Universidad de Valladolid

FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en MATEMÁTICAS

PROLONGACIÓN ANALÍTICA DE SUMAS DE SERIES DE POTENCIAS MEDIANTE LOS MÉTODOS DE BOREL Y DE MITTAG-LEFFLER.

Autor: Raúl Arranz Esteban

Tutor: Javier Sanz Gil

Junio 2020

D. JAVIER SANZ GIL, Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de Valladolid,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo, "PROLONGACIÓN ANALÍTICA DE SUMAS DE SERIES DE POTENCIAS MEDIANTE LOS MÉTODOS DE BOREL Y DE MITTAG-LEFFLER", ha sido realizado bajo su dirección en el Departamento de Álgebra, Análisis Matemático, Geometría y Topología, por Don Raúl ARRANZ ESTEBAN, y constituye su Trabajo Fin de Grado para optar al título de Grado en Matemáticas.

Que le consta que el trabajo es original e inédito, y que autoriza su presentación.

Y para que conste a los efectos oportunos, firma la presente en Valladolid a veintiseis de junio de dos mil veinte.

Fdo.: Javier Sanz Gil

Resumen

Se trata de presentar diversos resultados acerca de la prolongación analítica de la función suma de una serie de potencias, con radio de convergencia finito y positivo (y, por simplicidad y sin pérdida de generalidad, centrada en 0), más allá de su disco abierto de convergencia. Se presentará el concepto de punto barrera, y se probará su existencia en la circunferencia frontera del disco de convergencia. Se estudiarán ejemplos de series lacunares, para las que dicha frontera es la frontera natural, es decir, todos sus puntos son barrera. Finalmente, se describirán los procedimientos de sumación de Borel y de Mittag-Leffler, que proporcionan la prolongación analítica de la función suma de una serie de potencias a, respectivamente, su polígono de Borel y a la denominada estrella de Mittag-Leffler, conjunto maximal (con respecto de la contención) entre aquellos estrellados con respecto de 0 para los que la prolongación es posible.

The aim is to introduce several results about the analytic continuation of the sum of a power series having a positive finite radius of convergence (for simplicity and without loss of generality, centred at 0), beyond its circle of convergence. We will introduce the concept of barrier point, and we will prove its existence in the boundary of the circle of convergence. We will study some examples of lacunary series, whose circumference of convergence is a natural boundary, that is, all its points are barrier points. Finally, we will describe the procedures of the Borel summability and Mittag-Leffler summability of a power series, which provide the analytic continuation of the sum of a power series in, respectively, the Borel polygon and the so-called Mittag-Leffler star, maximal set (with respect to inclusion) among the star-shaped sets with respect to 0 for which the continuation is possible.

Índice general

Introducción

Actualmente en el Grado en Matemáticas se hace una introducción al análisis complejo en la asignatura de "Variable Compleja". Uno de sus objetos de estudio son las series de potencias centradas en un punto z_0 vistas como representación local de una función definida y holomorfa en un cierto abierto Ω del plano complejo que contenga a dicho punto. Es decir, dada $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa en Ω y dado $z_0 \in \Omega$, existen $r > 0$ y una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, convergente en el disco $B(z_0, r) \subset \Omega$ tal que para cada punto de dicho disco

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Las funciones que admiten dicha representación en todo punto del abierto Ω se denominan funciones analíticas en Ω, y resulta que coinciden con las funciones holomorfas en dicho abierto. De hecho, la serie de potencias centrada en un punto del abierto Ω que representa a la función es el desarrollo de Taylor de la función en torno al punto en cuestión,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \ z \in B(z_0, r).$$

De cara al estudio que sigue supondremos además, sin pérdida de generalidad, que las series que estudiaremos están centradas en $z_0 = 0$ por simple comodidad.

De forma natural, se puede plantear el problema inverso: dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con radio de convergencia positivo R, determinar la expresión de la función f que coincide con la suma de la serie en $B(0, R)$ y prolonga analíticamente dicha suma al mayor abierto estrellado respecto del origen posible. Obsérvese que el principio de identidad garantiza la unicidad de la función f que se busca determinar.

La memoria se estructura en tres capítulos, cuyo contenido pasamos a describir. El primero de ellos gira en torno a la conocida función Gamma de Euler. Comenzaremos presentando algunos resultados relativos a la factorización de funciones enteras que nos permitan definirla con los requisitos deseados, y una vez hecho esto estudiaremos sus propiedades y algunas definiciones alternativas. Cabe destacar aquí las dos relaciones fundamentales de la función Gamma, que nos servirán a modo de herramientas a lo largo de todo el trabajo, y la integral de Hankel, que constituye una representación de la inversa de la función Gamma en forma de integral.

En el segundo capítulo vamos a introducir la función de Mittag-Leffler, para lo cual haremos uso de los resultados anteriores. Además estudiaremos también algunas de sus propiedades, tales como una representación de la misma en forma de integral y el comportamiento asintótico de la función en el infinito.

El último capítulo del trabajo aborda el problema planteado. En él, gracias a los estudios de sumabilidad llevados a cabo por el matemático francés Émile Borel (7 de enero de 1871 - 3 de febrero de 1956) y por el matemático sueco Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler (16 de marzo de 1846 – 7 de julio de 1927), contemplamos cómo definir ciertos abiertos, que contengan al disco abierto de convergencia de una serie de potencias en los cuales sea posible definir la función que coincida con la suma de la serie en dicho disco y además sea holomorfa en todo el abierto. De hecho, proporcionaremos también una expresión integral de dicha función con la ayuda del estudio realizado en los capítulos anteriores. La conclusión del trabajo vendrá dada por un resultado que nos proporcionará una función holomorfa en un abierto que denominaremos "estrella de Mittag-Leffler", y que prolongue de forma analítica a una serie de potencias dada.

