UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología

Topología de superficies para una propuesta extracurricular en Matemáticas

Trabajo Final del Máster Universitario de Profesor en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad de Matemáticas.

Alumno: Jaime Marcos Martín

Tutor: Fernando Sanz Sánchez

Valladolid, junio de 2020

Topología de superficies para una propuesta extracurricular en Matemáticas

Autor: Jaime Marcos Martín   Tutor: Fernando Sanz Sánchez

18 de junio de 2020

Índice general

Introducción

La apertura de los centros docentes a la comunidad y la búsqueda de una educación integral y accesible para todos han sido ideales demandados en las últimas décadas para el ámbito educativo. De este modo, las llamadas *actividades extraescolares* han encontrado una razón de ser dentro de la acción educativa ([6], p. 9).

Aunque fueron protagonistas las de carácter deportivo, la variedad de sus formas y temáticas se ha multiplicado hasta abarcar el terreno del refuerzo educativo y curricular, pero también la pintura, la música, el teatro, las manualidades de toda condición o incluso la ciencia se han sumado a estos espacios. Y es aquí donde se puede hablar en clave de *actividades extracurriculares* como aquellas que exploran propuestas más allá del currículo, sin perjuicio de que puedan hacer aportaciones al mismo (por ejemplo, en materia de competencias). En este tipo de actividades se dan algunas condiciones interesantes desde el punto de vista educativo, como pueden ser la voluntariedad de los alumnos o el ambiente distendido de las mismas. En particular, la enseñanza de la ciencia encuentra un lugar en el que experimentar con contenidos, metodologías y recursos alternativos, al mismo tiempo que brinda a los alumnos la oportunidad de aproximarse a otros conocimientos.

En forma de Unidad Didáctica para una actividad extracurricular en Educación Secundaria, el presente trabajo trata de sacar partido de estas posibilidades acercando a los alumnos contenidos matemáticos ajenos al currículo, pero de gran potencial e interés educativo. Por una parte, se pretende poner en valor las Matemáticas ante los alumnos, e influir en su percepción de las mismas. Por otra, hacer accesibles algunos contenidos de mayor nivel mediante un tratamiento informal e intuitivo (véase el capítulo 4).

La Topología y, en concreto, la teoría sobre superficies y su clasificación ha sido elegida como inspiración para elaborar la Unidad Didáctica. La Topología es una rama de las Matemáticas relativamente moderna, distinta en su naturaleza a cualquiera de las presentes en el currículo. Su estudio permite entrever algunas de las características más notables del desarrollo de las

Matemáticas y que, en muchas ocasiones, quedan alejadas del aula: se pueden mencionar la creatividad, la aceptación y el aprovechamiento del error, la gestión de la información o la aparición de preguntas no resueltas, entre otros ([10], pp. 9–10). Asimismo, es una materia proclive a la introducción de recursos como los materiales manipulativos que, junto con la plasticidad característica de los contenidos, permiten elaborar una propuesta atractiva.

Los gráficos e imágenes de producción propia que aparecen en este trabajo han sido generados con *GeoGebra*[1], *Microsoft Paint* y *Microsoft Paint 3D*. Todas las referencias a sitios o imágenes en la web han sido consultadas por última vez en junio de 2020.

[1]Sitio web del software *GeoGebra*: https://www.geogebra.org/

Sobre las actividades extracurriculares. Motivación

Son varias las razones que llevan al planteamiento de la actividad extracurricular que aquí se recoge. Es posible destacar, de manera general, la consolidación que han adquirido este tipo de actividades tanto a nivel pedagógico como a nivel de la administración educativa. Pero es especialmente importante explorar las posibilidades que pueden tener en cuanto a la enseñanza–aprendizaje de las propias Matemáticas, haciendo hincapié en la elección de la Topología como temática principal.

Por lo tanto, en este capítulo se expone un breve repaso de las principales características de estas actividades junto con algunas de sus posibles fortalezas, tanto en un ámbito general como en el específico de las Matemáticas, a través de la consulta de algunos autores. No se trata de sostener la veracidad de tales virtudes, pues en estos escenarios toda afirmación debe tomarse con cautela. En su lugar, la pretensión es dar algunas pinceladas que justifiquen el intento de un diseño como el que aquí se encuentra, guiado por las posibilidades que ofrecen las actividades extracurriculares.

2.1. Actividades extracurriculares

A la hora de referirse al tipo de actividades que nos ocupan, aparece habitualmente el término *actividades extraescolares*. La gran diversidad de propuestas y programas que actualmente se acogerían a esta denominación hace complicada su definición precisa ([5], p. 12; [6], p. 10). No obstante, éstas responderían a aquellas actividades que los alumnos realizan, precisamente, fuera del horario escolar, además de algunas notas características: la no obligatoriedad de las mismas, el hecho de no ser evaluables para los alumnos, no tener ánimo de lucro y, en todo caso, presentar una vocación educativa, entre otros ([6], pp. 9–12).

Según A. Guerrero, el origen y evolución de este tipo de propuestas vendría marcado por dos aspectos. El primero, relacionado con la innovación pedagógica y la denominada *Escuela Nueva*, basada en el medio ambiente como educador de un individuo activo y que toma la iniciativa de manera espontánea. El segundo respondería a una manera de canalizar y neutralizar la tensión producida por la extensión de la escolarización, utilizando para ello la práctica deportiva ([5], pp. 6–9). Se pueden destacan otros a mayores, como se puede leer en el texto de S. González; a saber, el cumplimiento de una función de custodia, el ajuste de horarios para aquellas familias con dificultades de conciliación o la compensación de desigualdades educativas ([4], p. 2).

Aunque pervivan características de todos estos supuestos, la idea oficial que se ha consolidado sobre las actividades extraescolares es la de abrir la escuela a la comunidad y al entorno en general, participando de la búsqueda de una educación integral y accesible para todos y aprovechando la disponibilidad de tiempo libre ([6], p. 3–4).

El impacto en la educación

En estos términos, el impacto observado sobre el aprendizaje de los alumnos al participar en estas actividades se convierte en foco de atención. Debido a la gran variabilidad de las mismas, dicho impacto no siempre sigue una dirección común y se encuentra expuesto, incluso, a ser negativo. Sin embargo, existen evidencias que apuntan a que, controlando algunos factores de calidad, éste se inclina a ser positivo y repercute en múltiples aspectos, desde el rendimiento escolar y las expectativas formativas hasta las habilidades sociales, dependiendo de las características concretas de la actividad ([4], p. 7–17). Pueden hallarse también efectos favorables en la organización de los centros, contribuyendo al beneficio de la comunidad educativa ([5], p. 20).

En todo caso, es interesante el papel que pueden jugar a la hora de crear espacios educativos distintos a los habituales, apoyados por la voluntariedad de los alumnos que acuden a ellas y su carácter distendido. En este punto, la acción educativa puede situarse más cerca de algunos de los ideales a los que aspira, como convertir a los alumnos en *expertos aprendices*. Por otra parte, también pueden tener la virtud de romper la rutina educativa y construir una nueva relación entre los alumnos y el centro, menos marcada por la obligatoriedad ([6], p. 17).

Todas estas consideraciones refuerzan la relación de las actividades extraescolares con el llamado *ocio educativo*, que comprendería todas aquellas actividades con finalidad formativa pero de carácter lúdico ([4], pp. 2–4). En general, el aprendizaje en este tipo de entornos tendría a su favor un mayor interés y atención por parte del alumnado y un compromiso emocional reforzado hacia el aprendizaje ([8], p. 13).

Para terminar, es importante destacar un factor que parece tener relevancia en el éxito de las actividades extraescolares. La ruptura de la rutina que se comentaba anteriormente no sólo es una posible de las actividades extraescolares, sino también una expectativa de los alumnos. Es así como la innovación pedagógica se convierte en un aspecto a tener en cuenta a la hora de elaborar una propuesta de estas características ([4], p. 17; [5], p. 19).

En definitiva, se trata de acciones educativas que pueden jugar un papel clave a la hora de desarrollar competencias sociales y contribuir a la educación integral de los alumnos. Aún más, tienen potencial para reforzar y ampliar ciertos aspectos del currículo que puedan quedar sin cobertura en el ámbito de la educación formal.

Extracurriculares *versus* extraescolares

¿Por qué elegir entonces el término *actividad extracurricular*, en lugar de *actividad extraescolar*? La razón tiene que ver con remarcar el hecho de que los contenidos queden fuera del currículo. De hecho, existen muchas actividades propias del ocio educativo cuyo cometido es, precisamente, reforzar el aprendizaje del currículo, aunque sea desde un enfoque distendido. Habitualmente, son conocidas como *actividades complementarias* ([5], p. 13). Figurarían como tales, por ejemplo, las visitas a museos como una manera de acompañar a la formación en el aula.

Por lo tanto, se trata de enfatizar que la propuesta presentada en este trabajo responde a una experimentación fuera del currículo, con contenidos alternativos al mismo. Hay que notar que, según el texto de S. González, la falta de vinculación con el currículo penalizaría la efectividad de las actividades extracurriculares ([4], p. 13). Sin embargo, el tratamiento de contenidos ajenos al currículo no implica la ausencia absoluta de relación con este último. Es posible hacer una aproximación basada en materias que los alumnos ya han encontrado en su experiencia escolar.

2.2. Las actividades extracurriculares en el sistema educativo español

Las actividades extraescolares y extracurriculares tienen ya una larga tradición en el sistema educativo español. Los textos de referencia para la legislación han mostrado distintos puntos de vista sobre las mismas a lo largo de las últimas décadas. A. Guerrero lo analiza así:

> *Durante la puesta en práctica de la LGE en 1970, la preocupación oficial era,*

obviamente, cómo completar con los recursos limitados el mapa escolar con el que llegar a tasas del cien por cien en la escolarización obligatoria en condiciones de calidad y con los recursos limitados. Se hablaba así de un "problema del tiempo libre", buscando la eficacia social del sistema educativo, asegurando conocer "las implicaciones que el uso del tiempo libre tiene en el desarrollo de las facultades humanas" (Rodríguez, 1978). ([5], p. 11, citando [9]).

En un primer momento se trataba, pues, de gestionar recursos para alcanzar los objetivos que imponía la escolarización obligatoria. Continúa del siguiente modo:

Posteriormente, gana terreno paulatino el naturalismo directo *que podríamos decir, ya que postula las actividades* en *la naturaleza, como una forma de desarrollo armónico de la semilla que cada alumno/a lleva en su interior (Ascaso y otros, 1996).* ([5], p. 11, citando [1])

Es decir, hace referencia a las ideas de la *Escuela Nueva*. Por último, leemos:

En la actualidad, liberados de la perentoriedad de la situación económica y situados en un escenario fiscal positivo, el paradigma higienista del medio ambiente, se extiende al medio social. Implementado a la par que las actividades en *la naturaleza, gana terreno el modelo de la* escuela comunitaria y en la comunidad. *Es decir, se propugna la interacción escuela–entorno, bajo el programa de apertura de los centros a los vecinos, para su utilización responsable (MEC, 1996).* ([5], p. 11, citando [6])

Este último punto de vista sería el que aparece en el texto del Ministerio de Educación y Cultura del año 1996 ([6]). Aquí se pueden encontrar las indicaciones y marcos normativos que la legislación vigente estipulaba sobre las actividades extraescolares ([6], pp. 133–193). En particular, una de las principales referencias es la *Ley Orgánica de la Participación, la Evaluación y el Gobierno de los Centros Docentes*[1], donde se plasma el enfoque ya mencionado ([6], pp. 133–134). Por otra parte, se debe destacar el *REAL DECRETO 83/1996, de 26 de enero*[2] y la *ORDEN de 29 de junio de 1994*[3]. En estos textos se puede leer

[1] LEY ORGÁNICA 9/1995, de 20 de noviembre.

[2] *REAL DECRETO 83/1996, de 26 de enero, por el que se aprueba el Reglamento Orgánico de los Institutos de Educación Secundaria.*

[3] *ORDEN de 29 de junio de 1994, por la que se aprueban las instrucciones que regulan la organización y funcionamiento de los Institutos de Educación Secundaria.*

acerca de la normativa general que debe seguir la propuesta, ejecución y evaluación de las actividades extraescolares, distinguiendo las competencias que cada organismo del centro tiene en la materia ([6], pp. 139–144, 149–152). Las leyes posteriores que se han desarrollado en materia de educación no han modificado estos aspectos, por lo que estos textos se pueden tomar como referencia.

Las actividades extracurriculares en los centros educativos

En relación con los centros educativos, las actividades extracurriculares quedarían reflejadas como aquellas que se realizan fuera del horario escolar pero que se encuentran adscritas al centro. Así, tanto las propuestas provenientes del propio centro (por ejemplo, de los alumnos o profesores) como de entidades externas o relacionadas con él (asociaciones de padres y madres, ayuntamientos, etc.) deben ser consecuentes con el Proyecto Educativo del mismo. Dichas propuestas son incluidas en el Programa anual de actividades complementarias y extraescolares, previa aprobación del Consejo Escolar. A su vez, éste queda incluido en la Programación General Anual ([6], pp. 151–152).

Es competencia entonces del Jefe de departamento de actividades complementarias y extraescolares *promover, organizar y facilitar* la realización de estas actividades. Por su parte, los tutores tienen la labor de fomentar entre los alumnos la participación en las mismas e informar, tanto a ellos como a sus familias, acerca de la oferta disponible al respecto ([6], pp. 140–142).

Una vez completadas dichas actividades, el Jefe de departamento de actividades complementarias y extraescolares deberá elaborar una memoria de evaluación, con el objetivo de valorar la calidad y el desarrollo que éstas han tenido de cara al curso siguiente ([6], p. 141).

Más allá de la normativa de los textos legales y, como ya se ha comentado anteriormente, la profusión de las actividades extraescolares y extracurriculares es grande. Pueden encontrarse numerosos ejemplos en las programaciones de los centros, como son las actividades deportivas (*viajes a la nieve*, piragüismo, senderismo, campeonatos de deportes); literarias, artísticas y musicales (recreos poéticos, concursos literarios, visitas al festival SEMINCI de Valladolid, visualización de representaciones teatrales, participación en coros); relacionadas con un idioma extranjero (programas de intercambio de alumnos, cursos de inmersión lingüística); charlas a cargo del departamento de orientación, cultivo de vegetales en un *huerto escolar*, etc[4].

[4] Pueden encontrarse propuestas como éstas, por ejemplo, en el Proyecto Educativo del IES Núñez de Arce, pp. 16–18: http://www.nunezdearce.es/index.php/el-centro/documentos-de-centro

En el ámbito de ciencias y tecnología también son numerosas, destacando las visitas a industrias o laboratorios. En Matemáticas, es común encontrar como actividades extracurriculares la participación en concursos de resolución de problemas, como la Olimpiada Matemática o el Canguro Matemático. También charlas o jornadas dedicadas a esta disciplina, como puede ser el día 14 de marzo, Día Internacional de las Matemáticas[5].

2.3. Las actividades extracurriculares en la enseñanza de las Matemáticas

Anteriormente se han destacado las características generales que las actividades extracurriculares presentan, desde el ámbito puramente educativo al administrativo. En relación con la Unidad Didáctica que se propone en este trabajo, es preciso concretar aquellas que son de interés en la enseñanza de las Matemáticas.

Una de estas particularizaciones estaría relacionada con los aprendizajes de carácter lúdico. Éstos vendrían avalados también en el caso particular de la ciencia y las Matemáticas. Es decir, serían herramientas estimables para la enseñanza de estas disciplinas; y no sólo en edades tempranas, sino a cualquier nivel ([2], pp. 162–164). El compromiso emocional y cognitivo que podrían propiciar estos contextos sería, asimismo, provechoso. En este sentido, podríamos encontrar también aportaciones al currículo en materia de competencias, tales como la propia *competencia matemática* o la competencia de *aprender a aprender*.

La revisión del currículo en Matemáticas

A mayores y, en relación con lo anterior, una razón para trabajar este tipo de formatos consistiría en explorar los planteamientos de renovación del currículo en Matemáticas. La Real Sociedad Matemática Española ha iniciado recientemente una revisión del mismo a nivel de Bachillerato, en vistas del posible advenimiento de una nueva ley educativa[6][7]. Aunque por ahora se limite a esta etapa, cualquier cambio afectaría a otras también, como la ESO.

[5] Programación Didáctica del Departamento de Matemáticas del IES Emilio Ferrari, curso 2019/20.

[6] Noticia del 11 de octubre de 2019: *La RSME apoya la organización de unas jornadas sobre el currículum de matemáticas en Bachillerato.* https://www.rsme.es/2019/10/la-rsme-apoya-la-organizacion-de-unas-jornadas-sobre-el-curriculum-de-matematicas-en-bachillerato/

[7] Noticia del 10 de abril de 2020: *Propuestas sobre el currículum de matemáticas en Bachillerato.* https://www.rsme.es/2020/04/propuestas-sobre-el-curriculum-de-matematicas-en-bachillerato/

La revisión abogaría por una reducción de contenidos y una mayor incidencia en las competencias, entre otros. Es decir, poner el énfasis en procesos como el razonamiento, la indagación o el descubrimiento, y no tanto en dinámicas rutinarias. De cualquier manera, en un escenario de renovación cualquier experimentación podría ser provechosa. En particular, explorar contenidos alternativos (como la Topología) o recursos nuevos (materiales manipulativos, lecturas) podría servir a tal fin. El currículo es una herramienta de estandarización muy útil, pero no pueden perderse de vista otras propuestas si se busca que la educación evolucione, adaptándose a un mundo cambiante y alcanzando cotas de mayor calidad.

En su artículo *Using Topology to Explore Mathematics Education Reform*, C. Sugarman hace una recopilación de ideas que buscan la reforma de la enseñanza de las Matemáticas, aunque centrada en el panorama estadounidense ([10], pp. 3–7). Asimismo, puntualiza y aporta algunas nuevas. Muchas de ellas son compartidas por diversas iniciativas de renovación de dicha enseñanza, motivadas por la mala reputación que las Matemáticas han adquirido y la carencia de competencias matemáticas que se observa en los alumnos de manera general.

Por ejemplo, una de las ideas recurrentes es utilizar la resolución de problemas como metodología para instruir a los alumnos en la aplicabilidad de las Matemáticas. El propósito es, por lo tanto, vincular la enseñanza de las Matemáticas con la utilidad que éstas pueden tener en la vida diaria o profesional, explorando incluso el ámbito de la computación[8]. Sugarman hace una observación interesante a este respecto, con el objeto de reforzar la efectividad de este método; no se trataría tanto de justificar la aplicabilidad de un determinado concepto ya estudiado como de permitir que los propios alumnos *descubran* dicha aplicabilidad. El aprendizaje por descubrimiento se postularía también como una metodología con buenas opciones en el aula de Matemáticas.

Otra propuesta explora el hecho de que las Matemáticas serían más atractivas para los alumnos si se mostraran *en su verdadera naturaleza*. En las aulas, las Matemáticas aparecen muchas veces como *caídas del cielo*, sin reflejar el periplo que la civilización ha tenido que realizar para llegar hasta ellas. Acercar la realidad histórica e investigadora a las aulas sería el cometido en cuestión.

Esto está estrechamente relacionado con educar para aceptar y aprovechar el error, ya que en el desarrollo de las Matemáticas los errores tienen un valor añadido como oportunidades de mejora y profundización en la comprensión de las mismas. La solución al problema de la ansiedad

[8]Wolfram Technology Conference 2010 Talk:
https://www.computerbasedmath.org/resources/reforming-math-curriculum-with-computers.php

que las Matemáticas causan en los alumnos respondería también a este tipo de cuestiones, de modo que el equívoco consiga naturalizarse como un elemento más del proceso de aprendizaje y se asuma la presencia reiterada de preguntas no resueltas.

En definitiva, es foco de atención no sólo una mejora en el rendimiento educativo en Matemáticas, sino también un cambio profundo en la percepción y actitudes que los alumnos tienen hacia esta ciencia. La propuesta que se recoge en este trabajo trata de participar de estas ideas, que sin duda son de gran interés en el panorama de una reforma en la enseñanza–aprendizaje de las Matemáticas.

Topología para renovar

La adaptación de la topología de superficies mostraría signos de todos estos aspectos, además de ser un área de las Matemáticas cuyos conceptos pueden resultar más atractivos a los alumnos por su plasticidad. Presenta también el aliciente de tener amplias posibilidades en lo que a recursos manipulativos se refiere ([10], pp. 9–10).

El artículo de Sugarman contiene la planificación de dos sesiones dedicadas a trabajar conceptos básicos sobre Topología en un grupo de alumnos de entre cuarto y sexto curso de la *Elementary School* estadounidense. Es decir, se trataría de alumnos de entre 9 y 12 años de edad. Asimismo, figuran en él los resultados de la puesta en práctica de esa propuesta, la cual tuvo lugar con un grupo de quinto curso (alumnos de 10 u 11 años de edad) en el centro *Chaparral Elementary School*, situado en Claremont, California.

Este artículo incluye también un estudio realizado a través de dos encuestas dirigidas a los alumnos, antes y después de implementar las sesiones en el aula. Dichas encuestas versan sobre la percepción que los alumnos tienen sobre las Matemáticas, la labor que realizan los matemáticos o la utilidad que aquellas pueden tener. Tanto los datos recogidos mediante estas encuestas como las impresiones que Sugarman obtuvo contribuirían a un testimonio favorable. Las sesiones realizadas aportaron cambios significativos a la imagen que los alumnos tenían de las Matemáticas y el oficio de matemático, así como de su propio autoconcepto y capacidades. Por otra parte, se constató que los alumnos fueron capaces de comprender algunos conceptos topológicos de manera intuitiva ([10], pp. 15–21). En general, se destaca que éstos respondieron positivamente a la propuesta, aprendieron ideas relevantes y modificaron en alguna medida su concepto acerca de las Matemáticas y su aprendizaje. También restaron importancia a las calificaciones y a la velocidad de respuesta en el aula de Matemáticas, en favor de la resolución de problemas o desafíos y la creatividad ([10], pp. 15–21).

El presente trabajo formula una propuesta extracurricular alentada por las posibilidades existentes, y bajo la idea de que acercar otro tipo de contenidos a los alumnos puede ser enriquecedor. En relación con esto, se estima el punto de vista divulgativo, que imbrica los anteriores elementos y hace accesibles contenidos matemáticos que, de otro modo, quedarían alejados de la Educación Secundaria.

Una aproximación a las superficies

Para cualquier docente es un requisito fundamental tener un conocimiento sólido de la materia que planea impartir. El cometido de este capítulo es recorrer la teoría sobre clasificación de superficies, la cual recoge la práctica totalidad del contenido de la Unidad Didáctica y puede por tanto servir como referencia. Figura también una introducción a los conceptos propios de la Topología. Se ha optado por una discusión informal, aunque justificando los resultados y haciendo un esbozo de las demostraciones pertinentes. Igualmente, es su intención mostrar el interés que esta teoría suscita como ejemplo de resolución de un problema matemático de envergadura.

3.1. Cambiando las reglas de la Geometría

Cuando estudiamos *Geometría*, nuestra atención se dirige hacia una serie de propiedades que consideramos importantes. Longitudes, ángulos, áreas y volúmenes son objeto de análisis. Las proporciones, medidas y posiciones relativas que los objetos guardan entre sí son muy importantes, porque buscamos precisión absoluta a la hora de describirlos. Es lo que se debe esperar si uno quiere trazar los planos de un edificio o el croquis de un engranaje para una máquina.

¿Sería posible renunciar a esta precisión?
Desde luego, si queremos que nuestras casas no se nos caigan encima, entonces no. Pero la pregunta es más bien otra: ¿Qué ocurre si renunciamos? ¿Acaso existe *otra manera* de hacer Geometría que busque alguna suerte de *esencia* en los objetos, más allá de sus proporciones y magnitudes?

Si no hiciéramos caso de distancias y ángulos, entonces no nos importaría que un segmento se curvara, estirase o encogiese de cualquier modo. Todas las figuras siguientes serían consideradas iguales:

Cualquier figura gozaría de la misma libertad. También una circunferencia...

Entonces, ¿Se permite cualquier distorsión?

Si así ocurriese, prácticamente *todas* las propiedades de los objetos serían ignoradas. Al poder pegar unos puntos sobre otros, estaríamos autorizando también a separarlos a nuestro antojo.

Ése no es el cristal con el que queremos mirar la Geometría. Buscamos *perder información* sobre los objetos; deshacernos de las restricciones que imponen sus propiedades geométricas para obtener propiedades más *esenciales*, pero sólo en su justa medida. Si relajamos demasiado nuestro punto de vista, ¡Todos los objetos nos parecerán iguales!

Después de todo, necesitamos poner límites: no será válido cortar las figuras, así como pegar partes de las mismas entre sí. Un segmento perfectamente recto nos parecerá indistinguible de la letra S, pero distinto de una circunferencia. Para obtener una circunferencia a partir de un segmento, deberíamos pegar sus extremos.

