UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Dpto. Didáctica de la Matemática

Materiales manipulativos y resolución de problemas en geometría para educación secundaria.

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Diego Campos Puente

Tutor: Edgar Martínez Moro

Valladolid, 2020

Resumen: en el presente Trabajo de Fin de Máster se realizará un esfuerzo por transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas y por estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas, más allá de la mera transmisión de recetas adecuadas. Nos basaremos en una estrategia para un aprendizaje como investigación con planteamiento de situaciones, estudio cualitativo de las situaciones problemáticas, orientación para el tratamiento científico de los problemas y sistematización de los nuevos conocimientos.

Summary: in the present work, we will make an effort to try to convey heuristic strategies in order to solve problems in an autonomous way and not by using memorized formulas. It is based on strategies for a learning as a research with different situations approaches and a study of the difficulties that lead students to a scientific solution that systematizes new knowledges.

INDICE

1 INTRODUCCIÓN

El presente escrito pertenece al Trabajo final de Fin de Máster correspondiente al Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la especialidad de Matemáticas. Se trata de un trabajo realizado a partir de las enseñanzas de un máster de un año de duración y un total de 60 ECTS incluidos, de formación didáctica genérica, didáctica de la especialidad de matemáticas y un periodo de prácticas en un centro de enseñanza.

1.1 JUSTIFICACIÓN DEL TFM

Tal y como aparece reflejado en multitud de estudios sobre la evaluación de las competencias (estudios PISA, TIMSS, a nivel internacional, y también los realizados a nivel autonómico en castilla y León), los conocimientos sobre el campo de la geometría mostrados por los alumnos detallan una enorme dificultad a la hora de asumir los contenidos.

Llama la atención que estos resultados se produzcan en un área tan visual, como lo es la geometría, y los resultados sean más bajos que en otras áreas más abstractas como el álgebra o la aritmética. Por ello, debemos hacer hincapié en estudiar a fondo este fenómeno y a examinar nuevos métodos de enseñanza de geometría, en aras de resultar más eficaces, no para la obtención de los meros resultados, sino para obtener una comprensión íntegra de los distintos conceptos desde los primeros niveles de enseñanza obligatoria.

La exposición de conceptos partiendo de materiales manipulativos obedece a la intención de acabar con el funcionamiento prototípico clásico de los alumnos, y también de la metodología del profesor en que, a través de la ardua y repetitiva memorización de los mecanismos de resolución, se ejecute la serie de problemas demandados.

Se trata, por lo tanto, de la búsqueda de la comprehensión íntegra de los principios geométricos desde el comienzo, para atajar los diferentes ejercicios, cada uno de ellos de una diversa naturaleza, de una manera en que primen la lógica y la capacidad de búsqueda razonada, primero de los métodos y, luego de la resolución final.

En este Trabajo de fin de Máster se llevará a cabo un acercamiento a esos materiales manipulativos como herramienta para dichos métodos de enseñanza de la geometría.

1.2 ESTRUCTURA DEL TRABAJO

El presente trabajo está estructurado de la manera siguiente:

- Se realizará una declaración de intenciones de las razones que justifican y los objetivos que se pretenden conseguir con el mismo.
- Se analizará el estado actual de la enseñanza de las matemáticas y, en particular, de la enseñanza de geometría.
- Se describirá la teoría existente en la enseñanza mediante materiales manipulativos en

matemáticas, a través del análisis de diversos textos relacionados.

- Se enumerará los distintos materiales potencialmente utilizables de manera eficaz para la enseñanza de geometría, exponiendo sus características principales, así como las ventajas e inconvenientes de su utilización-
- Se llevará a cabo una propuesta de unidad didáctica de un tema de geometría contenido en el currículo de secundaria, diseñada para su impartición en el periodo del prácticum.
- Se elaborarán conclusiones fruto de la elaboración del propio documento, de la investigación en textos relacionados y de la experiencia personal en las prácticas.

1.3 OBJETIVOS DEL TRABAJO

Los objetivos que se pretenden conseguir con este trabajo son los que exponen a continuación:

- El objetivo principal radica en diseñar una propuesta didáctica válida para el aprendizaje de contenidos en el currículo de un curso de secundaria, en concreto en 2º de E.SO., utilizando como herramienta principal materiales manipulativos.
- Analizar la situación actual de la educación en cuento a la enseñanza de matemáticas se refiere, y, en concreto, a la de geometría.
- Encontrar una justificación teórica al uso de de materiales manipulativos y poner de manifiesto sus ventajas frente a las herramientas metodológicas clásicas.
- Exponer las dificultades y las potencialidades de los procesos de aprendizaje de geometría.
- Dar a conocer los distintos materiales manipulativos que pueden aplicarse en la enseñanza de geometría, sus características principales y la manera adecuada de utilizarlos.

2 MARCO ACTUAL

Para comprender la importancia y la necesidad de materiales manipulativos en el aprendizaje de la geometría, se debe realizar un análisis del estado de la educación actual en cuanto a la enseñanza de las matemáticas en la educación matemática y, en particular de la geometría.

Para empezar, se llevará a cabo un análisis de diversos estudios sobre la evaluación de dichas competencias. Concretamente, sobre El programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), que frece resultados a nivel nacional y autonómico y el Trends in Mathematics and Study Science Study (TIMSS), también de ámbito internacional.

Además, se debe entender el marco legislativo en que se encuadran todos los procesos de aprendizaje y de enseñanza, definido por la Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre y por el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, que define el currículo base para la educación secundaria obligatoria y el Bachillerato en todo el estado y, a la orden EDU/362/2015, por la que se establece el currículo, se regula la implantación y la evaluación de la educación secundaria y el bachillerato en Castilla y León.

2.1 COMPETENCIA MATEMÁTICA EN SECUNDARIA SEGÚN INFORME PISA

El informe PISA (del inglés Programme for International Student Assessment) es un estudio que trata de medir la competencia de los alumnos en tres campos: las matemáticas, la ciencia y la lectura. Lo realizan los países de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos) con el objetivo de mejorar las políticas de educación.

El concepto de competencia cada vez aparece más en la legislación educativa y significa más que la adquisición de conocimientos. Es la capacidad de una persona para afrontar con un grado alto de eficacia los problemas que plantea la vida real. Según (La Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre) la competencia matemática:

"Implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto."

Según Alsina (2009), ser matemáticamente competente implica:

- Pensar matemáticamente: diseñar por uno mismo el conocimiento matemático en situaciones en que se requiera el método de prueba y error, la intuición, la abstracción y la relación de conceptos.
- Razonar matemáticamente: ser capaz de llevar a cabo procesos de inducción y de deducción, argumentación de decisiones tomadas, particularizar y generalizar adecuadamente.
- Plantear y resolver problemas: para ello es necesario, primeramente, leer y entender el enunciado y, posteriormente, realizarse preguntas, planificar y desarrollar respuestas con el objetivo de validar soluciones.
- Obtener, interpretar y generar información propia de los contenidos matemáticos a utilizar.
- Utilizar las técnicas matemáticas básicas: como contar, operar, medir, situarse espacialmente y utilizar instrumentos de cálculo tecnológicos para hacer matemáticas.
- Comunicación: ser capaces de trasmitir correctamente los problemas solucionados a los demás por medio escrito, por medio oral y por medio del lenguaje matemático.

Es todo eso lo que el informe PISA trata de evaluar en sus pruebas. Unas pruebas cuyas características principales son:

- Se realiza entre alumnos de 15 años, sin un nivel determinado, mediante unas pruebas estandarizadas con, actualmente, una periodicidad de 3 años.
- Son los gobiernos, a través de sus instituciones educativas los que encargan la realización de las pruebas.
- evalúa solo tres áreas: lectura, matemáticas y ciencias naturales. Son independientes de cualquier asignatura o currículo.
- Las pruebas tienen un fuerte carácter contextual. No tratan problemas abstractos, que tratan de introducir a los alumnos en escenarios reales donde deben saber desenvolverse con éxito. El informe mide, por lo tanto, la capacidad de los alumnos de resolver problemas y no, los conocimientos escolares propiamente.

Prueba de ciencias	
Estonia	530
Japón	529
Finlandia	522
Corea del Sur	519
Canadá	518
Polonia	511
N. Zelanda	508
Eslovenia	507
Reino Unido	505
Alemania	503
Australia	503
P. Bajos	503
EEUU	502
Bélgica	499
Suecia	499
R. Checa	497
Irlanda	496
Suiza	495
Dinamarca	493
Francia	493
Portugal	492
Austria	490
Noruega	490
OCDE	489
Letonia	487
España	483
Lituania	482
Hungría	481
Luxemburgo	477
Islandia	475
Italia	468
Turquía	468
Eslovaquia	464
Israel	462
Grecia	452
Chile	444
México	419
Colombia	413

Prueba de matemáticas	
Japón	527
Corea del Sur	526
Estonia	523
P. Bajos	519
Polonia	516
Suiza	515
Canadá	512
Dinamarca	509
Eslovenia	509
Bélgica	508
Finlandia	507
Reino Unido	502
Suecia	502
Noruega	501
Alemania	500
Irlanda	500
Austria	499
R. Checa	499
Letonia	496
Francia	495
Islandia	495
N. Zelanda	494
Portugal	492
Australia	491
OCDE	489
Italia	487
Eslovaquia	486
Luxemburgo	483
España	481
Hungría	481
Lituania	481
EEUU	478
Israel	463
Turquía	454
Grecia	451
Chile	417
México	409
Colombia	391

Fuente: OCDE europapress.es

Imagen 2.1.1 Ranking de países según la puntuación en el informe PISA en matemáticas y ciencias.

El último informe PISA se dio a conocer diciembre del año 2019 con datos tomados del año anterior. España obtuvo una puntuación en matemáticas de 481 puntos (siendo 489 la media del total de países de la OCDE) siendo superada por, además de los países asiáticos que tienden a copar los primeros puestos en esta clasificación, por la mayor parte de los países vecinos de la unión europea. Los resultados son similares en lectura.

Desde el año 2003 los resultados en España se han mantenido relativamente estables. Según el sociólogo José Saturnino Martínez:

"Los resultados reflejan a inercia cultura del país. Si pensamos en que España tenía analfabetismo a finales de los 70 y principios de los 80, cuando ya estaba erradicado desde hacía medio siglo en el resto de Europa, es cuando nos damos cuenta de que hay una inercia histórica que explica en buena medida los resultados de PISA y esa constancia que vemos, incluso entre comunidades autónomas dentro de España". (Martínez, J.S. (2019, 6 de Diciembre).Pisa según los expertos. Newtral. Recuperado de https://www.newtral.es/)

Hay que tener en cuenta, además que esos datos de estancamiento se han tomado en un periodo de continuos cambios educativos y socioeconómicos, por lo que la estabilidad de datos puede considerarse positiva. Al observarse los datos de otros países, se muestra claramente que ese estancamiento aparece en la mayoría, tanto en puntuación como en posicionamiento en la clasificación.

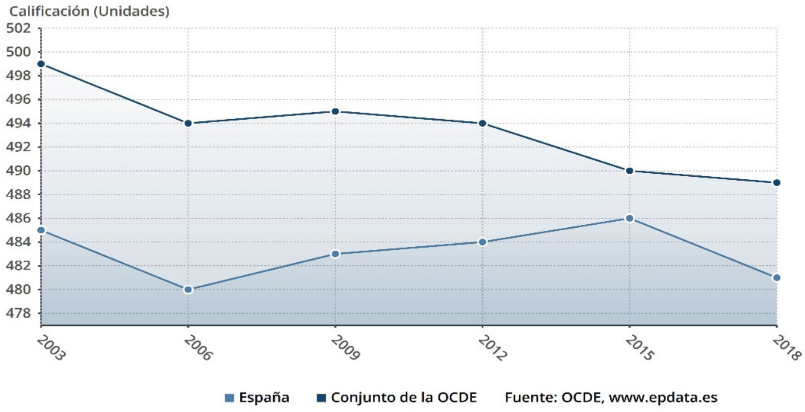


Imagen 2.1.2 Evolución de la calificación en matemáticas desde 2003.

Para entender los que esta puntación obtenida significa, ésta se asocia a seis niveles en los que las capacidades de los estudiantes respectivamente son las siguientes:

- **Nivel 1 (358 puntos):** en este nivel, los estudiantes son capaces de responder a problemas sencillos de su entorno, de identificar la información y poner en práctica procesos sistemáticos siguiendo instrucciones explicitas, es decir, realizan acciones obvias que prácticamente se deducen inmediatamente al entender la hipótesis presentada.
- **Nivel 2 (420):** los alumnos con este nivel saben identificar situaciones en hipótesis con tan solo una inferencia de carácter directo. Son capaces de obtener información de una única fuente y manifestarla mediante un solo medio de representación. Realizan razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
- **Nivel 3 (482)**: En el tercer nivel los alumnos ejecutan procedimientos enunciados claramente, contemplando los que necesitan de decisiones secuenciales. Manejan interpretaciones suficientemente sólidas como para elaborar modelos simples y aplicar estrategias de resolución sencillas. Tienen cierta capacidad para utilizar porcentajes, fracciones y números decimales y proporciones.
- **Nivel 4 (545):** En el cuarto nivel, los estudiantes pueden obtener soluciones de modelos explícitos en hipótesis complejas y concretas, Maneja diferentes representaciones, incluyendo simbólicas y asociarlas a situaciones del mundo real. Estos alumnos utilizan sus habilidades para razonar con éxito en contextos sencillos.
- **Nivel 5 (607 puntos):** los alumnos de el nivel 5 son capaces de elaborar modelos y aplicarlos a situaciones complejas identificando las posibles restricciones. Trabajan de manera estratégica y manifiestan habilidades de pensamiento y razonamiento amplias y bien elaboradas y son capaces de representarlas adecuadamente con caracterizaciones tanto simbólicas como formales. De manera paulatina, estos alumnos comienzan a desarrolla una capacidad de reflexión sobre los

problemas realizados y de manifestar sus conclusiones y argumentos.

- Nivel 6 (669 puntos): en el nivel 6 los estudiantes poseen la capacidad de formalizar conceptos y de hacer uso de la información fruto de sus propias investigaciones. También tienen capacidad para relacionar de manera simultánea diferentes fuentes de información, representarlas y realizar intercambios entre ellas de manera dinámica. Los alumnos del nivel más alto llevan a cabo reflexiones acerca de sus acciones y son capaces de formular y comunicar de manera precisa acciones y reflexiones relacionadas con sus los descubrimientos, interpretaciones, argumentos y adecuaciones a las situaciones iniciales.

Es, por tanto, más destacable, no la puntuación general del país, sino la cantidad de alumnos que están dentro de cada nivel, en cada muestra tomada.

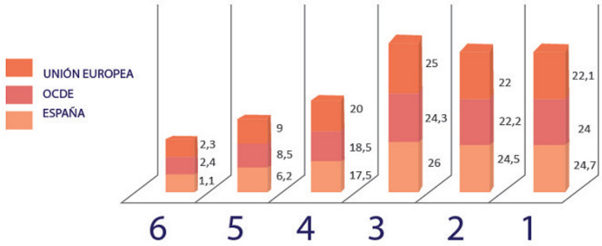


Imagen 2.1.3 Porcentaje de alumnos de cada uno de los niveles.

Los datos son similares, de manera proporcional a los de los países de la OCDE y los de la Unión Europea, pero sí que reflejan una necesidad de atender de marera específica y personalizada a aquellos estudiantes que no superan el nivel 1, que suponen casi un cuarto del total.

Otra de las razones que explican por qué España copa posiciones media-bajas en la clasificación responde a cuestiones económicas. La OCDE es una organización de países que nació de con el objetivo de reconstruir Europa tras la 2º Guerra Mundial mediante la financiación del Plan Marshall. Debido a su éxito, se unen poco después Estados Unidos y Canadá. En los años sesenta se unieron países asiáticos de altas rentas como Japón o Corea del Sur. Por lo tanto, son pocos los países en la organización, todos ellos adheridos posteriormente, con un nivel económico marcadamente inferior a España, solo algunos países sudamericanos como Colombia o México, que son precisamente los que ocupan las posiciones más bajas. Está demostrada la relación entre rendimiento académico y nivel económico, y España se enfrenta, en el estudio de PISA, a países en que la gran mayoría tiene un potencial económico superior.

Más preocupante, y quizás debido a esta relación citada anteriormente, es la gran diferencia entre las comunidades autónomas dentro de España, entre estudiantes que pertenecen al mismo sistema educativo pero que, por las competencias autonómicas, ni los requerimientos, ni el rendimiento en PISA es el mismo.

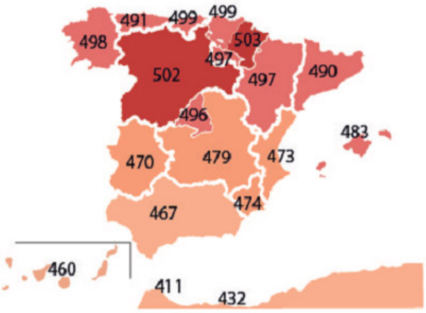


Imagen 2.1.4 Puntuación en matemáticas de cada comunidad autónoma.

Dentro del país, Castilla y León ocupa la segunda posición, solo superada por Navarra en esta ocasión, aunque siempre ocupa primera posiciones. Con 502 puntos, Castilla León ocuparía una duodécima posición en la clasificación, con un rendimiento cercano a países como Finlandia, el cual siempre se toma de ejemplo al hablar de sistemas de educación exitosos.

Esto demuestra que no se puede evaluar a un país por un número que resulta la media de rendimiento de estudiantes de todo el territorio nacional y qué los resultados del informe PISA son muy positivos en la comunidad.

Y más aún, cuando las pruebas que se realizan en el estudio de PISA no tienen en cuenta el currículo ni evalúan los conocimientos de los alumnos, sino que les colocan en medio de un problema para resolverlo sin necesitar en muchas ocasiones de conocimientos escolares.

Un cambio del sistema educativo español en este sentido, dejar de lado conceptos y ahondar en contextos para conseguir a toda costa que los alumnos sean más resolutivos es una de las cuestiones que se deben reflexionar.

Otra de las preguntas a las que se llegan según los datos del estudio es la de la diferencia de resultados entre sexos, una diferencia cada vez menos amplia, pero a tener en cuenta.

El estudio se realiza con alumnos de 15 años, es decir de cuarto de la E.S.O., curso en el que los estudiantes tienen ya decidida en su mayoría el tipo de bachillerato al que quieren acceder y, al menos, la tipología de la carrera o grado de formación profesional que desean estudiar. Los datos del curso 2018/2019 siguen reflejando una diferencia notable entre el número de chicos (mayor) y chicas que cursan el bachillerato de Ciencias e Ingeniería y lo mismo sucede con las carreras universitarias a las que conduce dicho bachillerato. La pregunta está clara: ¿Por qué las matemáticas y el resto de materias científicas no son capaces de atraer por igual a ambos sexos? Y: ¿se está haciendo algo para en ese sentido? Para tener conciencia de ello y potenciarlo.

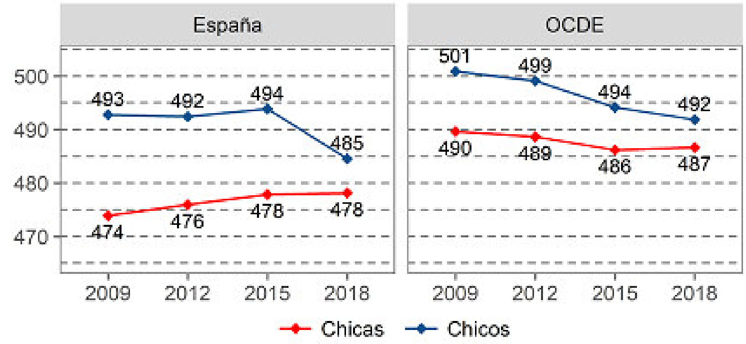


Imagen 2.1.5 Tendencia en puntuaciones en matemáticas según sexo.

Según el estudio *(Pérez-Tyteca, P., Monje, J. y Castro, E. (2013). Afecto y matemáticas. Diseño de una entrevista para acceder a los sentimientos de alumnos adolescentes.), esa preferencia* de algunos alumnos por opciones alejadas de las matemáticas es debida a la inseguridad y la presión que les produce una asignatura cuyas herramientas para llevarla a cabo exitosamente, difiere mucho a la del resto de asignatura. A esto se le conoce como ansiedad matemática:

"La ansiedad matemática no es una respuesta afectiva que se presente aislada, sino que, está vinculada a otros factores afectivos. Uno de ellos es la autoconfianza(que definimos como la confianza que un sujeto tiene en sí mismo como aprendiz de matemáticas."

Según *(Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences.):*

"Los individuos con niveles altos de ansiedad matemática se caracterizan por su gran tendencia a evitar las matemáticas, cosa que a la larga debilita sus competencias matemáticas y les impide tomar ciertas trayectorias en su carrera."

Considerando esta ansiedad matemática, las diferencias, en rendimiento entre ambos sexos podría tener sentido, ya que, según estadísticas, las mujeres tienen entre dos y tres veces más de posibilidades de padecer ansiedad que los varones.

Pero esta tendencia está cambiando, quizás influenciada por los siguientes resultados que arroja el estudio de P.I.S.A. Son aquellos resultados relacionados con aspectos no académicos, sino aquellos que miden la situación de los alumnos más allá de los resultados. Entre los estudiantes españoles se dan lugar pocos casos de bullying en comparación con el resto de los países, están notablemente satisfechos con su vida y no tienen grados altos de presión por obtener buenos resultados.

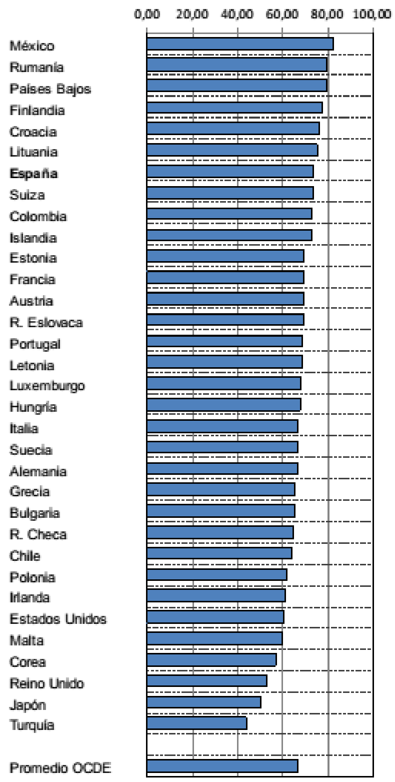


Imagen 2.1.6 Porcentaje de alumnos satisfechos con su vida.

Mientras, países que ocupan altas posiciones en la clasificación como Japón, Corea o Reino unido tienen niveles de felicidad entre los estudiantes realmente bajo.

La felicidad, no solo debe ser uno de los aspectos más importantes para evaluar a los jóvenes, sino que puede convertirse en una herramienta que acabe con esa ansiedad matemática, que genere un ambiente escolar, adecuado para ellos y beneficioso para la docencia y, por lo tanto, para su aprendizaje.

2.2 COMPETENCIA MATEMÁTICA EN SECUNDARIA SEGÚN TIMSS

El Trends in International Mathematics and Science Study (Estudio de las tendencias en matemáticas y Ciencias) es un estudio llevada a cabo por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA) realiza una prueba de los conocimientos en matemáticas y ciencias de los alumnos en dos niveles determinados que equivalen al 4º de Primaria y al 2º de E.S.O.

Las características del estudio se muestran a continuación:

- Se lleva a cabo en más de 50 países, actualmente las pruebas se realizan cada 4 años.
- Se tiene en cuenta el currículo de los países participantes. Para ello se manejan tres conceptos: el currículo pretendido (currículo oficial del país), el currículo realmente impartido (currículo

aplicado) el que muestra los conocimientos realmente asimilados por los alumnos (currículo alcanzado).

- Los apartados del bloque de matemáticas son: números, formas, mediciones geométricas y representación de datos.

- La cantidad de preguntas requiere un tiempo excesivamente grande por lo que los bloques se reparten entre cada alumno, es decir, un mismo alumno completa uno solo de los bloques.

La puntuación obtenida en la prueba también se asocia a niveles, aunque, en este caso, los rangos de puntuación son menos amplios Las destrezas y conocimientos asociados a cada nivel son las siguientes:

- Nivel bajo (entre 400 y 625 puntos): En este nivel tienen conocimientos matemáticos básicos. Pueden sumar y restar números enteros, realizar multiplicaciones por números de una cifra, resuelven problemas simples, poseen cierto manejo de las fracciones sencillas, las formas geométricas y son capaces de leer y completar diagrama de barras y tablas básicos.

- Nivel medio (entre 475y 550 puntos): los alumnos son capaces de aplicar esos conocimientos básicos a situaciones sencillas. Los alumnos comprenden los números enteros, y parcialmente las fracciones y las decimales, identifican formas con propiedades sencillas e interpretan los diagramas de barras y tablas.

Nivel alto (entre 550 y 625 puntos): Estos alumnos utilizan sus conocimientos y comprensión para resolver problemas que incluyen operaciones con números enteros, fracciones sencillas y números decimales. Además, comprenden propiedades geométricas relacionadas con formas y ángulos e interpretar datos de tablas y gráficos para la resolución de problemas.

Nivel avanzado (más de 625 puntos): Los estudiantes están capacitados para utilizar sus conocimientos y comprensión de contextos complejos y de explicar el razonamiento de manera exitosa. Ya sea en el manejo de fracciones y números decimales o en la resolución de problemas de varios pasos con números enteros y en los relacionados con gráficos y tablas. Poseen también conocimientos geométricos tanto de formas de dos dimensiones como de tres.

En el estudio se presenta un total de 58 países, la lista es muy parecida, a la del informe PISA, añadiendo algunos países de oriente medio. En España, solo realizan la prueba alumnos de 4º de primaria de las comunidades de Castilla y León, Madrid, Asturias, La Rioja, Cataluña y Andalucía.

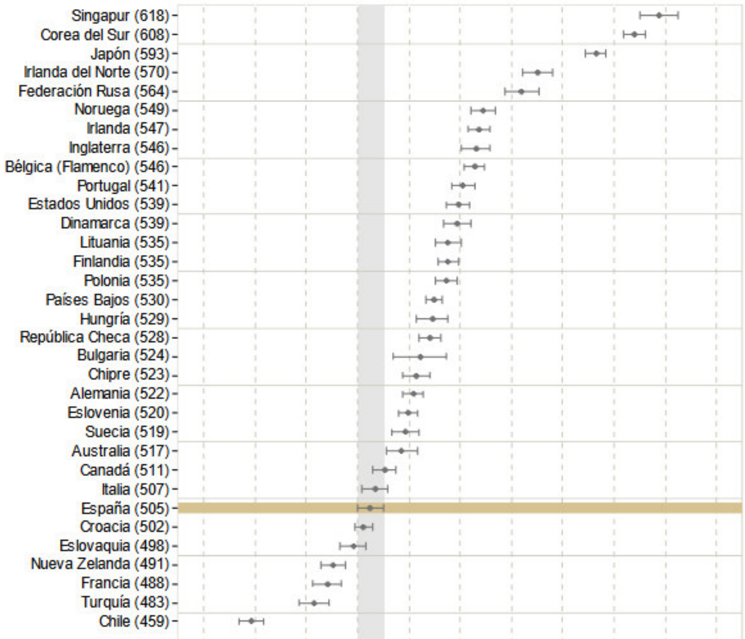


Imagen 2.2.1 Resultados en matemáticas según el informe TIMSS.

Los datos muestran resultados similares a los del informe PISA, aunque, muestra una clara mejora en el rendimiento de los alumnos españoles con respecto al año 2011.

En cuanto a las comunidades autónomas se mantiene la misma tendencia que en el informe PISA, con Castilla y León en la primera posición, de las seis comunidades que participan.

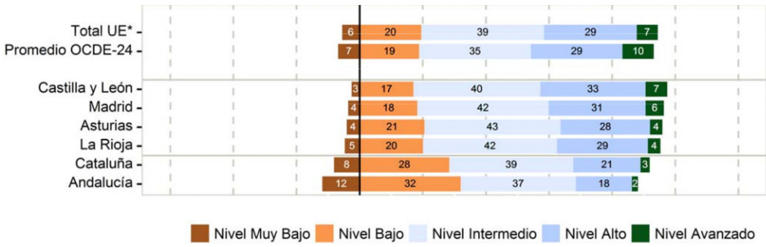


Imagen 2.2.2 Porcentaje de alumnos de cada nivel según comunidad autónoma.

Destaca en la comunidad, la menor cantidad de alumnos de nivel bajo y muy bajo, ya que suman tan solo un 20 por ciento del total frente a un 26% de las medias de la OCDE y la Unión Europea.

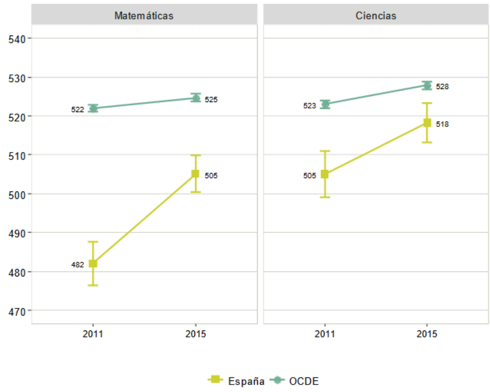


Imagen 2.2.3 Evolución del rendimiento en Matemáticas y Ciencias.

Lo que más llama la atención de los resultados del informe es que, en este caso, al contrario que en el informe PISA, sí existe una clara evolución positiva en el rendimiento en matemáticas, superior incluso al de rendimiento en Ciencias. Las razones pueden ser varias:

- Los cambios metodológicos o legislativos podrían estar empezando a tener un efecto positivo en la educación y se manifiesta primeramente en los cursos de primaria.
- Los estudiantes españoles empiezan a manifestar síntomas de fracaso escolar en los cursos de educación secundaria.
- Al ser una prueba que tiene en cuenta el currículo de cada país, los datos de mejoría estarían ligados a la adaptación de la prueba a cambios en el currículo sin ser, necesariamente, un dato positivo.
- El número de alumnos y de años en los que se ha realizado la prueba en España a alumnos de 4º de primaria es menor a los del informe PISA, por lo que no muestra datos tan fiables.

Cualquiera o cualquieras de estas razones, pueden tener gran peso en la diferencia de resultados entre la prueba de 2011 y 2015. Cuando se dé a conocer los datos de los estudiantes españoles en la prueba de 2019, se tendrá algo más claro si la evolución es real y las razones para ello.

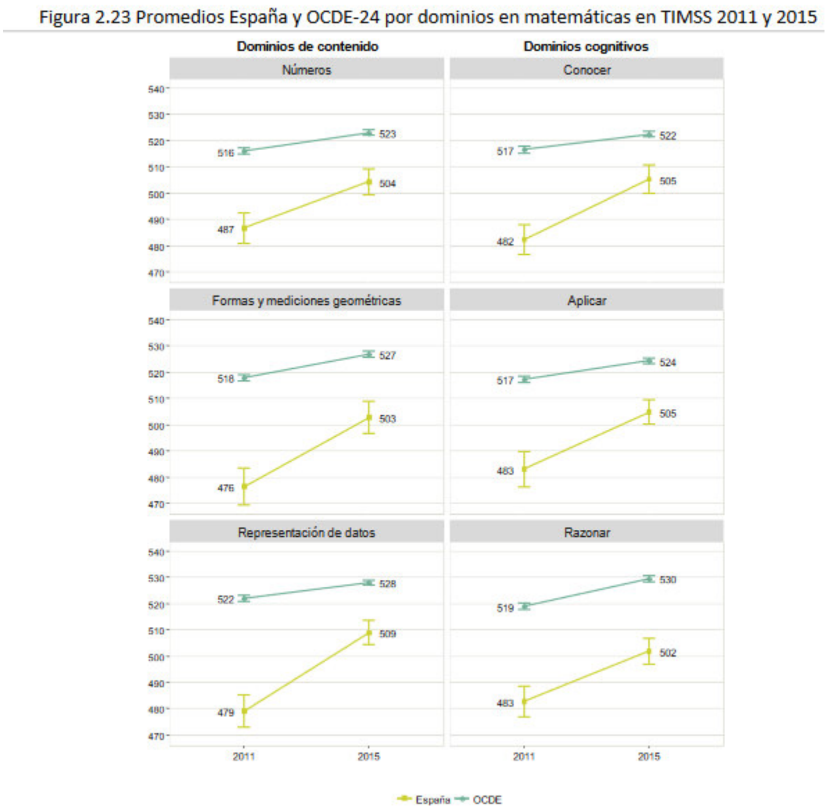


Imagen 2.2.4 Evolución del rendimiento en España y OCDE según bloque de matemáticas.

En el informe de TIMMS, a diferencia con el de PISA, aparecen los resultados de cada campo de las matemáticas. EN ellos se muestra que la evolución es positiva y similar en cada uno de ellos. De hecho, el que trata este trabajo, formas y mediciones geométricas, es el segundo con un mayor incremento positivo, un total de 27 puntos.

2.3 GEOMETRÍA EN EL MARCO LEGISLATIVO

La Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad de la educación, conocida como L.O.M.C.E y el Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, son las dos bases legislativas vigentes en todo el estado español.