Se recogen en sendos apéndices las nociones y resultados elementales que se han necesitado en el trabajo acerca de los productos infinitos de funciones holomorfas y el concepto de orden exponencial de una función entera y su cálculo a partir de los coeficientes del desarrollo de Taylor de la misma en el origen.

Para la elaboración de la memoria se ha empleado básicamente el libro de Sansone-Gerretsen [6] y para los apéndices, el Ash-Novinger [1] (para los productos infinitos) y el Markushevich [4] (para el orden exponencial).

Capítulo 1

La función Gamma de Euler.

El objetivo principal del capítulo es presentar la función Gamma de Euler, lo cual haremos de tres formas distintas todas ellas equivalentes: en forma de producto infinito, en forma de límite y en forma de integral. Comenzaremos por definir dicha función en forma de producto infinito, la que permite explicar de un modo bastante ilustrativo la motivación de dicha función. Seguidamente daremos una expresión en forma de límite que nos permitirá, principalmente, obtener dos relaciones denominadas relaciones fundamentales de la función Gamma. Una vez obtenidos todos estos resultados podremos expresar dicha función en forma de integral, lo cual nos será de gran ayuda para estudiar la función de Mittag-Leffler que definiremos en el siguiente capítulo. Para concluir el capítulo ampliaremos la fórmula de Stirling para números naturales a todos los números reales positivos, resultado que utilizaremos también a continuación.

1.1. Definición y primeros resultados.

Antes de dar la definición de la función Gamma en forma de producto infinito necesitamos conocer una serie de resultados previos que nos permitan encontrar funciones enteras, expresadas como un producto infinito, que se anulen precisamente en una sucesión de números complejos dada, $a_1, a_2, \ldots$ con $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$ y $|a_n| \to \infty$, donde cada cero aparece tantas veces como indique su orden de multiplicidad. El teorema de Weierstrass nos proporciona dicha expresión, pero para demostrarlo son necesarios unos conocimientos previos.

Proposición 1.1.1. *Si g es una función entera que no se anula en ningún punto, esta ha de ser de la forma* $\exp\varphi$, *donde φ es una función entera.*

Demostración. Bajo las hipótesis del enunciado se tiene que la derivada logarítmica de g, $\frac{g'}{g}$ es también una función entera. Definimos la función φ por

$$\varphi(z) = a + \int_0^z \frac{g'(\omega)}{g(\omega)} d\omega, \;\; z \in \mathbb{C},$$

donde la integral se calcula a lo largo del segmento que va desde 0 hasta z y $a \in \mathbb{C}$ debe ser uno de los logaritmos de $g(0)$ ($a = \log g(0)$, es irrelevante escoger una determinación u otra). Es bien conocido que φ es una función entera, cuya derivada viene dada por $\varphi'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$. Si denotamos ahora $f(z) = g(z)e^{-\varphi(z)}$, se tiene que

$$f'(z) = \exp \varphi(z) \left(g'(z) - g(z)\varphi'(z) \right) = 0$$

de donde se deduce que f es constante y por tanto

$$\frac{\exp \varphi(z)}{g(z)} = \frac{\exp \varphi(0)}{g(0)} = 1, \;\; z \in \mathbb{C},$$

como queríamos probar. □

Corolario 1.1.2. *Si g es una función entera con un número finito de ceros y denotamos por p un polinomio que tiene los mismos ceros que g (con la misma multiplicidad) entonces*

$$g(z) = p(z) \exp \varphi(z)$$

donde φ es una función entera.

Demostración. Los ceros de g son, por hipótesis, aislados. Sea z_0 uno los ceros de g, podemos escribir por tanto $p(z) = (z - z_0)^m p_0(z)$ y $g(z) = (z - z_0)^m g_0(z)$ donde p_0 y g_0 son funciones holomorfas en un entorno de z_0 que no se anulan en z_0 y m es la multiplicidad de z_0 como cero de p y g. Entonces en dicho entorno de z_0 tenemos

$$\frac{g(z)}{p(z)} = \frac{(z - z_0)^m g_0(z)}{(z - z_0)^m p_0(z)} = \frac{g_0(z)}{p_0(z)}$$

y por tanto la función $\frac{g(z)}{p(z)}$ posee una singularidad evitable en z_0, por lo que podemos prolongarla a una función holomorfa dándole en z_0 el valor del límite en dicho punto, que es distinto de cero puesto que $g_0(z_0) \neq 0$.

Haciendo lo propio en cada uno de los ceros obtenemos una función holomorfa en todo el plano complejo que no se anula en nigún punto. Como consecuencia de la proposición anterior deducimos que

$$\frac{g(z)}{p(z)} = \exp \varphi(z)$$

donde φ es una función entera. □

Definición 1.1.3. *Llamaremos* factores primarios *a las funciones enteras*

$$E(z;0) = 1 - z;\ \ E(z;k) = (1-z)\exp\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^k\right) \tag{1.1}$$

siendo k un entero positivo.

Proposición 1.1.4. *El logaritmo de un factor primario, escogiendo la determinación principal, satisface la desigualdad*

$$|\log E(z;k)| \leq 2|z|^{k+1} \tag{1.2}$$

siempre que $|z| \leq \frac{1}{2}$.

