Agujeros negros en teorías de la gravedad Palatini

Trabajo de fin de máster

Pablo Miranda Rodríguez

Tutor: Diego Sáez-Chillón Gómez

24 de septiembre de 2020

Índice

Resumen

En este trabajo de fin de máster se presenta un pequeño estudio de los agujeros negros en el formalismo Palatini, centrándonos en las soluciones de curvatura constante, aunque algunos resultados son más generales. En la primera sección se realiza una introducción acerca de la motivación para esta teoría alternativa de la gravedad, así como una derivación de los resultados esenciales de este principio variacional. En la segunda sección se estudian la validez del teorema de Birkhoff en este formalismo, además de encontrar la expresión general de la métrica de un agujero negro de curvatura constante. Finalmente, en la última sección, se estudia la termodinámica de los agujeros negros, calculándose la temperatura y la entropía de los mismos por dos métodos distintos.

Abstract

In this master thesis a brief study of black holes in the Palatini formalism is presented, focusing on constant curvature solutions, although some results are more general. In the first section, an introduction about the motivation for this alternative theories of gravity its made, as well as a derivation for the key results of this variational prinicple. In the second section validity of Birkhoff's theorem in this formalism is studied and also the general expression for the metric of a constant curvature black hole. Finally, in the last section, black hole thermodynamics is studied, calculating the temperature and entropy by two different approaches.

1. Teorías $f(\mathcal{R})$ en el formalismo Palatini

1.1. Motivación de las teorías $f(\mathcal{R})$

La Teoría de la Relatividad General presenta una serie de problemas teórico-prácticos encapsulados en la acción de Hilbert-Einstein. Por ejemplo, desde una óptica púramente teórica, la acción no es renormalizable, lo que imposibilita la construcción tradicional de una teoría cuántica de campos. Es en el ámbito experimental donde se encuentran los problemas más acuciantes: la materia ordinaria (bariónica) tan sólo representa el 4 % de la composición del universo observable. El 76 % de la misma corresponde a la energía oscura, una forma de energía desconocida que se cree responsable de la expansión acelerada del universo. El modelo actual que se ajusta más al conjunto de datos observados se conoce como ΛCDM (Λ-*Cold Dark Matter*). La naturaleza de este modelo puede considerarse, en ciertos aspectos, como *ad-hoc* debido a su incierta motivación teórica [1]. Los problemas de ΛCDM justifican la búsqueda de modelos alternativos que permitan reproducir la evolución del universo sobre bases más sólidas.

Una de las alternativas para resolver estos problemas se enfoca en modificar la acción gravitatoria, sustituyendo el escalar de curvatura R por una función arbitraria $f(R)$ del mismo. Este tipo de teorías de la gravitación son capaces de reproducir distintos modelos cosmológicos como por ejemplo ΛCDM, además de satisfacer los tests del Sistema Solar [2]. La gravedad $f(R)$ tiene la ventaja ontológica de no requerir entidades "exóticas"(como la materia oscura), satisfaciendo así la navaja de Ockham. Las teorías $f(R)$ se desarrollan principalmente en dos marcos[1]: el formalismo métrico y el formalismo Palatini. En este último el escalar de curvatura $\mathcal{R}$ se construye a partir de una conexión *a priori* independiente de la métrica. La justificación para esto descansa en que, formalmente, conexión y métrica son dos entidades geométricas independientes [3]. La métrica especifica cómo medir distancias mientras que la conexión determina cuáles son las autoparalelas. Este tipo de geometrías aparecen en otros áreas de la física, como por ejemplo en sistemas de materia condensada con defectos microscópicos [4]. Un estudio extensivo de este tipo de teorías puede ser encontrado en [3].

1.2. Introducción al formalismo Palatini

Se considera la acción

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{|g|} f\left(\mathcal{R}\right) + S^{(m)}\left(g_{ab}, \psi\right) \tag{1}$$

donde la acción correspondiente a la materia tan sólo depende del tensor métrico y del propio campo de materia. Es decir, se asume independencia de la conexión. El procedimiento cosnsite en aplicar el principio variacional de Palatini, esto es, realizar variaciones respecto de los dos grados de libertad de la teoría (conexión y métrica) obteniendo así dos ecuaciones del movimiento. En primer lugar

[1] Existe además una tercera variante conocida como formalismo métrico-afín, en el cuál la acción de la materia también depende de una conexión independiente.

$$\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\left[f\left(\mathcal{R}\right)\delta\sqrt{|g|}+\sqrt{|g|}\delta f\left(\mathcal{R}\right)\right]+\delta S^{(m)}\left(g_{ab},\psi\right)=0 \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que

$$T_{ab} = \frac{-2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}^{(m)}\right)}{\delta g^{ab}} \tag{3}$$

$$\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{ab}\delta g_{ab} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g_{ab}\delta g^{ab} \tag{4}$$

$$\delta f\left(\mathcal{R}\right) = \frac{\delta f\left(\mathcal{R}\right)}{\delta\mathcal{R}}\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta g^{ab}} \tag{5}$$

se obtiene inmediatamente la ecuación de movimiento

$$f_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}\right)\mathcal{R}_{ab}\left(\Gamma\right)-\frac{1}{2}f\left(\mathcal{R}\right)g_{ab}=\kappa^2 T_{ab} \tag{6}$$

donde el subíndice $\mathcal{R}$ indica diferenciación con respecto del escalar de curvatura. La segunda ecuación del movimiento se obtiene realizando variaciones con respecto de la conexión $\Gamma\equiv\Gamma^a_{bc}$

$$\frac{\delta S}{\delta\Gamma} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{|g|}\delta f_{\mathcal{R}}\left(R\right) = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{|g|}f_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}\right)g^{ab}\delta\mathcal{R}_{ab}=0 \tag{7}$$

