/2020

[35] https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/basica/ejercicios-interactivos-del-teorema-de-pitagoras.html
Última consulta 14/07/2020

[36] https://issuu.com/jossyrendi/docs/van_hiele
Última consulta 15/07/2020

[37]http://matematicas.uclm.es/estalmat/sites/matematicas.uclm.es.estalmat/files/files/N%C3%BAmeros%20met%C3%A1licos(1).pdf
Última consulta 14/07/2020

[38] https://www.gaussianos.com/el-teorema-de-los-cuatro-colores-la-teoria-de-grafos-al-servicio-del-coloreado-de-mapas/
Última consulta 14/07/2020

[39] https://www.youtube.com/watch?v=ZF3CgNpkSTQ
Última consulta 25/05/2020

7. Índice de figuras.

Figura 3.1.9. *Mapa de Mesopotamia*.

Figura 3.1.12. *Tales de Mileto.*

Figura 3.1.13. *Pitágoras de Samos.*

Figura 3.1.15. *Euclides.*

Figura 3.1.16. *Arquímedes de Siracusa.*

Figura 3.1.18. *Apolonio de Perga.*

Figura 3.1.21. *Fibonacci.*

Figura 3.1.22. *René Descartes.*

Figura 3.1.24. *Fermat.*

Figura 3.1.26. *Leibniz.*

Figura 3.1.27. *Euler.*

Figura 3.1.28. *Clairaut.*

Figura 3.1.29. *Gaspar Monge.*

Figura 3.1.30. *Lobachevski.*

Figura 3.1.32. *Henri Poincaré*. Recuperadas de *http://dcb.fic.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/GeometriaAnalitica/documents/materialadicional/historia_geom.pdf*
Última consulta 11/04/2020

Figura 3.1.10. *Tablilla Plimpton 322.* Recuperada de *https://es.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322*
Última consulta 12/06/2020

Figura 3.1.11. *Papiro de Rhind.* Recuperada de *https://es.wikipedia.org/wiki/Papiro_de_Ahmes*
Última consulta 11/04/2020

Figura 3.1.14. *Descripción gráfica del enunciado del teorema de Pitágoras.* Recuperada de *https://forum.lawebdefisica.com/blogs/pod/316137-demostraci%C3%B3n-geom%C3%A9trica-del-teorema-de-pit%C3%A1goras*
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.1.17. *Espiral de Arquímedes.* Recuperada de *https://www.gaussianos.com/la-espiral-de-arquimedes/*
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.1.19. *Cono de Apolonio.* Recuperada de
https://sites.google.com/site/conodeapolonio/
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.1.20. *Secciones del cono de Apolonio.* Recuperada de
https://www.wikiwand.com/es/Secci%C3%B3n_c%C3%B3nica
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.1.23. *Eje de coordenadas cartesianas.* Recuperada de
https://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_cartesianas
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.1.25. *Isaac Newton.* Recuperada de
https://www.biografiasyvidas.com/biografia/n/newton.htm
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.1.31. *Riemann.* Recuperada de
https://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.1.33. *Felix Klein.* Recuperada de
https://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Klein
Última consulta 16/06/2020

Figura 3.1.34. *Julio Rey Pastor.* Recuperada de
https://es.wikipedia.org/wiki/Julio_Rey_Pastor
Última consulta 16/06/2020

Figura 3.3.1. *La suma de los ángulos de un triángulo mide 180º* y **Figura 3.3.5.** *Ilustración del problema 1.* Recuperadas de
Díaz Diego, C., Guerra Perlado, F.J., (2015) *Educación Adultos: Ámbito Científico-Tecnológico II. :* Editex

Figura 3.3.2. *Comprobación de la fórmula del área de un polígono regular.* Elaboración propia.

Figura 3.3.3. *Deducción del área del rombo.* Elaboración propia.

Figura 3.3.4. *Triángulos semejantes con Geomag.* Elaboración propia.

Figura 3.3.6. *Viaducto de Millau.* Recuperada de
http://codi.com.ec/el-puente-mas-alto-del-mundo/
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.3.7. *Partes de un arco* y la **Figura 3.3.15.** *Árbelos de Arquimedes.* Recuperadas de
Fernández Benito, I. y Reyes Iglesias. M.E., (2018) *Periplo por la geometría de Valladolid:* Ayuntamiento de Valladolid.
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.3.8. *Vesica Piscis en la catedral de León.* Recuperada de
http://la-vesica-piscis.blogspot.com/2013/02/la-vesica-piscis-la-vesica-piscis.html
Última consulta 11/07/2020

Figuras 3.3.9. y 3.3.10. *Vesica Piscis con Geogebra.* Elaboración propia.

Figura 3.3.11. *Construcción del hexágono regular con regla y compás* Elaboración propia.

Figura 3.3.12. *Reja de un balcón.* Fotografía propia.

Figura 3.3.13. y **Figura 3.3.14**. *Tangram mínimo de Brugner.* Proporcionadas por
Reyes Iglesias, M. E. (2020). Rectángulo tangram de Brugner.
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.3.16. *Construcción de un rectángulo áureo.* Recuperada de
http://matematicas.uclm.es/estalmat/sites/matematicas.uclm.es.estalmat/files/files/N%C3%BAmeros%20met%C3%A1licos(1).pdf
Última consulta 12/07/2020

Figura 3.3.17. *Polígono regular.* Imagen obtenida de:
Reyes Iglesias, M. E. (2020). Apuntes Modelos Matemáticos en Educación Secundaria. Máster de Profesor en Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Universidad de Valladolid. Valladolid, España
Última consulta 11/07/2020