Demostración. Sean $|z| \leq \frac{1}{2}$ y $k \geq 1$, se tiene

$$\log E(z;k) = \log(1-z) + \log\left(\exp\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^k\right)\right).$$

Para asegurar esta igualdad es necesario justificar que la suma de los argumentos principales de los complejos $1-z$ y $\exp\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^k\right)$ permanece en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Observamos que la parte imaginaria de $\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^k\right)$ es uno de los argumentos de $\exp\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^k\right)$. Además tenemos que

$$\left|z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^k\right| \leq |z| + |z^2| + \ldots + |z^k| \leq \sum_{n=1}^{k} |z|^n \leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^k} \leq 1$$

y por lo tanto la parte imaginaria está entre 1 y -1, con lo que coincidirá con el argumento principal de $\exp\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^k\right)$.

Puesto que $|z| \leq 1/2$ se tiene que $(1-z) \in B(1, 1/2)$. Por razones trigonométricas deducimos que para cada $z \in B(1, 1/2)$ se tiene que el argumento principal de z pertenece al intevalo $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$. En efecto, si trazamos las dos rectas tangentes desde el origen a la circunferencia de centro 1 y radio $1/2$ observamos que el seno del ángulo que forman con el eje real es el radio de la circunferenica dividido entre la distancia del centro al origen, es decir, $1/2$. Por tanto se tiene que dichos ángulos son $\frac{\pi}{6}$ y $-\frac{\pi}{6}$ (figura 1.1).

En conclusión, la suma de los respectivos argumentos principales de $1-z$ y $\exp\left(z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^k\right)$ pertenecerá al intervalo $(-\frac{\pi}{6} - 1, \frac{\pi}{6} + 1) \subset (-\pi, \pi)$, y será el argumento principal de $E(z;k)$. Podemos concluir entonces que

$$\log E(z;k) = \log(1-z) + z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots + \frac{1}{k}z^k.$$

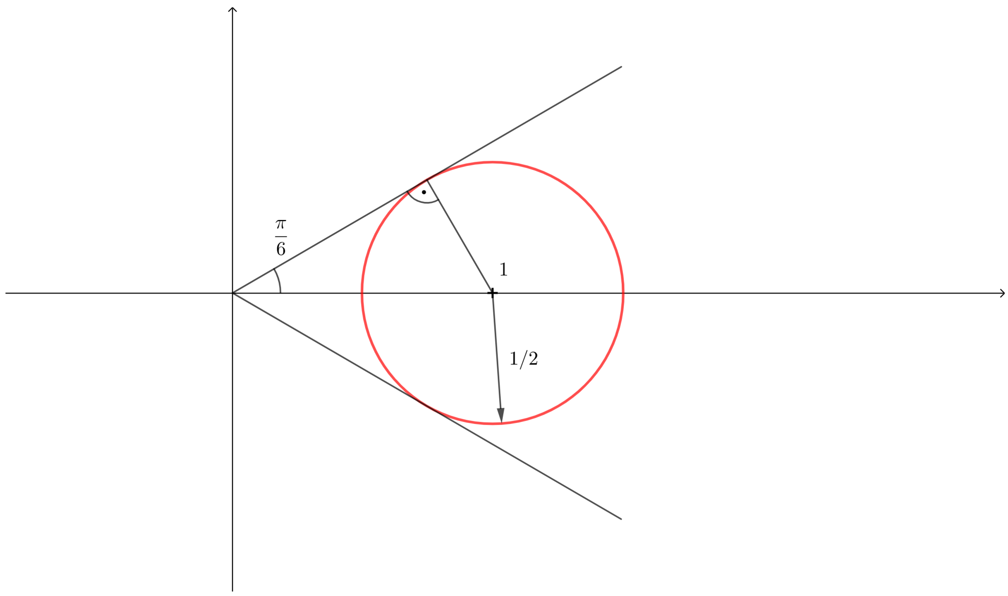

Figura 1.1: $\arg(1-z)$

Teniendo en cuenta que el desarrollo de Taylor de la determinación principal del logaritmo en el abierto $|z| < 1$ es

$$\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{n}$$

y sustituyendo en la anterior igualdad, obtenemos

$$\log E(z;k) = \sum_{n=k+1}^{\infty} -\frac{z^n}{n} = -\frac{1}{k+1}z^{k+1} - \frac{1}{k+2}z^{k+2} - \dots$$

y por tanto

$$\begin{aligned} |\log E(z;k)| &\leq |z|^{k+1}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}|z| + \dots\right) \\ &\leq |z|^{k+1}\left(1 + |z| + |z|^2 + \dots\right) \\ &\leq |z|^{k+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\right) = 2|z|^{k+1}. \end{aligned}$$

El resultado es también cierto para $k = 0$ ya que $E(z;0) = 1 - z$, luego si

$|z| \leq \frac{1}{2}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|\log(1-z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} = |z| \left(1 + \frac{1}{2}|z| + \frac{1}{3}|z|^2 + \dots\right) \\
&\leq |z| \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\right) = 2|z|.
\end{aligned}
$$

□

Estamos por tanto en condiciones de dar la demostración del teorema de Weierstrass, que nos permite encontrar una función entera g cumpliendo lo pedido al inicio de la sección.

Teorema 1.1.5 (de Weierstrass). *Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos no nulos que tiende hacia infinito, es decir, $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ y $a_n \to \infty$, entonces existen una sucesión de enteros no negativos $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1}$$

es convergente para todos los valores de z, y una función g holomorfa en todo el plano complejo, que se anula precisamente en cada uno de los puntos de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, y que se escribe de la forma

$$g(z) = \exp\varphi(z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left\{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n}\right\} \tag{1.3}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$, donde $\varphi(z)$ es una función entera. El segundo factor exponencial se omite cuando el correspondiente $k_n = 0$.