¿Qué es la Topología?

La *Topología* es la rama de las Matemáticas que se encarga de estudiar los objetos bajo estas condiciones. Por ello, se dice que es la ciencia de la *forma*: permite distorsionar el aspecto de los objetos como si estuvieran hechos de goma elástica, pero sin romperlos o unir partes de los mismos entre sí. Es decir, la forma es aquella esencia que buscábamos, y que no cambiará si respetamos estas nuevas reglas. Como consecuencia, ahora serán importantes cualidades como el número de *agujeros* que presenta un objeto. Una circunferencia tiene un *agujero*, mientras que un segmento carece de ellos.

Clasificando objetos

Una de las cuestiones más importantes a las que se ha enfrentado la Topología (y continúa enfrentándose) tiene que ver con la *clasificación de objetos*. Esto es, elaborar un *catálogo* de todos los objetos distintos que pueden existir desde el punto de vista *topológico* (según las reglas que hemos impuesto) y ser capaces de, si nos encontramos con cualquiera de ellos, clasificarlo de acuerdo a ese catálogo. Así, es posible formar una idea de lo restrictivo o lo permisivo que es el punto de vista de la Topología a la hora de distinguir las formas; a mayor restricción, más formas distintas encontraremos, y viceversa. Tomando un ejemplo anterior, la figura 3.1 se clasificaría como una circunferencia, mientras que la figura 3.2 se correspondería con dos circunferencias unidas por un punto.

Figura 3.1: Una circunferencia.

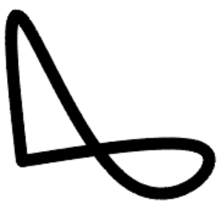
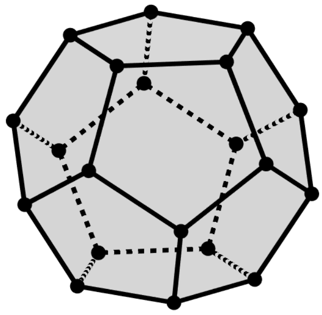


Figura 3.2: Dos circunferencias unidas por un punto.

Ambas son topológicamente distintas (la primera tiene un agujero, mientras que la segunda tiene dos).

Recuperar la Geometría

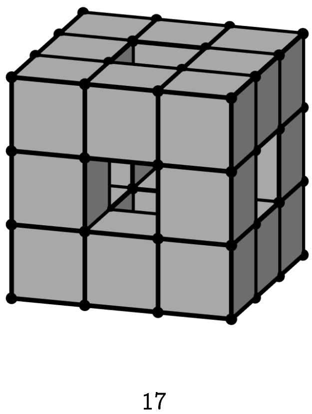
En todo caso, este nuevo modo de ver la Geometría no deja atrás algunos conceptos fundamentales de la misma. Elementos como vértices, aristas y polígonos permiten descomponer ciertos objetos y obtener información sobre su forma, contribuyendo al problema de la clasificación. Aunque nuevamente no será relevante la longitud de las aristas o la localización exacta de los vértices; tampoco el área de los polígonos. Solamente serán de interés las conexiones que existan entre unos y otros, es decir, la configuración en que los distintos polígonos y aristas inciden (se cortan) entre sí.



En particular, estas descomposiciones tendrán un papel fundamental en este capítulo. ¿Qué obtenemos al contar vértices, aristas y caras en el dodecaedro de la imagen anterior y calcular

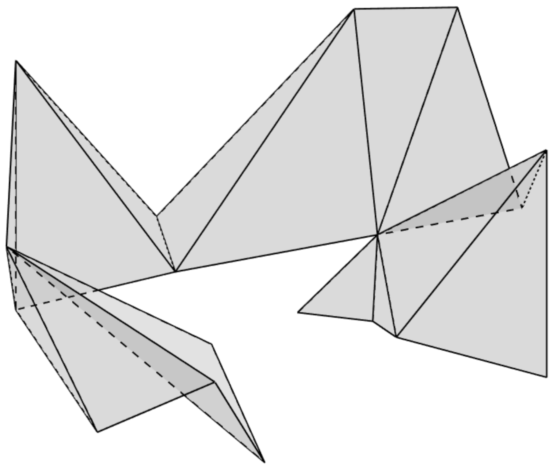
$$\text{Vértices} - \text{Aristas} + \text{Caras}?$$

Este entero, conocido como *característica de Euler*, permite predecir cuál será la forma del objeto. Si repetimos el cálculo con, por ejemplo, cualquier otro poliedro regular, el resultado será el mismo: 2. ¿Le sucederá igual al siguiente?:



Construyendo con triángulos

Entonces, ¿Qué tipo de objetos nos van a interesar? Imaginemos que tuviéramos a disposición una cantidad ilimitada de triángulos, y que éstos pudieran adquirir cualquier proporción y curvatura deseada y pegarse dos a dos a lo largo de sus lados. A nuestro gusto, construiríamos añadiendo triángulos de manera sucesiva.



Estos objetos serán, en todo caso, lo que en Topología se conoce como *superficies*. Y no importa lo creativa que sea nuestra imaginación. El resultado aparecerá en un *catálogo topológico*, el cual podemos consultar. Ese catálogo es *la clasificación de superficies*.

3.2. La clasificación de superficies

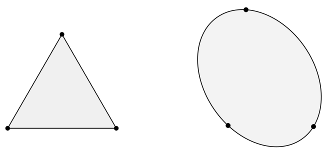
A nivel topológico, el concepto de *superficie* requiere de una formalización previa; la idea fundamental es que se trata de un objeto que, localmente, tiene el aspecto de un plano. Aquí nos limitaremos a admitir una definición informal. Pese a ello, será posible realizar una argumentación de los hechos que vayamos presentando. Tomaremos [3], capítulo 4 como principal referencia.

Superficies como uniones de triángulos

Nuestro método consistirá en describir las superficies desde un punto de vista *combinatorio*: para nosotros, una *superficie* será una *unión finita de triángulos*, que respete a mayores ciertas reglas de incidencia. Además, atenderemos exclusivamente a su *forma* (como ya hemos apuntado, a las características topológicas) y no tanto a su aspecto concreto (sus propiedades métricas, como el área; su regularidad o suavidad, su curvatura, etc.).

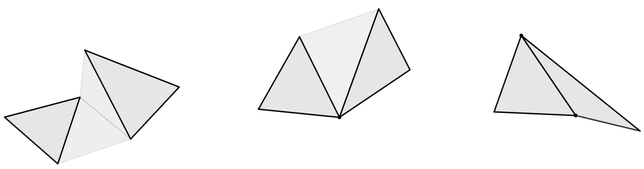
¿Y qué entenderemos por *triángulo*?

Un triángulo será una figura compuesta por los siguientes elementos: tres *puntos* o *vértices* distintos; tres *lados* o *aristas*, que unen los vértices dos a dos y la *región* o *cara* comprendida por todos ellos. Pero aceptaremos que un triángulo podrá ser tal cosa independientemente de su *geometría*. Por ejemplo, los triángulos también están autorizados a ser curvos si la construcción de la superficie lo requiere. Lo único importante es que consten de los elementos y las reglas de incidencia que hemos descrito.



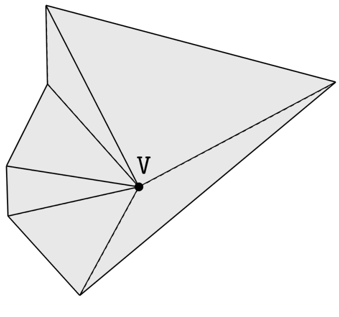
Dicho esto, asumiremos que los triángulos se pegan entre sí a lo largo de sus aristas, imponiendo unas exigencias concretas. No todo vale ([3], p. 57):

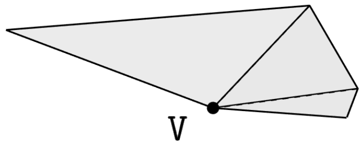
S1 Dos triángulos cualesquiera tienen o bien un vértice o bien una arista en común, o bien son disjuntos.



S2 Cualquier arista pertenece, como máximo, a dos triángulos distintos.

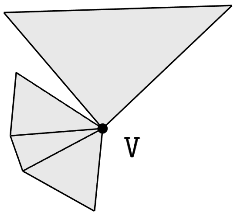
S3 Para cada vértice V de la superficie, la unión de los triángulos a los que pertenece V tiene la misma forma que un círculo o un semicírculo.





S4 Dados dos vértices cualesquiera de la superficie, existe un camino a través de aristas que los une.

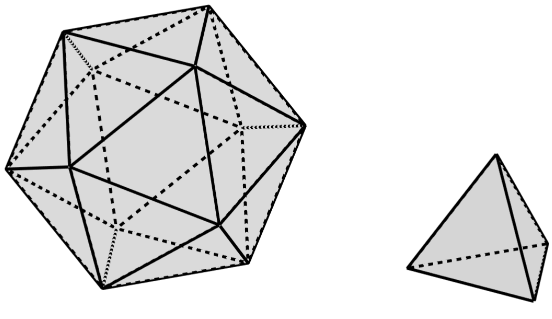
S1 y **S2** imponen unas reglas combinatorias sobre el modo en que los triángulos inciden entre sí. Por ejemplo, una arista no puede ser común a tres triángulos o más. Esto está en estrecha relación con **S3**, que vendría a afirmar que, cerca de cada punto, las superficies se pueden *aplastar* para obtener un círculo o semicírculo cuyo centro es el vértice en cuestión. Así, situaciones como la siguiente quedarían prohibidas:



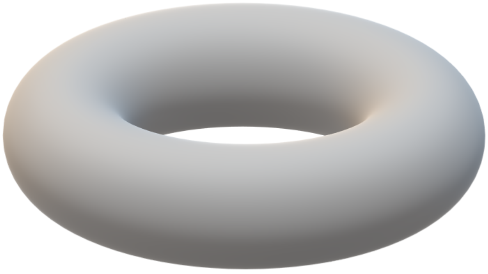
¿Y por qué **S4** se da por hecho? Si no fuese así, entonces se podrían distinguir en cualquier superficie varias uniones de triángulos separadas unas de otras, en las que **S4** sí se cumpliría. Nos bastaría tomar cada una de esas uniones y estudiarlas por separado.

Algunos ejemplos

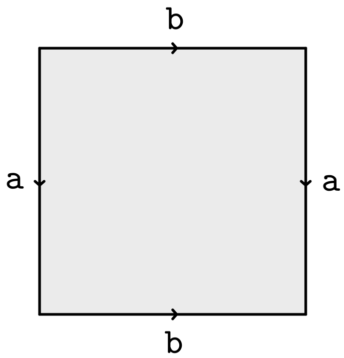
Para un primer ejemplo, podemos pensar en poliedros regulares compuestos por triángulos. El tetraedro y el icosaedro serán superficies; es sencillo observar en ellos las cuatro propiedades que hemos exigido. Aunque son cuerpos distintos, presentan la misma forma; concretaremos esto más adelante.



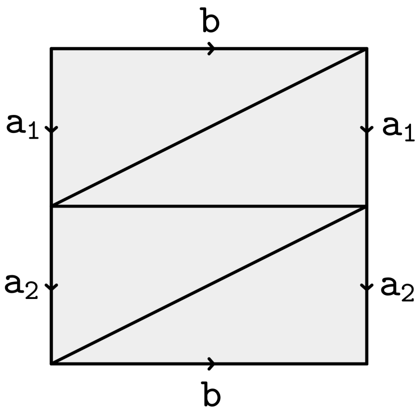
También es posible adaptar superficies conocidas de antemano a esta definición; por ejemplo, **el toro**. Coloquialmente, se dice que tiene la forma de una rosquilla:



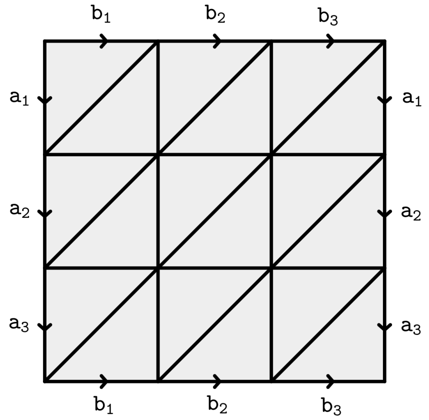
Es habitual su representación a partir de un cuadrado, mediante el *pegado* de sus lados. Los puntos de los lados etiquetados con la misma letra son identificados entre sí según el sentido que indican las flechas; es decir, como si se tratase de las dos mitades de una cremallera. Esto permite obtener la superficie a partir de una figura plana.



¿Es posible representarlo como una unión de triángulos?
Sí, pero no cualquiera vale. En la siguiente imagen se presenta como tal, pero incumple **S1** en tanto que existen triángulos que tienen en común hasta dos aristas (debido al pegado).

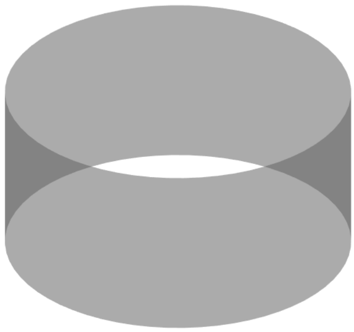


Para conseguir una triangulación válida hay que refinar y dividir nuestras *cremalleras* en partes más pequeñas ([3], p. 61):



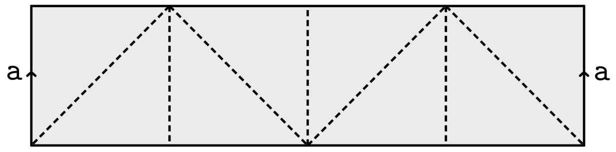
Efectivamente, estamos prescindiendo de las características relativas a la geometría para observar solamente propiedades sobre la forma y la incidencia entre los triángulos. De hecho, construiríamos la superficie en forma de rosquilla curvando los triángulos.

Superficies como el toro o el icosaedro tienen la propiedad de ser *ilimitadas*: si habitásemos *dentro* de ellas, jamás encontraríamos un punto a partir del cual resultara imposible avanzar (comparemos, por ejemplo, el icosaedro con La Tierra). Sin embargo, existen otras en las que esto podría suceder. ¿Qué encontraríamos al vivir *dentro* de un cilindro (sin bases)?

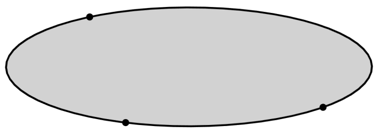


Este cilindro es un ejemplo de un tipo de superficies que tienen *límites*: desde su interior, apreciaríamos fronteras imposibles de trascender. Esas fronteras son los dos bordes que quedan tras retirar las bases. A igual que el toro, se puede representar mediante una figura plana, como es el rectángulo. Esta vez pegaríamos solamente dos de sus lados. De hecho, puede entenderse como un paso intermedio en la construcción del toro.

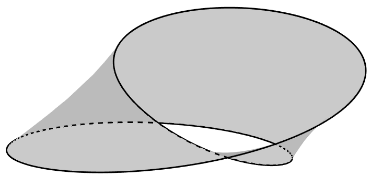
Naturalmente, el cilindro será también una superficie en el sentido que hemos admitido; es decir, es representable como la unión de un número suficiente de triángulos ([3], p. 68):



Podemos encontrar ejemplos de superficies con un único tramo de borde también (el cilindro cuenta con 2). Uno de ellos sería el *disco*, correspondiente a la idea de un mundo *plano* y que podría representarse como la *unión* un único triángulo.



No obstante, no es éste el único ejemplo. Pese a las apariencias, la **banda de Möbius** tiene asimismo una única componente de borde:

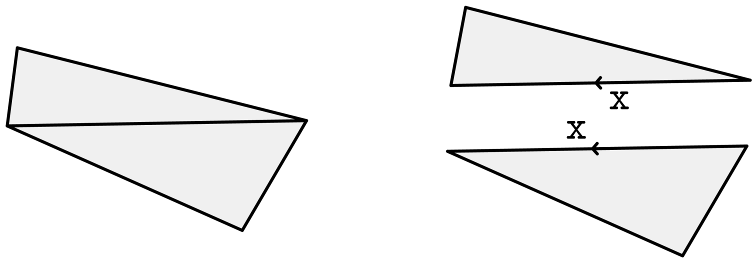


Puede contemplarse también como una unión de triángulos, empleando la configuración del cilindro que se muestra más arriba.

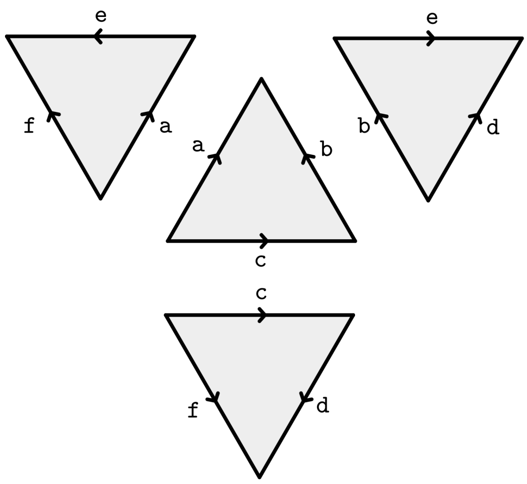
Cortando superficies

Para estudiar y clasificar las superficies, aplicaremos transformaciones que nos lleven a otras superficies *sin cambiar la forma* (en términos de la topología, *homeomorfismos*). Como ya apuntábamos en la introducción, todo estará permitido (estirar, encoger o doblar cualquier parte de la superficie, cambiar su tamaño, manejar distintas triangulaciones) salvo romper la superficie o pegar partes de la misma que originalmente no estuvieran unidas. No obstante, un recurso muy recurrente será cortar a lo largo de las aristas de los triángulos que componen la superficie pero, posteriormente, volver a pegar respetando la disposición inicial de las uniones. Con la misma notación que hemos utilizado en el diagrama del toro podemos registrar esos cortes para reconstruir la superficie a posteriori.

De hecho, siguiendo este procedimiento es posible descomponer toda la superficie en triángulos con aristas etiquetadas. A partir de la información de esas etiquetas, puede reconstruirse la superficie en el mismo modo en que se descompuso.

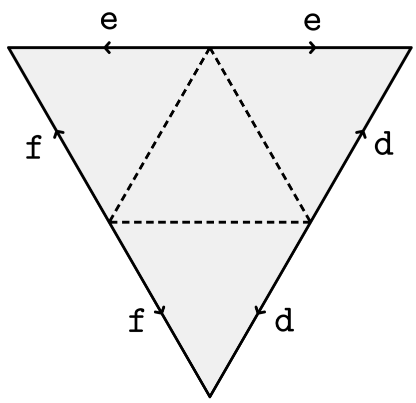


Un ejemplo de esta descomposición podría obtenerse del tetraedro:

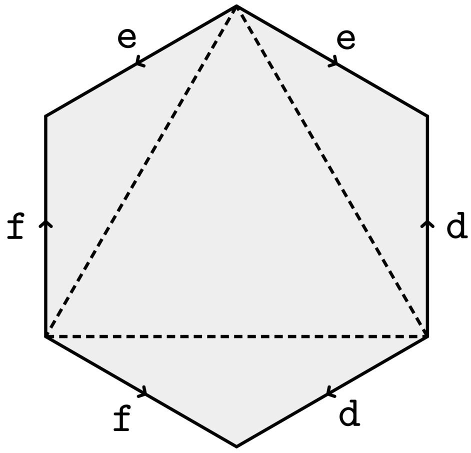


En consonancia con lo anterior, permitiremos que los propios triángulos puedan transformar su geometría sin cambiar la configuración con que unos y otros inciden entre sí. Todo esto deja invariante la forma de cualquier superficie y nos permite encontrar una representación que será de gran utilidad, del estilo de la que empleábamos anteriormente para el toro.

Como ya hemos comentado, partiendo de la descomposición en triángulos podíamos recomponer los cortes realizados (pegar los triángulos entre sí obedeciendo a las etiquetas). Pero en lugar de recuperar una superficie completa, seguimos este proceso hasta obtener una sola figura plana ([3], p. 68–70). En el ejemplo del tetraedro, una posibilidad sería la siguiente:



Transformando los triángulos, llegamos a un hexágono regular:



Símbolo de superficie

Mediante este procedimiento, cualquier superficie queda representada por un polígono triangulado de un cierto número de lados, los cuales pueden identificarse de dos en dos para recuperar una superficie con la misma forma que la original. Más allá del aspecto que tengan estas representaciones gráficas, nuestro interés se centrará en el manejo de *símbolos de superficie* ([3], p. 71). Un símbolo de superficie es una secuencia de letras a partir de la cual se obtiene toda la información necesaria para conocer un polígono que da lugar a la superficie en cuestión, a través del pegado de sus lados identificados.

Tomando un vértice cualquiera como punto de partida y, siguiendo el sentido de las agujas del reloj, se escriben en orden las letras con que están etiquetados los lados del polígono. El sentido de las flechas se recoge en el símbolo escribiendo en la letra correspondiente un exponente -1 si la flecha apunta hacia el sentido antihorario, y obviando el exponente 1 si ésta apunta en sentido horario (el sentido del recorrido que lleva el símbolo). Así, en el caso anterior del tetraedro escribiríamos su símbolo como

$$e^{-1}ed^{-1}df^{-1}f$$

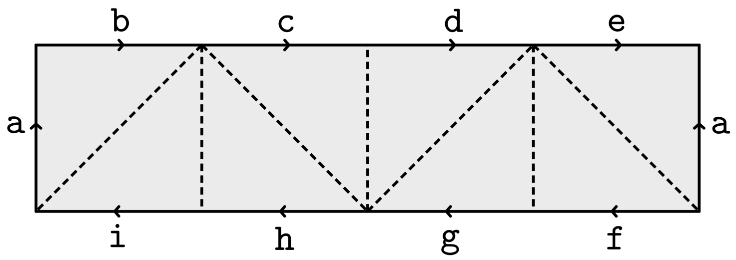
o también

$$df^{-1}fe^{-1}ed^{-1}$$

tomando otro vértice como punto de partida. Todos los símbolos que difieran unos de otros en este sentido serán considerados iguales a todos los efectos. En cuanto al toro, su símbolo se puede escribir como

$$b_1b_2b_3a_1a_2a_3b_3^{-1}b_2^{-1}b_1^{-1}a_3^{-1}a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

No es necesario que todos los lados queden identificados. En cualquier caso, cada lado tendrá su etiqueta. Es lo que ocurre en un cilindro; éste tiene símbolo $bcdea^{-1}fghia$ ([3], p. 68):



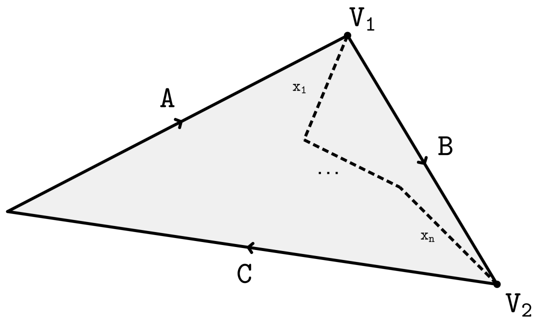
Con el uso de símbolos, las triangulaciones pasarán a un segundo plano. Tendremos en cuenta su existencia, pero las transformaciones que nos llevarán a catalogar las superficies se centrarán en los lados de los polígonos que las representan y en la simplificación y ordenación de los símbolos.

Las operaciones elementales

En este sentido, nos serviremos de tres operaciones elementales que conservan la forma de las superficies ([3], pp. 72–73). Utilizaremos letras mayúsculas para denotar grupos de letras minúsculas en un símbolo. Recurriremos a escribir un exponente -1 sobre una de aquellas mayúsculas para representar la *inversión* del grupo de etiquetas (en minúsculas) que ésta comprende: si $A = a_1a_2 \ldots a_n$, entonces $A^{-1} = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1}$.