La **L.O.M.C.E** nace con los objetivos de reducir la tasa de abandono escolar, mejorar los resultados educativos según criterios que internacionales y mejorar la empleabilidad y el espíritu emprendedor de los estudiantes. Para ello se basa en los siguientes cambios respecto a la normativa vigente hasta entonces (la ley orgánica de Educación 2/2006 de 3 de mayo):

- Se realizan pruebas de evaluación final para obtener tanto el título de la E.S.O como el Bachillerato con el objetivo de que los alumnos acrediten el nivel adecuado al título en cuestión.
- El curso de 4º de E.S.O. pasa en exclusiva a constituir el segundo ciclo de la educación secundaria. En él, los alumnos escogen entre dos opciones: la de “las enseñanzas académicas para

la iniciación al Bachillerato" que conduce a cursar el mismo y, la de "Opción de las enseñanzas aplicadas para la iniciación a la Formación Profesional". Ya en tercero, los alumnos escogen entre las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas con vistas a las opciones a elegir en cuarto.

- Se instauran los Programas de mejora del aprendizaje y Rendimiento en la E.S.O en sustitución de los Programas de Diversificación Curricular para la E.S.O. establecidos en la L.O.E. La diferencia radica en que el P.M.A.R. tiene lugar en tan solo 2º y 3º de la E.S.O. y no en todos los cursos de la E.S.O como sucedía con la Diversificación. El objetivo, por lo tanto, es la incorporación de los alumnos al 4º de E.S.O ordinario para posteriormente cursar formación Profesional.

- Se le otorga mayor importancia a las asignaturas troncales (en primaria: Ciencias de la Naturaleza, Ciencias Sociales, Lengua Castellana y Literatura, Matemáticas y Primera Lengua Extranjera, y en secundaria: Biología y Geología, Física y Química, Geografía e Historia, Lengua Castellana y Literatura, Primera Lengua Extranjera y Matemáticas): frente a las asignaturas específicas y de libre elección. La ley establece que es el propio gobierno el que determina los contenidos de estas asignaturas troncales, mientras que las administraciones educativas solo pueden complementarlos.

- Se exige una oferta docente que utilice el castellano de manera vehicular frente a la de asignaturas no lingüísticas en lenguas cooficiales. Asimismo, la ley apoya el plurilingüismo con el fin de que los estudiantes consigan desenvolverse de manera fluida en una lengua extranjera.

- La asignatura de religión vuelve a contar en el expediente académico, incluso en segundo de Bachillerato, mientras que se introduce una asignatura alternativa "Valores éticos sociales y cívicos" que sustituye a la antigua Educación para la ciudadanía.

- En la Formación profesional aparecen la F.P. Básica y la formación profesional Dual: la primera, dirigida a alumnos de entre 15 y 17 años, para flexibilizar el acceso al Grado Medio y, la segunda, para conseguir una mayor empleabilidad mediante la colaboración con empresas de ámbito privado.

- La Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre también modifica las competencias clave existentes hasta entonces, de ocho pasan a siete: lingüística, Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, Competencia digital, Aprender a aprender, Competencias sociales y cívicas, Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor y Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor.

- La L.O.M.C.E redibuja el panorama existente hasta la fecha de educación pública frente a educación privada. Según el artículo 109, se conforma como objetivo último satisfacer la demanda social frente a la obligatoriedad de garantizar plaza en un centro de enseñanza pública como había sucedido hasta entonces. Además, por primera vez, las administraciones educativas podrán gestionar la construcción y gestión de colegios concertados sobre suelo público.

Éste último punto, la preferencia por la educación concertada o privada, y la mayor importancia a la asignatura de religión, fueron algunos de los puntos más en entredicho de la nueva ley. También las constantes evaluaciones a lo largo de los finales de cada ciclo y, la no consideración de asignaturas troncales a las lenguas cooficiales. Muchos docentes critican, además el hecho de que los Programas de mejora del aprendizaje y Rendimiento en la E.S.O (P.M.A.R) finalicen en el tercer curso de la E.S.O. y estos alumnos se incorporen a un 4º E.S.O. ordinario, pues, en la práctica, parece inviable y poco eficaz para estos alumnos y para sus compañeros de clase que vienen de un tercero de E.S.O. ordinario.

El 5 de abril de 2016, se votó una proposición de ley por la que se paralizaba todo lo que no estuviese vigente y, se derogaba el decreto 1058/2015, de 20 de noviembre, por el que se regulaba las pruebas finales de evaluación de Educación Primaria. Pese que la proposición de paralización se aprobó por mayoría absoluta, no se aplicó por la disolución de las cámaras el 3 de mayo de ese mismo año.

El **Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre,** determina la base del currículo para la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato la totalidad del país. De este modo, establece, por un lado, los contenidos de cada etapa y, por otro lado, los criterios y estándares de cada bloque. La asignatura de matemáticas, por este real decreto, es troncal en cada uno de los cursos de secundaria frente a otras consideradas específicas o de libre elección. De ellos, es en 3º y 4º de E.S.O., pese a seguir considerada como troncal, se divide en Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas (para alumnos que desean continuar sus estudios en Formación Profesional) y, Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (para aquellos que desee continuar en Bachillerato).

En cuanto al bachillerato, las matemáticas aparecen en dos de los cuatro tipos de Bachilleratos, el de Ciencias y el de Ciencias sociales en forma de Matemáticas I y II y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II, respectivamente, en sendos cursos.

En educación secundaria, cada asignatura de matemáticas queda divididas en cinco bloques fundamentales:

- Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Números y Algebra
- Geometría
- Funciones
- Estadística y probabilidad.

En el Bachillerato de ciencias sociales, los bloques de la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales los bloques son:

- Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.
- Números y Álgebra
- Análisis.

- Estadística y probabilidad.

Mientras que, en el Bachillerato de Ciencias, a los bloques anteriores hay que añadirle el de Geometría, el tercero, después del de Números y Álgebra y antes que el de Análisis.

De esta forma, los objetivos de la etapa completa de Educación Secundaria y Bachillerato son los siguientes (Real Decreto 1105/2014 de 26 de diciembre, p.8):

a) Conocer y asumir los deberes, poner en práctica sus derechos para respetar a los demás, ejerciendo con tolerancia, de manera cooperativa y con solidaridad entre personas y grupos, utilizando el diálogo para afianzar derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre los dos sexos, como valores en común dentro de una sociedad plural en donde ejercer el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Estimular los hábitos de disciplina estudio y trabajo tanto individual como en grupo para llevar a cabo una realización eficaz de las tareas de aprendizaje y como herramienta del desarrollo personal.

c) Asumir la diferencia de sexos y la igualdad de derechos, deberes y oportunidades entre ambos. Condenar la discriminación de las personas por dicha razón de sexo o por cualquier otra razón. Rechazar de manera rotunda los estereotipos entre mujeres y hombres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

d) Reforzar las capacidades afectivas en los distintos ámbitos de la personalidad y en las relaciones con los demás, además de rechazar la violencia, los prejuicios cualesquiera que sean y las actitudes sexistas y apostar por la resolución pacífica de los conflictos.

e) Desarrollar la capacidad para adquirir información de fuentes adecuadas para adquirir nuevos conocimientos. Para ello, se buscará obtener una preparación básica en el campo tecnológico, sobre todo en cuanto a información y comunicación.

f) Entender el conocimiento científico como un conjunto de saberes integrado, estructurado en distintas disciplinas y conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diferentes campos del conocimiento y experiencia.

g) Desarrollar el espíritu de emprendimiento y la confianza en la capacidad de uno mismo, fomentar la participación, el sentido crítico de la realidad, la iniciativa personal y las habilidades para aprender a aprender, a planificar para poder tomar decisiones responsables.

h) Tener la habilidad de expresarse correctamente de manera oral y escrita en la lengua castellana y en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma correspondiente si hubiese, mediante textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Saber comprender y expresarse en al menos una lengua extranjera de manera apropiada.

j) Aprender a respetar y valorar la cultura e historia propias del resto y, también el patrimonio artístico y cultural.

k) Tratar de conocer cómo funciona el cuerpo propio y el de otros, para respetar las diferencias, *asumir los hábitos de cuidado y salud corporales e asumir los valores de la educación física para estimular la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Además, se deberá conocer y valorar la humanidad intrínseca en la sexualidad en toda su diversidad. También se debería aprender a conocer los hábitos sociales a nivel de salud, consumo y cuidado de los seres vivos y de conservación y mejora del medio ambiente.*

l) Valorar la creación artística y entender el lenguaje de las manifestaciones artísticas a través de múltiples medios de expresión y representación.

Por otro lado, la ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, establece el currículo en secundaria y regula la implantación, la evaluación y el desarrollo de la E.S.O. en Castilla y León. Establece, por lo tanto, los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.

Los contenidos de la unidad didáctica según el BOCyL (ORDEN EDU/362/2015, p.152) son:

- Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.

- Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

- Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.

Los criterios de evaluación que se deben utilizar en la unidad didáctica para 2º de E.S.O presentada en este trabajo posteriormente son (ORDEN EDU/362/2015, p.152):

- Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.

-Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Para dicha unidad didáctica, los estándares de aprendizaje evaluable son (ORDEN EDU/362/2015, p.152):

- Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.

- Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.

- Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.

- Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas

geométricas más apropiadas.

3 MARCO TEÓRICO

El concepto de material didáctico se remonta a la época de la Ilustración (siglo XVII). Y su estudio en referencia a la didáctica de las matemáticas cuenta ya con una amplia trayectoria a sus espaldas. La razón de su estudio es debida a la eficacia de su uso, y al margen de mejora que, conceptualmente poseen, ya que los docentes actuales no conocen apenas una parte de su gran potencialidad. La razón la resumen a Ángel Alsina y Nuria Planas *(Alsina,A. y Planas,N. (2008). Matemática Inclusiva. Propuesta para una educación matemática accesible. (p.80). Madrid, Narcea*):

*"La manipulación es mucho más que una manera divertida de desarrollar aprendizajes. … es, en ella misma una manera de aprender, que ha de hacer más eficaz el proceso de aprendizaje sin hacerlo necesariamente más rápido… el uso de materiales es una manera de promover la autonomía del aprendiz ya que se limita la participación de los otros, principalmente del adulto, en momentos cruciales del momento de aprendizaje***"**

Además de esa autonomía, otra de las razones esgrimidas por autores, más a nivel neurológico hace hincapié en la diferente forma en que llegan al cerebro del estudiante los conceptos, cuando lo hacen a través de un objeto manipulado por ellos mismos. Es el caso de Jean Piaget, quien cree en una postura constructivista del aprendizaje, con el alumno como protagonista de la acción educativa, que sea él, por sí mismo quien construya y descubra la adquisición de conocimientos. Ángel Alsina en (Alsina, A. (febrero de 2010) La pirámide de la educación matemática. Aula de Innovación educativa (189), pp. 12-16.) equipara las herramientas a utilizar en la didáctica de las matemáticas, en función de la cantidad de tiempo que deben utilizarse, con la pirámide alimentaria, en se distribuyen los alimentos según su cantidad recomendada, así, los recursos manipulativos junto a la recreación de situaciones cotidianas a solucionar mediante las matemáticas se deben usar con mayor asiduidad que el resto de recursos.

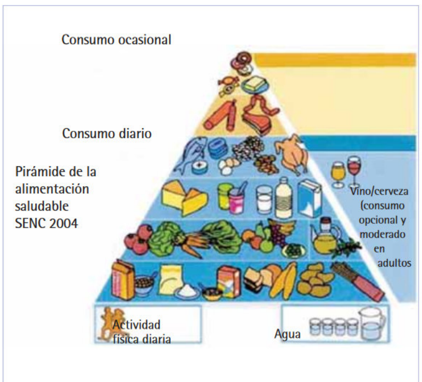


Imagen 3.1 Pirámide alimentaria.

Imagen 3.2 Pirámide de la educación matemática.

También hay que distinguir entre los conceptos de material didáctico y recurso didáctico. Un recurso didáctico es cualquier tipo de acción o material de apoyo que el docente utiliza para facilitar el desarrollo de las clases, puede ser cualquier tipo de objeto que participe en este fin (una impresora, papel, etc.).

El material didáctico es un objeto diseñado o, al menos utilizado para enseñar. (un ordenador, un cuaderno, un globo terráqueo, etc.).

No existe, por tanto, una clara línea que separe ambos conceptos, pues según estas definiciones, todo material didáctico es, a su vez, recurso y, además, existen materiales no diseñados para enseñar, sino para ejercer otras funciones de la vida cotidiana, que pueden utilizarse para enseñar, ya sea por su forma o por sus potenciales transformaciones, pero podrían, aun así seguir considerándose materiales didácticos.

Por tanto, quedan definidos conceptualmente sendos términos, aunque la línea divisoria que los diferencia, permanece difusa. Según *(Coriat, M. Materiales, recursos y actividades: un panorama. (p.159) Barcelona, Horsori.)*

"Un buen material didáctico trasciende la intención de uso original y admite varias aplicaciones; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material didáctico y qué es un recurso".

Queda, tan solo, definir el concepto de manipulable, el cual, pese a tratar de de un término que se utiliza habitualmente también tienen límites difusos. Según la RAE, manipular (de manipulable) significa;

*1.**Manipular**: tr. Operar con las manos o con cualquier instrumento.*

Mientras que, en un sentido didáctico, referido a materiales, según *(Villarroel, S. y Sgreccia,N. (2011)Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina)*

"El término manipulable se usa como sustantivo colectivo para material táctico y representaciones gráficas, que funcionan como modelos. El término modelo abarca las representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionarlas. No se considera en sentido literal como ejemplo de algo o sólo involucrando objetos y símbolos matemáticos puros; sino que abarca materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas, símbolos"

Quedan, por tanto, definidos los materiales manipulativos, dejando, aún por resolver las discrepancias entre autores y definición tacita las representaciones gráficas dinámicas conseguidas por medios tecnológicos pero que no, se adaptan a la propia definición de "manipulable".

Tabla 3.1 Ejemplos de Polígonos y Poliedros en la realidad.

FIGURA	EJEMPLO 1	EJEMPLO 2	EJEMPLO 3
Triángulo	Instrumento musical	Señal de tráfico	Señal de avería
Cuadrilátero	Hoja de papel	Loseta	Galleta
Pentágono	Puntas de los dedos	Logo Chrysler	Nudo de servilleta
Hexágono	Perfil plato	Sección lápiz	Paneles de abeja
Octágono	Perfil de bandeja	Estrella de los vientos	Mesa granadina
Polígono Estrellado	Estrella de mar	Estrella de David	Llanta de rueda
n-Polígono	Puntos de horas del reloj	Logos comerciales	Sección columnas de Gaudí
Cubo	Dado	Pastillas caldo	Caja
Tetraedro	Tetrabrik	Puzle 3D	Trípode
Octaedro	Talla de diamante	Estructura mesa	Barrilete 3D
Icosaedro	Dado de 20 caras	Logo MAA	Cúpula
Dodecaedro	Contenedor de papel	Puzle 3D	Dado de 12 caras
Prisma	Chocolate	Prisma Hexagonal	Caja Chanel nº5
Prismatoide	Obelisco	Caja de Cartón	Pedestal
Pirámide	Pirámide Egipcia	Embudo industrial	Final Obelisco
Bipirámide	Peonza	Dedos contra dedos	Joya
Poliedros Semirregulares	Lampara de cristal	Joya	Estrella árbol de Navidad
Ortoedro	Tetra brick	Pastel	Cajetilla Marlboro
Antiprisma	Jarrón	Vaso	Patas de mesa

3.1 EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA (EMR)

La educación matemática realista es una línea didáctica para la enseñanza de matemáticas que nace en los años 70 en Holanda en contraposición al aprendizaje mecánico imperante en las escuelas de entonces.

Se considera fundador de la educación matemática realista a Hans Freudenthal (1905-1990), un matemático holandés, de origen alemán, que hizo importantes contribuciones a la topología como introducir el concepto de fin del espacio topológico, y al álgebra (Cuadrado mágico de Freudenthal) pero que, principalmente es conocido por sus aportaciones a la didáctica. Unas aportaciones que vienen por su interés por autores no matemáticos expertos en la materia como O. Decroly, con su método basado en el descubrimiento de las necesidades del niño para conseguir la motivación necesaria para el aprendizaje o, J. Dewey, quien abogaba por un método continuo de acción-experimentación mediante proyectos como fuente del aprendizaje.

La EMR no pretende ser una teoría general del aprendizaje como lo pudiera ser el constructivismo sino, una línea teórica que marca el "qué" y el "cómo" de la enseñanza de las matemáticas. Las bases originales para ese método fueron:

- El uso de situaciones contextuales para vincular o concreto y lo abstracto.
- El uso de modelos para avanzar en el aprendizaje.
- Convertir a los alumnos en directores de su propio aprendizaje.
- No dividir las matemáticas en bloques separados, sino que, estos deben entrelazarse y

complementarse.

3.1.1 PRINCIPIOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

Bajo estas bases, la EMR fue desarrollada por numerosos autores: De Langue, Gravemeijer, etc. de modo que esas pautas evolucionaron y quedaron sintetizadas en los denominados "Cinco principios de la Educación Matemática Realista:

Principio de actividad

Las matemáticas deben ser consideradas como una actividad humana, están presentes en todo momento a lo largo de la vida de cualquier persona pues no son sino una forma de organización del mundo que nos rodea. Por lo tanto, no se debe excluir a nadie de su aprendizaje.

Ese aprendizaje de las matemáticas debe llevarse a cabo "haciendo" matemáticas, "matematizar" es más importante que aprender un producto masticado basado en procesos algorítmicos carentes de significado para el alumno.

Esta forma de entender las matemáticas permite a los alumnos entender su entorno social y natural, lo cual resulta trascendental y confirma la idea de "Matemáticas para todos", pues será su instrumento para estudiar la realidad que rodea a cada alumno. Y esto, puede llevarse a cabo desde las primeras etapas de educación, basta con plantear situaciones y problemas acordes al contexto de cada edad, permitiendo a los alumnos de los recursos necesarios, pero, siempre permitiendo que sean ellos los que llevan la iniciativa de su uso.

Principio de realidad

Considerando que las matemáticas surgen de la "matematización" de la realidad, parece lógico pensar que el aprendizaje debe tener lugar en la realidad. Las matemáticas deben estar ligadas al mundo real pero también a lo realizable e imaginable en las mentes de los alumnos. Según (Freudenthal*, H. (1991). Revisiting mathematics education. (p.17)* Dordrectht, Kluwer Academic Publisher):

"Yo prefiero aplicar el término `realidad´ a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario."

En las aulas se deben plantear problemas en contextos de la vida diaria de los alumnos, para así poder imaginar esas situaciones, razonar sobre ellas y poner en marcha procedimientos de cálculo para dar solución a esas situaciones.

Estos contextos resultan muy significativos para los estudiantes pues los asumen como propios, convirtiéndose así en un perfecto punto de partida para aplicación de estrategias informales creadas por ellos mismos que les permitan avanzar hacia mayores nivele de formalización.

Además de estos contextos situacionales, Freudenthal también consideraba contextos matemáticos puros, presentándolos como juegos para una mejor asimilación, tableros, pirámides numéricas, etc. Se tiene aquí la primera aproximación de la didáctica de las matemáticas a los materiales manipulativos.

El propósito de ambos contextos, tanto cotidianos como matemáticos puros, tienen por objetivo el desarrollo de contextos mentales a los cuales los estudiantes pueden acudir para encontrar estrategias de resolución de problemas futuros más complejos.

Principio de niveles

El aprendizaje de las matemáticas no es continuo ni mucho menos, se presenta en forma de pasos o saltos que van apareciéndose según progresen los descubrimientos de los alumnos. Esos saltos permiten obtener cambios en los puntos de vista, atajos en las estrategias y descubrimientos de nuevas abstracciones.

El proceso de matematización puede llevarse a cabo mediante dos aproximaciones:

- Mediante **matematización horizontal**: conversión de una situación contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica y la experimentación inductiva.
- Mediante **matematización vertical**: tiene lugar dentro de la propia matemática a través de estrategias de reflexión, esquematización, generalización, etc.

Los niveles saltos de esos procesos de matematización, acordes con el uso de estrategias, lenguajes de distintos desarrollos cognitivos…, son los siguientes:

- **Nivel situacional:** se apoya en conocimientos informales y sentido común, junto con la experiencia para llevar a cabo con éxito una situación contextual determinada.
- **Nivel referencial**: incluye conceptos y mecanismos como modelos gráficos y materiales manipulativos para esquematizar la situación en cuestión.
- **Nivel general**: requiere exploración, reflexión y generalización de los procesos utilizados en el nivel referencial, pero, en este caso, se lleva a cabo una focalización matemática sobre las estrategias, mas allá de la situación contextual.
- **Nivel formal:** Se trabajan las matemáticas utilizando procedimientos y notaciones convencionales para construir estructuras abstractas.

Principio de reinvención guiada

Para Freudenthal las matemáticas son una forma organizada de utilizar el sentido común. La sistematización y organización permitirá a los alumnos construir reglas cada vez más complejas, desarrollando bases cada vez de mayor orden.

Este proceso debe proceder de la interacción profesor-alumno, un proceso que Freudenthal denomina "reinvención-guiada" y que entiende como un equilibrio entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar.

Se trata, en realidad, de reinvención, pues los alumnos no crean conocimientos nuevos, sino que, rehacen modelos y conceptos existentes para hacerlos suyos, método que sigue un proceso similar al que usan los matemáticos.

El docente debe mostrar ante este proceso capacidad de anticipación; para poder corregir errores en cada paso y de reflexión; prever los procesos de aprendizaje a corto y largo plazo a los que conducen los proyectos.

Principio de interacción

También es importante la posición de los alumnos como compañeros pues tendrán un papel activo al reflexionar sobre los proyectos de otros, colaborar y presentar los suyos propios.

Se considera así al aprendizaje de las matemáticas como una actividad social generada por la discusión tanto sobre las interpretaciones del problema como de la eficiencia de los procedimientos y de la solución.

Esta interacción conduce a la reflexión y, por tanto, a llegar a niveles de compresión más altos. Pese a que se trata de que los alumnos busquen sus propias vías para la resolución de los problemas, lo que hace que cada alumno parta de procesos diferentes, la puesta en común de los mismos enriquecerá notablemente cada uno de los caminos seguidos por cada estudiante y lo ayudará a reconducirse si ha cometido algún error.

Principio de interconexión

Los actuales currículos de matemáticas están divididos en grandes bloques (geometría, ecuaciones, estadística…). La EMR, sin embargo, no realiza esas distinciones ente ejes curriculares. Resulta así un aprendizaje y unas situaciones hipotéticas más coherentes pues en situaciones reales apenas se utiliza un solo campo determinado de las matemáticas para resolver un problema, sino que requieren de una amplia gama de procesos de relación y de herramientas. Según (Freudenthal*, H. (1991). Revisiting mathematics education. (p.22)* Dordrectht, Kluwer Academic Publisher):

"Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede o no integrar con todo, o si es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación."

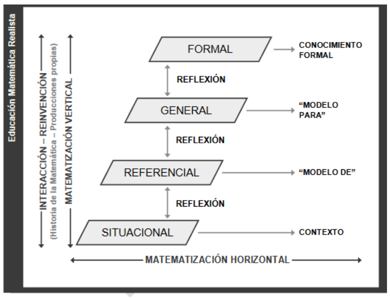


Imagen 3.1.1.1 Esquemas de matematización en la EMR.

Estos son los fundamentos principales de esta corriente didáctica que, desde el punto de vista del profesorado, nace de cuestionar los métodos tradicionales basados en docentes ordenando "qué hacer" y "cómo hacerlo" a los alumnos en lugar de dejar que los alumnos sean los que interaccionen con el profesor, con los compañeros y con el entorno para simplemente aprender de ellos.

3.2 MODELO DE VAN HIELE

El modelo surge cuando en 1957, Dina van Hiele-Geldof y Pierre Marie van Hiele, dos profesores de secundaria holandeses y doctores por la universidad de Utrecht, se preguntaron por los problemas de la educación matemática, en concreto en el campo de la geometría, problemas que no son propios en exclusiva del sistema español ni tampoco de los tiempos actuales. Según (Van Hiele, P.M. (1986). Structure and insight. Academic Press: N. York, USA):

"Cuando empecé mi carrera como profesor de Matemáticas, pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había par- tes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aun así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la Geometría, cuando había que demostrar cosas muy sim- ples, podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. -De pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: No es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada? En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento."

Era común con la EMR ese rechazo hacia el modelo de educación imperante, como también lo era la división en niveles (Freudenthal se basó en los niveles del método Van Hiele para adaptarlos a la EMR) pero, en este caso, el método Van hiele sí parte desde un punto de vista constructivista (teoría global de aprendizaje según la cual, la mente selecciona información para crear su propia realidad) pero centrándose en el aprendizaje de geometría y en los procesos prácticos, desechando parcialmente la parte teórica.

El método se centra en la geometría porque es donde el matrimonio Van Hiele observa en sus alumnos mayores dificultades de razonamiento pese a ser un área en que, a priori, dichos procesos son más evidentes. En función de esos procesos de razonamiento, el alumno pasa por cinco niveles de dificultad ascendente:

- **Nivel 1 (Reconocimiento o visualización):** El estudiante identifica los elementos geométricos, sin distinguir los componentes de las figuras ni explicar sus propiedades. Simplemente se limita a reconocerlas por sus atributos visuales en comparación por elementos que les resultan familiares, sin usar un lenguaje geométrico básico.
- **Nivel 2 (Análisis):** en este nivel ya se reconocen las partes y se puede analizar un análisis de las propiedades particulares del elemento. Sin embargo, aún no es posible relacionar esas propiedades con las de otras figuras, por lo tanto, no se pueden establecer definiciones a través de esas propiedades.
- **Nivel 3 (Ordenación o clasificación):** El alumno descubre de dónde vienen las propiedades y como interactúan entre sí. El razonamiento sigue basado en la manipulación de elementos por lo que el punto de vista no es global ni permite una ordenación lógica de pensamientos.

- **<u>Nivel 4 (Deducción):</u>** en este nivel se llevan a cabo ya, deducciones y demostraciones lógicas y formales, reconociendo, además, la necesidad de encontrar solución a los planteamientos propuestos.

- **<u>Nivel 5 (Rigor):</u>** El estudiante, por sí mismo, es capaz de averiguar el grado de rigor de varias deducciones y compararlos entre sí. También está dotado para comprender los axiomas de los fundamentos de la geometría, su completitud y su independencia. Por tanto, demuestra aquí el estudiante un alto grado de abstracción y una visión global de la geometría.

Estos niveles no siguen los cursos marcados por los sistemas educativos, pues en la adquisición de los niveles 3 y 4 es un proceso que suele llevar años y la fase 5 se adquiere habitualmente en época universitaria.

3.2.1 FASES DEL APRENDIZAJE EN EL MODELO DE VAN HIELE

Para realizar un recorrido avanzando a través de estos niveles, los Van Hiele proponen cinco fases en las que se desarrollan distintas tareas bajos criterios diferentes de manera ordenada y progresiva:

- **<u>Fase 1 (Información):</u>** se basa principalmente en el intercambio de información entre el profesor y el alumno. Así, el profesor deberá ser pleno conocedor de los conocimientos que, en ese momento, posee el alumno y pronosticar la línea que seguirá en la actividad.

- **<u>Fase 2 (Orientación dirigida)</u>**: Los estudiantes exploran el universo del problema a través de la información dada por el docente, en forma de datos de la situación expuesta o de materiales manipulativos que recrean la situación. El profesor deberá preocuparse por conducir al alumno ante situaciones que deberán ser acordes a su nivel.

- **<u>Fase 3 (Explicitación):</u>** En esta fase se produce el diálogo colectivo para revisar los pasos dados en las actividades. Los alumnos deberán presentar sus conclusiones para intercambiar experiencias con los compañeros y posibilitando la revisión de profesor. De esta forma, corregirán sus descubrimientos erróneos y estimularán la habilidad de expresión.

- **<u>Fase 4 (Orientación libre):</u>** Los estudiantes perfeccionan su conocimiento a través de resolución de problemas de diferentes formas o, incluso, que contengan varias posibles soluciones, pudiendo, así, aplicar los conocimientos y formas de razonamiento adquiridos.

- **<u>Fase 5 (Integración):</u>** En la fase 5 se debe proponer a los estudiantes que relacionen esos conocimientos adquiridos con otros campos que hayan estudiado, para desarrollar una red de relaciones mentales consistentes y adquirir así un nuevo nivel de razonamiento.

Por lo tanto, la postura del docente ante la totalidad del proceso puede resumirse en dos funciones: poner al alcance del estudiante todos los recursos necesarios que permitan a los alumnos cuestionar, manipular y descubrir los conocimientos en estudio y, estimular la motivación del alumno por la geometría a través de recursos de su interés para conseguir una actitud adecuada para lograr superar los distintos niveles.

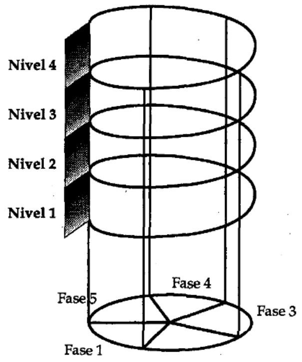


Imagen 3.2.1.1 Hélice que representa la relación entre fases y niveles del método Van Hiele.

3.2.2 HABILIDADES PROPIAS DE LA GEOMETRÍA

El éxito del proceso dependerá no solo del buen hacer del profesor y en la motivación del alumno. Parece claro que, las habilidades para el aprendizaje influirán en la velocidad con la que los estudiantes alcancen casa uno de los niveles que plantea el Método Van Hiele. El alemán Alan Hoffer en 1981 planteó una serie de habilidades para el aprendizaje de geometría necesarias para superar los niveles planteados por los Van Hiele:

- **Habilidades Visuales (1)**: es la capacidad, por un lado, de reproducir un objeto visual a nivel mental y, por otro lado, de reproducir un objeto mental mediante formas visuales externas. Para realizar esta trasformación se requiere siete habilidades específicas: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual, percepción de la posición en el espacio, percepción espacial entre objetos, discriminación y memoria visual.

- **Habilidades de comunicación (2):** Incluye la competencia del estudiante para leer, interpretar y explicar por sí mismo la información geométrica utilizando lenguaje matemático. Es importante, desde el primer momento en que el alumno se encuentra con la actividad, entender cada palabra del enunciado incluyendo cada una de las posibles interpretaciones que pueda llevar asociada. Tras la resolución, los alumnos deben comunicar los resultados de manera rigurosa para evitar errores en a trasmisión de esa información.

- **Habilidades de dibujo y construcción (3)**: Relacionadas con las representaciones externas de la primera actividad, requieren de una buena escritura, la utilización correcta en el uso de símbolos matemáticos, etc. Se trata, por tanto, representar adecuadamente modelos que recrean elementos geométricos en un papel o mediante materiales manipulativos con el objetivo de evidenciar conceptos a partir de los cuales iniciar procesos inductivos y deductivos de razonamientos.

- **Habilidades lógicas o de razonamiento (4)**: son las habilidades que permiten a los estudiantes elaborar argumentos lógicos. Estas habilidades son: la abstracción de características y propiedades, la generación de conjeturas, la argumentación, la formulación de contraejemplos, el seguimiento de argumentaciones lógicas y la realización de deducciones lógicas. Junto con ellas, no debe desdeñarse las habilidades relacionadas con las habilidades de creación, también necesarias: imaginación, intuición, capacidad de exploración, etc.

- **<u>Habilidades de aplicación o transferencia (5)</u>**: los alumnos utilizan su capacidad de aplicar lo aprendido en otras vertientes de las matemáticas y en modelos que recrean situaciones del mundo real. La trasferencia es el fin último de la educación pues sin esta habilidad, todo lo aprendido no sería sino una acumulación de conocimientos fragmentados únicamente aplicables a situaciones particulares y previsibles.

Para la mejora de estas habilidades, especialmente, las que tienen lugar en las primeras etapas, los materiales manipulativos será uno de los recursos a utilizar en el área de geometría más utilizados pues se presentan como modelos representativos de la realidad geométrica y suficientemente dinámicos para permitir interacciones que provoquen avances en los niveles.

3.3 DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA.

Parece claro, y más teniendo en cuenta que el deambular por alguno de los niveles conlleva años, no será un proceso sencillo. Será un camino por el cual, alumnos y profesores se encontrarán con obstáculos que son necesarios conocer para tratar de evitarlos. Esos posibles errores son los siguientes según (Barrantes, M. y Balletbó, I. (2011). *La enseñanza – aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década*. Gobernación de Misiones - Universidad Nacional de Pilar. Asunción, Paraguay: Litocolor S.R.L):

- **<u>Errores del esquema conceptual</u>**: son aquellos que se presentan en el momento en que, simplemente, se nombra un concepto. Vienen dados por experiencias de errores dados por válidos o por una presentación escasa de los conceptos.

- **<u>Errores de la simbología visual del concepto</u>**: representaciones que pueden dar lugar a diversas interpretaciones y que lleva al error al alumno. En este ejemplo, la representación en planta no responde a un único poliedro, sino que puede tratarse de una pirámide cuadrada o un octaedro y, en el caso de ser una figura plana, un cuadrado y sus diagonales.

