



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Conexión del conjunto de Mandelbrot

Autor:

María Abad Aldonza

Tutor:

Felipe Cano Torres

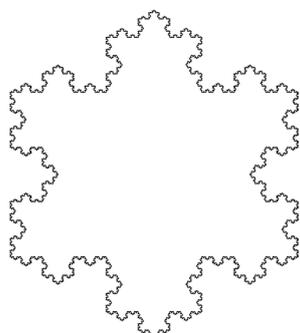
Índice

Introducción	3
1. Homotopía y grupo fundamental	5
1.1. Homotopía	5
1.2. Grupo fundamental	7
1.3. Espacios homotópicamente equivalentes	10
2. Índice de un lazo respecto de un punto	13
2.1. Espacios recubridores y teoremas de elevación	13
2.2. El grupo fundamental de \mathbb{S}^1	15
2.3. Índice de un lazo respecto de un punto	16
3. El conjunto de Mandelbrot	21
4. Conexión del conjunto de Mandelbrot	25
5. Conjuntos de Julia	31
5.1. Definición a través de sistemas dinámicos	31
5.2. Definición a través de familias normales	34
5.3. Funciones cuadráticas y relación con el conjunto de Mandelbrot	38
Anexo I: Miscelánea de teoremas	45
Anexo II: El algoritmo de tiempo de escape	47
Referencias	53

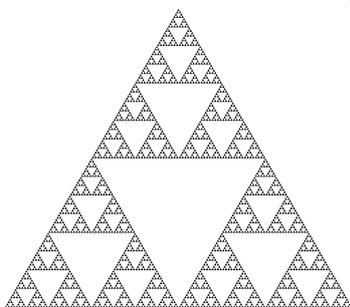
Introducción

En 1975 Benoît Mandelbrot inició una pequeña revolución en el mundo de las matemáticas. Hasta entonces, el foco de atención estaba casi exclusivamente en los conjuntos y funciones suficientemente regulares, los que podían estudiarse con geometría euclídea o cálculo infinitesimal sin mayor dificultad. Ya se conocían ejemplos de estructuras que no encajaban con esa descripción, como el copo de nieve de Koch, el triángulo de Sierpinski o la función de Weierstrass, pero se los consideraba meras curiosidades. Mandelbrot acuñó el término fractal (del latín *fractum*, que significa 'roto') para describir a todos estos objetos demasiado irregulares para ser estudiados con métodos tradicionales. También empezó a defender que podían utilizarse para modelizar de forma más realista fenómenos naturales como las costas, las nubes o los perfiles de las montañas; y que por tanto merecía la pena crear una teoría matemática a su alrededor. Todas estas reflexiones las condensó en su libro de 1982 *The Fractal Geometry of Nature* ([Man97] para la versión española). La gran influencia de esta obra hizo que matemáticos provenientes de todas las ramas posibles (desde la geometría hasta la estadística) se interesaran por los fractales e intentaran estudiarlos desde sus respectivos campos. Como consecuencia la geometría fractal es aún un campo caótico, lleno de definiciones alternativas, pequeñas incongruencias y, en general, poco consenso. Sin ir más lejos, a día de hoy aún no existe una definición formal universal de lo que es un fractal. La definición original propuesta por Mandelbrot (que el conjunto tenga dimensión de Hausdorff estrictamente mayor que su dimensión topológica), fue descartada por el propio Mandelbrot por excluir conjuntos que él claramente consideraba fractales. Autores como Falconer o Barnsley abogan por tratar esta situación igual que se trata la definición de 'ser vivo' en biología: mediante una lista de propiedades que caracterizan a los fractales, pero asumiendo que cada ejemplo concreto no necesariamente tiene que verificarlas todas. Estas propiedades son:

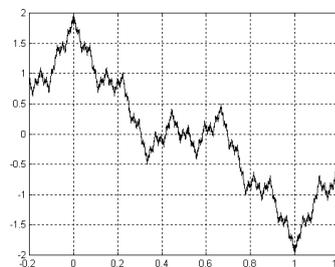
1. Estructura fina: el objeto posee detalle en todas las escalas.
2. Algún tipo de autosimilitud: partes del conjunto se parecen, geométrica o estadísticamente, al todo.
3. Su dimensión fractal (de algún tipo, por ejemplo la de Hausdorff) es estrictamente mayor que su dimensión topológica (de algún tipo).
4. Puede obtenerse mediante un procedimiento recursivo.



Copo de nieve de Koch



Triángulo de Sierpinski



Función de Weierstrass

Figura 1: Ejemplos de conjuntos fractales. Los dos primeros se obtienen mediante procedimientos recursivos. La función de Weierstrass es un ejemplo de función continua no diferenciable en todo punto y su grafo también se considera un fractal.

El concepto de dimensión, en sus diferentes formas, es muy importante en el estudio de los fractales. Lo mismo ocurre con el concepto de autosimilitud o con los conjuntos que se construyen de forma recursiva. Para este trabajo, en lugar de hablar de fractales en general o de alguno de los aspectos que los caracterizan, decidí centrarme en un ejemplo concreto: El conjunto de Mandelbrot. Este surgió de los estudios realizados por Benoît Mandelbrot sobre iteración de polinomios cuadráticos en el plano complejo. La mayoría de los resultados que se han obtenido sobre él son recientes y emplean matemáticas de un nivel muy alto. El objetivo principal de este trabajo es el de presentar una prueba de la conexión de este conjunto con las herramientas de variable compleja y topología algebraica que se pueden adquirir en el grado en matemáticas. El segundo objetivo es el de dar la interpretación del conjunto de Mandelbrot como espacio de parámetros para los conjuntos de Julia conexos asociados a funciones cuadráticas.

Estructura de la memoria

Por el tema del trabajo, uno podría esperar una gran carga de dinámica compleja. Sin embargo, los dos resultados que he marcado como meta pueden probarse con argumentos de topología algebraica. Por esta razón, las dos primeras secciones de la memoria son un repaso de las nociones de grupo fundamental, espacio recubridor e índice de un lazo respecto de un punto. Todos los resultados de esas secciones serán necesarios posteriormente. La sección tercera presenta el conjunto de Mandelbrot para, en la cuarta, discutir la demostración topológica de que es conexo debida a Jeremy Kahn en el año 2001 [Kah01]. La última sección trata sobre los conjuntos de Julia, para lo que se introducen algunas nociones de dinámica compleja. Al final de la sección se estudian las condiciones que deben cumplir los conjuntos de Julia asociados a funciones cuadráticas para ser conexos, lo que enlaza de nuevo con el conjunto de Mandelbrot.

1. Homotopía y grupo fundamental

El propósito de esta sección es revisar algunos conceptos esenciales de topología algebraica. En particular se repasarán las nociones de homotopía y grupo fundamental.

1.1. Homotopía

Definición 1.1 (Homotopía). Sean f y g aplicaciones continuas de un espacio topológico X en otro Y y sea A un subconjunto de X (es posible que A sea el conjunto vacío). Una *homotopía* entre f y g relativa al conjunto A es un aplicación continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ que verifica

1. $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$.
2. $F(a, s) = f(a) = g(a)$, para todo $a \in A$ y para todo $s \in [0, 1]$.

Se dice entonces que f y g son *homótopas relativamente al conjunto A* y escribimos $f \sim_A g$ o bien $f \sim g$ rel. A . En el caso de que $A = \emptyset$, decimos simplemente que f y g son homótopas y escribimos también $f \sim g$.

Una homotopía F se puede interpretar como una deformación continua de la aplicación f en g . Así, para cada $s \in [0, 1]$ fijo, $F(-, s)$ es una aplicación continua de X en Y que hace las veces de paso intermedio en la deformación.

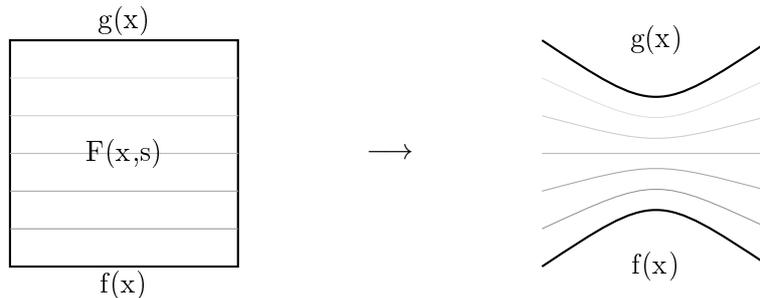


Figura 2: Representación gráfica de una homotopía (relativa al conjunto vacío)

Proposición 1.2. Sean X e Y dos espacios topológicos y A un subconjunto de X . La homotopía relativa a A es una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y .

Demostración.

- Reflexividad: Sea f una aplicación continua de X en Y . La homotopía $F(x, s) = f(x)$ garantiza que $f \sim_A f$.
- Simetría: Sea F una homotopía relativa a A entre aplicaciones continuas f y g . Es inmediato comprobar que $G(x, s) = F(x, 1 - s)$ es una homotopía relativa a A entre g y f .
- Transitividad: Sea F una homotopía relativa a A entre aplicaciones continuas f y g . Sea G una homotopía relativa a A entre g y h . Consideremos la aplicación:

$$H(x, s) = \begin{cases} F(x, 2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ G(x, 2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Como para $s = 1/2$, $F(x, 2s) = F(x, 1) = g(x) = G(x, 0) = G(x, 2s-1)$, la aplicación H está bien definida y es continua. Ahora es claro que H establece una homotopía relativa a A entre f y h .

□

Proposición 1.3. Sean X, Y y Z espacios topológicos y sean f_0, f_1, g_0 y g_1 aplicaciones continuas definidas según el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xrightarrow{f_1} \end{array} & Y & \begin{array}{c} \xrightarrow{g_0} \\ \xrightarrow{g_1} \end{array} & Z \end{array}$$

Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ tales que $f_0(A) = f_1(A) \subseteq B$. Si se da $f_0 \sim_A f_1$ y $g_0 \sim_B g_1$, entonces $g_0 \circ f_0 \sim_A g_1 \circ f_1$.

Demostración. Sea F una homotopía relativa a A entre f_0 y f_1 y sea G una homotopía relativa a B entre g_0 y g_1 . Basta comprobar que la aplicación $H(x, s) = G(F(x, s), s)$ define una homotopía relativa a A entre $g_0 \circ f_0$ y $g_1 \circ f_1$. □

Lema 1.4 (Construcción de homotopías). Sea X un espacio topológico e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Dadas dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ tales que, para todo $x \in X$, el segmento que une $f(x)$ y $g(x)$ está enteramente contenido en Y ; entonces f y g son homótopas relativamente a cualquier subconjunto A del conjunto $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

Demostración. Basta considerar la homotopía $H(x, s) = (1-s)f(x) + sg(x)$. □

Definición 1.5 (Camino). Sea X un espacio topológico. Un camino en X es una aplicación continua $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$. Llamamos a $\sigma(0)$ y $\sigma(1)$ punto inicial y punto final del camino, respectivamente. Si coinciden, es decir, si $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$, decimos que el camino es un lazo en el punto x_0 .

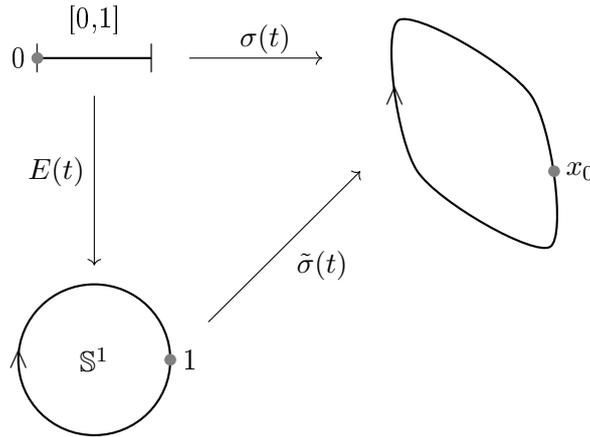


Figura 3: Relación entre lazos y aplicaciones de \mathbb{S}^1

Observación. Sea $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Consideremos la aplicación $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $E(t) = \exp(2\pi it)$. Sea $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ un lazo en el punto $x_0 \in X$. Entonces existe una factorización única $\sigma = \tilde{\sigma} \circ E|_{[0,1]}$, donde $\tilde{\sigma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ es una aplicación continua que cumple $\tilde{\sigma}(1) = x_0$.

Inversamente, si $\tilde{\sigma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ es una aplicación continua y $\theta_0 = E(t_0) \in \mathbb{S}^1$ es un punto tal que $x_0 = \tilde{\sigma}(\theta_0)$, podemos obtener un lazo $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ en x_0 . Basta definir $\sigma(t) = \tilde{\sigma}(E(t_0 + t))$. Esta es la relación básica entre lazos y aplicaciones continuas de \mathbb{S}^1 .

Dado un camino σ en X , definimos el *camino inverso* σ^{-1} por $\sigma^{-1}(t) = \sigma(1 - t)$. Nótese que ambos caminos tienen la misma imagen, solo cambia el sentido de recorrido.

Dados dos caminos σ_1 y σ_2 tales que $\sigma_1(1) = \sigma_2(0)$, definimos la *concatenación de caminos* $\sigma_1 * \sigma_2$ por:

$$(\sigma_1 * \sigma_2)(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \sigma_2(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

La concatenación se puede interpretar intuitivamente como recorrer ambos caminos consecutivamente, cada uno de ellos a velocidad doble.

Definición 1.6 (Homotopía de caminos). Decimos que dos caminos α y β en un espacio topológico X son *homótopos como caminos* si y solamente si son homotópicamente equivalentes respecto a $\{0, 1\}$.

Nótese que si α y β son homótopos como caminos, deben tener los mismos puntos iniciales y también los mismos puntos finales. Si x_0 y x_1 son respectivamente esos puntos iniciales y finales, podemos interpretar una homotopía de caminos F de α en β como una deformación continua del camino α en el camino β donde los caminos intermedios $F(-, s)$ también tienen origen en x_0 y fin en x_1 .

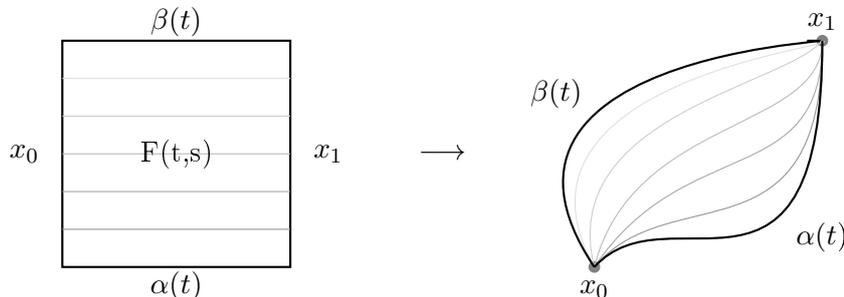


Figura 4: Representación gráfica de una homotopía relativa a $\{0, 1\}$

1.2. Grupo fundamental

Proposición 1.7. Sea x_0 un punto del espacio X . La concatenación de caminos induce una estructura de grupo en el conjunto $\pi_1(X, x_0)$ de las clases de homotopía como caminos de lazos en x_0 .

Demostración. Empecemos por ver que la operación $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$ está bien definida: Si $\alpha_1 \sim_{\{0,1\}} \alpha_2$ (sea F la homotopía correspondiente) y $\beta_1 \sim_{\{0,1\}} \beta_2$ (sea G la homotopía correspondiente), veamos que $\alpha_1 * \beta_1 \sim_{\{0,1\}} \alpha_2 * \beta_2$. Basta considerar la homotopía:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ G(2t - 1, s) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Sea $e \equiv x_0$ el lazo constantemente igual a x_0 , veamos que $[e]$ cumple la propiedad del elemento neutro de un grupo. Dado un lazo cualquiera α , queremos probar:

$$[e][\alpha] = [e * \alpha] = [\alpha] \quad y \quad [\alpha][e] = [\alpha * e] = [\alpha].$$

Observemos que $e * \alpha = \alpha \circ f$, donde $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la aplicación lineal a trozos definida por la siguiente expresión

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 2t - 1 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Nótese que $f(0) = f(1/2) = 0$ y $f(1) = 1$. De la misma forma, $\alpha = \alpha \circ Id_{[0,1]}$. Por el lema de construcción de homotopías (1.4) tenemos que $f \sim_{\{0,1\}} Id_{[0,1]}$. De lo que se deduce, por la proposición (1.3), que $e * \alpha \sim_{\{0,1\}} \alpha$. Análogamente se prueba la otra igualdad.

Dado un lazo α , veamos que la clase del lazo inverso $[\alpha^{-1}]$ es el elemento simétrico de $[\alpha]$, es decir:

$$[\alpha][\alpha^{-1}] = [\alpha * \alpha^{-1}] = [e] \quad y \quad [\alpha^{-1}][\alpha] = [\alpha^{-1} * \alpha] = [e].$$

Observemos que $\alpha * \alpha^{-1} = \alpha \circ g$, donde $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la aplicación lineal a trozos definida por la siguiente expresión

$$g(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ -2t + 2 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Nótese que $g(0) = g(1) = 0$ y $g(1/2) = 1$. De la misma forma, $e = \alpha \circ 0$. Por el lema de construcción de homotopías (1.4) tenemos que $g \sim_{\{0,1\}} 0$. De lo que se deduce, por la proposición (1.3), que $\alpha * \alpha^{-1} \sim_{\{0,1\}} e$. Análogamente se prueba la otra igualdad.

Comprobemos la propiedad asociativa. Dados los lazos α , β y γ , veamos que:

$$[\alpha * \beta][\gamma] = [\alpha * \beta * \gamma] \quad y \quad [\alpha][\beta * \gamma] = [\alpha * \beta * \gamma],$$

donde $\alpha * \beta * \gamma$ es el camino definido por

$$(\alpha * \beta * \gamma)(t) = \begin{cases} 3t & \text{si } t \in [0, 1/3] \\ 3t - 1 & \text{si } t \in [1/3, 2/3] \\ 3t - 2 & \text{si } t \in [2/3, 1] \end{cases}.$$

Observemos que $(\alpha * \beta) * \gamma = (\alpha * \beta * \gamma) \circ h$, donde $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es la aplicación lineal a trozos definida por la siguiente expresión

$$h(t) = \begin{cases} (4/3)t & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (2/3)t + 1/3 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Nótese que $h(0) = 0$, $h(1/2) = 2/3$ y $h(1) = 1$.

De la misma forma, $\alpha * \beta * \gamma = (\alpha * \beta * \gamma) \circ Id_{[0,1]}$ y por el mismo razonamiento que en casos anteriores tenemos $(\alpha * \beta) * \gamma \sim_{0,1} \alpha * \beta * \gamma$. Análogamente se prueba la otra igualdad. \square

Definición 1.8 (Grupo fundamental). El conjunto $\pi_1(X, x_0)$ con la anterior estructura de grupo recibe el nombre de *grupo fundamental* o *grupo de Poincaré* de X en el punto x_0 .

De ahora en adelante cuando, dado un espacio topológico X , queramos resaltar un punto $x_0 \in X$, emplearemos la notación (X, x_0) . Así mismo, $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ denotará que f es una aplicación del espacio X en el espacio Y tal que $f(x_0) = y_0$.

