



**UNIVERSIDAD DE VALLADOLID**

**Departamento Matemática Aplicada**

# **Diseño de una programación didáctica para impartir matemáticas con especial atención a la metodología**

**Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación  
Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y  
Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.**

**Alumno: Adrián Hernández Sanz**

**Tutor/es: Cesáreo Jesús González Fernández  
Óscar Arratia García**

**Valladolid, Junio 2020**





El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



## Índice

<b>1. Introducción.....</b>	<b>7</b>
<b>2. Programación didáctica.....</b>	<b>11</b>
2.1. Marco legal.....	11
2.2. Introducción contextual.....	11
2.3. Competencias básicas.....	13
2.4. Objetivos .....	16
2.5. Contenidos.....	17
2.6. Temporalización.....	22
2.7. Recursos .....	24
2.8. Metodología .....	26
2.9. Evaluación.....	28
2.9.1. Sistemas de recuperación .....	28
2.9.2. Sistemas para subir nota.....	29
2.9.3. Nota de junio .....	29
2.9.4. Nota de la convocatoria extraordinaria .....	29
2.10. Atención a la diversidad.....	30
2.11. Plan de fomento a la lectura .....	31
2.12. Actividades complementarias y extraescolares.....	32
2.13. Evaluación de la programación .....	32
2.14. Conclusiones .....	35
<b>3. Unidades didácticas.....</b>	<b>39</b>
3.1. Unidad 8: Derivadas.....	39



3.1.1. Justificación teórica.....	39
3.1.2. Contribuciones a las competencias básicas .....	40
3.1.3. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje .....	41
3.1.4. Objetivos .....	44
3.1.5. Temporalización.....	44
3.1.6. Contenidos.....	45
3.2. Unidad 9: Aplicaciones de la derivada.....	54
3.2.1. Justificación teórica.....	54
3.2.2. Contribuciones a las competencias básicas .....	55
3.2.3. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje .....	56
3.2.4. Objetivos .....	59
3.2.5. Temporalización.....	59
3.2.6. Contenidos.....	60
<b>4. Conclusión.....</b>	<b>75</b>
<b>5. Bibliografía .....</b>	<b>77</b>
<b>Anexos .....</b>	<b>79</b>
Anexo I.....	79
Anexo II .....	81



El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



## SECCIÓN 1

# INTRODUCCIÓN





El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



## 1. Introducción

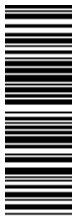
La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa en su artículo 6 establece que se entiende por currículo la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas. Así el currículo de cada materia estará integrado por los siguientes elementos.

- a) Los **objetivos** de cada enseñanza y etapa educativa.
- b) Las **competencias**, o capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos.
- c) Los **contenidos**, o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias. Los contenidos se ordenan en asignaturas, que se clasifican en materias, ámbitos, áreas y módulos en función de las enseñanzas, las etapas educativas o los programas en que participen los alumnos y alumnas.
- d) La **metodología didáctica**, que comprende tanto la descripción de las prácticas docentes como la organización del trabajo de los docentes.
- e) Los **estándares** y resultados de aprendizaje evaluables.
- f) Los **criterios de evaluación** del grado de adquisición de las competencias y del logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa.

Esta misma Ley Orgánica establece las competencias que corresponde al Gobierno, al Ministerio de Educación y a las Administraciones educativas.

Desde el marco normativo hasta las aulas podemos establecer diferentes niveles de concreción curricular:

**PRIMER NIVEL:** Diseño curricular establecido por el ministerio de educación, planifica los elementos curriculares, los objetivos generales de etapas, las definiciones de las distintas áreas y los objetivos y bloques de estas áreas. Una vez fijado el currículo básico corresponde a la Comunidad de Castilla y León completar el currículo nacional para su aplicación en los centros que pertenecen a su ámbito de gestión.

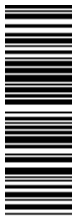


**SEGUNDO NIVEL:** El desarrollo curricular en este nivel es prescriptivo en todos los centros.

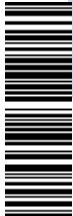
Corresponde a los equipos docentes el adecuar la normativa sobre educación al diseño curricular de cada centro atendiendo a sus características particulares. Así se contextualizará y detallará la normativa vigente a la idiosincrasia del centro. En este sentido, los centros elaborarán un Proyecto Curricular de Centro, en el que se recogerán los proyectos de Etapa y, dentro de estos, las programaciones didácticas de cada una de las enseñanzas impartidas en la misma.

**TERCER NIVEL:** Es la última concreción y consiste en adecuar los proyectos anteriores a las aulas. Para esto cada profesor elaborará una programación de aula concretando así la programación de departamento a la que hicimos referencia en el nivel anterior. Esta programación irá dirigida a un grupo concreto de alumnos con unas necesidades concretas.

Como vemos, la programación didáctica es parte de una serie de documentos sin los cuales no tendría sentido. Con este TFM pretendo elaborar una programación didáctica y el desarrollo de dos unidades didácticas, a modo de ejemplo, enmarcadas en un contexto real. Dicho contexto será el centro donde realicé la fase de prácticas, he elegido esta opción porque he tenido acceso al proyecto educativo de centro y, como he dicho anteriormente, me parece muy importante enmarcar la programación como una concreción de otros documentos de nivel superior.







## SECCIÓN 2

# PROGRAMACIÓN

# DIDÁCTICA





El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



## 2. Programación didáctica

### 2.1. Marco legal

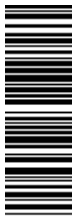
La siguiente programación didáctica va dirigida a la materia de Matemáticas II en un curso de 2º de bachillerato de la modalidad de ciencias dentro de la Comunidad de Castilla y León.

Para realizar esta programación didáctica me basaré en la siguiente legislación:

- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, del BOE que establece el currículo básico de la ESO y del Bachillerato por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.
- ORDEN EDU/888/2009, de 20 de abril, por la que se regula el procedimiento para garantizar el derecho del alumnado que cursa enseñanzas de educación secundaria obligatoria y de bachillerato, en centros docentes de la Comunidad de Castilla y León, a que su dedicación, esfuerzo y rendimiento sean valorados y reconocidos con objetividad.
- ORDEN EDU/363/2015 del 4 de mayo del BOCYL por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.
- ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero del BOE
- Documentos públicos del I.E.S. Hoces del Duratón: PEC, PGA Y RRI.

### 2.2. Introducción contextual

El curso será impartido en el I.E.S. Hoces del Duratón, en la localidad de Cantalejo, provincia de Segovia. A continuación, se incluye la descripción que hace el propio centro de sí mismo y de la comarca donde se ubica en su página web.





<https://www.bing.com/images/search?view=detailV2&ccid=LerfN3>

El I.E.S. Hoces del Duratón está situado en la zona nordeste de la provincia de Segovia, en Cantalejo, ciudad de unos 4100 habitantes. Acoge alumnos de la propia población y de los pueblos de los alrededores, en una zona de población dispersa, a través del transporte escolar. La comarca en la que se encuentra limita con Burgos. Su altitud media es de unos 1000 metros y tiene una red fluvial importante, destacando en ella el río Duratón, con su peculiar cauce en forma de hoz, del que toma el nombre el instituto. El clima es continental, con veranos cortos y calurosos e inviernos largos y fríos. Las precipitaciones a lo largo del año suelen ser muy numerosas.

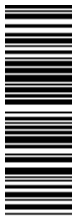
Los primeros vestigios en Cantalejo y la comarca datan del año 1138. La ciudad de Cantalejo, como villa, existe desde mediados del siglo XV, viviendo en ella, unos 100 vecinos para aquel entonces. Sin embargo, ya desde el siglo XII, existía la ermita de la Virgen del Pinar, que aún hoy existe, aunque está reconstruida.

El instituto se halla situado en la calle Jacinto Benavente, nº 14, en el casco urbano próximo a un parque, con acceso rápido desde la carretera principal que atraviesa la localidad.

A continuación, realizamos un análisis del contexto sociocultural basándonos en el PEC:

La comarca vive fundamentalmente de la agricultura (pequeñas explotaciones agrícolas) y de la ganadería (ganado porcino), con un amplio sector de servicios centrados, sobre todo, en Cantalejo, Turégano y Sepúlveda. En cuanto al sector agrícola, los productos que más se cultivan en la zona son la remolacha, el girasol, la patata y los cereales, sobre todo la cebada.

El nivel cultural de la comarca es medio-bajo, predominando en la población los estudios primarios. El índice de analfabetismo es muy bajo. En los últimos años se ha registrado la llegada



de un número de población inmigrante, procedente de distintos orígenes, y que ha contribuido a aumentar el censo de estos pueblos. Esto ha generado una serie de necesidades educativas a las que se debe dar una respuesta. En cuanto a la escolarización, se suele valorar como algo positivo en las primeras etapas pero, según van avanzando los cursos y aumentando las dificultades académicas, se produce un abandono progresivo.

En cuanto a los servicios educativos de la zona, en la mayoría de los pueblos existe una sola escuela, en la que se imparte la Educación Primaria. En Sacramenia y Turégano se imparte además el primer ciclo de la ESO.

Por todo lo anterior, el instituto cuenta con una gran diversidad en lo referente al alumnado.

Con respecto a las instalaciones del centro, se trata de un edificio antiguo que se ha ido modernizando poco a poco. El centro cuenta con aulas y laboratorios de informática, una biblioteca, una sala de profesores, un departamento por cada especialidad, una zona habilitada como sala de espera para la recepción de padres, una zona de dirección con despachos, dos patios exteriores y su propio polideportivo ubicado al lado del instituto.

Englobados en este marco se encuentra nuestros 24 alumnos de 2º de bachillerato. Entre los que podemos distinguir a un alumno con TDAH y 6 repetidores en la materia de matemáticas.

***NOTA:** Cabe destacar que en el desarrollo de la programación se ha incluido algún alumno con necesidades distintas de los alumnos de este curso que nos hemos encontrado en el PRACTICUM. Así, conseguimos un carácter más global.*

### 2.3. Competencias básicas

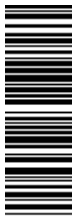
Desarrollamos desde una perspectiva general, en nuestro contexto, las 7 competencias claves a lo largo de nuestro curso. Para ello, nos apoyaremos en la ORDEN ECD/65/2015, de 21 de enero del BOE:

- **Competencia lingüística (CL):** Esta competencia es siempre parcial y constituye un objetivo de aprendizaje permanente a lo largo de toda la vida. Representa una vía de conocimiento y contacto con la diversidad cultural que implica un factor de



enriquecimiento para la propia competencia. Los alumnos deberán emplear un lenguaje matemático con adecuada precisión y una descripción verbal de los razonamientos y de los procesos que se llevan a cabo en relación con las tareas que deben realizar.

- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CM):** En nuestro contexto, los alumnos tendrán que utilizar el razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones, para conocer más sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad. Esta competencia ayudará al alumno a valorar la validez de argumentaciones e informaciones, a seguir razonamientos válidos a la hora de aplicar los teoremas impartidos y a interpretar los resultados obtenidos. Esta competencia proporciona un acercamiento al mundo físico y a la interacción responsable con él. Contribuye al desarrollo del pensamiento científico, pues incluyen la aplicación de los métodos propios de la racionalidad científica y las destrezas tecnológicas.
- **Competencias digitales (CD):** Corresponde a las habilidades para buscar y obtener información y transformarla en conocimiento mediante el uso de las plataformas virtuales. En ellas podremos colgar diferentes actividades y recursos relacionados con la unidad. El uso de aplicaciones informáticas diferentes contribuirá al desarrollo de esta competencia en los alumnos. Durante el curso facilitaremos al alumno calculadoras específicas, programas de cálculo simbólico o de cálculo estadístico.  
  
Esta competencia supone, además de la adecuación a los cambios que introducen las nuevas tecnologías en la alfabetización, la lectura y la escritura, un conjunto nuevo de conocimientos, habilidades y actitudes necesarias hoy en día para ser competente en un entorno digital.
- **Competencias para aprender a aprender (AA):** Aprender a aprender supone iniciarse en el aprendizaje y ser capaz de continuarlo de manera autónoma. En este sentido, los alumnos tendrán a su alcance material suficiente para profundizar en los conocimientos impartidos. Al facilitar fichas de refuerzo y profundización con multitud de ejercicios y problemas, los alumnos podrán dirigir su estudio de mejorar, orientados en todo momento



por el profesor de la materia. De esta manera conseguiremos motivar al alumno haciéndole sentirse protagonista del proceso y del resultado de su aprendizaje.