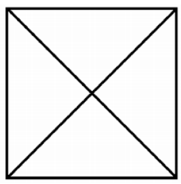


Imagen 3.3.1 Error en la simbología visual del concepto.

<u>Distractores de orientación:</u> sin errores que provienen de la definición matemática del concepto. Cuando se tienen imágenes muy amplias que derivan en estándares, se corre el riesgo de que factores irrelevantes fuertes visualmente atraigan toda la atención y actúen como distractores. Un ejemplo de esto es la representación de uno de los lados de un ángulo paralelo al borde de la hoja. Como los alumnos en los libros de texto siempre se los encuentran en esta disposición, son incapaces de identificarlos, en otras situaciones. Así el ángulo recto de un triángulo siempre se representa horizontal y paralelo al borde, al igual que dos de los lados de un cuadrado.

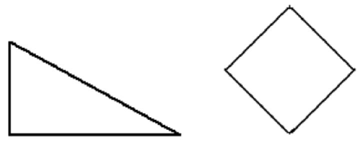


Imagen 3.3.2 Representación del Triángulo convencional rectángulo y del cuadrado no convencional.

En el caso de los sólidos, algunos se representan apoyados siempre sobre una cara determinada, a la que se considera la base. Ello hace que si el cuerpo geométrico aparece apoyado por una cara no habitual no sea identificado con facilidad además de no considerar la base a la hora de calcular el área.

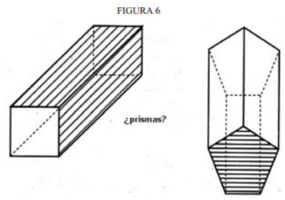


Imagen 3.3.3 Representación no habitual y habitual de un prisma.

<u>Distractores de estructuración</u>: Cuando los elementos son presentados de manera incompleta, se excluyen propiedades y elementos parciales del aprendizaje de los alumnos los cuales degeneran en ideas erróneas. Un ejemplo de esto es la representación de triángulos isósceles siempre con el lado desigual apoyado. Cuando no ocurre así, los alumnos no identifican el triángulo como isósceles.

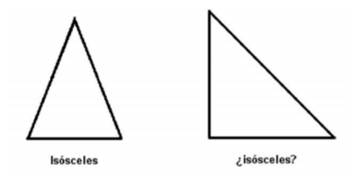


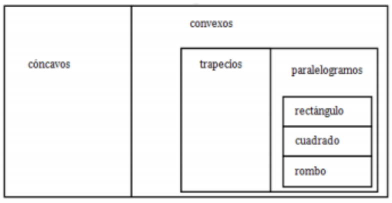
Imagen 3.3.4 Representaciones de un triángulo isósceles.

<u>Errores en nomenclatura</u>: Hay varios errores habituales de este tipo. El primero es entender como polígono aquellas figuras con nombre conocido (triángulos, rombos, pentágonos), no reconoce el resto como tal. Otro de los errores, a veces cometido por el docente, es el uso indistinto de conceptos colectivos e individuales, muchas veces el profesor utiliza expresiones como “el cuadrado” o “el círculo” negando la existencia de figuras individuales y ciñéndose únicamente al arquetipo. Otra incongruencia se comete al calificar cuadriláteros como “trapezoide” o “romboide” a la figura de cuatro lados convexa sin lados opuestos paralelos y al paralelogramo no equilátero ni equiángulo respectivamente, nombrando así a las figuras por las características que no tienen, cambiando así, los criterios de nomenclatura de cuadriláteros e induciendo al error.
<u>Errores de las imágenes reales del concepto</u>: Considerando que los conceptos geométricos

generales únicamente pueden ser representados por objetos concretos y particulares, es tremendamente importante la correcta selección de esos objetos concretos para la abstracción general del concepto. Esto ocurre, por ejemplo, al idealizar objetos cotidianos como vasos representando cilindros o, tiendas canadienses identificadas como prismas triangulares. Para evitar esto, cobra especial importancia el uso de materiales manipulativos que sí se basan en una correcta representación del concepto.

Errores en las definiciones: Generalmente, los libros de texto pecan de basarse exclusivamente en las definiciones y olvidarse de los ejemplos. De este modo, son los alumnos memorizan las definiciones, pero no las utilizan para formarse una imagen conceptual completa y correcta. A veces, estos errores cobran mayor importancia cuando existen incongruencias en los propios libros de texto. Como ejemplo, los elementos notables de los triángulos (medianas, alturas, etc.) son tratados como segmentos en la mayor parte de libros de textos en Educación Primaria, mientras que, en la E.S.O, se conciben como rectas. A la hora de tratar sus medidas, puede conducir a error al alumno.

Errores en las clasificaciones: Los errores principales en este sentido, que se adquieren en la Educación Primaria y se arrastra en etapas posteriores, provienen de las distintas clasificaciones dadas de figuras planas: por particiones, por inclusiones o jerárquica. En Primaria, se clasifican en particiones triángulos y cuadriláteros, es decir, los triángulos pueden ser solamente: escalenos, isósceles o equiláteros. Sin embargo, en la E.S.O. y en cursos posteriores, tiene lugar una clasificación por inclusión. Por ejemplo, la definición de triángulo isósceles es “el que tiene al menos dos lados iguales”, es decir, un triángulo equilátero seria, a la vez, equilátero e isósceles. Lo mismo ocurre en cuadriláteros con cuadrados y rectángulos.



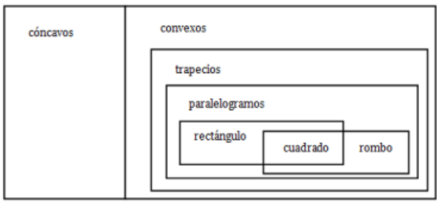


Imagen 3.3.5 Clasificación de los cuadriláteros por partición y por inclusión.

Los docentes deben conocer todos estos errores pues, si bien no son causantes de la mayor parte de ellos, sí tienen la capacidad de evitar que los alumnos caigan en ellos. Para ello, es necesario que, desde las primeras etapas, se realicen actividades interrelacionadas con otras disciplinas como el arte, en el que de los elementos geométricos aparecen de manera visual, para, posteriormente, ir aumentando los niveles de abstracción.

4 MATERIALES MANIPULATIVOS

Con el fin de mostrar la realidad geométrica mediante modelos lo más adaptados posible a los conceptos geométricos, los materiales manipulativos, amparados por esas teorías didácticas y por numerosos autores, aparecen como una alternativa más eficaz que la enseñanza tradicional basada en libros de texto y representaciones planas en pizarras. Además, estos materiales permiten, no solo la identificación del concepto, sino asumir posteriores etapas de descubrimiento, razonamiento y abstracción a través de la interactividad que les caracterizan.

4.1 CLASIFICACIONES DE LOS MATERIALES MANIPULATIVOS

Cada herramienta didáctica es un mundo distinto con una aplicación determinada. Los materiales manipulativos no son una excepción. Cada uno tiene una serie de características propias: físicas, funcionales, número de aplicaciones, etc. Por lo tanto, debemos conocerlas para llevar a cabo una correcta aplicación didáctica.

El concepto de material didáctico se remonta a la época de la Ilustración (siglo XVII). Y su estudio en referencia a la didáctica de las matemáticas cuenta ya con una amplia trayectoria a sus espaldas. Con este fin, podemos clasificar según diferentes parámetros. Estudiar estas clasificaciones permite al docente elegir el material más adecuado para afrontar el tipo de contenidos que quiere impartir aprovechando al máximo, la potencialidad del cada material.

Para ello existen múltiples clasificaciones elaboradas por diferentes expertos en didáctica de la geometría. Se explicarán dos de ellas, por su elaborada definición, la de Barrantes y Balletbó, por un lado, y la de Villarroel y Sgreccia por otro. Antes citaremos diferentes formas sencillas de clasificación que permiten decidir el recurso a utilizar fácilmente.

Clasificación por objetivos:

- *Materiales para descubrir conceptos*: permiten, mediante la interacción de los alumnos con el propio objeto, descubrir nuevos conocimientos.
- *Para resolver problemas*: se utilizan los propios materiales como herramienta resolutiva tras plantear un problema.
- *Para demostraciones y comprobaciones*: pueden ser demostrados múltiples teoremas geométricos, así como ratificar razonamientos.

Tabla 4.1.1 Tipos de materiales por objetivos

Para descubrir conceptos	Para resolver problemas	Para demostraciones y comprobaciones
- Sólidos de Madera - Tangram - Cubos Multilink	- Mecano - Regletas	- Sólidos de Madera. - Papel y Cartulina. - Geoplano

Clasificación por naturaleza del material:

- _Material no estructurado_: son aquellos objetos cuyo objetivo para el que están diseñados no es el de enseñar. Podrían ser algunos de sus juguetes con los que puedan establecer relaciones lógicas, agrupaciones, etc. y también objetos existentes en cualquier hogar que presenten geometrías determinadas que los alumnos deben conocer y estudiar. Dentro de los más utilizados de este grupo se encuentran: el papel, palillos, pajitas de refresco, cajas y cartones de rollos de papel, juguetes como el mecano, etc.

Material estructurado: se trata de materiales especialmente diseñados para la adquisición de conceptos de aprendizaje determinados o de múltiples conceptos. También suelen ser válidos para rangos amplios de edades. Muchos de los conceptos potenciales, son tratados por varios materiales, por lo que será positivo que un mismo concepto se trate desde distintos ángulos mediante diferentes materiales. Ejemplos de éstos son el geoplano o los sólidos de madera.

Tabla 4.1.2 Tabla de materiales por su naturaleza.

Materiales estructurados	Materiales no estructurados
- Regletas	- Papel
- Sólidos de Madera	- Cajas de cartón
- Tangram	- Palillos
- Cubos Multilink	- Lápices

4.1.1 CLASIFICACIÓN DE BARRANTES Y BALLETBÓ

En el artículo (*Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales, 8, p.25-43),* realizan dibujan el panorama de la metodología matemática utilizada hoy en día ciñéndose a la etapa de Educación Secundaria. Referidos a los recursos a utilizar, se realiza una primera división en dos tipos: los "elementos manipuladores" y los recursos tecnológicos. Dentro de ellos existen las categorías siguientes:

- **Elementos manipuladores:** aquellos con los que el alumno puede interactuar con sus propias manos de manera directa.

  - _Modelo constructivos_: son representaciones directas de los elementos que son fruto del estudio, el objetivo a lograr con este tipo de materiales es conocer sus propiedades a través de la observación directa.
  - _Materiales constructores:_ son materiales transformables y adaptables a la situación de análisis que se desea., es decir, pueden según interese, pueden transformarse en distintos modelos constructivos.
  - _Mecanismos_: La situación de aprendizaje tienen lugar en la propia transformación dinámica o movimiento del material. Un ejemplo de ellos es la balanza o el visor de

cónicas.

Tabla 4.1.2.1 Materiales de acuerdo a la clasificación de Barrantes y Balletbó (2012).

Modelos Constructivos	Materiales constructores	Mecanismos
- Sólidos de madera. -Figuras geométricas planas.	- Papel y cartulina. - Regletas. - Geoplano. - Puzles y Rompecabezas. -Tangram. - Cubos multilink.	- Visor de cónicas. - Balanza. - Mecano.

- **Recursos tecnológicos:** son la otra herramienta innovadora utilizada en la enseñanza de la geometría. No hablamos solo de la utilización directa de recurso tecnológicos por parte de los alumnos, sino también mostrar a los alumnos elementos desarrollados a partir de la utilización por parte del docente de recursos tecnológicos.7

- Fotografías: ya sea mostradas en diapositivas o entregadas a los alumnos impresas en papel para su manipulación directa.

- Imagen en movimiento: Videos ilustrativos relacionados con la geometría de realización propia o encontrados en fuentes apropiadas en la red. Pueden ser también buscados por los propios alumnos. De esta manera, se contempla la competencia digital exigida por la L.O.M.C.E. y los alumnos realizarían una interesante búsqueda en la que serán ellos mismos los que filtren la información que descubran.

- Programas informáticos: para su utilización es necesaria una formación de los alumnos previa de los alumnos, llevada a cabo por el docente o adquirida en cursos anteriores. Son programas como el AutoCAD (geometría descriptiva) o GeoGebra (geometría analítica).

4.1.2 CLASIFICACIÓN DE VILLARROEL Y SGRECCIA

Una forma transversal de afrontar la clasificación de los materiales es la de Villarroel y Sgreccia *(Villarroel, S. y Sgreccia,N. (2011)Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina).* Lo hacen siguiendo principios de la educación matemática realista (EMR) y afrontando cada material desde tres puntos de vista o “dimensiones” diferentes: Descripción del material, Interés didáctico-matemático y Versatilidad del material. Dentro de cada una de ellas, se establecen varias categorías que se definen a continuación:

- Dimensión 1 ”Descripción del material”: relaciona las posibilidades del material con su viabilidad según los principios de la EMR. Se divide en:

-*Categoría 1 “Características generales”:* se describen las características físicas como material del que está compuesto, tamaño y forma, así como las propiedades más sobresalientes, se menciona también, se es conocida la historia de su incorporación a la didáctica de las matemáticas.

- Categoría 2 "Variantes/Integrantes": define las diferentes presentaciones del material, destacando sus particularidades y el agrupamiento al que pertenecen si se presentan de manera parcial.

- Categoría 3 "Construcción y accesibilidad": Tipos de materiales que lo componen, si puede ser "fabricable" por el propio alumno y las posibilidades de adquisición y transporte.

- Dimensión 2 "Interés didáctico-matemático": explica que puede ofrecer a los contenidos matemáticos. Se divide en:

- Categoría 1 "Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales": Los contenidos relacionados con la geometría que se pueden exponer con ellos.

- Categoría 2 "Habilidades geométricas": expone las habilidades geométricas que puede estimular en los alumnos.

- Categoría 3 "Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje": define la relación con los niveles de razonamiento (Van Hiele, 1957) y, de esta forma, justificar los estados propuestos según el modelo del holandés. Se establece, además, la relación entre las fases de enseñanza/aprendizaje en que el docente puede utilizarlos.

- Dimensión 3 "Versatilidad del material": establece la flexibilidad del material en cuanto a su aplicación y su adaptación a los distintos niveles de aprendizaje, características necesarias para todo modelo didáctico según la perspectiva de la Educación Matemática Realista. Contiene las siguientes categorías:

- Categoría 1 "Adaptación a diversos contenidos geométricos": deben afrontar contenidos variados, y distintas perspectivas como podría ser la de plano frente a la de espacio.

- Categoría 2 "Vinculación con otros ejes del área": Pueden relacionarse con otros aspectos del área de la geometría o incluso otras asignaturas, por ejemplo, manifestar principios del área de física (balanza).

- *Categoría 3 "Uso en otros niveles de escolaridad":* define su posible uso en cursos posteriores, por sí solo, mediante implementación o a través de un cambio en la forma de presentación. La mayoría son válidos para cursos anteriores, utilizados para conocimientos adquiridos en esos mismos cursos.

Tabla 4.1.3 Tabla para clasificación de cada material según (Villarroel, S. y Sgreccia, N., 2011)

Dimensión 1 Descripción del material	*1.1 <u>Características generales</u>*	
	<u>1.2 Variantes/Integrantes</u>	
	1.2 <u>Construcción y accesibilidad"</u>	
Dimensión 2 Interés didáctico-matemático"	*<u>2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales</u>*	
	<u>2.2 Habilidades geométricas"</u>	
	<u>2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje</u>	
Dimensión 3 "Versatilidad del material"	*<u>3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos</u>*	
	<u>3.2 Vinculación con otros ejes del área</u>	
	<u>3.3 Uso en otros niveles de escolaridad</u>	

4.2 LISTA DE MATERIALES MANIPULATIVOS

En este apartado se presentarán una serie de materiales manipulativos con sus características y las potencialidades de su uso en la didáctica de las matemáticas. Al final de este documento, en el *Anexo 7 Tablas de características de los materiales manipulativos* aparecen las propiedades de cada uno de ellos en una combinación de las características destacadas de las distintas clasificaciones del apartado 4.

4.2.1 MECANO

El mecano es un juego de construcción basado en piezas de diverso tamaño y color con filas de agujeros en cada extremo o seriados de manera equidistantes de modo que puedan sujetarse mediante remaches con otras piezas.

Nació en 1901 de la mano de Frank Hornby, un político en inventor natural de Liverpool

(Inglaterra) autor de otro par de líneas de juguetes tremendamente populares a lo largo del siglo XX: los trenes Hornby y las miniaturas Dinky Toys. No fue, sin embargo, hasta los años veinte cuando llega a España este sistema de construcción por medio de la empresa barcelonesa Metaling. Se puede considerar, el mecano como primer juguete de este estilo y fuente de inspiración de juguetes posteriores como los archiconocidos Lego.

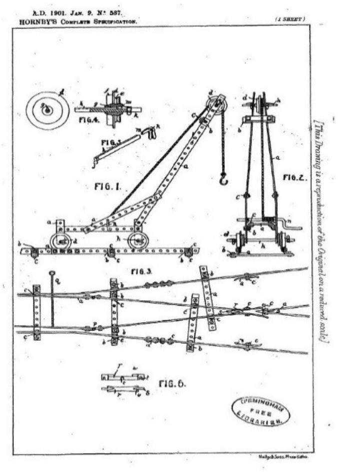


Imagen 4.2.1.1 Patente obtenida por F. Hornby en 1901 para el futuro Meccano.

Según (Cascallana, M.T., (1998). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos.* Madrid: Editorial Santillana.):

"Los mecanos constituyen un importante recurso para la enseñanza de la geometría. Antes del desarrollo de la creatividad y de la habilidad manual que este juego posibilita, el mecano tiene una aplicación directa en la construcción y reconocimiento de polígonos"

El mecano original está compuesto de 35 piezas de madera de dos tamaños diferentes y de cinco colores: amarillo, verde, azul, naranja, rosa y blanco, y clips para sujetar unas piezas con otras.

Sin embargo, el mecano puede ser construido fácilmente por los alumnos. De esta manera, se ahorraría costes, se podría adaptar a nuestros intereses (principalmente fabricar piezas de más tamaños diferentes) y, además podría encuadrarse la actividad en un proyecto transversal con la asignatura de plástica.

Para llevar a cabo su construcción debe seguirse los siguientes pasos:

1- *Dibujar en madera de balsa o cartulina con ayuda de escuadra cartabón y regla.*
2- *Recortar con cúter o tijeras siguiendo el trazado del paso 1.*
3- *Si se ha utilizado madera, lijar bordes para evitar astillas.*
4- *Con pinturas, se pinta la madera manteniendo un criterio de color. Si se ha hecho con cartulina, podemos aprovechar los colores de cada cartulina por defecto.*
5- *Realizar un agujero con un punzón, a 1cm de cada extremo y cada 3 a 5 cm en piezas grandes, con ayuda de clips, enlazar las piezas.*

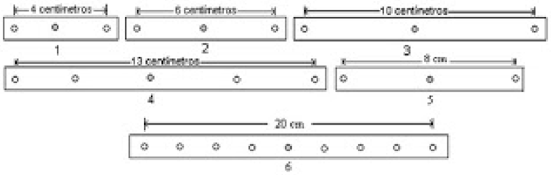


Imagen 4.2.1.2 Dimensiones de las piezas de mecano propuestas.

Tabla 4.2.1.1 Tabla para la elaboración del mecano propuesto (n: número de alumnos).

Número de Tira	Cantidades	Longitud
1	2n	4 cm
2	2n	6 cm
3	4n	10 cm
4	2n	8 cm
5	2n	13 cm
6	4n	20 cm

Con el mecano, es posible plantear preguntas a los alumnos relacionadas sobre propiedades de los polígonos elementales, sobre semejanza de polígonos sobre criterios de semejanza de triángulos y también representar construcciones geométricas con regla y compas utilizadas habitualmente en secundaria.

Algunas de esas preguntas, con las que los alumnos podrán investigar con este material son las siguientes:

- Utiliza las tiras 1,3 y 5 para formar el siguiente triángulos ACB. Cambia la posición del vértice B, de modo que se desplace la pieza CB hacia la izquierda, uniéndola así con la pieza AB, ¿Qué elementos han cambiado? ¿Dónde sucede esta situación en la vida real?

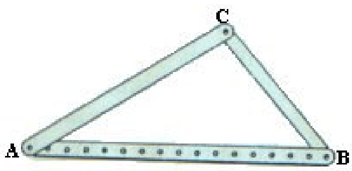


Imagen 4.2.1.3 Triángulo para la primera actividad del mecano.

- Con una lámina de cartón o madera de balsa de 20x30cm, la pieza 6, 3 y 4 del mecano, construye un mecanismo como el de la ilustración, inmovilizando el punto fijo A e introduce un clip por el orificio B y la rendija practicada al cartón. Desplazando ese punto B horizontalmente, introduce un lápiz en D para poder describir su trayectoria sobre el cartón ¿Cómo es su trayectoria? ¿Sucede lo mismo con el resto de puntos de DC?

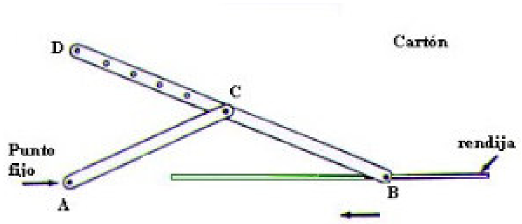


Imagen 4.2.1.4 Esquema de la construcción para la actividad 2.

-Utiliza el mecano para formar la figura de la imagen con el punto O dijo:

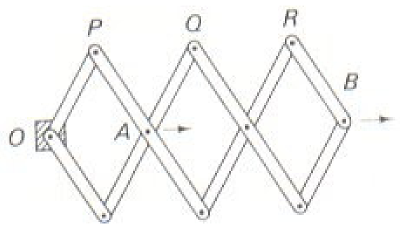


Imagen 4.2.1.5. Figura de la tercera actividad con mecanos.

- ¿Qué tipo de figuras lo conforman? ¿Dónde y para qué se emplea?

- Halla la distancia OA y OB para diferentes proporciones, ¿qué relación guardan? ¿se desplazan y B en la misma dirección?

- Utiliza un hilo elástico para unir los puntos medios de los lados de los cuadriláteros, ¿qué figura forma dicho hilo? ¿cómo evoluciona esa figura según deformas los cuadriláteros?

Para estudiar las propiedades de los triángulos se pueden realizar las siguientes preguntas:

- Intenta construir triángulos con las tiras: 1,2 y 4; 1,2 y 3; 1,3 y 4; 2,3 y 4. ¿Es posible? Mide las dimensiones de los lados y exprésala como suma de los otros dos, ¿qué ocurre?, ¿en qué casos puede construirse un triángulo con los lados dados?

- Construye un triángulo, apoya su base sobre la mesa, y presiona sobre el vértice superior, ¿se deforma? Haz lo mismo con un cuadrilátero, ¿qué ocurre y por qué sucede?

Algunas de las construcciones con regla y compás que los alumnos acostumbran a hacer en secundaria y Bachillerato bien en demostraciones matemáticas o en la asignatura de dibujo técnico son las siguientes*:*

Construcción de un punto móvil que se desplaza a lo largo de una recta:

1- *En primer lugar, se realiza una construcción con el Tangram original con cuatro piezas iguales (representadas en la ilustración con el color verde) de una longitud p y dos de longitud q, dejando en la misma recta los puntos A, B y C representados. La distancia AB se llamará x y puede variar tanto como se quiera ya que la construcción tiene un grado de libertad. También puede variar la distancia entre p y q.*

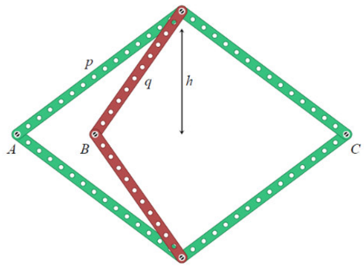


Imagen 4.2.1.6 Primer paso del proceso de construcción.

2- *Una vez elegido x, la distancia BC, a la que llamaremos y, queda fijada y el producto xy tiene un valor fijo que es $p^2 - q^2$ como se puede ver en la siguiente demostración:*

$$x = a - b, \qquad y = a + b$$

$$xy = a^2 - b^2 = p^2 - q^2$$

3- *Si se fija ahora B en el punto de origen de coordenadas O, se realiza una inversión, es decir, si el punto A describe una circunferencia o una línea recta, C también lo hace. Para demostrarlo, como aparece en la siguiente imagen, se fija el punto A de modo que describe una circunferencia de centro M y radio MA. Mientras A recorre esa circunferencia, el punto C se mueve a lo largo de una línea recta representada por una línea vertical discontinua.*

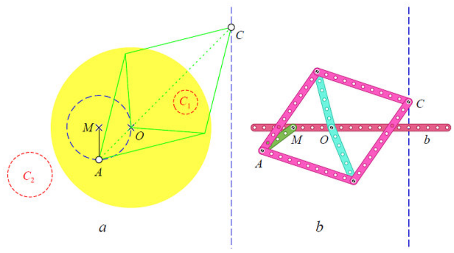


Imagen 4.2.1.7 Movimientos de A y de C en la construcción.

Construcción de números racionales

Es sencillo definir números racionales con mecano utilizando criterios de semejanza de triángulos. Se trata de un ejercicio que une dos campos diferentes de las matemáticas como la geometría y el álgebra.

Las tiras de un mecano original tienen una longitud entera. Sin embargo, es posible construir segmentos de longitudes racionales no enteras, ya que todo número racional R puede expresarse como cociente de dos números enteros p y q:

$$R = \frac{p}{q}$$

Como se observa en la siguiente figura, se puede formar una tira de longitud racional p + q/d. Podemos construir cualquier número racional (dentro de las dimensiones que permita el mecano) *ya que las longitudes p, q, r y d se eligen libremente.*

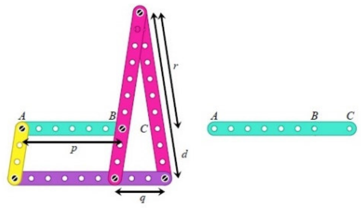


Imagen 4.2.1.8 Construcción de los números racionales con mecano

La tabla resumen de las propiedades del mecano se puede ver en el Anexo 7 de este presente documento.

4.2.2 PUZLES Y ROMPECABEZAS.

Los puzles o rompecabezas son juegos de mesa cuyo objetivo es formar una figura determinada a través de la combinación de piezas que son parte de la misma.

Los rompecabezas son usados como pasatiempo educativo desde el siglo XVIII. El primero de los que se tiene registro, fue creado de manera accidental por John Spilsbury en 1760, un cartógrafo británico quien, para trabajar mejor con un mapa de gran tamaño, tuvo que recortarlo y decidió hacerlo siguiendo las fronteras de los países en él representados. Por ello, inicialmente, los rompecabezas tenían finalidad educativa, pero, instruyendo en geografía. Los actuales puzles artísticos no se empezaron a utilizar, sin embargo, hasta principios de siglo XX.

Imagen 4.2.2.1 Primer rompecabezas diseñado a propósito (1766).

Los puzles y rompecabezas fomentan la creatividad, la capacidad de análisis y síntesis, la visión espacial, así como las estructuras y los cuerpos geométricos. Por todo esto, su utilización en el campo de la geometría puede suponer un recurso muy eficaz muy estimulante, por su naturaleza lúdica, para los alumnos.

El rompecabezas no sirve, por tanto, para demostraciones de conceptos, y son utilizados como herramienta para que el alumno desarrolle habilidades potenciales para la geometría.

Existen muchos tipos, uno de los más conocidos, junto al tangram que se tratará aparte en el apartado 4.2.2, es el pentaminó. Se trata de un rompecabezas comercializado de la familia de los poliminós, es decir, piezas formadas por cuadrados iguales unidos por las aristas, en este caso, como su propio nombre indica por cinco cuadrados (el tetraminó también es muy conocido por componer las piezas del famoso videojuego Tetris).

Hay dos preguntas tremendamente inmediatas que obligarán a los alumnos a estimular las habilidades geométricas nada más comenzar a tratar el pentaminó. La primera, sin mostrarlo, simplemente como concepto teórico:

- *¿Cuántas piezas diferentes puedes formar con cinco cuadrados iguales unidos por las aristas?*

Para dar solución a la pregunta, lo más sencillo es ir paso a paso desde los triminós, de tal forma que se va añadiendo cuadrados en distintas posiciones siempre y cuando sea posible.

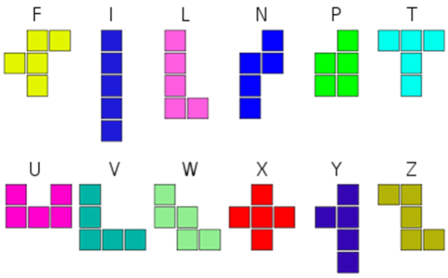


Imagen 4.2.2.2 Los doce posibles tipos de pentaminós.

La segunda consiste simplemente en hacer que los alumnos repongan las piezas en la caja o envase del juego, un auténtico desafío por fácil que parezca a primera vista.

Imagen 4.2.2.3 Rectángulo 6 x 10 contenido en la caja del juego.

Después de encontrar una solución para el rectángulo de 6x10, se pueden proponer encontrar rectángulos de 5x12 4x15 y 3x20, cada vez más difíciles y con menor número de soluciones.

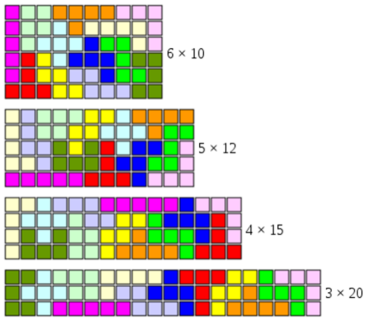


Imagen 4.2.2.4 Soluciones a los distintos rectángulos.

Similar a los pentaminós se pueden proponer puzles con polígonos diferentes al cuadrado. Es el caso de los triminós, formados por triángulos equiláteros iguales. Ellos conforman las piezas del “Puzle hexagonal de destrezas algebraicas”, un juego con el que los alumnos aprenderán geometría y se iniciarán al álgebra de manera simultánea pues tendrán que unir las piezas formadas por 24 triángulos equiláteros para componer un hexágono regular y, al mismo tiempo, las ecuaciones algebraicas de cada arista deberán colindar con otras equivalentes.

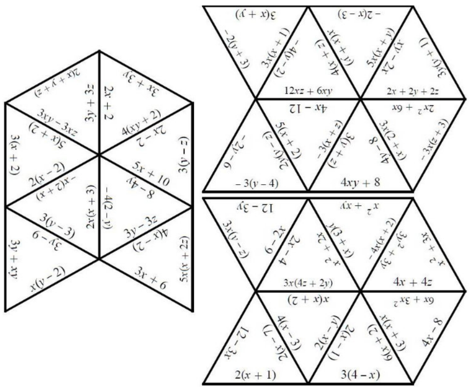


Imagen 4.2.2.5 Puzle hexagonal de destrezas algebraicas.

Los rompecabezas también pueden utilizarse a modo de acertijo para los alumnos. De este modo, podrán ejercitar las habilidades relacionadas con la geometría y, olvidarse de la presión de ceñirse constantemente al temario. Uno de los rompecabezas más famosos es “la paradoja de Curry”. Consiste en cuatro piezas:

- **La pieza roja:** un triángulo rectángulo de 8x3
- **La pieza Azul:** un triángulo rectángulo de 5x2.
- **La pieza verde**: es un rectángulo de base 5 y altura 2, al que le falta otro de sus rectángulos en uno de los vértices.
- **La pieza amarilla**: es un rectángulo de 5x2 al que le falta también otro rectángulo de 3x1.

Según se colocan las piezas de uno u otra forma, se obtiene aparentemente, por un lado, un triángulo rectángulo de base 13 y altura 5, y por otra, un segundo rectángulo de base 13 y altura 5 también, pero al que le falta un cuadrado de 1x1. Evidentemente, si ambos están formados por las mismas piezas, sus áreas deberían ser exactamente las mismas, y, al tener misma base y altura, si a uno de ellos le falta un cuadrado de 1x1, debería tener una unidad de área menos. La respuesta es que, en realidad, no son triángulos rectángulos, sino que se trata de dos cuadriláteros, ya que sus hipotenusas en realidad son dos segmentos, por tanto, no se podría aplicar la fórmula de base por altura entre dos para calcular su área y, de ahí, ese aparente desajuste de las mismas.

Se trata de un acertijo muy difícil de ver a simple vista, pero que los alumnos pueden intuir con la manipulación de las piezas, mediante la comparación de la pieza roja y la pieza azul, pues al colocarlos en la posición de Tales, se observa que no son semejantes y, por tanto, no pueden formar una hipotenusa de con la colocación de la imagen. Una muestra más que la manipulación de las formas geométricas permite a los alumnos obtener punto de vista más complejas de la geometría que si viesen esas formas en dos dimensiones, ya sea, en la pizarra o en un papel.