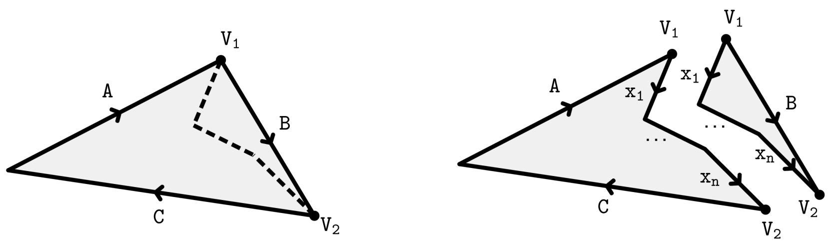
Operación 1

Supongamos que tenemos un símbolo de la forma ABC, y que los vértices V_1 y V_2 que flanquean B están unidos por un camino de aristas de triángulos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ interior al polígono:



Como venimos apuntando, podremos cortar por dicho camino y, recíprocamente, pegar a lo largo de él. En símbolos,

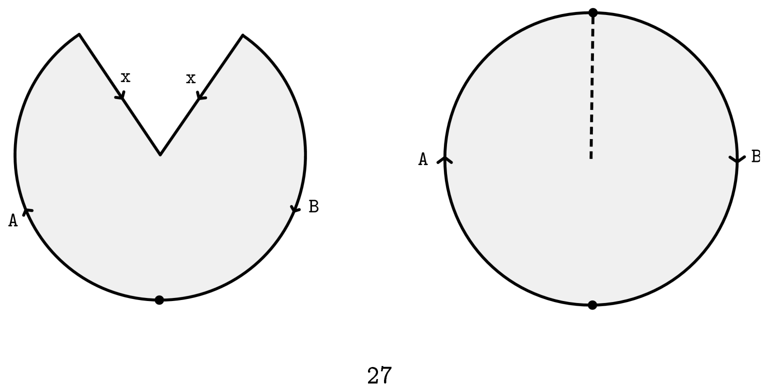
$$ABC \rightleftarrows Ax_1x_2\ldots x_nC, \quad Bx_n^{-1}x_{n-1}^{-1}\ldots x_1^{-1}.$$



El interés de esta operación reside en cortar y, posteriormente, pegar por otras aristas distintas.

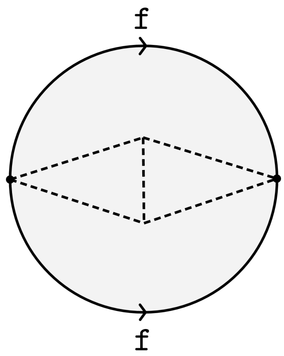
Operación 2

La segunda operación sirve mayormente a la simplificación de símbolos. Concretamente, si tenemos un símbolo de la forma $Axx^{-1}B$, podremos pegar a lo largo de la arista x para quedarnos con AB:



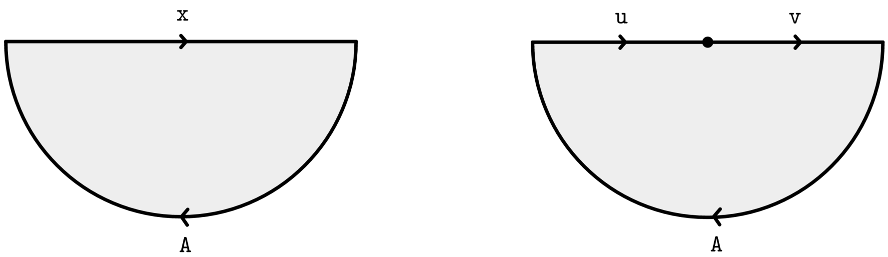
$$Axx^{-1}B \leftrightarrows AB$$

Volviendo al ejemplo del tetraedro, esta operación nos permitiría prescindir de (simplificar) etiquetas en su símbolo. Éste se escribiría (por ejemplo) como ff^{-1}:



Operación 3

En ocasiones, la disposición de los triángulos en una superficie permite agrupar aristas, bien porque éstas no se identifican, bien porque su orden y la manera en que lo hacen así lo permiten. Por tanto, dada una arista etiquetada por x en un símbolo Ax, es posible dividirla en dos y etiquetarla con dos letras uv. En este caso, debe hacerse cada vez que aparezca la etiqueta x, y utilizando letras u, v que no se encontraran ya en A (para no provocar identificaciones a mayores).



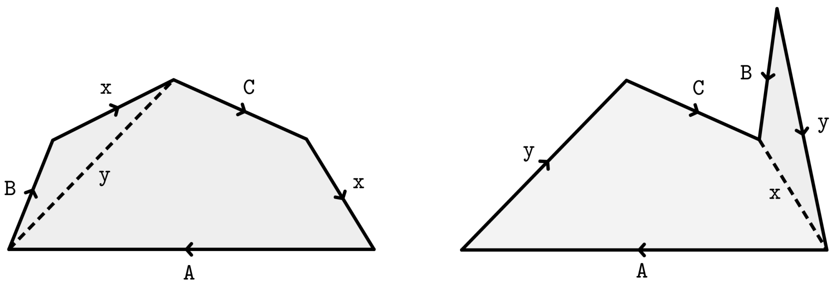
$$Ax \rightleftarrows Auv$$

Más operaciones

Con estas tres operaciones vamos a construir otras cuatro de mayor complejidad, pero que seguirán conservando la forma por tratarse de composiciones de aquellas ([3], pp. 73–74).

Operación 4

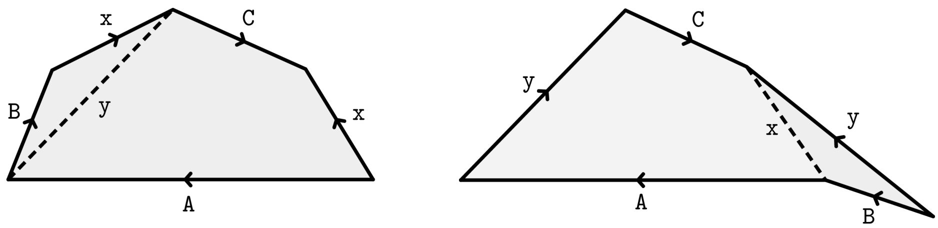
Dado un símbolo de la forma $ABxCx$, podemos reemplazarlo por $AyCB^{-1}y$, siendo y una etiqueta que no aparece en A, B o C. Para ello, se utiliza la operación 1 en ambos sentidos pero con aristas distintas. Por otra parte, podemos referirnos a una sola etiqueta y gracias a la operación 3, que aglutina todas las etiquetas que surgían del corte en la operación 1. Aunque subyacen múltiples aristas tras la misma etiqueta, la identificación es la misma. En otras palabras, no nos importa omitir todas las aristas porque sabemos que existe una triangulación válida tras la etiqueta única.



$$ABxCx \leftrightarrows AyCB^{-1}y$$

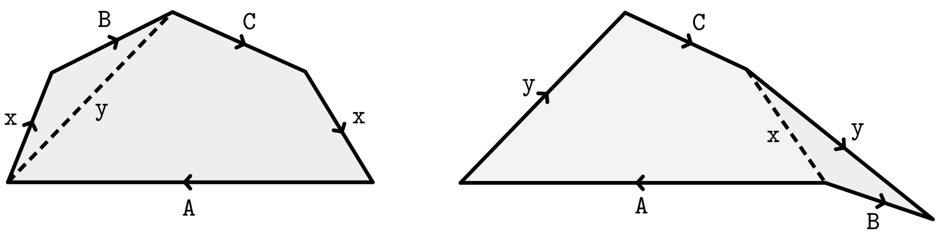
En las mismas condiciones, disponemos de las operaciones 5, 6 y 7, que recogemos a continuación. Cada una tendrá utilidad en una determinada situación para agrupar o trasladar etiquetas en un símbolo.

Operación 5



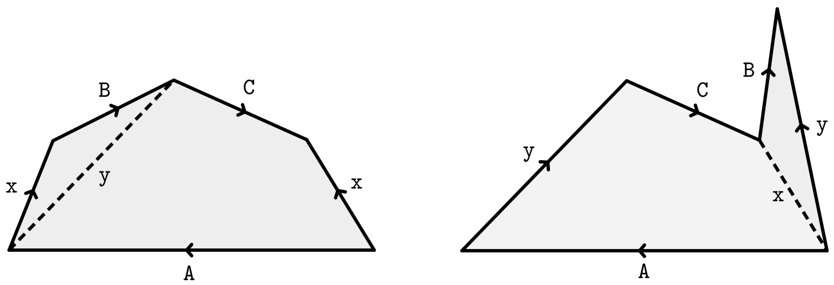
$$ABxCx^{-1} \leftrightarrows AyCy^{-1}B$$

Operación 6



$$AxBCx \leftrightarrows AyCyB^{-1}$$

Operación 7



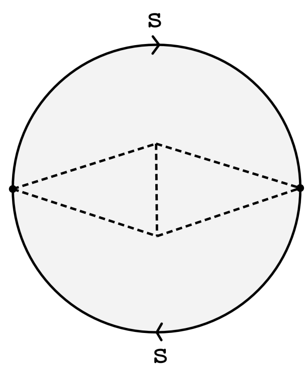
$$AxBCx^{-1} \leftrightarrows AyCBy^{-1}$$

Hay que destacar que, aunque nuestro enfoque es informal, el manejo de símbolos que acabamos de presentar puede situarse en un marco completamente riguroso. Es decir, podríamos olvidarnos de la idea de superficie como objeto espacial y reducir su tratamiento al propio de estas cadenas de etiquetas, dotadas de normas y conceptos definidos con precisión y mayor simplicidad. La *informalidad* a la que nos referimos comprendería, más bien, la transición de dicha idea de superficie a los símbolos que vamos a estudiar.

Cross–caps. El *plano proyectivo*

Sabemos que cada una de las etiquetas que aparece en un símbolo de superficie puede aparecer, como máximo, dos veces. En ese caso, una de las configuraciones que pueden encontrarse es la repetición de dicha etiqueta en el mismo sentido. Es decir, configuraciones de la forma $\ldots s \ldots s \ldots$.

Si consideramos el símbolo ss, lo podemos representar en forma de polígono como hacíamos con el tetraedro; en esencia, se trata de un disco en el que identificamos los bordes de forma opuesta.



Esta superficie es el llamado **plano proyectivo**. Su construcción pasa precisamente por pegar puntos antipodales en una esfera. O lo que es equivalente, identificar en el espacio todos los puntos que pertenecen a una misma recta vectorial, siguiendo el enfoque de la Geometría Proyectiva. No es posible representarlo adecuadamente en tres dimensiones, pues al hacerlo se interseca a sí mismo. Esta propiedad le ha valido el nombre de *cross–cap* en lengua inglesa.

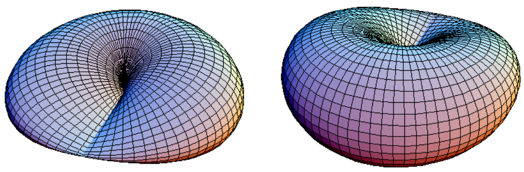


Figura 3.3: Modelo 3D del plano proyectivo. Creado con el software *Mathematica*.
Fuente: Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CrossCapTwoViews.PNG

En todo caso, será una superficie muy interesante desde nuestro punto de vista.

Coleccionando planos proyectivos

Al hilo de esto, el primer resultado que vamos a obtener es que la aparición de configuraciones $\ldots s \ldots s \ldots$ en un símbolo de superficie sugiere la presencia de planos proyectivos adheridos a dicha superficie, los cuales podremos colocar al frente del símbolo ([3], pp. 74–75).

Supongamos que tenemos en un símbolo tal configuración, y que la etiqueta $\bar{s}_1$ es la primera que aparece de tal forma. Agrupamos en letras mayúsculas el resto de etiquetas: $A_1\bar{s}_1B_1\bar{s}_1C_1$. Entonces podemos utilizar la operación 4 para transformarlo en $\bar{s}_1B_1A_1^{-1}\bar{s}_1C_1$ y, posteriormente, la operación 6 para conseguir

$$s_1s_1\left(B_1A_1^{-1}\right)^{-1}C_1 = s_1s_1A_1B_1^{-1}C_1.$$

Ahora sabemos que en A_1 no hay etiquetas de interés, pues $\bar{s}_1$ era la primera. Nos fijaríamos en las etiquetas que hay en $B_1^{-1}C_1$ y elegiríamos, si existe, la primera etiqueta $\bar{s}_2$ con la propiedad mencionada. Suponiendo que

$$B_1^{-1}C_1 = A_2\bar{s}_2B_2\bar{s}_2C_2,$$

volveríamos a aplicar la combinación anterior de operaciones en este bloque, obteniendo

$$s_1s_1s_2s_2A_1A_2B_2^{-1}C_2.$$

Iterando el proceso, acabamos llegando a un símbolo

$$s_1s_1s_2s_2\ldots s_ns_nR$$

en un número finito de pasos, pues en cada paso no añadimos etiquetas nuevas (sólo cambiamos unas por otras, manteniéndose constante la longitud del símbolo). Además, éste da lugar a una superficie con la misma forma que la original, en tanto que hemos utilizado exclusivamente operaciones que conservan la forma. El resultado es que hemos agrupado todos los planos proyectivos ocultos en la superficie; naturalmente, en R ya no aparecen repeticiones como $\ldots s \ldots s \ldots$, ni como $\ldots s^{-1} \ldots s^{-1} \ldots$. ¿Por qué estas últimas tampoco? Notemos que si aparece una etiqueta como $\ldots s^{-1} \ldots s^{-1} \ldots$, podemos sustituirla por otra etiqueta t con exponente 1 y la identificación que representa sigue siendo la misma. Es decir, no depende del sentido en el que leamos los símbolos, aunque hayamos escogido uno por defecto.

Observemos que no todas las etiquetas que aparecen repetidas en un símbolo acaban dando lugar a un plano proyectivo. Si tuviéramos un símbolo como $abcabc$, aplicando directamente la operación 6 pasamos a $aa\,(bc)^{-1}\,bc$. O lo que es lo mismo, aa si simplificamos con la operación 2. Nos hemos quedado con un solo plano proyectivo.

Coleccionando *asas*

A continuación, vamos a fijarnos en otra configuración de entre aquellas que pueden aparecer en un símbolo, y que ya nos es familiar. Nos estamos refiriendo a

$$\ldots a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1} \ldots .$$

Se trata de **toros**, también conocidos como *asas* por la forma en que se representan adheridos a una superficie. Nuestro objetivo ahora será extraer todas las asas ocultas en el símbolo y colocarlas juntas ([3], pp. 75–76). Partiremos de lo que ya hemos obtenido. Esto es, un símbolo de la forma SR donde S está compuesto por planos proyectivos y R es el resto que permanece tras aplicar aquel procedimiento.

Supongamos que encontramos en R una configuración del tipo

$$\dots \bar{a_1} \dots \bar{b_1} \dots \bar{a_1}^{-1} \dots \bar{b_1}^{-1} \dots$$

Denotando por mayúsculas al resto de etiquetas, todo el símbolo se leería

$$SA\bar{a_1}B\bar{b_1}C\bar{a_1}^{-1}D\bar{b_1}^{-1}E.$$

El primer paso es aplicar la operación 5; a saber, desplazamos el bloque A hacia atrás hasta colocarlo detrás de $\bar{a_1}^{-1}$ (que cambia de etiqueta):

$$S\tilde{a_1}B\bar{b_1}C\tilde{a_1}^{-1}AD\bar{b_1}^{-1}E.$$

A continuación, empleamos la operación 7 para intercambiar los bloques $C\tilde{a_1}^{-1}$ y AD:

$$S\tilde{a_1}B\tilde{b_1}ADC\tilde{a_1}^{-1}\tilde{b_1}^{-1}E.$$

Un nuevo intercambio con la misma operación deja unidos todos los bloques que al principio eran intermedios:

$$Sa_1ADCB\tilde{b_1}a_1^{-1}\tilde{b_1}^{-1}E.$$

Ahora ya solo resta aplicar de nuevo la operación 5, con lo que aquellos bloques se sitúan al final:

$$Sa_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}ADCBE.$$

Seguidamente, inspeccionaríamos el bloque $ADCBE$ en busca de otra configuración similar e iteraríamos el proceso. Gracias al mismo argumento de antes, terminamos tras un número finito de pasos. El símbolo se habrá transformado en

$$Sa_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \dots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}R,$$

denotando R el nuevo resto.

Tampoco en este caso ocurre que cada aparición de una configuración como

$$\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$$

garantice la presencia de un toro. Tómese como ejemplo el símbolo del toro que obtuvimos más arriba,

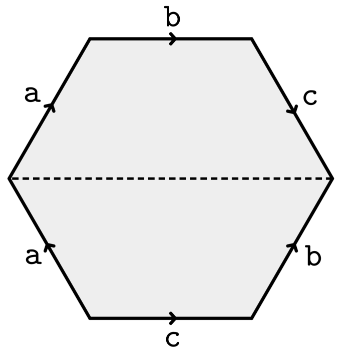
$$b_1b_2b_3a_1a_2a_3b_3^{-1}b_2^{-1}b_1^{-1}a_3^{-1}a_2^{-1}a_1^{-1},$$

que contiene múltiples de estas configuraciones.

La reproducción de los planos proyectivos

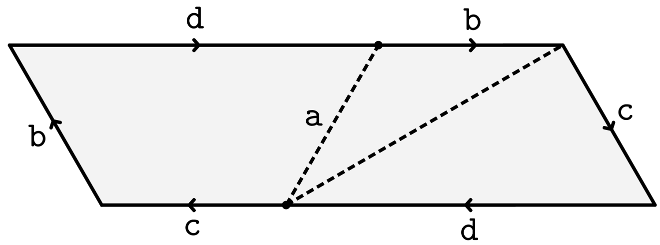
Ya sabemos transformar un símbolo dado en una colección de planos proyectivos, después toros (o asas) y un resto. Antes de continuar en la misma dinámica inspeccionando el nuevo resto, nos detendremos a observar un fenómeno que simplificará nuestra tarea ([3], p. 76).

Este fenómeno tiene que ver con los dos elementos que hemos extraído del símbolo. Si tenemos un plano proyectivo adherido a un toro,



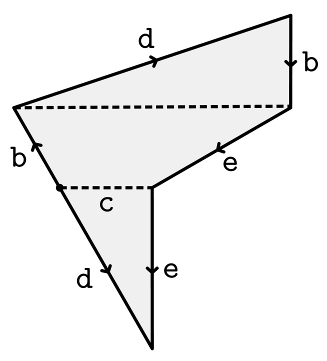
$$abcb^{-1}c^{-1}a,$$

podemos aplicar primero la operación 4 en sentido inverso para la etiqueta a, extrayendo el bloque $b^{-1}c^{-1}$:



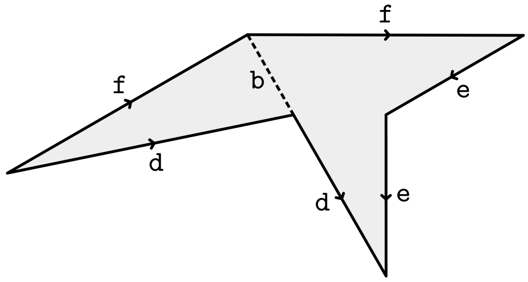
$$cbdbcd = cdcbdb$$

Después, procede la operación 6 sobre la etiqueta c, extrayendo d:



$$eed^{-1}bdb$$

Misma idea con el bloque bdb, y ya casi lo tenemos. Sólo resta (si queremos) reemplazar la etiqueta d^{-1} por otra orientada en sentido contrario para simplificar la notación.



$$eed^{-1}d^{-1}ff \to eeggff$$

Acabamos de probar que cuando un pano proyectivo de adhiere a un toro, ¡Se engendran tres planos proyectivos!

Esto quiere decir que, en el momento en que un solo plano proyectivo habite en la superficie, todos los toros *se contagiarán* y encontraremos únicamente planos proyectivos. Por tanto, según lo que sabemos hasta ahora, cualquier símbolo podrá llevarse a la forma SR, donde S es una colección de planos proyectivos o toros (y no ambos a la vez) y R es un cierto resto en el que no existen configuraciones de la forma $\ldots s \ldots s \ldots$ ó $\ldots a \ldots b \ldots a^{-1} \ldots b^{-1} \ldots$.

Descubriendo los bordes

Ahora sí, continuamos inspeccionando el resto R ([3], pp. 76–77). Si ahora tenemos una etiqueta repetida x en R, ya no puede ocurrir en la forma $\ldots x \ldots x \ldots$, ni tampoco como $\ldots x^{-1} \ldots x^{-1} \ldots$. Todas estas configuraciones ya las hemos extraído al buscar planos proyectivos.

Entonces deberá ser $\ldots x \ldots x^{-1} \ldots$ o $\ldots x^{-1} \ldots x \ldots$. Consideremos una etiqueta y que ocurra entre x y x^{-1}. Notemos que esta etiqueta no puede repetirse en R con el mismo exponente, por la misma razón que hemos apuntado antes. ¿Puede repetirse con exponente -1? Desde luego, si existe dicha repetición debe encontrarse entre x y x^{-1}. De lo contrario, tendríamos o bien

$$\ldots y^{-1} \ldots x \ldots y \ldots x^{-1} \ldots,$$

configuración que responde a un toro y ya habríamos extraído antes, o bien

$$\ldots x \ldots y \ldots x^{-1} \ldots y^{-1} \ldots,$$

que se trata del mismo caso. Por lo tanto, en caso de repetirse la etiqueta, forzosamente es o bien

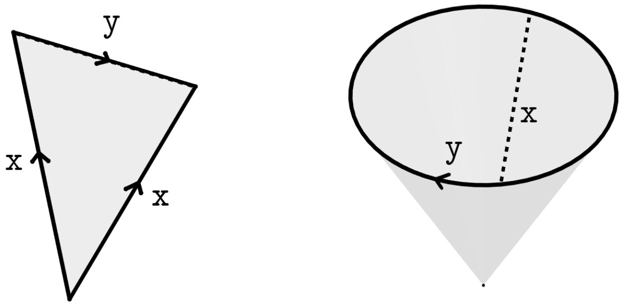
$$\ldots x \ldots y \ldots y^{-1} \ldots x^{-1} \ldots$$

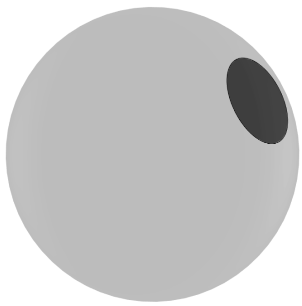
o bien

$$\ldots x \ldots y^{-1} \ldots y \ldots x^{-1} \ldots .$$

Se trataría, por tanto, de una etiqueta de las mismas características que x. Por esta razón, podemos suponer (sin pérdida de generalidad) que las etiquetas que se encuentran entre x y x^{-1} no se repiten en el símbolo. Es decir, no responden a identificaciones. Siendo éste el caso, podemos servirnos de la operación 2 para fusionar todas ellas en una y considerar que entre x y x^{-1} sólo hay una etiqueta y. Y, en consecuencia, suponemos que el resto R tiene la forma $Axyx^{-1}B$. ¿Qué sentido tiene esta nueva configuración?

Si pensamos en ella de manera aislada, esto es, como un símbolo que se reduce a xyx^{-1}, nos encontramos con algo que se puede representar como un cono. O lo que es lo mismo, un *borde*.





Otra colección más

Al igual que hicimos con los toros y los planos proyectivos, podemos arrastrar estos bordes al comienzo de R. Basta aplicar la operación 5 para desplazar el bloque A hasta la parte trasera del símbolo:

$$Axyx^{-1}B \to zyz^{-1}AB$$

Una vez más, podemos repetir este proceso con cada borde que encontremos en R hasta recopilarlos todos tras los toros o planos proyectivos (según el caso).

¿Y qué queda después? Si aún tenemos etiquetas en el resto, es claro que ya ninguna de ellas se puede repetir. Supondremos entonces, en virtud de la operación 3, que en realidad tenemos una sola etiqueta w. De modo que hemos llegado a un símbolo SBw, siendo S una colección de toros o planos proyectivos, B una colección de bordes y w una etiqueta que no aparece ni en S ni en B. Vamos a ver cómo esta etiqueta se traduce en otro borde.

Por la operación 2, siempre podremos introducir una etiqueta u de manera que se simplifique consigo misma, en la forma

$$SBwu^{-1}u = uSBwu^{-1}.$$

La idea será atravesar todo el símbolo con la etiqueta u, hasta colocarla junto a w.

Si S está formado por planos proyectivos y s_1s_1 es el primero de ellos, entonces us_1s_1 se transforma en $\tilde{s_1}u^{-1}\tilde{s_1}$ por la operación 4 y, posteriormente, en $\bar{s_1}\bar{s_1}u$ vía la operación 6. Es decir, u es capaz de atravesar todos los planos proyectivos.

Si por contra S es una colección de toros y $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$ es el primero de ellos, entonces u también puede pasar al otro lado. Involucrando etiquetas con exponentes distintos, sólo están a nuestra disposición las operaciones 5 (que *desplaza*) y 7 (que *intercambia*). Primeramente, $ua_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$ se transforma en

$$\tilde{a_1}b_1\tilde{a_1}^{-1}ub_1^{-1}$$

por la operación 5. A continuación, nos servimos de la operación 7 para intercambiar $\tilde{a_1}^{-1}$ y u, obteniendo

$$\tilde{a_1}\tilde{b_1}u\tilde{a_1}^{-1}\tilde{b_1}^{-1}.$$

Una nueva aplicación de esta operación nos lleva a

$$\bar{a_1}u\tilde{b_1}\bar{a_1}^{-1}\tilde{b_1}^{-1},$$

y ahora rematamos con la operación 5:

$$\bar{a_1}\bar{b_1}\bar{a_1}^{-1}\bar{b_1}^{-1}u.$$

Sólo se interponen ya los bordes, recogidos en B. Si $x_1y_1x_1^{-1}$ denota al primero de ellos, simplemente utilizamos la operación 5:

$$ux_1y_1x_1^{-1} \to \tilde{x_1}y_1\tilde{x_1}^{-1}u.$$

De modo que la etiqueta u atravesará éstos últimos también, repitiendo esta manipulación tantas veces como sea necesario. Alcanzamos por fin la forma deseada, $SBuwu^{-1}$.