- **Competencias sociales y cívicas (CSC):** El aula será, en todo momento, un espacio de convivencia y de respeto mutuo. En este sentido, es importante que los alumnos valoren la figura del profesor, respeten los turnos de palabra de sus compañeros en las intervenciones, y comprendan, que en la participación que se desarrollará, deben considerar las dificultades que puedan presentar sus compañeros, así como el mayor interés por parte de algunos de ellos. Esta competencia permite vivir en sociedad, comprender la realidad social del mundo en que se vive y ejercer la ciudadanía democrática. Además, incluye habilidades para participar plenamente en la vida cívica. Se trata, por lo tanto, de aunar el interés por profundizar y garantizar la participación en el funcionamiento democrático de la sociedad, tanto en el ámbito público como privado, y preparar a las personas para ejercer la ciudadanía democrática y participar plenamente en la vida cívica y social gracias al conocimiento de conceptos y estructuras sociales y políticas y al compromiso de participación y democrática.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE):** Fomentaremos en el aula la participación de los alumnos de una forma respetuosa y el trabajo en equipo. El estudio adecuado de la matemática como ciencia aplicada al estudio y análisis de resultados permite desarrollar de forma directa esta competencia ya que un mismo problema se puede resolver por distintos métodos e interpretar su solución desde distintos puntos de vista. En este sentido, es importante que el alumno desarrolle la capacidad de elegir una vía de resolución y de interpretación en función de un contexto inicial. Además, debe ser capaz de analizar si los resultados calculados son válidos o no desarrollando el espíritu crítico necesario para ello.
- **Conciencia y expresiones culturales (CEC):** Contribuiremos a esta competencia desarrollando actividades dentro de un contexto cultural con el fin de relacionar nuestra unidad con problemas del mundo real. Los resultados teóricos impartidos se



contextualizarán de forma histórica para que el alumno entienda lo que supusieron en el desarrollo científico y cultural de esa época.

La competencia en conciencia y expresión cultural implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal.

#### 2.4. Objetivos

Los objetivos a los que queremos llegar están reflejados en el documento legislativo Real Decreto 1105/2014 por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. El Bachillerato contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

- a) Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española, así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.
- b) Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.
- c) Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
- d) Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
- e) Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.
- f) Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.



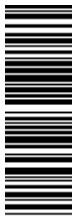


- g) Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
- h) Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.
- i) Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
- j) Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
- k) Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
- l) Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
- m) Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.
- n) Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

## 2.5. Contenidos

Los contenidos básicos que se impartirán serán los establecidos por la ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo. A continuación, estructuraremos dichos contenidos en diferentes unidades didácticas coherentes y progresivas. El criterio que he aplicado para realizar esta distribución ha sido teniendo en cuenta que mi metodología al explicar la base teórica de la materia será, fundamentalmente deductiva.

Organizaremos los contenidos para seguir la línea “de lo general a lo particular”. Así, en álgebra, comenzaremos por el estudio de las matrices para finalizar con el estudio de sistemas, donde tendremos que aplicar todos los conocimientos de los temas anteriores para aplicarlos al tema concreto de resolución de sistemas lineales. Por poner otro ejemplo, dentro del bloque de



Cálculo realizaremos el estudio de la derivada para, posteriormente, impartir otra unidad donde estudiaremos sus aplicaciones.

## BLOQUE I

### Unidad 1: Matrices

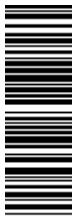
- Definiciones de matriz.
- Operaciones con matrices.
- Potencias de una matriz cuadrada.
- Matriz inversa.
- Dependencia e independencia lineales.
- Rango de una matriz.
- Ecuaciones matriciales.
- Aplicaciones de las matrices.

### Unidad 2: Determinantes

- Determinante de una matriz cuadrada.
- Menor complementario y adjunto.
- Desarrollo de un determinante por una fila o columna.
- Propiedades.
- Rango de una matriz por menores.
- Matriz inversa por menores.

### Unidad 3: Sistemas de ecuaciones

- Sistemas lineales.
- Sistemas de ecuaciones equivalentes.
- Expresión matricial de un sistema de ecuaciones.
- Resolución de sistemas por la matriz inversa.
- Resolución de sistemas por el método de Gauss.
- Expresión por columnas de un sistema de ecuaciones lineales.
- Teorema de Rouché.



- Regla de Cramer.
- Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.
- Sistemas dependientes con parámetros.

## BLOQUE II

### Unidad 4: Vectores en el espacio

- Vectores fijos y vectores libres.
- Espacios vectoriales reales.
- Combinación lineal de vectores. Base.
- Producto escalar.
- Producto vectorial.
- Producto mixto.

### Unidad 5: Puntos, rectas y planos en el espacio

- Sistema de referencia en el espacio afín.
- Rectas en el espacio.
- Planos en el espacio.
- Posiciones relativas de dos planos.
- Posiciones relativas de tres planos.
- Posiciones relativas de dos rectas.
- Posiciones relativas de una recta y un plano.
- Haces y radiaciones de rectas y planos.

### Unidad 6: Problemas métricos en el espacio

- Ángulo entre dos rectas.
- Ángulo entre dos planos.
- Ángulo entre recta y plano.
- Proyecciones ortogonales.
- Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.
- Distancia entre dos puntos.



- Distancia entre dos puntos.
- Distancia de un punto a una recta.
- Distancia de un punto a un plano.
- Distancia entre dos rectas.
- Distancia entre dos planos.
- Lugares geométricos en el espacio.

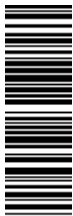
### BLOQUE III

#### Unidad 7: Límites y continuidad

- Función real de una variable real.
- Límite de una función en un punto.
- Límite de una función en el infinito.
- Cálculo de límites.
- Resolución de indeterminaciones.
- Límites de funciones trigonométricas.
- Continuidad de una función.
- Clasificación de discontinuidades.
- Operaciones con funciones continuas.
- Teoremas de continuidad.
- Asíntotas.

#### Unidad 8: Derivadas

- Derivada de una función.
- Derivada de una función en un punto.
- Tablas de derivadas.
- Interpretación geométrica.
- Recta tangente y perpendicular a una función en un punto.
- Teorema de Rolle.
- Teorema de Lagrange.



### **Unidad 9: Aplicaciones de la derivada**

- Puntos críticos y monotonía.
- Extremos relativos.
- Puntos de inflexión y curvatura.
- Regla de L'Hôpital.
- Problemas de optimización.

### **Unidad 10: Análisis y representación de funciones**

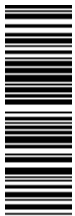
- Funciones polinómicas.
- Funciones racionales.
- Funciones radicales.
- Funciones a trozos.
- Funciones exponenciales.
- Funciones logarítmicas.
- Funciones trigonométricas.

### **Unidad 11: Integrales indefinidas**

- Función primitiva.
- Integrales inmediatas.
- Propiedades.
- Integrales de funciones que son derivadas de una función compuesta.
- Método de integración por sustitución.
- Método de integración por partes.
- Integración de funciones racionales.
- Integrales trigonométricas.

### **Unidad 12: Integrales definidas**

- Área bajo una curva.
- Concepto de integral definida.
- Propiedades.



- Teorema del valor medio del cálculo integral.
- La función integral y su derivada.
- Regla de Barrow.
- Área de una figura plana y longitud de un arco de curva.
- Volumen de un cuerpo de revolución.

#### BLOQUE IV

##### **Unidad 13: Probabilidad**

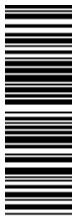
- Experimentos aleatorios. Espacio muestral.
- Operaciones con sucesos.
- Espacio de sucesos.
- Probabilidad. Regla de Laplace.
- Propiedades.
- Probabilidad condicionada.
- Sucesos dependientes e independientes.
- Teorema de la probabilidad total.
- Teorema de Bayes.

##### **Unidad 14: Distribuciones de probabilidad**

- Variables aleatorias.
- Distribuciones de probabilidad discretas.
- Distribución binomial.
- Distribuciones de probabilidad continuas.
- Distribución normal.
- Distribución normal tipificada.
- Aproximación de una distribución binomial por una normal.

##### 2.6. Temporalización

La temporalización de estos contenidos viene determinada por la estructura que tiene nuestro sistema educativo en tres evaluaciones. Aunque en principio pueda resultar razonable



temporalizar los contenidos teniendo en cuenta los bloques, me parece una decisión equivocada las murallas que se crean entre las diferentes áreas de conocimiento, aún más, cuando se trata del desarrollo de una misma materia. Creo que los alumnos deben tener la capacidad de descubrir o encontrar relaciones entre distintos temas y conceptos. Para ello es importante que nosotros, como docentes, colaboremos en este proceso no fomentando el estudio de la materia como parcelas independientes, sino como un conjunto de conocimientos que son compatibles y complementarios. Esta forma de entender la materia favorece que el alumno desarrolle un espíritu crítico a la hora de relacionar los diferentes contenidos.

Por este motivo realizaremos una temporalización atendiendo, no a los bloques, sino a que el temario impartido quede equilibrado en contenidos y en dificultad en las tres evaluaciones de las que consta el curso. No obstante, en la tercera evaluación impartiremos menos cantidad de contenidos y con menos grado de dificultad en su comprensión. Esto lo hacemos para poder realizar un repaso sistemático del curso completo para que el alumnado se pueda enfrentar a la EBAU con garantías de éxito.

Tomaremos como referencia el calendario escolar 2019/2020 para seguir la siguiente distribución:

EVALUACIONES	TEMARIO	TEMPORALIZACIÓN
Primer trimestre	UD. 1 – U.D. 4	16/09/2019 - 04/12/2019
Segundo trimestre	UD. 5 – U.D. 10	05/12/2019 - 17/03/2020
Tercer trimestre	UD. 11 – U.D. 14	18/03/2020 - 26/05/2020
Extraordinaria		25/06/2020



La temporalización de las unidades dentro de un marco más concreto serán las siguientes:

BLOQUE	UNIDAD DIDÁCTICA	SESIONES	
I	1. Matrices	7	1ª EVALUACIÓN
	2. Determinantes	7	
	3. Sistemas de ecuaciones	9	
II	4. Vectores en el espacio	5	2ª EVALUACIÓN
	5. Puntos, rectas y planos en el espacio	7	
	6. Problemas métricos en el espacio	8	
III	7. Límites y continuidad	7	3ª EVALUACIÓN
	8. Derivadas	7	
	9. Aplicaciones de la derivada	9	
	10. Análisis y representación de funciones	6	
	11. Integrales indefinidas	8	
IV	12. Integrales definidas	6	3ª EVALUACIÓN
	13. Probabilidad	5	
	14. Distribuciones de probabilidad	6	

### 2.7. Recursos

En cuanto a los recursos que utilizaremos serán de distintos tipos. Los alumnos dispondrán de textos que servirán de consulta, refuerzo y ampliación mediante un sistema de préstamo de los libros del departamento de matemáticas, además, los alumnos deberán comprar el libro recomendado por el departamento que expondremos a continuación.

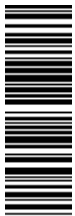
Los recursos informáticos tendrán un papel fundamental durante todo el curso, este material digital tendrá un doble objetivo: por un lado utilizaremos herramientas puestas a nuestra





disposición en el centro para comunicarnos de forma fluida con los alumnos y facilitarles el material necesario para realizar un seguimiento individualizado, por otra parte, daremos a conocer distintas aplicaciones informáticas específicas que el alumno puede utilizar para realizar un estudio de la materia de forma autónoma.

- **Libro de texto (MT 2 (MATEMATICAS TECNOLOGICAS) BACH AULA 3D; L. PANCORBO PALENZUELA, G. RUIZ BUENO; ED. VICENS VIVES; ISBN13 9788468235844).** A pesar de que el desarrollo teórico de la unidad se imparta en la pizarra digital los alumnos tendrán que realizar las actividades relacionadas con estos contenidos del libro de texto.
- **Pizarra digital (Smart Board).** Utilizaremos este soporte para el desarrollo de los contenidos aprovechando así el potencial gráfico que nos ofrece este recurso.
- **Aula virtual (Moodle).** Dado que el centro dispone de un aula virtual, lo utilizaremos para facilitar material de refuerzo y profundización al alumnado. También se facilitarán los exámenes realizados en el aula resueltos fomentando de esta manera la evaluación formativa descrita en la legislación vigente.
- **Aplicación Microsoft Teams.** En caso de supresión de las clases presenciales, esta aplicación supondrá una herramienta muy importante para poder realizar la enseñanza vía online durante un estado de alarma.
- **Calculadora científica.** Será fundamental el uso de esta herramienta puesto que en la prueba de EBAU su uso está permitido. En este sentido, enseñaremos al alumno a manejarla de forma adecuada.
- **Aplicaciones digitales (Wolfram Alpha, Derive, Geogebra, Wiris ...).** Usaremos diferentes aplicaciones en las que nos apoyaremos para realizar las explicaciones y algunas de ellas se las enseñaremos a usar a los alumnos para que su trabajo sea más eficiente.