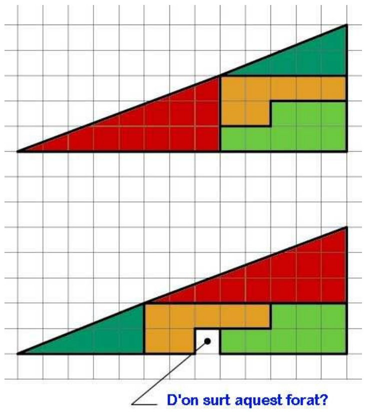


Imagen 4.2.2.6 Rompecabezas de la Paradoja de Curry

Los puzles y rompecabezas son un material manipulativo con una marcada condición lúdica y ejercitativa, sin tantas posibilidades a niveles de contenidos teóricos. Sus propiedades aparecen resumidas en el Anexo 7 Tablas de resumen de los materiales manipulativos.

4.2.3 TANGRAN

El tangram es un juego chino consistente en un rompecabezas de siete piezas que forman un cuadrado (habitualmente) o un romboide. Aunque el origen es incierto, se le asocia habitualmente con China (siglos VII - X), más no existe documentación histórica que demuestre su origen hasta el siglo XVIII. Según la leyenda, el sirviente de un emperador chino rompió un valioso mosaico de cerámica y quiso volver a recomponer aquella pieza cuadrada utilizando su ingenio, pero no pudo. Sin embargo, se dio cuenta de que podía formar muchas más, lo cual entusiasmo al emperador quien perdonó al sirviente su torpeza inicial.

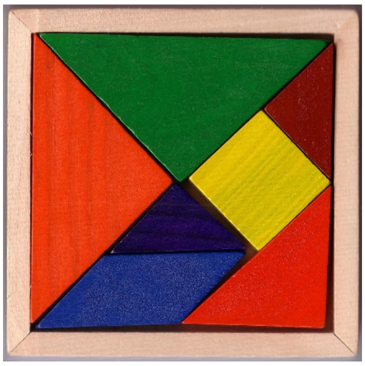


Imagen 4.2.3.1 Las siete piezas del Tangram original.

Más allá de su posible origen, lo cierto es que el juego no se introdujo en Europa y América hasta el siglo XVIII. Actualmente existe más de 16.000 Tangram con diferentes piezas. Es habitual su utilización en psicología, diseño, filosofía y en didáctica de matemáticas.

El Tangram original está compuesto de las siguientes 7 piezas:

- Cinco triángulos: dos de ellos construidos utilizando las diagonales principales por completo como uno de los lados, uno que utiliza parte de una de las diagonales como lado, otro que utiliza vértice y dos lados y, por último, uno que utiliza uno de los lados. Todos ellos son triángulos isósceles.
- Un cuadrado: cuyo lado es coincidente con uno de los lados iguales del triángulo central.
- Un paralelogramo: con uno de los vértices coincidente con el del cuadrado total.

Estas figuras tendrán las proporciones siguientes en relación a la medida del lado del cuadrado central:

- Los catetos de los triángulos mayores, miden el doble de la medida del lado del cuadrado.
- La hipotenusa del triángulo del vértice mide el doble de la medida del lado del cuadrado.
- Los catetos de los triángulos pequeños

Por lo tanto, fácilmente, se puede construir un tangram con cartulina o madera recortable siguiendo los siguientes pasos:

- Se dibuja un cuadrado de 120mm de lado (el más habitual entre los Tangram comerciales) y se dibujan las diagonales.
- Se dividen dos de los lados formando 3 segmentos: dos de un cuarto del lado y una que ocupe la mitad. Posteriormente los extremos de estos segmentos con los extremos de los segmentos del otro lado.
- Se procede a recortar las piezas tras borrar las líneas auxiliares de construcción.

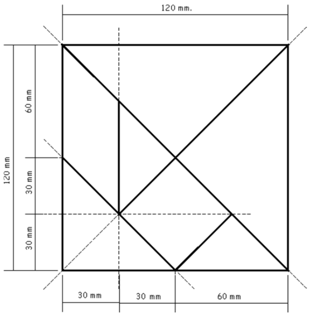


Imagen 4.2.3.3 Esquema para la construcción del Tangram.

A través de estas siete piezas pueden construirse una infinidad de figuras diferentes. Deben formarse de la siguiente manera:

- Deben utilizarse las siete piezas (tans).
- Deben colocarse sobre un plano.
- Las piezas deben tocarse y nunca podrán superponerse.

Gracias al uso del Tangram, se desarrollarán habilidades elementales para la geometría como la clasificación de formas, las relaciones espaciales o los movimientos geométricos. Por ello, su uso es especialmente útil en educación primaria pero también puede usarse en niveles posteriores. En la unidad didáctica del presente trabajo, se explica la demostración del teorema de Pitágoras mediante Tangram. Sin embargo, existen otras demostraciones demostrables a través del Tangram.

Teorema de Bolyal-Gerwiwn:

El cuadrado que forman las siete piezas del tangram puede transformarse, mediante desplazamientos y giros, en un triángulo de igual área. Esta es una forma de explicar el Teorema de Bolyal-Gerwiwn que dice que: “Dados dos polígonos de la misma área, se puede cortar uno de ellos en un número finito de piezas poligonales que, mediante traslaciones y giros, pueden colocarse formando el otro polígono.”

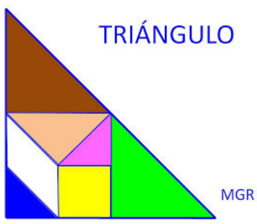
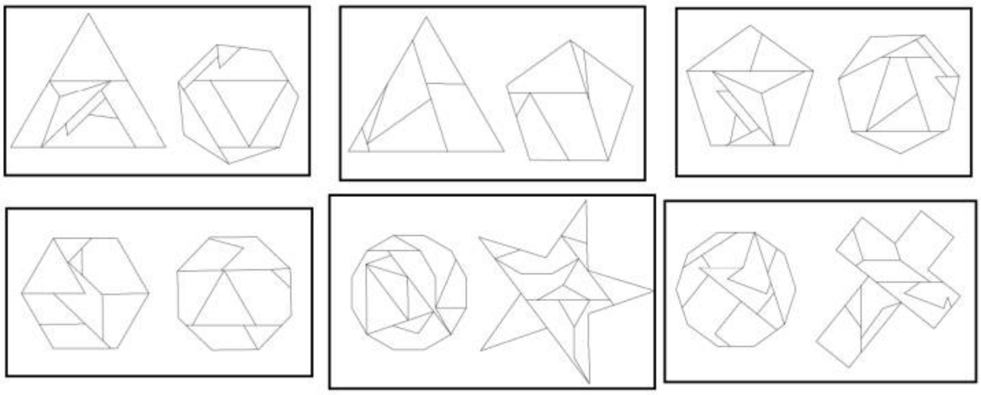


Imagen 4.2.3.4 Piezas del Tangram formando un triángulo.

En caso de que el Tangram sea de piezas de cartulina, se puede mostrar el teorema en los casos de polígonos más complejos pues, todo polígono puede descomponerse en triángulos, y éstos, posteriormente, unirse para formar rectángulos. Al poder recortarse las piezas hechas con cartulina, podría explicarse el proceso como “pasar esos triángulos de una figura a otra”.



4.2.3.5 Triangulaciones de distingos polígonos para demostrar el teorema de Bolyal-Gerwiwn

Además, con el Tangram es posible plantear a los alumnos, enigmas que ayuden a desarrollar sus habilidades para la geometría.

En la Paradoja de la taza de Sam Loyd aparece una primera figura que recuerda a una taza formada por las siete piezas del Tangram original. Sin embargo, la segunda, para la que se utilizan también las siete piezas, parece ser la misma, pero con una parte recortada. Lo mismo sucede con la tercera, con una oquedad en el centro. Las tres figuras deben tener la misma área porque, para su construcción, se utilizan las siete piezas y, aparentemente, no la tienen.

Imagen 4.2.3.6 Las tres figuras aparentemente iguales.

Esta paradoja, recogida en el libro (Lloyd, S.M (1903). *Eighth Book of Tan. 700 Tangrams by Sam Loyd*. New York: Dover Publications), se explica porque las dimensiones se las figuras no son exactamente iguales, aunque, a simple vista, lo son. Pues la colocación de las piezas difiere cada una de las piezas como se puede ver en esta imagen.

Imagen 4.2.3.7 Disposición de las piezas en las tres figuras

El Tangram resulta útil para repasar contenido del currículo de secundaria relacionado con polígonos (triángulos y cuadriláteros). Concretamente, se puede trabajar con los alumnos los criterios de semejanza de triángulos y ángulos interiores de polígonos, pues aparecen triángulos que comparten lados, triángulos con dos lados iguales, que tienen uno de los ángulos recto, etc. circunstancias muy adecuadas para poner a prueba los conocimientos sobre este tema que se trata en la unidad didáctica.

4.2.4 CUERPOS GEOMÉTRICOS RÍGIDOS

Se trata del material manipulativo más evidente de todos pues se trata de un modelo construido que recrean de manera fiel los elementos geométricos que representan. Es también el más antiguo, pues se sabe que los matemáticos de la Grecia Clásica los utilizaban para investigar sobre sus propiedades y características y elaborar los teoremas que han llegado hasta hoy (Pitágoras, Tales, Euclides, etc.)

Por aquel entonces eran verdaderas obras de artesanía realizadas en madera o cerámica. Hoy en día hay varias opciones para llevarlos al aula. Pueden ser piezas de madera o plástico adquiridas en el mercado que llamaran la atención de los alumnos por su perfección y su colorido (plástico) o pueden introducirse a través de proyectos de construcción llevados a cabo por los propios alumnos. Estos permitirán a los alumnos asimilar mejor las propiedades y realizar una interesante actividad conjunta con la asignatura de plástica. Los inconvenientes de esta segunda opción será que se perderá fidelidad con el cuerpo geométrico y la dificultad de construcción con materiales rígidos. Esa dificultad será mayor cuando se intenten recrear poliedros pues los cuerpos geométricos rígidos planos se realizan fácilmente. Los materiales más adecuados, por la facilidad con que se trabajan, son la madera de balsa o el cartón pluma, pudiéndose también utilizarse cartulina plastificada, de menor rigidez, pero muy manejable.

Este material puede utilizarse en prácticamente la totalidad del temario de geometría en secundaria. Como se plantean actividades relacionadas en la unidad didáctica planteada en el presente trabajo, se propondrán a continuación unos ejercicios, fuera de temario, consistentes en enigmas que los alumnos deberán resolver y, con los que aumentarán su capacidad de razonamiento.

- *Con un polígono formado por un cuadrado al que se le resta uno de los cuartos, pedimos a los alumnos descomponer el polígono en forma de L resultante en cuatro partes de igual forma y tamaño. A simple vista, se puede observar, que dividir la figura resultante en tres partes iguales, pero que resulta más complicado hacerlo en cuatro. La solución se obtiene al dividir el polígono en una malla regular de 4x4. Resulta entonces 12 cuadrados de iguales dimensiones. Como se debe dividir el polígono en 3 partes, parece obvio que se deben formar piezas que contengan 4 cuadrados cada una. Para reunir todas las condiciones que nos requiere el acertijo, se deben tomar cuatro piezas en forma de L.*

Imagen 4.2.4.1 Pieza a dividir en 4 partes iguales.

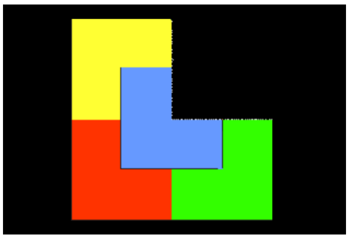


Imagen 4.2.4.2 Solución con piezas en "L".

Otro juego consiste en descomponer, como el caso anterior, una figura en cuatro partes de igual forma y tamaño. Pero, en este caso se trata de un trapecio rectángulo formado por un cuadrado más la mitad de otro cuadrado formado por dos de sus lados y la diagonal. Para hallar la solución, se debe aplicar el mismo proceso inductivo que en el anterior: dividimos el polígono mediante una malla regular de 4x6. El polígono ocupa cinco cuadrados completos y dos mitades de cuadrados de dicha malla, es decir, un total de seis cuadrados. Para que, mediante la división del polígono en partes, se obtengan polígonos de igual tamaño, cada uno de ellos debe ocupar un cuadrado y medio, pues seis entre cuatro es uno y medio. Para que tengan toda la misma forma, se debe dividir el polígono en trapecios formados por un cuadrado más medio cuadrado, es decir, al igual que en el caso anterior, se divide en polígonos semejantes a la figura original.

Imagen 4.2.4.3 Trapecio a dividir en 4 partes iguales.

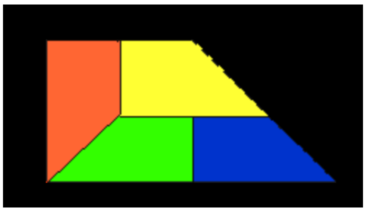
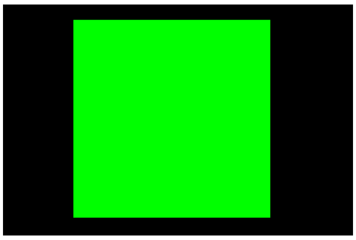


Imagen 4.2.4.4 Solución con trapecios semejantes.

- El siguiente enigma plantea la pregunta siguiente: ¿puede descomponerse el siguiente en cuadrado en 4 cuadriláteros irregulares de igual tamaño y forma? En este caso, para llegar a la solución se debe partir de la división del cuadrado en cuatro cuadrados iguales, a modo de cuadrantes. Los segmentos divisorios forman cuatro ángulos rectos. Si dichos segmentos rotan desde el centro del polígono, los polígonos variaran de tal forma que, por el hecho de rotar simultáneamente ambos segmentos, la variación es exactamente la misma por las propiedades de los ángulos opuestos por el vértice. Por lo tanto, los cuatro polígonos, sea cual sea la rotación, siempre que sea con centro en el punto medio y, con la excepción de la rotación de 45 grados al formar con ésta triángulos y no cuadriláteros, tendrán mismo tamaño y forma.



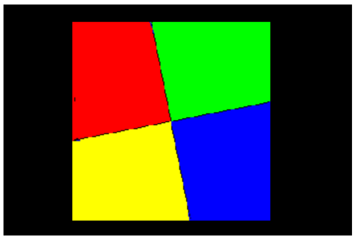
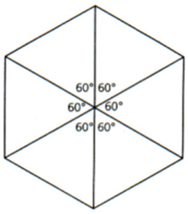


Imagen 4.2.4.5 Cuadrado a dividir. *Imagen 4.2.4.6 Solución con cuadriláteros irregulares*

Otra pregunta a plantear es los alumnos es:

- *¿Qué polígonos regulares son teselables y por qué?, es decir, si se pueden encajar sin dejar ningún espacio entre ellos.*

Para ellos necesitamos cierto número de piezas correspondientes a polígonos regulares de distinto número de lados. Los polígonos regulares con esta cualidad son, los triángulos, cuadrados y hexágonos. La mayor dificultad estriba en deducir la razón por la que esto sucede, pues son polígonos con ángulos de 60º, 90º y 120º y, al ser múltiplos de 360, pueden cubrirse con 6, 4 y 3 polígonos respectivamente los 360º en un solo punto. Si los alumnos no son capaces de llegar a esa conclusión por sí solos, se puede facilitar la tarea anotando en las piezas, de cartulina preferentemente, para poder escribir sin problema, la medida de cada ángulo como se observa en la ilustración.



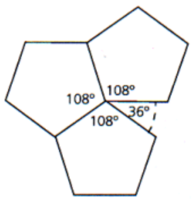


Imagen 4.2.4.7 Mosaico con triángulos regulares. *Imagen 4.2.4.8 Hueco entre los pentágonos.*

4.2.5 GEOPLANO

El geoplano es un instrumento manipulativo consistente en un tablero rígido, de madera o de plástico generalmente, en el que se realiza una cuadricula de salientes que se aprovechan para colocar gomas representando elementos geométricos en un sistema de coordenadas.

El geoplano fue desarrollado por el egipcio Caleb Gattegno (1911-1988) en 1960, uno de los educadores matemáticos más influyentes del siglo XX quien buscaba un recurso manipulativo para la representación de elementos geométricos.

Los geoplanos se clasificarán según el tipo de cuadrícula: - -

<u>Geoplano ortométrico</u>: es el más habitual. En él los pivotes están colocados siguiendo una cuadrícula. Recrean un sistema de coordenadas ortogonal.

<u>Geoplano isométrico</u>: Poseen una trama formada por triángulos equiláteros. De este modo, se pueden representar poliedros en el plano.

<u>Geoplano circular</u>: los pivotes se disponen en una o varias circunferencias. Este tipo de geoplanos permiten construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 12 y 24 lados y estudiar las propiedades de las circunferencias.

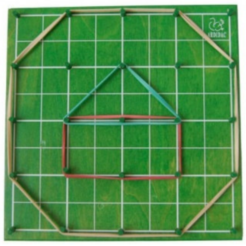
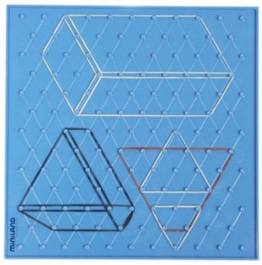
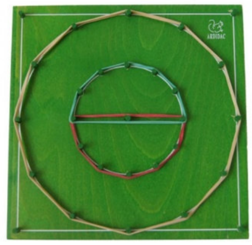




Imagen 4.2.5.1 Geoplano ortométrico. Imagen 4.2.5.2 Geoplano isométrico. Imagen 4.2.5.3 Geoplano circular.

El uso en la Educación Secundaria del geoplano se basa en el estudio de los polígonos y sus propiedades. En la unidad didáctica propuesta en este trabajo, se exponen una serie de actividades de criterios de semejanza de triángulos. Otro de los usos para el que podría ser aplicado, en este caso en el tema del cálculo de áreas, es para enseñar el Teorema de Pick, un teorema que apenas se estudia en la educación obligatoria pero que permite determinar áreas cuando el polígono se sitúa en un sistema de coordenadas.

<u>Teorema de Pick</u>

El matemático austriaco Georg Alexander Pick (1859–1942) descubrió una fórmula que permite obtener el área de un polígono cualquiera cuyos vértices se encuentren en puntos enteros de un sistema de coordenadas ortogonal y siempre que no tengan agujeros. El enunciado del teorema es el siguiente:

Sea un polígono simple cuyos vértices son puntos enteros. Si B es el número de puntos enteros en el borde, I el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular con la fórmula:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

Se trata de un problema que permite que, mediante cálculos sencillos, se puedan calcular áreas de multitud de polígonos y qué se puede demostrarse su validez a los alumnos usando el principio de inducción, pero que tiene sus limitaciones pues, el hecho de que solo permita el cálculo de polígonos con coordenadas enteras hace que polígonos como el triángulo equilátero nunca se puedan calcular de esta forma pues uno de los vértices estará necesariamente en un número no entero.

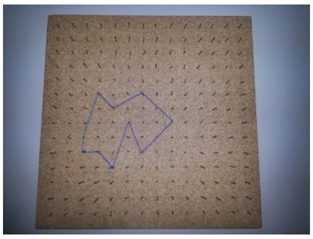


Imagen 4.2.5.4 Actividad para aplicar el Teorema de Pick utilizando el geoplano.

<u>Aproximación al número Π</u>

En el primer curso de la E.S.O. los alumnos se encuentran de lleno con el cálculo de áreas de diferentes polígonos y también de la circunferencia. Una forma sencilla de hacer entender a los alumnos el significado del número Π es la aproximación a su valor mediante el geoplano.

Para ello se necesitarán dos geoplanos circulares de distinta dimensión y dos cuerdas. No servirán, en este caso las gomas elásticas, pues no se puede determinar con ellas una longitud constante. Bastará, simplemente con rodear la circunferencia (en realidad, es un polígono de un alto número de lados, que deberemos tomar como circunferencia), colocar un segundo cordel para el diámetro y tomar sus medidas. Tras realizar la operación por segunda vez en otro geoplano de diferente dimensión, se deberán comparar las longitudes y ver que la razón entre ellas es la misma y que se aproxima al valor numérico de Π.

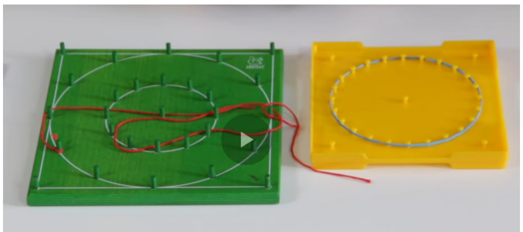


Imagen 4.2.5.5 Materiales para la aproximación a Π con geoplano.

Con el geoplano, también se podrán plantear acertijos a los estudiantes que harán las clases más entretenidas y con los que los alumnos podrán ejercitar su capacidad de razonamiento. Un ejemplo de estos es el siguiente:

- Un padre deja en herencia a sus cuatro hijos un terreno con los siguientes arboles (deberán representarse en el geoplano mediante pegatinas u otros medios) y una fuente central. Se deberá repartir el terreno en parcelas con el mismo número de árboles, del mismo tamaño e igual forma. La fuente puede dar la clave de cómo proceder para la resolución del problema. Como el tamaño debe ser el mismo y se debe repartir entre cuatro hermanos, y hay 12 árboles diferentes, se deberá dividir el geoplano en 12 partes. De éstas, cada hermano recibirá una formada por la suma de tres cuadrados. Se convierte ahora en un problema de tetrominós (forma geométrica compuesta por cuatro cuadrados conectados ortogonalmente), De las cinco posibilidades que ofrece esta forma geométrica solo una permite cubrir toda la superficie del geoplano y contener, en cada una de las posiciones, un total de tres árboles cada uno, cumpliéndose todas las condiciones pretendidas.

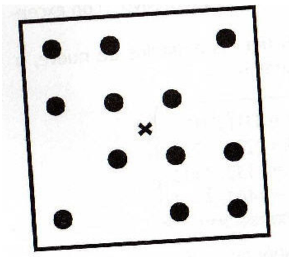


Imagen 4.2.5.6 Enunciado del problema a representar en el geoplano.

Además, con el geoplano también es posible plantear a los alumnos acertijos que se solucionan mediante la teoría de grafos, y la representación en el geoplano de los nodos como determinados puntos del geoplano y las aristas mediante gomas elásticas.

Sin necesidad de ahondar en la teoría, propia de etapas posteriores a secundaria y Bachillerato, sí es fácil afrontar problemas, siempre que sean de un enunciado cuyo enunciado no requiera un esfuerzo cognitivo alto, puesto que la aproximación estimulará la capacidad de aprender a aprender, aunque esta pueda basarse en el método de prueba – error y requiera, como es lógico, un mayor tiempo que en el caso de que los alumnos poseerán mayores conocimientos teóricos.

Un ejemplo de este tipo de problemas, muy conocido en este caso, es el siguiente:

- Un grupo de tres criados y tres señores deben cruzar un río en una barca con capacidad únicamente para dos personas. Los criados deben organizar los viajes en la barca, pero temen que sea un engaño para que los señores se deshagan de ellos. Por la tanto deben organizar los viajes, de tal modo, que en ninguna de las orillas haya un número mayor de señores que de criados, ya que podrían matarlos. ¿cómo deberán cruzar el río?

Para solucionar este problema, se puede representar los nodos en el geoplano asociando cada uno a un par (c,s) con ***c*** siendo el número de criados y ***s*** el número de señores. La situación inicial comenzará en (3,3) y deberá terminar en (0,0) en una orilla y, al revés, en la orilla opuesta. Por tanto, para hallar la solución se deberá representar los caminos que puedan mantener estas soluciones mediante gomas elásticas hasta llegar al estado final de (3,3) en la otra orilla.

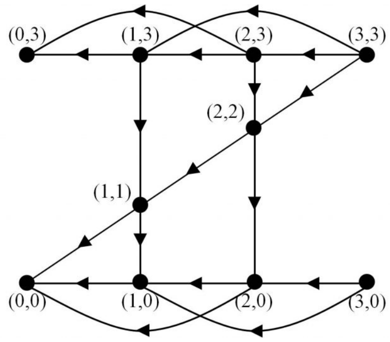


Imagen 4.2.5.7 Planteamiento mediante grafos del problema.

4.2.6 GEOESPACIO

El geoespacio es un material manipulativo que proviene del geoplano. Puede considerarse "un geoplano en tres dimensiones" o "una combinación de 6 geoplanos". Se trata de un cubo hueco con aristas de maderas en las que se clavan rieles o argollas, que sujetan cuerdas o gomas y así representar elementos dentro de un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

El geoespacio fue desarrollado también por Caleb Gattegno (1911-1988), el creador del geoespacio, aunque no llegó a patentarlo. Por ello, es un recurso muy poco conocido en comparación con el resto, apenas hay documentación escrita al respecto y se ha comercializado muy poco, pero resulta especialmente útil pues es muy versátil y abarca contenido de bachillerato. Quizás esa sea la razón pues la utilización de recursos en Bachillerato es bastante menos popular que en cursos anteriores.

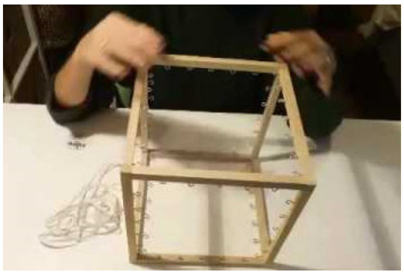


Imagen 4.2.6.1 Geoespacio de madera, argollas metálicas y cuerdas.

Para utilizar correctamente el geoespacio se deben seguir las siguientes reglas:

- Las unidades se miden según las argollas.
- Para medir distancias oblicuas, debe medirse utilizando el Teorema de Pitágoras, ya que las aristas del geoespacio son ortogonales. De esta forma, pueden medirse ángulos entre rectas, entre planos o entre caras de un cuerpo geométrico.

El uso del geoespacio tiene muchas ventajas para el alumno pues promueve el uso de estrategias para la resolución de problemas de geometría analítica que suelen afrontarse de manera mecánica por parte de los alumnos. Esto hace que se favorezcan las actitudes hacia las matemáticas, la autoconfianza y además, puede utilizarse para el aprendizaje cooperativo con facilidad al plantearse actividades con una búsqueda de soluciones conjunta por parte del grupo de alumnos. Las propiedades y situaciones de los elementos geométricos en R^3 que se muestran o se recrean con el geoplano son múltiples: recta que interseca a un plano y pasa por un punto (1), la por un punto pueden pasar infinitas rectas (2), solo hay una recta que una dos puntos (3), plano por tres puntos dados (4), tres puntos alineados por los que pasa una única recta (5), rectas paralelas (6), intersecciones de dos rectas (7), dos rectas perpendiculares (8), recta paralela a plano (9), recta perpendicular a un plano (10), dos planos paralelos (11), dos planos perpendiculares (12), intersección de dos planos (13), corte que genera un hexágono (14) o prisma octagonal (15).

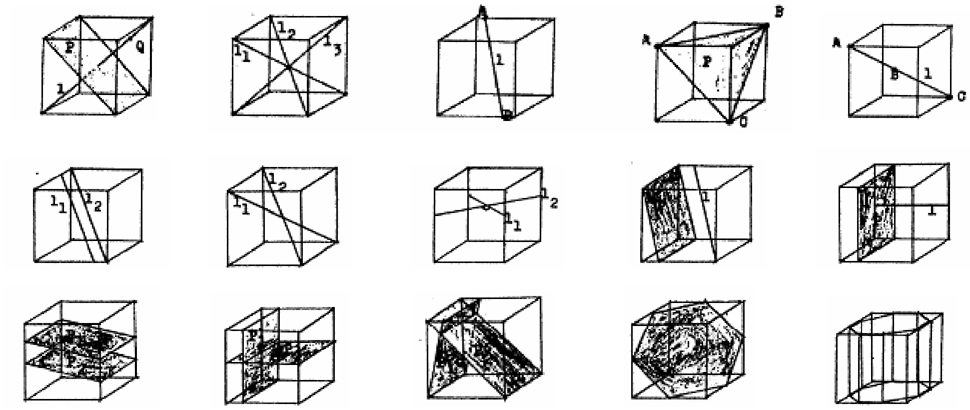


Imagen 4.2.6.2 Algunas de las posibilidades con elementos geométricos con el geoespacio.

Con el geoespacio también se pueden representar funciones lineales (rectas), cuadráticas (parábolas), e hipérbolas. Incluso, las derivadas de dichas funciones, es decir, las rectas tangentes a dichas curvas por un punto dado. En la fotografía siguiente se aprecia una recreación de la parábola con el geoespacio mediante aproximaciones a través de rectas.

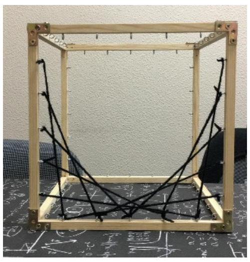


Imagen 4.2.6.3 Parábola mediante aproximaciones con rectas.

Con tantas posibilidades de representación que ofrece este material, se pueden plantear infinidad de actividades del área de la geometría analítica. Aquí se recogen solo tres ejemplos de ellas:

- *Representa la recta r: (x,y,z) = (1,0,0) + t (0,2,2) y el plano Π: x + y - z = 3 con el geoespacio. Determina su posición relativa y calcula el punto de corte entre ambas.*
- *Calcula la media de la diagonal del cubo que forma el geoespacio.*

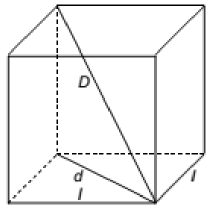


Imagen 4.2.6.4 Diagonal a calcular con ayuda del geoespacio.

- Representa en el geoespacio el siguiente prisma de base triangular. Calcula su área y volumen.

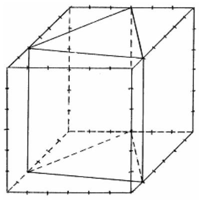


Imagen 4.2.6.4 Prisma triangular con el geoespacio.

La tabla con el resumen de las características del material es en el Anexo 5 Tablas de características de los materiales manipulativos.

4.2.7 CUBOS MULTILINK

Los cubos multilink (de inglés vínculo) o policubos (figura geométrica compuesta por varios hexaedros) en forma de cubo que se pueden unir fácilmente entre sí, mediante machihembrado a través del saliente de una de las caras y los agujeros de las cinco restantes. Estos cubos Permiten una gran libertad de interacción con cuerpos geométricos, además, resultan muy atractivos visualmente por su colorido y por su fácil manejo.

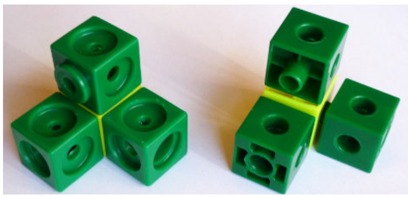


Imagen 4.2.6.1 Policubos formado por cubos multilink.

Para buscar el origen de los rompecabezas cúbicos, hay que remontarse a 1994, cuando el danés Piet Hein patentó el "cubo Soma", un cubo formado por siete policubos de tres o cuatro cubos que componen un cubo de 3x3 unidades cúbicas.

El cubo Soma ha sido sin duda, el policubo más famoso y también sobre el que más de ha trabajado. El libro (Conway, J.H. y Guy, K. (1982). *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. New York: Academic Press) desarrolla hasta 240 soluciones distintas para formar el cubo 3x3. También existen estudios sobre la quiralidad de los policubos y, además, en psicología, se utiliza su resolución en función del tiempo utilizado para medir las capacidades el, rendimiento y esfuerzo de sujetos de estudio.

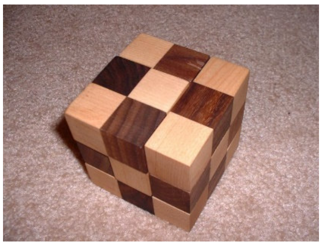


Imagen 4.2.7.2 El cubo Soma (Piet Hein, 1934).

La principal diferencia con los cubos multilink reside en que las piezas están formadas por policubos mientras que en los multilink las unidades cúbicas son piezas individuales. En la imagen aparecen las siete piezas del cubo Soma con la numeración que se utiliza habitualmente.

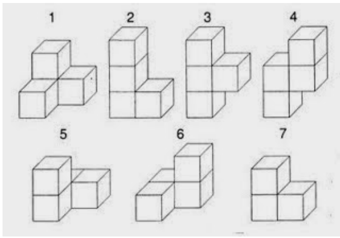


Imagen 4.2.7.3 Las siete piezas del cubo Soma numeradas.

La principal recreativa que se puede plantear con el cubo Soma es la de recrear el cubo 3x3 original. Con ella los alumnos desarrollarán la habilidad visual y cocerán de primera mano las propiedades del hexaedro. Otra actividad de similares características es la de proporcionarles figuras como modelo y, que los estudiantes, intenten recrearlos con las siete piezas.

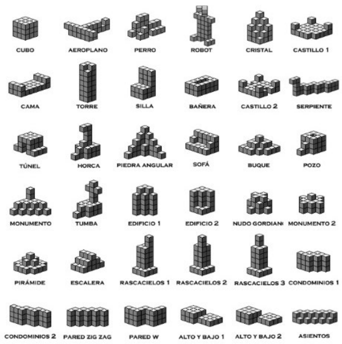


Imagen 4.2.7.4 Modelos de figuras a recrear con las piezas del cubo Soma.