Proposición 1.9 (Propiedad funtorial del grupo fundamental). Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios topológicos y $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ una aplicación continua. Esta aplicación induce un homomorfismo de grupos $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$. Además, esta correspondencia entre aplicaciones continuas y homomorfismos de grupos cumple las siguientes propiedades:

1. Es compatible con la identidad. Es decir, $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}$.
2. Es compatible con la composición de aplicaciones. Es decir, si se tienen aplicaciones continuas

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0),$$

entonces los homomorfismos de grupos inducidos

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(Z, z_0)$$

satisfacen que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Demostración. Dado un lazo α en x_0 , definimos $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Sabemos que la aplicación f_* está bien definida por la proposición (1.3). Veamos que f_* respeta la operación del grupo fundamental y así, que se trata de un homomorfismo de grupos. Esto se deduce de las siguientes igualdades:

$$f_*([\alpha][\beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = f_*([\alpha])f_*([\beta]).$$

La compatibilidad con la identidad es evidente. La compatibilidad con la composición se debe a que, dado un lazo σ en x_0 , se tiene que

$$(g \circ f)_*([\sigma]) = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = g_*([f \circ \sigma]) = (g_* \circ f_*)([\sigma]).$$

□

La proposición (1.9) nos permite afirmar que el grupo fundamental es un funtor covariante entre la categoría de los espacios topológicos con punto base y la categoría de los grupos.

Al hablar del grupo fundamental de un espacio topológico es indispensable concretar un punto base. Sin embargo, si x_0 y x_1 son puntos de un espacio topológico X que se pueden conectar por un camino σ con origen en x_0 y fin en x_1 , este camino induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales:

$$\begin{aligned} \sigma_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\longmapsto [\sigma^{-1} * \alpha * \sigma]. \end{aligned}$$

Por eso, en el caso particular de un espacio conexo por caminos X , podemos hablar de la clase de isomorfía $\pi_1(X)$ de sus grupos fundamentales.

Definición 1.10 (Espacio simplemente conexo). Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *simplemente conexo* si es conexo por caminos y $\pi_1(X)$ es la clase de isomorfía del grupo trivial.

1.3. Espacios homotópicamente equivalentes

Definición 1.11. Dos espacios topológicos X e Y son *homotópicamente equivalentes* si existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que

$$g \circ f \sim Id_X \quad y \quad f \circ g \sim Id_Y.$$

A continuación probaremos que espacios topológicos conexos por caminos y homotópicamente equivalentes tienen grupos fundamentales isomorfos. Esto permite calcular rápidamente muchos grupos fundamentales a partir de unos pocos ejemplos sencillos, como el de la circunferencia.

Lema 1.12 (del cuadrado). Sean X un espacio topológico y $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ una aplicación continua. Consideremos los caminos dados por $\alpha(t) = F(0, t)$, $\beta(t) = F(1, t)$, $\gamma(s) = F(s, 0)$ y $\delta(s) = F(s, 1)$. Se verifica $\delta \sim_{\{0,1\}} \alpha^{-1} * \gamma * \beta$.

Demostración. Sean $x_0 = \delta(0)$ y $x_1 = \delta(1)$. Denotaremos por e_{x_0} y e_{x_1} a los caminos constantemente igual a x_0 y x_1 respectivamente. Definimos las homotopías:

$$E(s, t) = \begin{cases} x_0 & \text{si } s \leq t \\ \alpha(1 + t - s) & \text{si } s \geq t \end{cases}$$

$$G(s, t) = \begin{cases} \beta(t + s) & \text{si } 1 - s \geq t \\ x_1 & \text{si } 1 - s \leq t \end{cases}$$

Ambas aplicaciones están bien definidas (coinciden en la zona de solapamiento) y son continuas por serlo en cada trozo, así que son efectivamente homotopías. Además se cumple $E(s, 0) = \alpha(1 - s) = \alpha^{-1}(s)$ y $E(1, t) = \alpha(1 + t - 1) = \alpha(t)$. Análogamente $G(0, t) = \beta(t)$ y $G(s, 0) = \beta(t)$. Esto nos permite definir una homotopía H relativa a $\{0, 1\}$ entre los caminos $\alpha^{-1} * \gamma * \beta$ y $e_{x_0} * \delta * e_{x_1}$ como se muestra en la figura 5.

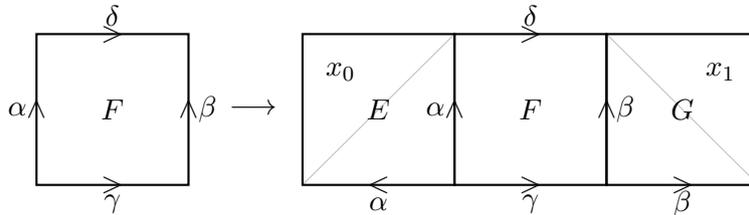


Figura 5: Demostración del lema del cuadrado

Y por tanto $\alpha^{-1} * \gamma * \beta \sim_{\{0,1\}} e_{x_0} * \delta * e_{x_1} \sim_{\{0,1\}} \delta$. □

Proposición 1.13. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ aplicaciones que definen una equivalencia de homotopía entre los espacios X e Y . Dados $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$, los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ son isomorfos.

Demostración. Sea F una homotopía entre Id_X y $g \circ f$ y G una homotopía entre Id_Y y $f \circ g$. Lo primero que hay que observar es que $x_1 = g(y_0)$ no es necesariamente igual a x_0 , pero ambos puntos están conectados por el camino $\alpha(t) = F(x_0, t)$. Esto nos proporciona el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ \alpha_* \searrow & & \swarrow g_* \\ & \pi_1(X, x_1) & \end{array}$$

Como α_* es un isomorfismo, si vemos que este diagrama es conmutativo podremos deducir que f_* es inyectiva y g_* sobreyectiva. Sea $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$:

1. $(g_*(f_*([\sigma]))) = [g \circ f \circ \sigma]$.
2. $\alpha_*([\sigma]) = [\alpha^{-1} * \sigma * \alpha]$.

Obtenemos $[g \circ f \circ \sigma] = [\alpha^{-1} * \sigma * \alpha]$ usando el lema del cuadrado (1.12) con la aplicación continua $H(s, t) = F(\sigma(s), t)$.

Sea ahora $y_1 = f(x_1)$. La aplicación $\beta(t) = G(y_0, t)$ es un camino con origen en y_0 y fin en y_1 . Esta vez tenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, x_1) \\ \beta_* \searrow & & \swarrow f_* \\ & \pi_1(Y, y_1) & \end{array}$$

Nótese que f_* en este diagrama representa un homomorfismo de grupos entre $\pi_1(X, x_1)$ y $\pi_1(Y, y_1)$, mientras que en el anterior diagrama representaba un homomorfismo de grupos entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$. Si es el mismo homomorfismo, sin embargo, g_* . De forma análoga se prueba que el diagrama es conmutativo y por tanto g_* es inyectiva. Como g_* es un isomorfismo y α_* también, $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ha de ser un isomorfismo de grupos. \square

Corolario 1.14. *Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ un homeomorfismo. Los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ son isomorfos.*

Demostración. Los homeomorfismos f y f^{-1} definen una equivalencia de homotopía entre los espacios X e Y . \square

Definición 1.15 (Retracción). Sea A un subconjunto del espacio topológico X . Una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ se llama *retracción* si $r|_A = Id_A$. Si existe una tal retracción, se dice que A es un *retracto* de X .

Definición 1.16 (Retracción por deformación). Sea A un subconjunto del espacio topológico X y sea $i : A \rightarrow X$ la inclusión. Una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ se llama *retracción por deformación* si es una retracción y además $i \circ r \sim Id_X$. Si existe una tal retracción, se dice que A es un *retracto por deformación* de X .

Observación. Si A es un retracto por deformación de X , ambos espacios son homotópicamente equivalentes. En particular para todo punto $a \in A$ los grupos fundamentales $\pi_1(A, a)$ y $\pi_1(X, a)$ son isomorfos. Más aún, para todo punto $x_0 \in X$ los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(A, r(x_0))$ son isomorfos.

Ejemplo: La circunferencia \mathbb{S}^1 es un retracto por deformación del espacio $X = \mathbb{C} - \{0\}$. Basta considerar la aplicación $r : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $r(z) = \frac{z}{\|z\|}$. Esta aplicación es una retracción porque los puntos $z \in \mathbb{S}^1$ cumplen por definición $\|z\| = 1$. Además es claro que la recta que une z y $r(z)$ está enteramente contenida en $\mathbb{C} - \{0\}$, luego por el lema (1.4) obtenemos $Id_X \sim i \circ r$.

Definición 1.17. Un espacio topológico X es *contráctil* si la identidad Id_X es homótopa a una aplicación constante. Es decir, si el espacio retracta por deformación sobre uno de sus puntos.

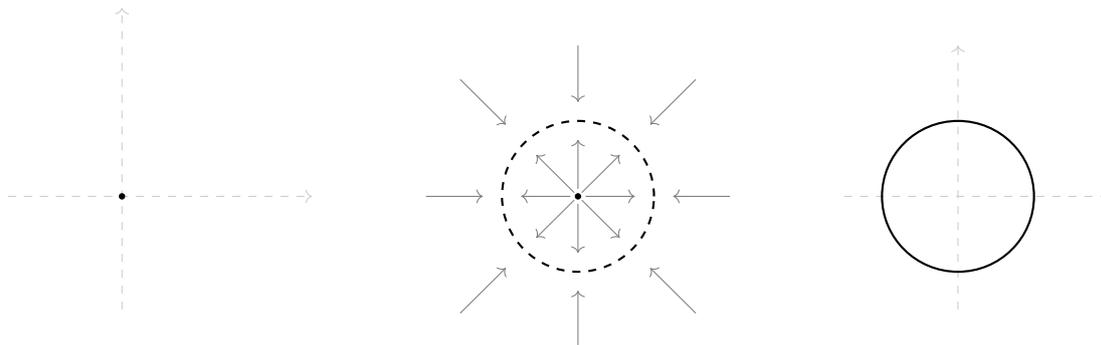


Figura 6: Retracción por deformación de $\mathbb{C} - \{0\}$ en \mathbb{S}^1 .

Observación. Nótese que todo espacio contráctil X es simplemente conexo. Sea c el punto sobre el que retracta X y sea $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ una homotopía entre la identidad y la aplicación constantemente igual a c . El espacio X verifica que para cualquier $x \in X$, $F(x, t)$ es un camino con origen en x y fin en c . Por lo tanto X es conexo por caminos. Además su grupo fundamental respecto de uno cualquiera de sus puntos es isomorfo al grupo trivial.

2. Índice de un lazo respecto de un punto

El objetivo de esta sección es explorar el concepto de índice de un lazo respecto de un punto a través de la topología algebraica. Para ello será necesario hablar de espacios recubridores y del grupo fundamental de la circunferencia \mathbb{S}^1 . Además, a la hora de exponer las propiedades del índice, se hará énfasis en aquellas relacionadas con la homotopía. Para la redacción de esta sección se han usado los libros de Greenberg [GH81] y Fulton [Ful95].

2.1. Espacios recubridores y teoremas de elevación

Definición 2.1 (Espacio Recubridor). Sea X un espacio topológico. Un *espacio recubridor* o *revestimiento* de X está formado por un espacio topológico E y una aplicación continua y sobreyectiva $E \xrightarrow{p} X$, llamada *aplicación recubridora*, tal que:

Cada $x \in X$ admite un entorno abierto U verificando que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos S_i , y para cada uno de ellos $p|_{S_i} : S_i \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Un tal entorno U se dice que está *uniformemente cubierto* y a los abiertos S_i se les llama *hojas*.

Ejemplo. Un ejemplo clásico de espacio recubridor lo da la aplicación $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $E(t) = \exp(2\pi it)$.

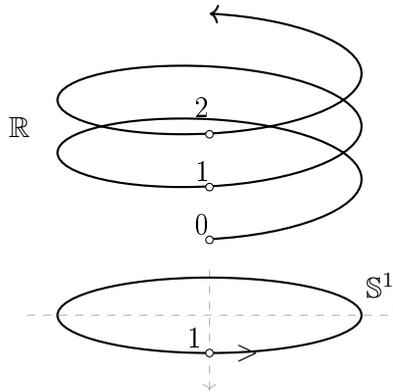


Figura 7: Representación de la aplicación E y contraimagen por la misma del punto $1 \in \mathbb{S}^1$

Recordemos que, cuando dado un espacio topológico X , queremos resaltar un punto $x_0 \in X$, empleamos la notación (X, x_0) . Así mismo, $(Y, y_0) \xrightarrow{f} (X, x_0)$ denota que f es una aplicación del espacio Y en el espacio X tal que $f(y_0) = x_0$.

Proposición 2.2 (Unicidad de elevaciones). Sea $(E, e_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ una aplicación recubridora y sea $(Y, y_0) \xrightarrow{f} (X, x_0)$ una aplicación cualquiera. Supongamos que Y es un espacio conexo. Si existe una aplicación $(Y, y_0) \xrightarrow{f'} (E, e_0)$ tal que $p \circ f' = f$, entonces es única.

Demostración. Sea $(Y, y_0) \xrightarrow{f''} (E, e_0)$ una aplicación tal que $p \circ f'' = f$. Consideremos los conjuntos:

$$A = \{y \in Y \mid f'(y) = f''(y)\}$$

$$B = \{y \in Y \mid f'(y) \neq f''(y)\}$$

Nótese que Y es la unión disjunta de los conjuntos A y B . Si probamos que ambos son abiertos, como Y es conexo e $y_0 \in A$, se deduce que B es el conjunto vacío.

Dado $y \in A$, sea U un entorno de $f(y)$ uniformemente cubierto por p . Sabemos que el punto $f'(y) = f''(y)$ pertenece a alguna hoja S de $p^{-1}(U)$. Entonces tenemos que $f'^{-1}(S) \cap f''^{-1}(S)$ es un entorno abierto de y enteramente contenido en A , con lo que A es abierto.

Dado $y \in B$, sea U un entorno de $f(y)$ uniformemente cubierto por p . Sea S_1 la hoja de $p^{-1}(U)$ a la que pertenece $f'(y)$ y sea S_2 la hoja a la que pertenece $f''(y)$. Necesariamente $S_1 \neq S_2$. Entonces tenemos que $f'^{-1}(S_1) \cap f''^{-1}(S_2)$ es un entorno abierto de y enteramente contenido en B , con lo que B es abierto.

Así pues, $f'(y) = f''(y)$ para todo $y \in Y$, como queríamos demostrar. \square

Teorema 2.3 (de elevación de caminos). *Sea $(E, e_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ una aplicación recubridora y sea σ un camino en X con punto inicial x_0 . Existe un único camino σ' en E con punto inicial e_0 tal que $p \circ \sigma' = \sigma$.*

Demostración. Una vez probada la existencia del camino σ' , la unicidad se deduce de (2.2).

1. *Caso 1:* Supongamos que todo el espacio X está uniformemente cubierto. Dada la hoja S que contiene al punto e_0 , sabemos que $S \xrightarrow{p|_S} X$ es un homeomorfismo. Sea ψ su inverso. $\sigma' = \psi \circ \sigma$ es la elevación deseada.
2. *Caso general:* Por el teorema del recubrimiento de Lebesgue, podemos tomar una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ del intervalo $[0, 1]$ de forma que para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$ la imagen de $[t_i, t_{i+1}]$ esté enteramente contenida en un entorno uniformemente cubierto de $\sigma(t_i)$. Por el *caso 1*, podemos elevar $\sigma|_{[0, t_1]}$ a una aplicación $[0, t_1] \xrightarrow{\sigma_1} E$ tal que $\sigma_1(0) = e_0$. Dado $i \in \{1, \dots, n-1\}$, supongamos que podemos conseguir una elevación σ_i para $\sigma|_{[0, t_i]}$ tal que $\sigma_i(0) = e_0$. Sea σ_{i+1} una elevación de $\sigma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ tal que $\sigma_{i+1}(t_i) = \sigma_i(t_i)$ (lo que de nuevo se puede conseguir por el *caso 1*). La concatenación de σ_i y σ_{i+1} nos permite encontrar una elevación de $\sigma|_{[0, t_{i+1}]}$ que envía el 0 a e_0 . El resultado se deduce por un razonamiento inductivo.

\square

Teorema 2.4 (de elevación de homotopías). *Sea $(E, e_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ una aplicación recubridora y sea $(Y, y_0) \xrightarrow{f} (X, x_0)$ una aplicación cualquiera que admite una elevación $(Y, y_0) \xrightarrow{f'} (E, e_0)$. Toda homotopía $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ con $F(y, 0) \equiv f(y)$ puede ser elevada de forma única a una homotopía $F' : Y \times [0, 1] \rightarrow E$ con $F'(y, 0) \equiv f'(y)$.*

Demostración. Una vez probada la existencia de la homotopía F' , la unicidad se deduce de (2.2). La prueba consta de tres pasos:

1. Si todo el espacio X está uniformemente cubierto, la elevación se obtiene como en la demostración anterior.
2. Por el teorema del recubrimiento de Lebesgue, para cada $y \in Y$ podemos encontrar un entorno suyo U_y y una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de $[0, 1]$ tales que F envía $U_y \times [t_i, t_{i+1}]$ en un entorno uniformemente cubierto de $F(y, t_i)$. Utilizando el paso 1 y un argumento inductivo como el de la demostración anterior, elevamos $F|_{U_y \times I}$ a una aplicación $F' : U_y \times [0, 1] \rightarrow E$ tal que $F'(y', 0) = f'(y')$ para todo $y \in U_y$.

3. Apliquemos el paso anterior a dos puntos distintos $y_1, y_2 \in Y$. Para cada $y \in U_{y_1} \cap U_{y_2}$ hemos obtenido dos elevaciones de $F|_y: \{y\} \times [0, 1] \rightarrow X$ que coinciden en el punto $(y, 0)$. Por el teorema de unicidad de elevaciones (2.2), que podemos aplicar porque $\{y\} \times [0, 1]$ es conexo, las dos elevaciones coinciden. Como esto es cierto para cada $y \in U_{y_1} \cap U_{y_2}$, las elevaciones coinciden en $U_{y_1} \cap U_{y_2} \times [0, 1]$. Así pues, podemos solapar las elevaciones construidas en el paso 2 en cada punto de Y para obtener una elevación de toda la aplicación F .

□

Corolario 2.5. *Sea $(E, e_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ una aplicación recubridora. Si α y β son caminos en X con origen en x_0 y $\alpha \sim \beta \text{ rel}\{0, 1\}$, entonces sus respectivas elevaciones con origen en e_0 , α' y β' , verifican $\alpha' \sim \beta' \text{ rel}\{0, 1\}$. En particular, α' y β' tienen el mismo punto final.*

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema anterior. □

2.2. El grupo fundamental de \mathbb{S}^1

Recordemos que la circunferencia \mathbb{S}^1 es el subconjunto de \mathbb{C} definido por

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Siempre consideramos, salvo que se diga lo contrario, la topología usual de subespacio. Dado un punto θ_0 de \mathbb{S}^1 , definimos el *lazo unidad positivo* $\Gamma_{\theta_0}^+ : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ en θ_0 por la expresión

$$\Gamma_{\theta_0}^+(t) = E(t + t_0),$$

donde $t_0 \in \mathbb{R}$ es cualquiera de los números reales tales que $E(t_0) = \theta_0$. Este lazo es aquel que da una vuelta a la circunferencia en sentido antihorario partiendo de θ_0 .

El *lazo unidad negativo* $\Gamma_{\theta_0}^-$ en θ_0 es el lazo inverso de $\Gamma_{\theta_0}^+$, es decir

$$\Gamma_{\theta_0}^-(t) = E((1 - t) + t_0) = E(t_0 - t).$$

Este lazo es aquel que da una vuelta a la circunferencia en sentido horario partiendo de θ_0 .