Conclusiones

A lo largo de esta discusión, hemos demostrado el siguiente resultado ([3], p. 78, proposición 4.1):

Proposición. *Todo símbolo de superficie puede ser transformado por las operaciones 1, 2 y 3 en otro de la forma SB, donde S es una colección de planos proyectivos o toros (no ambos a la vez) y B es una colección de bordes.*

Dicha forma se conoce como *forma normal del símbolo*. Esto puede responder a un mero tratamiento formal de los símbolos. Pero si recordamos cuál era el significado de los mismos y el de las propias operaciones, hemos probado algo más interesante.

Teorema. *Toda superficie (compacta) es homeomorfa a una determinada superficie en forma normal compuesta por planos proyectivos o toros (y no ambos a la vez) y bordes.*

Es decir, existe un catálogo que recoge todas las formas posibles para las superficies, siendo éstas las que se especifican en el enunciado. Es interesante notar cómo únicamente tres elementos o *bloques fundamentales* bastan para ello: los planos proyectivos, los toros y los bordes (los cuales pueden contemplarse como adheridos a una esfera).

De aquí, probando que dos formas normales distintas no son homeomorfas, puede obtenerse un criterio completo de clasificación y comparación de superficies ([3], p. 78, Teorema 4.2):

Teorema (de clasificación de superficies). *Dos superficies (compactas) tienen la misma forma (son homeomorfas) si y sólo si dados sendos símbolos de las mismas sus formas normales presentan el mismo número de planos proyectivos o toros y el mismo número de bordes.*

También dispondríamos de las correspondientes versiones para superficies sin bordes:

Teorema. *Toda superficie (compacta) y sin bordes es homeomorfa a una determinada forma normal compuesta por planos proyectivos o toros (y no ambos a la vez).*

Teorema (de clasificación de superficies sin borde). *Dos superficies (compactas) y sin borde tienen la misma forma (son homeomorfas) si y sólo si dados sendos símbolos de las mismas sus formas normales presentan el mismo número de planos proyectivos o toros.*

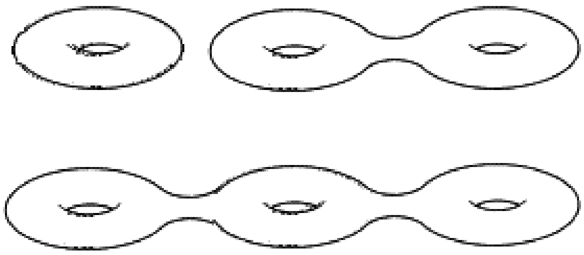


Figura 3.4: Superficies sin borde formadas por uno, dos y tres toros.
Fuente: https://topologia.wordpress.com/2009/01/03/clasificacion-de-superficies-i/

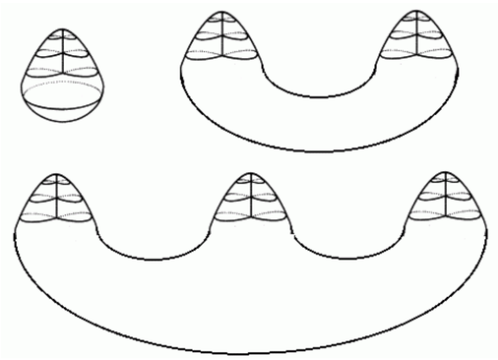


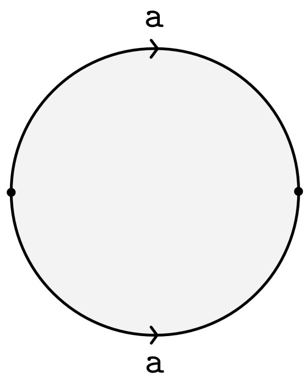
Figura 3.5: Superfices sin borde formadas por uno, dos y tres planos proyectivos.
Fuente: https://topologia.wordpress.com/2009/01/03/clasificacion-de-superficies-i/

Siguiendo el comienzo de la sección, podríamos decir alternativamente que cualquier superficie construida pegando triángulos a lo largo de sus aristas da como producto, forzosamente, una de estas formas normales. Estos resultados proporcionan un *diccionario* en el que se encuentran todas las formas posibles que pueden tomar las superficies.

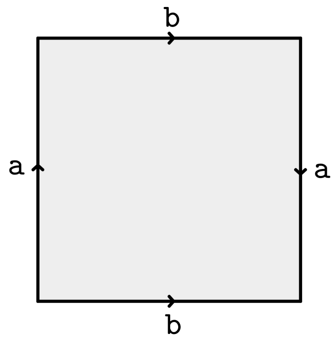
También admite otra lectura: cualquier superficie puede *desenredarse* para obtener otra con la misma forma que ella, compuesta por una esfera a la cual se adhieren asas o planos proyectivos (no ambos) y bordes.

Ejemplos

La forma normal más sencilla es la que está asociada a una esfera; también a un tetraedro o a un icosaedro: aa^{-1}.



Otros ejemplos que podemos comentar son el cilindro, que está formado por dos bordes ($uvu^{-1}xyx^{-1}$), o la llamada **botella de Klein**, compuesta por dos planos proyectivos: $aabb$. Sin embargo, la representación más conocida de esta última no está dada por la forma normal, sino por el símbolo equivalente $abab^{-1}$.



Al igual que el plano proyectivo, esta superficie no se puede representar fielmente en tres dimensiones. Al intentarlo, aparece una *botella* que se corta a sí misma, pues debe pegarse el cuello con la parte interior de la base.

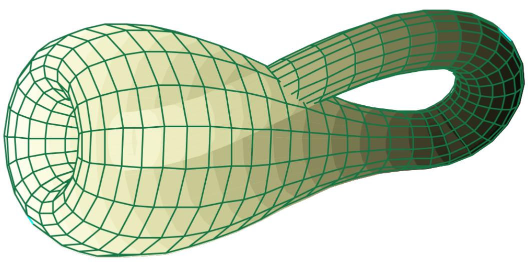
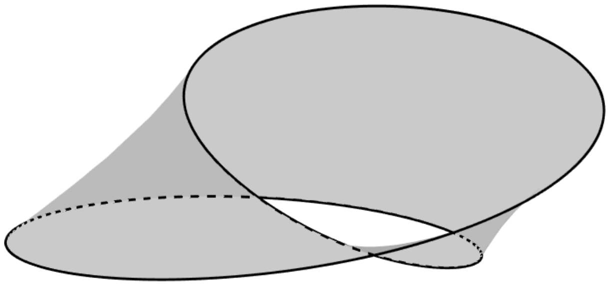


Figura 3.6: Modelo 3D de la botella de Klein. Fuente: Wikimedia Commons. Autor: Tttrung. Creado con *gnuplot 4.0*.
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/5c/Klein_bottle.svg/533px-Klein_bottle.svg.png

Asimismo, es interesante la banda de Möbius; ésta puede representarse a partir de un cuadrado con el símbolo *abac*, lo cual indica la presencia de un plano proyectivo. Si buscamos su forma normal, encontraremos que los elementos que se esconden tras la banda de Möbius son un plano proyectivo y un borde.



$$abac \xrightarrow{\text{Operación 5}} ddb^{-1}c \xrightarrow{\text{Operación 3}} dde \rightarrow ddfgf^{-1}$$

3.3. Invariantes de superficies. La característica de Euler

La demostración que hemos dado sobre la clasificación de superficies es *constructiva*. Es decir, ofrece un método para llegar a la forma normal al mismo tiempo que justifica la validez del resultado.

Sin embargo, el camino a seguir para desentrañar la forma normal de un símbolo dado puede ser largo si nos atenemos al procedimiento que conocemos. Por esa razón, es interesante estudiar algunas propiedades de las superficies que no cambian si la forma tampoco lo hace (de ahí que se conozcan como *invariantes*). Éstos pueden darnos abundante información sobre una superficie sin necesidad de hacer un cálculo explícito de su forma normal. De hecho, permitirán conocerla más rápidamente.

La característica de Euler

Probablemente, uno de los invariantes más célebres es la **característica de Euler** ([3], p. 84). Recordemos que toda superficie S era una unión de triángulos: lleva asociada una triangulación. La característica de Euler de S, que denotaremos por $\chi(S)$, es un entero cuyo cómputo pasa por contar el número de vértices α_0 de esa triangulación, el número de aristas α_1 y el número de caras (triángulos) α_2 y calcular

$$\chi(S) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2.$$

Veamos un ejemplo. Retrocedamos al tetraedro y al icosaedro. En el caso del primero, contamos 4 vértices, 6 aristas y 4 caras. Entonces

$$\chi\,(\mathit{Tetraedro}) = 4 - 6 + 4 = 2.$$

Para el segundo, tenemos 12 vértices, 30 aristas y 20 caras (como su propio nombre indica). El cálculo arroja

$$\chi\,(\mathit{Icosaedro}) = 12 - 30 + 20 = 2 = \chi\,(\mathit{Tetraedro})\,.$$

Es decir, la característica de Euler de ambos poliedros es la misma. Esto viene a corroborar lo que ya hemos adelantado: la característica de Euler se mantiene invariante con la forma, aunque las superficies sean distintas. No obstante, vamos a justificar por qué esto es así.

Un primer resultado

El siguiente resultado, fundamental en cuanto a la clasificación, traslada el cómputo de la característica de Euler de una superficie al polígono que la representa y, por extensión, al símbolo ([3], p. 84, Proposición 4.5):

Proposición. *Sea P un polígono que representa a una superficie S. Supongamos que P tiene V vértices distintos y A aristas distintas. Entonces*

$$\chi\,(S) = V - A + 1.$$

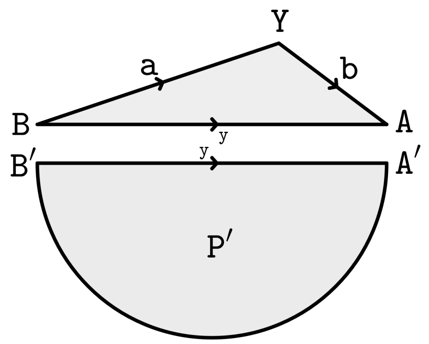
Por *vértices distintos* y *aristas distintas* nos referimos al número de vértices y aristas que se pueden contar en P tras realizar las identificaciones indicadas. Conjuntos de vértices que se identifican entre sí cuentan como uno solo; y dos aristas identificadas entre sí, como una sola también.

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre el número de triángulos que componen S.

Supongamos que S está compuesta por un solo triángulo. En este caso, puede ocurrir que no existan identificaciones (la superficie es un triángulo), en cuyo caso $V = \alpha_0, A = \alpha_1$ y $1 = \alpha_2$, por lo que la fórmula es cierta. La otra opción (puesto que sólo hay tres etiquetas) es que dos de ellas estén identificadas. Entonces contamos $V = \alpha_0 = 2$ (en realidad, perdemos un solo vértice), $A = \alpha_1 = 2$ y $1 = \alpha_2$ nuevamente.

Asumamos que el resultado es cierto para cualquier superficie compuesta por $k-1$ triángulos. Recordemos que una superficie compuesta por k triángulos puede formarse uniendo dichos triángulos de manera sucesiva; podremos encontrar una superficie S' compuesta por $k-1$ triángulos y un polígono P' que la representa de modo que, añadiendo un triángulo a S' (respectivamente, a P') se obtiene S (respectivamente, P). Por la hipótesis de inducción, sabemos que el resultado es cierto para P' y S'.

Si reparamos en los polígonos P y P', existen dos maneras en que P se puede obtener de P' por añadidura del triángulo en cuestión. En la primera, que llamaremos **caso A**, el nuevo triángulo comparte una arista con P'.

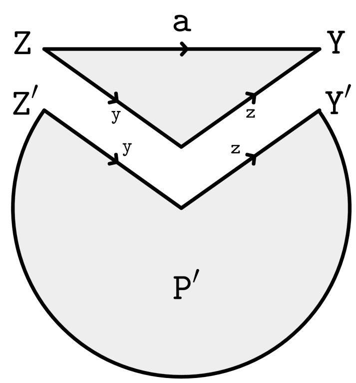


Caso A

En la segunda, que llamaremos **caso B**, dicho triángulo comparte dos aristas con P'. Denotaremos respectivamente por V y A a los vértices y aristas de P; asimismo, haremos lo propio con V' y A' en relación con P'. Por otra parte, α_0, α_1 y α_2 seguirán denotando, de manera respectiva, vértices, aristas y caras de S; α_0', α_1' y α_2' harán lo propio con S'. Así, la hipótesis de inducción garantiza en todo caso que

$$\alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2' = V' - A' + 1.$$

Por otro lado, la orientación de las etiquetas no será relevante en la mayoría de casos.



Caso B

Caso A. Dentro de éste, distinguimos varios subcasos basándonos en si las etiquetas a y b se identifican de algún modo o no.

Caso A.1. La opción más sencilla es que ni a ni b estén identificadas. Por un lado, se tiene que $V = V' + 1$ y $A = A' + 1$. Por otro, $\alpha_0 = \alpha_0' + 1, \alpha_1 = \alpha_1' + 2$ y $\alpha_2 = \alpha_2' + 1$, así que la relación se mantendrá:

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0' + 1 - \alpha_1' - 2 + \alpha_2' + 1 = \\ = V' + 1 - A' - 1 + 1 = V - A + 1 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Caso A.2. Puede ocurrir también que, por ejemplo, la etiqueta a aparezca en P' pero b no lo haga. Observemos que si es al revés, el argumento es exactamente el mismo (cambiaríamos los papeles de b y a). Bajo este supuesto, debemos tener en cuenta cierta casuística con los vértices también. Vamos a considerar los vértices B_1 e Y_1 que flanquean la etiqueta a en el polígono P', de modo que $B = B_1, Y = Y_1$ al producirse la identificación.

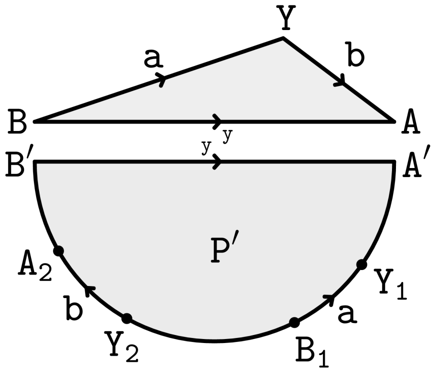
Caso A.2.1. La primera distinción es que $B' = B_1$ en P'. En otras palabras, pudiera ocurrir que los vértices B' y B_1 ya estuvieran identificados en P' a través del pegado de las aristas que los comparten con las aristas etiquetadas como y y a. Tendremos que $V = V' + 1 - 1 = V', A = A' + 1 - 1 = A', \alpha_0 = \alpha_0', \alpha_1 = \alpha_1' + 2 - 1 = \alpha_1' + 1, \alpha_2 = \alpha_2' + 1$, luego

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0' - \alpha_1' - 1 + \alpha_2' + 1 = \alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2' = V' - A' + 1 = V - A + 1.$$

Caso A.2.2. La segunda es que, por contra, $B' \neq B_1$ en P'; no existe identificación previa. Por tanto $V = V' + 1 - 2 = V' - 1, A = A', \alpha_0 = \alpha_0' + 1 - 2 = \alpha_0' - 1, \alpha_1 = \alpha_1' + 1, \alpha_2 = \alpha_2' + 1$, quedando

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0' - 1 - \alpha_1' - 1 + \alpha_2' + 1 = V' - 1 - A' + 1 = V - A + 1.$$

Caso A.3. Consideramos ahora el caso en que ambas etiquetas a y b aparecen en P'. Manteniendo las notaciones anteriores sobre B_1 e Y_1, llamamos A_2 e Y_2 a los vértices que flanquean la etiqueta b en P', de modo que $Y_2 = Y, A_2 = A$ al producirse la identificación. Procedemos como en el apartado anterior con los distintos casos, aunque ahora la complejidad es algo mayor. Hay que reparar en que se produce la identificación colateral $Y_1 = Y_2$. No obstante, se pueden resumir en cuatro.



Caso A.3

Caso A.3.1. En primer lugar, pensamos en que $B_1 = B', A_2 = A', Y_1 = Y_2$ en P'. Tendremos que $V = V' + 1 - 1 = V', A = A' + 1 - 2 = A' - 1, \alpha_0 = \alpha_0' + 1 - 1 = \alpha_0', \alpha_1 = \alpha_1' + 2 - 2 = \alpha_1', \alpha_2 = \alpha_2' + 1$, lo que lleva a

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2' + 1 = V' - A' + 1 + 1 = V - (A' - 1) + 1 = V - A + 1.$$

Caso A.3.2. Contemplamos cualquiera de las siguientes opciones: $B_1 = B', A_2 = A', Y_1 \neq Y_2$, o bien $B_1 = B', A_2 \neq A', Y_1 = Y_2$, o bien $B_1 \neq B', A_2 = A', Y_1 = Y_2$ en P'. En cualquiera de ellas, $V = V' + 1 - 2 = V' - 1, \alpha_0 = \alpha_0' + 1 - 2 = \alpha_0' - 1$ y el resto de relaciones no cambian con respecto al caso anterior. La igualdad sigue siendo cierta.

Caso A.3.3. Aquí pensamos que $B_1 \neq B', A_2 \neq A', Y_1 = Y_2$, o bien $B_1 = B', A_2 \neq A', Y_1 \neq Y_2$, o bien $B_1 \neq B', A_2 = A', Y_1 \neq Y_2$. En cualquiera de estas posibilidades, $V = V' + 1 - 3 = V' - 2, \alpha_0 = \alpha_0' + 1 - 3 = \alpha_0' - 2$. Nuevamente, la igualdad se mantiene.

Caso A.3.4. Si, por último, $B_1 \neq B', A_2 \neq A', Y_1 \neq Y_2$, ocurre que $V = V' + 1 - 4 = V' - 3, \alpha_0 = \alpha_0' + 1 - 4 = \alpha_0' - 3$. Misma conclusión que en los casos anteriores.

Caso A.4. La posibilidad que resta es que las etiquetas a y b sean, en realidad, iguales. Es decir, los lados del triángulo que se añade se identifican entre sí. Bajo este supuesto, sí va a ser relevante la orientación de las etiquetas: existen dos opciones a este respecto.

Caso A.4.1. El triángulo tiene símbolo aay^{-1}. De este modo, los vértices A, B e Y se identifican en uno solo. Como ya es costumbre, debemos pensar en si $B' = A'$ en P' o no. En caso de ser así, $V = V' + 1 - 1 = V', A = A' + 1 - 1 = A', \alpha_0 = \alpha_0' + 1 - 1 = \alpha_0', \alpha_1 = \alpha_1' + 2 - 1 = \alpha_1' + 1, \alpha_2 = \alpha_2' + 1$. Esto lleva a

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0' - \alpha_1' - 1 + \alpha_2' + 1 = V' - A' + 1 = V - A + 1.$$

En caso contrario ($B' \neq A'$), debemos contar $V = V' + 1 - 2 = V' - 1, \alpha_0 = \alpha_0' + 1 - 2 = \alpha_0' - 1$

y el resto de relaciones no cambian con respecto a lo anterior. Por ello, la fórmula sigue siendo válida.

Caso A.4.2. El triángulo tiene símbolo $aa^{-1}y^{-1}$. Ahora solamente los vértices A y B se identifican en uno solo. Si $B' = A'$ en P', $V = V' + 1, \alpha_0 = \alpha'_0 + 1$ y las demás relaciones se mantienen como antes. La fórmula mantiene su validez. En caso contrario, los cambios serían $V = V' + 1 - 1 = V', \alpha_0 = \alpha'_0 + 1 - 1 = \alpha'_0$, luego una vez más tenemos el resultado deseado.

Caso B. Aquí vamos a proceder como en el caso A. Como dos de las tres aristas del triángulo se identifican al añadirlo, no será necesario comprobar tantas variantes.

Caso B.1. Nuevamente, podemos pensar primero que la etiqueta a no aparece en P'. Entonces $V = V' - 1, A = A' - 1, \alpha_0 = \alpha'_0, \alpha_1 = \alpha'_1 + 1, \alpha_2 = \alpha'_2$. Planteando las ecuaciones, tenemos

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_0 - \alpha'_1 - 1 + \alpha'_2 + 1 = V' - A' + 1 = (V' - 1) - (A' - 1) + 1 = V - A + 1.$$

Caso B.2. Por contra, la etiqueta a podría aparecer en P'. Como existe identificación, debemos estudiar qué ocurre con los vértices Y' y Z'. Denotamos por Y_1, Z_1 a los vértices que flanquean la etiqueta a en P', de modo que $Y_1 = Y', Z_1 = Z'$ al identificar.

Caso B.2.1. Supongamos que $Y' = Y_1, Z' = Z_1$ en P'. Contamos $V = V' - 1, A = A' - 2, \alpha_0 = \alpha'_0, \alpha_1 = \alpha'_1 + 1 - 1 = \alpha'_1, \alpha_2 = \alpha'_2 + 1$, y la expresión queda

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_0 - \alpha'_1 + \alpha'_2 + 1 = V' - A' + 1 + 1 = (V' - 1) - (A' - 2) + 1 = V - A + 1.$$

Caso B.2.2. Contemplamos $Y' \neq Y_1, Z' = Z_1$ o bien $Y' = Y_1, Z' \neq Z_1$ en P'. Con respecto al caso anterior, cambia únicamente que $V = V' - 2, \alpha_0 = \alpha'_0 - 1$, así que las ecuaciones nos siguen proporcionando el resultado esperado.

Caso B.2.3. En último lugar, suponemos $Y' \neq Y_1, Z' \neq Z_1$ en P'. Solamente se actualizan las relaciones que incumben a los vértices: $V = V' - 3, \alpha_0 = \alpha'_0 - 2$. Esto permite entonces concluir que la fórmula mantiene su validez en todos los casos, y del principio de inducción se sigue el resultado. ■

Basta entonces disponer de un símbolo de la superficie con tal de conocer su característica de Euler. A mayores, acabamos de comprobar cómo las triangulaciones que forman las superficies pierden importancia, incluso tratándose de un concepto que, en un principio, las involucraba directamente.

La característica de Euler: un invariante de la forma

Complementando al resultado anterior, un comportamiento particular que podemos observar en torno a la característica de Euler es que ésta no cambia al aplicar a un símbolo (polígono) dado cualquiera de las operaciones elementales. Esto es, las operaciones 1, 2, y 3 que, recordemos, componen todas las demás que hemos contemplado ([3], p. 86, Lema 4.6).

En primer lugar, escindir una arista con la operación 3 significa aumentar en uno tanto el número de vértices como el de aristas (etiquetas) distintas; el proceso contrario reduce en uno ambos valores. Podemos afirmar que, en este caso, $V - A + 1$ permanece constante.

Al cortar (respectivamente, pegar) con la operación 2, estamos aumentando (respectivamente, reduciendo) en uno tanto el número de vértices como el de aristas. Como consecuencia, la cantidad $V - A + 1$ no cambia su valor.

Por último, cuando realizamos la operación 1 siempre pegamos después mediante la operación inversa. El número de vértices y aristas distintas en el polígono no cambia: al cortar etiquetamos la arista involucrada y, al pegar, obedecemos a cierta etiqueta que ya existía anteriormente (la cual desaparece). Al igual que hacíamos al presentar la operación 4, estamos pensando en que la cadena de etiquetas que resulta de aplicar exclusivamente la operación 1 se fusiona en una sola por la operación 3 (la cual, como ya hemos apuntado, no modifica la cantidad $V - A + 1$).

Observamos así cómo la transición a la forma normal no cambia la característica de Euler. Es decir, hemos justificado que es invariante ante un tipo particular de transformaciones. No obstante, junto con los resultados previos de clasificación de superficies, esto permite a su vez identificar a este número como un invariante de la forma: si dos superficies tienen la misma forma, entonces tienen la misma forma normal asociada y (por lo que acabamos de observar) la misma característica. Retomando ejemplos anteriores, ahora ya no es tan extraño que el tetraedro y el icosaedro muestren igual característica: ambos son superficies con una forma común, correspondiente a la esfera.

Técnicas de conteo

En aquellos ejemplos de la esfera calculábamos la característica de Euler a partir de triangulaciones. No obstante, es mucho más práctico hacerlo desde un símbolo de la superficie, empleando la expresión $V - A + 1$ que hemos obtenido recientemente (y es aquí donde, para nosotros, reside su gran utilidad). Únicamente hay que ser ordenados contando vértices y aristas.