Una actividad muy interesante relacionadas con el contenido secundaria, en este caso, aquellos relacionados con áreas y volúmenes es la siguiente:

Considerando que el volumen será siempre el mismo, pues la figura estará compuesta por todas las piezas del cubo Soma, construye la construye la figura de menor área. ¿Qué figura es? ¿Qué conclusiones podemos sacar? ¿Cuál será el cuerpo geométrico con menor perímetro en relación a su área? ¿Y cuál será la figura plana?

Volviendo a los cubos multilink, los de los cubos unitarios separados, estos pueden usarse en didáctica con múltiples aplicaciones en distintas asignaturas. Un ejemplo es en dibujo técnico. Resulta particularmente útil aprender a representar figuras geométricas irregulares a través de sus proyecciones planes con la ayuda de los cubos multilink.

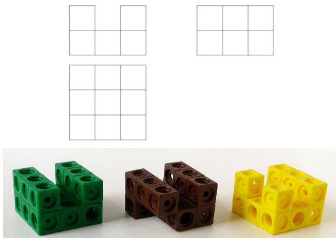


Imagen 4.2.7.5 Ejercicio de representación de figuras según sus proyecciones ortogonales.

En matemáticas tienen aplicaciones en los campos de la estadística, pueden representarse gráficos mediante ellos y en probabilidad, pues pueden plantearse numerosas actividades de permutaciones, combinaciones y variaciones utilizando estos cubos.

En geometría podemos plantear las siguientes actividades relacionadas con las propiedades de los cubos.

- Calcula en el volumen y el área de la siguiente figura geométrica formada por cubos multilink de 1cm de lado.

Imagen 4.2.7.6 Figura con cubos multilink para realizar la actividad.

- Mide la diagonal de las caras de un cubo multilink. Posteriormente, calcula la diagonal principal del cubo, ¿qué relación guarda con la diagonal de la cara?

- ¿Cuál es el área de un policubo formado por dos cubos multilink? Y si formamos un nuevo ortoedro con un tercer cubo, ¿cuál será el área? ¿Puedes hallar la fórmula que relacione el área del ortoedro con el número de cubos que los forman?

La tabla con el resumen de las características de este material aparece en el Anexo 5.

4.2.8 REGLETAS DE CUISENAIRE

.Las regletas de Cuisenaire son piezas ortoédricas de igual base, pero con altura de uno a diez centímetros que sirven para representar cantidades según a longitud de dicha altura.

Su nombre se debe a su creador, Georges Cuisenaire (1891-1975), un maestro belga de Educación Primaria quien, en 1945, elaboró una serie de tiras de cartón de colores de diferentes tamaños, para que sus alumnos realizaran operaciones aritméticas.

Esa nueva forma de representar las cantidades revolucionó la didáctica de las operaciones aritméticas fundamentales. Son utilizadas por la mayoría de métodos didácticos innovadores ya que su uso fue promocionado por educadores como María Montessori o Friedrich Froebel e, incluso, la UNESCO, organismo que premió a Cuisenaire con la insignia de Oficial de la Orden de Leopoldo en 1968, recomienda su aplicación para enseñar cálculo.

El juego está compuesto por diez regletas diferentes de una longitud de 1, 2, 3…hasta diez centímetros. La regleta de longitud 1 representa el número 1, la de longitud 2 representa el número 2 y así sucesivamente. Los números mayores que diez se representa mediante combinaciones de regletas diferentes. Por ejemplo, el número 25 será la combinación de dos regletas de longitud 10 y una de longitud 5. Esta sencilla lógica permite representar operaciones como sumas y restas, multiplicaciones y divisiones (mediante la división Euclídea), fracciones potencias, etc. Para facilitar el reconocimiento de las piezas, cada longitud está asociada a un color de la siguiente manera

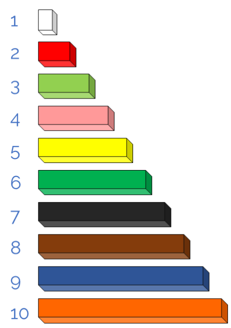


Imagen 4.2.8.1 Código de colores de las Regletas de Cuisenaire.

La utilidad principal de las regletas en Educación Secundaria es en el algebra, pues se pueden de mostrar las soluciones a ecuaciones bicuadradas, de primer y segundo grado, etc.

Para el bloque de geometría pueden representar, figuras geométricas. Por ejemplo, un cuadrado de lado cuatro se representa por cuatro regletas de cuatro unidades (rosas), un triángulo de base 4 y altura 4 se representará por una sucesión escalonada de regletas: rosa (4), verde (3), roja (2) y blanca (1) o bien, tomando las regletas como lados del triángulo, es decir, un triángulo de lados 5, 4 y 3 se representará con la regletas amarilla (5), rosa (4) y verde (3) formando los lados.

De esta, forma pueden realizarse demostraciones como el teorema de Pitágoras mediante los siguientes pasos:

- Se toman esas mismas regletas (de 5, 4 y 3) para componer el triángulo, solo existe un único triángulo posible, que será un triángulo rectángulo porque estos números corresponden a una terna pitagórica.

Imagen 4.2.8.2 Triángulos de lados 5,4 y 3 con regletas de Cuisenaire.

- Se forman los cuadrados con las regletas, formando el cuadrado completo, no solo los lados.
- Posteriormente se comparan los tres cuadrados: con las regletas que forman los cuadrados rosa y verde (los catetos al cuadrado), se puede formar un cuadrado igual al cuadrado amarillo (cuadrado de la hipotenusa).

Imagen 4.2.8.3 Los cuadrados de los catetos y la hipotenusa

También son útiles para el manejo de áreas y volúmenes básicos pues, son magnitudes muy fáciles de medir con las regletas según la suma de la medida del conjunto de piezas que formen la figura o cuerpo geométrico a estudiar. En la imagen se puede ver la demostración de la fórmula del área del triángulo como la mitad del área del rectángulo de igual base y altura. Lo mismo puede hacerse con rombos, trapecios y trapezoides.

Imagen 4.2.8.4 Triángulo como mitad de un rectángulo de igual base y altura

Además, se pueden trabajar contenidos de la unidad didáctica que se expone en este trabajo como los criterios de semejanza de triángulos. Por ejemplo:

- *¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar con tres regletas dadas?*
- *¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar con dos regletas dadas dispuestas formando un ángulo recto?*

En el Anexo 7 se resumen las características de las regletas de Cuisenaire.

4.2.9 PAPIROFLEXIA.

La papiroflexia (del latín papyrus: papel y flexus: doblar) es el arte que se basa en el doblado de papel, sin utilizar tijeras ni pegamento, para obtener formas diversas. Las palabras papiroflexia y origami (del japones; 折り紙) se utilizan indistintamente, aunque existen diferencias pues, se parte siempre desde unas bases determinadas y no se permite corte alguno en el papel. No deja de ser, por tanto, una vertiente de la papiroflexia.

Ésta ha existido desde la invención del papel en China en el siglo I o II d.C. y, aunque siempre ha primado la motivación artística, siempre ha llevado consigo la componente geométrica pues cada doblez realizada al papel no es sino una simetría. Si bien esta vertiente no apareció de manera explícita hasta mediados de siglo XX cuando se empezó a utilizar para realizar demostraciones matemáticas, no solo en geometría, pues se ha llegado a resolver ecuaciones hasta de cuarto grado a través de esta técnica. Algunos ejemplos de demostraciones geométricas con papel son los siguientes:

Trisección de un ángulo

La trisección de un ángulo es un problema planteado en a Grecia clásica que no logro resolverse. Pese a su enunciado tan sencillo, consiste en, simplemente en dividir tres ángulos iguales, los griegos no consiguieron resolverlo mediante su método de regla y compás. Sin embargo, el papel resulta más efectivo en este caso:

1- *Se delimita el ángulo a dividir mediante un doblez por una de las esquinas del papel.*
2- *Se realiza un pliegue paralelo al borde inferior del papel y límite del ángulo.*
3- *Se dobla ahora el borde inferior haciendo coincidir e borde con el pliegue anterior.*
4- *Se vuelve a plegar la hoja llevando el borde del pliegue superior hasta la línea límite del ángulo y desplazando también la esquina inferior del papel hasta el pliegue horizontal inferior.*
5- *Se dibuja la prolongación del borde inferior, ahora inclinado, sobre la base de papel sin doblar.*
6- *Se vuelve a doblar el papel por esa misma línea que se ha dibujado.*
7- *Se abre el papel de nuevo para dibujar la línea por completo utilizando el papel como regla*
8- *El último doblez define el otro de los tercios del ángulo así que marcará para completar la solución*

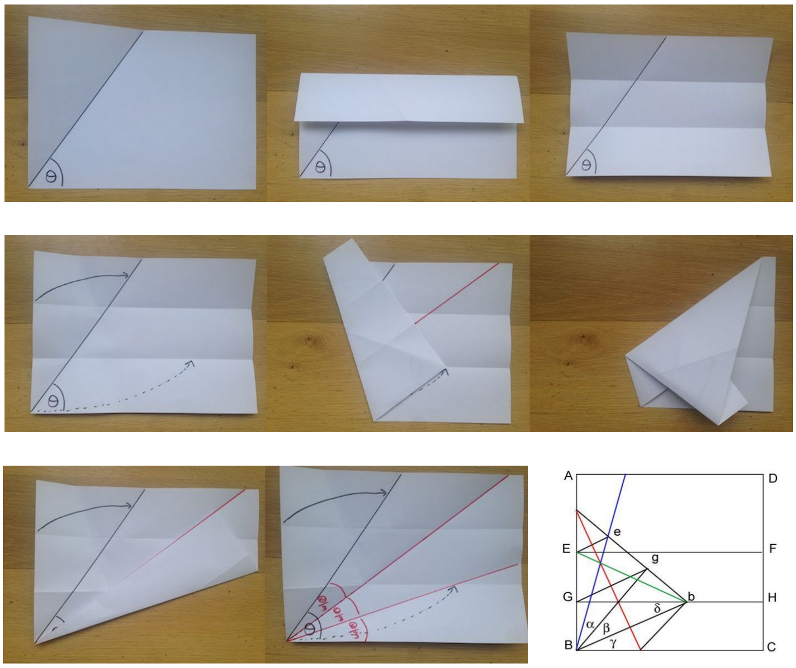


Imagen 4.2.9.1 Pasos del 1 al 8 y demostración de proceso.

<u>Duplicación del cubo</u>

El cálculo del doble del cubo valiéndose de regla y compás también fue otro problema clásico que los griegos no pudieron resolver. Algebraicamente es muy sencillo, basta solo con resolver la ecuación $x^3 = 2a^3$ pero a través de estos instrumentos resulta imposible, tal y como demostró Pierre Wantzel en 1837, quien hizo lo propio con la trisección del ángulo. En este caso, la construcción utilizando papiroflexia es incluso más sencilla:

1- Se hace una marca en la mitad de uno de los bordes de la hoja (E).
2- Se doblan los bordes de una diagonal (A) y (B). uno sobre otro, y el otro borde de diagonal con el punto medio antes señalado (E).
3- Se realizan dos pliegues horizontales de los bordes superior e inferior hasta tocar la intersección de los dos pliegues anteriores (FG) y (HI)
4- Se dobla llevando el vértice inferior (C) hasta el borde opuesto, la intersección del pliegue inferior con el borde de la hoja (I) a la intersección del pliegue superior con el lado de la hoja opuesto (F).
5- La razón AB/CB es la raíz cúbica de 2, por lo que, la medida del cubo original por esta proporción será la medida del cubo cuyo volumen es el doble.

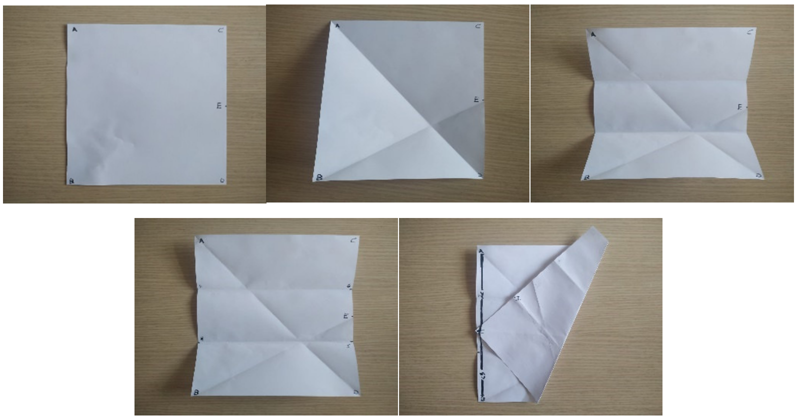


Imagen 4.2.9.2 Pasos a seguir del 1 al 4 para encontrar la duplicación del cubo.

Ya sea papiroflexia o el simple uso del papel (admitiendo recortes, varios papeles o pegamento), lo cierto es que se puede abarcar gran parte de la geometría de secundaria pues, cualquier figura o cuerpo geométrico puede recrearse con mayor o menor exactitud mediante papel.
Las propiedades de los triángulos se pueden ver fácilmente en papel: medianas, bisectrices, mediatrices, alturas y, por lo tanto, el baricentro, el ortocentro, el circuncentro y el incentro.

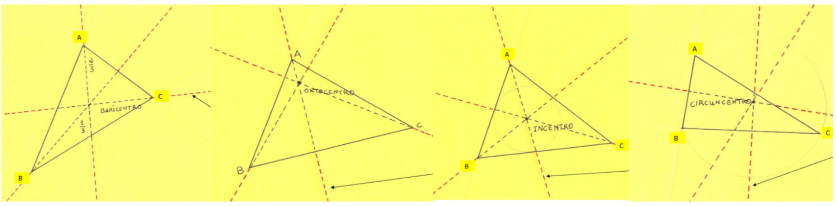


Imagen 4.2.8.3 Medianas, alturas, bisectrices y mediatrices de un triángulo mediante pliegues.

También puede demostrarse, de manera sencilla, la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono, siguiendo con el ejemplo del triángulo, tras cortar los ángulos y juntarles, se observa que suponen el cubre los 180º de una recta.

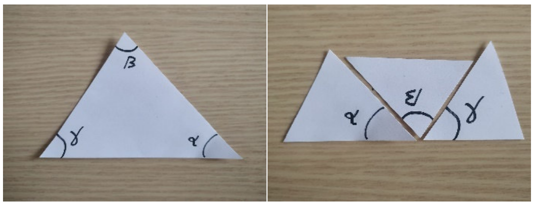


Imagen 4.2.9.4 Suma de los ángulos de un triángulo.

También se puede demostrar la fórmula del triángulo mediante pliegues que formen un rectángulo de base igual a la mitad de la base del triángulo y de altura igual a la mitad de la altura del triángulo. Al replegarse los vértices de los lados sobre el rectángulo, queda demostrado que el área del triángulo es el doble que la del triángulo, es decir: $A_t = \frac{b \cdot h}{2}$.

$$Area\ Rectángulo = a_r \cdot b_r = \frac{a_t}{2} \cdot \frac{b_r}{2} = \frac{a_r \cdot b_r}{4} \rightarrow A_t = 2A_r$$

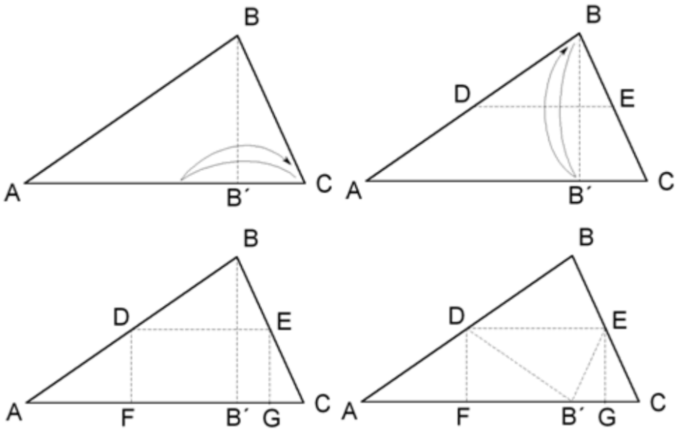


Imagen 4.2.9.5 Proceso para la demostración del área del triángulo con papiroflexia.

De la misma manera pueden realizarse infinidad de demostraciones con papel con otros polígonos que serían imposibles de recoger en este trabajo debido a su extensión y, que convierten al papel en un material didáctico tremendamente versátil y que no necesita de una construcción previa ni de gasto económico considerable. Sus características se resumen la tabla A.5.9.

4.2.10 OTROS.

En este capítulo se tratarán de aquellos materiales útiles a la hora de enseñar contenidos de geometría, pero, poco versátiles, y que quizás solo traten un concepto determinado. Su funcionalidad dependerá por tanto de la facilidad con la que se puedan obtener o de otros factores que puedan enriquecer al alumno más allá de su adaptación a los contenidos académicos.

<u>Cono de Apolonio</u>

Apolonio de Perga nació en Panfilia (actualmente Anatolia en Turquía) en el año 262 A.C. Fue uno de los más importantes discípulos de Euclides. Se le atribuye a él, el primer estudio de las cónicas (descubiertas por Menecmo), estudio que las clasificaba en tres tipos según los planos de corte con el cono de la siguiente manera (considerando (α) el ángulo de conicidad y (β) la inclinación del plano respecto al eje del cono.

- Hipérbola (naranja): $\beta < \alpha$
- Parábola (azul): $\beta = \alpha$
- Elipse (verde): $\beta > \alpha$
- Circunferencia (rojo): $\beta = 90°$

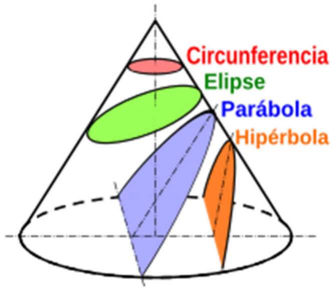


Imagen 4.2.10.1 Generación de cónicas mediante planos de corte con el cono.

El material manipulativo que muestra esta teoría explícitamente es una representación en madera del cono de Apolonio con piezas desmontables que muestran esos cuatro planos de corte distintos.

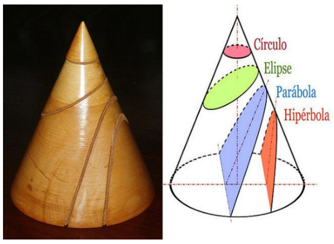


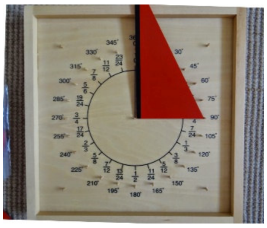
Imagen 4.2.10.2 Cono de Apolonio de madera desmontable.

El principal problema del material es que, al ser madera tallada, es demasiado caro, para solo abarcar el tema de cónicas. Por ello, parece recomendable proponer construcción del cono y de los planos de corte, siendo los materiales más sencillos, la arcilla o la plastilina.

Imagen 4.2.10.3 Cortes con conos realizados con plastilina.

Circunferencia goniométrica

Con esta sencilla circunferencia goniométrica, una ruleta realizada con dos círculos recortados de cartulina y un encuadernador que les permite girar sobre su centro, los alumnos podrán entender qué significa la medida de ángulos en grados, su equivalencia en radianes y las razones trigonométricas de cada ángulo. Podrán observar el significado geométrico del seno y del coseno su variación a lo largo de los 360º.



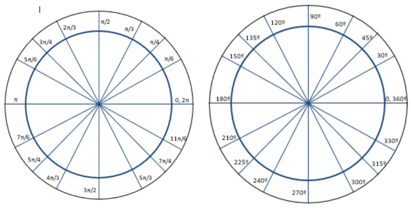


Imagen 4.2.9.4 Circunferencia goniométrica en madera. Imagen 4.2.9.5 Planos para la realización de la circunferencia con dos cartulinas

Objetos cotidianos

La principal ventaja del uso de objetos cotidiano es que no requieren un esfuerzo ni económico, ni de construcción pues, habitualmente se acepta el objeto tal y como es.

En cualquier casa podemos encontrar objetos con los que, potencialmente, se puede aprender geometría. Cualquier caja de cartón (preferiblemente pequeña) representa fielmente un ortoedro. Además, al ser un material blando y recortable, es posible seccionarlo y observar distintos planos de corte.

Lo mismo ocurre con el cartón de los rollos de papel higiénico o de cocina. No solo recrean las propiedades de un cilindro, sino que también de curvas generadas por el mismo cilindro como las hélices. Tras seccionarlo, se observa perfectamente el desarrollo, tanto del cilindro como de la hélice dibujada, y la posibilidad de calcular su longitud mediante el Teorema de Pitágoras.

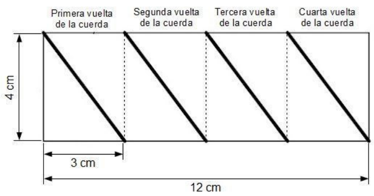


Imagen 4.2.10.6 Problema para estudiar la hélice con un cilindro de cartón.

También puede aprenderse geometría con facilidad a través de un material tan cotidiano como los palillos. Se caracterizan principalmente por su versatilidad pues pueden recrear prácticamente cualquier elemento geométrico en el plano. Si utilizamos un material que permita unir los palillos mediante nudos a los que concurran varios palillos ya que de a esa unión rigidez suficiente, como podría ser la plastilina, se podrá representar no solo figuras planas sino todo tipo de cuerpos geométricos en tres dimensiones.

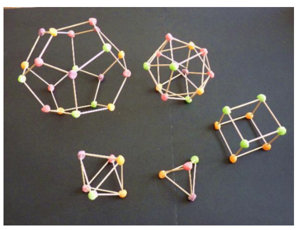


Imagen 4.2.10.7 Poliedros con palillos y plastilina.

5 PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA

5.1 INTRODUCCIÓN CONTEXTUAL

5.1.1 TÍTULO:

Semejanza y teorema de Pitágoras con materiales manipulativos

5.1.2 DESCRIPCIÓN DE LA UNIDAD:

La presente unidad significa el primer acercamiento a la geometría de los alumnos de segundo de la E.S.O., para algunos de ello el primer acercamiento en toda la secundaria, por lo que resulta especialmente atractiva de impartir, debido a su gran importancia para el manejo de la geometría en cursos superiores.

El tema principal de la unidad será el concepto de semejanza y sus aplicaciones, aunque se realizará una introducción a la geometría con la explicación del teorema de Pitágoras, que algunos de los alumnos no vieron en 1º de E.S.O. y que, en todo caso, resulta necesario ser recordado por su uso continuado a lo largo de secundaria.

C tratado desde el punto de vista de la enseñanza con materiales manipulativos.

5.1.3 CONOCIMIENTOS MÍNIMOS:

- Identificación de las figuras planas y de sus propiedades.
- Propiedades de los ángulos en los polígonos.
- Clasificación de triángulos y de cuadriláteros.
- Concepto de lugares geométricos como bisectriz, mediatriz y circunferencia.
- Relaciones angulares en polígonos.
- Dominio de la aplicación de fórmulas para el cálculo del área.

5.1.4 COMPLEMENTOS IMPORTANTES.:

Ayudará, además, aunque se repasará, el concepto de teorema de Pitágoras además de haber trabajado previamente la visión espacial en geometría o la parte de dibujo técnico en plástica.

5.1.5 TEMPORALIZACIÓN:.

La unidad didáctica será el inicio del bloque de geometría que precede al de contenidos comunes y, al inmediatamente anterior de números y álgebra. Debido a la amplitud de contenidos en este curso según lo marcado por el BOCyL (ORDEN EDU/362/2015 del 4 de mayo de 2015), se opta por agrupar en una unidad didáctica el teorema de Pitágoras y el concepto de Semejanza.

La organización general del curso será la siguiente con sus 35 semanas aproximadas divididas de la siguiente manera:

- Bloque de contenidos comunes. (6 semanas)
- Bloque de números y álgebra (7 semanas)

- Bloque de funciones (7 semanas)
- Bloque de geometría (7 semanas)
- Bloque de estadística y probabilidad (5 1/2 semanas)

Al finalizar los contenidos de cada una de las tres evaluaciones de las que consta el curso académico se contemplarán días lectivo que servirán como compensación de posibles desfases respecto a la temporalización prevista, como repaso previo a la prueba global de la evaluación y también para la realización de dicha prueba.

Junta de Castilla y León
Consejería de Educación

CALENDARIO ESCOLAR 2019/2020

SEPTIEMBRE

	L	M	X	J	V	S	D
							1
	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
1º	16	17	18	19	20	21	22
2º	23	24	25	26	27	28	29
3º	30						

OCTUBRE

	L	M	X	J	V	S	D
		1	2	3	4	5	6
4º	7	8	9	10	11	12	13
5º	14	15	16	17	18	19	20
6º	21	22	23	24	25	26	27
7º	28	29	30	31			

NOVIEMBRE

	L	M	X	J	V	S	D
					1	2	3
8º	4	5	6	7	8	9	10
9º	11	12	13	14	15	16	17
10º	18	19	20	21	22	23	24
11º	25	26	27	28	29	30	

DICIEMBRE

	L	M	X	J	V	S	D
							1
12º	2	3	4	5	6	7	8
13º	9	10	11	12	13	14	15
14º	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
	30	31					

ENERO

	L	M	X	J	V	S	D
			1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
15º	13	14	15	16	17	18	19
16º	20	21	22	23	24	25	26
17º	27	28	29	30	31		

FEBRERO

	L	M	X	J	V	S	D
						1	2
18º	3	4	5	6	7	8	9
19º	10	11	12	13	14	15	16
20º	17	18	19	20	21	22	23
21º	24	25	26	27	28	29	

MARZO

	L	M	X	J	V	S	D
							1
22º	2	3	4	5	6	7	8
23º	9	10	11	12	13	14	15
24º	16	17	18	19	20	21	22
25º	23	24	25	26	27	28	29
26º	30	31					

ABRIL

	L	M	X	J	V	S	D
			1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
27º	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26
28º	27	28	29	30			

MAYO

	L	M	X	J	V	S	D
					1	2	3
29º	4	5	6	7	8	9	10
30º	11	12	13	14	15	16	17
31º	18	19	20	21	22	23	24
32º	25	26	27	28	29	30	31

JUNIO

	L	M	X	J	V	S	D
33º	1	2	3	4	5	6	7
34º	8	9	10	11	12	13	14
35º	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
	29	30					

Leyenda:

Inicio de curso (1)
Inicio de curso (2)
Inicio de curso (3)
Inicio de curso (4)
Vacaciones escolares
Fiestas laborales
Días no lectivos
Fin de curso (1)
Fin de curso (2)

Bloque de contenidos comunes
Bloque de números y álgebra
Bloque de funciones
Bloque de geometría
Bloque de estadística y probabilidad
Ajuste repaso y evaluación

(2): - Educación secundaria obligatoria, excepto el alumnado que se encuentra escolarizado en centros de educación primaria.
- Bachillerato en régimen ordinario y nocturno.
-Segundo curso de los ciclos formativos de grado de medio y de grado superior de las enseñanzas profesionales de artes plásticas y diseño

Imagen 5.1.5 Calendario escolar de la Junta de Castilla y León para el curso 2019-2020.

Para el curso de 2º de E.S.O D. las semanas lectivas cuentan con 4 sesiones de matemáticas de 50 minutos cada una de ellas separadas de la siguiente asignatura por un descanso de 5 minutos. Éstas están repartidas según la siguiente tabla:

Tabla 5.1.5.1 Horario de las sesiones de la asignatura en 2ª de E.S.O. D

PERIODOS	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
08:15-09:05					
09:10-10:00					
10:05-10:55					
11:25-12:15					
12:20-13:10					
13:15-14:05					

La unidad didáctica en cuestión tendrá lugar inmediatamente después del examen global de la segunda evaluación y se llevará a cabo durante los siguientes días con una duración de 8 sesiones.

Tabla 5.1.5.2 Calendario de las sesiones de la unidad didáctica.

Marzo 2020				
Lu.	**Ma.**	**Mi.**	**Ju.**	**Vi.**
2	**3**	**4**	**5**	**6**
9	**10**	**11**	**12**	**13**
16	**17**	**18** Sesión 1 12:20-13:10	**19** Sesión 2 10:05-10:55	**20** Sesión 3 08:15-09:05
23 Sesión 4 12:20-13:10	**24**	**25** Sesión 5 12:20-13:10	**26** Sesión 6 10:05-10:55	**27** Sesión 7 08:15-09:05
30 Sesión 8 12:20-13:10	**31**			

5.1.6 DESCRIPCIÓN DEL INSTITUTO Y DEL GRUPO.:

La unidad didáctica de la que trata el presente texto está pensada para impartirse en el curso de 2ºE.S.O. D del Instituto Zorrilla de Valladolid, en el cual el autor realizó el periodo del prácticum del Máster de educación secundaria obligatoria y bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas.

El instituto Zorrilla es uno de los centros de enseñanza más antiguos e importantes de Valladolid. Imparte enseñanzas de secundaria, Bachillerato diurno y nocturno y, ciclos de formación profesional presenciales de Comercio y Marketing y un ciclo formativo a distancia correspondiente al grado superior en Transporte y Logística.

La clase de 2º E.S.O. D es un grupo bastante inquieto en las clases, por aquello de la edad, aunque depende mucho del horario en que se imparte la asignatura. Cuenta con un total de 20 alumnos, numero perfectamente asumible para impartir clases. Además, es un grupo bastante diverso pues posee varios alumnos extranjeros de diferentes nacionalidades, alumnos con trastorno de la atención, y también con diversidad funcional. Sin embargo, eso no afecta a la buena convivencia en el aula, pues parecen estar muy integrados en el grupo y, en algunos casos, tampoco al aprendizaje pues alguno de estos alumnos destaca por encima de sus compañeros a nivel académico. Destaca la existencia de profesor de apoyo para alguno alumno, dentro del aula o fuera de ella, según ocasiones

5.2 CONTRIBUCIÓN A LAS COMPETENCIAS CLAVE

Según el BOCyL (Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. BOCyL, 8 de mayo de 2015, pp 10879-10880) son siete las competencias clave, es decir, aquellas habilidades que son consideradas indispensables para que los alumnos logren el pleno desarrollo personal, social y profesional mediante los conocimientos aprendidos y, que, por lo tanto, deben pretenderse que estén presentes dentro de cada acción docente. Son las siguientes:

- Competencia Matemática y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología: la unidad desarrolla temas propios de la competencia por lo que es la que más estará presente en el desarrollo de la misma.

- Comunicación lingüística: la comunicación oral y escrita cobra especial importancia en la unidad, pues tanto comprender los enunciados, como lo que el profesor enuncia en clase son fundamentales para el aprendizaje del alumno. Además, la utilización correcta del lenguaje matemático se vuelve necesaria para el correcto desarrollo de los ejercicios. Cabe destacar que, en matemáticas, se deberá insistir al alumno en la obligación de enunciar los procedimientos utilizados en todo momento.

- Competencia digital: estará presente principalmente en otros bloques del curso como funciones o, en cursos superiores, en geometría analítica con el uso del programa GeoGebra.

- Competencia de aprender a aprender: En esta unidad en especial, aparece más claramente la transversalidad de contenidos. Pues prácticamente en todos los ejercicios de geometría, acaban desembocando en desarrollos algebraicos y aritméticos. Además, se relacionarán los contenidos con otras asignaturas como plástica o historia.

- Competencias sociales y cívicas: uno de los principales focos de la unidad es la presencia del trabajo en grupo, las técnicas de aprendizaje cooperativo y, los juegos será la forma de desarrollar esta competencia.

- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor: La dificultad de los ejercicios será progresiva, desde la memorización y la mera aplicación del método, hasta el nivel más complejo en el cual, el alumno se encontrará solo, ante las distintas opciones de atajar un problema sin ser evidente cual es la manera correcta. Esto ayudará al alumno a desarrollar el racionamiento y a perder el miedo a afrontar los problemas.

- Conciencia y expresiones culturales: la geometría es el área de las matemáticas más cercano a la realidad visual y cotidiana. Pues resulta fácil ligar los contenidos de la unidad con objetos cotidianos, arte o referencias de la historia y la arquitectura.