Teorema 2.6 (Grupo fundamental de \mathbb{S}^1). *Dado $\theta_0 \in \mathbb{S}^1$, el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^1, \theta_0)$ es isomorfo a \mathbb{Z} . Además, tanto $[\Gamma_{\theta_0}^+]$ como $[\Gamma_{\theta_0}^-]$ son generadores del grupo $\pi_1(\mathbb{S}^1, \theta_0)$. Más precisamente, son los únicos elementos que lo generan.*

Demostración. Consideremos la aplicación recubridora $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por la expresión $E(t) = \exp(2\pi it)$. Elijamos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $E(t_0) = \theta_0$. Nótese que $E^{-1}(\{\theta_0\}) = t_0 + \mathbb{Z}$. Dado un lazo $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ en θ_0 , por el teorema de elevación de caminos (2.3), existe una única elevación suya σ' con origen en t_0 . Su extremo final es un número real de la forma $t_0 + n_\sigma$, $n_\sigma \in \mathbb{Z}$. El corolario (2.5) nos permite definir la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, \theta_0) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\longmapsto n_\sigma. \end{aligned}$$

Sea $c_{\theta_0} = E(t_0)$ el lazo constantemente igual a θ_0 . Nótese que $\phi([\Gamma_{\theta_0}^+]) = 1$, $\phi([\Gamma_{\theta_0}^-]) = -1$ y $\phi([c_{\theta_0}]) = 0$, ya que la propia definición de cada uno de estos lazos nos da implícitamente su elevación con origen en t_0 . Las siguientes propiedades aseguran ahora que ϕ es un isomorfismo de grupos:

1. Compatibilidad con la operación del grupo:

Dados $[\sigma], [\tau] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, \theta_0)$, sean σ' y τ' las respectivas elevaciones con origen en t_0 de σ y τ ; y sean $m = n_\sigma$ y $n = n_\tau$. Consideremos el camino en \mathbb{R} con extremo inicial en m y extremo final en $n + m$ dado por $\tau''(s) = \tau'(s) + m$. Se verifica $E \circ \tau'' = \tau$, por lo que $\sigma' * \tau''$ es la elevación de $\sigma * \tau$ con origen en t_0 . Se deduce que

$$\phi([\sigma][\tau]) = \phi([\sigma * \tau]) = n_{\sigma' * \tau''} = n + m = \phi(\sigma) + \phi(\tau).$$

2. Inyectividad: Si $\phi([\sigma]) = 0$, su elevación σ' con origen en t_0 , como camino en \mathbb{R} , es un lazo en t_0 . Como \mathbb{R} es contráctil, esto significa que $\sigma' \sim c_{t_0} \text{ rel}\{0, 1\}$. Aplicando E obtenemos $\sigma \sim c_{\theta_0} \text{ rel}\{0, 1\}$, con lo que $[\sigma] = [c_{\theta_0}]$.

3. Sobreyectividad: Para cada $n \in \mathbb{Z}$ consideremos el camino en \mathbb{R} dado por la expresión $\sigma'(t) = t_0 + nt$. Entonces $\sigma = E \circ \sigma'$ es un lazo de \mathbb{S}^1 en θ_0 tal que $\phi(\sigma) = n$.

□

Nótese que todo isomorfismo de grupos $\pi_1(\mathbb{S}^1, \theta_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ es uno de los dos siguientes:

- $\psi_{\theta_0}^+ : \pi_1(\mathbb{S}^1, \theta_0) \rightarrow \mathbb{Z}$, donde $\psi_{\theta_0}^+(\Gamma_{\theta_0}^+) = 1$ (Orientación positiva de la circunferencia).
- $\psi_{\theta_0}^- : \pi_1(\mathbb{S}^1, \theta_0) \rightarrow \mathbb{Z}$, donde $\psi_{\theta_0}^-(\Gamma_{\theta_0}^-) = 1$ (Orientación negativa de la circunferencia).

2.3. Índice de un lazo respecto de un punto

Consideremos el espacio $\mathbb{C} - \{z_0\}$, siendo z_0 un punto cualquiera, y fijemos otro punto distinto w_0 . Estamos interesados en estudiar el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0)$.

Sea τ_{z_0} la traslación que lleva el punto z_0 al punto 0 ($\tau_{z_0}(z) = z - z_0$). Esta aplicación es un homeomorfismo entre los espacios $\mathbb{C} - \{z_0\}$ y $\mathbb{C} - \{0\}$, por lo que define el isomorfismo de grupos:

$$\tau_{z_0*} : \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, w_0 - z_0).$$

Sea $r : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ la retracción por deformación dada por $r(z) = \frac{z}{|z|}$. Esta también define el isomorfismo de grupos:

$$r_* : \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, w_0 - z_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, r(w_0 - z_0)).$$

Por las propiedades functoriales del grupo fundamental (1.9), la aplicación $r_{z_0} = r \circ \tau_{z_0}$ define el isomorfismo de grupos:

$$r_{z_0*} : \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, r_{z_0}(w_0)).$$

Con esto y el teorema (2.6) podemos afirmar que $\pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0)$ es isomorfo a \mathbb{Z} . Ahora estudiemos sus generadores.

Sea C_{z_0, w_0}^+ el lazo en w_0 que traza una circunferencia de centro z_0 en sentido antihorario a velocidad constante. Podemos parametrizar este lazo por:

$$C_{z_0, w_0}^+(t) = |w_0 - z_0|E(t + t_0) + z_0,$$

donde t_0 es uno de los números reales tales que $E(t_0) = r_{z_0}(w_0)$.

Análogamente definimos C_{z_0, w_0}^- como el lazo en w_0 que traza una circunferencia de centro z_0 en sentido horario a velocidad constante, es decir, el inverso de C_{z_0, w_0}^+ .

Sea $\theta_0 = r_{z_0}(w_0)$. Veamos que $r_{z_0} \circ C_{z_0, w_0}^+ = \Gamma_{\theta_0}^+$:

$$r_{z_0} \circ C_{z_0, w_0}^+(t) = \frac{|w_0 - z_0|E(t + t_0) + z_0 - z_0}{||w_0 - z_0|E(t + t_0) + z_0 - z_0|} = E(t + t_0) = \Gamma_{\theta_0}^+(t).$$

Como $[\Gamma_{\theta_0}^+]$ es un generador de $\pi_1(\mathbb{S}^1, \theta_0)$ y r_{z_0*} es un isomorfismo de grupos, concluimos que tanto $[C_{z_0, w_0}^+]$ como $[C_{z_0, w_0}^-]$ son generadores de $\pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0)$. Más precisamente, son los únicos elementos que generan el grupo.

Todo isomorfismo de grupos $\pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ es uno de los dos siguientes:

- $\varphi_{w_0}^+ : \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0) \rightarrow \mathbb{Z}$, donde $\varphi_{w_0}^+(C_{w_0, z_0}^+) = 1$ (Orientación positiva).
- $\varphi_{w_0}^- : \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0) \rightarrow \mathbb{Z}$, donde $\varphi_{w_0}^-(C_{w_0, z_0}^-) = 1$ (Orientación negativa).

Definición 2.7 (Índice de un lazo respecto de un punto). Consideremos un lazo $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{z_0\}$ en w_0 , el *índice de σ con respecto de z_0* es el número entero $n(\sigma, z_0) = \varphi_{w_0}^+([\sigma])$.

Observación. Se puede probar que esta definición de índice de un lazo respecto de un punto coincide con la que se obtiene a través de un argumento continuo.

A continuación veremos algunas propiedades del índice.

Proposición 2.8. Sean $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{z_0\}$ dos lazos en w_0 homótopos como caminos, entonces $n(\alpha, z_0) = n(\beta, z_0)$.

Demostración. Ambos lazos definen la misma clase de equivalencia en $\pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0)$, luego tienen la misma imagen por el isomorfismo $\varphi_{w_0}^+$. \square

Proposición 2.9. El índice de un lazo respecto de un punto es invariante por traslaciones. Concretamente, sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{z_0\}$ un lazo en w_0 y sea v un vector del plano complejo. Entonces

$$n(\alpha + v, z_0 + v) = n(\alpha, z_0).$$

donde $\alpha + v$ es el lazo dado por $(\alpha + v)(t) = \alpha(t) + v$.

Demostración. Sea τ_v la traslación por el vector v . Las traslaciones son un homeomorfismo del plano complejo en sí mismo, por lo que $\mathbb{C} - \{z_0\}$ y $\mathbb{C} - \{z_0 + v\}$ son espacios homotópicamente equivalentes. Esto nos proporciona el isomorfismo de grupos fundamentales

$$\tau_{v*} : \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0 + v\}, w_0 + v).$$

que envía la clase $[\alpha]$ en la clase $[\alpha + v]$. Como τ_v conserva la orientación de los lazos, tenemos que $\tau_v \circ C_{z_0, w_0}^+ = C_{z_0, w_0 + v}^+$ y podemos afirmar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0) & \xrightarrow{\tau_{v*}} & \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0 + v\}, w_0 + v) \\ \varphi_{w_0}^+ \searrow & & \swarrow \varphi_{w_0 + v}^+ \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

o lo que es lo mismo, que $n(\alpha + v, z_0 + v) = n(\alpha, z_0)$. \square

Definición 2.10 (homotopía a través de lazos). Dado un espacio topológico X y dos lazos $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$, se dice que estos últimos son *homótopos a través de lazos* si existe una homotopía $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ de α en β tal que $F(0, s) = \alpha(s)$ y $F(1, s) = \beta(s)$ para todo $s \in [0, 1]$.

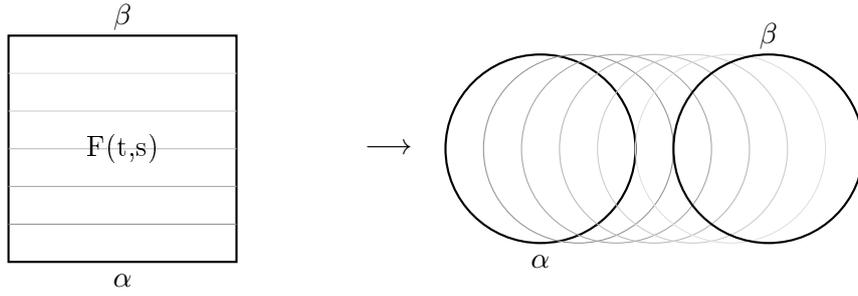


Figura 8: Representación gráfica de una homotopía a través de lazos

Podemos interpretar una homotopía a través de lazos F de α en β como una deformación continua del lazo α en el lazo β donde los caminos intermedios $F(-, s)$ son también lazos.

Proposición 2.11. Sean $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{z_0\}$ dos lazos en w_0 y w_1 respectivamente y sea $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{z_0\}$ una homotopía a través de lazos entre α y β . Entonces $n(\alpha, z_0) = n(\beta, z_0)$.

Demostración. Sea σ el camino entre w_0 y w_1 dado por $\sigma(s) = F(0, s) = F(1, s)$. Aplicando el lema del cuadrado (1.12), deducimos que $\beta \sim_{[0,1]} \sigma^{-1} * \alpha * \sigma$. Así pues el isomorfismo de grupos inducido

$$\sigma_* : \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_1)$$

lleva la clase $[\alpha]$ en la clase $[\beta]$. Veamos ahora que σ_* conserva la orientación.

Sea $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{z_0\}$ la homotopía dada por:

$$G(t, s) = C_{z_0, \sigma(s)}^+(t)$$

Nótese que $G(t, 0) = C_{z_0, w_0}^+$, $G(t, 1) = C_{z_0, w_1}^+$ y $G(0, s) = G(1, s) = \sigma(s)$. De nuevo por el lema del cuadrado (1.12) deducimos que $\sigma_*([C_{z_0, w_0}^+]) = [C_{z_0, w_1}^+]$. En consecuencia el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0\}, w_0) & \xrightarrow{\sigma_*} & \pi_1(\mathbb{C} - \{z_0 + v\}, w_1) \\ \varphi_{w_0}^+ \searrow & & \swarrow \varphi_{w_1}^+ \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

Y por tanto $n(\alpha, z_0) = n(\beta, z_0)$. □

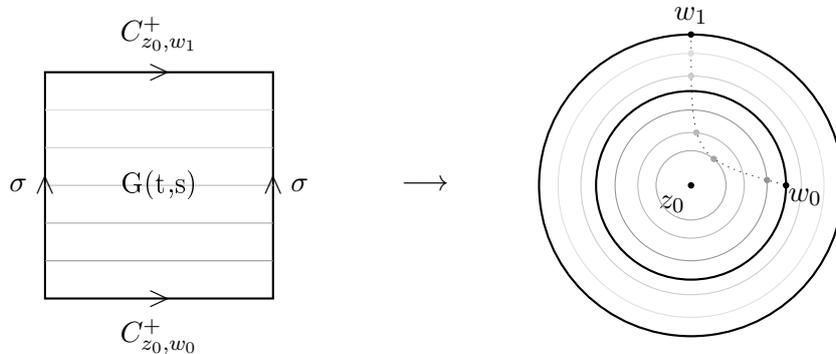


Figura 9: La homotopía a través de lazos $G(t, s) = C_{z_0, \sigma(s)}^+(t)$

Lema 2.12 (del perro y la correa). Sean $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{z_0\}$ dos lazos tales que

$$|\alpha(t) - \beta(t)| < |\alpha(t) - z_0|$$

para todo $t \in [0, 1]$. Entonces $n(\alpha, z_0) = n(\beta, z_0)$.

Demostración. Consideremos la aplicación $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(t, s) = (1 - s)\alpha(t) + s\beta(t).$$

Por hipótesis, para cada $t \in [0, 1]$, el segmento que une $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ no contiene al punto z_0 (la distancia entre los extremos del segmento es menor que la de uno de los extremos al punto en cuestión). Por lo tanto, z_0 no está en la imagen de F . Además F es una homotopía a través de lazos entre α y β , de lo que se deduce el resultado. \square

Teorema 2.13. Sea $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un lazo. La función $n(\sigma, -)$, definida en $\mathbb{C} - \text{Im}(\sigma)$, es constante en cada componente conexa de su dominio de definición. Además se anula en la componente conexa no acotada.

Demostración. $\mathbb{C} - \text{Im}(\sigma)$ es abierto, luego basta probar que $n(\sigma, -)$ es localmente constante. Sean z_0 y $r > 0$ tales que la bola $B(z_0, r)$ esté contenida en $\mathbb{C} - \text{Im}(\sigma)$. Queremos ver que para todo $z \in B(z_0, r)$, $n(\sigma, z_0) = n(\sigma, z)$. Consideremos el vector $v = \overrightarrow{z_0 z}$. Tenemos que:

$$n(\sigma, z_0) = n(\sigma + v, z_0 + v) = n(\sigma + v, z).$$

Consideremos ahora la aplicación $F(t, s) = \sigma(t) + sv$, que es una homotopía a través de lazos entre σ y $\sigma + v$. Además z no pertenece a la imagen de F porque $z - sv \in B(z_0, r)$ para todo $0 \leq s \leq 1$. Por lo tanto:

$$n(\sigma + v, z) = n(\sigma, z).$$

Ahora solo queda probar que $n(\sigma, -)$ se anula en un punto de la componente conexa no acotada. Sea R lo suficientemente grande como para que $\text{Im}\sigma$ esté contenida en la bola $B(0, R)$, y sea $C_R(t) = RE(t)$ una parametrización de la frontera de $B(0, R)$. Tomemos z_0 un número real lo suficientemente grande como para que $d(z_0, \text{Im}(\sigma)) > R$. Podemos aplicar el lema del perro y la correa (2.12) para deducir que $n(\sigma, z_0) = n(C_R, z_0)$. Así mismo, $F(t, s) = (1 - s)RE(t)$ es una homotopía a través de lazos de $C_R(t)$ en el lazo c_0 constantemente igual a 0 que no toma el valor z_0 , luego $n(C_R, z_0) = n(c_0, z_0) = 0$. \square

Proposición 2.14. Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ continua e inyectiva, es decir, $\text{Im}f$ es una curva de Jordan. Sea $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ el lazo definido por $\sigma = f \circ \Gamma_1^+$. Se tienen las siguientes propiedades:

1. $n(\sigma, z) = 0$ para todo z en la componente conexa exterior a $\text{Im}f$.
2. $|n(\sigma, z)| = 1$ para todo z en la componente conexa interior a $\text{Im}f$.

Demostración. El teorema de la curva de Jordan nos permite asegurar que solo hay dos componentes conexas de $\mathbb{C} - \text{Im}f$, con lo cual el enunciado tiene sentido. La propiedad 1 es consecuencia directa del teorema (2.13).

Sea z un punto de la componente conexa interior a $\text{Im}f$ y $w_0 = \sigma(0)$. Para la propiedad 2 necesitamos utilizar el teorema de la curva de Jordan-Schönflies. Este nos garantiza la

existencia de un homeomorfismo $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(\text{Im}f) = \mathbb{S}^1$ y $h(z) \in B(0, 1)$. Tenemos el siguiente isomorfismos de grupos:

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{z\}, w_0) \xrightarrow{h_*} \pi_1(\mathbb{C} - \{h(z)\}, w_1)$$

donde $w_1 = h(w_0)$. Este isomorfismo lleva la clase $[\sigma]$ en la clase $[h \circ \sigma]$. Nótese que $g = h|_{\text{Im}f} \circ f$ es una biyección continua de \mathbb{S}^1 en sí mismo. Veamos que $h \circ \sigma = g \circ E(t)$ y $\Gamma_{w_1}^+ = E(t + t_0)$ (donde t_0 cumple $E(t_0) = w_1$) son lazos homótopos como caminos en $\mathbb{C} - \{h(z)\}$. Para cada $t \in [0, 1]$, sea $\delta_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ el camino que recorre un arco de circunferencia con origen en $g \circ E(t)$ y fin en $E(t + t_0)$ en sentido antihorario y a velocidad constante. Sea $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ la homotopía dada por

$$F(t, s) = \delta_t(s).$$

Se verifica que $F(t, 0) = \delta_t(0) = h \circ \sigma(t)$, $F(t, 1) = \Gamma_{h(w_0)}^+$ y $F(0, s) = \delta_0(s) = w_1 = F(1, s)$. Se concluye que $[h \circ \sigma] = [\Gamma_{w_1}^+]$. Por otra parte como $h(z) \in B(0, R)$, por el teorema (2.13), $n(\Gamma_{w_1}^+, h(z)) = n(\Gamma_{w_1}^+, 0) = 1$. Esto prueba que el isomorfismo de grupos

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{z\}, w_0) \xrightarrow{\varphi_{w_1}^+ \circ h_*} \mathbb{Z}$$

envía la clase $[\sigma]$ en 1. No sabemos si este es el isomorfismo $\varphi_{w_0}^+$ o $\varphi_{w_0}^-$, pero en cualquiera de los dos casos $|n(\sigma, z)| = 1$. □

3. El conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot es uno de los ejemplos típicos de fractal en los libros de divulgación. Los matemáticos franceses Adrien Douady y John H. Hubbard lo nombraron así en honor a Benoît Mandelbrot, quien despertó interés por este conjunto en su artículo de 1980 [Man80]. Irónicamente el conjunto de Mandelbrot no es un fractal para la definición propuesta por Mandelbrot, pero su frontera sí. En esta sección se presentarán tres caracterizaciones del conjunto de Mandelbrot y algunas de sus propiedades.