## 2.8. Metodología

La metodología la podemos definir como el conjunto de normas y decisiones que se toman para organizar la acción didáctica. En cada metodología se define el papel que juega el profesor y el alumno, definiendo espacios y tiempos, utilizando unos recursos y diseñando unas actividades con unas características concretas.

Podemos decir que no hay metodologías mejores ni peores en términos absolutos, la decisión de la aplicación de una metodología específica en un curso tiene que guiarse por las peculiaridades concretas de ese curso. En este sentido, opino que la programación debe contemplar una serie de metodologías diferentes, que permitan al profesor dirigir el proceso de enseñanza de forma exitosa.

Dado el carácter propedéutico de esta materia estimo que es oportuno utilizar una metodología expositiva alternada con otras metodologías que den un rol más activo al alumno para favorecer la adquisición de los contenidos anteriormente descritos:

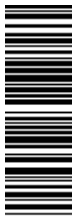
- **Metodología expositiva:** El profesor será un transmisor de la información dejando al alumno el papel de receptores de esta. Se llevarán a cabo clases magistrales en las que el alumno tendrá que tomar apuntes sobre los contenidos que hemos definido anteriormente para su posterior estudio.
- **Metodología deductiva:** Para desarrollar los contenidos iremos de lo general a lo particular, impartiendo contenidos teóricos que puedan utilizar los alumnos para posteriormente entender sus distintas aplicaciones. Esto no nos eximirá de aplicar una metodología inductiva en algún caso concreto en el que tengamos que resolver alguna duda de algún alumno sobre un contenido en particular.
- **Metodología colaborativa:** En aquellas sesiones que sean prácticas se aplicará una metodología colaborativa. El profesor o los alumnos podrán proponer ejercicios y para resolverlos se fomentará la participación de todos los alumnos, el profesor tendrá un papel de guía en el proceso de resolución explicando qué razonamientos son válidos y cuales no lo son. De esta forma, el docente fomentará la autonomía en el aprendizaje del alumno y el espíritu crítico.



Uno de los aspectos metodológicos fundamentales de la asignatura será la realización, por parte de los alumnos, de un cuaderno de actividades y apuntes, donde desarrollarán de forma ordenada y limpia las actividades escritas que se realicen a lo largo del curso, y tomarán nota de los apuntes necesarios que les indique el profesor. De este modo, se fomenta el desarrollo autónomo por parte de los alumnos de sus propios materiales de estudio, así como su organización y claridad.

En cuanto a las actividades que desarrollaremos a lo largo del curso las podemos clasificar como sigue:

- **Actividades iniciales:** Al comienzo de cada tema realizaremos unas actividades que nos servirán para cubrir dos objetivos, el primero será conocer el nivel inicial que tienen nuestros alumnos sobre los conocimientos previos necesarios para realizar un seguimiento adecuado de la unidad, el segundo objetivo será introducir el tema que vamos a impartir destacando la importancia que tiene en el ámbito de la ciencia.
- **Actividades de desarrollo:** Estas actividades servirán para explicar los contenidos teóricos impartidos, serán actividades con más dificultad a medida que vamos avanzando en la unidad didáctica.
- **Actividades de seguimiento:** Semanalmente recomendaremos a los alumnos la realización de una serie de actividades para que realices un seguimiento adecuado de la materia.
- **Actividades de refuerzo:** Para aquellos alumnos que presenten una especial dificultad en alguna parte del temario, desarrollaremos actividades que colgaremos en el aula virtual para que el alumno pueda solventar ese obstáculo mediante la práctica. Además, podremos atender dudas sobre estas actividades mediante videoconferencias en Teams o mediante intervenciones en foros.
- **Actividades de ampliación:** Facilitaremos algunos ejercicios de mayor dificultad para aquellos alumnos que tengan un interés especial en la materia.



## 2.9. Evaluación

Los instrumentos de evaluación que usaremos para llevar a cabo la evaluación de los alumnos serán los siguientes:

- **Examen escrito.** En cada trimestre realizaremos dos pruebas escritas. En cada una de esas pruebas se integrarán todos los contenidos impartidos desde el principio de la evaluación hasta la fecha de dicha prueba con el objetivo de llevar una buena preparación para la EBAU. La primera prueba escrita tendrá un peso del 40% mientras que la segunda prueba tendrá un peso del 60%.
- **Observación en la actitud del alumno.** Consideraremos el comportamiento de los alumnos y su iniciativa frente a las tareas y a la asignatura.

Realizaremos el primer examen al terminar la segunda unidad correspondiente en cada trimestre y el segundo examen al finalizar la última unidad.

Obtendremos la nota media del trimestre ponderando con un 95% la nota en la parte de Examen escrito y un 5% la Observación en la actitud del alumno.

La nota media total del curso la calculamos con la media de las notas de cada trimestre.

Si, en cualquier examen, el alumno es sorprendido utilizando métodos fraudulentos en la realización de este (copiar, hablar, ...), la calificación de ese examen será de 0 puntos.

### 2.9.1. Sistemas de recuperación

Para recuperar a los alumnos que pudieran ser calificados negativamente en alguna evaluación se realizará un nuevo examen.

Al final, la nota de esa evaluación se obtendrá teniendo en cuenta:

- La nota del examen de la recuperación.
- La nota de la evaluación suspensa.

En caso de que el alumno obtenga una calificación igual o superior a 5 en la prueba de recuperación, la *nota de la evaluación será el máximo entre 5 y la media ponderada de las dos notas*:

- Nota máxima entre el examen de recuperación y la de la evaluación: 70%.
- Nota mínima entre el examen de recuperación y la de la evaluación: 30%.



En caso de que el alumno obtenga una calificación inferior a 5 en la prueba de recuperación, la nota de la evaluación se obtendrá calculando la media ponderada (como lo indicado anteriormente 70% y 30%).

#### 2.9.2. Sistemas para subir nota

Los alumnos, que después de haber superado una evaluación deseen subir esta nota, podrán presentarse al examen de recuperación de la evaluación correspondiente. El alumno podrá decidir si entrega o no el examen.

En caso de que lo entregue, la nota de esa evaluación se obtendrá de la siguiente forma:

- Nota máxima entre el examen de recuperación y la de la evaluación: 70%
- Nota mínima entre el examen de recuperación y la de la evaluación: 30%

Importante: Se puede subir o bajar nota (incluso suspender).

En caso de que no lo entregue quedará la nota que tenía en la evaluación.

#### 2.9.3. Nota de junio

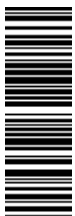
Si tiene aprobadas las tres evaluaciones, la nota de junio, se obtendrá hallando la media aritmética de las tres.

Si tiene suspensa sólo una evaluación y la nota de dicha evaluación es mayor o igual a 4, se calculará la media aritmética de las evaluaciones y si el resultado es mayor o igual a 5, esa será su nota de junio. En caso contrario, deberá hacer un examen correspondiente a dicha evaluación. De la misma forma, con la nota de esta última prueba, se volverá a hacer la media y esa será su nota de junio.

Si tiene suspensas 2 ó 3 evaluaciones, deberá presentarse al examen global de junio. Para aprobar la asignatura deberá obtener en dicho examen una calificación superior o igual a 5.

#### 2.9.4. Nota de la convocatoria extraordinaria

Para los alumnos que obtengan calificación negativa en la convocatoria de junio, se realizará otro examen. El examen será un único examen de toda la asignatura.



## 2.10. Atención a la diversidad

Desarrollamos los siguientes casos:

### Alumnos/as con déficit de atención e hiperactivo (TDAH):

En el centro disponen de un protocolo de actuación recogido dentro del Plan de Atención a la Diversidad del centro y elaborado por el departamento de Orientación para alumnos de esta tipología que se aplica en todas las materias, así se consigue que este alumno tenga un hábito de actuación coordinado. En este caso tendremos en consideración los siguientes puntos:

- Se le ubicará de forma preferente en la parte delantera del aula. Con objeto de evitar distracciones en la medida de lo posible.
- Utilizar claves o señales no verbales previamente acordadas con el alumno para redirigir su atención sin interrumpir el normal desarrollo de la clase.
- En el examen escrito tendrá 15 minutos más que el resto de sus compañeros.

### Alumnos/as repetidores:

En este caso tendremos en cuenta las siguientes medidas:

- Tener un control exhaustivo del absentismo.
- Prestar especial atención a la comunicación con el núcleo familiar ante cualquier dificultad que se nos pueda presentar.
- Se intentará que su ubicación sea en la parte frontal de la clase para facilitar la atención y absorción de los contenidos.
- Tener en cuenta los conocimientos previos adquiridos del curso anterior.

### Alumnos/as con altas capacidades matemáticas:

Frente a este caso tomamos las siguientes directrices:

- Facilitar actividades suplementarias para aumentar su capacidad.
- Recomendar o informar sobre planes complementarios en los que desarrollar su capacidad.
- Recomendar su presentación en la olimpiada matemática.

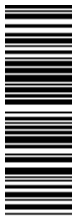


### 2.11. Plan de fomento a la lectura

Se prepararán bibliografías sobre matemáticos importantes relacionados con la unidad didáctica que se está impartiendo y abarcará una extensión de 2 folios aproximadamente por cada tema con el fin de fomentar la lectura.

En lo siguiente se exponen un ejemplo de listado de autores de los que se desarrollará una biografía con el fin de fomentar a la lectura. El listado está en correspondencia con el número de las unidades didácticas:

1. Emmy Noether (1882 – 1935).
2. Arthur Cayley (1821 - 1895).
3. Gauss (1777 – 1855).
4. Euclides (325 a.C. – 265 a.C.).
5. Hipatía de Alejandría (siglo III).
6. Diego de Álava y Viamont (siglo XVI).
7. Simon Lhuilier (1750 - 1840).
8. Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813).
9. Pierre de Fermat (1602 - 1665).
10. Leonhard Euler (1707 - 1783).
11. Isaac Newton (1643 - 1727).
12. Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).
13. Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827).
14. Blaise Pascal (1623 – 1662).



## 2.12. Actividades complementarias y extraescolares

Como actividad complementaria se realizarán clases por las tardes para preparar la Olimpiada Matemática aquellos alumnos que se presenten al concurso. Para preparar la Olimpiada Matemática se entregará material, previamente preparado por el departamento, de forma quincenal. Además, se fijará un recreo a la semana para atender dudas sobre ese material.

Como actividad extraescolar interdisciplinar con el departamento de Física y Química realizaremos una visita al Museo de Ciencia de Valladolid. Es importante que el alumno sea consciente de la importancia que tiene las matemáticas en el ámbito científico. En este museo se pueden realizar actividades para cubrir este objetivo de forma práctica.

## 2.13. Evaluación de la programación

La evaluación de la programación didáctica constituye uno de los factores más importantes para la mejora de los diferentes aspectos didácticos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos y nos permite plantear mejoras para los cursos venideros.

Por el artículo 21 de la ORDEN EDU/363/2015, de 4 de mayo, para evaluar nuestra programación didáctica deberemos tener en cuenta indicadores de logro que nos servirán para comprobar el funcionamiento de nuestra programación didáctica y valorar nuestra propia actuación como docentes. Estos indicadores no son más que una serie de cuestiones que nos servirán para reflexionar sobre los aspectos que hemos recogido en la programación.

Como instrumento de recogida de datos, emplearemos una rúbrica de autoevaluación, como la que se muestra a continuación, que tendrá como objetivo comprender la percepción de nuestros alumnos y nos facilitará cuantificar el grado de consecución de aspectos concretos.





## MATEMÁTICAS II

*Los valores numéricos en las respuestas serán negativos en valores bajos (1, por ejemplo) y muy positivos en valores altos (5, por ejemplo)*

		1	2	3	4	5
<b>MATERIAL</b>	1. ¿El material ha sido adecuado?	0	0	0	0	0
	2. ¿Crees que se ha dado un buen uso de él en la materia?	0	0	0	0	0
	3. ¿Qué te parece el material de apoyo proporcionado? (ejercicios, resúmenes, etc.)	0	0	0	0	0
<b>CONTENIDOS</b>	4. ¿Te han parecidos difíciles de asimilar?	0	0	0	0	0
	5. ¿Te parece correcto el orden en que se imparten las unidades?	0	0	0	0	0
<b>FOMENTO DE LA LECTURA</b>	6. ¿Crees que se ha fomentado la lectura en la materia?	0	0	0	0	0
	7. ¿Las lecturas han sido de tu agrado?	0	0	0	0	0
<b>EVALUACIÓN</b>	8. ¿Estás de acuerdo con el proceso de evaluación?	0	0	0	0	0
	9. ¿El nivel de los exámenes ha sido el adecuado?	0	0	0	0	0
<b>ANÁLISIS PERSONAL DEL ALUMNO</b>	10. ¿Crees que has trabajado lo suficiente?	0	0	0	0	0
	11. ¿Has estado atento en clase?	0	0	0	0	0
	12. ¿Estás contento con tu actitud en el aula?	0	0	0	0	0



	13. ¿Has comprendido bien las explicaciones?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	14. ¿El ritmo de la clase es adecuado?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	15. ¿El profesor atiende las dudas?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	16. ¿Los ejercicios de clase te han ayudado para preparar el examen?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
<b>AMBIENTE DEL AULA</b>	17. ¿El ambiente es adecuado para dar clase?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	18. ¿Te sientes a gusto para preguntar las dudas en clase?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

*En este apartado puedes dar tu opinión sobre aspectos que quieras comentar relativos a las respuestas que has dado en las anteriores preguntas. (Ejemplo: 17- Creo que el ambiente no es adecuado porque...)*

**Observaciones:**

<b>DA UNA PUNTUACIÓN GLOBAL DE LA MATERIA ENTRE 1 Y 10 PUNTOS</b>	
---	--





El apartado de *Observaciones* está incluido con el fin de recoger opiniones críticas constructivas y para poder profundizar en la respuesta del alumno.