La variación del tensor de Ricci se puede escribir como

$$\delta\mathcal{R}_{ab} = \nabla^{\Gamma}_c\delta\Gamma^c_{ab}-\nabla^{\Gamma}_b\delta\Gamma^c_{ac} \tag{8}$$

donde empleamos el superíndice Γ para indicar que se trata de una derivada covariante *a priori* no compatible con g_{ab}. Con esto, es posible escribir

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\Gamma} &= \int d^4x\sqrt{|g|}f_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}\right)g^{ab}\delta\mathcal{R}_{ab} = \int d^4x\sqrt{|g|}f_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}\right)\left(g^{ab}\nabla^{\Gamma}_c\delta\Gamma^c_{ab}-g^{cb}\nabla^{\Gamma}_c\delta\Gamma^a_{ab}\right)\\ &= \int d^4x\Big\{\nabla^{\Gamma}_c\left(\sqrt{|g|}B^c\right)-\delta\Gamma^d_{ab}\Big[\nabla^{\Gamma}_d\left(\sqrt{|g|}f_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}\right)g^{ab}\right)-\delta^a_d\nabla^{\Gamma}_c\left(\sqrt{|g|}f_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}\right)g^{cb}\right)\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{9}$$

siendo

$$B^c = f_{\mathcal{R}}\left(\mathcal{R}\right)\left[g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab}-g^{cb}\delta\Gamma^a_{ab}\right] \tag{10}$$

Ahora bien, en B^c tan sólo hay dependencia en las variaciones de la conexión (y no en las variaciones de sus derivadas). Por tanto, al ser $\nabla^{\Gamma}_c\left(\sqrt{|g|}B^c\right)$ una derivada total se puede eliminar este término de contorno imponiendo las condiciones de Dirichlet habituales ($\delta\Gamma = 0$

en la frontera), obteniendo entonces la ecuación

$$\nabla_d^\Gamma \left(\sqrt{|g|} f_{\mathcal{R}} \left(\mathcal{R}\right) g^{ab}\right) - \delta^a{}_d \nabla_c^\Gamma \left(\sqrt{|g|} f_{\mathcal{R}} \left(\mathcal{R}\right) g^{cb}\right) = 0 \tag{11}$$

Se toma la traza de esta ecuación $a = d$ para encontrar

$$\nabla_c^\Gamma \left(\sqrt{|g|} f_{\mathcal{R}} \left(R\right) g^{cb}\right) = 0 \tag{12}$$

con lo cual la ecuación (11) se simplifica a

$$\nabla_d^\Gamma \left(\sqrt{|g|} f_{\mathcal{R}} \left(\mathcal{R}\right) g^{ab}\right) = 0 \tag{13}$$

En el caso de la Relatividad General $f_{\mathcal{R}} \left(\mathcal{R}\right) = 1$ y por consiguiente la ecuación (13) se convierte en la ecuación de compatibilidad de la métrica g_{ab}, siendo Γ por tanto la conexión de Levi-Civita.

La ecuación $\nabla_d^\Gamma \left(\sqrt{|g|} f_{\mathcal{R}} \left(\mathcal{R}\right) g^{ab}\right) = 0$ indica la existencia de una métrica auxiliar $h^{ab} = f_{\mathcal{R}} \left(\mathcal{R}\right) g^{ab}$ tal que la derivada covariante ∇^Γ es compatible con ella, o sea $\nabla_d^\Gamma \left(\sqrt{|h|} h^{ab}\right) = 0$. Esto significa que las componentes de la conexión Γ^c_{ab} son los símbolos de Christoffel de h_{ab}.

1.3. Equivalencia con las teorías Brans-Dicke

Tanto en el formalismo métrico como en el formalismo Palatini, las diferentes teorías $f(R)$ pueden ser representadas como una teoría de tipo Brans-Dicke con un potencial (bien entendida la equivalencia como una identidad entre las ecuaciones del movimiento de la teoría). Esto tiene ciertas ventajas dado que las teorías Brans-Dicke llevan siendo estudiadas desde los años sesenta, lo que nos posibilita emplear resultados ya conocidos para el estudio de las teorías Palatini.