Definición 3.1 (Conjunto de Mandelbrot). Para cada $c \in \mathbb{C}$, sea $f_c(z) = z^2 + c$. Se define el *conjunto de Mandelbrot* como:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid f_c^n(0) \not\rightarrow \infty\}.$$

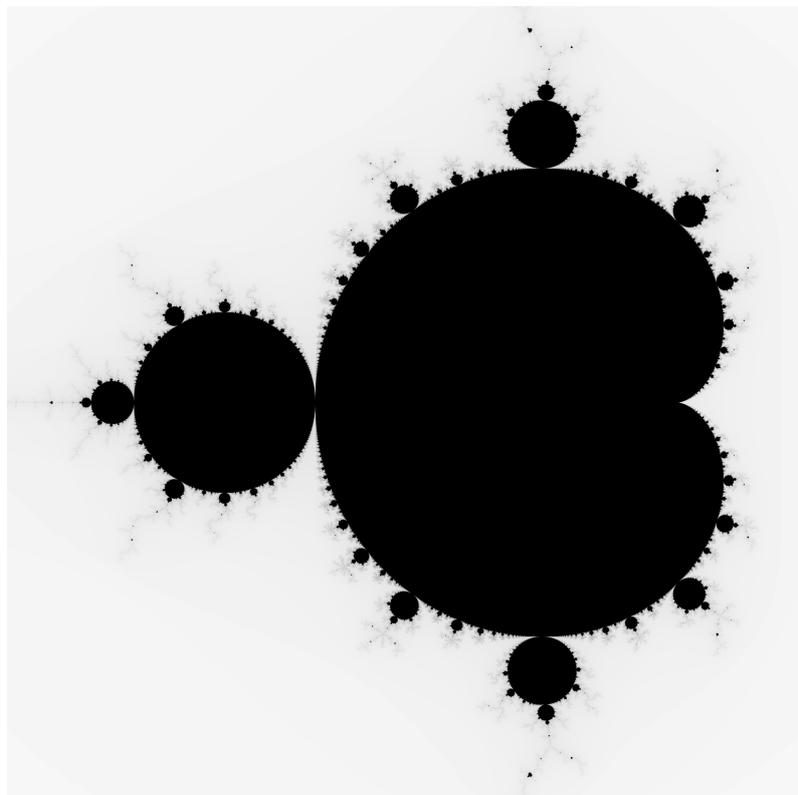


Figura 10: El conjunto de Mandelbrot

A continuación veremos dos caracterizaciones más del conjunto de Mandelbrot. La primera afirma que los puntos $c \in M$ son exactamente aquellos para los que la órbita $\{f_c^n(0)\}_{n \geq 1}$ está acotada, lo que parecería a priori más restrictivo que simplemente pedir $f_c^n(0) \not\rightarrow \infty$. De hecho, esa misma caracterización nos da una cota válida para todas las órbitas. La segunda caracterización está escrita en términos conjuntistas, lo que la hace más manejable a la hora de aplicar razonamientos topológicos.

Proposición 3.2. *El conjunto de Mandelbrot también puede describirse como:*

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \forall n \geq 1, |f_c^n(0)| \leq 2\}.$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, veamos que si $|z| \geq \max(|c|, 2) + \epsilon$, entonces $|f_c(z)| > |z|(1 + \epsilon)$:

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c| > |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) \geq |z|(1 + \epsilon)$$

Razonando inductivamente, si para algún número n_0 ocurre $|f_c^{n_0}(z)| > \max(|c|, 2)$, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $|f_c^n(z)| > |f_c^{n_0}(z)|(1 - \epsilon)^{n-n_0}$ para todo $n > n_0$. De aquí se deduce que si para algún iterante $|f_c^n(z)| > \max(|c|, 2)$, entonces $f_c^n(z) \rightarrow \infty$.

Sea $c \in M$. Necesariamente $\max(|c|, 2) = 2$, pues en caso contrario tendríamos que

$$|f_c^2(0)| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1) > |c|,$$

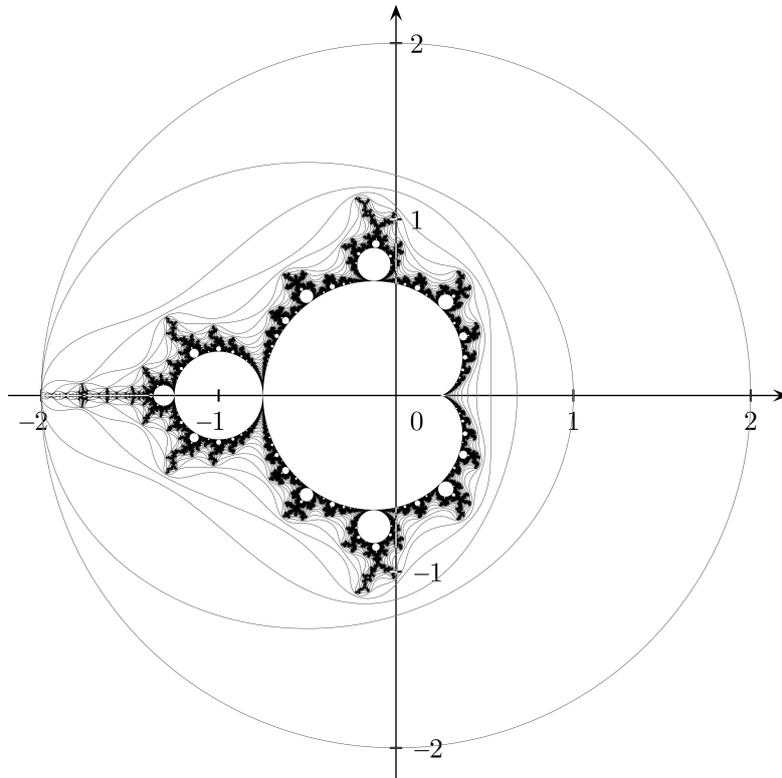
y la órbita de 0 tendería a infinito, lo que contradice $c \in M$. Se deduce que para todo $c \in M$, $|f_c^n(0)| \leq 2$ para todo $n \geq 1$. La otra inclusión se debe a que si c verifica $|f_c^n(0)| < 2$ para todo $n \geq 1$, entonces la órbita del 0 por f_c está acotada. \square

Corolario 3.3. *El conjunto de Mandelbrot está acotado. En particular, está contenido en el disco cerrado $\overline{D_2}$ de centro $(0, 0)$ y radio 2. Además, 2 es el menor radio para el que esa afirmación es cierta.*

Demostración. Para todo $c \in M$, la proposición (3.2) nos garantiza que $|c| = |f_c(0)| \leq 2$. Por otro lado, $-2 \in M$ ya que la órbita $\{f_c^k(0)\}_{k>0}$ alcanza un punto fijo en la primera iteración. \square

Proposición 3.4. *Para cada $n \geq 1$, sea $P_n(c) = f_c^n(0)$. Dado $R \geq 2$, sea D_R el disco abierto centrado en el origen de radio R . El conjunto de Mandelbrot también puede escribirse como:*

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^{-1}(\overline{D_R}).$$



© 2009 Geek3, CC BY-SA 1.0, Mandelbrot-Leminiscates-1-coords.png

Figura 11: El conjunto de Mandelbrot contenido en la intersección de los $P_n^{-1}(\overline{D_2})$.

Demostración. Sea $c \in M$. Por (3.2), $|P_n(c)| \leq 2$ para todo $n \geq 1$. Como hemos tomado $R \geq 2$, se concluye que $c \in \bigcap P_n^{-1}(\overline{D_R})$. Por otro lado, si $c \in P_n^{-1}(\overline{D_R})$ para todo $n \geq 1$, entonces la órbita del 0 por la función f_c está acotada y, en consecuencia, $c \in M$. \square

Corolario 3.5. *El conjunto de Mandelbrot es compacto.*

Demostración. Sea $R \geq 2$. Veamos que para todo $n \geq 1$, $P_n^{-1}(\overline{D_R})$ es compacto. La imagen inversa por una aplicación continua de un cerrado es cerrada. Además, por ser P un polinomio, la imagen inversa por P de un conjunto acotado ha de ser también acotada. Así pues, todos los $P_n^{-1}(\overline{D_R})$ son cerrados y acotados de \mathbb{C} , de lo que se deduce que son compactos. Por la proposición (3.4), M es cerrado por ser una intersección de cerrados. Además es compacto por ser un subconjunto cerrado del compacto $P_1^{-1}(\overline{D_R})$. \square

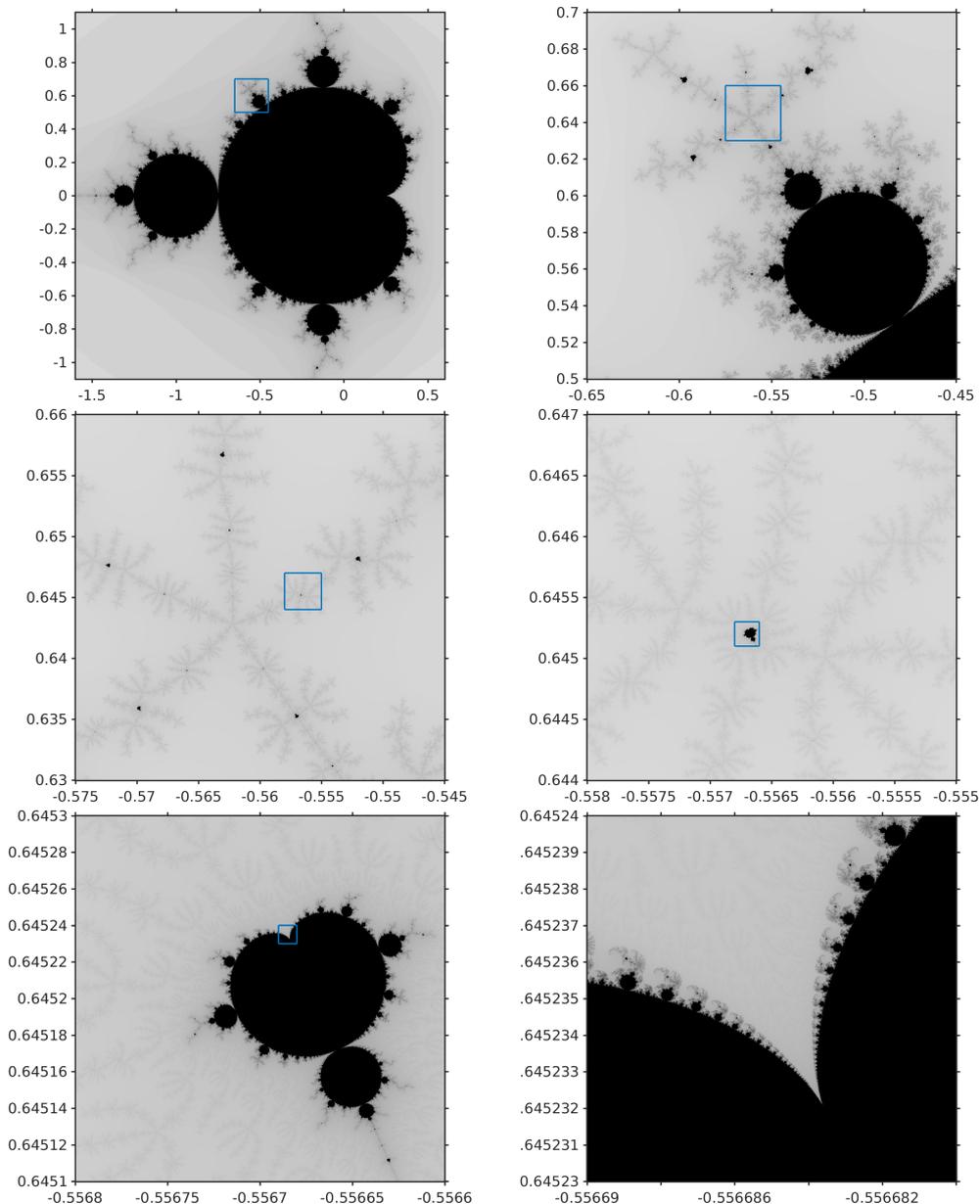


Figura 12: Ampliaciones del conjunto de Mandelbrot.

Vamos a aprovechar la figura 12 para introducir una breve discusión, de carácter no técnico, sobre el tema de la autosimilitud. Al observar imágenes de conjuntos asociados con la iteración de funciones suele apreciarse una cierta repetición de patrones. El hecho intuitivo de que al ampliar la imagen para ver en más detalle una de las partes del conjunto, esta se parezca al todo, se ha intentado formalizar de muchas y muy diversas formas bajo el nombre de autosimilitud. Estas formalizaciones pueden agruparse en tres tipos.

1. **Autosimilitud estricta:** Las definiciones de autosimilitud de este tipo se basan en que exista una familia de aplicaciones $f_i : X \rightarrow X$ no sobreyectivas y que conservan alguna propiedad geométrica tales que $X = \bigcup f_i(X)$.
2. **Cuasi-autosimilitud:** Como la autosimilitud estricta pero permitiendo 'errores' o 'ruido' en las aplicaciones f_i .
3. **Autosimilitud estadística:** Las definiciones de autosimilitud de este tipo se basan en la conservación de propiedades estadísticas al cambiar de escala.

Existen algunos resultados sobre autosimilitud y el conjunto de Mandelbrot. Se sabe que el conjunto al completo no es estrictamente autosimilar, pero en entornos de algunos de sus puntos sí. Esto es algo que pasa con frecuencia: la mayoría de los resultados probados sobre el conjunto de Mandelbrot son parciales, en el sentido de que solo sirven para determinados puntos y no para el conjunto al completo. También hay muchas conjeturas al respecto aún sin probar, como que es localmente conexo. Actualmente se encuentran publicados dos resultados no parciales muy relevantes sobre el conjunto de Mandelbrot. El primero es que es conexo y se debe a Douady y Hubbard [DH82]. El segundo es que su frontera tiene dimensión de Hausdorff 2 y se debe al matemático japonés Mitsuhiro Shishiruka [Shi98]. En la siguiente sección se profundizará sobre el primer resultado relevante mencionado: la conexión del conjunto de Mandelbrot.

4. Conexión del conjunto de Mandelbrot

A la vista de las imágenes obtenidas computacionalmente, uno podría dudar de que el conjunto de Mandelbrot sea conexo. El propio Benoît Mandelbrot conjeturó en su artículo [Man80] de 1980 que no lo era. Había conseguido imágenes con muy buena resolución para la época en las que se podían apreciar 'islotos' desconectados del cardiode y bulbo centrales. Tristemente, en las imágenes publicadas en el artículo original los editores borraron los islotos pensando que eran motas de polvo. Con el tiempo y la obtención de mejores imágenes, Mandelbrot comenzó a pensar que esos islotos estaban unidos por filamentos a la forma central.

La primera demostración de que el conjunto de Mandelbrot es conexo se debe a Adrien Douady y John H. Hubbard [DH82] y data de 1982. Usan el teorema de representación conforme de Riemann para probar no solo que es conexo, sino que su complementario también lo es. Durante la demostración introdujeron la noción de los rayos externos, que luego se volvió casi indispensable para avanzar en el estudio de otras propiedades.

En esta sección se abordará la prueba presentada por Jeremy Khan [Kah01] en 2001, que está basada fundamentalmente en resultados de topología. Presentaremos la idea general de esta demostración y detallaremos un caso concreto. El caso general se obtiene siguiendo las mismas líneas generales de argumentación y aplicando resultados de isotopía en los que no entraremos.

Repasemos algunos conceptos y notaciones: Dado $c \in \mathbb{C}$, f_c es el polinomio cuadrático con coeficientes complejos $f_c(z) = z^2 + c$. Los puntos del conjunto de Mandelbrot son aquellos para los que la órbita del 0 por f_c está acotada. De ahí que nos interese considerar los polinomios $P_n(c) = f_c^n(0)$, $n \geq 1$. Nótese que

$$\begin{aligned} P_1(c) &= c \\ P_n(c) &= f_c^n(0) = (f_c^{n-1}(0))^2 + c = P_{n-1}^2(c) + c \end{aligned}$$

Se ve rápidamente por inducción que cada polinomio P_n tiene coeficientes enteros y grado 2^{n-1} . Habíamos demostrado que, para $R \geq 2$, el conjunto de Mandelbrot también podía escribirse como

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^{-1}(\overline{D_R}), \quad (\star)$$

donde $\overline{D_R}$ es la adherencia del disco centrado en el origen de radio R . De necesitar más adelante que alguno de estos polinomios no se anule en $C_R = \partial D_R$, basta considerar a mayores que R es trascendente (por ejemplo $R = e$). Partiendo de la ecuación \star , probar la conexión del conjunto de Mandelbrot se reduce a verificar que podemos aplicar el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea X un espacio métrico y $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia de subespacios compactos y conexos tal que $K_n \subseteq K_{n-1}$ para todo $n > 0$. Entonces el conjunto $K = \bigcap K_n$, intersección de la familia, es también compacto y conexo.*

Demostración. Como los K_n son compactos en un espacio de Hausdorff, son cerrados. Su intersección K es un subconjunto cerrado de cada uno de ellos, por lo que es compacto. Supongamos que K no es conexo, es decir, existen abiertos de K disjuntos A y B tales que $K = A \cup B$. Además A y B también son cerrados de K , por lo que son compactos. Como X es de Hausdorff, podemos separar A y B por abiertos: Sean U y V abiertos de X disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K_n - (U \cup V)$ (de lo

contrario K_n sería no conexo). Como los K_n están encajados, la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ tiene todos sus elementos en el compacto K_0 . Podemos garantizar entonces que la sucesión tiene una subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i \geq 0}$ convergente a un punto $x \in K_0$. Dado $n_0 \in \mathbb{N}$, esta subsucesión tiene todos sus elementos en K_{n_0} a partir de un cierto i en adelante, por lo que $x \in K_{n_0}$. Como esto lo podemos hacer para un n_0 cualquiera, concluimos que el punto límite x pertenece a $K = \bigcap K_n$. Ahora bien, si $x \in K$, debe ocurrir $x \in U$ o $x \in V$. En ambos casos nos encontramos con un entorno abierto de x que no contiene a ningún punto de $\{x_n\}_{n \geq 0}$, lo que entra en contradicción con que la subsucesión converja hacia x . \square

Para más información sobre este resultado, consúltese el libro de S. Willard [Wil04]. Veamos que la familia $\{P_n^{-1}(\overline{D_R}) \mid n \geq 1\}$ verifica las hipótesis de este teorema.

1. \mathbb{C} es un espacio métrico.
2. Para todo $n > 1$, $P_n^{-1}(\overline{D_R}) \subseteq P_{n-1}^{-1}(\overline{D_R})$:
 Sea $c \notin P_{n-1}^{-1}(\overline{D_R})$, es decir, $|P_{n-1}(c)| = |f_c^{n-1}(0)| > R > 2$. Como vimos en la demostración de 3.2, esto quiere decir que $|P_n(c)| = |f_c^n(0)| > |f_c^{n-1}(0)| > R$. Por tanto $c \notin P_n^{-1}(\overline{D_R})$.
3. Para todo $n \geq 1$, $P_n^{-1}(\overline{D_R})$ es compacto:
 La imagen inversa por una aplicación continua de un cerrado es cerrada. Además, por ser P un polinomio, la imagen inversa por P de un conjunto acotado ha de ser también acotada. Así pues, todos los $P_n^{-1}(\overline{D_R})$ son cerrados y acotados de \mathbb{C} , de lo que se deduce que son compactos.

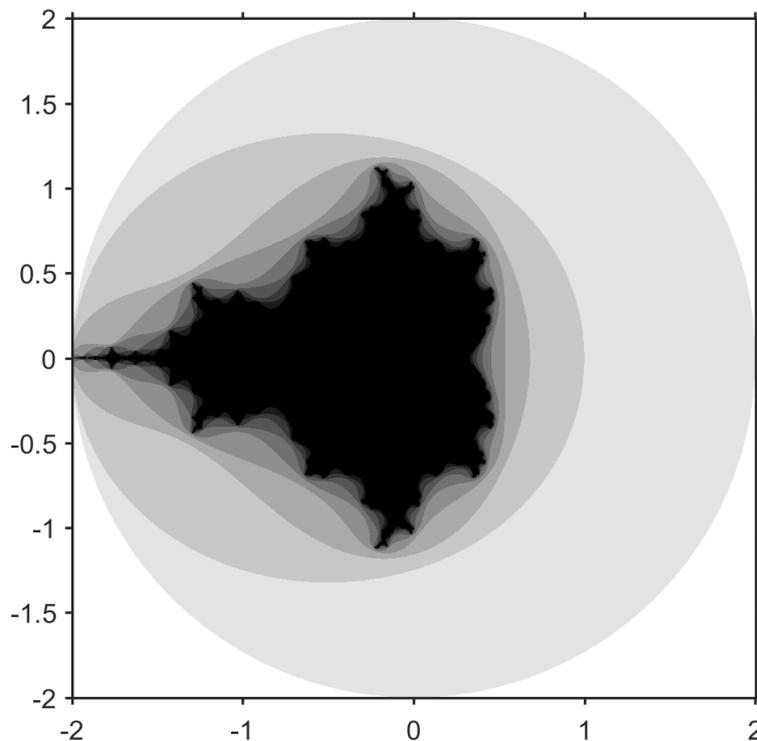


Figura 13: Los conjuntos $P_n^{-1}(D_2)$ para $n = 1, 2, \dots, 8$.