Al final del curso, se recogerá toda la información y se tomarán las decisiones adecuadas dentro del departamento de Matemáticas con el fin de mejorar los aspectos necesarios para el curso académico siguiente.

#### 2.14. Conclusiones

La programación didáctica representa los objetivos alcanzados en muchos aspectos didácticos como la práctica docente o la coordinación interna del departamento de Matemáticas. Es el instrumento específico de planificación, desarrollo y evaluación de la materia y en esta se describen los distintos elementos del currículo para el desarrollo de la actividad docente de cada curso.

Es importante que el docente, así como la coordinación interna del departamento, trabajen dentro del contexto de este documento ya que su labor consiste en que los alumnos experimenten el mejor proceso de aprendizaje posible y que este vaya mejorando, proporcionando cierto feedback.





El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



## SECCIÓN 3

# UNIDADES DIDÁCTICAS





El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



### 3. Unidades didácticas

En el presente capítulo se desarrollarán dos unidades didácticas como parte del programa de aula. Las dos unidades pertenecen al bloque III de Análisis del 2º curso de bachillerato: las unidades 8 y 9, correspondientes al tema de *Derivadas y Aplicaciones de la derivada* respectivamente.

*NOTA: Dentro de las sesiones de cada unidad didáctica escribiremos en cursiva las indicaciones que se tienen en cuenta de cara al tribunal y a los alumnos para justificar el porqué de la forma en que se imparten los contenidos.*

*Cabe destacar que dentro de las sesiones emplearemos una metodología expositiva así como una metodología tanto deductiva como inductiva, adaptándose al contexto en el que nos encontremos.*

#### 3.1. Unidad 8: Derivadas

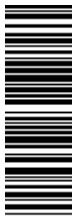
##### 3.1.1. Justificación teórica

Se pretende desarrollar la unidad didáctica correspondiente al tema de las aplicaciones de las derivadas incluido dentro del bloque III de Análisis del 2º curso de bachillerato.

La legislación en la que nos basamos es la ORDEN EDU/363/2015, del 4 de mayo, que establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Para tener en cuenta los conocimientos que los alumnos han adquirido previamente en este bloque y contextualizar mejor nuestra unidad didáctica, expondremos los contenidos que se imparten en el bloque III de 2º bachillerato:

- III.1. Límites y continuidad.
- **III.2. Derivadas.** (Es la que desarrollamos aquí)
- III.3. Aplicaciones de la derivada.
- III.4. Análisis y representación de funciones.
- III.5. Integrales indefinidas.
- III.6. Integrales definidas.



El concepto de derivada se aplica en los casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación. Es por esta razón que es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología. La derivación constituye una de las operaciones de mayor importancia cuando tratamos de funciones reales de variable real, puesto que nos indica la tasa de variación de la función en un instante determinado o para un valor determinado de la variable independiente, si ésta no es el tiempo. Por tanto, la derivada de una función para un valor de la variable es la tasa de variación instantánea de dicha función y para el valor concreto de la variable. Además de saber calcular la derivada de una función en un punto, es conveniente ser capaz de determinar rápidamente la función derivada de cualquier función.

### *3.1.2. Contribuciones a las competencias básicas*

En este apartado explicamos de qué forma contribuimos a las competencias claves dentro de la unidad didáctica que desarrollamos. Lo explicamos una por una:

- **Competencia lingüística (CL):** El uso de la notación y lenguaje matemático, junto con la redacción adecuada de los ejercicios planteados justificando el procedimiento de resolución, contribuirán al desarrollo de la competencia lingüística del alumno.
- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CM):** En la materia de matemáticas será constante el uso del razonamiento abstracto y la aplicación de la lógica matemática. Además, el alumno observará distintas aplicaciones, aplicando el temario impartido, relacionadas con distintas ramas de la ciencia. El procesamiento de datos y la interpretación de estos será otra parte fundamental en la adquisición de esta competencia por el alumnado.
- **Competencias digitales (CD):** Enseñaremos a los alumnos a usar la aplicación Wolfram Alpha de uso libre disponible en internet para que comprueben sus resultados y ahorren tiempo de trabajo. Usaremos las plataformas virtuales de los recursos (Teams y/o Moodle) para compartir materiales complementarios de la unidad didáctica como actividades de refuerzo o de ampliación.
- **Competencias para aprender a aprender (AA):** Elaboraremos unas fichas de refuerzo y profundización para esta unidad didáctica. También prepararemos fichas de ejercicios



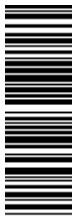


sacados de las pruebas de distintos años de la EBAU. Con estos materiales, con multitud de ejercicios y problemas, los alumnos podrán dirigir su estudio a mejorar, orientados en todo momento por el profesor. El objetivo será la mejora del proceso de aprendizaje y la preparación de los alumnos.

- **Competencias sociales y cívicas (CSC):** En todas las sesiones contribuiremos a la competencia social y cívica ya que el profesor se encargará de que los alumnos se respeten los turnos de palabra, la correcta participación dentro del aula y el respeto entre sus compañeros.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE):** Se favorecerá que la participación del alumno en el aula sea activa, fomentando el interés de los contenidos impartidos mediante aplicaciones prácticas. Se valorará especialmente que los alumnos resuelvan los problemas por distintos métodos y se les instará a analizar los resultados obtenidos. Dado que los alumnos tendrán a su disposición problemas de diferentes niveles, y referidos a distintos contenidos, podrán profundizar en el estudio personal realizando aquellos problemas que ellos escojan.
- **Conciencia y expresiones culturales (CEC):** Explicaremos las interpretaciones geométricas de los conceptos apoyándonos en un contexto del mundo real para que el alumno establezca así similitudes entre lo que estudia y ve en el día a día para que comprenda la utilidad que tiene las matemáticas en dar respuestas a problemas reales.

### *3.1.3. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje*

En la página siguiente expondremos cómo se relacionan los criterios de evaluación con los estándares de aprendizaje, así como su contribución a las competencias básicas. Esta tabla será de utilidad para realizar una reflexión sobre los conocimientos que deben tener nuestros alumnos para contribuir en las competencias. Las actividades que realizaremos irán dirigidas a que el alumno pueda superar con éxito los estándares de aprendizaje referidos a esta unidad.



CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	COMPETENCIAS
1. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto.	1.1. Aplica el concepto de derivada para calcular el valor de la derivada de una función en un punto.	<b>CM CL AA SIEE CSC</b>
	1.2. Estudia correctamente la derivabilidad de una función definida a trozos.	<b>CM CL AA SIEE CSC</b>
	1.3. Estudia correctamente la derivabilidad de una función con valores absolutos.	<b>CM CL AA SIEE CSC</b>
2. Aplicar el concepto de derivada en una función.	2.1. Aplica el concepto de derivada para calcular la derivada de una función.	<b>CM CL AA CEC SIEE CSC</b>
	2.2. Aplica el concepto de derivada para calcular la deriva de una función implícita.	<b>CM CL AA SIEE CSC</b>
	2.3. Aplica el concepto de derivada para calcular la derivada de una función potencial-exponencial.	<b>CM CL AA SIEE CSC</b>
3. Interpretar geoméricamente el concepto de derivada de una función en un punto.	3.1. Calcula la recta tangente de una función en un punto.	<b>CM CL AA CEC SIEE CSC</b>



	3.2. Calcula la recta perpendicular de una función en un punto.	<b>CM CL AA SIEE CSC</b>
4. Realizar demostraciones sencillas relativas a contenidos algebraicos, geométricos y funcionales mediante el uso de teoremas relacionados con la derivada.	4.1. Utiliza adecuadamente el teorema de Rolle para estudiar el número de soluciones de una ecuación.	<b>CM CL AA SIEE CSC</b>
	4.2. Utiliza de forma correcta el teorema de Lagrange o del Valor Medio para buscar el punto de una función donde su tangente es paralela a otra recta dada.	<b>CM CL AA SIEE CSC</b>
5. Uso habitual de las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje.	5.1. Utiliza adecuadamente la aplicación Wolfram Alpha para resolver y comprobar derivadas.	<b>CM CD CL SIEE</b>
6. Expresar verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema.	6.1. Utiliza el lenguaje matemático de forma correcta en el proceso de resolución de un problema.	<b>CM CL AA SIEE CEC</b> <b>CSC</b>
	6.2. Aplica los contenidos teóricos adecuados para resolver un problema.	<b>CM CL AA SIEE CEC</b> <b>CSC</b>



### 3.1.4. Objetivos

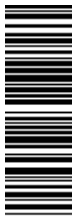
Este apartado está respaldado por el artículo 33 de la Ley Orgánica de educación 2/2006 del 3 de mayo. Se dará a conocer los objetivos específicos que se pretenden alcanzar en el desarrollo y la superación con éxito, por parte de los alumnos, de la unidad didáctica. Por esta razón no se incluyen los objetivos transversales a todo el curso.

1. Incentivar el uso del lenguaje matemático por parte de los alumnos.
2. Fomentar la autonomía personal del alumno.
3. Desarrollar la capacidad de trabajo en equipo.
4. Entender el concepto de función derivada en un punto.
5. Profundizar en el concepto de derivada y derivada lateral.
6. Saber distinguir en qué puntos una función es derivable y en qué puntos no admite derivada.
7. Familiarizarse con el cálculo de derivadas con la derivación múltiple y con la derivación implícita.
8. Comprender los teoremas de Rolle y Lagrange
9. Entender el concepto geométrico de la derivada y su aplicación para calcular las rectas tangentes y normal de una función en un punto.

### 3.1.5. Temporalización

En esta unidad se introduce el concepto de derivada de una función, se desarrollan las técnicas de cálculo de derivadas y el estudio de derivabilidad de una función. Dividimos esta unidad en un total de 7 sesiones.

Sesión 1	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Función derivada e interpretación geométrica.</li><li>○ Recta tangente a una función en un punto.</li><li>○ Recta normal a una función en un punto.</li></ul>
Sesión 2	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Repaso de derivadas</li></ul>
Sesión 3	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Derivada de una función en un punto</li><li>○ Derivadas laterales.</li></ul>



Sesión 4	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Continuidad y derivabilidad (I)</li><li>○ Continuidad y derivabilidad (II)</li></ul>
Sesión 5	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Teorema de Rolle.</li><li>○ Teorema de Lagrange</li></ul>
Sesión 6	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Derivada de una función potencial-exponencial.</li></ul>
Sesión 7	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Derivada de una función implícita.</li></ul>

### 3.1.6. Contenidos

Se intercalará la explicación de los contenidos con las actividades y ejemplos que se realicen en el aula con el fin de conseguir un mejor proceso de aprendizaje y comprensión del contenido.

#### Sesión 1

*Dada una función  $y = f(x)$  podemos calcular su derivada en los puntos de su dominio en los que es derivable, obteniendo como resultado un número real. Tiene sentido, por tanto, considerar una nueva función que llamaremos función derivada.*

La **función derivada** de una función  $f$ , que denotamos por  $f'$ , es la función que a cada valor de  $x$  del dominio de  $f$  en que  $f$  es derivable le asigna el valor de la derivada de  $f$  en ese punto:

$$x \rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

*La función derivada de  $f$  se simboliza también con  $Df$ ,  $y'$  o  $\frac{df}{dx}$ , y nos referimos a ella como la derivada de  $f$ . Para calcular la expresión analítica aplicamos la definición de derivada de una función en un punto de abscisa  $x$  cualquiera.*

*A continuación explicamos el concepto de la interpretación geométrica de la derivada a través de una metodología deductiva. Nos apoyaremos en una aplicación digital (como Geogebra o Wiris) para que los alumnos comprendan mejor la idea visual. La interpretación es importante y la abstracción será un aspecto que trabajaremos para su estudio.*



Una vez asimilado estos conceptos, nos disponemos a explicar el resto del contenido de la sesión siguiendo con el mismo tipo de metodología deduciendo así el siguiente resultado.