Para acometer esta tarea, se introduce el campo ζ y la acción

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{|g|} \left[f\left(\zeta\right) + f_{\mathcal{R}}\left(\zeta\right)\left(\mathcal{R} - \zeta\right)\right] + S^{(m)}\left(g_{ab}, \psi\right) \tag{14}$$

La variación de (14) respecto del campo ζ es

$$f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\left(\zeta\right)\left(R - \zeta\right) = 0 \tag{15}$$

Por consiguiente, la acción (14) es equivalente a (1) siempre que se verifique $f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\left(\zeta\right) \neq 0$ (dado que $\zeta = R$). Esto parece garantizado, puesto que para que la teoría sea estable se requiere $f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\left(\zeta\right) > 0$ [5]. Realizando las siguientes redefiniciones

$$\phi = f_{\mathcal{R}}\left(\zeta\right) \qquad V\left(\phi\right) = \zeta\phi - f\left(\zeta\right) \tag{16}$$

se obtiene

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\phi \mathcal{R} - V(\phi) \right] + S^{(m)} (g_{ab}, \psi) \tag{17}$$

Al expresar $\mathcal{R}$ en función de R la acción se escribe como (sin tener en cuenta los términos de frontera propios de las teorías escalar tensor)

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\phi R + \frac{3}{2\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] + S^{(m)} (g_{ab}, \psi) \tag{18}$$

Queda comprobar que las ecuaciones del movimiento de (1) y de (18) son equivalentes. En efecto, al realizar variaciones con respecto del tensor métrico se obtiene

$$G_{ab} = \frac{\kappa^2}{\phi} T_{ab} - \frac{3}{2\phi^2} \left(\nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \phi \nabla_c \phi \right) + \frac{1}{\phi} \left(\nabla_a \nabla_b \phi - \Box \phi g_{ab} \right) - \frac{V}{2\phi} g_{ab} \tag{19}$$

que coincide con la ecuación del movimiento (6) tras expresar $\mathcal{R}_a b$ en función de R_{ab} (se verá a continuación) y haber sustituido $\phi = f_{\mathcal{R}}$ y $V = \zeta\phi - f$. Por otro lado, la variación respecto del campo escalar ϕ es

$$\Box \phi = \frac{\phi}{3} \left(R - \frac{dV}{d\phi} \right) + \frac{1}{2\phi} \nabla^a \phi \nabla_a \phi \tag{20}$$

Al tomar la traza (19) es posible eliminar la dependencia en el escalar de curvatura R en (20), obteniéndose así

$$2V - \phi \frac{dV}{d\phi} = \kappa^2 T \tag{21}$$

que, tras deshacer las redeficiones (16) queda como

$$\mathcal{R} f_{\mathcal{R}} - 2f = k^2 T \tag{22}$$

que coincide con la traza de (6). El conjunto de este análisis permite establecer la equivalencia dinámica entre ambas teorías.

2. Agujeros negros en el formalismo Palatini

2.1. El teorema de Birkhoff

El primer paso para estudiar los agujeros negros en estas teorías es comprobar la validez del teorema de Birkhoff en el marco del formalismo Palatini para teorías $f(\mathcal{R})$. Se estudiará en concreto el caso del vacío. La ecuación del movimiento

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2}f g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \tag{23}$$

debe ser reescrita en términos de R_{ab} mediante la transformación conforme $h^{ab} = f_{\mathcal{R}}g^{ab}$, ya que $\mathcal{R}_{ab}$ se construye con los símbolos de Christoffel de la métrica conforme h_{ab} (estos a su vez deben ser reescritos en función de la métrica real g_{ab}). De esta forma (23) se convierte en

$$\begin{aligned} R_{ab}(g) - \frac{1}{2}R(g)g_{ab} =& \frac{\kappa^2}{f_R}T_{ab} - \frac{\mathcal{R}f_{\mathcal{R}} - f}{2f_R}g_{ab} - \frac{3}{2\left(f_{\mathcal{R}}\right)^2}\left[\partial_a f_{\mathcal{R}}\partial_b f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{2}g_{ab}\left(\partial f_{\mathcal{R}}\right)^2\right] \\ &+ \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}\left[\nabla_a\nabla_b f_{\mathcal{R}} - g_{ab}\Box f_{\mathcal{R}}\right] \end{aligned} \tag{24}$$

Al tomar la traza de (23)

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R} - 2f = \kappa^2 T \tag{25}$$

se ve que en el caso del vacío la solución a esta ecuación es $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0$ y por tanto $f_{\mathcal{R}}$ es una constante. Con esto en mente (24) se reduce a

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = -\frac{\mathcal{R}f_{\mathcal{R}} - f}{2f_{\mathcal{R}}}g_{ab} \tag{26}$$

es decir, la teoría es dinámicamente equivalente a la Relatividad General con una constante cosmológica. Es posible eliminar la dependencia en $\mathcal{R}$. Para ello se toma el caso del vacío en (25) y se introduce en (26)

$$R_{ab} - \frac{f}{2f_{\mathcal{R}}}g_{ab} = 0 \tag{27}$$

Por otro lado, la forma más general de un elemento de línea con simetría esférica es

$$ds^2 = -A^2\left(t,r\right)dt^2 + B^2\left(t,r\right)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \mathrm{sen}\theta^2 d\varphi^2 \tag{28}$$