La dificultad de la demostración de Jeremy Kahn radica en la prueba de que, para todo $n \geq 1$, $P_n^{-1}(\overline{D_R})$ es conexo. Esto no es elemental y requiere la teoría de topología algebraica que se desarrolló en las dos primeras secciones de este trabajo. Presentaremos con detalle un caso simplificado del razonamiento que sirve para ver que $P_2^{-1}(\overline{D_R})$ es conexo.

Comenzaremos con unos cuantos resultados de naturaleza topológica concernientes a las aplicaciones polinómicas de \mathbb{C} en \mathbb{C} .

Lema 4.2. *Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio no constante. La aplicación $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación abierta.*

Demostración. La aplicación P es holomorfa en todo \mathbb{C} , luego podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta de análisis complejo. \square

Proposición 4.3. *Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio no constante de grado n . Denotemos por \mathcal{A} al conjunto de sus puntos críticos (aquellos z tales que $P'(z) = 0$) y por \mathcal{B} al conjunto de sus valores críticos (las imágenes por P de los puntos críticos). Entonces $(\mathbb{C} - \mathcal{A}, P)$ es un revestimiento de $P(\mathbb{C}) - \mathcal{B}$.*

Demostración. Dado $z_0 \in P(\mathbb{C}) - \mathcal{B}$, sea $\{z_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de raíces del polinomio $P(z) - z_0$. Para cada z_i , al no ser un punto crítico de P , podemos aplicar el teorema de las funciones inversas. Conseguimos de esta forma, para cada i , entornos abiertos V_i y W_i de los puntos z_i y $P(z_i) = z_0$ respectivamente tales que $P : V_i \rightarrow W_i$ es una biyección. Más aún, $P : V_i \rightarrow W_i$ es un homeomorfismo para todo i , pues es una biyección continua que además es aplicación abierta. Como \mathbb{C} es un espacio de Hausdorff, podemos separar los puntos z_i por abiertos. Intersecando estos con los V_i obtenemos abiertos disjuntos V'_i tales que $P|_{V'_i} : V'_i \rightarrow P(V'_i)$ es un homeomorfismo. El entorno abierto de z_0 dado por $\bigcap P(V'_i)$ está uniformemente cubierto. \square

Lema 4.4. *Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio no constante, $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y U una componente conexa de $P^{-1}(D)$. Entonces $P(U) = D$.*

Demostración. Supongamos que $P(U) = E \subsetneq D$. Obsérvese que $D \cap \partial E$ es no vacío, pues de lo contrario E sería simultáneamente abierto y cerrado en D , que es conexo. Así pues, podemos tomar $w \in D \cap \partial E$ y $(w_n)_n \subset E$ una sucesión que converge hacia w . Sea $(z_n)_n \subset U$ una sucesión de puntos tales que $P(z_n) = w_n$ para todo $n \geq 0$. Podemos suponer que esta sucesión converge hacia un punto $z \in \overline{U}$ (como P es no constante, como mínimo podemos encontrar una subsucesión convergente) y por continuidad, $P(z) = w$. La contradicción a la que vamos a llegar es que $z \notin \text{int}U$ y $z \notin \partial U$: Los polinomios en \mathbb{C} son aplicaciones abiertas, así que $P(\text{int}U) \subseteq \text{int}E$. Como $w \in \partial E$, esto elimina la opción $z \in \text{int}U$. Como $w \in D$ y D es abierto, por continuidad de P existe una bola V que contiene a z y tal que $P(V) \subseteq D$. Pero entonces $U \cup V$ es un conexo de $P^{-1}(D)$ que contiene a la componente conexa U , lo que es absurdo. \square

Lema 4.5. *Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio no constante, $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y U una componente conexa de $P^{-1}(D)$. Entonces $P(\partial U) = \partial D$.*

Demostración. Sabemos que $P(U) = D$. Dado un punto $z \in \partial U$ existe una sucesión $(z_n)_n \subset U$ que converge hacia él. Entonces $(P(z_n))_n$ converge hacia $P(z) \in \overline{D}$. Con esto tenemos $P(\partial U) \subseteq \overline{D}$. Pero ningún punto $z \in \partial U$ puede ir a parar a D , ya que entonces $U \cup \{z\}$ sería un conjunto conexo que contiene estrictamente a U (U es abierto, así que $z \notin U$). Esto nos da la inclusión $P(\partial U) \subseteq \partial D$. La otra se debe a que dado $z \in \partial D$, podemos tomar una sucesión de puntos en D que converjan hacia él y tomar en U una respectiva sucesión de puntos en la contraimagen convergiendo hacia un punto en \overline{U} . Este punto no puede estar en U porque $P(U) = D$. \square

Lema 4.6. *Sea $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio no constante y sea D_R el disco abierto de radio R centrado en el origen. Existe un número real R de modo que para toda componente conexa U de $P^{-1}(D_R)$, su frontera ∂U es una curva de Jordan diferenciable.*

Demostración. Tomemos R tal que la circunferencia C_R no corte a ningún valor crítico de P (el conjunto de valores críticos de un polinomio es finito). Fijado un punto $z \in \partial U$, su imagen $P(z)$ pertenece a C_R , con lo que z no es un punto crítico de P . Aplicando el teorema de las funciones inversas deducimos que ∂U es localmente una curva diferenciable. Como ∂U es compacto (es la frontera de un subconjunto acotado de \mathbb{C}), podemos afirmar que ∂U es unión de curvas de Jordan diferenciables. Si conseguimos ver que es conexo, entonces podremos afirmar que es una única curva de Jordan.

Supongamos que ∂U es no conexo, entonces existen al menos dos componentes conexas C_1 y C_2 de ∂U que son curvas de Jordan y necesariamente una estará contenida en el la región interior o acotada de la otra (U es una componente conexa de $P^{-1}(D_R)$). Sea D_1 la región interior de C_1 y D_2 la de C_2 . Supongamos que $C_2 \subset D_1$. Aplicando el principio del módulo máximo a D_1 , concluimos que $|P|$ no alcanza máximos locales en D_1 , es decir,

$$|P(z)| < \sup_{z \in C_1} |P(z)| = R$$

para todo $z \in D_1$. Sin embargo, $P(C_2) \subset C_R$, luego $|P(z)| = R$ para todo $z \in C_2 \subset D_1$ lo que nos lleva a contradicción. \square

Para demostrar que el conjunto de Mandelbrot es conexo, el resultado clave en el argumento de Jeremy Kahn es la siguiente proposición:

Proposición 4.7. *Para todo $n \geq 1$, $P_n^{-1}(\overline{D_R})$ es conexo.*

En efecto, una vez probada la proposición (4.7), el teorema (4.1) nos permite concluir que el conjunto de Mandelbrot es conexo. Daremos una prueba detallada de la proposición 4.7 para los casos $n = 1$ y $n = 2$, en la cual aparecen ya muchos de los ingredientes de la prueba general, que no detallaremos puesto que contiene argumentos de isotopía de espacios topológicos que salen del marco de este trabajo de fin de grado.

Para $n = 1$, puesto que $P_1(c) = c$, $P_1^{-1}(\overline{D_R}) = \overline{D_R}$ y por tanto es conexo.

Proposición 4.8. *Dado $R > 2$, $P_2^{-1}(\overline{D_R})$ es conexo.*

Demostración. De la propiedad (4.3) y los lemas (4.4) y (4.5), deducimos la igualdad $P_2^{-1}(\overline{D_R}) = \overline{P_2^{-1}(D_R)}$. Supongamos que $P_2^{-1}(\overline{D_R})$ no es conexo, entonces $P_2^{-1}(D_R)$ tampoco lo es. De lo contrario podríamos separar por abiertos $P_2^{-1}(D_R)$ de al menos uno de sus puntos de adherencia. Como $0 \in P_2^{-1}(D_R)$, existe al menos una componente conexa U de $P_2^{-1}(D_R)$ tal que $0 \notin \overline{U}$. Queremos deducir $0 \notin P_2(\overline{U}) = \overline{D_R}$ para llegar a contradicción. Como ∂U es una curva de Jordan, podemos interpretar $P_2|_{\partial U}$ como un lazo contenido en C_R y con origen en un cierto punto $P_2(c_0)$:

$$[0, 1] \xrightarrow{\sigma} \partial U \xrightarrow{P_2} C_R \quad \text{con} \quad \sigma(0) = \sigma(1) = c_0$$

donde σ es una parametrización de la curva ∂U . Llamemos $\alpha = P_2 \circ \sigma$ a ese lazo. Como α recorre todo C_R , todos los puntos $z \in D_R$ verifican $|n(\alpha, z)| \geq 1$. Nuestro objetivo será probar $n(\alpha, 0) = 0$.

Para empezar busquemos un lazo β del que sí podamos afirmar $n(\beta, 0) = 0$ y que esté de alguna forma relacionado con nuestro lazo α . Como $P_1(c) = c$, $0 \notin P_1(\overline{U}) = \overline{U}$ por

hipótesis. Entonces, para todo $c \in \bar{U}$, $P_1(c) \neq 0$ y $P_2(c) = P_1(c)^2 + c \neq c$. Lo que significa que $P_2(c) - c \neq 0$ para todo $c \in \bar{U}$ (y en particular para $c \in \partial U$). Sea $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ el lazo dado por $\beta = (P_2 - Id) \circ \sigma$ y con origen en $(P_2 - Id)(c_0)$. Sabemos que $n(\beta, 0) = 0$ porque $(P_2 - Id)(\partial U)$ es una curva de Jordan y 0 no está en la componente conexa acotada en la que divide el plano.

Nótese que $|\alpha(t) - \beta(t)| = |c|$ y $|\alpha(t) - 0| = |P_2(c)|$. Como

$$\partial U \subset P_2^{-1}(\bar{D}_R) \subset P_1^{-1}(\bar{D}_R) = \bar{D}_R,$$

podemos aplicar el lema del perro y la correa (2.12) para deducir que $n(\alpha, 0) = n(\beta, 0) = 0$. Recordemos que esto significaba que $0 \notin P_2(\bar{U}) = \bar{D}_R$, lo que es absurdo. \square

Veamos ahora, sin entrar en detalle, cómo se desarrolla la prueba para el caso general.

Proposición 4.9. *Para todo $n \geq 1$, $P_n^{-1}(\bar{D}_R)$ es conexo:*

Demostración. Supongamos que no es cierto, sea n el menor número natural tal que $P_n^{-1}(\bar{D}_R)$ es no conexo. Argumentando como en el caso $n = 2$, $P_n^{-1}(D_R)$ es no conexo y existe al menos una componente conexa U de $P_n^{-1}(D_R)$ tal que $0 \notin \bar{U}$. A partir de aquí queremos probar:

$$0 \notin P_k(\bar{U}) \quad \text{para } 1 \leq k \leq n \quad (*)$$

Pues esto contradice el lema (4.4), por el cual $P_n(U) = D_R$.

La prueba del caso general consiste en probar (*) mediante un razonamiento por inducción sobre k . El caso $k = 1$ es cierto por la hipótesis de que $0 \notin \bar{U}$. Suponiendo que (*) es cierto para un valor $k \in [1, n - 1]$, veamos que es cierto para $k + 1$. Para ello queremos llevar a cabo un razonamiento con el índice de un lazo respecto de un punto como el que se hizo para el caso $n = 2$. Sin embargo, en lugar del lema del perro y la correa, utilizaremos el siguiente enunciado que se puede probar mediante argumentos de isotopía:

Proposición 4.10. *Sea S es una curva de Jordan diferenciable y $\{C_s, s \in S\}$ una familia de curvas de Jordan diferenciables que varía diferenciablemente. Para cada $s \in S$, denotemos por D_s el dominio acotado tal que $C_s = \partial D_s$. Si $a, b, f : S \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones diferenciables tales que, para todo $s \in S$, $a(s), b(s) \in D_s$ y $f(s) \in C_s$; entonces $n(f - a, 0) = n(f - b, 0)$.*

Como $f_c^k(0) \neq 0$ para todo $c \in \bar{U}$ por hipótesis de inducción, $f_c^{k+1}(0) \neq c$ para todo $c \in \bar{U}$. Ahora basta aplicar el enunciado mencionado arriba tomando:

1. $S = \partial U$, que es una curva de Jordan diferenciable por el lema (4.6).
2. $C_s = f_c^{k+1-n}(C_R)$ para $c \in \partial U$. Se puede probar que forman una familia de curvas de Jordan diferenciables que varía diferenciablemente.
3. $f(c) = f_c^{k+1}(0)$. Nótese que $f(c) \in f_c^{k+1-n}(C_R)$ para todo $c \in \partial U$.
4. $a(c) = 0$ y $b(c) = c$. Nótese que como $f_c^{n-1}(c) \in C_R$, $f_c^m(c) \in D_R$ para $m < n - 1$. Entonces $0, c \in f_c^{k+1-n}(D_R)$ para todo $c \in \partial U$.

\square

5. Conjuntos de Julia

En esta sección se presentarán los conjuntos de Julia. Estos tienen su origen en la teoría de sistemas dinámicos complejos discretos y empezaron a ser estudiados a principios del siglo XX por los matemáticos franceses Gaston Julia y Pierre Fatou. Actualmente casi cualquier libro de dinámica compleja tiene al menos un capítulo sobre conjuntos de Julia (o iteración de funciones holomorfas). Para escribir esta sección se ha usado mayormente uno de los libros de referencia sobre fractales de K. Falconer [Fal99] que, siendo aún formal, está destinado a una audiencia más general y no presupone conocimientos técnicos de variable compleja. La información base obtenida de ese libro se ha complementado con textos sobre dinámica compleja que se irán mencionando según sea necesario.

5.1. Definición a través de sistemas dinámicos

El estudio de los sistemas dinámicos entró en auge tras la aparición de los ordenadores. Desde entonces coexisten los puntos de vista tanto teórico como aplicado. Aquí solo hablaremos de sistemas dinámicos complejos discretos desde una perspectiva teórica.

Definición 5.1 (Sistema dinámico complejo discreto). Sea $\Omega \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ un subconjunto de la esfera de Riemann y $f : \Omega \rightarrow \Omega$ una aplicación con salida y llegada en Ω . Un *sistema dinámico complejo discreto* es una ecuación en diferencias de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Denotaremos por f^k el k -ésimo iterante de f , es decir, $f^k = f \circ \dots \circ f$. Un sistema dinámico complejo discreto también se puede interpretar como la sucesión de iterantes $\{f^k\}_{k \geq 0}$. Dado $x \in \Omega$, estamos interesados en estudiar el comportamiento de la *órbita* $\{f^k(x)\}_{k \geq 0}$.

Diremos que un conjunto $F \subset \Omega$ es un *atractor* del sistema si es cerrado, invariante por f ($f(F) = F$) y existe un abierto U que contiene a F tal que para todo $z \in U$, $d(f^k(z), F) \rightarrow 0$. El mayor abierto U cumpliendo esa propiedad se llama *cuenca de atracción de F* y se denota por $A(F)$.

Diremos que un conjunto $F \subset \Omega$ es un *repulsor* del sistema si es cerrado, invariante por f ($f(F) = F$) y existe un abierto U que contiene a F tal que para todo $z \in U - F$, $f^k(z) \notin U$ a partir de un cierto valor de k en adelante.

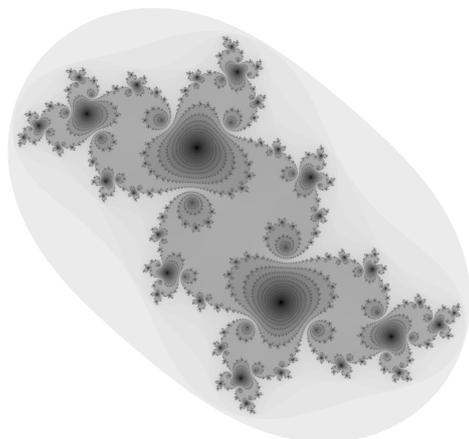
Un punto $w_0 \in \Omega$ es *periódico de periodo p* si para todo $i \in \{0, 1, \dots, p-2\}$, el valor $f(w_i) = w_{i+1} \neq w_0$ y $f(w_{p-1}) = w_p = w_0$. Como f es holomorfa, la derivada $\lambda = (f^p)'(w_0)$ está bien definida y se llama *multiplicador de la órbita*. Por la regla de la cadena se tiene que:

$$\lambda = (f^p)'(w_0) = f'(w_0)f'(w_1)\dots f'(w_{p-1})$$

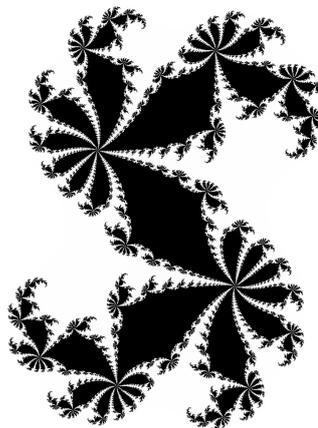
Por tanto $\lambda = 0$ si y solo si uno de los puntos de la órbita periódica es un punto crítico de f . Como w_0 es un punto fijo de f^p , deducimos que la órbita periódica es un atractor si $|\lambda| < 1$ y un repulsor si $|\lambda| > 1$.

Definición 5.2 (Conjunto de Julia). Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante. El *conjunto de Julia relleno $K(f)$ asociado a f* se define como el conjunto de números complejos $z \in \mathbb{C}$ cuya órbita no tiende hacia infinito, es decir,

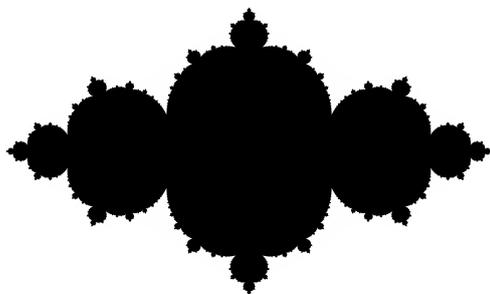
$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f^k(z) \not\rightarrow \infty\}.$$



$$c = -0,1 + 0,651i$$



$$c = 0,36 - 0,1i$$



$$c = -0,7$$



$$c = 0,29 + 0,01i$$

Figura 14: Algunos ejemplos de conjuntos de Julia rellenos. Estos están asociados a funciones cuadráticas de la forma $f_c = z^2 + c$.

Su frontera se llama *conjunto de Julia asociado a f* , $J(f) = \partial K(f)$. El complementario del conjunto de Julia recibe el nombre de *conjunto de Fatou de f* , $F(f)$.

En este trabajo, por simplicidad, solo consideraremos conjuntos de Julia asociados a polinomios de grado mayor o igual que 2 con coeficientes complejos. Se expondrán algunas de las características topológicas y geométricas de estos conjuntos, así como un par de caracterizaciones equivalentes. Al final de la sección profundizaremos en el caso de los polinomios cuadráticos y mostraremos cómo se relacionan los conjuntos de Julia con el de Mandelbrot.