La pendiente  $m$  de la recta tangente a una función  $y = f(x)$  en el punto de abscisa  $x = a$  es igual a la derivada de la función en dicho punto. Es decir:

$$m = f'(a)$$

Recordaremos a los alumnos la ecuación punto-pendiente  $[y - y_0 = m(x - x_0)]$  de una recta para facilitar la comprensión de los conceptos de recta tangente y perpendicular de una función en un punto. Para facilitar la comprensión explicaremos el concepto apoyándonos, por ejemplo, en la función  $f(x) = x^2$  en el punto correspondiente a la abscisa  $x = -2$ .

La ecuación de la recta tangente a  $y = f(x)$  en el punto  $A = (a, f(a))$  es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Para comprender la ecuación de la recta perpendicular o normal explicaremos que a través de una metodología deductiva que tan solo tienen que fijarse en que la pendiente es la que define el vector director de la recta tangente. Así establecemos conexión con el contenido de Geometría. Por tanto, solo tendremos que tomar el valor  $m' = \frac{-1}{m}$  como pendiente de la recta normal.

La ecuación de la recta normal a  $y = f(x)$  en el punto  $A = (a, f(a))$  es:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)} \cdot (x - a)$$

Como actividades de desarrollo para realizar en el aula podemos hacer:

**Ejercicio:** Halla, en cada caso, la ecuación de la recta tangente y la recta normal en el punto que se indica:

- $f(x) = 2x^3 - 6x$ , en  $x = 3$ .
- $f(x) = \ln(x^2 - 4x)$ , en  $(5, \ln 5)$ .

**Ejercicio:** Calcula los puntos de la curva  $y = x^2$ , donde la recta tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

**Ejercicio:** ¿En qué puntos es igual a 5 la pendiente de la recta tangente a  $f(x) = x^5$ ?



Con este tipo de ejercicio pretendemos que el alumno siga los mismos razonamientos que hemos empleado en la impartición de los contenidos apoyándonos en la metodología deductiva empleada.

Como actividades de seguimiento pueden hacer los ejercicios 63 – 66 de la página 52.

Además, con estas actividades iniciales pretendemos comprobar el nivel de los alumnos e introducir la idea de que estos conceptos ayudan a uno para saber el aspecto que tiene una función.

Si los alumnos tienen dificultades con el tema del cálculo de derivadas de funciones (y la composición de funciones), les ofreceremos que la siguiente sesión sea dedicada a recordar estos contenidos que estudiaron ya en el curso de 1º de bachillerato del año pasado.

## Sesión 2

En caso de que los alumnos digan en la sesión anterior que en esta sesión quieren repasar las derivadas de las funciones polinómicas, exponenciales, trigonométricas, ... lo que haremos será prepararles una tabla como la del **Anexo II** y una serie de actividades de refuerzo para practicar durante esta sesión en la que emplearemos una metodología colaborativa para que los alumnos consigan consolidar mejor los contenidos del curso anterior y así contribuir entre ellos a desarrollar la competencia CSC.

**Ejercicio:** Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

b)  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

c)  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

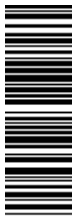
d)  $f(x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

e)  $f(x) = \sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}}$

f)  $f(x) = \ln \sqrt{e^{\tan x}}$

g)  $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h)  $f(x) = \ln(\sin x \cdot \cos x)^2$



- i)  $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + x$       j)  $f(x) = \sin \sqrt{x+1} \cdot \cos \sqrt{x-1}$
- k)  $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$       l)  $f(x) = \sin(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$
- m)  $f(x) = \sqrt{\sin x + x^2 + 1}$       n)  $f(x) = \cos^2(\sqrt[3]{x + (3-x)^2})$

*En caso contrario, omitiremos los contenidos de esta sesión y continuaremos con el desarrollo de los contenidos.*

### Sesión 3

*Empezaremos con el orden marcado en la sesión, para que los alumnos entiendan el estudio de la derivabilidad de una función.*

Sea una función  $y = f(x)$  definida en un entorno del punto  $a$ .

Se denomina **derivada de la función**  $f$  en  $x = a$ , y se simboliza con  $f'(a)$ , al siguiente límite, si existe y es finito:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se dice que una función es **derivable** en un punto de abscisa  $a$  cuando existe la derivada  $f'(a)$ .

*Explicar las derivadas laterales será sencillo, puesto que la derivada de una función  $y = f(x)$  en un punto de abscisa  $a$  se define como un límite, luego tiene sentido considerar los límites laterales en ese punto.*

Llamamos **derivada por la izquierda** de la función  $f$  en  $x = a$ , y se simboliza con  $f'(a^-)$ , al siguiente límite, si existe y es finito:

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Llamamos **derivada por la derecha** de la función  $f$  en  $x = a$ , y se simboliza con  $f'(a^+)$ , al siguiente límite, si existe y es finito:





$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Las derivadas por la izquierda y por la derecha reciben el nombre de **derivadas laterales**.

Una función es **derivable en un punto** de abscisa  $a$  si y sólo si las derivadas laterales existen y son iguales:

$$f \text{ es derivable en } x = a \iff f'(a^-) = f'(a^+)$$

Se dice que la función  $f$  es **derivable en un intervalo**  $[a, b]$  cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

- Existe  $f'(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ .
- Existen las dos derivadas laterales  $f'(a^+)$  y  $f'(b^-)$ .

*Comprendido y explicado todo lo anterior, los alumnos son capaces de poder deducir el siguiente resultado.*

Si una función  $f$  es derivable en  $x = a$ , entonces es continua en  $a$ .

*Con todo esto pasaremos a estudiar la derivabilidad de algunas funciones que haremos como ejemplos y actividades de desarrollo. Prepararemos un listado con diferentes ejercicios y niveles como el que mostramos a continuación*

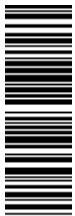
### Ejercicios:

1. Calcula  $m$  para que la siguiente función sea continua en  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+mx)}{\operatorname{sen}(2x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Calcula  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea continua en  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{\operatorname{sen}(x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



3. Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x = 0 \\ \frac{2x \cdot (x-3)}{3x^2 - 9x} & \text{Si } 0 < x < 3 \\ 2/3 & \text{Si } x = 3 \end{cases}$$

4. Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos(x) + 2x & \text{si } x \leq 0 \\ a^2 \cdot \ln(x+1) + \frac{b}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

5. Calcula k para que la siguiente función sea derivable:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = |x| + |x - 2|$$

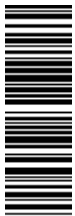
7. Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2|$$

8. Estudia la derivabilidad de la función  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2} - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcular la función derivada.



#### Sesión 4

En esta sesión continuaremos realizando las actividades de desarrollo de derivabilidad de la ficha de la sesión anterior. Aquí emplearemos una metodología colaborativa.

Resolveremos otros tipos de ejercicios como los siguientes que contribuyen a que los alumnos desarrollen las competencias básicas:

**Ejercicio:** Entre dos postes separados 12 m hay una cuerda que tiene la forma de la función

$$f(x) = 7 \left( e^{\frac{x}{15}} + e^{-\frac{x}{15}} \right).$$
 Calcula la pendiente de la curva en el poste de la derecha.

**Ejercicio:** ¿Con que velocidad crece el nivel de agua de un depósito con forma de cono de radio  $r$  si se llena a razón de  $30 \text{ cm}^3$  por segundo?

#### Sesión 5

En esta sesión nos dedicaremos a explicar dos resultados importantes: el teorema de Rolle y el teorema de Lagrange.

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ .

Si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe al menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

Explicaremos a los alumnos la idea geométrica de la demostración.

Geoméricamente, el teorema expresa que en todo arco de una curva continua y sin puntos angulosos que toman el mismo valor en los extremos, existe al menos un punto donde la recta tangente es horizontal.

Como ejemplo, comprobemos que la función  $f = x^5 - 5x + 6$  cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[1,4]$  y hallamos un punto donde se cumple la tesis del teorema.

Como actividades de desarrollo en el aula podemos hacer los siguientes ejercicios:

**Ejercicio:** Comprueba que las siguientes funciones cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos que indicados. En caso afirmativo, halla un valor  $c$  que verifique la conclusión del teorema:



a)  $f(x) = x - x^3$ , en  $[-1, 0]$ .

b)  $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2+1}$ , en  $[0, 3]$ .

c)  $f(x) = |x^2 - 4|$ , en  $[-2, 2]$ .

d)  $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ , en  $[-1, 1]$ .

Procuramos que el nivel de los apartados vaya aumentando para conseguir una mayor consolidación.

A posteriori nos disponemos a explicar el teorema de Lagrange

Si la función  $f$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existe al menos un punto  $c \in$

$(a, b)$ , tal que  $f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

Explicaremos las consecuencias del teorema del valor medio deduciendo las siguientes consecuencias:

- Caracterización de funciones constantes.
- Caracterización de funciones crecientes y decrecientes.
- Diferencia de dos funciones con igual derivada.

Como actividades de desarrollo y a modo de ejemplo podemos hacer los siguientes ejercicios:

**Ejercicio:** Halla un punto de la parábola  $f(x) = (x - 1)^2$ , donde la recta tangente sea paralela a la cuerda que une los puntos  $(2, 1)$  y  $(4, 9)$  de su gráfica.

**Ejercicio:** Considere la función  $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1)$ . Halla  $c \in (3, 6)$  para el que se verifica el teorema del valor medio.

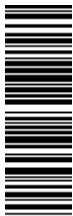
Como actividades de seguimiento pueden realizar las actividades 51 – 54 de la página 90.

## Sesión 6

Una **función implícita** es la que está definida en la forma  $F(x, y) = 0$ , en lugar de la forma acostumbrada  $y = f(x)$ .

Por ejemplo, una función en forma implícita es  $x^2 + y^2 = 4$  (circunferencia de radio igual a

4). Podemos tomar este ejemplo para explicar cómo derivamos las funciones implícitas.



Las funciones se expresan en forma implícita por comodidad o por la imposibilidad de despejar la variable dependiente  $y$ .

Se pueden derivar ambos miembros de la ecuación de una función implícita, sin más que tener en cuenta que la variable  $y$  es función de  $x$  y aplicar la regla de la cadena.

El método para hallar la derivada de una función implícita se denomina **derivación implícita**.

Realizaremos diferentes ejercicios a modo de actividades de desarrollo con diferente nivel de dificultad que iremos aumentando.

**Ejercicio:** Calcular la derivada de:

a)  $x^2 + y^2 = 4$ .

b)  $3x^2 + 2y = 2xy + 4$ .

c)  $\text{sen}(x + y) + y = 0$ .

d)  $y + \cos(xy) = 0$ .

e)  $y = \text{tg}(xy)$ .

Dejamos el ejercicio 61 de las actividades finales del libro de texto como actividad de seguimiento.

### Sesión 7

Una **función potencial-exponencial** es la que presenta la variable  $x$  en la base y en el exponente de una potencia. Es decir,  $y = f(x)^{g(x)}$ .

*Esta función no se puede derivar con la regla de la función potencial ni con la regla de la función exponencial, pues no es de ninguno de estos dos tipos.*

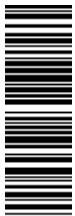
Para hallar su derivada debemos utilizar el método conocido como **derivación logarítmica**.

Para ello seguiremos los siguientes pasos:

1. Tomamos logaritmos en ambos miembros de  $y = f(x)^{g(x)}$ .

2. Derivamos miembro a miembro en la última igualdad y despejamos  $y'$ :

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \rightarrow y' = y \left[ g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$



3. Sustituimos  $y$  por  $f(x)^{g(x)}$ :

$$y' = f(x)^{g(x)} [g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}]$$

Realizaremos los siguientes ejercicios como actividades de desarrollo:

**Ejercicio:** Halla la derivada de las siguientes funciones:

- $f(x) = x^x$
- $f(x) = x^{\cos x}$
- $f(x) = (tg x)^{\sen x}$

**Ejercicio:** Deduce la fórmula, utilizando la derivación logarítmica, de la derivada de  $f(x)^{f(x)}$ .

Para realizar un seguimiento, los alumnos pueden realizar la actividad final 62 del libro de texto.

## 3.2. Unidad 9: Aplicaciones de la derivada

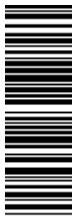
### 3.2.1. Justificación teórica

Se pretende desarrollar la unidad didáctica correspondiente al tema de las aplicaciones de las derivadas incluido dentro del bloque III de Análisis del 2º curso de bachillerato.