El siguiente paso es introducir esta métrica en (27). Dado que la métrica es diagonal y las componentes no nulas del tensor de Ricci son $(t,t),(t,r),(r,r),(\phi,\phi),(\varphi,\varphi)$ se obtienen cinco ecuaciones que son, en ese orden,

$$\frac{2AA_r}{B^2 r} + \frac{A^2 f}{2f'} - \frac{B_{tt}}{B} + \frac{A_t B_t}{AB} - \frac{AA_r B_r}{B^3} + \frac{AA_{rr}}{B^2} = 0 \tag{29}$$

$$\frac{2B_t}{Br} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{2B_r}{Br} + \frac{B^2 f}{2f'} + \frac{BB_{tt}}{A^2} - \frac{A_t B B_t}{A^3} + \frac{A_r B_r}{AB} - \frac{A_{rr}}{A} = 0 \tag{31}$$

$$\frac{r^2 f}{2f'} + \frac{B_r r}{B^3} - \frac{A_r r}{AB^2} - \frac{1}{B^2} + 1 = 0 \tag{32}$$

$$\frac{-r^2 f \mathrm{sen}^2\theta}{2f'} - \frac{B_r r \mathrm{sen}^2\theta}{B^3} + \frac{A_r r \mathrm{sen}^2\theta}{AB^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{B^2} - \mathrm{sen}^2\theta = 0 \tag{33}$$

donde los subíndices r y t denotan diferenciación con respecto de dichas variables. De la ecuación (30) se deduce inmediatamente que B es una función exclusivamente de r. Se toma la derivada temporal en (32)

$$\frac{r}{B^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{A_r}{A}\right) = 0 \tag{34}$$

para encontrar que A es necesariamente de la forma

$$A(t,r) = w(t)a(r) \tag{35}$$

Si se redefine la coordenada temporal absorbiendo $w(t)$ en el diferencial tal que $t \to \tilde{t}$; $d\tilde{t} = w(t)dt$, el elemento de línea final es

$$ds^2 = a^2(r)\,dt^2 - B^2(r)\,dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \mathrm{sen}\theta^2 d\varphi^2 \tag{36}$$

así pues verificándose el teorema de Birkhoff.

2.2. Soluciones de agujero negro con curvatura constante

Una vez se ha demostrado que el elemento de línea con simetría esférica (que satisface las ecuaciones del movimiento de la teoría) no depende del tiempo, la métrica puede escribirse como [6]

$$ds^2 = -e^{-2\Phi(r)}A(r)\,dt^2 + A^{-1}(r)\,dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2 \tag{37}$$

siendo $\Phi(r)$ una función que modula el redshift.El objetivo es encontrar expresiones generales para las funciones $A(r)$ y $\Phi(r)$ tal que la métrica sea solución a las ecuaciones del movimiento y que, además, lleve asociada una curvatura escalar constante $R(g) = R_0$. Realizamos pues variaciones en la acción (1)

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0 \to r^4 \mathrm{sen}^2\theta f(\mathcal{R})\frac{\delta}{\delta\Phi}e^{-2\Phi(r)} + e^{-2\Phi(r)} r^4 \mathrm{sen}^2\theta f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})\frac{\delta\mathcal{R}}{\delta\Phi} = 0 \tag{38}$$

Dado que $\mathcal{R}_{ab}$ tan sólo depende de la conexión, únicamente contribuyen las variaciones del tensor métrico respecto de $\Phi(r)$. Se obtiene por tanto la ecuación

$$f(\mathcal{R}) + f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})\,\mathcal{R}_{tt}\frac{e^{2\Phi(r)}}{A(r)} = 0 \tag{39}$$

con

$$\mathcal{R}_{tt} = -e^{-2\Phi}\,\frac{\left(2A^2\Phi_{rr} - 2A^2\Phi_r^2 + 3AA_r\Phi_r - AA_{rr}\right)r + 4A^2\Phi_r - 2AA_r}{2r} \tag{40}$$

Hay que tener en cuenta que el tensor de Ricci está construido a partir de la métrica conforme $h_{ab} = f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})g_{ab}$. De forma análoga, tras realizar las variaciones respecto de $A(r)$ se obtiene

$$\mathcal{R}_{tt}\frac{e^{2\Phi(r)}}{A^2(r)} + \mathcal{R}_{rr} = 0 \tag{41}$$

con

$$\mathcal{R}_{rr} = \frac{\left(2A\Phi_{rr} - 2A\Phi_r^2 + 3A_r\Phi_r - A_{rr}\right)r - 2A_r}{2Ar} \tag{42}$$

Introduciendo los valores de $\mathcal{R}_{tt}$ y $\mathcal{R}_{rr}$ en (41), se obtiene una ecuación simplificada

$$\frac{2\Phi_r}{r} = 0 \tag{43}$$

de donde se sigue que Φ es una constante, por lo que (39) se reduce a

$$f + f_{\mathcal{R}}\left(\frac{A_{rr}r + 2A_r}{2r}\right) = 0 \tag{44}$$

Ahora bien, la condición de curvatura constante ha de imponerse sobre el escalar de Ricci $R(g)$ construido a partir de la métrica real. Se debería, en principio, proceder análogamente a la sección anterior y expresar la ecuación del movimiento en términos de R_{ab}. Sin embargo, la relación entre $\mathcal{R}$ y R viene dada por

$$\mathcal{R}_{ab} = R_{ab} + \frac{3}{2}\frac{1}{(f_{\mathcal{R}})^2}\nabla_a f_{\mathcal{R}}\nabla_b f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}\left(\nabla_a\nabla_b f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{2}g_{ab}\Box f_{\mathcal{R}}\right) \tag{45}$$

por lo que, de cara a encontrar soluciones de vacío, $\mathcal{R} = R$. En este caso, la traza de (6) resulta

$$\mathcal{R}_0 = R_0 = \frac{2f}{f_{\mathcal{R}}} \tag{46}$$

Con esto en mente hay que reescribir (44) como

$$f + \frac{2f}{R_0}\left(\frac{A_{rr}r + 2A_{rr}}{2r}\right) = 0 \tag{47}$$

con lo que, tras resolver la ecuación diferencial, se obtiene una expresión explícita para la función $A(r)$

$$A\left(r\right)=c_1+\frac{c_2}{r}-\frac{R_0}{6}r^2 \tag{48}$$

Para el caso $\Phi = 0$ y curvatura escalar R_0 negativa, se obtiene la solución de un agujero negro de Schwarzschild en un espacio anti-de Sitter (AdS) en cuatro dimensiones

$$A\left(r\right)=1-\frac{2M}{r}-\frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{49}$$

siempre que se identifique $c_1 = 1$, $c_2 = -2M$ y $\Lambda = R_0/2$.