5.3 OBJETIVOS.

5.3.1 OBJETIVOS GENERALES DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA.

Los objetivos generales de esta etapa aparecen establecidos en el (*Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Boletín oficial del Estado 3, de 3 de enero de 2015, pp 146-169.)

a) Conocer y asumir los deberes, poner en práctica sus derechos para respetar a los demás, ejerciendo con tolerancia, de manera cooperativa y con solidaridad entre personas y grupos, utilizando el diálogo para afianzar derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre los dos sexos, como valores en común dentro de una sociedad plural en donde ejercer el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Estimular los hábitos de disciplina estudio y trabajo tanto individual como en grupo para llevar a cabo una realización eficaz de las tareas de aprendizaje y como herramienta del desarrollo personal.

c) Asumir la diferencia de sexos y la igualdad de derechos, deberes y oportunidades entre ambos. Condenar la discriminación de las personas por dicha razón de sexo o por cualquier otra razón. Rechazar de manera rotunda los estereotipos entre mujeres y hombres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

d) Reforzar las capacidades afectivas en los distintos ámbitos de la personalidad y en las relaciones con los demás, además de rechazar la violencia, los prejuicios cualesquiera que sean y las actitudes sexistas y apostar por la resolución pacífica de los conflictos.

e) Desarrollar la capacidad para adquirir información de fuentes adecuadas para adquirir nuevos conocimientos. Para ello, se buscará obtener una preparación básica en el campo tecnológico, sobre todo en cuanto a información y comunicación.

f) Entender el conocimiento científico como un conjunto de saberes integrado, estructurado en distintas disciplinas y conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diferentes campos del conocimiento y experiencia.

g) Desarrollar el espíritu de emprendimiento y la confianza en la capacidad de uno mismo, fomentar la participación, el sentido crítico de la realidad, la iniciativa personal y las habilidades para aprender a aprender, a planificar para poder tomar decisiones responsables.

h) Tener la habilidad de expresarse correctamente de manera oral y escrita en la lengua castellana y en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma correspondiente si hubiese, mediante textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Saber comprender y expresarse en al menos una lengua extranjera de manera apropiada.

j) Aprender a respetar y valorar la cultura e historia propias del resto y, también el patrimonio artístico y cultural.

k) Tratar de conocer cómo funciona el cuerpo propio y el de otros, para respetar las diferencias, asumir los hábitos de cuidado y salud corporales e asumir los valores de la educación física para estimular la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Además, se deberá conocer y valorar la humanidad intrínseca en la sexualidad en toda su diversidad. También se debería aprender a conocer los hábitos sociales a nivel de salud, consumo y cuidado de los seres vivos y de conservación y mejora del medio ambiente.

l) Valorar la creación artística y entender el lenguaje de las manifestaciones artísticas a través de múltiples medios de expresión y representación.

5.3.2 OBJETIVOS DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS EN 2º E.S.O. BLOQUE DE GEOMETRÍA.

Los objetivos del bloque de geometría de 2º E.S.O según el BOCyL (*Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León*. BOCyL, 8 de mayo de 2015.pp 10871-10872) son dos:

1. *Reconocer y describir las propiedades de los elementos de las figuras geométricas planas, así como los cuerpos geométricos elementales, así como sus configuraciones geométricas.*
2. *Saber utilizar el teorema de tales y las correspondientes fórmulas para tomar medidas indirectas de elementos inaccesibles y, también, para obtener medidas de longitud, área y volumen tanto de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados en la vida real, de*

representaciones artísticas en pintura y arquitectura como de la resolución de problemas de geometría.

5.3.3 OBJETIVOS DIDÁCTICOS.

- Calcular el área de figuras elementales.
- Dominar las relaciones angulares en polígonos y circunferencias.
- Asumir los conceptos básicos de la semejanza para poder aplicarlos en la resolución de problemas.
- Conocimiento y aplicación del teorema de Pitágoras.

5.4 CONTENIIDOS

5.4.1 CONTENIDOS CONCEPTUALES DEL BLOQUE DE GEOMETRÍA DEL CURSO ANTERIOR (1º E.S.O).

Para impartir la unidad didáctica se debe tener en cuenta los contenidos asociados del curso anterior. Aunque, siempre se ha de considerar que, por razones de temporalización, circunstancias especiales del centro o del alumno, no siempre llegan a impartirse dichos contenidos.

- *Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad*
- *Ángulos y sus relaciones.*
- *Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz y sus propiedades.*
- *Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.*
- *Clasificación de triángulos. Rectas y puntos notables del triángulo. Uso de medios informáticos para analizarlos y construirlos.*
- *Clasificación de cuadriláteros, Propiedades y relaciones.*
- *Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.*
- *Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples*
- *Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.*
- *Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.*

5.4.2 CONTENIDOS CONCEPTUALES DEL BLOQUE DE GEOMETRÍA DE 2º E.S.O..

También se debe tener en cuenta que no siempre es factible impartir ni todos los contenidos marcados en secundaria, ni de la misma forma, pues la diversidad de cada grupo de alumnos conduce a ritmos totalmente diferenciados ya sea por capacidades, por contexto, etc. Los contenidos definidos por el BOCyL parar el bloque de geometría de 2º E.S.O. son los siguientes:

- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares: Cálculo de áreas y perímetros.
- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.
- Revisión de los triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.
- Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.
- Poliedros y cuerpos de revolución, elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes, propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes en el mundo físico.

5.4.3 CONTENIDOS ACTITUDINALES DEL BLOQUE DE GEOMETRÍA DE 2º E.S.O..

- Desarrollar la capacidad para percibir el espacio y de resolver problemas en el mismo.
- Precisión en la construcción de figuras geométricas.
- Dominio de las unidades de medida de longitud, área y volumen y, del paso de unas a otras.
- Capacidad para entender los problemas geométricos y, elaborar, si fuese necesario el correspondiente sistema de ecuaciones.
- Capacidad para el razonamiento de los procesos geométricos realizados frente a la utilización de métodos memorizados sin reflexión.

5.4.4 CONTENIDOS UNIDAD DIDÁCTICA.

Teorema de Pitágoras:

- Relación entre áreas de cuadrados y demostración.
- Aplicaciones del teorema de Pitágoras: cálculo de un lado del triángulo conociendo los otros dos; cálculo de un segmento de una figura planas a partir de aquellos que formen un triángulo rectángulo con él; identificación de triángulos rectángulos a partir de sus lados.
- Áreas y perímetros de figuras planas.

Semejanza:

- Figuras semejantes: Razón de semejanza con ampliaciones y reducciones; relación entre las áreas y los volúmenes de dos figuras semejantes; escala en planas y maquetas.

- Semejanza de triángulos: condiciones generales, triángulos en posición de Tales, semejanza entre triángulos.
- Aplicaciones de la semejanza: Cálculo de la altura de un objeto sobre vertical a partir de su sombra, construcción de una figura semejante a otra.

5.5 METODOLOGÍA.

Es en la metodología donde radica lo realmente esencial en la unidad didáctica, pues las explicaciones de los contenidos teóricos se llevarán a cabo con materiales manipulativos para que, el profesor sea un simple guía en el proceso de enseñanza y sea el propio alumno el que aprenda por si mismo.

Dichas demostraciones podrán ser realizadas primeramente por el profesor para después cambiar a los alumnos o ambos simultáneamente o e realizadas por el propio alumno desde el primer momento, bajo la supervisión del docente.

Los alumnos trabajarán en grupo para conseguir la optimización de los materiales didácticos, pero sobre todo para conseguir la interacción de los alumnos y que se nutran unos de las habilidades de otros, fomentando tanto la adquisición de los contenidos académicos como de la convivencia entre los alumnos.

Las clases, de una duración de 50 minutos, serán llevadas de la siguiente manera:

- Resumen y recordatorio de lo impartido el día anterior.
- Realización la exposición o exposiciones de los contenidos llevada a cabo por el profesor y/o por los alumnos con materiales manipulativos.
- Planteamiento de actividades relacionadas a los alumnos divididos en grupos de trabajo, utilizando los materiales didácticos de la exposición.
- Corrección en común de las actividades llevada a cabo por los alumnos.
- Conclusión de los contenidos asimilados.
- Enunciación de tareas para casa con materiales manipulativos, si fuese posible, o por escrito.

5.6 RECURSOS.

- Aula con mesas móviles para poder trabajar en grupo e individualmente según se requiera.
- Libro de Texto.
- Fotocopias con conocimientos previos que necesita tener el alumno.
- Fotocopias con ejercicios a realizar en clase y en casa.
- Fotocopias con ejercicios optativos a realizar en casa para conseguir un punto extra.
- Cuaderno donde los alumnos realizarán los ejercicios (Portfolio)
- Pizarra para exposición de los contenidos para los cuales sea necesaria y, para la corrección de

ejercicios.

- Ordenador con proyector para explicaciones en que sea necesario.
- Regla, compás, transportador de ángulos, escuadra y cartabón.
- Cartulinas recortables para la construcción de poliedros.
- Tangram, regletas, geoplano, mecano o similares.

5.7 DIVISIÓN EN TIEMPO Y EN ESPACIO.

Sesión 1

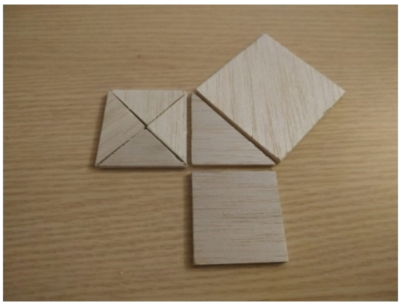
- Repaso de los diferentes tipos de triángulo y del cálculo de su área.
- Introducción con el contexto histórico del teorema.

Se llevará a cabo con la visualización del siguiente vídeo para acercarnos a la figura de Pitágoras.

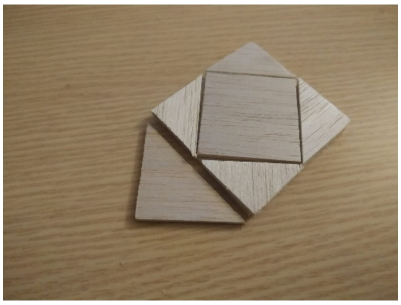
https://www.youtube.com/watch?v=Wx5xmeK1Iso

- Demostración del teorema de Pitágoras con piezas de cartulina adecuadamente recortadas o Tangram.

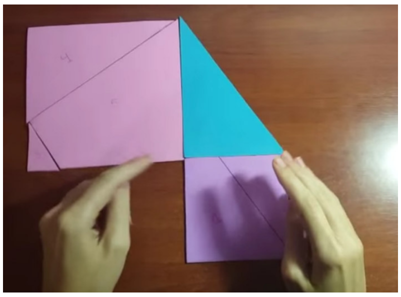
Se realizará una demostración geométrica del teorema mediante piezas de puzle a la manera de Henry Perigal (1801-1898) en que se divide el cuadrado sobre el cateto en cuatro partes según su centro y trazando una a paralela y una línea perpendicular a la hipotenusa del triángulo o; con las siete piezas del Tangram chino en donde el triángulo rectángulo debe ser además isósceles. Con cualquiera de ellos, el objetivo es que superponiendo la división de los cuadrados para comprobar que el área es la misma.



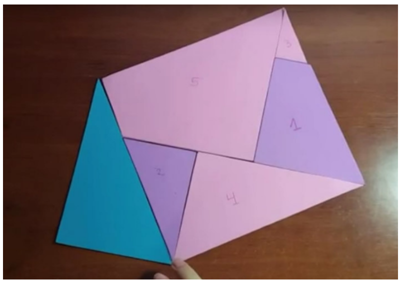
5.7.1 Cuadrados de catetos e hipotenusa en un triángulo rectángulo con el puzle de H. Perigal.



5.7.2 Colocación de las piezas de los cuadrados de los catetos sobre el cuadrado de la hipotenusa.



5.7.3 Cuadrados de los catetos con Tangram chino de cartulina.



5.7.4 Hipotenusa al cuadrado con las piezas de los cuadrados de los catetos.

- Se permitirá a los alumnos a continuación manipular las piezas y comprobar que es la demostración es correcto.
- Se encomendarán actividades relacionadas, la primera realizada por el docente aplicando el teorema de manera algebraica y, el resto, por los propios alumnos, siendo corregida también en la pizarra por ellos mismos.
- Se realizará un breve resumen de lo visto en la clase y se enunciarán las tareas para casa.

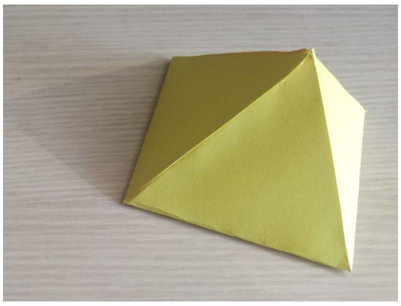
Sesión 2

Esta sesión será la única eminentemente práctica pues es la continuación de la lección anterior.
- Resumen del día anterior con la explicación del teorema de Pitágoras.
- Corrección en la pizarra de las tareas para casa del día anterior.
- Se plantearán actividades utilizando piezas planas de madera recortadas adecuadamente.

Los alumnos se verán así con la dificultad y, a la vez oportunidad de "pensar con las manos" y, enfrentarse a un problema con algo manipulable, real y entendible visualmente, lo que estimulará su visión espacial y, su capacidad de razonamiento.

Uno de los objetos será una pirámide cuadrangular cuya altura deberán averiguar, la misma pirámide que en la sesión 6 resolverán mediante la aplicación del teorema de Tales, facilitando así una visión transversal de los contenidos.

5.7.5 Figura para una de las actividades de cálculo de áreas.



5.7.6 Pirámide cuya altura se deberá calcular.

- Corrección de las actividades por los propios alumnos.

- Se entregará una ficha con ejercicios de la unidad de mayor dificultad que los realizados en clase, de carácter voluntario y que supondrá un punto y medio adicional de la nota de la unidad.

- Enunciado de las tareas para casa

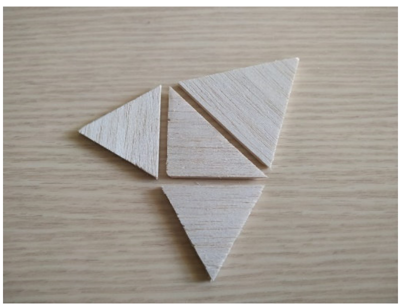
Sesión 3

- Resumen del día anterior con la explicación del teorema de Pitágoras.

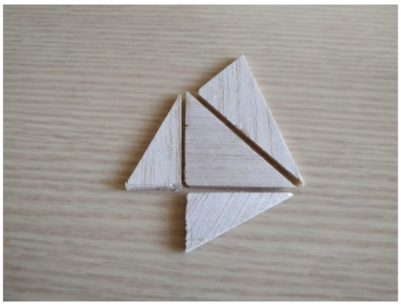
- Corrección en la pizarra de las tareas para casa del día anterior.

- Exposición del concepto de semejanza partiendo de la explicación del teorema de Pitágoras.

Con figuras de madera preparadas con anterioridad y, con la figura de un triángulo rectángulo con cuadrados partiendo de sus lados, como en la demostración del teorema de Pitágoras, sustituimos esos triángulos por figuras como rectángulos, semicírculos o hexágonos regulares. Comprobamos que las áreas de dichos polígonos cumplan el teorema de Pitágoras, pero, que para que eso sea así, necesitan ser semejantes. A continuación, los alumnos decidirán si las figuras que les entrega el profesor son semejantes o no.



5.7.7 La suma del área de los triángulos equiláteros de lados iguales a los catetos es la misma que la del triángulo de la hipotenusa.



5.7.8 La suma de los tríangulos rectángulos con catetos en proporción 2 a 1 es la misma que el mismo triángulo de la hipotenusa.

5.7.9 La suma de las áreas de los pentágonos regulares de lado correspondiente a los catetos es igual a la del pentágono regular de lado igual a la hipotenusa.

5.7.10 La suma de las áreas de los semicírculos de diámetro correspondiente a los catetos es igual al área del semicírculo de diámetro igual a la hipotenusa.

5.7.11 Polígonos cuya semejanza deberán establecer los alumnos.

- Planteamiento de actividades a resolver en clase y corregidas en la pizarra.

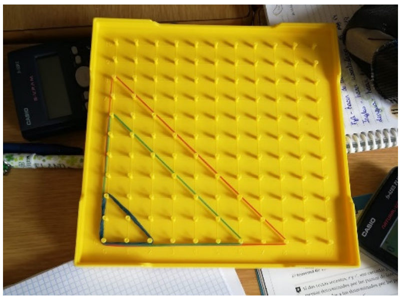
Se entregará a los alumnos planos reales para entender el concepto de razón y escala mediante la realización de actividades relacionadas

- Conclusiones y planteamiento de las tareas para casa.

Sesión 4

- Corrección de las actividades para casa
- Resumen del día anterior con la explicación del teorema.
- Explicación de los criterios de semejanza entre triángulos

Los alumnos comprobarán mediante geoplanos y mecanos por qué los triángulos serán semejantes si tienen dos ángulos iguales, los tres lados proporcionales o, dos lados proporcionales el ángulo que forman igual. Además, gracias al mecano, descubrirán por qué no sucede con otros polígonos.



5.7.12 Uso del geoplano para establecer criterios de semejanza de triángulo.

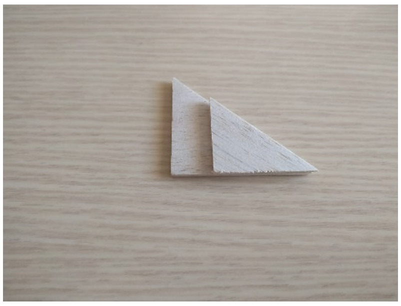
5.7.13 Semejanza de triángulos con mecanos.

- Planteamiento de actividades a resolver en clase y corregidas en la pizarra.
- Conclusiones y planteamiento de las tareas para casa

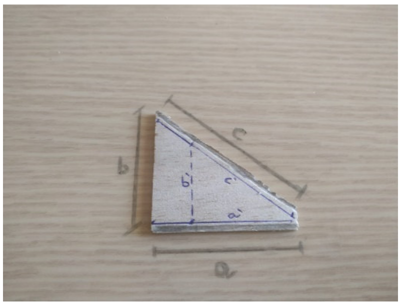
Sesión 5

- Corrección de las actividades para casa
- Resumen del día anterior recordando los criterios de semejanza de triángulos
- Explicación del teorema de Tales.

Partiendo de dos triángulos semejantes en posición de Tales realizados con recortables, se analizan las proporciones entre los lados. Tras recortar el vértice en común, y resaltar los lados con un lápiz, los alumnos comprobarán que el teorema es válido no solo para triángulos *semejantes sino para dos rectas cualesquiera cortadas por rectas paralelas.*



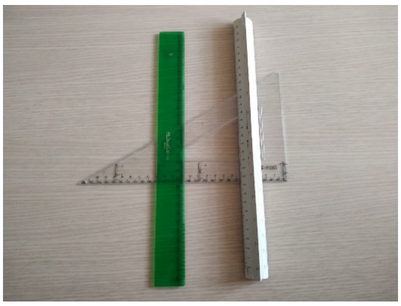
5.7.14 Triángulos en posición de Tales.



5.7.15 Establecimientos de las proporciones sobre el triángulo más grande y demostración de que el teorema es aplicable a rectas cualesquiera.

- Planteamiento de actividades a resolver en clase y corregidas en la pizarra.

La primera de las actividades a plantear será realizada en grupos de cuatro. Con cuatro reglas formarán dos rectas cortadas por otras dos paralelas, de este modo, deberán deducir todos los segmentos proporcionales y comprobar de primera mano la veracidad del teorema.



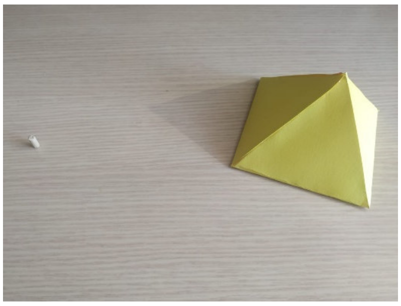
5.7.16 Actividad sobre el teorema de Tales con reglas y cartabón.

- Conclusiones y planteamiento de las tareas para casa

Sesión 6

- Corrección de las actividades para casa
- Resumen del día anterior con la explicación del teorema de Tales.
- Demostración de la aplicación del Teorema de Tales para el cálculo de la altura.

Partiendo de *la leyenda que narra como Thales de Mileto mide la pirámide de Keops, se emulará su razonamiento mediante una pirámide realizada con cartulina y un objeto vertical de menor* *tamaño del que conocemos su medida, aprovechando la sombra natural proyectada sobre la mesa en que se apoyan. Con triángulos semejantes de igual altura, recortados en función de la sombra de ambos objetos y colocados en un plano vertical retrasado, se entenderá claramente su relación con el Teorema de Tales, visto anteriormente.*



5.7.17 Emulación de la medición de la pirámide Keops.

- Planteamiento de actividades a resolver en clase y corregidas en la pizarra.
- Conclusiones y planteamiento de las tareas para casa

Sesión 7

- Corrección de las actividades para casa
- Resumen del día anterior con la explicación del teorema de Tales.
- Resolución de dudas que puedan surgir a los alumnos sobre cualquiera de los contenidos de la unidad.
- Los estudiantes formarán grupos de 5 para responder preguntas relacionadas mediante un Kahoot.

Sesión 8

- Prueba escrita con los contenidos de toda la unidad.

5.8 ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA.

En el anexo se muestra la tabla de los ejercicios en orden cronológico, para entender mejor el desarrollo de la unidad. Estos se llevarán a cabo de manera individual, en clase y en casa y, de manera grupal para favorecer el aprendizaje cooperativo.

En este sentido, se desarrollará especialmente esta práctica en la séptima sesión con la realización de un Kahoot con preguntas de dificultad alta que servirán para el repaso de todos los contenidos. Cabe destacar que no serán actividades en que resolver meras figuras conceptuales, sino que, están diseñadas para mostrar contenidos de otras materias como el arte y la geografía, conocer el entorno cercano de la ciudad y, también de temas que puedan suscitar interés a los jóvenes como el deporte.

Los ejercicios están ordenados para que, con cada contenido, el nivel se vaya acentuando. El grado de dificultad se medirá según los cuatro niveles de la clasificación de Smith y Stein*:

1. Memorización

2. Procedimientos sin conexión.
3. Procedimientos con conexión.
4. Hacer matemáticas.

5.9 PLANES COMPLEMENTARIOS.

Se animará a los alumnos a participar en concursos matemático como las olimpiadas y el canguro matemático. Para ello, se les premiará con hasta un punto y medio en la nota final de la evaluación, en función de su actuación. Además, por la mera participación serán premiados con libros y material escolar.

Se realizarán también actividades en caso de que, por iniciativa de las instituciones públicas: Junta, Diputación o Ayuntamiento de Valladolid, del instituto o de la asociación de padres se propongan salidas escolares que tengan relación con la materia de la unidad.

5.10 EVALUACIÓN.

5.10.1 CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE.

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para esta unidad que tiene lugar en 2º E.S.O. son los que aparecen en esta tabla:

Tabla 5.10.1.1 Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de la UD.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	**ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE EVALUABLES**
1. Conocer y aplicar correctamente el teorema de Pitágoras.	1.1 Reconocer si un triángulo es rectángulo o no, sabiendo las longitudes de los lados
	1.2 Calcular el lado desconocido de un triángulo rectángulo.
	1.3 Relacionar la diagonal con los lados de los distintos tipos de cuadriláteros con sus lados.
	1.4 Aplicar el teorema de Pitágoras para la resolución de problemas geométricos sencillos.
2. Obtener áreas mediante el teorema de Pitágoras sabiendo algún segmento	2.1 Calcular área y perímetro de un triángulo rectángulo sabiendo dos de sus lados.
	2.2 Calcular el área y el perímetro de un rombo sabiendo diagonal y lado.

	2.3 Calcular el área y el perímetro de un triángulo o hexágono regulares sabiendo el lado.
3.Comprender el concepto de semejanza	3.1 Reconocer las figuras que son semejantes y conocer sus propiedades.
4. Aplicar el concepto de semejanza	4.1 Construir figuras semejantes a las dadas.
	4.2 Construir figuras semejantes a las dadas según condiciones establecidas
	4.3 Obtener razón de semejanzas entre varias figuras.
	4.4 Calcular lados y áreas de figuras semejantes.
5. Conocer y aplicar los criterios de semejanza de triángulos.	5.1 Reconocer los triángulos semejantes utilizando criterios de semejanza y el teorema de Tales.
6.Resolver problemas geométricos aplicando el concepto de semejanza	6.1 Calcular la altura de un objeto a partir de su sombra utilizando criterios de semejanza.

5.10.2 PROCEDIMIENTOS DE EVALUACIÓN.

Para realizar la evaluación de los alumnos sobre los contenidos de la unidad didáctica utilizando los criterios de evaluación enunciados en el punto anterior serán los siguientes:

- Prueba escrita al finalizar la unidad didáctica.
- Actitud de los alumnos respecto a la asignatura.
- Actividades realizadas en grupo.
- Actividades realizadas individualmente en el aula.
- Participación para la resolución de ejercicios en la pizarra.

5.10.3 CRITERIOS DE CALIFICACIÓN.

La presente unidad didáctica se encuentra en el marco de la tercera evaluación del curso de 2º E.S.O., siendo la primera en impartirse. La evaluación global se realiza mediante una prueba final que engloba los contenidos de las diferentes unidades didácticas, y que contará un 60% de la nota final, el 40% restante será la media de las notas finales de cada una de las unidades didácticas contenidas en la tercera evaluación.

La nota final de la asignatura será la media aritmética de las tres evaluaciones, siempre y cuando la nota mínima en cualquiera de ellas sea un 3, en tal caso, si la media es superior a 5, la asignatura se considerará aprobada.

En caso contrario, los alumnos con una evaluación suspensa deberán presentarse a una prueba escrita de recuperación de la evaluación en cuestión. Los alumnos con dos o tres evaluaciones suspensas deberán realizar un examen final de recuperación que supondrá el 70% de la nota y que, en caso de aprobarse, se considerará aprobada la asignatura, aunque la media sea menor a 5. Para los alumnos que no superen esa primera prueba final en junio, se les realizará una segunda prueba en septiembre de similares características.

Dentro de esta primera unidad didáctica del bloque de geometría, se definen de los porcentajes de calificación de la siguiente manera:

Tabla 5.10.3.1 Porcentajes de la calificación de la unidad didáctica.

Prueba escrita al finalizar la unidad.	70%
Actitud y participación en clase.	10%
Realización de ejercicios en casa.	15%
Realización de ejercicios suplementario.	15%
TOTAL	110%

Tanto en la prueba escrita como en los ejercicios, se valorará una buena exposición de los argumentos utilizados, su claridad y, una correcta ortografía que, en caso de incorrecciones continuadas, podrá penalizarse con hasta el 10% de la nota.

Además, tal y como aparece en la tabla, los alumnos contarán con la posibilidad de ganar puntos adicionales si realizan una hoja de actividades de nivel superior a las realizadas en clase.

5.10.4 EVALUACIÓN PERSONAL DEL PROFESOR.

Con el objetivo de mejorar la actuación docente de cara a la impartición de la unidad en años posteriores según lo observado en el trabajo de los alumnos y en el suyo propio, se elaborará una tabla con diferentes aspectos a considerar en la evaluación, que sea necesario destacar, que sean susceptibles de ser mejorados y, la manera de hacerlo.

Tabla 5.10.4.1 Evaluación personal del profesor de la unidad didáctica.

ASPECTOS A EVALUAR	A DESTACAR	A MEJORAR	PROPUESTAS DE MEJORA PERSONAL
Temporalización			
Desarrollo de los objetivos			
Dominio de los contenidos			
Adecuación a las competencias			
Realización de las tareas			
Estrategias metodológicas			
Recursos utilizados			
Claridad en la exposición de los criterios de evaluación			
Uso de herramientas para la evaluación			
Adecuación de la atención a la diversidad			
Calificación obtenida de los alumnos			
Satisfacción personal			
Dificultad en la explicación de los conceptos			

Para conocer, la satisfacción de los alumnos con la impartición de la unidad, se necesitará conocer su opinión al respecto. Para ello se entregará a los alumnos, la siguiente tabla de evaluación que rellenarán de manera anónima. Además, se animará a los alumnos a poner en común su experiencia al respecto que consideren destacables. Esta práctica se llevará a cabo, el día de la entrega del examen corregido, que será puesto en común en clase, De esta forma su perspectiva contemplará la adecuación de los conocimientos adquiridos y evaluados por el profesor.

La tabla entregada a los alumnos será la siguiente:

Tabla 5.10.4.2 Evaluación de los alumnos de la unidad didáctica.

ASPECTOS A EVALUAR	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Comprendo los nuevos conocimientos en matemáticas.					
Entiendo al profesor cunado plantea actividades.					
El tema me resulta más difícil de lo que me esperaba.					
Necesitamos más trabajos y actividades entender los contenidos.					
Deberíamos realizar más actividades en grupo.					
Si trabajase más, mejoraría mi nota.					
He obtenido mejor nota de la que me esperaba					
Espero aprobar la asignatura al finalizar el curso					
El trabajo día a día es importante para tener buena nota					
El profesor atiende a las dudas fácilmente					
La exposición del profesor resulta útil					
El tema me ha parecido interesante.					
El tema me ha parecido útil.					
Valoro la clase en general positivamente.					

5.11 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

En esta etapa de secundaria, la atención a la diversidad se vuelve especialmente importante pues, resulta más efectiva a la hora de compensar los posibles desfases entre alumnos, y para captar la atención de los alumnos por la asignatura y por tanto, la motivación.

Para ello, resulta necesaria la labor del departamento de orientación que se encargue de la detección previa y quien, en colaboración se tomen las medidas de adaptación curricular oportunas. Para la detección previa, se deben realizar pruebas a los alumnos a principio de curso, y valorar su rendimiento en comparación con el curso anterior, así como su actitud, y personalidad. Además, se debe realizar un análisis a nivel de grupo para estudiar la situación de cada alumno dentro del mismo.

En este curso, para el que está diseñada la unidad, se tienen varios alumnos con necesidades especiales: con altas capacidades, con evaluación negativa en el curso anterior, un alumno extranjero con dificultades con el idioma, un alumno llegado a con el curso ya transcurrido en gran parte, y alumnos con menor nivel algunos con déficit de atención importante,

Las medidas que se tomen con todos ellos deben ser concretas y personalizadas y siempre evitando la discriminación por parte de sus compañeros, así como que no suponga la falta de atención al resto. Dichas medidas pueden dividirse en estos tipos:

Adaptaciones curriculares significativas: se llevará a cabo la adecuación de las actividades propuestas para clase y para casa. Para esta tarea se deberá contar con un profesor de apoyo que ayude a los alumnos en la realización de estas tareas en clase. En cuento a la impartición de esta unidad, la forma de exponer los contenidos busca llamar la atención de todos los alumnos y facilitar la compresión a todos ellos pues los materiales manipulativos resultan extraordinariamente adecuados para la atención a la diversidad. La modificación de los objetivos de la unidad no tiene por qué llevarse a cabo, por lo tanto.

Adaptaciones curriculares no significativas: Son adaptaciones en las que la dificultad que encuentran los alumnos no estriba en la asimilación de contenidos sino en captar su atención, motivación y participación. La dinámica de la unidad con materiales que ellos mismos pueden manipular, con vídeos relacionados y con problemas del mundo real y que ellos pueden encontrar cercanos, resulta un método apropiado para afrontar el problema. Además, el hecho de que puedan conseguir un punto por la realización de las tareas de casa resulta muy motivante, especialmente para aquellos alumnos que, además, tengan dificultades para superar la asignatura.

Atención de alumnos de altas capacidades: se ofrecerá a los alumnos con altas capacidades la posibilidad de realizar trabajos de investigación sobre temas que les puedan interesar y, además, se les animará a presentarse a competiciones matemáticas como olimpiadas o el canguro matemático. La ficha con ejercicios de mayor dificultad puede resultar motivante para ellos. El departamento de orientación deberá estudiar su caso individualmente para determinar si se deben tomar medidas de mayor importancia.

Atención a alumnos con evaluación negativa en el curso anterior: los alumnos que no superaron en 1º E.S.O. la asignatura de matemáticas, realizarán una serie de actividades que recojan los contenidos de todo el curso y entregadas de manera periódica. El docente deberá realizar el seguimiento de estos alumnos, aconsejarles y resolver las dudas que puedan surgir.

5.12 CONCLUSIONES Y EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

Esta unidad didáctica supone un desafío tremendamente emocionante porque trata de adentrar a alumnos muy jóvenes en transcendentales conceptos de geometría que usarán en toda la educación secundaria, y en enseñanzas posteriores.

La metodología utilizada destaca por, sin dejar de lado la importancia de la correcta asimilación de los contenidos, tratar de estimular la motivación en los alumnos, con juegos y con actividades en las que ellos pasan de ser sujeto pasivo a sujeto activo, convirtiendo el aula en un espacio dinámico, abandonando la antigua disposición de profesor exponiendo los contenidos a un alumnado que pierde la atención con facilidad. Además, el docente realiza un esfuerzo importante por presentar los contenidos de una manera distinta, con herramientas visuales para facilitar el conocimiento, tratando de llegar a los alumnos fomentando la participación y ofreciendo respuestas a problemas planteados en el mundo real.

Las dificultades y, por lo tanto, retos a los que el profesor se encuentra al llevar a cabo la unidad didáctica es, por un lado, conseguir un ambiente proclive en clase para esas exposiciones más cercanas a los alumnos y con interacción entre ellos mismos y con el docente, lo cual lo hace más complicado y, por otro lado, acabar con toda la contaminación previa de conocimientos basados en la memorización sin que supongan la asimilación correcta de los conocimientos.

Por todo ello, llevar a cabo la unidad didáctica correctamente será también trascendental para los alumnos, pues puede adentrarles en el campo de la geometría consolidado las bases con principios adecuados que les permitan adquirir nuevos en posteriores cursos con facilidad.

6 CONCLUSIÓN .DEL TFM

El objetivo de este Trabajo de Fin de Máster es el de dar a conocer un recurso, innovador aparentemente, pero que lleva muchos años presente en la didáctica de las matemáticas, como son los materiales manipulativos, si bien es cierto que es un campo en constante desarrollo y que aumenta cada vez más, lo que provoca que los docentes deban estar pendientes de estas ampliaciones de recursos y de las innovaciones en didáctica que puedan aparecer.