Demostración. Por la proposición 1.1.1 sabemos que $\exp\varphi$ es una función entera que no se anula, por lo que es suficiente probar que el otro factor de (1.3) es una función entera con los ceros pedidos. En vista de (1.1) podemos representar dicho factor como

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}; k_n\right) \tag{1.4}$$

y de acuerdo con (1.2) se tiene que

$$\left|\log E\left(\frac{z}{a_n}; k_n\right)\right| \leq 2\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1} \tag{1.5}$$

siempre que $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}$, es decir, cuando $|a_n| \geq 2|z|$, lo cual se consigue tomando un n suficientemente grande ya que la sucesión de los a_n tiende hacia infinito. Además la serie $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ se puede escoger de forma que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1}$ sea convergente para todo valor de z. En efecto, supongamos que $k_n = n$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1}$ converge de hecho uniformemente en los compactos de $\mathbb{C}$ puesto que si $|z| \leq M$ para cierto $M > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| > M$ para cada $n \geq n_0$ y se tiene que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{n+1} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{M}{|a_{n_0}|}\right)^{n+1}$$

que es una serie geométrica de razón menor que 1 y por tanto convergente; basta aplicar el criterio M de Weierstrass para concluir.

Escogemos entonces una tal sucesión y se tiene por tanto que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log E\left(\frac{z}{a_n};k_n\right)$$

es absolutamente y uniformemente convergente en los compactos de $\mathbb{C}$. Teniendo en cuenta que para $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| \leq 1/2$ se tienen las desigualdades elementales

$$\frac{1}{2}|w| \leq |\log(1+w)| \leq 2|w|,$$

es claro que podemos aplicar la proposición A.0.8 para deducir que el producto (1.4) converge absolutamente y además converge uniformemente en cualquier conjunto compacto, por lo que representa una función entera.

Los ceros de la función f vienen dados por aquellos puntos z en los que

$$E\left(\frac{z}{a_n};k_n\right) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

por lo que dichos ceros, dada la expresión (1.1), han de ser los puntos de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

En la solución obtenida en el teorema de Weierstrass suponemos $a_1 \neq 0$. Si queremos que el origen sea un cero de nuestra función g basta con escribir

$$g(z) = z^m f(z)\exp\varphi(z)$$

donde f es la función de (1.4).

Consideremos ahora el caso en el que queremos obtener una función entera que se anule únicamente en los puntos $z = 0, -1, -2, \ldots$ Tenemos que encontrar la sucesión $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{-n}\right|^{k_n+1}$ converja. Observamos que basta con escoger $k_n = 1$. Por lo visto hasta ahora podemos escribir dicha función como

$$g(z) = z \exp \varphi(z) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right)$$

donde φ es una función entera. Nos interesa particularmente el caso en el que $\varphi(z) = \gamma z$, siendo γ una constante escogida de forma que $g(1) = 1$.

Definición 1.1.6. *El inverso de dicha función g se denomina* función Gamma de Euler *y se denota por $\Gamma(z)$, es decir*

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right), \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.} \tag{1.6}$$

Proposición 1.1.7. *La función Gamma es meromorfa en todo el plano y sus singularidades las encontramos en los puntos $z = 0, -1, -2, \ldots$ donde presenta polos simples. Además la función Gamma no se anula en ningún punto.*

Demostración. Sabemos que g es una función entera que tiene ceros de orden uno en los puntos $z = 0, -1, -2, \ldots$ Por tanto $\frac{1}{g}$ es una función meromorfa y sus singularidades son los ceros de g.

Por otro lado la función $\frac{1}{g}$ no se anula ya que el numerador es siempre distinto de cero. $\square$

Proposición 1.1.8. *El valor de la constante γ (o constante de Euler) es*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right). \tag{1.7}$$

Demostración. Por definición tenemos que $\Gamma(1) = 1$, luego

$$1 = e^{-\gamma} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}\right)^{-1}$$

lo que equivale a

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}.$$

Tomando logaritmos

$$\begin{aligned} -\gamma &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{\log \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} + \log \frac{n+1}{n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right\} \end{aligned}$$

y como $\log \frac{n+1}{n}$ tiende a cero cuando $n \to \infty$ tenemos

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

$\square$

Proposición 1.1.9. *La constante de Euler* (1.7) *cumple*

$$0 < \gamma < 1.$$

Demostración. Sabemos que

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n}$$

de donde se deduce

$$\frac{1}{n+1} < \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}. \tag{1.8}$$

Como para $n > 1$, $\log n = \log \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1} = \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \ldots + \log \frac{n}{n-1}$ se tiene

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n \\ &= 1 - \left(\log \frac{2}{1} - \frac{1}{2}\right) - \left(\log \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \ldots - \left(\log \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \log \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \log \frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \log \frac{n}{n-1}\right) + \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

De acuerdo con (1.8) se tiene que $\log \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$ y $\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} > 0$, por lo que suprimiendo algunos términos de (1.9) se obtienen las desigualdades

$$1 - \left(\log 2 - \frac{1}{2}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n > 1 - \log 2,$$

y teniendo en cuenta la fórmula (1.7) se deduce que

$$0 < \gamma < 1.$$

$\square$

Corolario 1.1.10 (fórmula de Gauss)**.** *Para cada* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ *se tiene que*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{1.10}$$

Demostración. Una vez conocido el valor de la constante γ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)\right)\cdot z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\exp\left(-\frac{z}{k}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \exp(-z\log n)\cdot z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{z\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}{n^z}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{z\left(\frac{z+1}{1}\right)\left(\frac{z+2}{2}\right)\cdots\left(\frac{z+n}{n}\right)}{n^z} = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!n^z}.
\end{aligned}
$$

□

1.2. Relaciones fundamentales.

A partir de la fórmula de Gauss (1.10) podemos obtener dos relaciones para la función Gamma, la primera de ellas en forma de ecuación funcional y la segunda es la denominada fórmula de los argumentos complementarios.