La legislación en la que nos basamos es la ORDEN EDU/363/2015, del 4 de mayo, que establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo del bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

Para tener en cuenta los conocimientos que los alumnos han adquirido previamente en este bloque y contextualizar mejor nuestra unidad didáctica, expondremos los contenidos que se imparten en el bloque III de 2º bachillerato:

- III.1. Límites y continuidad.
- III.2. Derivadas.
- **III.3. Aplicaciones de la derivada.** (Es la que desarrollamos aquí)
- III.4. Análisis y representación de funciones.
- III.5. Integrales indefinidas.



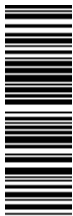
- III.6. Integrales definidas.

Las aplicaciones de las derivadas son múltiples en diversas áreas como en física, economía, ingeniería, etc. Las aplicaciones fundamentales que veremos en el tema serán las referidas a la optimización de funciones para dar respuesta a problemas de la vida cotidiana. Además, uno de nuestros objetivos es que los alumnos adquieran unos conocimientos teóricos con el fin de poder resolver problemas aplicando distintos teoremas tales como los teoremas de Rolle, Lagrange y L'Hôpital.

### 3.2.2. Contribuciones a las competencias básicas

En este apartado explicamos de qué forma contribuimos a las competencias claves dentro de la unidad didáctica que desarrollamos. Lo explicamos una por una:

- **Competencia lingüística (CL):** El uso de la notación y lenguaje matemático, junto con la redacción adecuada de los ejercicios planteados justificando el procedimiento de resolución, contribuirán al desarrollo de la competencia lingüística del alumno. El procesamiento de datos y la interpretación de estos en el bloque de estadística será otra parte fundamental en la adquisición de esta competencia por el alumnado.
- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CM):** En la materia de matemáticas será constante el uso del razonamiento abstracto y la aplicación de la lógica matemática. Además, el alumno observará distintas aplicaciones, aplicando el temario impartido, relacionadas con distintas ramas de la ciencia.
- **Competencias digitales (CD):** Enseñaremos a los alumnos a usar la aplicación Wolfram Alpha de uso libre disponible en internet para que comprueben sus resultados y ahorren tiempo de trabajo. Usaremos las plataformas virtuales de los recursos (Teams y Moodle) para compartir materiales complementarios de la unidad didáctica.
- **Competencias para aprender a aprender (AA):** Elaboraremos unas fichas de refuerzo y profundización para esta unidad didáctica. También prepararemos fichas de ejercicios sacados de las pruebas de distintos años de la EBAU. Con estos materiales, con multitud de ejercicios y problemas, los alumnos podrán dirigir su estudio a mejorar, orientados en

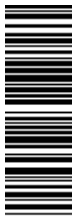


todo momento por el profesor. El objetivo será la mejora del proceso de aprendizaje y la preparación de los alumnos.

- **Competencias sociales y cívicas (CSC):** En todas las sesiones contribuiremos a la competencia social y cívica ya que el profesor se encargará de que los alumnos se respeten los turnos de palabra, la correcta participación dentro del aula y el respeto entre sus compañeros.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE):** Se favorecerá que la participación del alumno en el aula sea activa, fomentando el interés de los contenidos impartidos mediante aplicaciones prácticas. Se valorará especialmente que los alumnos resuelvan los problemas por distintos métodos y se les instará a analizar los resultados obtenidos. Dado que los alumnos tendrán a su disposición problemas de diferentes niveles y referidos a distintos contenidos podrán profundizar en el estudio personal realizando aquellos problemas que ellos escojan.
- **Conciencia y expresiones culturales (CEC):** Desarrollaremos actividades dentro de un contexto cultural (dentro de los problemas de optimización o de la monotonía y curvatura, por ejemplo) con el fin de que el alumno relacione los contenidos de la unidad con los problemas del mundo real. Mostraremos algunos ejemplos dentro de las sesiones del contenido de la unidad didáctica.

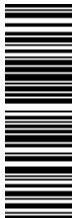
### *3.2.3. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje*

En la página siguiente expondremos cómo se relacionan los criterios de evaluación con los estándares de aprendizaje, así como su contribución a las competencias básicas. Esta tabla será de utilidad para realizar una reflexión sobre los conocimientos que deben tener nuestros alumnos para contribuir en las competencias. Las actividades que realizaremos irán dirigidas a que el alumno pueda superar con éxito los estándares de aprendizaje referidos a esta unidad.

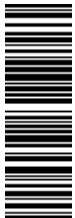




CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	COMPETENCIAS
1. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto.	1.1. Aplica el concepto de derivada para el cálculo de puntos críticos de una función.	CL CM AA SIEE CSC
	1.2. Aplica el concepto de derivada para el estudio de la monotonía de una función.	CL CM AA SIEE CSC
	1.3. Aplica el concepto de derivada para el estudio de los extremos relativos de una función.	CL CM AA SIEE CSC
	1.4. Aplica el concepto de derivada para el cálculo de puntos de inflexión de una función.	CL CM AA SIEE CSC
	1.5. Aplica el concepto de derivada para el estudio de la curvatura de una función.	CL CM AA SIEE CSC
2. Estudiar fenómenos naturales, sociales, geométricos o tecnológicos mediante el cálculo de la derivada de una función.	2.1. Plantea problemas de optimización relaciones con geometría.	CL CM AA SIEE CEC CSC
	2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales.	CL CM AA SIEE CEC CSC



	2.3. Resuelve problemas previamente planteados utilizando el concepto de derivada.	<b>CL CM AA SIEE CSC</b>
	2.4. Interpreta los resultados obtenidos al calcular la derivada de una función dentro de un contexto.	<b>CL CM AA SIEE CEC CSC</b>
3. Aplicar la derivada de una función para resolver límites.	3.1 Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones del tipo 0/0.	<b>CL CM AA SIEE CSC</b>
	3.2. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones del tipo $\infty/\infty$ .	<b>CL CM AA SIEE CSC</b>
4. Uso habitual de las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje.	4.1. Utiliza adecuadamente la aplicación Wolfram Alpha para comprobar derivadas.	<b>CM CD SIEE</b>
5. Expresar verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema.	5.1. Utiliza el lenguaje matemático de forma correcta en el proceso de resolución de un problema.	<b>CL CM AA SIEE CSC</b>
	5.2. Aplica los contenidos teóricos adecuados para resolver un problema.	<b>CL CM AA SIEE CSC</b>



### 3.2.4. *Objetivos*

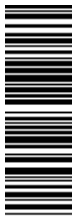
Este apartado está respaldado por el artículo 33 de la Ley Orgánica de Educación 2/2006, de 3 de mayo. Se dará a conocer los objetivos específicos que se pretenden alcanzar en el desarrollo y la superación con éxito, por parte de los alumnos, de la unidad didáctica. Por esta razón no se incluyen los objetivos transversales a todo el curso.

1. Tener buena expresión y fluidez.
2. Fomentar la autonomía personal del alumno.
3. Incentivar el trabajo en equipo.
4. Conocer las propiedades que permiten estudiar crecimientos, decrecimientos, máximos y mínimos relativos, etc., y saberlas aplicar a casos concretos.
5. Conocer las propiedades que permiten estudiar los puntos de inflexión y la curvatura, y saberlas aplicar a casos concretos
6. Determinar las estrategias necesarias para optimizar una función.
7. Conocer la regla de L'Hôpital y aplicarla al cálculo de límites.

### 3.2.5. *Temporalización*

Distribuiremos los contenidos de esta unidad en un total de 8 sesiones, la sesión 7 se ocupará con un examen y en la sesión 9 daremos unas indicaciones o esquema de la posible resolución del examen.

Sesión 1	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Puntos críticos</li><li>○ Monotonía.</li><li>○ Extremos relativos.</li></ul>
Sesión 2	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Puntos de inflexión.</li><li>○ Curvatura.</li></ul>
Sesión 3	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Problemas de optimización (I).</li></ul>
Sesión 4	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Problemas de optimización (II).</li></ul>
Sesión 5	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Regla de L'Hôpital.</li></ul>
Sesión 6	<ul style="list-style-type: none"><li>○ Repaso y consolidación de contenidos</li></ul>



Sesión 7

○ Examen.

Sesión 8

○ Resolución del examen.

### 3.2.6. Contenidos

Se intercalará la explicación de los contenidos con las actividades y ejemplos que se realicen en el aula con el fin de conseguir un mejor proceso de aprendizaje y comprensión del contenido.

#### Sesión 1

---

*Comenzaremos recordando la interpretación geométrica de la derivada ya que esta idea ayudará en las explicaciones teóricas y para comprender los contenidos de esta unidad.*

*¿Según qué varía la pendiente de la recta tangente que trazamos en una función en un punto?*

*La respuesta se encuentra en la monotonía, es decir, cuando crece y decrece la función.*

*Podemos, si así lo preparamos con anterioridad, apoyarnos en una aplicación virtual (como Geogebra o Wiris) con la que generaremos una idea visual de lo que queremos que comprendan y en la que apoyar nuestras explicaciones.*

*Una vez comprendida la idea, comenzaremos con las explicaciones teóricas.*

Una función  $f$  es **creciente** (**decreciente**, respectivamente) en un intervalo  $(a, b)$  si para cualquier par de puntos  $x_1$  y  $x_2$  de  $(a, b)$  se cumple que si  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) \geq f(x_2)$ , respectivamente).

*Volviendo con las explicaciones y consolidando la idea anterior, los alumnos tendrán un criterio para saber si nuestra función es creciente o decreciente.*

Si  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ , respectivamente), para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es creciente (decreciente, respectivamente) en  $(a, b)$ .

*Pero en algunos puntos la pendiente de la recta es nula como podrán comprobar en algún ejemplo sencillo como en la función  $f(x) = x^2$ . Esto lo haremos a través de una metodología deductiva.*



Si  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , los puntos de ese intervalo en los que  $f$  no es creciente ni decreciente se denominan **puntos críticos**. En los puntos críticos,  $c$ , se cumple que  $f'(c) = 0$ .

*Por último les mostraremos el concepto máximo y mínimo relativo para poder calcular los extremos relativos de una función.*

Una función  $f$  tiene un **máximo relativo** (**mínimo relativo**, respectivamente) en un punto  $a$  si existe un entorno  $(a - r, a + r)$  tal que si  $x \in (a - r, a + r)$ , entonces  $f(x) \leq f(a)$  ( $f(x) \geq f(a)$ , respectivamente).

Una condición necesaria para la existencia de un extremo relativo es si la función  $f$  es derivable en  $a$  y tiene un extremo relativo en este punto, entonces  $f'(a) = 0$ , es decir,  $a$  es un punto crítico.

Para calcular los extremos relativos usaremos el criterio de la derivada 2ª.

Sea una función  $f$  derivable en  $a$ , tal que  $f'(a) = 0$ , entonces si  $f''(a) < 0$  ( $f''(a) > 0$ , respectivamente), el punto  $(a, f(a))$  es un máximo relativo (mínimo relativo, respectivamente)

*Una vez comprendido todos los conceptos anteriores así como su correcta interpretación haremos un ejemplo práctico en el que expondremos los contenidos anteriormente explicados de forma pautada para mejorar su comprensión.*

Unas pautas que podemos seguir para poder estudiar la monotonía y los extremos relativos de una función pueden ser los siguientes:

1. Calculamos  $f'$ .
2. Resolvemos la ecuación  $f'(x) = 0$ . Los extremos relativos se encuentran entre las soluciones de la ecuación, y separan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
3. Construimos una tabla para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Por ser la función continua, si en un punto pasa de ser creciente a ser decreciente, tiene un máximo relativo en ese punto. Por el contrario, si la función pasa de ser decreciente a ser creciente, tiene un mínimo relativo en ese punto.

*Según vayamos desarrollando la teoría iremos apoyándonos en ejemplos sencillos al principio para que los alumnos comprendan bien los contenidos y poco a poco iremos introduciendo*



*ejemplos no triviales con mayor nivel cognitivo que tendrán que comprender y realizar como trabajo.*

Las actividades iniciales para realizar en el aula serán las siguientes.

**Ejercicio:** Estudiar la monotonía y, si existen, los extremos relativos de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = -x^3 + 4x$

b)  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$

c)  $f(x) = \ln(1 + x^2)$

d)  $f(x) = \text{sen } 2x$

**Ejercicio:** El beneficio obtenido por una empresa depende del capital  $p$  invertido en la empresa a través de la expresión  $B(p) = -p^2 + 6p - 5$ . ¿Para qué valor de  $p$  la empresa obtiene beneficios máximos? ¿Para qué valores de  $p$  la empresa obtiene beneficios positivos?

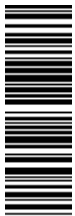
**Ejercicio:** La curva de Gompertz, nombre que toma del matemático Benjamin Gompertz (1779 – 1865), sirve para prever cuál será el comportamiento de una epidemia como la del CoVid-19 del año 2020. La expresión de la curva es:

$$f(t) = ae^{-be^{-ct}}$$

Estudia su monotonía y extremos relativos. ¿Qué interpretación tiene este estudio?