Lema 5.3. *Sea $f(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado mayor o igual que 2, es decir, $n \geq 2$ y $a_n \neq 0$. Existe $r > 0$ tal que, si para algún $m > 0$, $|f^m(z)| \geq r$, entonces $f^k(z) \rightarrow \infty$. Por tanto, la órbita $\{f^k(z)\}_{k>0}$ o bien tiende a infinito o bien está acotada.*

Demostración. Se puede tomar r lo suficientemente grande como para que, si $|z| \geq r$, se

den simultáneamente las dos desigualdades siguientes:

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|.$$

$$|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_0| \leq \frac{1}{2}|a_n||z|^n.$$

Entonces, si $|z| \geq r$, se tiene que

$$|f(z)| \geq |a_n||z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_0|) \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \geq 2|z|.$$

Por un argumento inductivo, si $|f^m(z)| \geq r$ para algún m , entonces $f^k(z) \rightarrow \infty$. \square

Lema 5.4 (de invarianza). *Sea f una función holomorfa. El conjunto $J = J(f)$ es invariante por f en el sentido de que $J = f(J) = f^{-1}(J)$.*

Demostración. Sea $z \in J$, entonces $f^k(z) \rightarrow \infty$. Como $J = \partial F(f)$, podemos tomar una sucesión de puntos $\{w_n\}_{n>0}$ convergente hacia z tal que $f^k(w_n) \rightarrow \infty$ para todo n . $f^k(f(z)) \rightarrow \infty$, luego $f(z) \in K(f)$. Por otro lado $f^k(f(w_n)) \rightarrow \infty$ para todo n , luego $f(w_n) \in F(f)$ para todo n . Por continuidad de f podemos tomar los $f(w_n)$ tan próximos a $f(z)$ como queramos, por lo que $f(z) \in J$. Con esto obtenemos la cadena de inclusiones $f(J) \subset J \subset f^{-1}(f(J)) \subset f^{-1}(J)$.

Sea z_0 tal que $f(z_0) = z$. Por las propiedades de los polinomios en \mathbb{C} , podemos encontrar una sucesión de puntos $\{v_n\}_{n>0}$ tal que $f(v_n) = w_n$ y $v_n \rightarrow z_0$. Entonces se tiene que $f^k(z_0) = f^{k-1}(z) \rightarrow \infty$, luego $z_0 \in K(f)$. Por otro lado $f^k(v_n) = f^{k-1}(w_n) \rightarrow \infty$ para todo n , luego $v_n \in F(f)$ para todo n y entonces $z_0 \in J$. Esto nos da la cadena de inclusiones $f^{-1}(J) \subset J \subset f(f^{-1}(J)) \subset f(J)$. \square

Lema 5.5 (de iteración). *Sea $f(z) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado mayor o igual que 2. $J(f) = J(f^p)$ para todo $p > 0$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$, por el lema (5.3), $f^k(z) \rightarrow \infty$ si y solo si $(f^p)^k(z) = f^{pk}(z) \rightarrow \infty$. Se deduce que $K(f) = K(f^p)$ para todo $p > 0$. Tomando fronteras en cada igualdad se obtiene $J(f) = J(f^p)$ para todo $p > 0$. \square

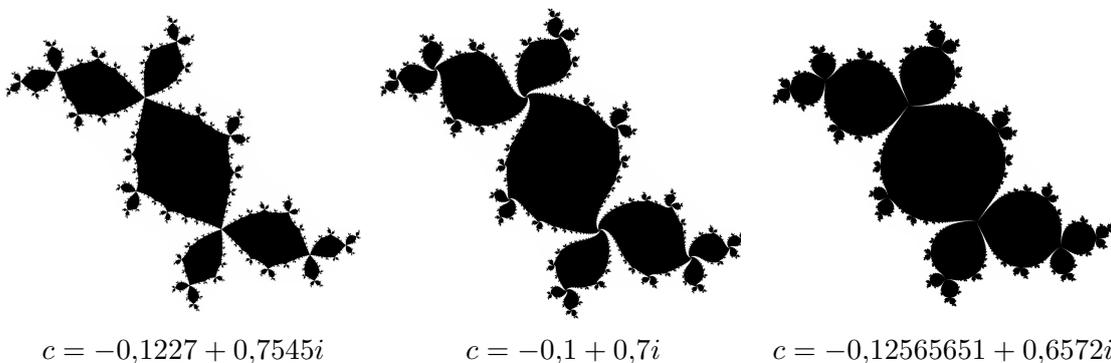


Figura 15: Los $K(f)$ para $f_c = z^2 + c$ que tienen esta forma suelen llamarse Conejos de Douady.

Proposición 5.6. *Sea $f(z) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado mayor o igual que 2. Los conjuntos $J(f)$ y $K(f)$ son compactos no vacíos tales que $J(f) \subset K(f)$. Además, el conjunto de Julia $J(f)$ tiene interior vacío.*

Demostración. Por el lema (5.3), existe $r > 0$ tal que $K(f) \subset B(0, r)$, luego tanto $K(f)$ como su frontera $J(f)$ son acotados. Por otro lado, dado $z \notin K(f)$, $|f^m(z)| > r$ para algún m . Por continuidad de f existe un entorno U de z tal que, para todo $w \in U$, $|f^m(w)| > r$ (y entonces $U \cap K(f) = \emptyset$). Deducimos que $\mathbb{C} - K(f)$ es abierto, luego $K(f)$ cerrado. $J(f)$ es la frontera de un cerrado, luego $J(f) \subset K(f)$. Ambos conjuntos son compactos por ser subespacios cerrados y acotados de \mathbb{C} . Veamos que son no vacíos. La ecuación $f(z) = z$ debe tener al menos una solución z_0 ($f(z) - z$ es un polinomio con coeficientes en \mathbb{C}), luego $K(f)$ es no vacío. El segmento que une z_0 y un punto cualquiera de $\mathbb{C} - K(f)$ debe cortar a la frontera $J(f)$, luego ella tampoco es vacía. Por último, supongamos que $J(f)$ no tiene interior vacío. Entonces existe U abierto tal que $U \subset J(f) \subset K(f)$. Como U es un abierto contenido en $K(f)$, está contenido en el interior de $K(f)$. Pero entonces U debe tener intersección vacía con la frontera de $K(f)$, lo que nos lleva a contradicción. \square

5.2. Definición a través de familias normales

La definición que hemos dado de conjunto de Julia es intuitiva, pero poco manejable a la hora de obtener propiedades. Es por esto que en libros de nivel más avanzado como el de J. W. Milnor [Mil06] se opta por una definición que requiere herramientas técnicas de variable compleja. A continuación introduciremos los conceptos y resultados estrictamente necesarios para dar esa definición y seguir avanzando en las propiedades de los conjuntos de Julia.

Definición 5.7 (convergencia uniforme). Sea $U \subset \mathbb{C}$. Una sucesión $\{f_n\}_{n \geq 0}$ de funciones holomorfas en U converge uniformemente hacia una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in U} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Se dice que $\{f_n\}_{n \geq 0}$ converge uniformemente hacia infinito si para cada $M > 0$ existe un n_M tal que $|f_n(z)| > M$ para todo $n > n_M$ y $z \in U$.

Definición 5.8 (familia normal). Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio (un abierto conexo) y sea $\mathcal{F} = \{f_k : U \rightarrow \mathbb{C} \mid k \in \mathbb{N}\}$ una familia de funciones holomorfas en U . Se dice que \mathcal{F} es una familia normal en U si para cada sucesión de elementos de \mathcal{F} existe o bien una subsucesión que converge uniformemente a una función límite f en cada compacto de U , o bien una subsucesión que converge uniformemente hacia infinito en cada compacto de U . Sea $z_0 \in U$. Se dice que \mathcal{F} es una familia normal en el punto z_0 si existe un entorno abierto y conexo V de z_0 tal que \mathcal{F} es una familia normal en V .

Nótese que por el teorema de convergencia uniforme de Weierstrass, la función límite f de la definición anterior, de existir, es holomorfa en U .

Teorema 5.9 (Test Fundamental de Normalidad de Montel). *Sea \mathcal{F} una familia de funciones holomorfas en un dominio U que omiten todas los mismos dos valores $a, b \in \mathbb{C}$, entonces \mathcal{F} es una familia normal en U .*

La demostración de este resultado escapa del marco de este trabajo de fin de grado, pero se puede encontrar en el libro de J. L. Schiff [Sch93]. Son necesarios conocimientos sobre la función elíptica modular j de Klein.

Corolario 5.10. *Sea \mathcal{F} una familia de funciones holomorfas no normal en un dominio U . Entonces para todo valor $w \in \mathbb{C}$ excepto quizás uno, existen $f \in \mathcal{F}$ y $z \in U$ tales que $f(z) = w$.*

Demostración. Es exactamente el contrarrecíproco del enunciado del teorema de Montel. \square

Ahora que ya tenemos las nociones de análisis complejo necesarias, veamos cuál es la definición usual formal de conjunto de Julia y comprobemos que es equivalente a la que hemos dado.

Proposición 5.11. *Sea $f(z) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado mayor o igual que 2 y sea $\mathcal{F} = \{f^k\}_{k>0}$ la familia dada por sus sucesivos iterantes.*

$$J(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{F} \text{ no es normal en } z\}$$

Demostración. Si $z \in J(f)$, en cualquier entorno U de z habrá puntos w cuya órbita $f^k(w) \rightarrow \infty$. Mientras tanto la órbita de z permanece acotada en $J(f)$. Esto significa que ninguna subsucesión de $\{f^k\}_{k>0}$ converge uniformemente en V , por lo que la familia \mathcal{F} no es normal en z .

Si $z \notin J(f)$, puede darse uno de dos casos. Si z pertenece al interior de $K(f)$, existe un entorno suyo V contenido en el interior de $K(f)$. Consideremos el radio r del lema (5.3). Para todo $w \in V$, la órbita $\{f^k(w)\}_{k>0}$ está contenida en $B(0, r)$. Esto significa que podemos aplicar el Test Fundamental de Normalidad de Montel (5.9) para deducir que la familia \mathcal{F} es normal en z . Por otro lado, si $z \in \mathbb{C} - K(f)$, $|f^m(z)| > r$ para algún $m > 0$. Por continuidad de f existe un entorno U de z tal que, para todo $w \in U$, $|f^m(w)| > r$. Esto significa, de nuevo por el lema (5.3), que \mathcal{F} converge uniformemente hacia infinito en cada compacto de U y que por tanto es normal en z . \square

Para mayor generalidad, esta definición se puede extender a funciones f holomorfas en una superficie de Riemann cualquiera. Así se pueden definir también conjuntos de Julia asociados a funciones racionales en la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, por ejemplo.

Lema 5.12. *Sea $f(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado $n \geq 2$ y sea $w \in J(f)$. Dado U un entorno cualquiera de w , para cada $j = 1, 2, \dots$, el conjunto $W_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$ es todo \mathbb{C} excepto quizá un punto. Ese punto no está en $J(f)$ y no depende de la elección de w o U .*

Demostración. Tenemos que la familia $\{f^k\}_{k>0}$ no es normal en w . El corolario (5.10) nos garantiza que, para todo $j = 1, 2, \dots$, el conjunto $W_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} f^k(U)$ es todo \mathbb{C} excepto quizá un punto. Fijado j , supongamos que existe un tal punto $v \notin W_j$. Consideremos z tal que $f(z) = w$. Como $f(W_j) \subset W_j$, se deduce que $z \notin W_j$. Pero como W_j es todo \mathbb{C} menos el punto v , necesariamente $z = v$. Entonces el polinomio $f(z) - v$ tiene grado n y una única raíz en \mathbb{C} , es decir, $f(z) - v = a_n(z - v)^n$. Si z pertenece a un entorno lo suficientemente pequeño de v , $\{f^k(z) - v\}_{k>0}$ converge uniformemente a 0, con lo que la familia $\{f^k\}_{k>0}$ es normal en v y por tanto $v \notin J(f)$. Veamos que v no depende de U : Si la familia $\{f^k\}_{k>0}$ es no normal en w , será no normal en cualquiera de sus entornos. Podemos aplicar el corolario (5.10) a cualquiera de ellos, con lo cual debemos encontrar siempre la misma excepción v . Veamos ahora que v no depende de w : Si la familia $\{f^k\}_{k>0}$ no es normal en w_1 ni en w_2 , no es normal en un entorno U que los contenga a ambos. Ahora que ya sabemos que la elección del entorno no influye en v , deducimos que la elección del punto w tampoco. \square

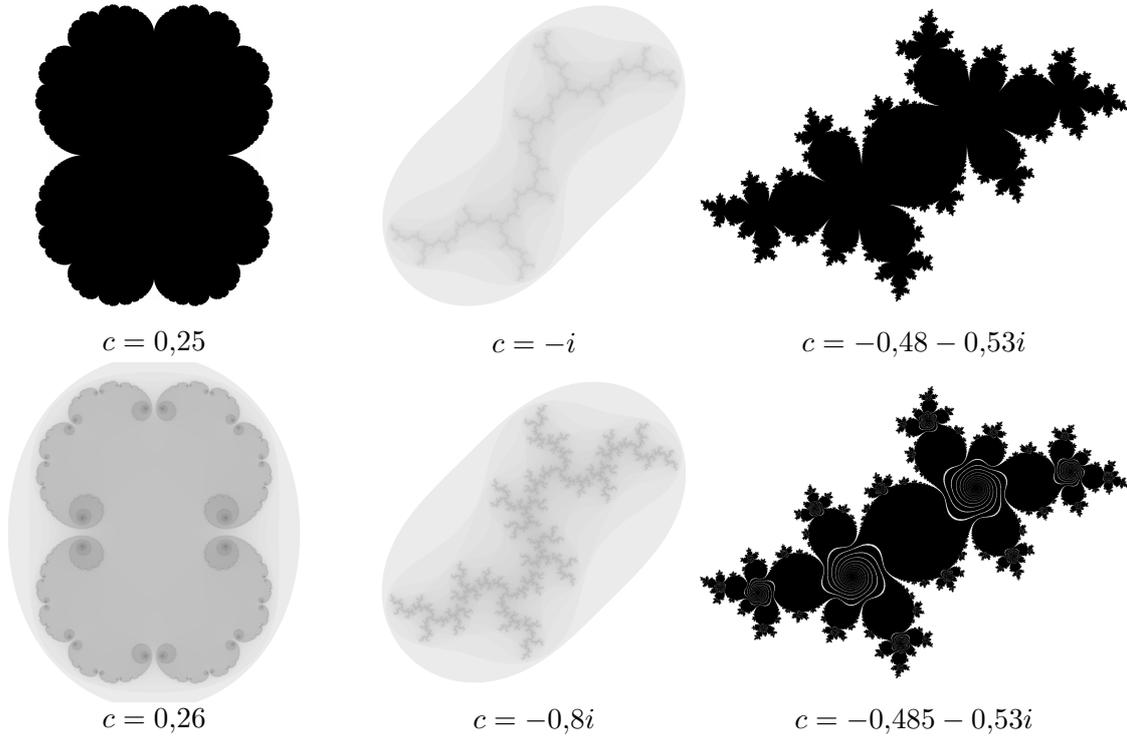


Figura 16: Nótese cómo ligeras perturbaciones en el parámetro c modifican la estructura del conjunto $K(f_c)$

Corolario 5.13. Sea $f(z) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado $n \geq 2$ y sea U un abierto que corta a $J(f)$. Entonces, para todo $z \in \mathbb{C}$ excepto quizás un punto, $f^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset$ para una infinidad de valores de k .

Demostración. Dado $z \in \mathbb{C}$, mientras este no sea la excepción del lema (5.12), $z \in W_1$. Entonces $z \in f^k(U)$ para al menos un valor k . Si solo estuviera en $f^k(U)$ para un número finito de valores de k , tomando n estrictamente mayor que todos ellos obtendríamos que $z \notin W_n$, lo que contradice el lema. Así pues, $f^{-k}(z) \cap U \neq \emptyset$ para una infinidad de valores de k . \square

Corolario 5.14. Sea $f(z) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado $n \geq 2$. Si $z \in J(f)$, entonces $J(f)$ es la adherencia de $\bigcup f^{-k}(z)$.

Demostración. Por la proposición (5.4), $f^{-k}(z) \in J(f)$ para todo $k > 0$. Por tanto $\bigcup f^{-k}(z) \subset J(f)$ y, puesto que $J(f)$ es cerrado, su adherencia también está contenida en $J(f)$.

Por otra parte, dado un $w \in J(f)$ cualquiera y un entorno abierto suyo U , por el corolario (5.13), $\bigcup f^{-k}(z)$ corta a U (nótese que como $z \in J(f)$, no puede ser la excepción del enunciado). Así pues $J(f)$ está contenido en la adherencia de $\bigcup f^{-k}(z)$. \square

Proposición 5.15. Sea $f(z) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado $n \geq 2$. $J(f)$ es un conjunto perfecto (cerrado y sin puntos aislados). En consecuencia es no numerable.

Demostración. Sea $v \in J(f)$ y U un entorno cualquiera de v . Queremos ver que U contiene al menos otro punto de $J(f)$ distinto de v . Consideraremos tres casos:

1. El punto v no es fijo ni periódico por f . Por el corolario (5.14) y el lema de invarianza (5.4), U contiene al menos un punto de la forma $f^{-k}(v) \in J(f)$. Este punto es distinto de v porque este no es fijo ni periódico, es decir, $f^k(v) \neq v$ para todo $k > 0$.
2. El punto v es fijo, es decir, $f(v) = v$. Si la ecuación $f(z) = v$ solo admitiera la solución v , entonces razonando como en la demostración del lema (5.12) llegaríamos a que $v \notin J(f)$. En consecuencia, existe un punto $w \neq v$ tal que $f(w) = v$. Por el corolario (5.14), U contiene un punto u de la forma $f^{-k}(w) = f^{-k-1}(v)$ para algún $k > 0$. Sabemos que $u \in J(f)$ por el lema de invarianza (5.4) y que $u \neq v$ porque $f^k(u) = w \neq f^k(v)$.
3. El punto v es periódico, es decir, existe $p > 1$ tal que $f^p(v) = v$. Por el lema de iteración (5.5), $J(f) = J(f^p)$. Esto nos permite aplicar el caso 2, ya que v es un punto fijo para f^p .

Se concluye que $J(f)$ no tiene puntos aislados, así que es perfecto. Finalmente, es bien sabido que todo conjunto perfecto es no numerable. \square

Se puede probar que si $f(z) \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio de grado $n \geq 2$, solo hay un número finito de puntos periódicos no repulsores de f . Una demostración se puede encontrar en [For13]. El siguiente resultado, que usa este hecho, es de gran importancia ya que aporta otra caracterización de los conjuntos de Julia.

Teorema 5.16. *Sea $f(z) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado $n \geq 2$. $J(f)$ es la adherencia del conjunto de puntos periódicos repulsores de f .*

Demostración. Sea w un punto periódico repulsor de f de periodo p y sea λ su multiplicador. Entonces w es un punto fijo repulsor de $g = f^p$. Como $|\lambda| > 1$, ninguna sucesión de iterantes de g puede converger uniformemente a una función holomorfa en un entorno de w , pues $(g^n)'(w) = \lambda^n \rightarrow \infty$, lo que contradiría el teorema de convergencia uniforme de Weierstrass. Por otro lado, ninguna sucesión de iterantes de g puede converger uniformemente a infinito tampoco porque $g^k(w) = w$ para todo k . Se concluye que la familia $\{g^k \mid k \geq 1\}$ no es normal en w , luego $w \in J(f^p) = J(f)$. Esto nos da que la adherencia del conjunto de puntos periódicos repulsores de f está contenida en $J(f)$.