Proposición 1.2.1 (primera relación fundamental para Γ)**.** *La función Gamma satisface la siguiente ecuación*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ \ z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}. \tag{1.11}$$

Demostración. De acuerdo con la fórmula de Gauss (1.10) se tiene

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\cdot\frac{n}{(z+n+1)}\\
&= z\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{z}}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(z+n+1)} = z\Gamma(z).
\end{aligned}
$$

□

Corolario 1.2.2. *La función Gamma coincide con el factorial cuando la variable toma valores enteros mayores o iguales que cero, es decir*

$$\Gamma(m+1) = m!$$

para cada $m\geq 0$.

Demostración. Teniendo en cuenta (1.11) se obtiene

$$\Gamma(m+1) = m\Gamma(m) = m(m-1)\Gamma(m-1) = \ldots = m!\Gamma(1) = m!$$

□

Corolario 1.2.3. *El residuo de* Γ *en los polos vale*

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}$$

para $m = 0, 1, 2, \ldots$

Demostración. Como consecuencia de la ecuación (1.11), para $m = 1, 2, \ldots$ se tiene

$$\Gamma(z + m + 1) = (z + m)\Gamma(z + m) = \ldots = (z + m) \cdots (z + 1)z\Gamma(z).$$

Esto equivale a

$$(z + m)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + m + 1)}{z(z + 1) \cdots (z + m - 1)},$$

y por tanto se tiene

$$\lim_{z \to -m} (z + m)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1)}{-m(-m + 1) \cdots (-1)} = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

El resultado también es cierto para $m = 0$ ya que

$$\lim_{z \to 0} z\Gamma(z) = \lim_{z \to 0} \Gamma(z + 1) = \Gamma(1) = 1.$$

□

Para demostrar la segunda relación fundamental necesitamos obtener previamente una expresión de las funciones $\pi \cot \pi z$ y $\operatorname{sen} \pi z$ en forma de suma y producto infinito, respectivamente. Comencemos por $\pi \cot \pi z$, la cual vamos a utilizar para obtener la expresión de $\operatorname{sen} \pi z$.

Lema 1.2.4. *Sea* φ *una función meromorfa en* $\mathbb{C}$ *cuyas singularidades son polos simples en los puntos* $z = a, a \pm 1, a \pm 2, \ldots$ $(a \in \mathbb{R})$ *con* $\operatorname{Res}(\varphi, a + k) = \alpha_k, k \in \mathbb{Z}$. *Sea* C_n *una sucesión de curvas cerradas simples tales que:*

(i) $\inf\{|z| : z \in C_n^*\} \geq c_1 n$ *para una cierta constante* $c_1 > 0$*, donde* C_n^* *denota el soporte de* C_n*.*

(ii) $\operatorname{long}(C_n) \leq c_2 n$ *para una cierta constante* $c_2 > 0$*.*

(iii) $a \pm k$ *está dentro de* C_n *si y solo si* $0 \leq k \leq n$*, y ninguno pertenece al soporte de la curva.*

(iv) Existe $M > 0$ *tal que* $|\varphi(z)| \leq M$ *para todo* $z \in C_n^*, n \in \mathbb{N}$*.*

Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y tal que $zf(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$. Entonces se tiene que

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ a+k \text{ no es singularidad de } f}}^{\infty} \alpha_k f(a+k) = -A$$

donde A denota la suma de los residuos de $f \cdot \varphi$ en las singularidades de f.

Demostración. Observamos que, como $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, se tiene que dado $\delta > 0$ existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$, entonces $|zf(z)| < \delta$. Por lo tanto $f(z)$ es acotada en $\mathbb{C}\backslash\overline{B}(0,R)$, luego sus singularidades deben estar todas situadas en $\overline{B}(0,R)$. Deducimos entonces gracias a la condición (i) impuesta a las curvas C_n, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (bastaría tomar $n_0 > \frac{R}{c_1}$) tal que todas las singularidades de f se sitúan en el interior de C_n para todo $n \geq n_0$.

Tomemos $n \geq n_0$. Al ser C_n un camino cerrado simple, sabemos que el índice $n(C_n, z)$ es 1 para todos los puntos z en el interior de C_n, luego por el teorema de los residuos sabemos que

$$\begin{aligned}\int_{C_n} f(\omega)\varphi(\omega)d\omega &= 2\pi i \sum_{z \text{ singularidad de } f\cdot\varphi} \operatorname{Res}(f\cdot\varphi, z) \\ &= 2\pi i \sum_{\substack{k=-n \\ a+k \text{ no es singularidad de } f}}^{n} \operatorname{Res}(f\cdot\varphi, a+k) + 2\pi i A\end{aligned}$$

donde A denota la suma de los residuos de la función $f \cdot \varphi$ en las singularidades de f, todas ellas situadas en el interior de C_n. Por tanto podemos deducir que

$$\sum_{\substack{k=-n \\ a+k \text{ no es singularidad de } f}}^{n} \operatorname{Res}(f\cdot\varphi, k+a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} f(\omega)\varphi(\omega)d\omega - A. \tag{1.12}$$

Veamos que la integral de la parte derecha de la igualdad tiende a cero cuando hacemos tender n a infinito.