Figura 3.4.1. *Portada del libro Enseñanza Secundaria para personas adultas Ámbito científico-tecnológico. Módulo III. Consejería de Educación.* Recuperada de

https://www.educa.jcyl.es/adultos/es/materiales-recursos/ensenanza-secundaria-personas-adultas/ambito-cientifico-tecnologico/modulo-iii-cientifico-tecnologico
Última consulta 12/07/2020

Figura 3.4.2. *Portada del libro Educación Adultos: Ámbito Científico-Tecnológico II. Editorial Editex.*

Figura 3.4.3. *Autoevaluación del libro de Editex.* Recuperada de

Díaz Diego, C., Guerra Perlado, F.J., (2015) Educación Adultos: Ámbito Científico-Tecnológico II.
Última consulta 12/07/2020

Anexo: Objetivos y competencias del Máster

Lo que sigue a continuación está extraído de la página oficial del Máster en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas de la Universidad de Valladolid: https://www.uva.es/export/sites/uva/2.docencia/2.02.mastersoficiales/2.02.01.ofertaeducativa/detalle/Master-en-Profesor-de-Educacion-Secundaria-Obligatoria-y-Bachillerato-Formacion-Profesional-y-Ensenanzas-de-Idiomas/ Última consulta 16/07/2020.

Objetivos

OG1: Que los estudiantes sepan aplicar, como profesionales docentes, los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con la especialidad cursada.

OG2: Que los estudiantes sean capaces, como profesionales docentes, de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación en los centros escolares de sus conocimientos y juicios.

OG3: Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones, conocimientos y razones últimas en las que se sustentan como profesionales docentes, tanto a públicos especializados como a no especializados, de un modo claro y sin ambigüedades.

OG4: Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando y formándose como profesionales docentes, de un modo en gran medida autodirigido o autónomo.

Competencias

Según establece el Real Decreto 1393/2007 de 29 de octubre, los planes de estudios conducentes a la obtención de un título deberán tener en el centro de sus objetivos la adquisición de competencias por parte de los estudiantes, ampliando, sin excluir, el tradicional enfoque basado en contenidos y horas lectivas. A su vez, Ley Orgánica 2/2006 de Educación y en la Resolución de 17 de diciembre de 2007, establece, concretamente, las competencias generales del master que aquí presentamos, así como las específicas de cada uno de los módulos que deben componer el mismo.

Competencias Generales

G.1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.

G.2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes, así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.

G.3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.

G.4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.

G.5. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.

G.6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.

G.7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.

G.8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

G.9. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.

G.10. Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas e interrelación con la realidad social de cada época.

G.11. Informar y asesorar a las familias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre la orientación personal, académica y profesional de sus hijos.

Competencias Específicas del módulo genérico

Aprendizaje y desarrollo de la personalidad

E.G.1. Conocer las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones.

E.G.2. Comprender el desarrollo de la personalidad de estos estudiantes y las posibles disfunciones que afectan al aprendizaje.

E.G.3. Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales.

E.G.4. Identificar y planificar la resolución de situaciones educativas que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje.

Procesos y contextos educativos

E.G.5. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula y en el centro, abordar y resolver posibles problemas.

E.G.6. Conocer la evolución histórica del sistema educativo en nuestro país.

E.G.7. Conocer y aplicar recursos y estrategias de información, tutoría y orientación académica y profesional.

E.G.8. Promover acciones de educación emocional, en valores y formación ciudadana.

E.G.9. Participar en la definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia.

Sociedad, familia y educación

E.G.10. Relacionar la educación con el medio y comprender la función educadora de la familia y la comunidad, tanto en la adquisición de competencias y aprendizajes como en la educación en el respeto de los derechos y libertades, en la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres y en la igualdad de trato y no discriminación de las personas con discapacidad.

E.G.11. Conocer la evolución histórica de la familia, sus diferentes tipos y la incidencia del contexto familiar en la educación.

E.G.12. Adquirir habilidades sociales en la relación y orientación familiar.

Competencias Específicas del módulo específico

Complementos para la formación disciplinar

E.E.1. Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas.

E.E.2. Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.

E.E.3. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.

E.E.4. En formación profesional, conocer la evolución del mundo laboral, la interacción entre sociedad, trabajo y calidad de vida, así como la necesidad de adquirir la formación adecuada para la adaptación a los cambios y transformaciones que puedan requerir las profesiones.

E.E.5. En el caso de la orientación psicopedagógica y profesional, conocer los procesos y recursos para la prevención de problemas de aprendizaje y convivencia, los procesos de evaluación y de orientación académica y profesional.

Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes

E.E.6. Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las materias correspondientes.

E.E.7. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo.

E.E.8. Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos.

E.E.9. Fomentar un clima que facilite el aprendizaje y ponga en valor las aportaciones de los estudiantes.

E.E.10. Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza aprendizaje.

E.E.11. Conocer estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo.

Innovación docente e iniciación a la investigación educativa

E.E.12. Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada.

E.E.13. Analizar críticamente el desempeño de la docencia, de las buenas prácticas y de la orientación utilizando indicadores de calidad.

E.E.14. Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las materias de la especialización y plantear alternativas y soluciones.

E.E.15. Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación.

Competencias Específicas del módulo Practicum

Practicum en la especialización, incluyendo el Trabajo fin de Máster

E.P.1. Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización.

E.P.2. Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente.

E.P.3. Dominar las destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar un clima que facilite el aprendizaje y la convivencia.

E.P.4. Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica.

E.P.5. Para la formación profesional, conocer la tipología empresarial correspondiente a los sectores productivos y comprender los sistemas organizativos más comunes en las empresas.

E.P.6. Respecto a la orientación, ejercitarse en la evaluación psicopedagógica, el asesoramiento a otros profesionales de la educación, a los estudiantes y a las familias.