3. Termodinámica de agujeros negros en el formalismo Palatini

3.1. Expresión general de la temperatura en teorías $f(\mathcal{R})$

La deducción de las leyes de la mecánica de los agujeros negros [7] dejó patente la similitud de las mismas con las leyes de la termodinámica. Las investigaciones de Hawking acerca de la radiación de los agujeros negros [8] [9] determinaron que la temperatura a la que estos radian viene dado por

$$T=\frac{\kappa}{2\pi} \tag{50}$$

siendo κ la gravedad de superficie. Otra manera de derivar este resultado es a partir del formalismo de la gravedad euclídea. A continuación se va a calcular, por ambos métodos, la temperatura de un agujero negro en el contexto de las teorías Palatini.

La gravedad de superficie puede entenderse como la aceleración que mediría un observador situado en el infinito para un objeto estático en el horizonte de sucesos. Matemáticamente se puede expresar como

$$\kappa=\lim_{r\to r_H} fa \tag{51}$$

donde $f=\sqrt{K^\alpha K_\alpha}$ es el factor de redshift y $a_\alpha = \ln f$ es la aceleración de dicho objeto [10]. El vector $K^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ es el vector de Killing asociado con la invariancia temporal de la métrica. Para la métrica (37) estas cantidades son

$$f=\sqrt{e^{-2\Phi}A\left(r\right)} \qquad a=\sqrt{\left|a^\alpha a_\alpha\right|}=\sqrt{\frac{1}{4A\left(r\right)}\nabla_\alpha A\left(r\right)\nabla^\alpha A\left(r\right)} \tag{52}$$

habida cuenta de que Φ es independiente de la coordenada r (43). Finalmente

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} e^{-\Phi(r_H)} A_r(r_H) \tag{53}$$

Por otro lado, partiendo de la métrica (37) es posible realizar una rotación de Wick $t = -i\tau$, consiguiendo así una métrica del sector euclídeo

$$ds_E^2 = e^{-2\Phi(r)} A(r)\, d\tau^2 + A^{-1}(r)\, dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{54}$$

que puede ser expandida en serie de Taylor a primer orden cerca del horizonte de sucesos r_H, allí donde la función $A(r)$ es idénticamente cero

$$ds_E^2 = e^{-2\Phi(r)} A_r(r_H)(r - r_H)\, d\tau^2 + \frac{dr^2}{A_r(r_H)(r - r_H)} + r^2 d\Omega^2 \tag{55}$$

Se redefinen las coordenadas como

$$\rho = 2\sqrt{\frac{r - r_H}{A_r(r_H)}} \qquad \omega = \frac{1}{2} e^{-\Phi(r_H)} A_r(r_H)\, \tau \tag{56}$$

de forma que (55) se reescribe como

$$ds_E^2 = \rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{57}$$

De esta forma, el horizonte de sucesos actúa como una suerte de origen de coordenadas en el plano, donde cada punto del mismo se corresponde con una 2-esfera. Para evitar singularidades cónicas $d\omega$ debe variar entre 0 y 2π; por otra parte la preinscripción euclídea determina una periodicidad β para τ, es decir

$$2\pi = \int_0^\beta \frac{1}{2} e^{-\Phi(r_H)} A_r(r_H)\, d\tau \rightarrow T = \frac{1}{4\pi} e^{-\Phi(r_H)} A_r(r_H) \tag{58}$$

por lo que las expresiones (53) y (58) son equivalentes. El principio variacional de Palatini impone la forma de $A(r)$ y por tanto determina la temperatura del agujero negro. Concluimos entonces que la temperatura de un agujero negro en el formalismo Palatini es independiente de la teoría $f(\mathcal{R})$ considerada.

3.2. Cálculo de la entropía en teorías $f(\mathcal{R})$

3.2.1. Formalismo euclídeo

El cálculo de la entropía de un agujero negro en el formalismo de Palatini puede abordarse de varias maneras (por ejemplo vía teorema de Noether [11]). A continuación se mostrará una derivación basada en el método de la integral euclídea en el formalismo de Palatini, además de una deducción vía indentificación de la ecuación de Einstein en el horizonte de sucesos con la ecuación de Gibbs, para finalmente comparar los resultados con los obtenidos vía teorema de Noether para teorías escalar tensor.