Dado $\varepsilon > 0$, se tiene que si $|z|$ es suficientemente grande entonces $|zf(z)| < \varepsilon$, y por tanto escogiendo n suficientemente grande, puesto que para cada $z \in C_n, |z| \geq c_1 n$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_n} f(\omega)\varphi(\omega)d\omega\right| &= \left|\int_{C_n} \omega f(\omega)\varphi(\omega)\frac{d\omega}{\omega}\right| \\ &\leq \operatorname{long}(C_n)\sup_{z\in C_n}|zf(z)\varphi(z)\frac{1}{z}| \leq \frac{c_2 n}{c_1 n}M\varepsilon\end{aligned}$$

luego el módulo de la integral tiende hacia cero cuando $n \to \infty$. Observamos que si $a+k$ no es una singularidad de f, $\text{Res}(f \cdot \varphi, a+k) = \alpha_k f(a+k)$. Por tanto, tomando límites en (1.12) cuando $n \to \infty$ se tiene que existe

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=-\infty \\ a+k \text{ no es singularidad de } f}}^{\infty} \alpha_k f(a+k) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ a+k \text{ no es singularidad de } f}}^{n} \text{Res}(f\cdot\varphi, k+a) \\ &= -A.\end{aligned}$$

□

Lema 1.2.5. *La función $\pi \cot \pi z$ se puede expresar en forma de suma infinita como*

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-k^2}, \ \ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Demostración. Denotemos por $f(z) = \frac{1}{s^2-z^2}$ donde s no es un entero. Sus singularidades las encontramos en $z = s$ y $z = -s$. Los residuos de la función $\pi f(z) \cot \pi z$ en dichos puntos valen ambos $\frac{-\pi \cot \pi s}{2s}$:

$$\text{Res}(\pi f(z)\cot \pi z, s) = \lim_{z\to s}(z-s)\frac{\pi \cot \pi z}{(s^2-z^2)} = \lim_{z\to s}\frac{-\pi\cot\pi z}{(s+z)} = \frac{-\pi\cot\pi s}{2s},$$

$$\begin{aligned}\text{Res}(\pi f(z)\cot\pi z, -s) &= \lim_{z\to -s}(z+s)\frac{\pi\cot\pi z}{(s^2-z^2)} = \lim_{z\to -s}\frac{\pi\cot\pi z}{(s-z)} \\ &= \frac{\pi\cot -\pi s}{2s} = \frac{-\pi\cot\pi s}{2s}.\end{aligned}$$

Además es claro que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$.

Veamos que si denotamos $\varphi(z) = \pi\cot\pi z$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos C_n como el rectángulo de vértices $a_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)+in$, $b_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)-in$, $c_n = -\left(n+\frac{1}{2}\right)-in$ y $d_n = -\left(n+\frac{1}{2}\right)+in$ (figura 1.2), se cumplen las condiciones pedidas en el lema 1.2.4.

En efecto φ presenta polos simples en los puntos $z = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ y a mayores tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Res}(\varphi, k) &= \lim_{z\to k}(z-k)\frac{\pi\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z} = \pi\cos\pi n \lim_{z\to k}\frac{z-k}{\operatorname{sen}\pi z} \\ &= \pi\cos\pi n\lim_{z\to k}\frac{1}{\pi\cos\pi z} = \frac{\pi\cos\pi k}{\pi\cos\pi k} = 1\end{aligned}$$

para $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, es decir, $\alpha_k = \text{Res}(\varphi, k) = 1$ para cada $k \in \mathbb{Z}$

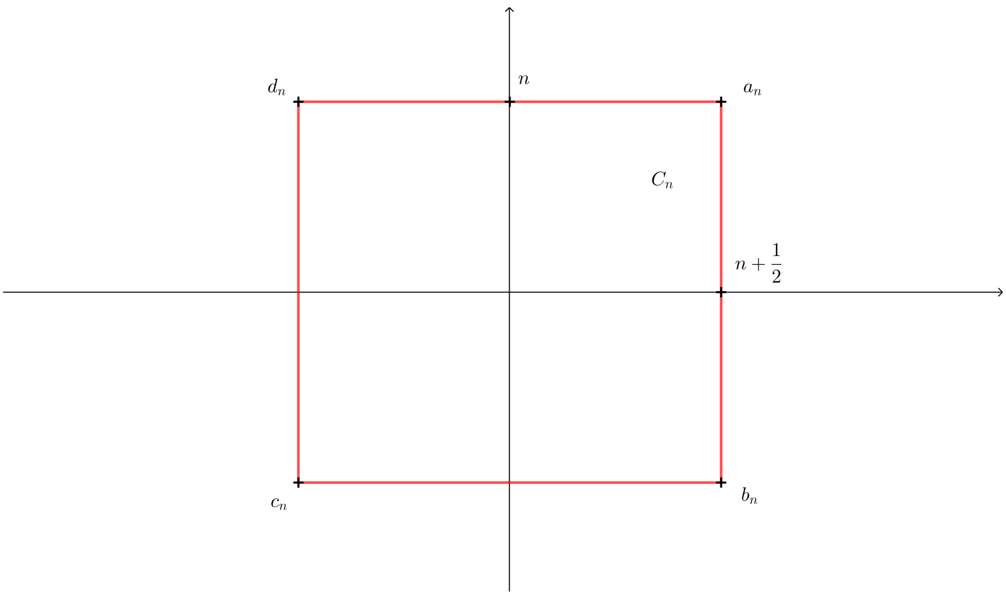

Figura 1.2: C_n

En cuanto a las curvas C_n se tiene que $\inf\{|z| : z \in C_n^*\} = n$, $\operatorname{long}(C_n) = 8n+2$ y que $\pm k$ está dentro de C_n si y solo si $0 \le k \le n$ y en ningún caso se da que k pertenezca a C_n^*. Nos falta verificar la última hipótesis sobre las curvas C_n, la que exige que exista una constante $M > 0$ tal que $|\varphi(z)| \le M$ para todo $z \in C_n^*, n \in \mathbb{N}$. Sabemos que si $z = x + iy$ se tiene que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y,$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y = \operatorname{sen}^2 x(1 + \operatorname{senh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y = \cos^2 x(1 + \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y, \end{aligned}$$

luego

$$|\varphi(z)|^2 = \pi^2 \frac{|\cos \pi z|^2}{|\operatorname{sen} \pi z|^2} = \pi^2 \frac{\cos^2 \pi x + \operatorname{senh}^2 \pi y}{\operatorname{sen}^2 \pi x + \operatorname{senh}^2 \pi y} \le \pi^2 \frac{1 + \operatorname{senh}^2 \pi y}{\operatorname{sen}^2 \pi x + \operatorname{senh}^2 \pi y}.$$

Observamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, los puntos del segmento horizontal de C_n contenido en el semiplano superior son de la forma $z = x + in$ y por tanto se tiene que

$$\frac{1 + \operatorname{senh}^2 \pi n}{\operatorname{sen}^2 \pi x + \operatorname{senh}^2 \pi n} \leq \frac{1 + \operatorname{senh}^2 \pi n}{\operatorname{senh}^2 \pi n} = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \pi n} + 1 \leq \frac{1}{\operatorname{senh}^2 \pi} + 1.$$

De manera análoga se demuestra que esta misma cota es válida para los puntos del segmento horizontal contenido en el semiplano inferior, puesto que el seno hiperbólico es una función impar. Para los puntos del segmento vertical de C_n cuya parte real es positiva se tiene que $z = \left(n + \frac{1}{2}\right) + iy$ y por lo tanto

$$\frac{1 + \operatorname{senh}^2 \pi y}{\operatorname{sen}^2 \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) + \operatorname{senh}^2 \pi y} = \frac{1 + \operatorname{senh}^2 \pi y}{1 + \operatorname{senh}^2 \pi y} = 1.$$

Lo mismo ocurre en el segmento vertical situado a la izquierda del eje imaginario, puesto que el seno es una función impar.

Se deduce entonces que $|\varphi(z)| \leq \pi \left(\frac{1}{\operatorname{senh}^2 \pi} + 1\right)^{1/2}$ para cada $z \in C_n^*, n \in \mathbb{N}$ y por tanto recapitulando se tiene que

$$A = -\frac{\pi \cot \pi s}{s},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k f(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s^2 - k^2} = \frac{1}{s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{s^2 - k^2}$$

y sustituyendo s por z se tiene que

$$\frac{\pi \cot \pi z}{z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - k^2}.$$

Obtenemos así la fórmula

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}.$$

$\square$

Lema 1.2.6. *La función* $\operatorname{sen} \pi z$ *se puede expresar en forma de producto infinito como*

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \ z \in \mathbb{C}.$$

Demostración. La función $\operatorname{sen}\pi z$ es una función entera que se anula en $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y como la serie

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente, por el teorema 1.1.5 se sabe que los ceros son de orden 1 y que existe una función entera φ de modo que

$$\operatorname{sen}\pi z = \exp\varphi(z) \cdot z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{n}\Big) \exp\frac{z}{n},\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Reordenando los factores y agrupando (ver teoremas A.0.7 y A.0.9) se tiene

$$\operatorname{sen}\pi z = \exp\varphi(z) \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Ahora queremos determinar la función $\varphi(z)$. Para ello tomamos la derivada logarítmica (ver corolario A.0.10) y, denotando por $g(z) = z\exp\varphi(z)$ y $f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\pi\cos\pi z}{\operatorname{sen}\pi z} &= \frac{g'(z)}{g(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{z\varphi'(z)\exp\varphi(z) + \exp\varphi(z)}{z\exp\varphi(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \\ &= \varphi'(z) + \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2}. \end{aligned}$$

Obtenemos por tanto la igualdad

$$\pi\cot\pi z = \varphi'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

de donde deducimos, por el lema 1.2.5, que $\varphi'(z) = 0$, por lo que $\varphi(z)$ es una constante y como consecuencia $\exp\varphi(z)$ es también una consante. Como sabemos que $\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z} = 1$ se deduce que

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}\pi z}{\pi z} = \lim_{z\to 0} \frac{\exp\varphi(z) \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}{\pi z} = \frac{\exp\varphi(0)}{\pi} = 1,$$

por lo que $\exp\varphi(z) = \pi$ como queríamos probar. $\square$

Proposición 1.2.7 (segunda relación fundamental para Γ o fórmula de los argumentos complementarios)**.** *La función Gamma satisface*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \csc \pi z, \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{1.13}$$

Demostración. La fórmula de Gauss (1.10) es equivalente a

$$z\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{(z+1)\cdots(z+n)}, \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}.$$

Además , si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$\Gamma(1-z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{1-z}}{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{-z}}{(1-z)(2-z)\cdots(n-z)}$$

y por tanto, si z $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} z\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(1-z^2)(2^2-z^2)\cdots(n^2-z^2)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(1-\frac{z^2}{1})\cdot 2^2(1-\frac{z^2}{2^2})\cdots n^2(1-\frac{z^2}{n^2})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1-\frac{z^2}{1})(1-\frac{z^2}{2^2})\cdots(1-\frac{z^2}{n^2})}. \end{aligned}$$

Por el lema 1.2.4 se tiene que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{z(1-\frac{z^2}{1})(1-\frac{z^2}{2^2})\cdots(1-\frac{z^2}{n^2})} = \frac{\pi}{\pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z},$$

como queríamos probar. □

1.3. Integral de Hankel.

En esta sección trataremos de encontrar una expresión de la función Gamma en forma de integral. Para ello tomamos a un número real positivo, n un entero mayor que a y $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Definimos el camino $L_n(a, \varphi)$ formado por los segmentos $\{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq n, \arg z = \varphi\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq n, \arg z = -\varphi\}$ y por el arco de circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = a, -\varphi \leq \arg z \leq \varphi\}$, recorrido en sentido positivo (figura 1.3).