Para observar el procedimiento, pensemos en un caso concreto. Supongamos que queremos calcular la característica de Euler de una superficie S con símbolo $b^{-1}cda^{-1}dc^{-1}ea$ ([3], p. 87). El conteo de aristas es sencillo, pues basta identificar cuántas etiquetas distintas hay en el símbolo; en este caso, es $A = 5$.

Para hallar el valor de V comenzamos escogiendo una etiqueta cualquiera, por ejemplo b^{-1}. Llamamos P al vértice en el que comienza; como aparece con exponente -1, dicho vértice es el que se encuentra entre b^{-1} y c:

$$b^{-1} \quad P \quad c \quad\quad d \quad\quad a^{-1} \quad\quad d \quad\quad c^{-1} \quad\quad e \quad\quad a$$

Pero entonces también es el vértice en el que comienza c y, por extensión, e.

$$b^{-1} \quad P \quad c \quad\quad d \quad\quad a^{-1} \quad\quad d \quad\quad c^{-1} \quad P \quad e \quad\quad a$$

Llegados aquí, el vértice P ya no vuelve a aparecer. En este caso, escogemos otro y repetimos el proceso: el vértice Q en el que termina b.

$$Q \quad b^{-1} \quad P \quad c \quad\quad d \quad\quad a^{-1} \quad\quad d \quad\quad c^{-1} \quad P \quad e \quad\quad a$$

Pero entonces Q es el vértice en el que termina a y, en consecuencia, en el que termina d:

$$Q \quad b^{-1} \quad P \quad c \quad\quad d \quad Q \quad a^{-1} \quad\quad d \quad Q \quad c^{-1} \quad P \quad e \quad\quad a \quad Q$$

Así que en Q termina c, luego d y a comienzan en él. Hemos terminado.

$$Q \quad b^{-1} \quad P \quad c \quad Q \quad d \quad Q \quad a^{-1} \quad Q \quad d \quad Q \quad c^{-1} \quad P \quad e \quad Q \quad a \quad Q$$

Concluimos que $V = 2$ y por tanto

$$\chi(S) = 2 - 5 + 1 = -2.$$

Completando la clasificación

Con toda la información de que disponemos, es posible calcular la característica de Euler de cualquier superficie imaginable: sabemos cuáles son las posibilidades para la forma normal de una superficie y que la característica de Euler no cambia al pasar a dicha forma normal. Dada una superficie S, existen dos posibilidades ([3], p. 86):

1. La forma normal de la superficie S está formada por g toros y r bordes.

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}\dots x_1y_1x_1^{-1}x_2y_2x_2^{-1}\dots x_ry_rx_r^{-1}$$

Por cada toro, tendremos dos aristas distintas. Por cada borde, dos también. Por consiguiente, $A = 2g + 2r$.

Contemos cuántos vértices distintos hay. Escogemos como primer vértice el vértice P en el que comienza el símbolo. Por un lado, este vértice resulta ser el único que se encuentra entre las aristas de los toros (notemos que, en la representación del toro a partir de un cuadrado, los cuatro vértices concurren en uno solo al identificar). Por otro, es también el que flanquea todos los bordes. Además de éste, encontramos un vértice adicional por cada borde. En total contamos $V = r + 1$ vértices distintos.

Con todo esto, la característica de Euler de una superficie como ésta es

$$\chi(S) = r + 1 - 2g - 2r + 1 = 2 - 2g - r.$$

2. La forma normal de la superficie S está formada por g planos proyectivos y r bordes.

$$s_1 s_1 s_2 s_2 \dots s_g s_g x_1 y_1 x_1^{-1} x_2 y_2 x_2^{-1} \dots x_r y_r x_r^{-1}$$

Por cada plano proyectivo, contamos esta vez una arista e, igual que antes, dos aristas por cada borde: $A = g + 2r$.

Escogiendo el mismo vértice P de antes, se observa que es el único vértice que se encuentra entre las aristas de los planos proyectivos. Para los bordes, ocurre lo mismo que en el caso anterior. Por tanto vuelve a ser $V = r + 1$.

Todo esto lleva a que

$$\chi(S) = r + 1 - g - 2r + 1 = 2 - g - r.$$

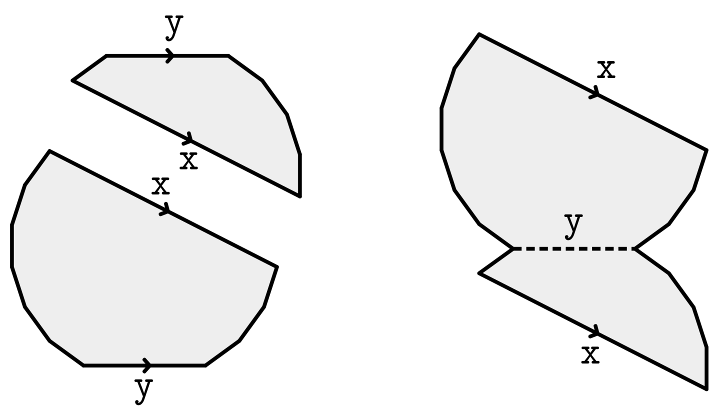
En todo caso, el entero g se conoce como *género* de la superficie, e indica el número de asas o planos proyectivos (según corresponda) que aparecen en la forma normal de la misma.

3.4. Cálculo efectivo de la forma normal

Volvamos ahora al comienzo de la sección, e imaginemos que tenemos una superficie dada por un símbolo. Para comprender cómo es la superficie, recurriríamos a su forma normal; ésta alberga toda la información que nos gustaría conocer. Además, sabemos cómo calcular dicha forma: no tenemos más que seguir los pasos con los que hemos alcanzado la clasificación.

Sin embargo, salvo que el símbolo sea corto y sencillo o esté cerca de su forma normal, el proceso puede ser largo y arduo. Es aquí donde la información auxiliar que estamos obteniendo sobre las superficies puede sernos de ayuda. Notemos que, por ejemplo, sabemos calcular con relativa facilidad la característica de Euler partiendo de un símbolo cualquiera.

Además, también conocemos de antemano si la forma normal del símbolo va a estar formada por toros o planos proyectivos. Si en el símbolo aparece una configuración de la forma $\ldots s \ldots s \ldots$, entonces ya hemos visto que se traducirá en la presencia de, al menos, un plano proyectivo (luego al menos un plano proyectivo en la forma normal, y ningún toro). Si por contra no aparece, las operaciones con que contamos no dan lugar a que lo haga; ni la operación 5 ni la operación 7 pueden provocar la aparición de tal configuración si antes no existía. Pero esto también puede observarse directamente a partir de las operaciones elementales. Es claro que ninguna de las operaciones 2 y 3 pueden generar esa configuración. ¿Y la operación 1? Bajo estas suposiciones, si cortamos por una arista etiquetada como x y pegamos por otra distinta etiquetada como y, entonces en el símbolo resultante x debe repetirse como $\ldots x \ldots x^{-1} \ldots$, en tanto que y debía hacerlo de la misma manera.



Reparemos ahora en las fórmulas que acabamos de deducir. Si a mayores logramos conocer previamente el valor de r, entonces adivinaremos cuál es la forma normal de la superficie calculando el género g, ¡Sin tener que utilizar una sola transformación!

Localizando los bordes

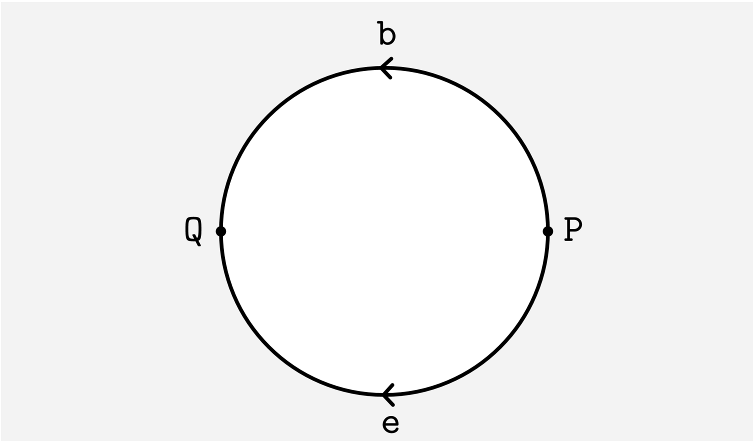
En la forma normal, el entero r coincide con el número de etiquetas que no se repiten. Cuando tengamos un símbolo en cualquier otra forma, esto no va a ser necesariamente cierto; pero lo que sí podemos garantizar es que r será, en todo caso, el número de bordes que presente la superficie ([3], p. 83, Proposición 4.4).

¿Cómo detectar los bordes en un símbolo cualquiera? Al igual que en la forma normal, su presencia estará relacionada con las etiquetas que no se repiten. Efectivamente, si una arista se identifica con otra, jamás podrá formar parte de un borde.

En esta ocasión, serán (más generalmente) los elementos de una partición del conjunto de dichas etiquetas los que se correspondan con los bordes. La estrategia a seguir es la misma que aquella con la que hallábamos el número de vértices distintos en el símbolo. De hecho, ése es el primer paso. Recuperando el ejemplo que manejábamos antes, teníamos el esquema

$$Q \quad b^{-1} \quad P \quad c \quad Q \quad d \quad Q \quad a^{-1} \quad Q \quad d \quad Q \quad c^{-1} \quad P \quad e \quad Q \quad a \quad Q.$$

Una vez realizado, reparamos en las etiquetas que no se repiten y observamos el modo en que están dispuestas unas con respecto a otras. En esta ocasión, dichas etiquetas son b^{-1} y e. A pesar de haber dos, las aristas correspondientes forman un único borde: cada una está unida a la otra por sus extremos, que son los vértices P y Q. Es decir, se forma un único bucle con las etiquetas y los vértices.



El número de bordes como invariante

Podemos concluir entonces que, en su forma normal, también encontraremos un solo borde. ¿Por qué? Observemos que ninguna de las tres operaciones elementales (1, 2 y 3) modifica la cantidad de bordes de la superficie original ([3], p. 83):

Mediante la operación 1 sólo pueden aparecer o desaparecer pares de etiquetas, luego el número de bordes no cambiará. Al aplicar la operación 2 tampoco, por la misma razón.

Por último, para la operación 3 contemplamos dos posibilidades. La primera es que la etiqueta correspondiente a la arista que se subdivide se encuentre repetida. En ese caso, las nuevas etiquetas también se encontrarán repetidas, con lo que no hay variación en el número de bordes.

Por otra parte, podría ocurrir que dicha etiqueta no estuviera repetida. Ahora, el número de etiquetas no repetidas sí que aumenta, pero no lo hace el número de bordes en tanto que las nuevas etiquetas formarán parte del bucle en el que se encontraba la etiqueta subdividida. Aplicar la operación en sentido opuesto lleva a consideraciones similares.

En consecuencia, podemos afirmar (al igual que ocurría con la característica de Euler) que el número de componentes de borde es un invariante de la forma apoyándonos en los resultados de clasificación.

Un *atajo* a la forma normal

Es así como, llegados a este punto, ya somos capaces de descubrir la forma normal de una superficie cualquiera sin necesidad de aplicar el procedimiento convencional. Por ejemplo, de la superficie S representada por $b^{-1}cda^{-1}dc^{-1}ea$ ya conocemos su característica de Euler, que es $\chi(S) = -2$; como observamos que la etiqueta d se repite con igual exponente, en su forma normal aparecerán planos proyectivos y además tenemos la certeza de que presenta un solo borde. Tomando la ecuación adecuada al caso, sustituimos y despejamos g:

$$\chi(S) = 2 - g - r;$$
$$-2 = 2 - g - 1;$$
$$g = 2 - 1 + 2 = 3.$$

La superficie alberga un borde y tres planos proyectivos, con forma normal

$$s_1s_1s_2s_2s_3s_3xyx^{-1}.$$

Este procedimiento para calcular la forma de una superficie es, sin lugar a dudas, más rápido que la manipulación directa del símbolo. Por abordar otro ejemplo, consideremos una superficie S dada por el símbolo

$$ab^{-1}cda^{-1}d^{-1}c^{-1}eb.$$ [1]

El conteo de los vértices arroja el siguiente esquema:

$$P \quad a \quad P \quad b^{-1} \quad Q \quad c \quad R \quad d \quad P \quad a^{-1} \quad P \quad d^{-1} \quad R \quad c^{-1} \quad Q \quad e \quad Q \quad b \quad P$$

Por tanto $V = 3$ y $A = 5$, lo que proporciona que $\chi(S) = 3 - 5 + 1 = -1$. Por otro lado, las etiquetas que se repiten lo hacen con exponentes distintos, con lo que la forma normal

[1] Tomado de [3], p. 87: Ejercicios 4.4, 1(c).

contendrá exclusivamente toros y bordes. Además, notamos que el número de bordes es $r = 1$ (el correspondiente a la etiqueta e). Se tendrá que

$$\chi(S) = -1 = 2 - 2g - 1;$$
$$g = \frac{1}{2}(2 - 1 + 1) = 1.$$

En conclusión, la forma normal de la superficie será

$$sts^{-1}t^{-1}uvu^{-1},$$

constando de un toro y un borde.

Superficies con caras poligonales

Para concluir, debemos destacar también un aspecto práctico sobre la característica de Euler, y que ya apuntábamos más arriba en la introducción. Aunque hemos trabajado exclusivamente con triangulaciones, la característica de Euler se puede calcular con idéntico resultado a partir de una división en polígonos (no necesariamente triángulos) de la superficie.

Esto resulta ser así porque cualquier polígono convexo se puede triangular sin añadir vértices, de modo que la cantidad que nos interesa permanece constante. Efectivamente, al conteo se suman igual número de aristas que de caras. Asimismo, podría colocarse un vértice en el interior del polígono y unirlo con todos sus vértices, lo que permite pensar también en polígonos estrellados.

Así es como el dodecaedro también brinda la característica de Euler de la esfera, al igual que cualquier otro poliedro sin agujeros cuyas caras sean polígonos.

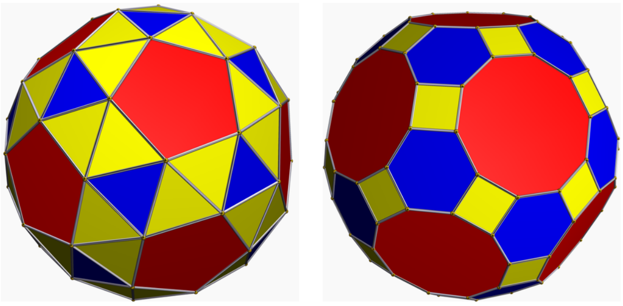
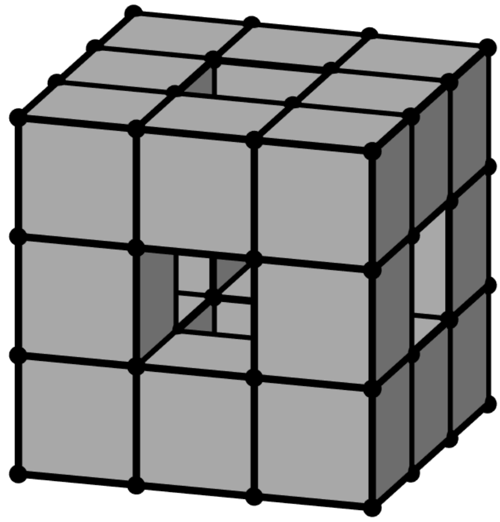


Figura 3.7: Dodecaedro romo (izquierda) y rombicosidodecaedro mayor (derecha). El cómputo de sus respectivas características de Euler ofrecerá como resultado 2, correspondiendo ambos a la esfera. Fuente: Wikimedia Commons. Autor: Tom Ruen. Creados con el software *Stella* de Robert Webb.
https://es.wikipedia.org/wiki/Poliedro_semirregular

¿Y qué le ocurría a éste?:



Se trata de la primera iteración de la Esponja de Menger. Aunque a priori no seamos capaces de encontrar la superficie que le corresponde según la clasificación y la transformación que nos lleva hasta ella, podemos calcular su característica de Euler y adivinarlo. Contamos 64 vértices, 144 aristas y 72 caras desde su división original en cuadrados, lo que proporciona que dicha característica es $64 - 144 + 72 = -8$. Como no tiene bordes ni tampoco planos proyectivos, su forma normal estará dada por $\frac{1}{2}(2-(-8)) = 5$ toros. Es decir, ¡Uno menos de los que parece tener! Efectivamente, toda la superficie puede *pasar* a través de cualquiera de los agujeros, *desapareciendo* uno de ellos.

Unidad Didáctica: Topología de superficies para una propuesta extracurricular en Matemáticas

4.1. Introducción y contexto

De acuerdo con las ideas expuestas anteriormente, esta Unidad Didáctica pretende ser una planificación para un espacio de exploración, acercando a la Educación Secundaria algunos contenidos sobre Topología desde un punto de vista informal y divulgativo.

Se contempla el contenido dividido en siete sesiones, destinadas a iniciar a los alumnos en la Topología de superficies y aportar algunos cambios en la perspectiva con que éstos conciben las Matemáticas. No sólo se presta atención a los conceptos en sí, sino que éstos vienen dados a través de su plasticidad contemplando, por ejemplo, el uso de materiales manipulativos y juegos. Asimismo, se fomenta su relación con cuestiones sobre el espacio y la forma del mundo y el Universo conocido.

El formato en el que esta Unidad Didáctica se plantea es el de las actividades extracurriculares. Se trataría de una actividad ofertada por un centro educativo de Secundaria, de carácter voluntario y, probablemente, ubicada en horario extraescolar. Se asumen sesiones de dos horas de duración.

4.2. Participantes

La naturaleza de los contenidos que se tratan y el modo de presentarlos posibilita que alumnos de cualquier curso de la Educación Secundaria accedan a ellos. De hecho, al plantearse como actividad extracurricular es plausible que la variabilidad de edad de los participantes sea elevada.

En cualquier caso, para reducir tales diferencias de edad entre los alumnos se opta por considerar un grupo cuyos participantes pertenezcan al segundo ciclo de ESO. La realización sería posible con alumnos del primer ciclo de ESO o Bachillerato también, realizando adaptaciones.

No se presupone ninguna característica concreta del grupo de alumnos, más allá de que su número no exceda los 16 participantes. La razón de esta limitación tiene que ver con la cantidad de materiales de que se dispone. También obedece a la necesidad de que los alumnos puedan trabajar cómodamente y recibir una atención adecuada.

4.3. Espacios

Las sesiones se llevarán a cabo en un lugar que cuente con mobiliario y espacio suficiente para trabajar cómodamente. A este respecto, deberá tenerse en cuenta la presencia y manipulación de distintos materiales durante las siete sesiones. La disposición del grupo tendrá forma de herradura, de manera que todos los alumnos puedan ver a sus compañeros y al profesor al mismo tiempo que la pizarra. Cada alumno ocupará una silla y una mesa, cuyas posiciones podrán alterarse para llevar a cabo las actividades (formación de grupos, parejas, etc.).

4.4. Objetivos

A la hora de plantear los objetivos, son precisos varios puntos de vista. De un lado, el propósito es acercar a los alumnos contenidos matemáticos ajenos al currículo y participar del punto de vista divulgativo, aportando nuevas ideas a la percepción que tienen de las Matemáticas. Pero también se pretende explorar algunas posibilidades didácticas que llevarían la Topología a los centros de Secundaria.

En relación con esto, se distinguen por una parte objetivos de carácter general y, por otra, *objetivos didácticos* como metas a alcanzar en lo que al aprendizaje de los alumnos se refiere.

Objetivos generales

G1 Seleccionar contenidos que permitan acercar la Topología a los alumnos de Secundaria.

G2 Proponer recursos y metodologías que ofrezcan un tratamiento intuitivo, informal y basado en la plasticidad de los contenidos.

G3 Experimentar con la aplicación de dichos recursos y metodologías, y consolidar aquellos que contribuyan a los objetivos didácticos.

G1 y **G2** son propios de la fase de planificación de la Unidad Didáctica, mientras que **G3** requeriría de la puesta en práctica de la misma.

Objetivos didácticos

Los objetivos didácticos consisten en la adquisición de conocimientos y actitudes por parte de los alumnos. Se busca que éstos lleguen a:

D1 Conocer las ideas básicas de la Topología y de las propiedades topológicas.

D2 Conocer las relaciones que existen entre la Topología y la Geometría clásica.

D3 Comprender la naturaleza de las transformaciones que no cambian las propiedades topológicas.

D4 Conocer ejemplos básicos de superficies desde el punto de vista de la Topología, así como algunas de sus propiedades.

D5 Conocer el número de Euler de una superficie, identificar su valor como una propiedad Topológica y comprender qué información proporciona acerca de la superficie.

D6 Conocer la clasificación de superficies y su contraste con el caso de objetos tridimensionales.

D7 Relacionar las ideas de la Topología con el Universo y sus posibles formas.

D8 Ampliar su perspectiva sobre las Matemáticas como una ciencia activa, en la que juegan un papel relevante el rigor y la información, pero también el error, la intuición y la creatividad.

A lo largo de las secciones 4.6 y 4.7 se concreta qué contribución pretende hacer cada sesión y, dentro de ellas, cada actividad a los objetivos didácticos. El objetivo **D8** se considera como transversal a lo largo de toda la Unidad Didáctica.

4.5. Contenidos

Los contenidos versan sobre las ideas básicas de la Topología, algunos ejemplos de superficies, el número de Euler y las cuestiones de clasificación de objetos topológicos, contemplando su relación con el caso tridimensional y el Universo. Se estructuran del siguiente modo:

1. Topología y propiedades topológicas
   - Relación entre la Topología y la Geometría
   - Criterios de igualdad entre objetos topológicos
   - Transformaciones que conservan la Topología
2. Superficies topológicas
   - El plano
   - El disco
   - El cilindro
   - La esfera
   - El toro
   - El 2–toro
   - El toro con un borde
   - La banda de Möbius
   - El plano proyectivo
   - La botella de Klein
3. Descomposiciones de superficies
   - Vértices, aristas y caras de una descomposición poligonal
   - La característica de Euler
4. Clasificación de superficies
5. Topología en dimensión 3
   - La 3–esfera
   - El toro tridimensional
   - La forma del Universo

4.6. Temporalización y descripción de la puesta en práctica

En este apartado se describe la puesta en práctica prevista para la Unidad Didáctica, concretando la disposición temporal de los contenidos y una serie de aspectos a tener en cuenta en su desarrollo.

Al comienzo de cada sesión será pertinente recordar lo que se hizo en la anterior y el proceso global del aprendizaje (esto es, lo que los alumnos saben hasta el momento y las principales conclusiones del desarrollo de las sesiones). Esta necesidad es más apremiante si éstas se encuentran separadas en el tiempo por razones de horario. Además, los alumnos deberán disponer en el transcurso de la Unidad Didáctica de los apuntes que vayan tomando según las indicaciones del profesor. Lo ideal es que su uso sea generalizado, aunque en esta descripción se especifican los pasajes más importantes que deberían recogerse. De esta manera, servirán para activar conocimientos y dinamizar las actividades. Para cursos inferiores pueden incluirse fichas de trabajo que desplacen el uso de los apuntes, aunque en este caso se ha optado por contar con ellos como herramienta de aprendizaje. En general, se parte de la idea de que trabajar la elaboración de apuntes es un aspecto importante en el proceso de aprendizaje de los alumnos, teniendo una importancia especial la autonomía a la hora de hacerlo.

Primera sesión

Objetivos a los que contribuye: **D1**, **D3** y **D4**

La primera toma de contacto con los alumnos debería consistir en una ronda de presentaciones, así como un breve intercambio distendido acerca de aquello que se llevará a cabo. En particular, se informará a los alumnos de que deberán disponer de material de escritura para tomar algunos apuntes. En relación con lo que será la dinámica de la sesión, el profesor podrá preguntarles por sus hábitos de lectura, para terminar enlazando con la historia que servirá como hilo conductor.

Esta primera sesión tiene un carácter introductorio. Como ya se ha anticipado, la explicación se articula en torno a una narración basada en la novela *Planilandia*, de Edwin A. Abbott[1]. Se trata de la adaptación de una historia alternativa escrita por Jeffrey R. Weeks en su libro *The Shape of Space* (ver [11], pp. 3–10). La discusión que la guía consiste en la determinación de la forma de Planilandia por parte de sus habitantes. Planilandia es, en todo caso, un mundo bidimensional, por lo que cualquier modelo suyo tendrá el aspecto de una superficie. La historia en cuestión se resume más abajo.