El método "original" de calcular la entropía de un agujero negro consiste en aplicar el formalismo euclídeo. En el caso de un agujero negro de Schwarzchild en Relatividad General la contribución a la entropía proviene completamente del término de frontera Gibbons-Hawking-York (GHY). En cálculo para agujeros negros de Schwarzschild/Anti-de Sitter, la contribución proviene del término del *bulk*, dado que los términos de frontera decaen rápidamente en el infinito [12]. A diferencia de este último caso, donde la ausencia de los términos de frontera es algo meramente coyuntural, en el formalismo Palatini estos no aparecen debido el principio variacional funciona correctamente sin necesidad de introducirlos. La acción euclídea y finita será entonces

$$S_E^{finita} = S_E - S_0 = -\frac{1}{2\kappa^2}\left(\int d^4x^E\sqrt{|g^E|}f\left(\mathcal{R}\right) - \int d^4x_0^E\sqrt{|g_0^E|}f\left(\mathcal{R}\right)\right) \tag{59}$$

donde el subíndice cero denota las coordenadas y la métrica del "fondo"que se sustrae a la acción euclídea para obtener un resultado finito. Para un agujero negro de Schwarzschild/Anti-de Sitter

$$\left(ds^E\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)d\tau^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{60}$$

$$\left(ds_0^E\right)^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)d\tau^2 + \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{3}r^2}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{61}$$

De acuerdo con los resultados de las soluciones de curvatura constante en el vacío, se verifica $\mathcal{R}_0 = R_0$, por tanto $f\left(\mathcal{R}\right)$ no interviene en la integración. Se debe tener en cuenta que la relación entre las periodicidades β y β_0 de los espacios-tiempos viene dada por

$$\int_0^\beta d\tau\sqrt{|g_{\tau\tau}^E|} = \int_0^{\beta_0} d\tau\sqrt{|g_{0\tau\tau}^E|} \rightarrow \beta_0 = \beta\left(1 - \frac{2M}{r - \frac{r^3\Lambda}{3}}\right) \tag{62}$$

de forma que ambas coincidan en la hipersuperficie $r = R$ cuando R tienda a infinito (ya que ambas métricas tienen el mismo comportamiento asintótico). La integral final a calcular es

$$\begin{aligned} S_E^{finita} &= -\frac{f\left(\mathcal{R}\right)}{2\kappa^2}\left(\int_0^\beta d\tau\int d\Omega\int_{r_H}^R r^2 dr - \int_0^{\beta_0} d\tau\int d\Omega\int_0^R r^2 dr\right) \\ &= \frac{f(\mathcal{R})}{\Lambda}\frac{\pi r_H^2}{(b^2 + 3r_H^3)}\left(b^2 - r_H^2\right) = -\log \mathrm{Z} = \beta F \end{aligned} \tag{63}$$

siendo F la energía libre de Hemholtz. Es inmediato calcular la entropía, puesto que en un colectivo canónico

$$S = -\left(\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - 1\right)\log \mathrm{Z} = \frac{f(\mathcal{R})}{\Lambda}\pi r_H^2 = \frac{f(\mathcal{R})}{\Lambda}\frac{A}{4} \tag{64}$$

La función $f(\mathcal{R})$ puede escribirse en función de su derivada y del escalar de curvatura según (46). Además, $R_0/2 = \Lambda$ por lo que, finalmente

$$S = \frac{A}{4G}f_{\mathcal{R}} \tag{65}$$

habiendo restaurado la constante de gravitación universal. El resultado es, por tanto, la entropía de Hawking-Bekenstein multiplicada por $f_{\mathcal{R}}$, un resultado bien estudiado en la literatura [13][11]. Una interpretación posible de este resultado es asumir que, en ciertas teorías, la constante de gravitacional universal G no es la de la teoría newtoniana-relativista, si no que ha de ser sustituida por una constante gravitacional efectiva G_{eff} que viene dada por

$$G_{eff} = \frac{G}{f_{\mathcal{R}}} \tag{66}$$

La aparición de esta constante gravitacional efectiva restringe los posibles valores de $f_{\mathcal{R}}$. En efecto, al estudiar la variación de G_{eff} con R, queda patente la necesidad de que $f_{\mathcal{R}} > 0$. De lo contrario, un crecimiento en R implicaría un incremento de G_{eff}, desestabilizando así la teoría [14].

La expresión final (79) es consistente con los resultados obtenidos mediante el uso del método de la carga de Noether [13] en las teorías escalar tensor. En efecto, la expresión allí obtenida es

$$S = \frac{A}{4G}\phi \tag{67}$$

De acuerdo a lo expuesto en el apartado 1.3, las teorías escalar-tensor con $\omega = -3/2$ son equivalentes a las teorías Palatini siempre que se identifique $\phi = f_{\mathcal{R}}$, por lo que ambas expresiones para la entropía son idénticas.

3.2.2. Las ecuaciones del movimiento como ecuaciones de estado

La presión P y la densidad de energía ρ son variables fundamentales en termodinámica. Además, son las componentes del tensor energía-momento. Si se asume que las fuentes de los sistemas termodinámicos y la gravedad son las mismas [15], entonces existe una equivalencia entre estas dos variables. Dado que la temperatura del horizonte de sucesos está bien definida, es posible escribir una ecuación de estado en el horizonte a través de la ecuación radial de Einstein. Dada una métrica (37) con $\Phi = 0$, la ecuación radial de Einstein es

$$\kappa^2 T^r{}_r = G^r{}_r = \frac{r_H A_r\left(r_H\right) + A\left(r_H\right) - 1}{r_H^2} \tag{68}$$

Teniendo en cuenta la definición de temperatura (53) y que $T^r{}_r = P$ se obtiene la siguiente ecuación de estado

$$P = \frac{T}{2r_H} - \frac{1}{\kappa^2 r_H^2} \tag{69}$$

La temperatura está determinada por la geometría del espacio-tiempo, por lo que es independiente de la acción gravitatoria. Por otro lado, la presión está definida mediante el tensor energía-momento. En consecuencia, parece razonable escribir la ecuación de estado

$$P = D\left(r_H\right) + C\left(r_H\right) T \tag{70}$$

donde las funciones $D\left(r_H\right)$ y $C\left(r_H\right)$ son determinadas por la teoría gravitatoria que se considere.