La motivación de este trabajo no se reduce, obviamente, a una labor de exposición o divulgación, sino que el conocimiento adquirido en su realización será utilizado en una futura labor docente.

Las ganas de mejorar la educación pueden degenerar en la introducción de cambios, a veces injustificados o sin una reflexión previa, lo cual puede provocar, precisamente, lo contrario a la mejora deseada.

6.1 ANÁLISIS DE LA UTILIZACIÓN DE MATERIALES MANIPULATIVOS EN GEOMETRÍA.

Para evitarlo, parece claro que es necesaria un conocimiento previo y una profunda reflexión acerca de los elementos introducidos, en este caso, los materiales manipulativos. Si bien es cierto que no basta con eso, si no que la puesta en práctica depende también de la buena actuación docente, lograda principalmente mediante la experiencia que permite manejar todas aquellas variables incontrolables que pueden surgir a lo largo una clase.

Sin embargo, parece claro que los materiales manipulativos ofrecen algo que la educación basada en recursos tradicionales no es capaz de trasmitir. Estos materiales permiten al alumno un conocimiento global de los conceptos geométricos fruto de la experiencia derivada de la interacción con ellos, algo que un libro de texto o una pizarra no es capaz de conseguir.

Esto no significa que se deban rechazar otros recursos, bien porque contienen elementos válidos, bien porque clases desarrolladas únicamente con materiales manipulativos podrían desembocar en sesiones monótonas.

La clave está en alternar recursos que sean válidos y congruentes con los conocimientos impartidos y los materiales manipulativos cumplen con creces estas condiciones.

El docente que utilice estos recursos deberá tener en cuenta también que su utilización en los grupos puede generar un ambiente de trabajo más alborotado debido a la necesidad de interacción entre los alumnos y con el profesor. Por ello, el docente deberá recurrir a herramientas que le permitan dirigir las sesiones de forma satisfactoria.

Como estudiante de este Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, sin experiencia docente, esas herramientas que se deben utilizar para esas situaciones y cualquiera que se genere en el aula, aquellas con las dota la participación en este Máster.

6.2 CONTRIBUCIÓN DE LAS ENSEÑANZAS DEL MÁSTER EN LA ELABORACIÓN DEL PRESENTE TRABAJO.

Este Trabajo de Fin de Máster se muestra como un reflejo de todos los conocimientos adquiridos en el Máster.

La elaboración de la Propuesta didáctica de Semejanza y teorema de Pitágoras en 2º de E.S.O. solo sería posible mediante el paso por las distintas asignaturas del módulo de la especialidad:

- Todos los aspectos relacionados con documentos institucionales (contenidos mínimos, criterios de evaluables, objetivos...) aparecen en a asignatura de **Diseño Curricular en Matemáticas**.
- La asignatura de **Complementos de matemáticas** permite poseer conocimientos matemáticos suficientes para poder impartir cualquier unidad didáctica de E.S.O. y Bachillerato.
- Encontrar las formas más adecuadas para trasmitir los conocimientos, incluso desde múltiples puntos de vista, es posible gracias a asignatura de **Didáctica de la Matemática**.
- **Modelos Matemáticos en Educación Secundaria** permite al futuro docente desarrollar modelos y situaciones en los que el alumno puede basarse para llevar a niveles superiores de razonamiento.
- La asignatura de **Innovación Docente en Matemáticas** permite conocer sobre todos los recursos de los que el profesor dispone, desde informáticos hasta materiales manipulativos, protagonistas de este TFM y de la unidad didáctica planteada.
- El modelo de evaluación establecido en la unidad didáctica se basa en contenido de la asignatura de **Metodología y Evaluación de las Matemáticas**.
- La asignatura de **Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas** proporciona medios de análisis de la didáctica, de instrucción, de análisis de libros, de documentación de investigaciones, etc. necesarios para realizar este trabajo.
- Explicar los conocimientos matemáticos desde una perspectiva histórica, permite enfocar el discurso desde una perspectiva lineal y más motivante para los alumnos al encontrarse de lleno con el origen de las herramientas matemáticas que utilizan y que hacen suya. **La asignatura de Ideas y Conceptos Matemáticos a través de la Historia**.

Es evidente que la formación de un profesor de matemáticas no solo debe consistir en tener una buena formación matemática y en saber trasmitir los conocimientos de los alumnos. Necesita, además, aprender a conocer las características físicas y psicológicas de sus jóvenes alumnos y los tener capacidad para afrontar los conflictos que pueden derivar de ellas(**Aprendizaje y desarrollo de la Personalidad**), tener formación acerca del medio familiar y comunitario que puede influir en los alumnos y repercutir sobre la relación con su profesor y , por supuesto también, conocer el medio en el que se mueve el propio profesor: sistema educativo, legislación relacionada, el instituto, etc. **(Sociedad, Familia y Educación).** Por todo ello, el primer contacto con la docencia en que se convierte el módulo genérico del Máster resulta fundamental.

Como también resulta fundamental ese primer contacto real con la docencia que suponen las **Prácticas Externas** y que permiten ver cómo se ponen en marcha, frente a un grupo de estudiantes reales, todas esas herramientas de las que el Máster trata de dotar a los futuros docentes.

7 BIBLIOGRAFÍA Y WEBGRAFÍA.

Documentos de centro educativo

- I.E.S. Zorrilla Programación didáctica de Matemáticas, curso 2019/2020

- I.E.S. Zorrilla Propuesta curricular I.E.S. Zorrilla, curso 2019/2020

Documentos legislativos

- MEC (2007). *Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales.* BOE nº260, de 30 octubre de 2007.

- MEC (2015*). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. BOE nº3, de 3 enero de 2015.

- Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (2015). *Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León.* BOCyL, 8 de mayo de 2015.

Libros y artículos académicos

- Alsina, A. (2009). *El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado*. Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119-127). Santander: SEIEM

- Alsina, A. y Planas, N. (2008). *Matemática Inclusiva. Propuesta para una educación matemática accesible.* Madrid: Narcea.

- Alsina, A. (2009). *Matemáticas en la educación primaria*. Educación matemática y buenas prácticas: Barcelona.

- Alsina, A. (febrero de 2010) La pirámide de la educación matemática. Aula de Innovación educativa (189), pp. 12-16.

- Alsina, C. (2001). *Geometría y realidad.* Universidad Politécnica de Cataluña. Disponible en: https://jorgefernandezherce.es/charlas/unirioja/varios/geometria_realidad.pdf

- Ashcraft, M. H. (2002). *Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences.* Current Directions in Psychological Science, 11(5), 181-185

- Barrantes, M. y Balletbó, I. (2011). *La enseñanza – aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década*. Gobernación de Misiones - Universidad Nacional de Pilar. Asunción, Paraguay: Litocolor S.R.L.

- Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). *Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria*. Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales, 8, 25-43. Disponible en http://revistacientifica.uaa.edu.

- Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). *Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas*. Campo abierto. Revista de Educación, (27) pp.55-71 Disponible en: https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985/1273

- Bressan, A. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta.* Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.

- Cascallana, M.T., *(1998). Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos.* Madrid: Editorial Santillana.

- Corberán, R., Huerta, P., Jaime, A. Garrigues, M. y Bautista, J. (1991). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. C.I.D.E. Investigación (95). Disponible en: https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/CorOtr94.pdf

- Coriat, M (1997). *Materiales, recursos y actividades: un panorama*. Barcelona: Horsori.

- Furner, M. y Worrel, L.N. (2017). *The Importance of Using Manipulatives in Teaching Math*

Today. Nova South-Eastern University.

- Fernández, I., y Reyes, M.E. (2015). *Periplo por la geometría de Valladolid*. Servicio municipal de educación del ayuntamiento de Valladolid.

- Fernández, R. (2015). *Los juegos: una herramienta para aprender álgebra.* (Trabajo de fin de Máster). Universidad de Cádiz. Disponible en https://rodin.uca.es/xmlui/handle/10498/17536

- *García, A.* (201*4*). *Creación y Usos de puzles matemáticos*. *XV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: el sentido de las matemáticas.* Disponible en: *https://thales.cica.es/xvceam/actas/pdf/ta03.pdf*

- H*offer, A. (2019). La geometría es más que demostración*. The Mathematics Teacher Vol. 74, No. 1, pp. 11-18.

- Pérez-Tyteca, P., Monje, J. y Castro, E. (2013). *Afecto y matemáticas. Diseño de una entrevista para acceder a los sentimientos de alumnos adolescentes.* AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática –2013, N.º 4, pp65-82.

- Vara Orozco, M. (2004). *El geoespacio, un recurso enseñanza de la geometría.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(2*).*

<u>*Webgrafía*</u>

- *https://acertijosyenigmas.wordpress.com/2007/03/15/conectalos-de-nuevo/*

- *https://aprendiendomatematicas.com*

- *http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/2ESO.htm*

- *http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/242.pdf*

- *https://www.clasesdeapoyo.com/f/13*

- *https://culturacientifica.com/2016/05/04/problema-los-tres-caballeros-los-tres-criados/*

- *https://www.epdata.es/datos/espana-pisa-datos-graficos/*

- *https://www.educaciontrespuntocero.com/experiencias/ensenar-geometria-a-traves-del-futbol/97725.html*

- *https://www.educacionyfp.gob.es/inee /timss2015final.pdf*

- *http://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/pisa/pisa-2018/pisa-2018-informes-es.html*

- *https://elpais.com/elpais/2016/12/27/el_aleph/1482869347_077905.html*

- *https://escuelaolimpica.wordpress.com/2019/07/09/sesion-37-regletas-y-teorema-de-pitagoras/*

- *http://www.estalmat.org*

- *https://www.gaussianos.com/cambiando-la-regla-y-el-compas-por-piezas-de-mecano/*

- *http://gpdmatematica.org*

- *http://www.juntadeandalucia.es*

- *https://mascvuex.unex.es/*

- *https://www.matematicaparatodos.com/varios/geoespacio.pdf*

- *http://mateblogaabrz.blogspot.com/2014/06/conicas.html*

- *https://matematicascercanas.com/2014/05/21/el-huerto-heredado-solucion/*

- *http://matesdedavid.blogspot.com/2013/11/el-teorema-de-pick_20.html*

- *http://mateselaios2.blogspot.com*

- *http://mipombo1950.blogspot.com/2009/07/actividades-geometricas-con-mecano.html*

- *https://www.oecd.org/pisa/*

- *http://reseteomatematico.com/policubos-que-son-y-para-que-sirven/*

- *https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/potencias-regletas/.*

- *https://www.superprof.es*

- *http://www.tocamates.com/el-cubo-soma/*

- *https://trazoide.com/diedrico-en-pdf/cilindro-en-diedrico-995.pdf*

- *https://www.ugr*

- *https://es.wikipedia.org*

- *http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/ele.htm*

- *https://zaguan.unizar.es/record/36793/files/TAZ-TFM-2015-917.pdf*

A ANEXOS

A.1 TABLA DE EJERCICIOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

A continuación, se muestra la tabla de los ejercicios en orden cronológico, para entender mejor el desarrollo de la unidad. La columna izquierda mostrará el nivel de dificultad según la clasificación de Smith y Stein.

Tabla A.1.1 Ejercicios de la unidad didáctica ordenados por sesiones y nivel de dificultad.

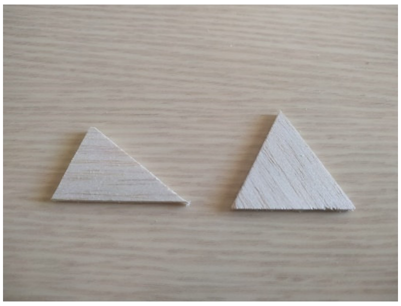
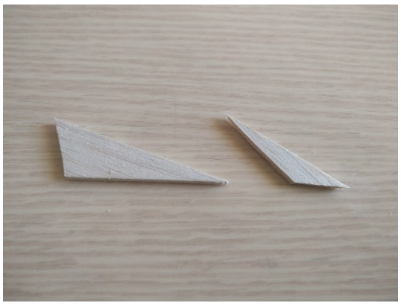
N.º	SESIÓN	ENUNCIADO	DIFICULTAD
1	1	Calcula si se comprueba el teorema de Pitágoras, de Pitágoras con los siguientes triángulos acutángulos. ¿Qué conclusión sacas?  *Imagen A.1 Imagen para la actividad 1.*	1
2	1	Calcula si se comprueba el teorema de Pitágoras, de Pitágoras con los siguientes triángulos obtusángulos. ¿Qué puedes sacar en conclusión?  *Imagen A.2 Imagen para la actividad 2..*	1
3	1	¿Qué distancia recorro al atravesar Campo Grande por el camino rojo el triángulo que aparece en la imagen es rectángulo?	1

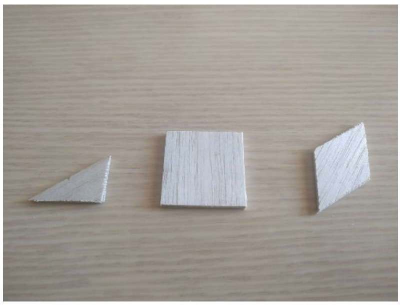
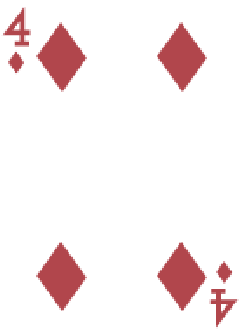
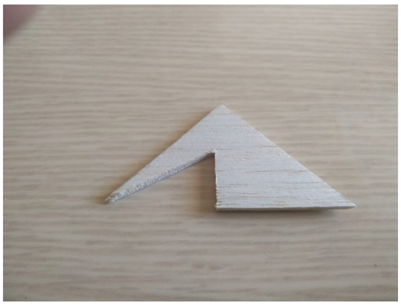
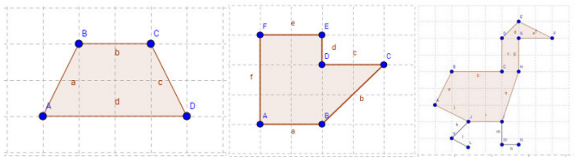
		 *Imagen A.1.3 Imagen para la actividad 3.*	
4	1	Calcula el área de las siguientes figuras recortadas con la ayuda de una regla con el mínimo número de mediciones posibles.  *Imagen A.1.4 Imagen para la actividad 4*	2
5	1	Cuanto mide la diagonal de la clase si cada baldosa mide 0,40 x 0,40	2
6	1	Los lados de un triángulo son 3, 5 y 7 ¿Sabemos si se trata de un triángulo rectángulo?	2
7	2	Calcula el área de un hexágono regular de 7cm de lado. ¿Cuánto mide la apotema?	2
8	2	Una persona pretende bajar de la torre inclinada de Pisa mediante una cuerda. Esta cuerda tiene una longitud de 60metros. Cuando toca el suelo, esta persona se encontraba a 5 metros de la base de la torre. ¿Cuánto mide la pared de la Torre?”.	2

		 *Imagen A.1.5 Imagen para la actividad 8.*	
9	2	La diagonal mayor cada una de las figuras que aparecen en la siguiente carta es 1,5cm. Calcula la superficie de todas las figuras de la carta.  *Imagen A.1.6 Imagen para la actividad 9.*	2
10	2	Dibuja tres triángulos cuya hipotenusa mida √2, √3 y √5. ¿Cuánto miden sus catetos respectivamente?	3
11	2	Calcula el área de la siguiente figura recortada utilizando el teorema de Pitágoras y la regla en solo dos ocasiones.	3

		 *Imagen A.1.7 Imagen para la actividad 11.*	
12	2	Calcula el área de un triángulo equilátero de 7cm.	2
13	2	Calcula el área de las siguientes figuras descomponiéndolas en triángulos rectángulos.  *Imagen A.1.8 Imagen para la actividad 13.*	2
14	2	La pirámide de Keops es una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 230m. La altura de los triángulos que la forman (apotema) es de 186m. ¿Cuál será la altura de la pirámide?  *Imagen A.1.9 Imagen para la actividad 14.*	3
15	2	Se instala una antena parabólica sujeta por dos cables tal y como indica la figura. Indica la medida del poste, la altura del cable que falta y la distancia del poste a la que hay que atar al cable con el suelo.	3

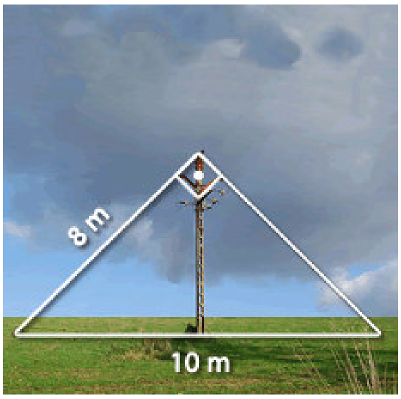
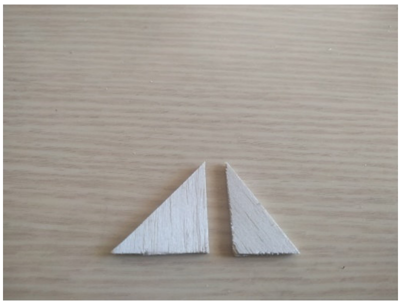
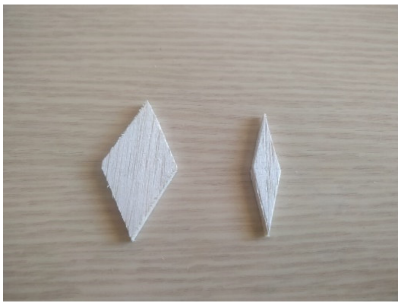
		 *Imagen A.1.10 Imagen para la actividad 15.*	
16	3	Toma una hoja tamaño DIN A 4, mide sus lados. A continuación, dóblala por la mitad de manera transversal. Vuelva a medir sus lados, ¿te llama algo la atención?	1
17	3	Di si las siguientes figuras son semejantes sin realizar mediciones.  *Imagen A.1.11 Imagen para la actividad 17(1).*  *Imagen A.1.12 Imagen para la actividad* 17(2).	2

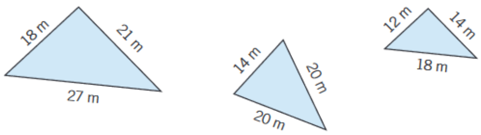
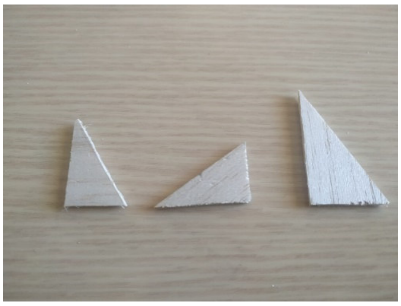
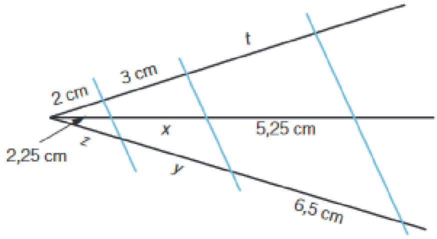
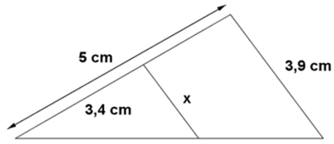
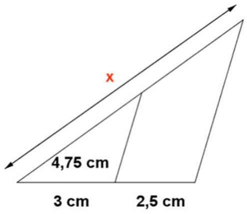
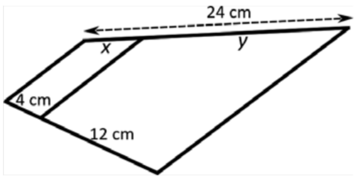
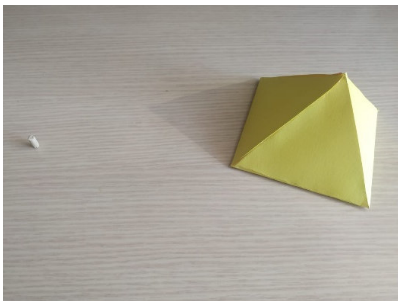
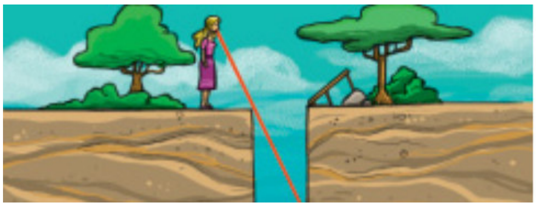
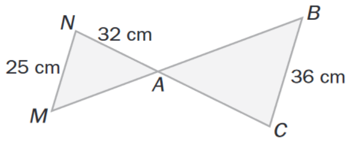
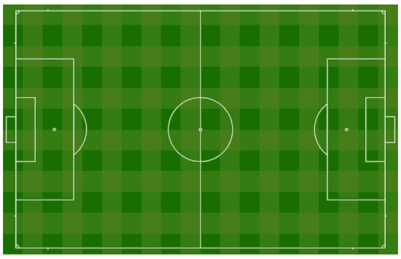
		 *Imagen A.1.13 Imagen para la actividad 17(3).*	
18	3	¿Son semejantes los siguientes triángulos?  *Imagen A.1.14 Imagen para la actividad 18.*	2
19	3	La distancia entre Tarragona y Cáceres es de 664 km. Si desde la ciudad extremeña hasta Bilbao la distancia es de 514km, ¿Cuántos km hay en línea recta entre la ciudad catalana y la capital de Vizcaya?  *Imagen A.1.15 Imagen para la actividad 19.*	2
20	3	La Estatua de la Libertad de Nueva York mide 30,6 m de los pies a la cabeza. Si, con ella, se reprodujo a una persona cuya estatura era de 170 cm, ¿qué escala utilizaron para su construcción?	2

		 *Imagen A.1.16 Imagen para la actividad 20.*	
21	3	¿Son semejantes los triángulos interior y exterior de un cartabón? Calcula su razón.	2
22	3	Un rectángulo de lados 6, y 7cm tiene otro semejante al cuyo perímetro es 60. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo semejante?	3
23	3	El plano de la plaza mayor de Valladolid se encuentra representado con una escala 1:2500. En el plano de la Plaza Mayor de Salamanca, la escala es gráfica. ¿Cuál de las dos plazas es Mayor?  *Imagen A.1.17 Imagen para la actividad 23.*	3

		 *Imagen A.1.18 Imagen para la actividad 24.*	
24	3	El frontispicio es el remate triangular de un vano o de la fachada propio de la arquitectura clásica. Según la proporción de su altura con la base puede ser: A: Griego: $b/7 \le h \le b/6$ B: Romano: $h=b/6$ y $h=b/7$ C: Renacentista: $h=b/5$ ¿A qué tipo de frontispicio pertenecen los frontispicios del Monasterio de San Benito, de la academia de caballería y de Teatro Calderón?  *Imagen A.1.19 Imagen para la actividad 24(1).*  *Imagen A.1.20 Imagen para la actividad 24(2).*  *Imagen A.1.21 Imagen para la actividad 24(3).*	3
25	4	Comprueba con tu geoplano. ¿Cuántos triángulos de lados 4, 3 y 5 puedes construir?	2

26	4	¿Hay más de un triángulo diferente con un ángulo de 45º y los lados que forman dicho ángulo de 3 y 5?	2
27	4	¿Y con un lado de 3 y los ángulos que parten de es lado de 45º?	2
28		Las siguientes piezas son triángulos semejantes ¿Cómo los colocarías para comprobar que lo son?  *Imagen A.1.22 Imagen para la actividad 28.*	
29	4	Un triángulo de lados 6, 7 y 7cm tiene un triángulo semejante a el cuyo perímetro es 60. ¿Cuánto miden los lados a del triángulo semejante?	2
30	4	Calcula el valor desconocido en el siguiente triángulo. a) a=6cm, b=9, c=12, a`=4cm, b´= 6cm c´=? b) A=45º, b=8cm, c=4cm. A´, b´=8cm, a´=?	3
31	5	Calcula las distancias que no conocemos.  *Imagen A.1.23 Imagen para la actividad 31.*	2
32	5	Calcula x según el teorema de Tales.  *Imagen A.1.24 Imagen para la actividad 32.*	2

33	5	Calcula el valor de x.  *Imagen A.1.25 Imagen para la actividad 33.*	2
34	5	Calcula cuánto vale x e y, y halla el área de total.  *Imagen A.1.26 Imagen para la actividad 34.*	3
35	6	Calcula la altura de la maqueta de la pirámide según la proyección de su sombra, y de la de la barra de medida conocida.  *Imagen A.1.27 Imagen para la actividad 35.*	2
36	6	La Giralda de Sevilla proyecta una sombra de 48,75m. En ese instante, un hombre de 1,80m proyecta una sombra de 0,9m.  *Imagen A.1.28 Imagen para la actividad 36.*	2

37	6	Calcula la profundidad de un pozo si su anchura es de 1,2m y al alejarte 0,8m desde una altura de 1,7m, llegas a ver justo hasta la arista de debajo de la pared del pozo.  *Imagen A.1.29 Imagen para la actividad 37.*	2
38	6	María mide 1,65m. En ese momento su sombra mide 80cm y, a su vez la del edificio de al lado mide 7m. ¿Cuál es la altura del edificio?	2
40	6	Calcula el valor del lado AC en la siguiente figura.  *Imagen A.1.30 Imagen para la actividad 38.*	3
41	7	Según el reglamento, un campo de fútbol debe medir entre 90 y 120m mientras que debe tener un ancho de 45 a 90m sin ser la forma resultante cuadrangular. Si la diagonal de medio campo mide 70 y que el largo total es de 110m, ¿es un campo reglamentario?  *Imagen A.1.31 Imagen para la actividad 41.*	3
42	7	Si M y P son los puntos medios de los lados del triángulo, Calcula MP.	3

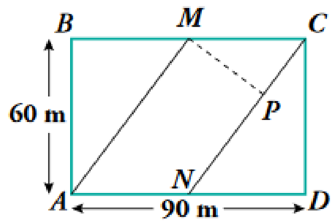
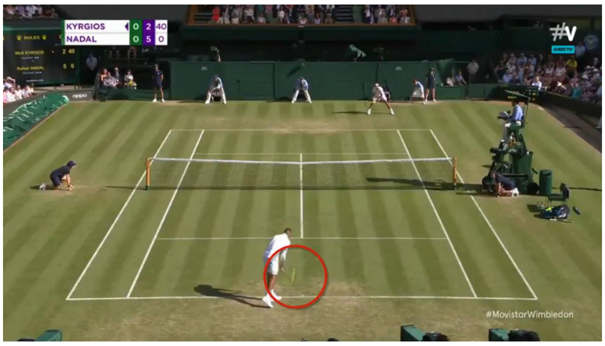
		 *Imagen A.1.32 Imagen para la actividad 42.*	
43	7	Calcula Cuanto mide el área que ocupa la superficie construida de la plaza del Viejo Coso si los lados del Octógono exterior miden 30m y los del interior 20,5m.  *Imagen A.1.33 Imagen para la actividad 43.*	3
44	7	Cuál es el área del pentágono de la pasarela del museo de la ciencia si contiene un triángulo isósceles de lados iguales 4,85 m y de área 6,92 m2.  *Imagen A.1.34 Imagen para la actividad 44.*	3

		 *Imagen A.1.35 Imagen para la actividad 44.*	
45	7	Un tenista saca desde el punto medio de la línea de fondo de una pista de tenis. La bola pasa por la red a 2.7 m. del punto medio de la red y vota en una profundidad similar a la del e lado más lejano del cuadro de saque. Si la pista de tenis mide 24m. y el ancho del cuadro de saque es de 4,10m, ¿el saque es válido?  *Imagen A.1.36 Imagen para la actividad 45.*	4

A.2 FICHA CON EJERCICIOS ADICIONALES

1- Elige tres lados de un triángulo que formen un triángulo rectángulo cualquiera. Multiplica cada uno por 2. ¿Es posible que los lados resultantes sigan siendo de un triángulo rectángulo? ¿Por qué?

2- Calcula el área de las siguientes figuras descomponiéndolas en triángulos rectángulos.

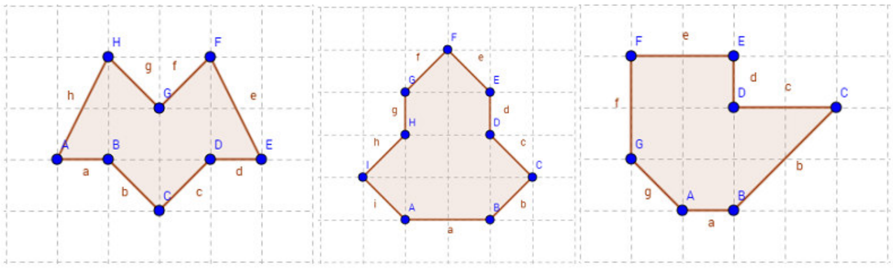


Imagen A.2.1 Imagen para actividad 1.

3- Dos triángulos rectángulos con cuya hipotenusa es la misma, ¿son semejantes? Razona la respuesta.

4- ¿Cuál es el perímetro del triángulo con base que coincide con la base mayor de este trapecio rectángulo y que se obtiene cuando prolongamos los lados no paralelos hasta que se corten?

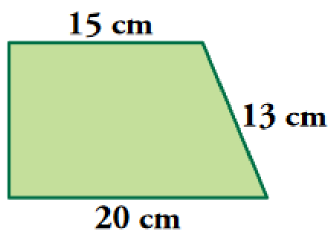


Imagen A.2.2 Imagen para actividad 4.

5- El perímetro de un polígono regular mide 15cm. Si sus lados son números enteros, ¿de qué polígonos se trata y cuánto miden sus lados? ¿Cuáles son los polígonos semejantes a ambos de perímetro de 45cm?

6- Divide el segmento AB en dos partes sabiendo que una es el triple de la otra sin medirlo previamente.

7- Divide la siguiente figura en tres partes iguales.

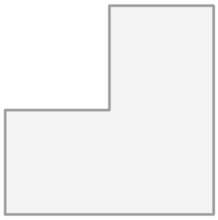


Imagen A.2.3 Imagen para actividad 7

A.3 TABLA DE COMPETENCIAS POR ACTIVIDADES

Tabla A.3.1 Competencias de cada actividad.

Nº ACTIVIDAD	**CMCT**	**CL**	**CD**	**CAA**	**CSC**	**SIE**	**CEC**
1	X	X		X	X	X	
2	X	X		X	X	X	
3	X	X			X		X
4	X	X		X		X	
5	X			X			
6	X	X		X			
7	X	X		X			
8	X	X		X			X
9	X	X					X
10	X	X		X			
11	X	X		X	X	X	
12	X						
13	X	X		X			
14	X	X		X			X
15	X	X		X			
16	X	X					
17	X	X		X	X	X	
18	X	X					
19	X	X		X			X
20	X	X		X			X
21	X	X		X			
22	X	X		X			
23	X	X		X	X	X	X
24	X	X		X		X	X
25	X	X		X			
26	X	X		X			

27	X	X		X			
28	X	X		X	X	X	
29	X	X		X			
30	X	X		X			
31	X						
32	X						
33	X			X			
34	X	X		X			
35	X	X		X	X	X	X
36	X	X		X			X
37	X	X					
38	X	X					
39	X	X					
40	X	X		X			
41	X	X	X	X	X	X	X
42	X	X	X	X	X	X	
43	X	X	X	X	X	X	X
44	X	X	X	X	X	X	X
45	X	X	X	X	X	X	X

CCL: Competencia en comunicación lingüística

CMCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología

CD: Competencia digital

CAA: Competencia de aprender a aprender

CSC: Competencias sociales y cívicas

SIE: Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor

CEC: Conciencia y expresiones culturales

A.4 PLANOS ARA ACTIVIDAD 23

Imagen A.4.1 Plaza Mayor de Salamanca

Imagen A.4.2 Plaza Mayor de Valladolid.

A.5 TABLAS DE RESUMEN DE MATERIALES MANIPULATIVOS

A.5.1 MECANO

Tabla A.5.1 Tabla de las Características del mecano.

Dimensión 0 Resumen del material	*Por objetivos*	Para descubrir conceptos y para demostraciones y comprobaciones.
	Por naturaleza	No estructurado
	Funcionamiento	Materiales constructores
Dimensión 1 Descripción del material	*1.1 Características generales*	Piezas de madera de dos tamaños diferentes y de cinco colores: amarillo, verde, azul, naranja, rosa y blanco, con agujeros y clips para sujetar unas piezas con otras.
	1.2 Variantes/Integrantes	Tanto el material como el número de piezas puede variar. Existen mecanos con piezas de plástico y de diferente número a los 35 originales.
	1.3 Construcción y accesibilidad"	Formado por tiras de madera o plástico y clips tornillos metálicos. Puede adquirirse por unos 15€ y transportarse en cajas de unos 500gr. También puede ser autoconstruido con cartulina y/o madera.
Dimensión 2 Interés didáctico-matemático"	*2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales*	- Semejanza de triángulos. - Movimientos en el plano. - Trigonometría. - Teoría de ángulos. - Polígonos.
	2.2 Habilidades geométricas"	- Habilidades visuales - Habilidades de construcción - Habilidades de lógica y razonamiento
	2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje	- Fase de información. - Fase de orientación dirigida - Fase de orientación libre
Dimensión 3 "Versatilidad del material"	*3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos*	Solo puede tratar contenidos en el plano.
	3.2 Vinculación con otros ejes del área	Vinculación con álgebra, aritmética y dibujo técnico.
	3.3 Uso en otros niveles de escolaridad	Utilizable en educación infantil y primaria.