Paralelamente a la narración, tiene lugar la *Actividad 1*. El profesor va presentando varios modelos de superficies a los alumnos, quienes estarán divididos en grupos de 3 (complementando con alguna pareja, si es necesario). Los modelos están elaborados con distintos materiales y

[1] Abbott, E. A. (1884). *Flatland: A Romance of Many Dimensions.* https://web.archive.org/web/20040822085318/http://www.eldritchpress.org/eaa/FL.HTM

ofrecen posibilidades para la forma de Planilandia. Para cada superficie se ofrecen varias representaciones con igual forma, aunque sin informar de este hecho a los alumnos. En cada caso, deberán decidir si puede ocurrir o no lo que se describe en la narración. Es decir, si se trata de una forma factible para Planilandia. Las distintas representaciones de una misma superficie arrojan respuestas iguales, de modo que los alumnos realizan una primera aproximación, aunque quizá inconsciente, a los conceptos propios de la Topología. Además, los modelos se han seleccionado para permitir que intuyan las características de las transformaciones que conservan la forma. En cualquier caso, se fomentará que establezcan estas conexiones.

En un primer momento se presenta a *Cuadrado*, el protagonista, así como algunas de las características de *Planilandia*: el mundo en que él habita. Esta parte es importante, pues los alumnos deben comprender que tanto Cuadrado como su mundo sólo gozan de dos dimensiones; no existe el concepto de *espesor*. A este respecto debe remarcarse que Cuadrado no vive *encima* de Planilandia, sino que vive *dentro*. Para explicar esta idea a los alumnos puede recurrirse a un papel de calco (translúcido), sobre el cual el profesor puede dibujar al protagonista y otros elementos geométricos en dos dimensiones.

Los planilandeses están convencidos de que su mundo es un plano (euclídeo), infinito en cualquiera de sus direcciones. Sin embargo, algunos sabios especulan con que otras opciones podrían tenerse en cuenta, quizá con la posibilidad de partir de un punto de Planilandia en una cierta dirección y, sin cambiarla, regresar al lugar de partida. Cuadrado siente curiosidad por estos planteamientos, de modo que decide realizar una expedición. Para no extraviarse, deja a su paso un hilo que marca el camino seguido; así puede deshacerlo en cualquier momento si sus expectativas resultan no cumplirse. No obstante, parte de *Flatsburgh*, su ciudad natal, hacia el este y consigue aparecer por el oeste varias semanas después. Tras este pasaje se presentan a los alumnos las tres primeras superficies, en el siguiente orden:

1. El **plano euclídeo** (infinito), en la forma de una cartulina o la propia pizarra. Se trataría de la primera idea que surge al pensar en un universo ilimitado; es por esto que la mayoría de planilandeses se decantan por ella.

2. El **disco** (plano, pero finito y limitado), representado por tres modelos: un disco de cartulina, un cuenco y un *globo de papel* con un agujero (ver 4.8, sección de recursos). Es interesante establecer analogías entre esta forma de Planilandia y la hipótesis de que La Tierra sea plana, tanto en el momento de presentar estos modelos como a la hora de discutir sobre ellos.

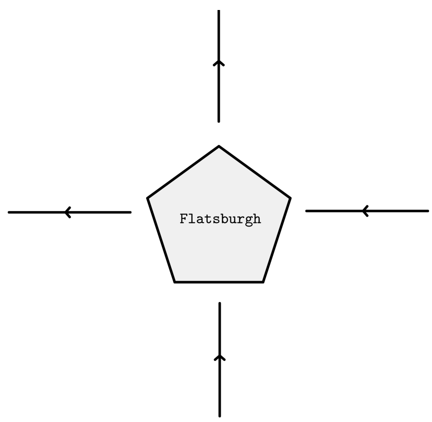
3. La **esfera**, en la apariencia de un globo de papel, una pelota de goma (perfectamente esfé-

rica) y un modelo de la misma realizado con pasta de modelar, dotado de protuberancias significativas.

El profesor los repartirá entre los grupos y permitirá que los alumnos observen, examinen y manipulen los objetos por unos instantes. Seguidamente, les requerirá que piensen, en cada caso, si es posible que Planilandia tenga ese aspecto. Para ello, podrán dibujar o marcar caminos sobre los modelos, y experimentar con distintas localizaciones de Flatsburgh. También se les invitará a pedir ayuda al resto de compañeros. El proceso se sigue de una puesta en común.

Hasta este momento, sólo se dispone de la información que proporciona el primer viaje de Cuadrado. Ésta resulta ser insuficiente, pues Cuadrado podría haberse movido virando su dirección sin quererlo, y haber formando así una gran circunferencia. Si los alumnos descartan tanto el plano como el disco sin contemplar este supuesto, el profesor les informará de que, a la vuelta del viaje de Cuadrado, la mayoría de Planilandeses pensaron que había dado una gran vuelta en círculo (lo cual no permite descartar estas formas). En todo caso, este primer acercamiento tiene por propósito que los alumnos se familiaricen con algunas superficies y los caminos trazados sobre ellas.

Cuadrado no se rinde, y es aquí donde se obtiene una información interesante. Realiza un segundo viaje, esta vez saliendo de Flatsburgh hacia el norte y regresando por el sur. En esta ocasión tuvo que dejar a su paso otro hilo de distinto color, pues el anterior se había agotado. El profesor informará a los alumnos de que, aunque nuevamente todos pensaron que había dado otra gran vuelta en círculo, Cuadrado se sentía intrigado por una razón: no había cruzado el hilo que dejó a lo largo del primer camino. Dibujará un esquema similar al siguiente en la pizarra:

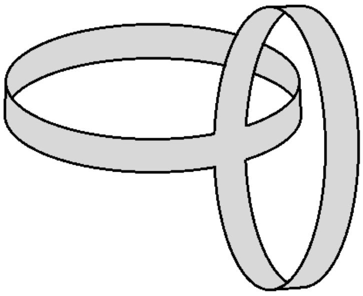


Al término de este pasaje, se presentan a los alumnos el resto de superficies, en el siguiente orden:

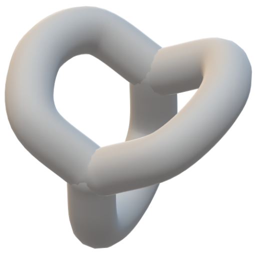
1. El **cilindro** (sin bases) en la forma de un cilindro en sí construido con cartulina, pero también como un disco de cartulina con un agujero, un embudo y un globo de papel con dos agujeros, próximos entre sí.

2. El **toro**, representado por un flotador, una letra A de cartón (ver 4.8, sección de recursos) y una esfera de pasta de modelar con un asa.

3. El **toro con un agujero**, representado por dos cilindros de cartulina unidos entre sí.



4. El 2–**toro** como una letra B de cartón, aunque también representado con pasta de modelar de dos maneras. Por un lado, su representación clásica como dos toros pegados por un costado. Por otro, en la forma de tres asas cuyos extremos concurren en dos puntos:



Se repite el reparto y el proceso anteriores; en cada caso, los alumnos tienen que determinar si la superficie puede tratarse de Planilandia o no. Por un lado, tienen que revisar los modelos anteriores; por otro, pensar sobre los nuevos. Vuelve a ser la intención que experimenten con distintas localizaciones de Flatsburgh y caminos, hasta comprender que sólo los modelos correspondientes al toro, al toro con agujero y al 2–toro pueden satisfacer las condiciones. En el transcurso de la actividad se pretende que observen que existen grupos de modelos que no sólo cumplen o incumplen los requisitos simultáneamente, sino que el proceso de comprobar tales propiedades parece ser similar para todos ellos. Es decir, tienen algo en común que es lo que lleva a las conclusiones. Tales modelos presentan la misma forma, y se corresponden a una misma superficie cuyas propiedades topológicas no dependen del aspecto concreto que ésta tome. Nuevamente, procede una puesta en común.

Para la realización de esta actividad, el profesor pedirá a los alumnos que traten de dibujar en sus apuntes todos los modelos presentados, así como los caminos encontrados que cumplan las propiedades (si procede). Lo importante es que lo intenten, se familiaricen con los objetos y obtengan información resumida sobre la actividad, y no tanto que las representaciones sean precisas. Los modelos utilizados deberán estar presentes en las siguientes sesiones también.

Segunda sesión

Objetivos a los que contribuye: **D1**, **D2** y **D3**

La segunda sesión está dedicada a la introducción de la Topología, partiendo desde la Geometría. Se basa en una de las intervenciones que realizó Sugarman ([10], pp. 10–12).

En este sentido, es fundamental comenzar la sesión hablando sobre Geometría clásica, conectando así con el currículo. Concretamente, se pedirá a los alumnos que aporten aquellos conceptos considerados importantes en esa materia y cuáles son los criterios de referencia a la hora de decidir la igualdad de dos objetos dados. El objetivo es llegar a que elementos como distancias y ángulos son importantes en Geometría, los cuales sirven a su vez para determinar si dos figuras son iguales o no. Esta parte de la explicación puede llevarse a cabo utilizando la pizarra.

El profesor puede recurrir a dibujar, por ejemplo, dos triángulos equiláteros en posiciones distintas. Entonces, preguntará a los alumnos si son iguales. Sea cual sea la respuesta, conducirá la conclusión de que son iguales salvo por un movimiento, el cual consiste en girar y/o desplazar uno para que, entonces sí, sea *idéntico* al otro.

Tras esta primera introducción, se plantea la pregunta de si se les ocurre alguna forma en que una circunferencia y un cuadrado puedan ser iguales. Se podrá insistir reformulando la cuestión, aludiendo a si tienen algo en común. Ante una negativa, el profesor pedirá que imaginen que los conceptos que están sobre la pizarra dejan de importar. Entonces es posible doblar los objetos, estirarlos y encogerlos. Aquí, se hace mención a que existe otro tipo de *Geometría* que se estudia en Matemáticas y en el que es posible realizar estas transformaciones sin que los objetos se conviertan en algo distinto. Esta *Geometría* alternativa se conoce como Topología. Para afianzar la comprensión de esta idea, se puede explicar que la Topología permite estudiar los objetos sin tener en cuenta sus ángulos, tamaños, etc.

A continuación, se realizará la *Actividad 2* (ver sección 4.7).

Tercera sesión

Objetivos a los que contribuye: **D1**, **D3**, **D4** y **D6**

La tercera sesión cumple la función de relacionar las sesiones primera y segunda, ofreciendo una perspectiva topológica sobre los objetos que se han presentado hasta ahora.

Así pues, se comienza con un recordatorio de lo que se hizo en las dos sesiones anteriores. Para ello, los modelos utilizados en la primera deberán estar presentes. Entonces se invita a los alumnos a participar en la *Actividad 3* (ver sección 4.7).

Tras esta actividad, se les informará de que aquellos objetos susceptibles de representar el mundo de los planilandeses son conocidos como *superficies*. También de que su rasgo fundamental es que se extienden a lo largo de dos dimensiones y que, para uno de sus habitantes, parecen ser perfectamente llanas en cualquiera de sus puntos. Sin embargo, el aspecto observable desde fuera puede ser muy distinto. El profesor puede recurrir, nuevamente, a la analogía con el planeta Tierra.

Después de todo esto, se propiciará una discusión grupal para que los alumnos traten de identificar, a mayores, algunos elementos que consideren importantes en las superficies que conocen hasta ahora. Para ello, se utilizará el esquema de conclusiones obtenido en la *Actividad 3*. El objetivo es que los alumnos identifiquen, al menos parcialmente, los bordes (agujeros) y las asas como elementos relevantes, y la esfera como elemento base. Más adelante, esto ayudará a introducir la clasificación de superficies. Las conclusiones deberán añadirse a los apuntes de los alumnos.

Cuarta sesión

Objetivos a los que contribuye: **D2**, **D4** y **D5**

La cuarta sesión está dedicada a presentar a los alumnos el número de Euler y algunas de sus principales características.

Se propone una nueva relación con el currículo, en tanto que el profesor comenzará explicando a los alumnos que, aunque parezca que la Geometría ha quedado atrás, ésta puede seguir siendo de utilidad. Indicará que las superficies pueden construirse y estudiarse más fácilmente con su ayuda. Tanto triángulos como otros polígonos se utilizan para ello. Para fomentar la motivación y ejemplificar la idea, se propone la generación de gráficos 3D. Las superficies que aparecen en el diseño de videojuegos o metrajes de animación se obtienen como unión de un número muy grande de triángulos, creando los efectos deseados. Pixar tiene un software abierto a este respecto, conocido como *OpenSubdiv*[2]. En esta misma página se pueden encontrar vídeos al respecto para su visionado, en caso de que se disponga de los recursos apropiados.

Para que los alumnos entren en contacto con el número de Euler y sus propiedades, se recurre a continuación a la *Actividad 4* (ver sección 4.7).

Tras concluir la actividad, el profesor informará a los alumnos de que la cantidad que han calculado repetidas veces se conoce como número de Euler, en honor a un conocido matemático. Es pertinente realizar una breve explicación de carácter histórico sobre el propio Leonhard Euler, con algunos de sus datos biográficos más destacados[3].

Seguidamente, se preguntará a los alumnos sobre qué han observado acerca del número y su comportamiento. En particular, se incidirá sobre el valor del número al terminar el puzzle en relación con lo que se estudió en la tercera sesión. Esta discusión grupal deberá conducirse a que identifiquen el número de Euler como una cantidad que no cambia si la forma tampoco lo hace, aunque puedan existir objetos con distinta forma pero igual número de Euler. Es decir, que sean conscientes de que un solo número alberga una información muy importante a la hora de entender qué forma tiene el objeto en cuestión. Es fundamental comprender que, bajo las normas de la Topología, los poliedros pueden considerarse también como superficies (no sólo como cuerpos geométricos). Se busca observar este hecho en el caso concreto de algunas de las superficies con las que se ha trabajado, como la esfera, el toro o el 2–toro: cualquiera de los puzzles que representan a cada objeto arrojan el mismo número de Euler, y pueden convertirse mediante transformaciones permitidas en cualquiera de los modelos que ya se conocían. Para resumir y esclarecer las conclusiones, el grupo realizará un esquema en la pizarra. En dicho esquema figurarán las distintas superficies con su correspondiente número de Euler, incluyendo también el disco y el cilindro. El profesor pedirá a los alumnos que recojan la información en sus apuntes.

Es interesante aprovechar este momento para añadir algunos comentarios más sobre Euler y su descubrimiento del resultado. Aunque ofreció una prueba del mismo, ésta resultó ser errónea y la demostración adecuada no se encontró hasta el siglo XIX, de la mano de Augustin Louis Cauchy. Esto sirve como ejemplo de que la Matemática no es una búsqueda uniforme y certera, sino irregular y accidentada.

[2]Sitio web: http://graphics.pixar.com/opensubdiv/docs/intro.html

[3]Puede consultarse una biografía de Euler en
http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html
El sitio web del *Euler Archive* alberga también otras referencias: http://eulerarchive.maa.org/

Quinta sesión

Objetivos a los que contribuye: **D2, D3, D4, D5** y **D6**

La quinta sesión continúa con el estudio del número de Euler. Tras su introducción en la sesión anterior, se invitará a los alumnos a reflexionar sobre algunos aspectos en torno suyo. Es importante tener los puzzles presentes para recordar los juegos de la cuarta sesión.

La primera discusión es una observación sobre el modo en que los alumnos calculaban el número de Euler tras cada movimiento, ilustrándolo con los propios puzzles. Pueden distinguirse, al menos, dos casos, según el número cambie o no. Esto servirá para recordar a los alumnos por qué las propiedades que se han observado en el número de Euler son ciertas. La implicación en el juego de la sesión anterior favorecería una mejor comprensión de estos aspectos.

A continuación, el profesor pedirá a los alumnos que reparen en los apuntes que tomaron en la sesión anterior. Concretamente, qué número de Euler tenían la esfera, el toro y el 2–toro, en este orden. Entonces preguntará si se observa algún patrón; la conclusión deberá ser que se trata de una progresión aritmética de término inicial 2 y paso -2. Se hará lo propio con (nuevamente) la esfera, el disco y el cilindro, pero invitando esta vez al grupo a que conjeture. Esta vez el paso es -1. En ambos casos, se ofrecerá una visión global sobre cómo va cambiando el número de Euler cada vez que se hace un agujero en la esfera o se le adhiere un asa. Se pedirá a los alumnos que anoten las conclusiones.

Tras esto, los alumnos realizarán la *Actividad 5* (ver sección 4.7).

Posteriormente, el profesor informará a los alumnos de que los planilandeses dividieron Planilandia en parcelas e hicieron lo mismo que ellos para tratar de averiguar la forma de su mundo, obteniendo 0 como número de Euler. Entonces se discutirá la siguiente pregunta:

¿Pueden los planilandeses saber ahora cuál es la forma de su mundo?

Naturalmente, habrá de tenerse en cuenta la información sobre las expediciones de Cuadrado. Por ello, será adecuado que los alumnos tengan presentes los apuntes tomados en sesiones anteriores.

La respuesta es negativa o, más precisamente, que aún falta información. En este sentido, si los alumnos afirman que sí y que se trata del toro, existe la posibilidad de crear un conflicto cognitivo en torno al manejo de la lógica proposicional, muchas veces ausente en el aula de Matemáticas. Si Planilandia es un toro su número de Euler es 0, pero el recíproco no tiene por qué ser verdad. Se sugerirá que existen muchas otras superficies que aún no conocemos, y que podrían cumplir todas las propiedades sin tratarse del toro. ¿Se pueden llegar a conocer todas las posibles *Planilandias*? Es importante poner a los alumnos en la tesitura de este problema. Es decir: hacer notar que, aparentemente, las posibilidades son inabarcables. A este respecto, el profesor puede preguntar por sus impresiones sobre la cuestión.

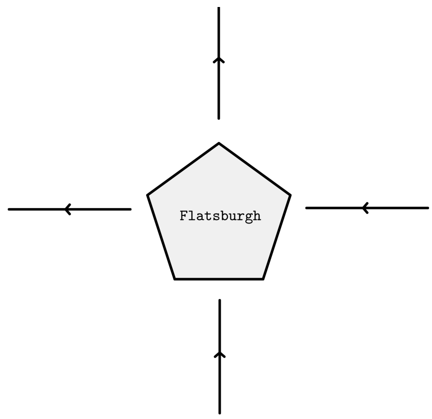
Sexta sesión

Objetivos a los que contribuye: **D4**

Después de introducir a los alumnos a la Topología y al número de Euler, la sexta sesión se encamina ya hacia la perspectiva de la clasificación. Está dedicada a introducir el plano proyectivo.

El profesor retomará la conclusión de la sesión anterior, en la que se puso de manifiesto la magnitud del problema de clasificación de superficies. Además, se pedirá a los alumnos que recuerden los elementos que constituían las superficies conocidas a partir de una esfera: los bordes o *agujeros* y las asas.

Entonces anunciará que en la presente sesión van a conocer una nueva superficie, algo más extraña que las anteriores. Por el momento, el profesor recuperará el esquema de Planilandia que se realizó en la primera sesión:



Esta vez lo enmarcará en un rectángulo. Indicará a los alumnos que, si Planilandia fuese un toro, podría imaginarse como dicho rectángulo. Al cruzar uno de los lados, Cuadrado aparece por el lado opuesto, como si de un teletransporte se tratara. Puede recurrirse al ejemplo de algunos juegos recreativos en los que ésta es la dinámica ([11], p. 13). En todo caso, se utilizará el modelo del toro para mostrar el hecho, invitando a los alumnos a que coloquen ellos mismos los lados del rectángulo sobre la superficie. Ilustrará con varios ejemplos cómo funciona, en este caso, el pegado de los lados, incluyendo movimientos a través de las esquinas. También es conveniente incidir sobre esta idea de pegar los lados. Para facilitar la comprensión, se indicará que puede imaginarse el rectángulo rodeado por una red de copias suyas.

Llegados a este punto, los alumnos realizarán la *Actividad 6* (ver sección 4.7). A su término, el profesor indicará que la última superficie sobre la que han jugado se conoce en Matemáticas como *plano proyectivo*[4]. Entonces mostrará una representación del mismo en tres dimensiones (por ejemplo, como aparece en la figura 3.3, sección 3.2), así como la correspondiente al pegado de lados de un cuadrado o rectángulo. Es pertinente que esta información sea recogida por los alumnos en sus apuntes. El profesor también indicará a los alumnos que, al contrario de las demás que conocen, esta superficie no puede construirse en el espacio tridimensional. Al hacerlo, se atraviesa a sí misma. Es posible realizar una construcción con un folio, la cual justifica este hecho[5]. Sería necesaria una dimensión más para poder representarlo correctamente.

No obstante, los planilandeses podrían vivir en ella igual que lo harían en el toro. Para convencer a los alumnos de esto, puede recurrirse nuevamente a los diagramas de pegado de lados: los planilandeses *saldrían* por un lado y *entrarían* por otro igual que en un toro, aunque en esta ocasión su *orientación* se vea alterada. En relación con esto puede incidirse en el hecho de que las superficies no necesitan estar dentro de ningún otro espacio (tridimensional, en este caso), sino que pueden existir por sí mismas. Se volverá sobre esta cuestión en la sesión siguiente.

Es conveniente explicar que la principal característica del plano proyectivo es que un planilandés que dé un paseo alrededor de una Planilandia como ésta vuelve como su imagen a través de un espejo (la versión unidimensional de un espejo, en este caso). Puede pedirse a los alumnos que salgan a la pizarra y hagan la prueba sobre el modelo del cuadrado con los lados identificados. El profesor pondrá nombre a este fenómeno, que se conoce como *no orientabilidad*.

Por último, se concluye mostrando algunos ejemplos de superficies en las que está involucrado el plano proyectivo, como la botella de Klein o la banda de Möbius. La banda es sencilla de construir con papel o cartulina (deberá disponerse de tal modelo), y está compuesta por un agujero (esto es, un solo borde; se invitará a los alumnos a comprobarlo) y un plano proyectivo. La botella de Klein (dos planos proyectivos adheridos a una esfera) no lo es tanto, por lo que puede recurrirse a una imagen como la de la figura 3.6 (sección 3.2) o a algún recurso virtual, si se

[4] Si se considera oportuno, puede utilizarse otra denominación basada en el aspecto de su *inmersión* en el espacio (la inglesa *cross–cap*, o también *bonete*, etc.) pues quizá no sea posible (por cuestiones de tiempo) justificar a los alumnos el por qué de este nombre.

[5] *Bonete cruzado con papel* en la web topologia.wordpress.com:
https://topologia.wordpress.com/2017/05/30/bonete-cruzado-con-papel/

dispone de los medios necesarios. Lo ideal sería contar con un modelo 3D realizado en tela u otro material. De cualquier modo, se pedirá a los alumnos que comprueben si la no orientabilidad del plano proyectivo se traspasa a la banda de Möbius dibujando, por ejemplo, a Cuadrado dando una vuelta completa alrededor del objeto. En general, se mencionará que cualquier superficie que contenga (al menos) un plano proyectivo mantiene esa misma propiedad.

Séptima sesión

Objetivos a los que contribuye: **D6** y **D7**

La séptima sesión concluye la Unidad Didáctica. En ella se ofrece una perspectiva global sobre el problema de clasificación y su relación con el conocimiento del Universo.

El primer paso será recordar los elementos que, hasta ahora, se han identificado en las superficies. El profesor los representará en la pizarra, y recordará el problema que tenían los planilandeses para decidir cuál era la forma de Planilandia: a pesar de toda la información disponible, parece que las posibilidades son demasiado amplias como para poder decidir, dado que muchas superficies pueden permanecer ocultas a su conocimiento. Con la intención de ilustrar este hecho, se recurrirá a mostrar a los alumnos las siguientes imágenes de superficies elaboradas por Carlo H. Sequin, las cuales pueden imprimirse[6]. Es preciso mantener el orden de menor a mayor complejidad aparente.