La ecuación del movimiento de una teoría en el formalismo Palatini (6) se escribe en función del tensor de Einstein como

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} =& \frac{\kappa^2}{f_R} T_{ab} - \frac{\mathcal{R} f_{\mathcal{R}} - f}{2 f_R} g_{ab} - \frac{3}{2\left(f_{\mathcal{R}}\right)^2}\left[\partial_a f_{\mathcal{R}} \partial_b f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{2} g_{ab}\left(\partial f_{\mathcal{R}}\right)^2\right] \\ &+ \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}\left[\nabla_a \nabla_b f_{\mathcal{R}} - g_{ab} \Box f_{\mathcal{R}}\right] \end{aligned} \tag{71}$$

Como se ha visto al estudiar el teorema de Birkhoff, la dependencia en $\mathcal{R}$ puede eliminarse tomando la traza de (6). En el caso de materia conforme-invariante ($T^a{}_a = 0$) la función $f_{\mathcal{R}}$ es una constante, simplificándose (71) en

$$R^a{}_b - \frac{1}{2} R g^a{}_b = \frac{\kappa^2}{f_{\mathcal{R}}} T^a{}_b - \frac{f}{f_{\mathcal{R}}} g^a{}_b \tag{72}$$

La ecuación de estado correspondiente es

$$P = \frac{A_r}{\kappa^2 r_H} f_{\mathcal{R}} + \frac{A}{\kappa^2 r_H^2} f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{\kappa^2 r_H^2} f_{\mathcal{R}} + \frac{f}{2\kappa^2} = \frac{f_{\mathcal{R}}}{2 r_H G} T + \frac{A}{\kappa^2 r_H^2} f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{\kappa^2 r_H^2} f_{\mathcal{R}} - \frac{f}{2\kappa^2} \tag{73}$$

por lo que

$$D\left(r_H\right) = \frac{A}{\kappa^2 r_H^2} f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{\kappa^2 r_H^2} f_{\mathcal{R}} - \frac{f}{2\kappa^2} \qquad C\left(r_H\right) = \frac{f_{\mathcal{R}}}{2 r_H G} T \tag{74}$$

Se consideran ahora desplazamientos virtuales δr_H en la ecuación (70) y se multiplica por el volumen del horizonte de sucesos

$$V \delta P = \left(D_{r_H} + C_{r_H} T\right) \delta r_H + V C \delta T \tag{75}$$

donde $D_{r_H} = \frac{\partial D}{\partial r_H}$. Partiendo de la ecuación de Gibbs

$$\delta G = V\delta P - S\delta S \tag{76}$$

es posible identificar la energía libre de Gibbs y la entropía. Para ello, se debe integrar por partes, siendo las expresiones deseadas [16]

$$G = \int_0^{r_H} V(r)\, D(r)\, dr + T\int_0^{r} V(r)\, C_r(r)\, dr \tag{77}$$

$$S = \int_0^{r_H} V_r(r)\, C(r)\, dr \tag{78}$$

Dado que se ha identificado P y T con la presión y la temperatura (dado que se ha asumido que las fuentes de la termodinámica y la gravedad son las mismas), G y S son, en fecto, la energía libre de Gibbs y la entropía. La expresión para el volumen (espacial) no es, en principio, trivial. Sin embargo, en el caso de un agujero negro en cuatro dimensiones con simetría esférica el volumen coincide con el volumen propio de un objeto esférico en un espacio euclídeo [17]. La entropía es, por tanto

$$S = \int_0^{r_H} V_r(r)\, C(r)\, dr = \int_0^{r} \frac{2\pi r}{G} f_{\mathcal{R}} dr = \frac{A}{4G} f_{\mathcal{R}} \tag{79}$$

Es posible relajar la restricción de trabajar con materia conforme-invariante. Cuando no es posible dar una expresión así para la traza del tensor energía momento, es conveniente partir de (71) pero escribiendo $\mathcal{R}$ en función de R vía ecuación (45). De esta forma, la ecuación del movimiento es

$$G^a{}_b = \frac{\kappa^2}{f_{\mathcal{R}}} T^a{}_b - \frac{R}{2} g^a{}_b - \frac{5}{2f_{\mathcal{R}}} \Box f_{\mathcal{R}} g^a{}_b + \frac{f}{2f_{\mathcal{R}}} g^a{}_b - \frac{3}{2f_{\mathcal{R}}} \partial^a f_{\mathcal{R}} \partial_b f_{\mathcal{R}} + \frac{1}{f_{\mathcal{R}}} \partial^a \partial_b f_{\mathcal{R}} \tag{80}$$