Sea $E = \{w \in J(f) \mid \exists v \neq w \text{ con } f(v) = w \text{ y } f'(v) \neq 0\}$ y sea $w \in E$. Por el teorema de la función inversa, existe un entorno abierto V de w en el que se puede definir la inversa $f^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C} - V$ tal que $f^{-1}(w) = v \neq w$. Consideremos la familia de funciones $\{h_k\}_{k>0}$ holomorfas en V dada por:

$$h_k(z) = \frac{f^k(z) - z}{f^{-1}(z) - z}.$$

Para cualquier entorno abierto U de w contenido en V , como $w \in J(f)$, la familia $\{h_k\}_{k>0}$ no es normal en U por no serlo la familia $\{f^k\}_{k>0}$. Por el corolario (5.10), o algún elemento de la familia $\{h_k\}_{k>0}$ toma el valor 1 o alguno toma el valor 0. En el primer caso, existen $k > 0$ y $z \in U$ tales que $h_k(z) = 1$, lo que implica $f^{-1}(z) = f^k(z)$, luego $f^{k+1}(z) = z$. En el segundo caso, existen $k > 0$ y $z \in U$ tales que $h_k(z) = 0$, lo que implica $f^k(z) = z$. En ambos casos el entorno U contiene un punto periódico de f . Como solo hay una cantidad finita de puntos periódicos no repulsores, todo $w \in E$ pertenece a la adherencia del conjunto de puntos periódicos repulsores de f . Como f es un polinomio, E contiene todos los puntos de $J(f)$ salvo un número finito; y como $J(f)$ no contiene puntos aislados, $J(f) = \overline{E}$. Por tanto $J(f)$ está contenido en la adherencia del conjunto de puntos periódicos repulsores de f . \square

Lema 5.17. Sea $f(z) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio de grado $n \geq 2$ y sea w un punto fijo atractor de f . Su cuenca de atracción $A(w)$ cumple que $\partial A(w) = J(f)$. Por otro lado, $\partial A(\infty) = J(f)$ también.

Demostración. Sea $z \in J(f)$. La órbita de z por f permanece siempre contenida en $J(f)$ por el lema de invarianza (5.4). Como $w \notin J(f)$ por definición, $z \notin A(w)$. Ahora bien, para cada entorno U de z , por el lema (5.12) existe un k tal que $f^k(U)$ contiene puntos de $A(w)$. Esto significa que podemos tomar puntos arbitrariamente próximos a z cuya órbita va a converger a w . Se deduce que $z \in \partial A(w)$.

Supongamos ahora que $z \in \partial A(w)$ pero $z \notin J(f)$. Entonces z posee un entorno abierto conexo V en el que la sucesión $\{f^k\}_{k>0}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en los compactos de V o bien a una función holomorfa o bien a ∞ . Esa subsucesión debe converger a w en $V \cap A(w)$, que es un abierto no vacío. Se deduce que la convergencia uniforme de la subsucesión es hacia una función holomorfa $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ que es constante en $V \cap A(w)$. Por tanto g es constante en V , ya que una función holomorfa es constante en un conexo si lo es en uno cualquiera de sus subconjuntos abiertos. Deducimos que todos los puntos de V acaban llegando a $A(w)$ tras sucesivas iteraciones de f , luego $V \subset A(w)$, lo que contradice $z \in \partial A$. \square

En resumen, los conjuntos de Julia $J(f)$ asociados a polinomios complejos tienen la siguiente caracterización topológica: Son la frontera de cada cuenca de atracción de un punto fijo atractor de f , incluyendo el punto del infinito ∞ . Y además son la adherencia del conjunto de puntos periódicos repulsores de f .

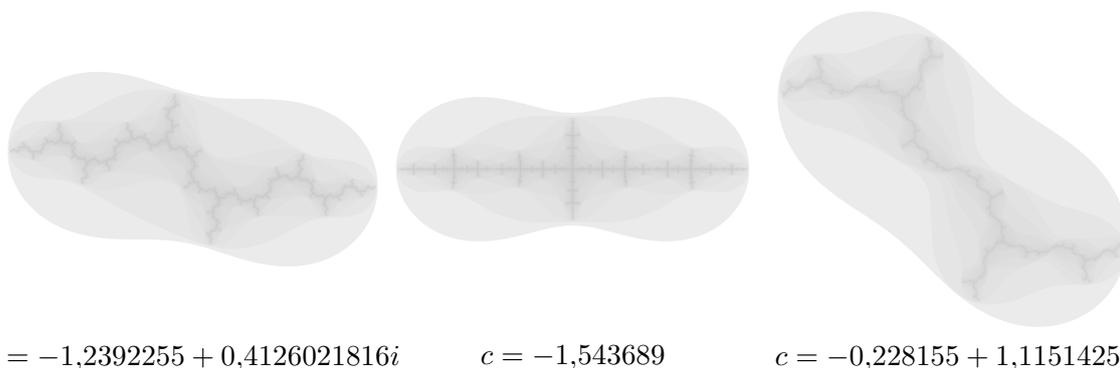


Figura 17: Estos conjuntos de Julia son dendritas (compactos y conexos con interior vacío que no separan el plano). Verifican que $K(f_c) = J(f_c)$.

5.3. Funciones cuadráticas y relación con el conjunto de Mandelbrot

Vamos a centrarnos en el estudio del caso en que $f(z)$ es un polinomio cuadrático. A priori los conjuntos de Julia asociados a f van a depender de tres parámetros (los tres coeficientes del polinomio), pero vamos a probar que en verdad solo dependen de uno.

Definición 5.18 (Conjugación topológica). Sean X e Y dos espacios topológicos. Sean $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ funciones continuas y $h : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Si $g = h^{-1} \circ f \circ h$, decimos que f y g son conjugadas y que h es una conjugación entre f y g .

Proposición 5.19. Sea X un espacio topológico. La conjugación define una relación de equivalencia en el espacio de las funciones $f : X \rightarrow X$ continuas y sobreyectivas.

Demostración. Comprobemos que se dan las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

1. $f = Id_X \circ f \circ Id_X$.
2. $g = h^{-1} \circ f \circ h \Rightarrow f = h \circ g \circ h^{-1}$.
3. $g = h^{-1} \circ f \circ h$ y $d = h'^{-1} \circ g \circ h' \Rightarrow d = (h \circ h')^{-1} \circ f \circ (h \circ h')$.

En consecuencia, la conjugación define efectivamente una relación de equivalencia. \square

En vista de este resultado podemos hablar de *la clase de conjugación* de una función f continua y sobreyectiva. Nótese que si f y g son conjugadas a través del homeomorfismo h , sus respectivos iterantes también: $g^k = h^{-1} \circ f^k \circ h$ para todo $k > 0$. Esto nos dice que una órbita $\{g^k(z)\}_{k>0}$ para un cierto punto z no es más que la imagen por h^{-1} (un homeomorfismo) de la órbita $\{f^k(h(z))\}_{k>0}$. En particular, $g^k(z) \rightarrow \infty$ si y solo si $f^k(h(z)) \rightarrow \infty$. Por tanto, desde un punto de vista topológico, todas las funciones de una clase de conjugación comparten el mismo comportamiento dinámico.

Veamos que todo polinomio cuadrático $f(z)$ está en la misma clase de conjugación que uno de la forma $f_c(z) = z^2 + c$. Tomemos el homeomorfismo $h(z) = \alpha z + \beta$, entonces

$$h^{-1}(f_c(h(z))) = \frac{\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 + c - \beta}{\alpha} = \alpha z^2 + 2\beta z + \frac{\beta^2 - \beta + c}{\alpha}.$$

Podemos seleccionar los valores de α , β y c para que esta expresión sea el polinomio cuadrático $f(z)$ que queramos. De esta forma, el conjunto de Julia asociado a f tiene las mismas propiedades topológicas que el asociado al correspondiente f_c . Más aún, puesto que el homeomorfismo h es la composición de la homotecia $\mu(z) = \alpha z$ con la trasposición $\tau_\beta(z) = z + \beta$ (una isometría), es una semejanza. Por tanto, el conjunto de Julia asociado a f tiene las mismas propiedades geométricas que el asociado al correspondiente f_c . Concluimos que nos basta con estudiar los conjuntos de Julia asociados a funciones cuadráticas de la forma $f_c(z) = z^2 + c$, que solo dependen de un parámetro.

Como se puede apreciar en las múltiples figuras que han ido apareciendo en esta sección, algunos conjuntos de Julia son conexos y otros no. Nuestro último objetivo de la memoria será discernir qué condiciones ha de cumplir el parámetro c para que el conjunto de Julia asociado a la función cuadrática $f_c(z) = z^2 + c$ sea conexo.

En los dos siguientes resultados llamaremos *interior de una curva cerrada* σ a la o las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} - \sigma$. Análogamente, llamaremos *exterior de* σ a la componente conexa no acotada.

Lema 5.20. *Sea $\mathbf{C} \subset \mathbb{C}$ una curva de Jordan y $f_c(z) = z^2 + c$.*

1. *Si c pertenece al interior de \mathbf{C} , $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ es también una curva de Jordan. Además, la imagen inversa por f_c del interior de \mathbf{C} es el interior de $f_c^{-1}(\mathbf{C})$.*
2. *Si c pertenece al exterior de \mathbf{C} , $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ es la unión disjunta de dos curvas de Jordan. Además, la imagen inversa por f_c del interior de \mathbf{C} es la unión de los interiores de esas curvas. Más aún, la imagen por f_c del interior de cada una de esas curvas es el interior de \mathbf{C} .*

3. Si $c \in \mathbf{C}$, $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ es una curva cerrada en forma de ocho que se autointerseca en el punto 0. Además, la imagen inversa por f_c del interior de \mathbf{C} es el interior de $f_c^{-1}(\mathbf{C})$. Más aún, la imagen por f_c de cada componente conexa del interior de $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ es el interior de \mathbf{C} .

Si a mayores \mathbf{C} es una curva de Jordan diferenciable, $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ conserva esa diferenciable en todo punto que no sea de autointersección.

Demostración. Nótese que 0 es el único punto crítico de f_c y que c es su único valor crítico. Entonces, por la proposición (4.3), $\mathbb{C} - \{0\} \xrightarrow{f_c} P(\mathbb{C}) - \{c\}$ es un espacio recubridor. Fijado un punto z , $f_c^{-1}(\{z\}) = \{\pm(z - c)^{1/2}\}$. Si tomamos un entorno de $z \neq c$ uniformemente cubierto podemos construir, con llegada en cada una de las dos hojas, sendas funciones inversas dadas por $f_c^{-1}(z) = +(z - c)^{1/2}$ y $f_c^{-1}(z) = -(z - c)^{1/2}$. Esto nos garantiza que $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ es localmente una curva (que a mayores será diferenciable si lo es \mathbf{C}). Sea $w_0 \in \mathbf{C}$ y sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ una parametrización de \mathbf{C} tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = w_0$ (γ define un lazo que recorre \mathbf{C} partiendo de w_0).

1. Sea c perteneciente al interior de \mathbf{C} . Sea γ' la elevación de γ al espacio $\mathbb{C} - \{0\}$ con origen en $(w_0 - c)^{1/2}$. El extremo final de γ' es $-(w_0 - c)^{1/2}$. Análogamente el extremo final de la elevación γ'' con origen en $-(w_0 - c)^{1/2}$ es $(w_0 - c)^{1/2}$. Se deduce que $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ es una curva cerrada. Además no puede intersectarse a sí misma porque f_c es una aplicación recubridora, con lo que $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ es una curva de Jordan. Como f_c es una aplicación continua y polinómica que envía los puntos de $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ (y solo esos) en \mathbf{C} , el interior de $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ debe transformarse por f_c en el interior de \mathbf{C} y análogamente, el exterior de $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ debe transformarse en el exterior de \mathbf{C} . En consecuencia, la imagen inversa por f_c del interior de \mathbf{C} es exactamente el interior de $f_c^{-1}(\mathbf{C})$.
2. Si c pertenece al exterior de \mathbf{C} , $n(\gamma, c) = \varphi_{w_0}^+([\gamma]) = 0$. Entonces, como $\varphi_{w_0}^+$ es un isomorfismo de grupos, se deduce que $\gamma \sim_{\{0,1\}} c_{w_0}$ en $\mathbb{C} - \{c\}$. Por el teorema de elevación de homotopías, el camino γ' elevado de γ con origen en $+(w_0 - c)^{1/2}$ es homótopo como camino al lazo constantemente igual a $+(w_0 - c)^{1/2}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$. En particular, $\gamma'(0) = \gamma'(1) = +(w_0 - c)^{1/2}$, γ' es un lazo que no se interseca a sí mismo y 0 pertenece a su exterior. Lo mismo se puede decir del camino γ'' elevado de γ con origen en $-(w_0 - c)^{1/2}$. Se concluye que $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ es la unión de dos curvas de Jordan diferenciables. Que esta unión es disjunta, que la imagen inversa por f_c del interior de \mathbf{C} es la unión de los interiores de esas curvas y que la imagen por f_c del interior de cada una de esas curvas es el interior de \mathbf{C} ; se debe a que f_c es una aplicación recubridora.
3. Si $c \in \mathbf{C}$, $0 \in f$. Utilizando las funciones inversas que mencionamos al principio (son válidas para todo punto menos c), vemos que $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ forma una curva cerrada que se autointerseca en el punto 0. De nuevo porque f_c es una aplicación recubridora, la imagen inversa por f_c del interior de \mathbf{C} es el interior de $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ y la imagen por f_c de cada componente conexa del interior de $f_c^{-1}(\mathbf{C})$ es el interior de \mathbf{C} .

□

Teorema 5.21. Sea $f_c(z) = z^2 + c$. Entonces $J(f_c)$ es conexo si y solo si $f_c^k(0) \rightarrow \infty$.

Demostración. Fijemos $c \in \mathbb{C}$ y notemos que 0 es el único punto crítico del polinomio f_c . Es también el único punto donde f_c no define una biyección local (véase la proposición 4.3).

Veamos primero que si la órbita $\{f_c^k(0)\}_{k>0}$ está acotada, entonces $J(f)$ es conexo. Tomemos una circunferencia C de radio lo suficientemente grande como para que tanto $f_c^{-1}(C)$, como todos los puntos de la órbita $\{f_c^k(0)\}_{k>0}$ estén contenidos en el interior de C ; y que además todo punto del exterior de C itere hacia el infinito por f_c . Por el lema (5.20), $f_c^{-1}(C)$ es una curva de Jordan diferenciable contenida en el interior de C . Además, $f_c(c) = f_c^2(0)$ pertenece al interior de C por hipótesis, luego c pertenece al interior de $f_c^{-1}(C)$. De la misma forma se prueba por inducción que para todo $k > 0$, $f_c^{-k}(C)$ es una curva de Jordan diferenciable contenida en el interior de $f_c^{-(k-1)}(C)$ y tal que c pertenece a su interior. Consideremos el conjunto K definido como sigue:

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid \forall k > 0, z \text{ pertenece a } f_c^{-k}(C) \text{ o a su interior}\}.$$

Si $z \in \mathbb{C} - K$, existe algún $k_0 > 0$ tal que $f_c^{k_0}(z)$ pertenece al exterior de C , por lo que $f_c^k(z) \rightarrow \infty$. Se deduce que $A(\infty) = \mathbb{C} - K$ y que $K = K(f)$. Ahora solo queda probar que $\partial K (= J(f))$ es conexo. Sea K_n la unión de la curva $f_c^{-k}(C)$ y su interior. Nótese que $K = \bigcap K_n$, por lo que es la intersección de una familia de conjuntos compactos y conexos tales que $K_{n+1} \subset K_n$ para todo $n > 0$. Por el teorema (4.1), K es conexo. Por otro lado, $\mathbb{C} - K_n \subset \mathbb{C} - K_{n+1}$ para todo $n > 0$, por lo que $\mathbb{C} - K = \bigcup (\mathbb{C} - K_n)$ es también conexo (es unión de conjuntos conexos con un punto en común). Como K es conexo con complementario conexo, se deduce que su frontera $\partial K = J(f)$ también es conexa.

Veamos ahora que si $f_c^k(0) \rightarrow \infty$, entonces $J(f)$ es no conexo. Tomemos una circunferencia C de radio lo suficientemente grande como para que $f_c^{-1}(C)$ esté contenido en el interior de C , todo punto del exterior de C itere hacia el infinito y, además, C pase por un punto $f_c^p(0)$ tal que todos los iterantes anteriores estén en el interior de C y todos los posteriores en el exterior. Razonando como en el caso anterior llegamos a que $f_c^{-(p-1)}(C)$ es una curva de Jordan diferenciable, pero esta vez $c \in f_c^{-(p-1)}(C)$ (porque $f_c^{p-1}(c) = f_c^p(0) \in C$). Aplicando el lema (5.20) a este caso, $E = f_c^{-p}(C)$ es una curva cerrada en forma de ocho contenida en el interior de $f_c^{-(p-1)}(C)$. El conjunto de Julia $J(f)$ debe estar contenido en el interior de E , pues los demás puntos acaban iterando hacia infinito. Ahora solo queda probar que hay puntos de $J(f)$ en ambas componentes conexas del interior de E para ver que es no conexo, pero esto se debe a que $f_c^{-1}(J(f)) = J(f)$. \square

Es posible demostrar que si $J(f_c)$ es no conexo, es totalmente desconectado. Esto significa que los conjuntos de Julia $J(f_c)$ no conexos son homeomorfos al conjunto de Cantor (son espacios métricos, perfectos, compactos y totalmente desconectados).

Corolario 5.22. *El conjunto de Mandelbrot es exactamente el conjunto de puntos $c \in \mathbb{C}$ tales que el conjunto de Julia asociado a $f_c(z) = z^2 + c$ es conexo. Es decir:*

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid J(f_c) \text{ es conexo}\}$$

Demostración. Consecuencia inmediata del teorema anterior. \square

Esta fue, de hecho, la primera definición de conjunto de Mandelbrot. Además, la posición del parámetro c dentro de M revela información sobre la geometría del conjunto de Julia asociado $J(f_c)$. Por ejemplo, se pueden probar las siguientes afirmaciones:

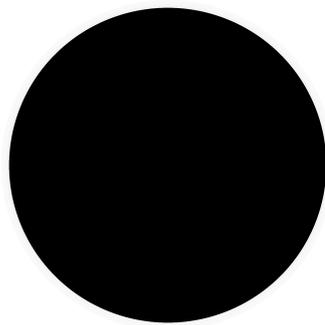
1. Si c pertenece al cardioide principal, f_c tiene un punto fijo atractor y el conjunto de Julia $J(f_c)$ es una casi-circunferencia.

2. Si c pertenece a alguno de los bulbos, f_c tiene una órbita periódica atractora cuyo periodo p solo depende del bulbo. Además, el conjunto de Julia $J(f_c)$ presenta puntos 'de pellizco' a todas las escalas y en cada uno de ellos se encuentran exactamente p regiones del conjunto.
3. Si c pertenece a uno de los filamentos, la órbita del 0 por f_c alcanza un punto periódico tras un número finito de iteraciones y el conjunto de Julia $J(f_c)$ es una dendrita.
4. Si $c \notin M$, f_c no tiene órbitas atractoras y los conjuntos de Julia $J(f_c)$ son homeomorfos al conjunto de Cantor.

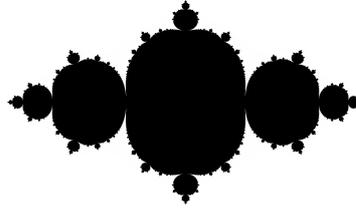
Se pueden encontrar ejemplos de cada una de estas afirmaciones en la figura 18.

La familia $\{f_c(z) = z^2 + c \mid c \in \mathbb{C}\}$ es el ejemplo más famoso de familia parametrizada de funciones. Como acabamos de ver, el conjunto de Mandelbrot forma una partición interesante de su espacio de parámetros (aquellos que dan lugar a conjuntos de Julia conexos y aquellos que no). Otros conjuntos de tipo Mandelbrot se pueden construir de la misma forma considerando las familias parametrizadas $\{f_c(z) = z^n + c \mid c \in \mathbb{C}\}$ para $n \geq 3$.