*Resolveremos el primer ejercicio con una metodología expositiva y los siguientes mediante una metodología deductiva desarrollando a la vez la competencia CEC.*

*Los apartados del primer ejercicio están puestos en un orden de menor a mayor de complicación ya que la regla de derivación se va complicando y en el último apartado los alumnos deben darse cuenta de que la solución a las ecuaciones  $f'(x) = 0$  y  $f''(x) = 0$  no son únicas.*



*Debido a la extensión teórica de la sesión no creo que tengamos tiempo de realizar todas las actividades por completo por lo que propondremos a los alumnos actividades complementarias de seguimiento para que puedan trabajar con autonomía y responsabilidad a mayores de las del aula.*

Como actividades para casa deberán realizar la actividad del aula y como indicación podrán realizar las actividades 38 – 41 de la página 89 del libro de texto.

## Sesión 2

*Empezaremos escribiendo un recuadro a un lado de la pizarra para recordar los conceptos claves que vimos en la sesión anterior a modo de calentamiento y con el objetivo de generar una formación continua conectando las sesiones.*

*A continuación, explicaremos los conceptos de concavidad y convexidad de una función en un intervalo y daremos una manera de calcular los intervalos de concavidad y convexidad.*

Sea  $f$  una función derivable en un intervalo  $(a, b)$ . Se verifica que si  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ , respectivamente) en todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es cóncava (convexa, respectivamente) en  $(a, b)$ .

*Al igual que los puntos críticos, explicaremos los puntos de inflexión como un símil de estos ya que son los puntos que separan los intervalos donde la función es cóncava y convexa o viceversa.*

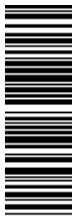
Llamamos **punto de inflexión** a todo punto de la gráfica de una función en el cual esta pasa de convexa a cóncava o viceversa.

Una condición necesaria para la existencia de un punto de inflexión es si la función  $f$  es derivable en  $a$  y tiene un punto de inflexión en este punto, entonces  $f''(a) = 0$ .

*Todo esto engloba el estudio de la curvatura de una función. En este caso, les daremos unas pautas muy similares a las que les dimos en la sesión anterior para estudiar la monotonía y los extremos relativos de una función. Salvo que reemplazaremos palabras.*

Unas posibles pautas que seguir para estudiar la curvatura de una función pueden ser:

1. Calculamos  $f''$ .



2. Resolvemos la ecuación  $f''(x) = 0$ . Los puntos de inflexión se encuentran entre las soluciones de la ecuación, y separan los intervalos donde la función es cóncava y convexa.
3. Construimos una tabla para calcular los intervalos donde la función es cóncava o convexa. Por ser la función continua, si en un punto pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa, tiene un punto de inflexión en ese punto.

*Una vez comprendida los conceptos teóricos de la sesión, utilizaremos el resto del tiempo del aula para realizar los ejercicios de la sesión anterior pero ahora estudiaremos su curvatura.*

Como trabajo de aula, realizaremos el estudio de la curvatura sobre las funciones que estudiamos anteriormente con el fin de proporcionar un esquema general de estas 2 sesiones.

Como seguimiento, los alumnos podrán realizar las actividades 42 – 44 de la página 89 del libro de texto.

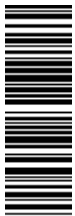
### *Sesión 3*

---

*En los problemas de optimización se trata de hallar el máximo o el mínimo de una función sujeta a ciertas condiciones impuestas por el enunciado. La interpretación del enunciado será importante para comprender que es lo que nos están pidiendo en el ejercicio.*

*Es importante hacerles pensar que es lo que les está pidiendo el problema. Les diremos que cuando uno intenta resolver un problema es lo mismo que intentar resolver un laberinto. Uno siempre empieza por el INICIO y trata de llegar al FINAL, aunque en ciertos casos es muy difícil. Pero lo cierto es que si uno empieza por el FINAL y trata de llegar al INICIO todo se vuelve más sencillo y el camino que soluciona el problema se vuelve más claro. Pues la lógica es la misma en los problemas. De esta manera, empleamos una metodología deductiva que haga que nuestros alumnos enfrente los problemas de forma general desde otra perspectiva.*

*Ocurre a veces que a muchos alumnos les cuestan más acostumbrarse a nuevas formas de pensar y para ello, con el fin de ayudarles, podemos darles ciertas pautas a seguir respecto a este tipo de problemas en concreto.*





En general, para resolver un problema de optimización seguimos los siguientes pasos:

1. Determinar la magnitud variable que debe ser máxima o mínima y expresarla en forma de función.
2. Establecer a partir del enunciado del problema las condiciones que deben cumplirse.
3. Utilizar las condiciones establecidas en el apartado anterior para expresar la función respecto de una sola variable.
4. Hallar la función derivada y resolver la ecuación que se obtiene al igualar a cero. A continuación, comprobar que para el valor encontrado se obtiene buscando.

*Esta parte suele costarles mucho a los alumnos según va incrementando la dificultad del ejercicio ya que el nivel de abstracción de los ejercicios no es igual. Siguiendo nuestra metodología, empezaremos con examinar lo que nos está pidiendo el ejercicio, pensaremos en los datos que nos dan y finalmente pensaremos de que modo podemos llegar a lo que nos están pidiendo.*

*Ocurre muchas veces que los alumnos sufren ansiedad frente a los problemas y posiblemente se deba al enfoque que se da para afrontarlos en las aulas. Con lo expuesto anteriormente, nuestro objetivo será que el alumno piense de un modo distinto y que vea la utilidad de ello.*

Una serie de actividades de desarrollo que podemos realizar en el aula son las siguientes:

**Ejercicio:** Halla los lados de un rectángulo de perímetro máximo inscrito en una semicircunferencia de 10 m de radio.

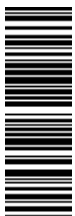
**Ejercicio:** Halla el radio y la altura de una lata de conservas con forma de cilindro circular recto de 400 cm<sup>3</sup> de volumen para que se cumpla que la superficie total del bote sea mínima.

**Ejercicio:** Hallas dos números x e y sabiendo que suman 100 y con la condición de que la suma de sus cuadrados sea mínima.

**Ejercicio:** El consumo de combustible, en litros, de un barco que navega a una velocidad de x nudos (millas/hora) viene determinado por la siguiente expresión:

$$C(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{450}{x}$$

Calcula la velocidad no nula más económica y el consumo mínimo a dicha velocidad.



**Ejercicio:** Quiero construir un espacio de juego en forma de sector circular de radio  $r$  y ángulo central  $\alpha$  en el jardín de mi casa. ¿Qué valores debo dar a  $r$  y  $\alpha$  para que el perímetro sea mínimo?

A modo de seguimiento, los alumnos pueden realizar algunos de los ejercicios 45 – 50 de la página 89 – 90 del libro de texto.

#### Sesión 4

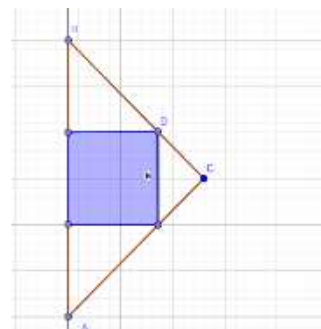
En esta sesión resolveremos las dudas que tengan con los problemas de optimización mediante una metodología colaborativa en la que los propios alumnos serán los que resuelvan las dudas de sus compañeros. Con ello buscamos que los alumnos consoliden sus conocimientos y contribuyan a desarrollar la competencia CSC y CEC. Realizaremos los ejercicios donde encontremos una dificultad general y daremos indicaciones cuando sea de dificultad reducida a modo de fomentar el trabajo por parte del alumno.

El profesor empleará una metodología colaborativa y preparará algunos ejercicios de alto nivel cognitivo con el objetivo de trabajar de forma ardua esta parte del temario. Así, los ejercicios de la EBAU resultarán ser más sencillos.

Como trabajo para casa, les seleccionaremos ejercicios más sencillos de los preparados pero que estén al nivel de la EBAU. De esta manera se encontrarán con menos dificultades en casa y su trabajo será más productivo.

**Ejercicio:** Formamos un triángulo uniendo los extremos de las manecillas de un reloj que miden 8 y 6 cm. Calcula:

- La función que expresa el área de dicho triángulo en función del ángulo formado por las manecillas.
- ¿Cuál es el área máxima?



**Ejercicio:** En un triángulo isósceles de la figura el lado menor mide 10 cm y la altura del triángulo es de 20 cm.



- Dado un rectángulo inscrito cuya base mide  $a$ , calcula las coordenadas del punto  $D$  en función de  $a$ .
- Halla el valor de  $a$  que maximiza el área del rectángulo.

**Ejercicio:** Un almacén tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de  $768 \text{ cm}^3$ . Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales es de 100 unidades por  $m^2$ , mientras que a través del techo es de 300 unidades por  $m^2$ . La pérdida por el suelo es muy pequeña y se puede considerar nula. Calcula las dimensiones del almacén para que la pérdida de calor total sea mínima.

**Ejercicio:** Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de modo que uno de ellos tenga longitud doble de otro y que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Halla la longitud de cada trozo.

**Ejercicio:** Encuentra razonadamente el punto de la curva de ecuación  $y = \frac{1}{x^2+1}$  en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y escribe la ecuación de dicha recta tangente.

### Sesión 5

*La regla o teorema de L'Hôpital permite resolver fácilmente muchos límites en los que aparecen indeterminaciones. Con esto tendrán una herramienta muy potente para resolver límites.*

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en un entorno reducido  $(a - r, a + r)$  del punto  $a$ . Si se cumplen las condiciones siguientes:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ .
- Existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Entonces, existe también  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  y se verifica:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .



Veremos cómo se aplica la regla de L'Hôpital para calcular límites indeterminados del tipo

$$\frac{0}{0}.$$

Como ejemplo, calcularemos  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .

En el ejemplo siguiente comprobarán que la regla de L'Hôpital se puede aplicar reiteradamente siempre que se cumplan las hipótesis.

Ahora realizaremos el cálculo de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ .

Explicaremos como generalizar la regla de L'Hôpital para aplicarla cuando  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ .

Algunos ejercicios que podemos realizar a modo de ejemplo son los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$ .

La regla de L'Hôpital también puede aplicarse a la resolución de indeterminaciones de los tipos  $0 \cdot \infty$  y  $\infty - \infty$  siempre que previamente transformemos las expresiones dadas para obtener las formas  $\frac{0}{0}$  y  $\frac{\infty}{\infty}$ . Realizaremos algunos ejemplos.

Así, para calcular  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$  siendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$  y  $a$  un número real,  $+\infty$  o  $-\infty$ , basta con expresar el producto  $f(x) \cdot g(x)$  en la forma  $\frac{f(x)}{1/g(x)}$  o bien  $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ .

De este modo transformaremos el límite a una de las indeterminaciones de la forma  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$ , en las que se puede aplicar la regla.

Apliquemos esto para calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x)$

También podemos aplicarla a la resolución de indeterminaciones de los tipos  $\infty^0$ ,  $0^0$  y  $1^\infty$ .

Pensemos si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , siendo  $a$  un número real,  $+\infty$  o  $-\infty$ . Para calcular  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ , que presenta la indeterminación  $0^0$ , podemos dar las siguientes pautas:

Para resolver este tipo de indeterminaciones podemos seguir hacer lo siguiente:

1. Llamamos  $y = f(x)^{g(x)}$ . Tomando logaritmos en ambos miembros de la igualdad anterior, obtenemos  $\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$ .



2. Calculamos  $\lim_{x \rightarrow a} \ln y$ , que presenta la indeterminación  $0 \cdot \infty$ .
3. Por la continuidad de la función logarítmica:  $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln(\lim_{x \rightarrow a} y)$ . Por tanto, si obtenemos  $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = k$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} y = e^k$ .

Los alumnos deben observar que  $k$  puede ser un número real,  $+\infty$  o  $-\infty$ .

- Si  $k = +\infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} y = e^{+\infty} = +\infty$ .
- Si  $k = -\infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} y = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$ .

En el resto de las indeterminaciones procedemos de forma similar.

Como ejemplo calcularemos  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ .

Como actividades para que los alumnos desarrollen en el aula deberán realizar los siguientes límites:

**Ejercicio:** Calcular los siguientes límites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos x)^{1/\cos x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$

Se ha procurado que los apartados se encuentren ordenados de menor a mayor grado cognitivo. De esta manera conseguiremos consolidar las pautas que hemos dado.

Los ejercicios de seguimiento que pueden ir realizando a modo de práctica son las actividades 55-56 de la página 90.