A.5.2 ROMPECABEZAS

Tabla A.5.2 Resumen de las propiedades de los rompecabezas.

Dimensión 0 **Resumen del material**	*Por objetivos*	Para descubrir conceptos
	Por naturaleza	Estructurado
	Funcionamiento	Materiales constructores
Dimensión 1 Descripción del material	*1.1 Características generales*	Piezas parciales de una representación que se forma al colocarlas adecuadamente y, que pueden admitir o no otras colocaciones.
	1.2 Variantes/Integrantes	Pueden ser presentados de múltiples formas: existen puzles, pentaminós, triminos, u otras…
	1.3 Construcción y accesibilidad"	Son de tamaños y materiales diferentes, aunque sus piezas serán siempre rígidas. Un pentaminó de piezas de madera se puede transportar en una caja de 40x40x4 cm y cuesta aproximadamente 8€
Dimensión 2 **Interés didáctico-matemático"**	*2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales*	- Polígonos. - Teorema de Pitágoras.
	2.2 Habilidades geométricas"	- Habilidades visuales - Habilidades de comunicación.
	2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje	-Fase de información. - Fase de explicitación - Fase de orientación dirigida - Fase de orientación libre
Dimensión 3 **"Versatilidad del material"**	*3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos*	Solo puede tratar contenidos en el plano.
	3.2 Vinculación con otros ejes del área	Vinculación con álgebra (Puzle hexagonal algebraico)
	3.3 Uso en otros niveles de escolaridad	Utilizable en educación infantil y primaria.

A.5.3 TANGRAM

Tabla A.5.3 Resumen de las propiedades del Tangram.

Dimensión 0 Resumen del material	*Por objetivos*	Para descubrir conceptos y para demostraciones.
	Por naturaleza	Estructurado
	Funcionamiento	Materiales constructores
Dimensión 1 Descripción del material	*1.4 Características generales*	Siete piezas con origen en la división de un cuadrado en triángulos y paralelogramos.
	1.5 Variantes/Integrantes	Las variaciones del tangram original difieren en el número y la forma de las piezas, así como en el polígono original, pudiendo ser un paralelogramo.
	1.6 Construcción y accesibilidad"	Son piezas rígidas de madera o plástico, Aunque puede auto construirse fácilmente con recortables o madera blanda. El precio de un Tangram ronda los 5€.
Dimensión 2 Interés didáctico-matemático"	*2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales*	- Polígonos. - Teorema de Pitágoras. - Semejanza.
	2.2 Habilidades geométricas"	- Habilidades visuales - Habilidades lógicas y de razonamiento
	2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje	- Fase de información. - Fase de explicitación - Fase de orientación dirigida - Fase de orientación libre
Dimensión 3 "Versatilidad del material"	*3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos*	Solo puede tratar contenidos en el plano.
	3.2 Vinculación con otros ejes del área	El Tangram se utiliza también en psicología, diseño o filosofía.
	3.3 Uso en otros niveles de escolaridad	Es utilizable y recomendable su uso en educación infantil y primaria.

A.5.4 CUERPOS GEOMÉTRICOS RÍGIDOS

Tabla A.5.4 Resumen de las propiedades de los cuerpos geométricos rígidos.

Dimensión 0 Resumen del material	*Por objetivos*	Para descubrir conceptos.
	Por naturaleza	Estructurado.
	Funcionamiento	Modelos Construidos.
Dimensión 1 Descripción del material	*1.7 Características generales*	Piezas de material rígido que recrean figuras planas y poliedros.
	1.8 Variantes/Integrantes	Son piezas que tratan de reproducir elementos geométricos, varían solo en el material y en la escala.
	1.9 Construcción y accesibilidad"	Pueden construirse en el aula con madera blanda, cartón-pluma o cartulina plastificada. Puede adquirirse en el marcado con una amplia variedad de precios en función de la calidad de material y de las dimensiones.
Dimensión 2 Interés didáctico-matemático"	*2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales*	- Propiedades Polígonos. - Propiedades de la circunferencia.
	2.2 Habilidades geométricas"	- Habilidades visuales. - Habilidades de comunicación. - Habilidades lógicas y de razonamiento. - Habilidades de aplicación y transferencia.
	2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje	- Fase de información. - Fase de explicitación. - Fase de orientación dirigida.
Dimensión 3 "Versatilidad del material"	*3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos*	Trata figuras planas y en tres dimensiones.
	3.2 Vinculación con otros ejes del área	Se utiliza únicamente para geometría.
	3.3 Uso en otros niveles de escolaridad	Es utilizable y recomendable su uso en educación infantil y primaria.

A.5.5 GEOPLANO

Tabla A.5.5 Resumen de las propiedades del geoplano.

Dimensión 0 **Resumen del material**	*Por objetivos*	Para descubrir conceptos, para demostraciones y para resolver problemas.
	Por naturaleza	Estructurado
	Funcionamiento	Materiales constructores
Dimensión 1 Descripción del material	*1.10 Características generales*	Es un tablero de madera o plástico con pivotes que forman una trama regular para, mediante gomas elásticas o cordeles, construir elementos geométricos.
	1.11 Variantes/Integrantes	Las retículas de los planos pueden ser ortogonales, isométricas o circulares.
	1.12 Construcción y accesibilidad”	Puede autoconstruirse con láminas de madera y tornillos u otro material para los pivotes. Se pueden adquirir en el mercado geoplanos de distintas dimensiones por un precio de 10 a 15€.
Dimensión 2 **Interés didáctico-matemático”**	*2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales*	- Polígonos - Semejanza. - Propiedades de la circunferencia.
	2.2 Habilidades geométricas”	- Habilidades visuales - Habilidades lógicas y de razonamiento - Habilidad de dibujo y construcción - Habilidades de comunicación
	2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje	- Fase de información. - Fase de explicitación - Fase de orientación dirigida - Fase de orientación libre
Dimensión 3 **“Versatilidad del material**”	*3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos*	Solo puede tratar contenidos en el plano aunque el isométrico admite representaciones planas de cuerpos geométricos.
	3.2 Vinculación con otros ejes del área	Puede utilizarse para la obtención de números racionales.
	3.3 Uso en otros niveles de escolaridad	Es utilizable y recomendable su uso en educación infantil y primaria.

A.5.6 GEOESPACIO

Tabla A.5.6 Resumen de las propiedades del geoespacio.

Dimensión 0 Resumen del material	*Por objetivos*	Para descubrir conceptos, para resolver problemas, para demostraciones y comprobaciones.
	Por naturaleza	Estructurado
	Funcionamiento	Materiales constructores
Dimensión 1 Descripción del material	*1.13 Características generales*	Es una estructura cúbica hueca, con argollas en las aristas que sujetan cuerdas o gomas y que forman un sistema de coordenadas.
	1.14 Variantes/Integrantes	La estructura puede variar en cuanto a material y en cuanto a dimensiones pues suelen ser de 25x25cm a 75x75
	1.15 Construcción y accesibilidad”	No es un material de transporte fácil pues no es desmontable. Es difícil de encontrar y cuesta unos 50€ por los que es recomendable autoconstruirlo.
Dimensión 2 Interés didáctico-matemático”	*2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales*	- Polígonos. - Poliedros – Trigonometría. - Semejanza – Geometría analítica.
	2.2 Habilidades geométricas”	- Habilidades visuales - Habilidades de dibujo y construcción. - Habilidades lógicas y de razonamiento
	2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje	- Fase de información. - Fase de explicitación. - Fase de orientación dirigida. - Fase de orientación libre. -Fase de integración.
Dimensión 3 “Versatilidad del material”	*3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos*	Contenidos en el plano y en el espacio.
	3.2 Vinculación con otros ejes del área	El geoespacio puede ser utilizado para la representación de funciones.
	3.3 Uso en otros niveles de escolaridad	Puede usarse desde primaria hasta Bachillerato.

A.5.7 CUBOS MULTILINK

Tabla A.5.7 Resumen de las propiedades de los cubos multilink.

Dimensión 0 **Resumen del material**	*Por objetivos*	Para resolver problemas
	Por naturaleza	Estructurado
	Funcionamiento	Materiales constructores
Dimensión 1 **Descripción del material**	*1.16 Características generales*	Son piezas cúbicas coloridas que se unen mediante machihembrado para formar los policubos que se deseen.
	1.17 Variantes/Integrantes	El cubo Soma consiste en siete policubos formados por 3 o 4 cubos que componen un cubo de 3x3.
	1.18 Construcción y accesibilidad"	Son piezas rígidas de madera o plástico de colores. El precio de un pack de cubos multilink cuesta entre 10€ y 20€ según el número de piezas. El cubo Soma puede conseguirse por 5€.
Dimensión 2 **Interés didáctico-matemático"**	*2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales*	Propiedades geométricas de cubos y policubos.
	2.2 Habilidades geométricas"	- Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales. - Habilidades visuales.
	2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje	- Fase de información. - Fase de orientación dirigida - Fase de orientación libre
Dimensión 3 **"Versatilidad del material"**	*3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos*	Trata contenidos de figuras en tres dimensiones.
	3.2 Vinculación con otros ejes del área	El cubo Soma se utiliza en ramas tan diversas como la psicología o el diseño. Los cubos multilink pueden utilizarse en los bloques de estadística y de probabilidad y, en primaria, para operaciones aritméticas sencilla.
	3.3 Uso en otros niveles de escolaridad	Es utilizable y recomendable su uso en educación infantil y primaria.

A.5.8 REGELETAS DE CUISENAIRE

Tabla A.5.8 Resumen de las propiedades de las regletas de Cuisenaire.

Dimensión 0 Resumen del material	*Por objetivos*	Para descubrir conceptos. Para resolver problemas. Para demostraciones y comprobaciones.
	Por naturaleza	Estructurado
	Funcionamiento	Materiales constructores
Dimensión 1 Descripción del material	*1.19 Características generales*	Son piezas ortoédricas caracterizadas por la longitud de su altura. Dicha longitud se reconoce mediante un código de colores.
	1.20 Variantes/Integrantes	Pueden ser tanto de madera como de plástico. El código de colores puede variar al original.
	1.21 Construcción y accesibilidad"	Pueden construirse regletas planas con cartulinas de colores. Las regletas que se encuentran en el mercado se distribuyen habitualmente en estuches de madera y se pueden adquirir por 10€ – 15€.
Dimensión 2 Interés didáctico-matemático"	*2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales*	Relaciones numéricas de los cuerpos geométricos. Teorema de Pitágoras. Criterios de semejanza de triángulos.
	2.2 Habilidades geométricas"	- Habilidades de comunicación. - Habilidades de dibujo y construcción. - Habilidades lógicas y de razonamiento. - Habilidades de aplicación o transferencia,
	2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje	- Fase de información. - Fase de orientación dirigida - Fase de orientación libre
Dimensión 3 "Versatilidad del material"	*3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos*	Trata contenidos de figuras en el plano y en tres dimensiones.
	3.2 Vinculación con otros ejes del área	La aplicación principal de las regletas es en los bloques de aritmética y álgebra.
	3.3 Uso en otros niveles de escolaridad	Es utilizable y recomendable su uso en educación infantil y primaria. Resuelve también ecuaciones que se estudian en Bachillerato.

A.5.9 PAPIROFLEXIA

Tabla A.5.8 Resumen de las propiedades de la papiroflexia.

Dimensión 0 Resumen del material	*Por objetivos*	Para descubrir conceptos. Para resolver problemas. Para demostraciones y comprobaciones.
	Por naturaleza	No estructurados.
	Funcionamiento	Materiales constructores
Dimensión 1 Descripción del material	*1.22 Características generales*	Papel de cualquier tipo, preferiblemente folios.
	1.23 Variantes/Integrantes	La papiroflexia no admite cortes con tijera y pegamento, pero se utilizarán si la situación didáctica lo requiere.
	1.24 Construcción y accesibilidad"	Es un material muy fácil de conseguir y no necesita transformación previa.
Dimensión 2 Interés didáctico-matemático"	*2.1 Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales*	- Trigonometría. - Propiedades de poliedros. – Propiedades de figuras planas.
	2.2 Habilidades geométricas"	- Habilidades de comunicación. - Habilidades de dibujo y construcción. - Habilidades lógicas y de razonamiento. - Habilidades de aplicación o transferencia,
	2.3 Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje	- Fase de información. - Fase de orientación dirigida - Fase de integración.
Dimensión 3 "Versatilidad del material"	*3.1 Adaptación a diversos contenidos geométricos*	Trata contenidos de figuras en el plano y en tres dimensiones.
	3.2 Vinculación con otros ejes del área	Se puede utilizar para resolver ecuaciones de hasta cuarto grado
	3.3 Uso en otros niveles de escolaridad	Es utilizable y recomendable su uso en primaria y Bachillerato.

A.6 ÍNDICE DE IMÁGENES

Imagen 2.2.3 *Evolución del rendimiento en matemáticas y ciencias.*
Recuperado de https://www.educacionyfp.gob.es/inee /timss2015final.pdf
Ultima consulta: 12/04/2020.

Imagen 2.2.4 *Evolución del rendimiento en España y OCDE según bloque de matemáticas.*
Recuperado de https://www.educacionyfp.gob.es/inee /timss2015final.pdf
Ultima consulta: 12/04/2020.

Imagen 3.1 *Pirámide alimentaria.*
Recuperado de: https:// Alsina, A. (febrero de 2010) La pirámide de la educación matemática. Aula de Innovación educativa (189), pp. 12-16.
Ultima consulta: 18/04/2020.

Imagen 3.2 *Pirámide de la educación matemática.*
Recuperado de: Alsina, A. (2010) La pirámide de la educación matemática. Aula de Innovación educativa (189), pp. 12-16
Ultima consulta: 18/04/2020.

Imagen 3.1.1.1 *Esquemas de matematización en la EMR*
Recuperado de: Bressan, A. (2016) Educación matemática realista. Bases teóricas. GPDM Bariloche Argentina, pp.
Disponible en: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf
Ultima consulta: 08/06/2020.

Imagen 3.2.1.1 *Hélice que representa la relación entre fases y niveles del método Van Hiele.*
Recuperado de: Corberán, R., Huerta, P., Jaime, A. Garrigues, M. y Bautista, J. (1991). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. C.I.D.E. Investigación (95)
Disponible en: https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/CorOtr94.pdf
Ultima consulta: 08/06/2020.

Imagen 3.3.1 *Error en la simbología visual del concepto.*
Recuperado de: Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). *Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas*. Campo abierto. Revista de Educación, (27) p.57
Disponible en:
https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985/1273

Ultima consulta: 08/06/2020.

Imagen 3.3.2 *Representación del Triángulo convencional rectángulo y del cuadrado no convencional.*
Recuperado de: Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo abierto. Revista de Educación, (27) p.58
Disponible en:
https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985/1273
Ultima consulta: 08/06/2020

Imagen 3.3.3 Representación no habitual y habitual de un prisma.
Recuperado de: Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo abierto. Revista de Educación, (27) p.60
Disponible en:
https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985/1273
Ultima consulta: 08/06/2020

Imagen 3.3.4 *Representaciones de un triángulo isósceles.*
Recuperado de: Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). *Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas.* Campo abierto. Revista de Educación, (27) p.61
Disponible en:
https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985/1273
Ultima consulta: 08/06/2020

Imagen 3.3.5 *Clasificación de los cuadriláteros por partición y por inclusión.*
Recuperado de: Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. Campo abierto. Revista de Educación, (27) p.61
Disponible en:
https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1985/1273
Ultima consulta: 08/06/2020

***Imagen 4.2*.1.1** *Patente obtenida por F. Hornby en 1901 para el futuro Meccano*.
Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Frank_Hornby

Ultima consulta: 01/05/2020.

Imagen 4.2.1.2 *Dimensiones de las piezas de mecano propuestas.*
Recuperado de: http://mipombo1950.blogspot.com/2009/07/actividades-geometricas-con-mecano.html
Ultima consulta: 27/04/2020.

Imagen 4.2.1.3 *Triángulo para la primera actividad del mecano.*
Recuperado de: http://mipombo1950.blogspot.com/2009/07/actividades-geometricas-con-mecano.html
Ultima consulta: 27/04/2020.

Imagen 4.2.1.4 *Esquema de la construcción para la actividad 2.*
Recuperado de: http://mipombo1950.blogspot.com/2009/07/actividades-geometricas-con-mecano.html
Ultima consulta: 27/04/2020.

Imagen 4.2.1.5 *Figura de la tercera actividad con mecanos.*
Recuperado de: http://mipombo1950.blogspot.com/2009/07/actividades-geometricas-con-mecano.html
Ultima consulta: 27/04/2020.

Imagen 4.2.1.6 *Primer paso del proceso de construcción.*
Recuperado de: https://www.gaussianos.com/cambiando-la-regla-y-el-compas-por-piezas-de-mecano/
Ultima consulta: 01/05/2020.

Imagen 4.2.1.7 *Movimientos de A y C en la construcción.*
Recuperado de: https://www.gaussianos.com/cambiando-la-regla-y-el-compas-por-piezas-de-mecano/
Ultima consulta: 01/05/2020.

Imagen 4.2.1.8 *Construcción de los números racionales con mecano.*
Recuperado de: https://www.gaussianos.com/cambiando-la-regla-y-el-compas-por-piezas-de-mecano/
Ultima consulta: 01/05/2020.

Imagen 4.2.2.1 *Primer rompecabezas diseñado a propósito (1766).*
Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/
Ultima consulta: 01/05/2020.

Imagen 4.2.2.2 *Los doce posibles pentaminós.*
Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/
Ultima consulta: 01/05/2020.

Imagen 4.2.2.3 *Rectángulo 6 x 10 contenido en la caja del juego.*
Recuperado de: https://www.amazon.com
Ultima consulta: 01/05/2020.

Imagen 4.2.2.4 *Soluciones a los distintos rectángulos.*
Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/
Ultima consulta: 01/05/2020.

Imagen 4.2.2.5 *Puzle hexagonal de destrezas algebraicas.*
Recuperado de: García Azcárate, A. (2014). Creación y Usos de puzles matemáticos. XV Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: el sentido de las matemáticas. Matemáticas con sentido. Disponible en: https://thales.cica.es/xvceam/actas/pdf/ta03.pdf

Imagen 4.2.2.6 *Rompecabezas de la Paradoja de Curry*.
Recuperado de: http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/desc4.htm
Ultima consulta: 23/04/2020.

Imagen 4.2.3.1 *Las siete piezas del Tangram original.*
Recuperado de:
https://elpais.com/elpais/2016/12/27/el_aleph/1482869347_077905.html
Ultima consulta: 01/06/2020.

Imagen 4.2.3.2 *Las siete piezas del Tangram original.*
Recuperado de: Piezas del Tangram formando un triángulo
Ultima consulta: 01/06/2020.

Imagen 4.2.3.3 *Esquema para la construcción del Tangram*.
Recuperado de: http://www.educacionplastica.net/Tangram1.htm
Ultima consulta: 03/06/2020.

Imagen 4.2.3.4 Triangulaciones de distingos polígonos para demostrar el teorema de Bolyal-Gerwiwn.
Recuperado de:
https://elpais.com/elpais/2016/12/27/el_aleph/1482869347_077905.html
Ultima consulta: 01/06/2020.

Imagen 4.2.3.5 *Las tres figuras aparentemente iguales.*
Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Tangram#cite_note-4
Ultima consulta: 03/06/2020.

Imagen 4.2.3.6 *Disposición de las piezas en las tres figuras*
Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Tangram#cite_note-4
Ultima consulta: 03/06/2020.

***Imagen 4.2.*4.1** *Pieza a dividir en cuatro partes iguales.*
Recuperado de: http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/ele.htm
Ultima consulta: 23/04/2020.

***Imagen 4.2.*4.2** *Solución con piezas en "L".*
Recuperado de: http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/ele.htm
Ultima consulta: 23/04/2020.

***Imagen 4.2.*4.3** *Trapecio a dividir en cuatro partes iguales.*
Recuperado de: http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/ele.htm
Ultima consulta: 23/04/2020.

***Imagen 4.2.*4.4** *Solución con trapecios semejantes.*
Recuperado de: http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/ele.htm
Ultima consulta: 23/04/2020.

***Imagen 4.2.*4.5** *Cuadrado a dividir.*
Recuperado de: http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/ele.htm
Ultima consulta: 23/04/2020.

***Imagen 4.2.*4.6** *División en cuadriláteros irregulares.*
Recuperado de: http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/ele.htm
Ultima consulta: 23/04/2020.

***Imagen 4.2.*4.7** *Mosaico con triángulos regulares.*
Recuperado de: http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-

lloret/ciencia/castella/ele.htm
Ultima consulta: 23/04/2020.

Imagen 4.2.4.8 *Hueco entre pentágonos regulares.*
Recuperado de: http://www.xtec.cat/ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/castella/ele.htm
Ultima consulta: 23/04/2020.

Imagen 4.2.5.1 *Geoplano ortométrico.*
Recuperado de: https://aprendiendomatematicas.com
Ultima consulta: 23/04/2020.

Imagen 4.2.5.2 *Geoplano isométrico.*
Recuperado de: https://aprendiendomatematicas.com
Ultima consulta: 23/04/2020.

Imagen 4.2.5.3 *Geoplano circular.*
Recuperado de: https://aprendiendomatematicas.com
Ultima consulta: 23/04/2020.

Imagen 4.2.5.4 *Actividad para aplicar el Teorema de Pick utilizando el geoplano.*
Recuperado de: http://matesdedavid.blogspot.com/2013/11/el-teorema-de-pick_20.html
Ultima consulta: 25/04/2020.

Imagen 4.2.5.5 *Materiales para la aproximación a Π con geoplano.*
Recuperado de: https://matematicascercanas.com/2014/05/21/el-huerto-heredado-solucion /
Ultima consulta: 25/04/2020.

Imagen 4.2.5.6 *Enunciado del problema a representar en el geoplano.*
Recuperado de: https://matematicascercanas.com/2014/05/21/el-huerto-heredado-solucion/
Ultima consulta: 25/04/2020.

Imagen 4.2.5.7 *Planteamiento mediante grafos del problema.*
Recuperado de: https://culturacientifica.com/2016/05/04/problema-los-tres-caballeros-los-tres-criados/
Ultima consulta: 25/04/2020.

Imagen 4.2.6.1 *Geoespacio de madera, argollas metálicas y cuerdas*

Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=u7ZkyttnlEohttps
Ultima consulta: 05/06/2020.

Imagen 4.2.6.2 *Disposición de las piezas en las tres figuras*
Recuperado de: Vara Orozco, M. (2004). *El geoespacio, un recurso enseñanza de la geometría*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(2).
Disponible en: https://www.matematicaparatodos.com/varios/geoespacio.pdf
Ultima consulta: 05/06/2020.

Imagen 4.2.6.3 *Diagonal a calcular con ayuda del geoespacio.*
Recuperado de: Vara Orozco, M.(2004). *El geoespacio, un recurso enseñanza de la geometría*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(2).
Disponible en: https://www.matematicaparatodos.com/varios/geoespacio.pdf
Ultima consulta: 05/06/2020.

Imagen 4.2.6.4 *Prisma triangular con el geoespacio.*
Recuperado de: Vara Orozco, M. (2004). *El geoespacio, un recurso enseñanza de la geometría*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16(2).
Disponible en: https://www.matematicaparatodos.com/varios/geoespacio.pdf
Ultima consulta: 05/06/2020.

Imagen 4.2.7.1 *Policubos formados por cubos multilink.*
Elaboración propia de Adrián Hernández Sanz

Imagen 4.2.6.1 *Policubos formados por cubos multilink.*
Recuperado de: http://reseteomatematico.com/policubos-que-son-y-para-que-sirven/
Ultima consulta: 03/06/2020.

Imagen 4.2.7.2 *El cubo Soma (Piet Hein, 1934).*
Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Cubo_Soma
Ultima consulta: 03/06/2020.

Imagen 4.2.7.3 *Las siete piezas del cubo Soma numeradas*
Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Cubo_Soma
Ultima consulta: 03/06/2020.

Imagen 4.2.7.4 *Modelos de figuras a recrear con las piezas del cubo Soma.*
Recuperado de: http://www.tocamates.com/el-cubo-soma/
Ultima consulta: 03/06/2020.

Imagen 4.2.7.5 *Ejercicio de representación de figuras según sus proyecciones ortogonales*
Recuperado de: http://reseteomatematico.com/policubos-geometria/
Ultima consulta: 03/06/2020.

Imagen 4.2.7.6 *Ejercicio de representación de figuras según sus proyecciones ortogonales.*
Recuperado de:
https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/espacio/ejercicios-interactivos-del-area-y-volumen-del-cubo-y-del-ortoedro.html.

Imagen 4.2.8.1 *Código de colores de las Regletas de Cuisenaire.*
Recuperado de: https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/potencias-regletas/.
Ultima consulta: 04/06/2020.

Imagen 4.2.8.2 *Triángulos de lados 5,4 y 3 con regletas de Cuisenaire.*
Recuperado de: https://escuelaolimpica.wordpress.com/2019/07/09/sesion-37-regletas-y-teorema-de-pitagoras/Ultima consulta: 04/06/2020.

Imagen 4.2.8.3 *Los cuadrados de los catetos y la hipotenusa-*
Recuperado de: https://escuelaolimpica.wordpress.com/2019/07/09/sesion-37-regletas-y-teorema-de-pitagoras/
Ultima consulta: 04/06/2020.

Imagen 4.2.8.4 *Triángulo como mitad de un rectángulo de igual base y altura.*
Recuperado de: http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/242.pdf
Ultima consulta: 04/06/2020.

Imagen 4.2.9.1 *Pasos del 1 al 8 y demostración de proceso.*
Recuperado de: https://matematicascercanas.com/2015/12/23/4276/
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.9.2 *Pasos a seguir del 1 al 4 para encontrar la duplicación del cubo.*
De elaboración propia.
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.9.3 *Medianas, alturas, bisectrices y mediatrices de un triángulo mediante pliegues.*
Recuperado de: http://www.estalmat.org/archivos/DoblandoPapel.pdf
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.9.4 *Suma de los ángulos de un triángulo.*
De elaboración propia.

Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.9.5 *Proceso para la demostración del área del triángulo con papiroflexia.*
Recuperado de: http://www.estalmat.org/archivos/DoblandoPapel.pdf
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.10.1 *Generación de cónicas mediante planos de corte con el cono.*
Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Secci%C3%B3n_c%C3%B3nica
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.10.2 *Cono de Apolonio desmontable de madera.*
Recuperado de: https://www.pinterest.ph/pin/428897564485180484
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.10.3 *Cortes con conos realizados con plastilina*
Recuperado de: http://mateblogaabrz.blogspot.com/2014/06/conicas.html
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.10.4 *Circunferencia goniométrica en madera.*
Recuperado de: https://montessorimardelsur.es
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.9.5 *Planos para la realización de la circunferencia con dos cartulinas*
Elaboración propia de: Alberto Pozo Álvarez

Imagen 4.2.10.6 *Problemas para estudiar la hélice con un cilindro de cartón.*
Recuperado de: https://trazoide.com/diedrico-en-pdf/cilindro-en-diedrico-995.pdf
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 4.2.10.7 *Poliedros con palillos y plastilina*
Recuperado de: http://mateselaios2.blogspot.com
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 5.1.5.1 *Calendario escolar de la Junta de Castilla y León para el curso 2019-2020.*
Recuperado de: *https://www.educa.jcyl.es/es/calendario-escolar.*
Ultima consulta: 06/06/2020.

Imagen 5.7.1 *Cuadrados de catetos e hipotenusa en un triángulo rectángulo con el puzle de H. Perigal.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.2 *Colocación de las piezas de los cuadrados de los catetos sobre el cuadrado de la hipotenusa.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.3 *Cuadrados de los catetos con Tangram chino.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.4 *Hipotenusa al cuadrado con las piezas de los cuadrados de los catetos.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.5 *Figura para una de las actividades de cálculo de áreas.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.6 *Pirámide cuya altura se deberá calcular.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.7 *La suma del área de los triángulos equiláteros de lados iguales a los catetos es la misma que la del triángulo de la hipotenusa.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.8 *La suma de los triángulos equiláteros de lados iguales a los catetos es la misma que el triángulo de la hipotenusa.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.9 *La suma de las áreas de los pentágonos regulares con de lado correspondiente a los catetos es igual a la del pentágono regular de lado igual a la hipotenusa.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.10 *La suma de las áreas de los semicírculos de diámetro correspondiente a los catetos es igual al área del semicírculo de diámetro igual a la hipotenusa*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.11 *Polígonos cuya semejanza deberán establecer los alumnos.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.12 *Uso del geoplano para establecer criterios de semejanza de triángulo.*
De elaboración propia.

Imagen 5.7.13 *Semejanza de triángulos con mecanos.*
Recuperado de: https://aprendiendomatematicas.com
Ultima consulta: 23/04/2020.

Recuperado de: *https://www.superprof.es*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.10 *Imagen para la actividad 15.*
Recuperado de:
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.11 *Imagen para la actividad 17(1).*
De elaboración propia.

Imagen A.1.12 *Imagen para la actividad 17(2).*
De elaboración propia.

Imagen A.1.13 *Imagen para la actividad 17(3).*
De elaboración propia.

Imagen A.1.14 *Imagen para la actividad 18.*
Recuperado de:
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.15 *Imagen para la actividad 19.*
Recuperado de:
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.16 *Imagen para la actividad 20.*
Recuperado de:
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.17 *Imagen para la actividad 23(2).*
Recuperado de: https://www.google.es/maps
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.18 *Imagen para la actividad 23(1).*
Recuperado de: https://www.google.es/maps
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.19 *Imagen para la actividad 24(1).*
Recuperado de: Fernández, I., y Reyes, M.E. (2015). *Periplo por la geometría de Valladolid. Servicio municipal de educación del ayuntamiento de Valladolid*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.20 *Imagen para la actividad 24(2).*

Recuperado de: Fernández, I., y Reyes, M.E. (2015). *Periplo por la geometría de Valladolid. Servicio municipal de educación del ayuntamiento de Valladolid*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.21 *Imagen para la actividad 24(3).*
Recuperado de: Fernández, I., y Reyes, M.E. (2015). *Periplo por la geometría de Valladolid. Servicio municipal de educación del ayuntamiento de Valladolid*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.22 *Imagen para la actividad 28.*
De elaboración propia.

Imagen A.1.23 *Imagen para la actividad* 31.
Recuperado de: *https://www.clasesdeapoyo.com*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.24 *Imagen para la actividad 32.*
Recuperado de: *https://www.clasesdeapoyo.com*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.24 *Imagen para la actividad 32.*
Recuperado de: *https://www.ugr.evcb.dws*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.25 *Imagen para la actividad 33.*
Recuperado de: *https://www.ugr.evcb.dws*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.26 *Imagen para la actividad 34.*
Recuperado de: *http://www.estalmat.org*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.27 *Imagen para la actividad 35.*
De elaboración propia.

Imagen A.1.28 *Imagen para la actividad 36.*
Recuperado de: *http://www.estalmat.org*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.29 *Imagen para la actividad 36.*
Recuperado de: *http://mateblogaabrz.blogspot.com*

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.30 *Imagen para la actividad 37.*

Recuperado de: *http://mateblogaabrz.blogspot.com*

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.31 *Imagen para la actividad 38.*

Recuperado de: *http://www.estalmat.org*

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.32 *Imagen para la actividad 41.*

Recuperado de: http://www.estalmat.org

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.33 *Imagen para la actividad 42.*

Recuperado de: *http://www.estalmat.org*

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.34 *Imagen para la actividad 43(1).*

Recuperado de: Fernández, I., y Reyes, M.E. (2015). *Periplo por la geometría de Valladolid. Servicio municipal de educación del ayuntamiento de Valladolid*

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.35 *Imagen para la actividad 43(2).*

Recuperado de: Fernández, I., y Reyes, M.E. (2015). *Periplo por la geometría de Valladolid. Servicio municipal de educación del ayuntamiento de Valladolid*

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.1.36 *Imagen para la actividad 45.*

Recuperado de: *https://www.educaciontrespuntocero.com/experiencias/ensenar-geometria-a-traves-del-futbol/97725.html*

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.2.1 Imagen para actividad 1.

Recuperado de: *http://www.tocamates.com*

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.2.2 Imagen para actividad 4.

Recuperado de: *http://www.tocamates.com*

Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.2.3 Imagen para actividad 7.
Recuperado de: *https://www.ugr.evcb.dws*
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.4.1 *Plaza Mayor de Salamanca.*
Recuperado de: https://sigpac.mapa.gob.es/fega/visor/
Ultima consulta: 15/02/2020

Imagen A.4.1 *Plaza Mayor de Valladolid.*
Recuperado de: https://sigpac.mapa.gob.es/fega/visor/
Ultima consulta: 15/02/2020

A.7 ÍNDICE DE TABLAS