Figura 4.1: *Dyck Torus*

[6]Las imágenes se encuentran en la web https://people.eecs.berkeley.edu/~sequin/SCULPTS/sequin.html

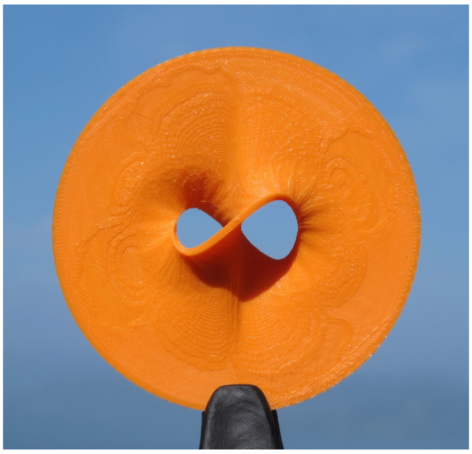


Figura 4.2: *Infinity* de Charles O. Perry

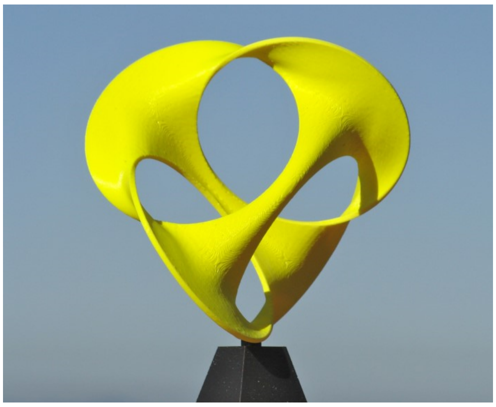


Figura 4.3: *Tetra* de Charles O. Perry

Figura 4.4: *Tetra Cluster*

Figura 4.5: Un modelo de la *Girl's surface*

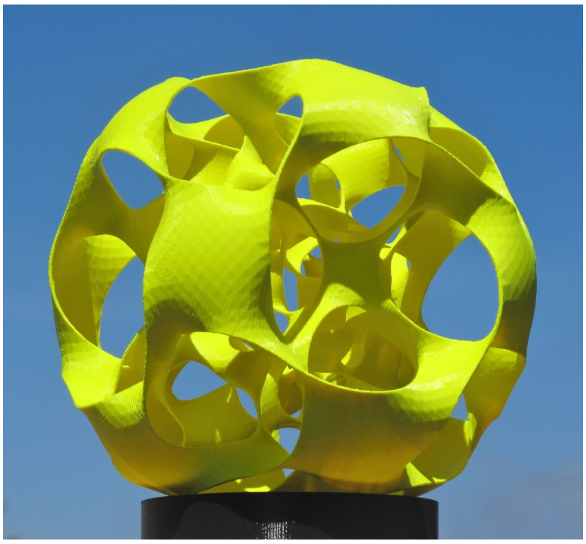


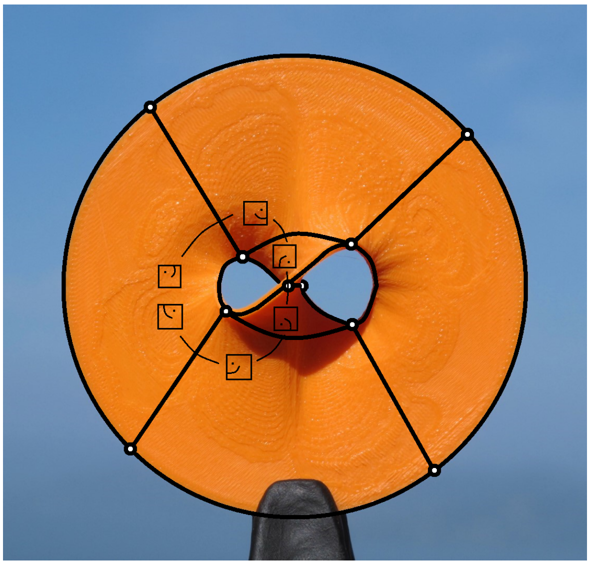
Figura 4.6: *3–level Star–Cinder on an Octahedral Tangle of 12 Circular Borders*

Entonces el profesor revelará que, a pesar de la dificultad del problema, uno de los hitos de la Matemática del siglo XX fue un resultado que elabora un catálogo de (clasifica) todas las superficies imaginables. Además, éste establece que cualquier superficie se puede formar a partir de los elementos que los alumnos ya conocen: bordes, asas y planos proyectivos adheridos a una esfera. Incidirá en el hecho de que los planilandeses disponen de dicho catálogo de mundos posibles para poder elegir.

A modo de ejemplo, el profesor pedirá a los alumnos que piensen sobre la composición del *Dyck Torus*; es decir, por qué elementos creen que está formado. Si no encuentran una respuesta, se planteará la posibilidad de contemplarlo como una botella de Klein con un agujero, esto es, dos planos proyectivos y un agujero. Es intencionado el que esta tarea resulte difícil, ya que las transformaciones que demuestran tal afirmación pueden no resultar inmediatas.

En relación con esto, se informará entonces a los alumnos de que no es necesario encontrar la transformación concreta que lleva a los elementos que forman la superficie. El resultado de clasificación afirma a mayores que calculando la característica de Euler, el número de bordes y sabiendo si hay planos proyectivos ocultos puede escogerse sin dudar un modelo de esa lista para la superficie en cuestión que se esté estudiando. Lo primero puede determinarse mediante una descomposición en parcelas, lo segundo contando los bordes con ayuda de un rotulador (para marcarlos según se consideren) y lo tercero enviando a Cuadrado a un viaje alrededor de la superficie y observando el efecto que sobre él tiene.

El profesor mostrará a los alumnos el enunciado del resultado de clasificación y sus consecuencias, por ejemplo a través de un libro como [3], p. 87. En particular, las fórmulas que involucran al género de la superficie, el número de bordes y la característica de Euler ([3], p. 86). Llevará a cabo un ejemplo con la escultura *Infinity*, que es más sencilla de parcelar que el *Dyck Torus*. Para ello los alumnos elaborarán un modelo en papel o fieltro, guiados por el profesor (ver 4.8, sección de recursos). Además, se les orientará para que realicen las investigaciones correspondientes:



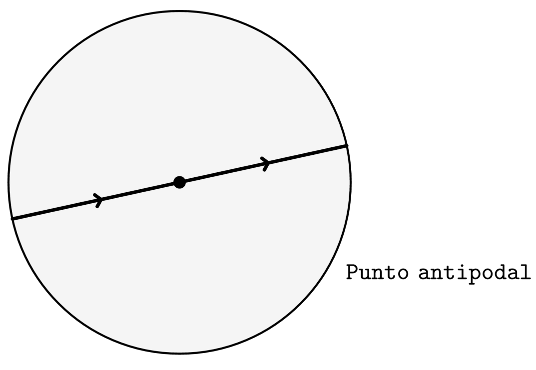
La superficie en cuestión resulta ser un plano proyectivo con dos agujeros. Los alumnos recogerán en los apuntes las conclusiones acerca del problema de clasificación.

Tras esta primera parte de la sesión dedicada a la clasificación de superficies, se emprende una segunda parte que introduce la problemática de la forma del Universo y las variedades de dimensión 3, al mismo tiempo que sirve de conclusión para la Unidad Didáctica.

Para ello, el profesor recordará que, al igual que ocurre en la Tierra, los planilandeses perciben su mundo como un plano en cada entorno que les rodea. No obstante, la forma global de la superficie sobre la que viven puede ser muy complicada. ¿Y qué ocurre con el Universo? Debe conseguirse que los alumnos entiendan la analogía entre dimensiones y que comprendan que, en un entorno de cada lugar, el Universo parece ser un *espacio*. Igual que los planilandeses creían que Planilandia era un plano infinito (euclídeo), el Universo puede concebirse como un espacio infinito (euclídeo) o pensarse como algo que solamente es un espacio cerca de cada punto y que, quizá, tenga otra forma global. Un posible recurso son las propias paredes del aula o taller donde se desarrolle la sesión (se tratará, comúnmente, de un ortoedro), las cuales proporcionan un sistema de referencia para el entorno del Universo en el que se encuentran. Por otra parte, el Universo no necesita estar dentro de ningún espacio mayor para existir, sino que puede existir por sí solo (al igual que ocurría con Planilandia).

Para que los alumnos se familiaricen con estas ideas, se abordarán a continuación dos ejemplos. Uno es el de la 3–esfera; el otro, el del toro tridimensional. La elección de éstos se debe a su sencillez en comparación con otros posibles ejemplos de 3–variedades. Además, se prestan a analogía con sus homólogos de dos dimensiones.

De hecho, la introducción a la 3–esfera debe partir de la 2–esfera. Se propone el modo siguiente: cuando un planilandés se encuentra en una 2–esfera y camina en una dirección sin virar, acaba volviendo al punto de partida tras recorrer el doble de la distancia que le separa de su antípoda. Por lo tanto, la esfera puede representarse a partir del punto o localización inicial como un disco cuyo borde se corresponde con el punto antipodal.



Entones se pedirá a los alumnos que encuentren, por analogía, una representación de un Universo con forma de *esfera tridimensional*, situando a La Tierra como punto de origen. Éste corresponde a una esfera (maciza) cuyo centro es La Tierra (o el aula en que se encuentran los alumnos) y cuya frontera (la 2–esfera que la envuelve) representa un único punto, que es la antípoda ([7], p. 137). Una manera interesante de ilustrarlo es que un habitante de este Universo vería un mismo objeto al mirar en cualquier dirección; se trataría, precisamente, del objeto celeste que se encontrase en su antípoda. Puede contextualizarse esta situación a la observación de astros desde La Tierra: si una misma estrella apareciese en el firmamento al enfocar un telescopio en cualquier dirección, existirían razones para pensar que el Universo es una 3–esfera. Esta situación es, nuevamente, análoga a la que encuentra un planilandés en una esfera bidimensional.

Un último recurso para que los alumnos imaginen la 3–esfera es pensar qué ocurriría al hinchar un globo en un Universo con esta forma. Con las indicaciones adecuadas, esta cuestión se ofrece a los alumnos como una tarea que deben resolver en grupo. Para ello se les proporcionará una pelota esférica (puede servir la que se empleó en la primera sesión) y una goma, con las que deberán estudiar el caso análogo de la esfera bidimensional. Se pretende que la goma represente la *superficie* del globo unidimensional que Cuadrado hincha en la superficie esférica, quien puede aparecer a su vez dibujado sobre la misma. La conclusión es que, en un Universo como éste, el globo acaba encerrando a aquel que lo hincha ([11], p. 206).

A continuación, se presenta el ejemplo del toro tridimensional. Al igual que en el caso anterior, es preciso recurrir a su versión bidimensional para describir la naturaleza de un Universo con semejante forma. El toro tridimensional se obtiene mediante la identificación de las caras de un cubo (u ortoedro), de manera que el aula en que se desarrolle la sesión será, probablemente, un recurso muy adecuado para explicarlo. Al salir por una de las paredes que la delimitan (o el techo/suelo), se entra por la opuesta.

Entonces se propondrá a los alumnos que describan cómo verían su entorno si viviesen dentro de un toro tridimensional. Para ello, puede recordárseles que recurran al caso bidimensional. Esta idea puede complementarse con la de un Universo con esta forma. Es decir, poner a los alumnos en el supuesto de que se descubre a través del telescopio un nuevo planeta similar a La Tierra y, cuando se investiga más a fondo, se concluye que se trata del propio planeta Tierra ([11], pp. 20–25); y más aún, ese avistamiento se da en varias direcciones distintas. La visión que se intenta que figuren es la de varias copias de la misma habitación y su contenido que se extienden teselando el espacio, como ocurre en la imagen de la portada del libro de Weeks

([11]). Ésta puede emplearse para ilustrar la naturaleza de esta variedad:

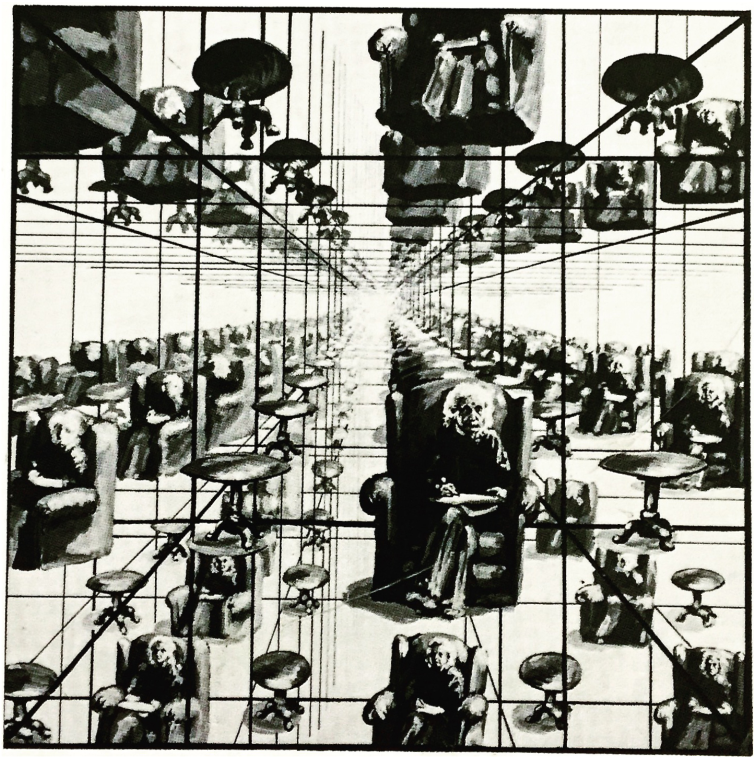


Figura 4.7: Imagen de la portada del libro *The Shape of Space* de Jeffrey R. Weeks.
Autora: Natalia Panczyszyn Kozlowsky

Durante el tratamiento de estos ejemplos, el profesor invitará a los alumnos a dibujar las representaciones encontradas para estos objetos y les informará de que éstos se conocen en Matemáticas como 3–variedades, dado que un habitante suyo percibe su entorno como un espacio tridimensional. De la misma manera, las superficies se consideran como 2–variedades. Para concluir, se ofrece a los alumnos una perspectiva sobre el mismo problema de clasificación planteado esta vez sobre las 3–variedades. ¿Existe un catálogo de todos los Universos posibles, como ocurría en dimensión 2 con Planilandia? ¿Se conoce la forma del Universo? Aunque existen cuantiosos avances, la respuesta es negativa a ambas preguntas. El cambio a dimensión tres obliga a modificar las estrategias de ataque a estos problemas, pues de hecho se vuelven mucho más complejos. La intención de este cierre es, pues, mostrar a los alumnos un problema resuelto (la clasificación de superficies) y ponerles en la tesitura de otro abierto y activo (el estudio de las 3–variedades), que sirve además como motivación para la reflexión sobre el Universo en que se encuentran.

4.7. Actividades

Aquí se diferencian las actividades que se han planificado. Al tratarse de una propuesta extracurricular, se ha preferido no recurrir a actividades para casa o a cualquier otra tarea que exija a los alumnos invertir un tiempo adicional más allá de la duración de las propias sesiones.

En la Unidad Didáctica también se plantean a los alumnos otras actividades (como en la séptima sesión), aunque por ser de menor duración no se han especificado separadamente.

Actividad 1: explorando Planilandia

Duración: **1 hora 30 minutos**

Objetivos a los que contribuye: **D1**, **D3** y **D4**

Esta actividad, que se describe en la primera sesión de la sección 4.6, consiste en el descubrimiento de las posibles formas de Planilandia. Para ello, los alumnos exploran los modelos proporcionados por el profesor.

Actividad 2: una introducción a la Topología

Duración: **1 hora**

Objetivos a los que contribuye: **D1** y **D3**

Adaptada del artículo de Sugarman ([10], pp. 15–28), trata de que los alumnos experimenten una primera toma de contacto con la Topología, comprendiendo las reglas que determinan la igualdad de dos objetos en Topología, la naturaleza de las transformaciones que rigen en ella y la importancia del número de *agujeros* que presenta un objeto.

El profesor pone a disposición de los alumnos varias porciones de pasta de modelar y limpiapipas. Cada uno de los objetos estará presente en dos formas distintas. Unos limpiapipas se entregarán en su forma habitual, a modo de segmentos. En otros, se habrán unido previamente los extremos. Por su parte, algunas porciones de pasta de modelar se presentarán como esferas, mientras que otras lo harán como asas o *rosquillas*. Aunque no se repartirán, debe haber, al menos, tantos objetos como alumnos. En su lugar, se les invitará a tomar aquellos que consideren oportunos para experimentar.

El profesor traerá preparadas una serie de preguntas impresas, apoyadas por dibujos acordes a las mismas. Por turnos, cada alumno elegirá una pregunta y se la formulará al resto de compañeros. Previamente, las reglas deben quedar claras: se puede doblar, estirar o encoger cualquier parte de los objetos, pero no romperlos o unir partes que con anterioridad estuvieran separadas. Si esto último ocurre, deben pegarse (o separarse, si es el caso) nuevamente las partes implicadas y restituir el estado original. Se plantean cuestiones como las siguientes:

¿Se puede transformar la letra S en la letra L? Si es así, ¿Cómo?
¿Se puede transformar la letra S en la letra O? Si es así, ¿Cómo?
¿Se puede transformar una pelota en un cubo (ortoedro)? Si es así, ¿Cómo?
¿Se puede transformar la letra O en la letra B? Si es así, ¿Cómo?
¿Se puede transformar una pelota en una rosquilla? Si es así, ¿Cómo?
¿Se puede transformar una rosquilla en una taza? Si es así, ¿Cómo?

La lista puede ampliarse con otros ejemplos similares según la disponibilidad de tiempo. En cada caso, se indicará a los alumnos que, para argumentar su respuesta, deberán elegir un objeto que pueda representar la situación que se plantea. En cada ocasión, se compartirá el proceso con el resto de alumnos. El hecho de dejar esta elección a su criterio consiste en trabajar la relación entre la realidad (los objetos concretos que se manipulan) y el modelo (la representación abstracta del objeto).

También es muy importante la distinción entre dimensiones: algunos objetos se comportan como modelos abstractos de dimensión 1, mientras que otros lo hacen en dimensión 2. En ningún caso uno de los primeros podrá transformarse en uno de los segundos, de modo que los alumnos deberán comprender este aspecto. Con este fin, puede recurrirse a materiales auxiliares, como una goma (unidimensional) y un gorro de piscina. La Topología permite estirar los objetos a lo largo de sus dimensiones, pero no dotarlos de mayor dimensión de la que ya disponen. La goma nunca podrá estirarse hasta convertirse en un gorro de piscina, pues sólo puede hacerlo de manera longitudinal. Por otro lado, a la hora de trabajar con la pasta de modelar debe quedar claro que nos estamos refiriendo a la superficie de la misma, y no al volumen.

Uno de los principales propósitos de la actividad es que los alumnos observen de primera mano cómo son las transformaciones permitidas en Topología, y que comprendan que, bajo estos supuestos, lo verdaderamente importante es el número de *agujeros* que presenta un objeto. En este sentido, el profesor planteará algunas cuestiones más al término de la actividad, las cuales serán discutidas por el grupo.

¿Qué tienen en común los objetos que podían transformarse los unos en los otros?
¿Qué reglas deberíamos romper para responder afirmativamente a cada pregunta?

Una vez más, se pedirá a los alumnos que anoten, al menos, las respuestas a las preguntas y sus justificaciones. La idea es que dichas anotaciones registren las reglas esenciales de las transformaciones topológicas.

Actividad 3: clasificando superficies

Duración: **1 hora**

Objetivos a los que contribuye: **D1**, **D3** y **D4**

Para comenzar la actividad, el profesor pedirá a los alumnos que revisen y tengan a su disposición los apuntes tomados en la sesión anterior. Entonces mostrará los modelos y, tendiendo en cuenta lo que se trabajó en la segunda sesión, preguntará si algunos se podrían transformar en otros siguiendo las reglas acordadas y pedirá propuestas, fomentando la participación de los alumnos. Se espera que ésta sea activa, en tanto que ya conocen qué tipo de transformaciones están permitidas. En los casos de superficies elaboradas con pasta de modelar los alumnos ilustrarán el proceso, al igual que en la actividad anterior.

Al término de la discusión, las conclusiones deben dirigirse hacia dos sentidos. Por un lado, identificar qué objetos tenían la misma forma. Por otro, observar que el problema que se plantea a los Planilandeses es puramente *topológico*; es decir, podemos ignorar todas las cualidades de la Geometría clásica a la hora de pensar en él. El profesor pondrá nombres a todas ellas; dichos nombres serán más *convencionales*, al menos, en el caso de la esfera, el disco (también esfera con un agujero, o simplemente *agujero*) y el toro, que son elementos básicos en cuanto a la clasificación. Al resto pueden asignárseles nombres coloquiales. El grupo realizará un esquema en la pizarra que resuma toda la información, y se pedirá a los alumnos que apunten las conclusiones en su cuaderno.

Aunque artificial, esto ilustra una aplicación de los conceptos topológicos, lo cual se espera que contribuya a la motivación de los alumnos. Además, esta actividad supone un primer acercamiento al problema de clasificación de superficies, que se comentará más adelante.

Actividad 4: el número de Euler I

Duración: **45 minutos**

Objetivos a los que contribuye: **D2** y **D5**

Al comienzo de la actividad, el profesor dividirá a los alumnos en parejas (a ser posible, variando las configuraciones anteriores). Entonces entregará un puzzle a cada pareja, como los que se describen en la sección 4.8 de recursos. En el caso de 8 parejas, se recomienda incluir los puzzles del 1 al 7 y uno de los restantes. En todo caso, debería contarse con los dos correspondientes a la esfera, al toro y al 2–toro.

Se permitirá que examinen el material y que dediquen su atención a él durante unos instantes. Después, el profesor escribirá en la pizarra lo siguiente:

$$\textit{Vértices} - \textit{Aristas} + \textit{Caras},$$

aunque sin informar de la denominación que tiene. Después indicará que van a participar en un juego, el cual se describe a continuación.

Por turnos, deben ir construyendo el poliedro correspondiente a cada puzzle, siguiendo las normas de pegado indicadas en el mismo. En su turno, cada jugador podrá colocar un polígono que pueda unirse con alguno de los que ya lo están; el primero de todos ellos será elegido por el jugador que comience. Con respecto a esto, el profesor indicará que cada pareja puede decidir qué jugador comienza; si no hay preferencia, puede sugerirse que lo decidan a cara o cruz con una moneda.

Cada vez que un jugador coloque un nuevo polígono, deberá computar la cantidad escrita en la pizarra. Para agilizar el juego, el profesor explicará que no es necesario contar en cada ocasión los vértices, aristas y caras de la unión de polígonos que se tiene, sino solamente actualizar la cifra anterior con los elementos que se hayan añadido en el último movimiento. Es preciso dejar claro que tanto las aristas como los vértices que se pegan entre sí sólo se cuentan una vez, pues al hacerlo se convierten en un solo elemento.

Un jugador anota un punto cada vez que consigue cambiar el resultado del cómputo con respecto al turno anterior (el de su oponente). Esto no incluye el primer turno, en el que se elige el polígono inicial de la construcción. El jugador que acumule más puntos al término de la misma gana la partida.

Si se dispone de poco tiempo, el juego puede acelerarse introduciendo una tirada de dado en cada turno; el jugador correspondiente podría colocar tantos polígonos como indicara el número obtenido, manteniendo el resto de reglas. Por otra parte, cabe destacar que el juego ofrece una variedad de posibilidades debido a las distintas naturalezas de las superficies involucradas. Una estrategia en un poliedro esférico puede no ser válida en uno toroidal.

El propósito de estos juegos es que los alumnos dirijan su atención hacia los cambios en la característica de Euler y que observen, al menos de forma intuitiva, el modo en que éstos se producen. Tales cambios tienen lugar cuando distintas partes de la superficie se conectan entre sí, cambiando la forma global del objeto. Pero no menos importante es que comprendan que no varía entre objetos que se pueden transformar el uno en el otro siguiendo las reglas de la Topología.

Actividad 5: el número de Euler II

Duración: **1 hora**

Objetivos a los que contribuye: **D2, D3, D4 y D5**

Esta quinta actividad tiene como propósito cerrar el círculo en torno al número de Euler. Algunas de sus características están basadas en otra de las actividades que propone Sugarman ([10], pp. 29–31). El profesor dividirá a los alumnos en grupos de unos 3 componentes, siempre tratando de agrupar de manera distinta a las ocasiones anteriores. Análogamente a la Actividad 1, distribuirá los modelos entre los grupos. Si en el transcurso de la Actividad 3 algunos modelos han sido alterados, deberán recomponerse previamente.

A continuación, el profesor recuperará la historia de Planilandia. Explicará a los alumnos que, para conocer mejor el mundo en el que viven, los planilandeses lo han dividido en *parcelas poligonales*. Entonces indicará que ellos deben hacer lo mismo con los modelos que tienen en sus manos. Podrán marcar o dibujar sobre los modelos, según el caso.

No obstante, es importante que quede claro qué es una parcela poligonal en una superficie. Para ello, explicará que los polígonos que están dentro de una superficie no tienen por qué ser perfectamente planos, sino que pueden estar curvados de cualquier modo (tanto ellos como sus lados). Eso sí, recordará que, en cualquier caso, deben poder convertirse en polígonos *habituales* mediante las transformaciones que permite la Topología, así como tener vértices y lados bien distinguidos. No menos importante es la disposición conjunta de las parcelas: ningún lado de cualquier parcela puede coincidir, ni total ni parcialmente, con dos o más lados de otra adyacente. El profesor realizará dibujos en la pizarra para ilustrar todas estas cuestiones.

Los alumnos trabajarán en sus grupos, pero se les recordará que pueden pedir ayuda a otros compañeros. Para fomentar esta posibilidad, pueden repartirse modelos que representen a la misma superficie en grupos distintos. Dado que es la actividad más complicada, el profesor supervisará el trabajo de los alumnos y se asegurará de que tienen claras las reglas de división en parcelas. Por otra parte, fomentará que las divisiones sean sencillas para agilizar el posterior cálculo del número de Euler.

Una vez hayan terminado, cada grupo mostrará las divisiones que ha encontrado, e intercambiará sus modelos con otros. Entonces el profesor preguntará si pueden calcular el número de Euler de cada uno en base a las parcelas obtenidas. Se recuerda que no importa que no sean poliedros como los habituales, porque la Topología permitía transformar éstos en superficies curvas. En el proceso, cada grupo revisará el trabajo del resto y contará vértices, aristas y caras para efectuar el cálculo. Con este objetivo, podrán realizar marcas en los modelos.