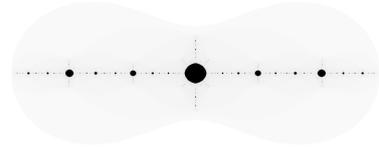
Me gustaría resaltar, como reflexión final, que una parte muy importante de la dinámica compleja es el estudio de familias parametrizadas de funciones y de sus respectivos espacios de parámetros. Esto se debe a que el estudio de propiedades en el espacio de parámetros a veces se puede traducir a propiedades de los sistemas dinámicos asociados. Por ejemplo, el artículo de M. Shishikura [Shi98] mencionado anteriormente no solo prueba que la dimensión de Hausdorff de la frontera ∂M del conjunto de Mandelbrot es dos, sino que también demuestra que existe un subconjunto denso de ∂M tal que sus puntos generan conjuntos de Julia con dimensión de Hausdorff dos. Los trabajos sobre conexión local de matemáticos como Hubbard, Branner o Yoccoz también se basan en fenómenos similares. Son estas interesantes relaciones las que justifican el estudio del conjunto de Mandelbrot (y otros espacios de parámetros) en la esfera de la investigación.



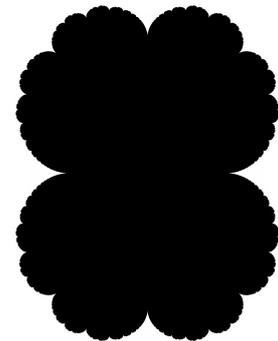
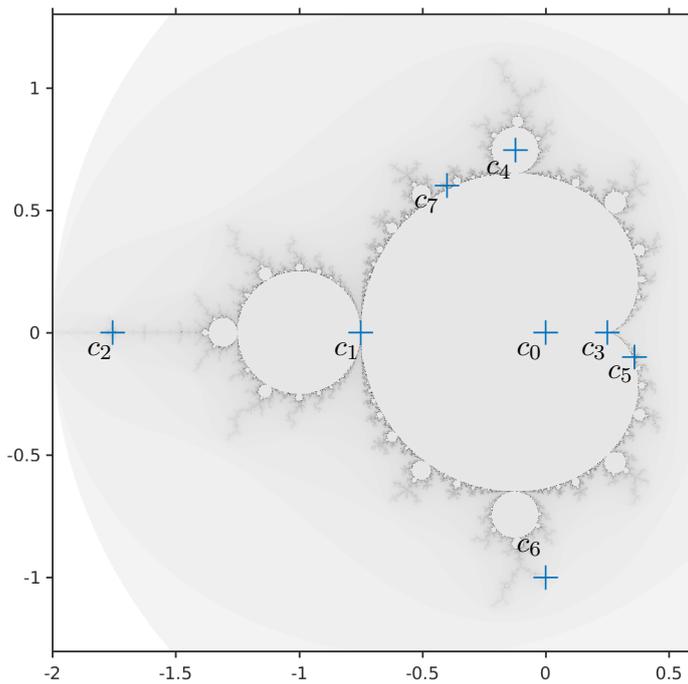
Círculo: $c_0 = 0$



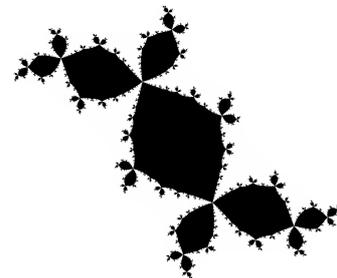
Basílica: $c_1 = -0,75$



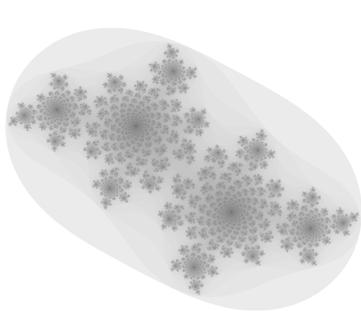
Avión: $c_2 = 0,25$



Coliflor: $c_3 = -1,756$



Conejo: $c_4 = -0,12256 + 0,74486i$



Polvo de Fatou: $c_7 = -0,4 + 0,6i$



Dendrita: $c_6 = -i$



Dragón: $c_5 = -0,36 - 0,1i$

Figura 18: Conjuntos de Julia rellenos $K(f_c)$ para varios puntos c , todos menos c_7 pertenecientes al conjunto de Mandelbrot. Bajo cada uno de ellos puede leerse su nombre popular y su parámetro c .

Anexo I: Miscelánea de teoremas

Durante la memoria se han utilizado algunos resultados de cultura general matemática. Los enunciados están escritos en este anexo por no romper la continuidad temática de la sección en la que aparecen. Además, nos limitaremos a exponer los teoremas, no a dar sus demostraciones.

Teorema 5.23 (del recubrimiento de Lebesgue). *Sea K un espacio métrico compacto. Para cada recubrimiento por abiertos de K , existe $\delta > 0$ tal que todo subconjunto de diámetro menor que δ está contenido en alguno de los abiertos del recubrimiento. Se dice que δ es un número de Lebesgue del recubrimiento.*

Probado en la asignatura 'Topología General'.

Teorema 5.24 (de las funciones inversas). *Sea A un abierto de \mathbb{R}^n y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) en A . Si $a \in A$ verifica que $f'(a)$ es regular, entonces existe un abierto V que contiene a a , y otro abierto W que contiene a $f(a)$, tales que f aplica biyectivamente V en W . Además, la aplicación inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ es también de clase \mathcal{C}^k .*

Probado en la asignatura 'Análisis Matemático'.

Teorema 5.25 (de convergencia uniforme de Weierstrass). *Sea U un abierto de \mathbb{C} y sea $\{f_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de funciones holomorfas en U que converge uniformemente en los compactos de U a una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces f es holomorfa en U y para todo $k \geq 1$, la sucesión $\{f^{(k)}_n\}_{n \geq 0}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en los compactos de U .*

Probado en la asignatura 'Variable Compleja'.

Teorema 5.26 (de la aplicación abierta). *Sea U un abierto conexo de \mathbb{C} y sea f una función holomorfa y no constante en U . Entonces f es abierta en U , es decir, para cada abierto $V \subset U$ se tiene que $f(V)$ es abierto.*

Probado en la asignatura 'Variable Compleja'.

Teorema 5.27 (Principio del módulo máximo). *Sea U un conexo de \mathbb{C} y sea f una función holomorfa en U . Si $|f|$ alcanza un máximo local en U , entonces f es constante en U .*

Probado en la asignatura 'Variable Compleja'.

Teorema 5.28 (de la curva de Jordan). *Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva de Jordan. La curva γ divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada y la otra es no acotada.*

Hay muchas pruebas, ninguna de ellas elemental. Se entender como corolario del teorema siguiente.

Teorema 5.29 (de la curva de Jordan-Schönflies). *Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva de Jordan. Existe un homeomorfismo $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(\gamma) = \mathbb{S}^1$, y en particular aplica la componente acotada de $\mathbb{C} - \gamma$ en el interior del disco unidad D_1 , y la componente no acotada en su exterior.*

Hay diferentes pruebas para diferentes tipos de curva γ , ninguna de ellas es elemental. En el artículo de M. Brown [Bro60] se encuentra la demostración de una versión generalizada del teorema.

Anexo II: El algoritmo de tiempo de escape

Todas las imágenes del conjunto de Mandelbrot y los distintos conjuntos de Julia rellenos que aparecen en esta memoria (y no están debidamente atribuidas) son originales y se han obtenido con Matlab. Para ello se ha utilizado el algoritmo de tiempo de escape, que se detallará a continuación. También se adjuntará el código comentado con la implementación de dicho algoritmo en Matlab.

El algoritmo de tiempo de escape

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función cualquiera, W una región de \mathbb{R}^2 y $R > 0$ un número real. El algoritmo de tiempo de escape proporciona una imagen (pixelada) de W donde el color de cada punto codifica cuánto ha tardado su órbita por f en 'escapar' de la bola $B(0, R)$. Para ello, representamos la región W mediante una malla de puntos M de tamaño $n \times m$. Cuanto más fina sea, mayor resolución tendrá la imagen, pero más tiempo tardará el algoritmo en computarla. Hay que decidir también una tolerancia y una coloración. La tolerancia es el número máximo de elementos de la órbita a calcular durante el algoritmo. Debemos asignar un color por cada número entre 1 y la tolerancia, preferiblemente siguiendo algún tipo de graduación cromática. Así, un punto z será pintado del color n_i si i es el menor número tal que $|f^i(z)| > R$. Se suele reservar el color negro para los puntos cuya órbita permanece en la bola $B(0, R)$ para todas las iteraciones calculadas. A continuación el pseudocódigo del algoritmo de tiempo de escape:

Input: Una malla de puntos M de tamaño $n \times m$,
Una función f ,
Un radio R ,
Una tolerancia tol ,
Un vector de colores col de tamaño tol .

Output: Una imagen I de $n \times m$ pixels

```
for  $i$  from 1 to  $n$  do
  for  $j$  from 1 to  $m$  do
     $x := f(M[i,j])$ ;
     $itr := 1$ ;
    while  $|x| < R$  and  $itr < tol$  do
       $x := f(M[i,j])$ ;
       $itr := itr + 1$ ;
    end
    Pintar  $I[i,j]$  del color  $col[itr]$ ;
  end
end
```

A continuación veremos cómo aplicar el algoritmo de tiempo de escape para computar imágenes de conjuntos de Julia y del conjunto de Mandelbrot. Primero describiremos las ideas fundamentales y posteriormente adjuntaremos el código de dicho algoritmo en Matlab.

Implementación en Matlab

Conjuntos de Julia rellenos

Sea f una función polinómica compleja y $K(f)$ el conjunto de Julia relleno asociado. Como $z \in K(f)$ si y solo si su órbita por f está acotada, podemos escribir un algoritmo basado en el de tiempo de escape que, dada f , obtenga una imagen de $K(f)$. Sencillamente, para una tolerancia tol lo suficientemente grande, supondremos que los puntos que no han escapado tras tol iteraciones pertenecen al conjunto de Julia relleno y los pintaremos de negro. El resto de puntos serán pintados en una escala de grises. Asumimos también que puntos que no están en $K(f)$ pero se quedan cerca tardan más en escapar que puntos alejados del conjunto. Esto significa que, como la imagen obtenida por el algoritmo solo considera una malla de puntos, zonas de un gris muy oscuro probablemente formen parte de $K(f)$ también. Esto es especialmente relevante en casos en que el conjunto de Julia es una dendrita o totalmente desconectado. Eso sí, antes de aplicar el algoritmo de tiempo de escape, necesitamos determinar un radio de escape R en función de f . Aquí mostraremos cómo hacerlo para funciones de la forma $f(z) = z^n + c$:

Si encontramos un $R > 0$ tal que para todo z con $|z| > R$, $|f(z)| > |z|$, hemos acabado. Nótese que

$$|f(z)| = |z^n + c| \geq |z^n| - |c| > R^n - |c|$$

Por tanto, basta tomar $R > 0$ tal que $R^n - R \geq |c|$. Esto siempre es posible porque la función real $P(x) = x^2 - x$ es continua, $P(0) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$. Nuestro algoritmo tendrá que calcular un tal R numéricamente con un bucle *while* antes de aplicar el algoritmo de tiempo de escape.

Conjunto de Mandelbrot

El algoritmo de tiempo de escape también se puede utilizar para computar imágenes del conjunto de Mandelbrot: $c \in M$ si y solo si la órbita del 0 por $f_c(z) = z^2 + c$ está contenida en la bola $B(0, 2)$. Para una tolerancia tol lo suficientemente grande, supondremos que los puntos para los que esa órbita no ha escapado tras tol iteraciones pertenecen al conjunto de Mandelbrot y los pintaremos de negro. El resto de puntos serán pintados en una escala de grises. De nuevo, como la imagen obtenida por el algoritmo solo considera una malla de puntos, zonas de un gris muy oscuro probablemente formen parte de M también (por ejemplo, los múltiples filamentos). El algoritmo de base es prácticamente el mismo que para conjuntos de Julia. Sin embargo, como este solo sirve para obtener imágenes de un conjunto concreto, se ha intentado mejorar su eficiencia teniendo en cuenta las dos propiedades siguientes:

1. El conjunto de Mandelbrot es simétrico respecto del eje real. Dependiendo del cuadrante de \mathbb{C} a representar, esto puede ahorrarnos la mitad de los cálculos.
2. La ecuación del cardiode principal se conoce explícitamente:
Un punto $z = a + bi$ pertenece al interior del cardiode si verifica la desigualdad

$$[(2a - 0,5) + (2a - 0,5)^2 + (2b)^2]^2 < [(2a - 0,5)^2 + (2b)^2]$$

Finalmente, observemos que en Matlab es posible crear una imagen directamente a partir de una matriz con valores en el intervalo $[0, 1]$. El color asignado a cada entrada de la matriz será un tono de gris (el 0 representa el color negro y el 1 el color blanco). Teniendo todo esto en cuenta, adjuntamos los códigos de Matlab a continuación.

Código para representar conjuntos de Julia rellenos asociados a funciones $f(z) = z^2 + c$:

```

1 function J = julia(a,b,xmin,xmax,xres,ymin,ymax,yres,tol,contrast,filename)
2 % Dibuja el conjunto de Julia relleno asociado a  $f(z)=z^2+c$ 
3 % a, b: Partes real e imaginaria del parametro c
4 % xmin, xmax : Rango en el eje real
5 % xres : Numero de coordenadas reales a tener en cuenta
6 % ymin, ymax : Rango en el eje imaginario
7 % yres : Numero de coordenadas imaginarias a tener en cuenta
8 % tol : Numero maximo de iteraciones por punto
9 % contrast: Controla el gradiente de blancos y negros en la imagen
10 %           A mayor valor, mayor contraste
11 % filename: Archivo donde guardar la imagen (p.e. 'julia.png')
12 %           Se recomienda png o bmp en lugar de jpeg
13 %           La imagen guardada con filename esta a maxima resolucio
14 %           (al contrario que al guardarla desde el visor de Matlab)
15
16 % Inicialiazcion de la matriz J y los vectores de coordenadas
17 J = zeros(xres,yres);
18 xspan = linspace(xmin,xmax,xres);
19 yspan = linspace(ymin,ymax,yres);
20
21 % Definicion del parametro c y el radio de escape R
22 c = complex(a,b);
23 R = 0.1;
24 while (R*R - R) < abs(c)
25 R = R + 0.1;
26 end
27
28 for i = 1:xres
29 for j = 1:yres
30 % Comprobamos si el punto  $f_c^n(z)$  escapa del
31 % disco de radio R tras tol iteraciones
32 z = complex(xspan(i),yspan(j));
33 itr = 1;
34 z = z*z + c;
35 while (abs(z)<R && itr<tol)
36 z = z*z + c;
37 itr = itr+1;
38 end
39 % Asignamos valor de 0 a 1 en funcion de lo rapido que escapa
40 J(i,j) = 1 - ((itr-1)/(tol-1))^(contrast);
41 end
42 end
43
44 % Mostrar la imagen por pantalla (con los ejes)
45 %y guardarla en un archivo (sin los ejes)
46 img = J';
47 figure
48 imshow(img,[0 1], 'X',xmin:1e-6*(xmax-xmin):xmax, 'Y', ymin:1e-6*(ymax-ymin):
49         ymax);
49 set(gca, 'YDir', 'normal');
50 set(gca, 'LineWidth', 2);
51 set(gca, 'FontSize', 20);
52 axis on
53
54 flip(img,1);
55 imwrite(img,filename);
56
57 end

```

Código para representar el conjunto de Mandelbrot:

```

1 function M = mandelbrot(xmin,xmax,xres,ymin,ymax,yres,tol,contrast,filename)
2 % Dibuja el conjunto de Mandelbrot
3 % xmin, xmax: Rango en el eje real
4 % xres: Numero de coordenadas reales a tener en cuenta
5 % ymin, ymax: Rango en el eje imaginario
6 % yres: Numero de coordenadas imaginarias a tener en cuenta
7 % tol: Numero maximo de iteraciones por punto
8 % contrast: Controla el gradiente de blancos y negros en la imagen
9 %           A mayor valor, mayor contraste
10 % filename: Archivo donde guardar la imagen (p.e. 'julia.png')
11 %           Se recomienda png o bmp en lugar de jpeg
12 %           La imagen guardada con filename esta a maxima resolucio
13 %           (al contrario que al guardarla desde el visor de Matlab)
14
15 % Inicializacion de la matriz M y los vectores de coordenadas
16 M = zeros(xres,yres);
17 xspan = linspace(xmin,xmax,xres);
18 yspan = linspace(ymin,ymax,yres);
19
20 % Detecta si la imagen va a ser simetrica respecto del eje real. De ser
21 % el caso se puede aprovechar la simetria del conjunto.
22 if ymin == -ymax
23     mirror = 1;
24 else
25     mirror = 0;
26 end
27
28 for i = 1:xres
29     for j = 1:yres
30         a = xspan(i); b = yspan(j);
31         if (mirror==1 & b>0)
32             % Si el punto esta en el semiplano superior, copiar
33             % el resultado del semiplano inferior
34             M(i,j) = M(i,yres-j+1);
35         elseif (2*a-0.5+(2*a-0.5)^2+(2*b)^2 < ((2*a-0.5)^2+(2*b)^2)
36             % Si el punto esta en el cardiode, esta en el conjunto
37             M(i,j) = 0;
38         else
39             % Comprobamos si f_c^n(0) escapa del disco de radio 2 tras tol iteraciones
40             c = complex(a,b);
41             z = complex(0,0);
42             itr = 1;
43             z = z*z + c;
44             while (abs(z)<2 && itr<tol)
45                 z = z*z + c;
46                 itr = itr+1;
47             end
48             % Asignamos valor de 0 a 1 en funcion de lo rapido que escapa
49             M(i,j) = 1 - ((itr-1)/(tol-1))^(contrast);
50         end
51     end
52 end
53
54 % Mostrar la imagen por pantalla con ejes y guardarla en un archivo sin ejes
55 img = M';
56 figure
57 imshow(img,[0 1], 'X', xmin:1e-6*(xmax-xmin):xmax, 'Y', ymin:1e-6*(ymax-ymin):
58         ymax);
59 set(gca, 'YDir', 'normal');

```

```
59 set(gca,'LineWidth',2);
60 set(gca,'FontSize',20);
61 axis on
62
63 flip(img,1);
64 imwrite(img,filename);
65 end
```


Referencias

- [Bro60] Morton Brown. “A proof of the generalized Schoenflies theorem”. En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 66.2 (1960), págs. 74-76.
- [DH82] Adrien Douady y John H. Hubbard. “Iteration of Complex Quadratic Polynomials”. En: *Comptes Rendus des Séances de l’Académie des Sciences de Paris. Série I Mathématiques* 294.3 (1982), págs. 123-126.
- [Fal99] Kenneth J. Falconer. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. Chichester, Sussex etc. : John Wiley y Sons, 1999.
- [For13] John E. Fornæss. *Introduction to complex dynamics in one dimension*. YMSC (Yau Mathematical Sciences Center), Tsinghua University, Beijing, 2013.
- [Ful95] William Fulton. *Algebraic Topology: a First Course*. New York etc.: Springer, 1995.
- [GH81] Marvin J. Greenberg y John R. Harper. *Algebraic Topology: a First Course*. Redwood City, California : Addison-Wesley, 1981.
- [Kah01] Jeremy Kahn. “The Mandelbrot Set is Connected: a Topological Proof”. En: (2001). URL: <http://www.math.brown.edu/~kahn/mconn.pdf>.
- [Man80] Benoît B. Mandelbrot. “Fractal aspects of the iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ for complex λ and z .” En: *Annals of the New York Academy of Sciences* 357 (1980), págs. 249-259.
- [Man97] Benoît B. Mandelbrot. *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets, 1997.
- [Mil06] John W. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*. Princeton New York : Princeton University Press, 2006.
- [Sch93] Joel L. Schiff. *Normal Families*. New York : Springer-Verlag, 1993.
- [Shi98] Mitsuhiro Shishikura. “The Hausdorff Dimension of the Boundary of the Mandelbrot Set and Julia Sets”. En: *Annals of Mathematics. Second Series* 147.2 (1998), págs. 225-267.
- [Wil04] Stephen Willard. *General Topology*. Mineola New York : Dover, 2004.