Los términos determinantes para el cálculo de la entropía son aquellos que vayan acompañados de A_r, es decir, de la temperatura salvo un factor constante. Estos términos aparecen en la ecuación de la mano de $G^a{}_b$ y $\Box f_{\mathcal{R}}$. El operador D'Alambertiano de una función F puede escribirse como

$$\Box F = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_a \left(\sqrt{|g|} g^{ab} \partial_b F \right) \tag{81}$$

Los términos con la función A_r serán aquellos en los que aparezca $\partial_r g^r$. El resto de términos que provienen de la regla de la cadena se englobarán en la función $D(r_H)$

$$\Box f_{\mathcal{R}} = \frac{1}{r_H^2 \mathrm{sen}\theta} \left(... + r_H^2 \mathrm{sen}\theta \partial_r g^{rr} \partial_r f_{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{r_H^2 \mathrm{sen}\theta} \left(... + r_H^2 \mathrm{sen}\theta A_r \partial_r f_{\mathcal{R}} \right) \tag{82}$$

y el valor de ${G^r}_r$ ya fue calculado en (68). Con todo esto en mente, la ecuación del horizonte es

$$P = (...) + \left(\frac{f_{\mathcal{R}}}{2r_H G} + \frac{5}{4G} \partial_r f_{\mathcal{R}} \right) T \tag{83}$$

La entropía es, por tanto

$$S = \int_0^{r_H} V_r(r)\, C(r)\, dr = \int_0^{r} \left(\frac{2\pi r}{G} f_{\mathcal{R}} + \frac{5\pi r^2}{G} \partial_r f_{\mathcal{R}} \right) dr = \frac{A}{4G} f_{\mathcal{R}} \tag{84}$$

dado que en las soluciones de curvatura constante $\partial_r f_{\mathcal{R}} = 0$.

4. Conclusiones

En este trabajo se han expuesto los pilares básicos de las teorías de la gravitación en el formalismo Palatini, incluyendo su equivalencia con un grupo de teorías bien conocidas, las teorías escalar tensor. Se ha verificado la validez del teorema de Birkhoff, es decir, cualquier solución de las ecuaciones del movimiento que tenga simetría esférica debe ser estática en el vacío. Además, se ha encontrado la expresión general del tensor métrico que describe los agujeros negros de curvatura constante, pudiéndose identificar el caso particular de la solución de Schwarzschild-AdS. En el sector termodinámico, se ha comprobado que la temperatura es independiente de la expresión concreta de $f(\mathcal{R})$. Además, se ha recuperado la expresión $S = \frac{A}{4} f_{\mathcal{R}}$ vía formalismo euclídeo y vía ecuación del horizonte. Como comentario final, cabe preguntarse cómo calcular la entropía de un agujero negro de Schwarzschild en Relatividad General (acción de Hilbert-Einstein sin constante cosmológica) vía formalismo Palatini ya que, en esta formulación, el término de frontera (del que la entropía proviene enteramente) no aparece de forma natural.

Referencias

[1] T. P. Sotiriou, V. Faraoni, *f(R) Theories Of Gravity*, Rev. Mod. Phys. 82:451-497 (2010)

[2] S. Nojiri, S. D. Odintsov, D. Sáez-Gómez, *Cosmological reconstruction of realistic modified F(R) gravities*, Phys. Lett. B681:74-80 (2009)

[3] G.J. Olmo, *Introduction to Palatini theories of gravity and nonsingular cosmologies.* In *Open Questions in Cosmology*, Gonzalo, J.O., Ed., InTech Publishing (2012)

[4] F.S.N. Lobo, G.J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, *Crystal clear lessons on the microstructure of spacetime and modified gravity* Phys. Rev. D 2015, 91, 124001 (2015)

[5] V. Faraoini, *Matter instability in modified gravity*, Phys. Rev. D74:104017 (2006)

[6] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, A. L. Maroto, *Black Holes in f(R) theories*, Phys. Rev. D80:124011 (2009)

[7] J. M. Bardeen, B. Carter y S. W. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, Commun. Math. Phys. 31, 161 (1973)

[8] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975)

[9] J. B. Hartle y S. W. Hawking, *Path-integral derivation of black-hole radiance*, Phys. Rev. D13, 2188 (1976)

[10] S. M. Carroll *Spacetime and geometry* Pearson (2003)

[11] Vollick, D.N., *Noether charge and black hole entropy in modified theories of gravity*, Phys. Rev. D76:124001 (2007)

[12] S. W. Hawking and D. Page, *Thermodynamics Of Black Holes In Anti-de SitterSpace*, Commun. Math. Phys. 87, 577-588 (1983)

[13] V. Faraoni, *Black hole entropy in scalar-tensor and f(R) gravity: an overview, Entropy* , 12(5), 1246-1263 (2010)

[14] J. A. R. Cembranos, A. de la Cruz-Dombriz, P. Jimeno Romero, *Kerr-Newman black holes in f(R) theories*, Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. 11 1450001 (2014)

[15] R.-J. Yang, *Is gravity entropic force?* In *Entropy*, vol. 16, pp. 4483–4488, (2014)

[16] Y. Zheng, R.-J. Yang, *Horizon thermodynamics in f(R) theory*, Eur. Phys. J. C 78 682 (2018)

[17] M. K. Parikh, *The Volume of black holes*, Phys. Rev., vol. D73, p. 124021 (2006)