Tras ello, se realizará una puesta en común, resumiendo la información en la pizarra. El profesor conducirá a los alumnos hacia varias conclusiones. En primer lugar, modelos que correspondían a una misma superficie arrojan igual número de Euler. En segundo lugar, no importa qué división en parcelas se escoja.

Actividad 6

Duración: **1 hora**

Objetivos a los que contribuye: **D4**

Esta actividad consiste en que los alumnos tomen parte en un par de juegos, que se realizan por parejas.

El primero tiene como objetivo afianzar la comprensión del modelo del toro a partir de un rectángulo con lados opuestos identificados. El profesor dividirá a los alumnos por parejas (nuevamente, tratará de variar con respecto a las agrupaciones anteriores) y les indicará que van a jugar a una versión especial del juego *tres en raya* ([11], pp. 14–17). Concretamente, tendrán que jugar en un tablero en forma de toro (ver 4.8, sección de recursos). El criterio de victoria es el mismo que en el juego original.

El profesor repartirá los tableros y realizará una discusión previa sobre algunas posiciones, distinguiendo si son ganadoras o no. Alternará entre la visualización sobre el tablero en sí y la representación más abstracta, consistente en el pegado de los lados.

Las parejas jugarán dos partidas con este tablero (si faltase tiempo, podría jugarse una sola). Para ello, deberá disponerse de un buen número de fichas de distintos colores o formas (ver 4.8, sección de recursos). Mientras tanto, el profesor supervisará la actividad, asegurándose de que los alumnos comprenden y asimilan las reglas.

A continuación, se anunciará que dichas reglas van a cambiar. Esta vez los lados del tablero se identifican invirtiendo la orientación de los mismos, correspondiendo a la representación del plano proyectivo. Se repartirá el tablero correspondiente (ver 4.8, sección de recursos) y se repetirá el proceso llevado a cabo con el juego anterior.

4.8. Recursos

Los recursos necesarios para poner en práctica esta Unidad Didáctica se describen en este apartado. Si bien los recursos digitales y las TIC pueden ser de gran ayuda, la intención ha sido no comprometer la realización de la Unidad con la disponibilidad de los mismos, sustentándola sobre recursos elementales. No obstante, pueden incluirse dichas tecnologías si se dispone de ellas; en la sección 4.11 de atención a la diversidad se recogen algunos contenidos accesibles en Internet.

Los recursos materiales se han dividido entre *básicos* y *accesorios*, según su importancia. Podría prescindirse de los denominados *accesorios* sin perjudicar en gran medida al desarrollo de la Unidad.

Recursos básicos

- Por parte de los alumnos, un cuaderno para tomar apuntes o similar. Material de escritura.
- Rotuladores
  Sirven para poder dibujar sobre algunos materiales y objetos, como la pelota de goma.
- Pizarra y tiza
- Cartulina o papel, pegamento y celofán
  Con estos materiales se elaboran algunos de los modelos necesarios en la primera sesión. Con ellos se construye también una banda de Möbius para la sexta sesión y la escultura *Infinity* para la séptima sesión (ver sección 4.6).
- Globos, cola y papel de periódico
  Con estos materiales pueden elaborarse *globos de papel*. Basta hinchar el globo, encolarlo con el papel de periódico y dejarlo secar. A su vez, éstos permiten obtener algunos de los modelos que se describen en la primera sesión (ver sección 4.6).
- Una pelota de goma
- Una o varias gomas elásticas

- Pasta de modelar

  En cantidad suficiente para realizar los modelos y actividades que se indican (ver sección 4.6, primera sesión y sección 4.7, Actividades 1, 2, 3 y 5).

- Un flotador

- Letras de cartón

  Una A y una B. Pueden conseguirse en algunas tiendas de manualidades.

- Limpiapipas

  Se encuentran también en tiendas de manualidades.

- Fichas de (al menos) dos colores o formas distintas

  Deberá disponerse de una cantidad suficiente para que puedan jugar al tres en raya *tórico* y *proyectivo* 8 parejas; cada jugador podrá requerir hasta 27 de ellas. Pueden utilizarse legumbres, recortes de papel o cartón, etc.

Además, deberá contarse con varios puzzles para la Actividad 4, que se describen a continuación. Se trata de puzzles basados en la tecnología y diseño del juego *Polifieltros 3D*[7]. Sus piezas son polígonos elaborados con fieltro, de modo que cada uno de estos puzzles permite la construcción de una determinada figura poliédrica siguiendo las indicaciones de las etiquetas que emparejan unos lados con otros. Las uniones son posibles gracias a tiras con bucles y ganchos. Los polígonos que los componen son los siguientes:

- Triángulos equiláteros

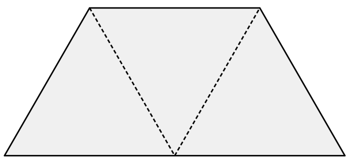
- Cuadrados

- Pentágonos regulares

- Hexágonos regulares

- Trapecios de *tipo 1*

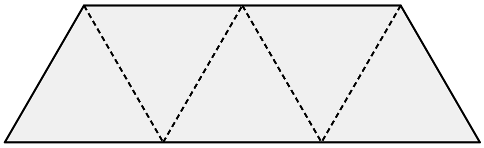
  Formados por 3 triángulos equiláteros.



[7] Sitio web del juego *Polifieltros 3D*: http://www.polifieltros3d.com/

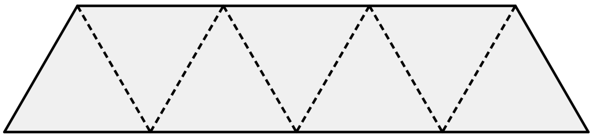
- Trapecios de *tipo 2*

  Formados por 5 triángulos equiláteros.



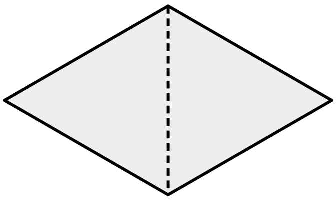
- Trapecios de *tipo 3*

  Formados por 7 triángulos equiláteros.



- *Diamantes*

  Formados por 2 triángulos equiláteros.



En previsión de un máximo de 16 alumnos (lo que arrojaría 8 parejas para la Actividad 4) se propone disponer de los siguientes 9 puzzles.

1. Un icosaedro truncado, compuesto por 20 hexágonos regulares y 12 pentágonos regulares.

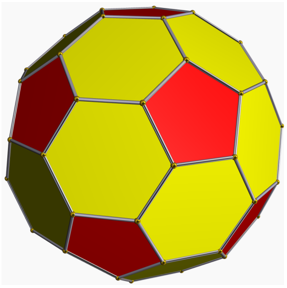


Figura 4.8: Icosaedro truncado. Fuente: Wikimedia Commons. Autor: Tom Ruen. Creado con el software *Stella* de Robert Webb.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncated_icosahedron.png

2. Un icosidodecaedro, formado por 12 pentágonos y 20 triángulos equiláteros.

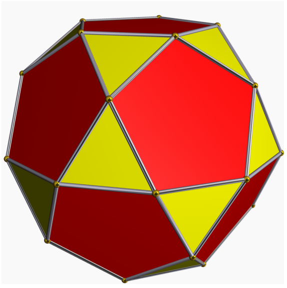


Figura 4.9: Icosidodecaedro. Fuente: Wikimedia Commons. Autor: Tom Ruen. Creado con el software *Stella* de Robert Webb.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Icosidodecahedron.png

3. Un cilindro (sin bases) formado por 40 triángulos equiláteros. Concretamente, su configuración corresponde a la que éstos tendrían en una torre de 4 antiprismas pentagonales, colocados uno encima de otro.

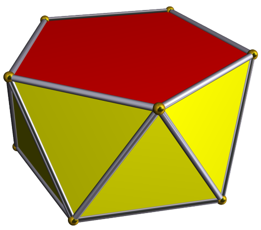


Figura 4.10: Antiprisma pentagonal. Fuente: Wikimedia Commons. Autor: Tom Ruen. Creado con el software *Stella* de Robert Webb.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pentagonal_antiprism.png

4. Un poliedro toroidal basado en el pentágono. Lo conforman 10 trapecios de tipo 1 y otros 10 de tipo 2. En la siguiente imagen se puede observar un ejemplo de este tipo de poliedros, aunque basado en el hexágono.

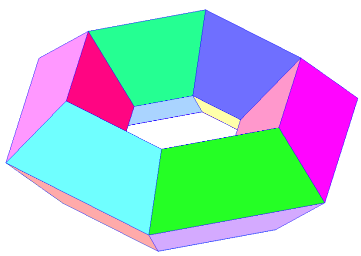


Figura 4.11: Poliedro toroidal. Fuente: Wikimedia Commons. Autor: Tom Ruen.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hexagonal_torus.png

5. Un Toroide de Stewart, construido a partir de 48 triángulos equiláteros.

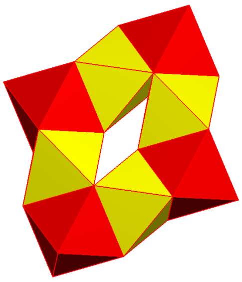
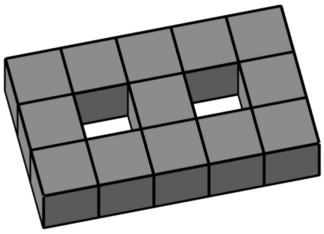


Figura 4.12: Uno de los poliedros toroidales de Stewart. Fuente: Wikimedia Commons. Autor: Tom Ruen.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eight_octahedra_toroid.png

6. Un poliedro 2–tórico compuesto por 50 cuadrados.



7. Un poliedro 2–tórico obtenido a partir de las aristas de una bipirámide triangular. Cuenta con 12 trapecios de tipo 2, 12 trapecios de tipo 3 y 6 diamantes.
8. Un poliedro 3–tórico obtenido a partir de las aristas de un tetraedro. Lo componen 12 triángulos equiláteros, 16 trapecios de tipo 2 y 12 trapecios de tipo 1.
9. Un toroide de Stewart de género 3, compuesto por 4 hexágonos regulares, 18 cuadrados y 16 triángulos equiláteros.

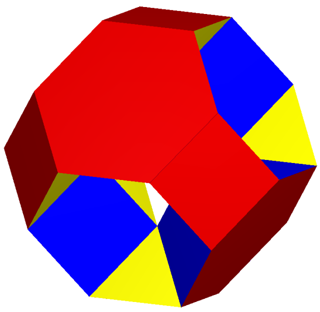


Figura 4.13: Octaedro truncado y *excavado* (toroide de Stewart de género 3). Fuente: Wikimedia Commons. Autor: Tom Ruen.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Excavated_truncated_octahedron2.png

Por otra parte, la Actividad 6 necesita de la impresión de tantos tableros de juego como parejas se formen. Se precisan de dos tipos: uno correspondiente al tres en raya *tórico* (Figura 4.14) y otro al *proyectivo* (Figura 4.15). [11], p. 296, ha servido de inspiración para esta idea.

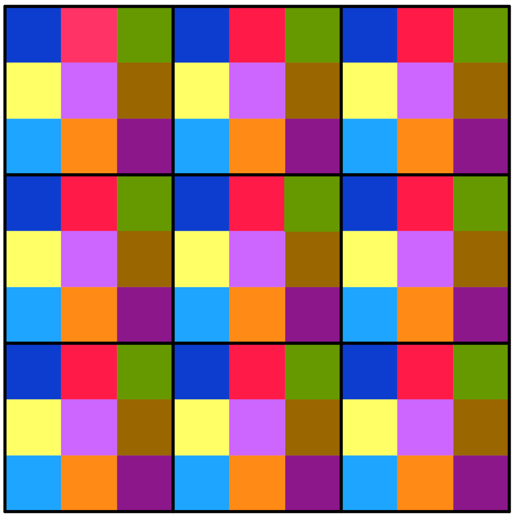


Figura 4.14: Tablero tórico para el juego del *tres en raya*.

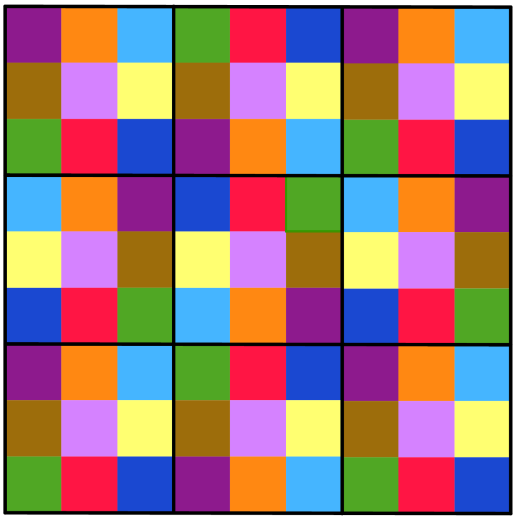
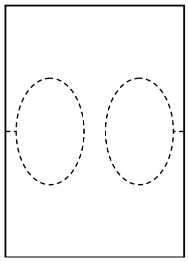


Figura 4.15: Tablero proyectivo para el juego del *tres en raya*.

La séptima sesión requiere de un modelo en papel o fieltro de la escultura *Infinity* de Charles O. Perry. Para construirlo con papel puede recurrirse a un folio, que se recorta de la siguiente manera:



La superficie se obtiene pegando los laterales nuevamente tras girar una de las mitades media vuelta con respecto a la otra (por ejemplo, utilizando celofán). Con fieltro el proceso es similar, aunque el papel es mejor material para dibujar posteriormente sobre él. Si la torsión quiebra el papel, puede recurrirse a recortar elipses más excéntricas y/o a estrechar la cinta central.

Recursos accesorios

- Un cuenco
  Puede fabricarse a partir de un globo de papel, si no se dispone de uno.
- Papel de calco
- Un embudo
- Un gorro de piscina (de goma elástica)
- Modelo de la botella de Klein (tela, vidrio, etc.)

4.9. Competencias

A pesar de tratarse de una propuesta para una actividad extracurricular, en este apartado se describen las contribuciones que, en materia de competencias, se realizan al currículo. Se contempla la *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero*[8] como texto de referencia a este respecto.

Competencia linguística: El alumno pone en marcha esta competencia en tanto que intercambia conocimientos e interactúa con el grupo en las diversas ocasiones en que esto se precisa; también mediante la participación, formulación de preguntas y explicación de ideas propias acerca de los contenidos trabajados.

[8] *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.*

Competencia matemática: El alumno moviliza la competencia matemática al razonar, conjeturar, descubrir y experimentar con los objetos físicos y matemáticos; en este caso, con las superficies y conceptos propios de la Topología. Además, adquiere esta competencia al aproximarse a contenidos matemáticos modernos, relacionados con el entorno y que muestran modos y estrategias propias del trabajo en Matemáticas. En particular, se incide en los ámbitos de cambio/relaciones y espacio/forma.

Competencia de aprender a aprender: Aunque la Unidad Didáctica propone un aprendizaje guiado, esta competencia interviene cuando el alumno encuentra la motivación para aprender a través de las dinámicas y actividades, toma conciencia de estrategias que se utilizan en la resolución de problemas e investigaciones matemáticas y descubre nuevos interrogantes que fomentan su implicación en un aprendizaje activo.

Competencias sociales y cívicas: El alumno participa de estas competencias al formar parte de un proceso de aprendizaje en grupo, a través del cual interactúa con los demás en un contexto de cooperación y consideración del otro.

Conciencia y expresiones culturales: Esta competencia viene reflejada en las cuestiones sobre la naturaleza del Universo en que habita el ser humano, y que recogen un conjunto de impresiones, reflexiones e interrogantes presentes en la cultura de cualquier colectivo.

4.10. Metodología

En materia de metodologías, pueden destacarse en esta Unidad Didáctica las siguientes facetas:

Método expositivo: Parte del desarrollo de la Unidad recurre a esta metodología; resulta eficaz a la hora de incidir sobre determinados conceptos o situaciones, realizar narraciones y también para actuar como puente hacia las actividades. En este sentido, contribuye también a cubrir los contenidos en los tiempos propuestos. En cualquier caso, la participación de los alumnos se considera esencial y se debe fomentar más allá de las indicaciones concretas que se recogen en la sección 4.6.

Aprendizaje cooperativo: En el transcurso de las sesiones se trata de involucrar a los alumnos en dinámicas de cooperación con sus compañeros, empleando disposiciones por parejas, pequeñas agrupaciones o también discusiones grupales para construir los conocimientos.

No obstante, debido al carácter distendido de la Unidad Didáctica no se trata de un enfoque que remarque la responsabilidad colectiva. Simplemente contempla algunos de los elementos de esta metodología, como los ya mencionados.

Estudio de casos: Aunque de manera superficial, el estudio de casos también se perfila en esta Unidad Didáctica en tanto el grupo analiza, por ejemplo, la investigación de los planilandeses sobre la forma de su mundo.

Principios Metodológicos de Dienes: En muchas ocasiones se encuentran contextualizados a la Educación Primaria, pero resultan útiles también en el ámbito de la Secundaria. En esta Unidad Didáctica se recurre fundamentalmente al Principio de construcción (manipulación del concepto matemático previamente a su denominación y análisis; por ejemplo, el tratamiento de la característica de Euler) y al Principio de variabilidad perceptiva (mostrar un mismo objeto o estructura matemática con distintas apariencias; por ejemplo, el caso del concepto de superficie).

Gamificación: Como ocurre con la característica de Euler o el plano proyectivo, la Unidad Didáctica recurre a presentar algunos contenidos en forma de juegos. Al convertir los aspectos fundamentales de los conceptos en las claves de los juegos en cuestión, los alumnos pueden avanzar en la comprensión sin romper el carácter distendido de las sesiones.

4.11. Atención a la diversidad

En la presente planificación no se presuponen participantes con necesidades especiales. No obstante, debe atenderse la diversidad de los alumnos y sus distintos modos y ritmos de aprendizaje.

Para ello son útiles los propios recursos y dinámicas con los que cuenta la Unidad, que contribuyen a igualar dichos ritmos gracias a la cooperación entre compañeros y a la variedad de perspectivas que ofrecen sobre la materia. Además, el carácter distendido de las sesiones permite flexibilizarlas para que ningún alumno quede atrás.

Por otro lado, se contemplan materiales para aquellos alumnos que deseen profundizar en la materia o acceder a ella con mayor detenimiento, como pueden ser los textos divulgativos de J. R. Weeks ([11], en inglés) y V. Muñoz ([7], en castellano). Éstos amplían los contenidos trabajados e incluyen discusiones sobre cuestiones relacionadas, como es la geometría de superficies y 3–variedades. Otra opción es ofrecer un tratamiento informal de la teoría, como el que muestra el presente trabajo. También pueden hallarse recursos en algunos sitios web. Por citar algunos, el canal de Jos Leys en *YouTube*[9] o los sitios web de *Divulgamat*[10], *Imaginary*[11] y el *Mago Moebius*[12].

4.12. Evaluación

La evaluación de la Unidad Didáctica se basa en las siguientes medidas:

1. En primer lugar y, como primera fuente de información para la evaluación, se contempla la observación sistemática del transcurso de las sesiones. El profesor podrá anotar, diariamente, sus impresiones sobre el desarrollo de las mismas. Se recomienda seguir la estructura marcada en la planificación para acondicionarlas al proceso de evaluación. Estas observaciones deberán tener en cuenta aquellas facetas de la planificación que se vean involucradas en cada sesión (metodología, actividades, recursos...) en relación con el logro de los objetivos. Asimismo, serán interesantes informaciones sobre otros aspectos que influyan en el desarrollo de la Unidad Didáctica, como el clima de aula o las actitudes de los alumnos hacia las actividades y contenidos presentados.

2. En segundo lugar se propone la utilización de rúbricas sobre los objetivos. En dichas rúbricas figurará cada uno de los objetivos junto con un indicador de realización y un apartado para comentarios adicionales, en una disposición como la siguiente:

Objetivo	**Grado de realización**			**Comentarios**
	Bajo	**Medio**	**Alto**	

Esta información servirá para poder diagnosticar con más claridad cuál ha sido el grado de consecución de los objetivos, aportando una visión global al respecto. Complementada con las observaciones del profesor, esta rúbrica se convierte en una vía para identificar cómo los elementos planificados contribuyen a cumplir con los objetivos, e incluso permite discutir la adecuación de estos últimos.

[9] https://www.youtube.com/user/josleys/featured

[10] Por ejemplo, la sección de Arte y Matemáticas:
http://www.divulgamat.net/divulgamat15/index.php?option=com_alphacontent&section=10&Itemid=67

[11] Cuenta con galerías de imágenes, recursos interactivos, software, etc.: https://imaginary.org/es

[12] https://topologia.wordpress.com/

3. Al igual que se tienen rúbricas para los objetivos, es recomendable hacer lo mismo para las actividades por ser elementos de gran peso e importancia en la planificación. No en vano ocupan buena parte del tiempo, de ahí que sea importante saber si su realización y efectos se ajustan a lo esperado.

4. Por último, es interesante conocer el punto de vista de los alumnos. Para ello, se proporcionará un breve cuestionario anónimo que incluya una serie de preguntas, las cuales se detallan a continuación. Algunas versan sobre los contenidos trabajados, mientras que otras lo hacen acerca del punto de vista del alumno sobre el desarrollo de las sesiones en general. En todo caso se pedirá sinceridad a los alumnos y que respondan someramente, en unas pocas líneas.

    - Comenta brevemente qué son para ti las Matemáticas. ¿Te parecen interesantes o aburridas? ¿Por qué?
    - Te resulta difícil estudiar Matemáticas? Si es así, ¿A qué crees que se debe?
    - ¿Sabrías explicar en qué consiste la Topología?
    - ¿En qué se parece y en qué se diferencia la Topología de otras Matemáticas que conoces? ¿La Topología sería para ti una rama de las Matemáticas?
    - ¿Alguna actividad te ha resultado atractiva y/o interesante? Si es así, ¿Cuál (o cuáles) y por qué?
    - ¿Alguna actividad te ha parecido aburrida y/o complicada? Si es así, ¿Cuál (o cuáles) y por qué?
    - Comenta si, en tu opinión, ha habido dificultades para seguir las explicaciones y los contenidos.
    - En general, ¿Dirías que la experiencia ha sido provechosa? ¿Se la recomendarías a un amigo o amiga?

Dicho cuestionario se entregará al término de la última sesión, realizando una breve explicación del propósito del mismo (esto es, la evaluación) y las aclaraciones que se precisen sobre las preguntas.

Toda la información recogida mediante este proceso tiene como objetivo discutir la adecuación de los elementos que componen la Unidad Didáctica de acuerdo con el propósito de la misma, incluyendo los propios objetivos. Las conclusiones servirán para actualizar futuras implementaciones de la misma.

Bibliografía

[1] Ascaso, J.; Casterad, J.; Generelo, E.; Guillén, R.; Lapetra, S.; Tierz, M. P. (1996).
La actividad física y deportiva extraescolar en los centros educativos. Actividades en la Naturaleza.
Madrid. Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

[2] Fernández Oliveras, A.; Oliveras, M. (2016).
Broadening teacher training: playful learning in non-formal contexts for science and mathematics education.
The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences 8, pp. 162–171.

[3] Gilbert, N. D.; Porter, T. (1994).
Knots and surfaces.
Nueva York. Oxford University Press.

[4] González, S. (2016).
¿Qué impacto tienen las actividades extraescolares sobre los aprendizajes de los niños y los jóvenes?
¿Qué funciona en educación? Evidencias para la mejora educativa: octubre de 2016.

[5] Guerrero, A. (2006).
Actividades extraescolares, liderazgo y gestión de la cultura en las organizaciones escolares (II): estudio de casos de colegios con pedagogía de autor.
Convergencia con Europa y cambio en la universidad: XI Conferencia de Sociología de la Educación: Santander, 22, 23, y 24 de septiembre de 2006, pp. 224–225.

[6] Ministerio de Educación y Ciencia (1996).
Las actividades extraescolares en los centros educativos.
Secretaría General Técnica. Centro de Publicaciones.

[7] Muñoz, V. (2011).
Formas que se deforman. La Topología.
RBA.

[8] Pérez, I. (2017).
Una propuesta extracurricular para crear conciencia social y medioambiental en la Educación Secundaria Obligatoria.
Trabajo Fin de Máster. Máster Universitario de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas. Universidad de Granada.

[9] Rodríguez, E. (1978).
Tiempo libre y actividades extraescolares.
Salamanca. Editorial Anaya.

[10] Sugarman, C. (2014).
Using Topology to Explore Mathematics Eduaction Reform.
HMC Senior Theses 54.

[11] Weeks, J. R. (1985).
The Shape of Space: How to Visualize Surfaces and Three–Dimensional Manifolds.
Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 96. Nueva York, Marcel Dekker.