## Sesión 6

Preguntaremos a los alumnos las dudas que se les haya presentado respecto a los contenidos impartidos hasta ahora y se realizarán los ejercicios que muestren una dificultad grande para ellos. Los ejercicios que presenten una pequeña dificultad se les dará unas indicaciones para



*poder realizarlos. De esta manera también conseguiremos optimizar el uso del tiempo para poder atender la mayoría de las dudas en caso de no poder atender todas.*

*El profesor preparará una serie de ejercicios donde se recopilará los ejercicios en los que la dificultad de los alumnos sea mayor y más general, en el sentido de que les resulta difícil a la mayoría de los alumnos. Se empleará una metodología colaborativa en esta sesión. De esta manera, los alumnos podrán colaborar entre ellos para poder resolver las dificultades que se les presenta en los problemas dando un posible enfoque diferente y el profesor ayudará en su papel de guía durante el desarrollo de esta sesión. Contribuiremos así a que desarrollen la competencia.*

**Ejercicio:** Halla un punto de la gráfica  $y = x^2 + x + 5$  en el cual la recta tangente sea paralela a  $y = 3x + 8$ .

**Ejercicio:** Estudia el crecimiento de la función  $f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$  y determina los máximos y mínimos de la función para  $x \in [0, 2\pi]$ .

**Ejercicio:** De todos los rectángulos de área  $100 \text{ dm}^2$ , halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.

**Ejercicio:** Dentro de un triángulo limitado por los ejes  $OX$  y  $OY$  y la recta que pasa por  $(4, 0)$  y  $(0, 8)$ , se inscribe un rectángulo de vértices  $(a, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, b)$  y  $(a, b)$ . Determina el punto  $(a, b)$  al que corresponde el rectángulo de área máxima.

**Ejercicio:** Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - \frac{1}{3}x^3}{x - \tan x}$ .

**Ejercicio:** Calcula el valor de  $k$  para que la expresión  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + kx)^{1/x}$  sea igual a  $e^4$ .

---

### Sesión 7

---

*Esta sesión la dedicamos a realizar el segundo examen del segundo trimestre. Como ejemplo tenemos un modelo de examen en el Anexo I.*



## Sesión 8

---

*Nos dedicaremos a realizar la resolución de los ejercicios del examen de la sesión anterior haciendo hincapié en los ejercicios que han presentado mayor dificultad a la mayoría de los alumnos así como los diferentes aspectos importantes a comentar.*

*Desarrollaremos esta sesión a través de una metodología colaborativa. Imaginemos que la gran mayoría de los alumnos han fallado en uno de los ejercicios del examen. El profesor comenzará con una lluvia de ideas sobre cómo se puede resolver el ejercicio. Trataremos de que los alumnos que tuvieron mal el ejercicio se sientan activos para participar aquí. Después, se llevará a cabo la resolución del ejercicio por parte de un estudiante anteriores que, junto con la ayuda y las ideas de sus compañeros, será capaz de entender y comprender sus errores.*

*Es importante que el hagamos partícipes a los alumnos que cometen errores comunes (como por ejemplo, explicar mal un ejercicio o no seguir un procedimiento lógico) en un mismo ejercicio para que comprender los errores y el porque no se han llegado a los objetivos quede claro. De esta manera también haremos que los estudiantes contribuyan a desarrollar más la competencia CL.*





El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49





El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



## SECCIÓN 4

# CONCLUSIÓN





El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



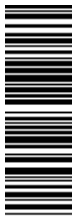
#### 4. Conclusión

Existe una falsa creencia popular según la cual la matemática es una empresa impersonal, desapasionada y completamente objetiva. Mientras que la mayor parte de las otras actividades humanas están dominadas por modas, caprichos y caracteres, se supone que las matemáticas se atienen a reglas de procedimiento establecidas y pruebas rigurosas. Lo que cuenta son los resultados, y no las personas que lo producen.

Esto es, por supuesto, de lo más absurdo. La matemática es una actividad impulsada por personas y es lo que hemos querido mostrar en este trabajo.

Durante la fase del *PRACTICUM* no se ha podido poner en práctica parte de lo expuesto en la sección anterior debido al estado de alarma que se decretó a causa del CoVid-19. Aunque no quede reflejado aquí, obtuvimos buenos resultados durante la impartición de los contenidos de las unidades didácticas respecto a diferentes aspectos didácticos:

- Los alumnos, en general, adquirieron un mejor hábito de trabajo y un mejor enfoque de las matemáticas que hizo que sus resultados académicos mejoraran.
- El empleo de una metodología colaborativa tuvo éxito durante el desarrollo de las sesiones. El ambiente del aula mejoró bastante. Los alumnos se encontraron propensos a preguntar siempre todas sus dudas y esto produjo un gran feed back en el transcurso del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Aunque no se pudo llevar a cabo la realización presencial del examen, así como su corrección, durante el *PRACTICUM*, el tutor proporcionó datos sobre los resultados del examen y se pudo comprobar que gran parte de los alumnos mejoraron en sus resultados.
- Gracias a la plataforma de Teams, pudimos poner en práctica ciertas sesiones de la segunda unidad didáctica desarrollada en la sesión anterior. La metodología deductiva hizo que los alumnos comprendieran mejor y asentaran con mayor rapidez los conocimientos. Esto lo pudimos comprobar debido a la falta de dudas que presentaban respecto a los contenidos de estas sesiones desarrolladas con esta metodología.

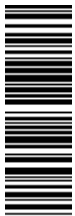


- El enfoque sobre como afrontar los problemas que hemos explicado sesión 3 de la segunda unidad didáctica resulto interesante y de gran ayuda para algunos de los alumnos del aula. Al identificar primero *que es lo que se pide en el problema* ayudo a que los alumnos realizaran los ejercicios de una forma correcta y contribuyo al desarrollo de la competencia CL.
- Los materiales, así como las actividades, ayudaron a los alumnos en la consolidación de los contenidos y ha conseguir un mejor seguimiento de las clases.
- Gracias al uso Wolfram Alpha, los alumnos destacaron el ahorro de tiempo que ganaron en su estudio así la posibilidad de poder hacer un mayor número de problemas. Así, contribuyeron a desarrollar las competencias CD y SIEE.

Podemos pensar, por tanto, que la metodología empleada en el desarrollo de las unidades didácticas tuvo éxito. La gran parte de los estudiantes comprendieron los conceptos y consiguieron mejorar el aprovechamiento de las clases así como sus hábitos de trabajo.

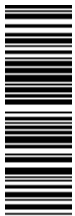
Durante el *PRACTICUM*, también pudimos emplear estos tipos de metodologías didácticas dentro del desarrollo de ciertos contenidos en cursos de 3º y 4º de la ESO y 1º de bachillerato en los que obtuvimos resultados similares, sobre todo en 4º de la ESO donde el interés y el ambiente de aula mejoró notablemente según las observaciones de los profesores del centro. Es importante señalar que cierto número de alumnos que mostraron poco interés en la asignatura se volvieron participativos durante las sesiones en las que empleábamos una metodología colaborativa.

Como conclusión respecto al trabajo, las metodologías didácticas empleadas favorecen al desarrollo de la mayoría de las competencias básicas por parte de los estudiantes así como su hábito de trabajo. También ayudan a recuperar la atención de ciertos alumnos pero cierto es que hay alumnos que no sufren cambios aunque hemos de decir que, la mayoría de estos, coinciden en su mal gusto por las Matemáticas.

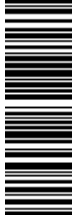


## 5. Bibliografía

- [1] ORDEN EDU/363/2015, del 4 de mayo.
- [2] Ley Orgánica 2/2006, del 3 de mayo.
- [3] PANCORBO PALENZUELA, L. y RUIZ BUENO, R. (Ed.) (2020). MT 2. MATEMÁTICAS TECNOLÓGICAS (AULA 3D). Barcelona, España: Editorial Vicens Vives.
- [4] Proyecto educativo de centro (PEC); I.E.S. Hoces del Duratón, Cantalejo, Segovia.
- [5] Plan de Atención a la diversidad.
- [6] Reglamento de Régimen Interno del I.E.S. Hoces del Duratón.
- [7] Programación general anual del I.E.S. Hoces del Duratón.
- [8] RICO ROMERO, L. (1997), *Bases teóricas del currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*, Madrid, España: Síntesis.
- [9] RICO ROMERO, L. y MORENO VERDEJO, A. (2016), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, Madrid, España: Pirámide.
- [10] KHAN, S. (2020), *LA ESCUELA DEL MUNDO, UNA REVOLUCIÓN EDUCATIVA*, Barcelona, España: Ariel.



El presente documento ha sido firmado en virtud de la Ley 59/2003 de 19 de Diciembre. El C.V.D. asignado es: 0172-CBEC-6ED6\*00A9-577D. Para cotejar el presente con su original electrónico acceda a la Oficina Virtual de la Universidad de Valladolid, y a través del servicio de Verificación de Firma introduzca el presente C.V.D. El documento resultante en su interfaz WEB deberá ser exactamente igual al presente. El/los firmante/s de este documento es/son: ADRIAN HERNANDEZ SANZ a fecha: 19/06/2020 11:32:49



## Anexos

### Anexo I.

<b>IES HOCES DEL DURATÓN. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS</b>		<b>CALIFICACIÓN</b>     	
<b>Asignatura:</b>	<b>MATEMÁTICAS II. 2º Bachillerato</b>		
<b>Evaluación:</b>	<b>2ª</b>		
<b>Control:</b>	<b>GEOMETRÍA / ANÁLISIS</b>		<b>Fecha:</b> __/__/__
<b>Nombre:</b>	_____		

1. Calcula los límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$  (0,75 Puntos)

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$  (0,75 Puntos)

2. Demuestre que la ecuación

$$x = \cos(x)$$

(1,5 Puntos)

a) Tiene al menos una solución.

b) Encuentra una aproximación con un error  $< 0.5$

3. Calcula  $a$  y  $b$  para que la función

(1,5 Puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + \sin(x)) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

Sea continua y derivable en toda la recta real.

4. Estudia si la siguiente función tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión

(1 Punto)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

5. Determina:

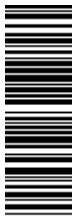
a) La ecuación del plano que contiene a

$$r \equiv x - 2 = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 4}{3}$$

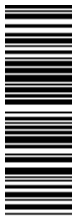
(0,75 Puntos)

y es paralelo a

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$



- b) Dado el punto  $P = (1, 1, 1)$ , calcula el punto simétrico de  $P$  respecto de  $s$ . **(0,75 Puntos)**
- c) Calcula la distancia de la recta  $s$  al plano  $\pi \equiv x - y - z + 12 = 0$ . **(0,5 Puntos)**
6. En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es de  $50 \text{ cm}^2$ . ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que el volumen sea el mayor posible **(1 Punto)**
7. Estudia la curvatura de la función  $f(x) = x^2 \ln x$  y escribe la ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión. **(1,5 Puntos)**





Anexo II

TABLA DERIVADAS

Primero debemos recordar las reglas que debemos seguir cuando derivamos una función que se expresa como operaciones de otras funciones:

$y = k \text{ (constante)} \rightarrow y' = 0$
$y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
$y = k \cdot f(x) \rightarrow y' = k \cdot f'(x)$

A continuación mostramos una tabla con las derivadas de algunas funciones ya vistas a lo largo del curso:

$y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$ $y = f(x)^n \rightarrow y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $y = \sqrt{f(x)} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ <p><b>Nota:</b> Recordar que <math>y = \sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}}</math> (pasar de raíz a potencia)</p>
$y = e^x \rightarrow y' = e^x$ $y = e^{f(x)} \rightarrow y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = a^x \rightarrow y' = a^x \cdot \ln(a)$ $y = a^{f(x)} \rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot \ln(a) \cdot f'(x)$ <p><b>Nota:</b> <math>a</math> es un número real</p>
$y = \ln(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x}$ $y = \ln(f(x)) \rightarrow y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \log_a x \rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$



$y = \log_a f(x) \rightarrow y' = \frac{1}{f(x) \cdot \ln(a)} \cdot f'(x)$
$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$ $y = \sin(f(x)) \rightarrow y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$
$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$ $y = \cos(f(x)) \rightarrow y' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)$
$y = \tan x \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)$ $y = \tan(f(x)) \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2(f(x))} \cdot f'(x) = [1 + \tan^2(f(x))] \cdot f'(x)$
$y = \arcsin x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $y = \arcsin(f(x)) \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$
$y = \arccos x \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $y = \arccos(f(x)) \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \cdot f'(x)$
$y = \arctan x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$ $y = \arctan(f(x)) \rightarrow y' = \frac{1}{1+f(x)^2} \cdot f'(x)$

**NOTA:** A modo de dar un truco para recordar esta tabla, podemos observar que la parte azul es lo mismo que la parte en negro pero cambiando  $x$  por  $f(x)$ , y multiplicando por  $f'(x)$ .

Ejemplo:

$y = x^n \rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$ $y = f(x)^n \rightarrow y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
---