Además haremos uso del conocido teorema de holomorfía bajo el signo integral, cuya demostración podemos encontrar en el libro de J. Dieudonné [2].

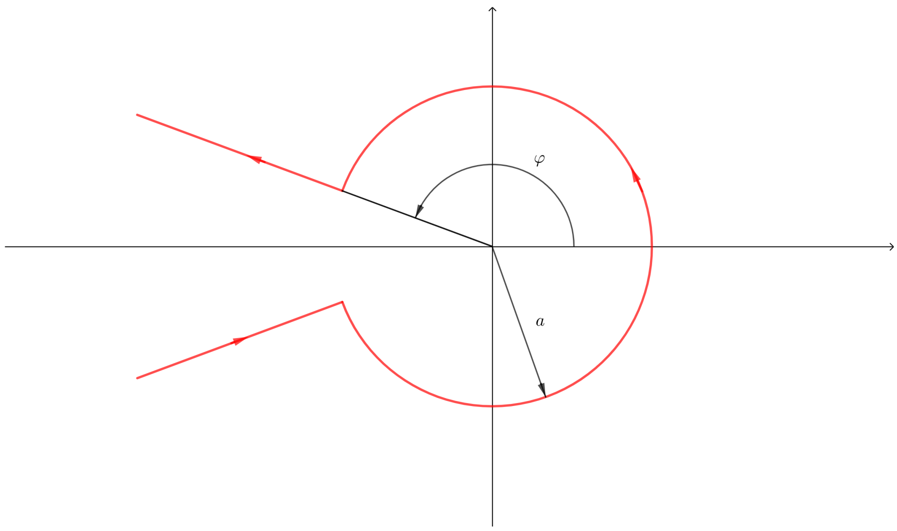

Figura 1.3: $L_n(a, \varphi)$

Teorema 1.3.1 (de holomorfía bajo el signo integral)**.** *Sea U un abierto de $\mathbb{C}$, sea A un subespacio medible de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \times A \to \mathbb{C}$. Supongamos que:*

(i) Para todo $z \in U$ la función $f_z : A \to \mathbb{C}$ definida por $f_z(x) = f(z, x)$ es medible Lebesgue.

(ii) Para todo $x \in A$ la función $f_x : U \to \mathbb{C}$ definida por $f_x(z) = f(z, x)$ es holomorfa en U.

(iii) Para todo $z_0 \in U$ existe un entorno V de z_0 contenido en U y una función $h : A \to [0, \infty)$ integrable Lebesgue en A tal que

$$|f(z, x)| \leq h(x) \text{ para todo } (z, x) \in V \times A.$$

Entonces, la función $F : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) = \int_A f(z, x)dx$$

es holomorfa en U, y además

$$F'(z) = \int_A \frac{\partial f}{\partial z}(z, x)dx$$

para cada $z \in U$.

Lema 1.3.2. *Consideramos la función $f(z) = e^z z^{-s}, s \in \mathbb{C}$, tomando la determinación principal del logaritmo para definir la potencia z^{-s}. Denotamos por $F_{n,\varphi}(s)$ la integral de $f(z)$ a lo largo de $L_n(a,\varphi)$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \lim_{\varphi\to\pi} F_{n,\varphi}(s)$ define una función $F(s)$ holomorfa en todo el plano complejo. Esta función límite es*

$$F(s) = 2i \sin \pi s \int_a^\infty e^{-r} r^{-s} dr + \int_C e^t t^{-s} dt$$

donde C denota la circunferencia de centro 0 y radio a recorrida en sentido positivo.

Demostración. La función $f(z)$ es holomorfa en el abierto principal $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z + |z| \neq 0\}$, es decir, todo el plano complejo salvo el semieje real negativo. Por lo tanto, denotando por C_φ el arco de circunferencia del camino $L_n(a,\varphi)$ se tiene que

$$\begin{aligned} F_{n,\varphi}(s) &= \int_{-n}^{-a} f(re^{i\varphi}) dr + \int_{C_\varphi} f(z) dz + \int_{-a}^{-n} f(re^{-i\varphi}) dr \\ &= \int_a^n e^{re^{-i\varphi}} (re^{-i\varphi})^{-s} dr + \int_{C_\varphi} e^t t^{-s} dt - \int_a^n e^{re^{i\varphi}} (re^{i\varphi})^{-s} dr \\ &= e^{is\varphi} \int_a^n e^{re^{-i\varphi}} r^{-s} dr + \int_{C_\varphi} e^t t^{-s} dt - e^{-is\varphi} \int_a^n e^{re^{i\varphi}} r^{-s} dr. \end{aligned}$$

Si ahora hacemos el límite cuando $\varphi \to \pi$, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue indica que

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi\to\pi} F_{n,\varphi}(s) &= e^{\pi i s} \int_a^n e^{-r} r^{-s} dr + \int_C e^t t^{-s} dt - e^{-\pi i s} \int_a^n e^{-r} r^{-s} dr \\ &= (e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}) \int_a^n e^{-r} r^{-s} dr + \int_C e^t t^{-s} dt \\ &= 2i \sin \pi s \int_a^n e^{-r} r^{-s} dr + \int_C e^t t^{-s} dt. \end{aligned}$$

Denotaremos dicho límite por $F_n(s)$.

Se tiene que $\psi : \Omega \times [a,n] \to \mathbb{C}$, definida como $\psi(s,r) = e^{-r} r^{-s}$, es una función continua y que para cada $r \in [a,n]$, la función $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$, definida por $\phi(s) = \psi(s,r)$, es holomorfa en Ω. Luego sabemos por el teorema de holomorfía bajo el signo integral que la función que envía $s \longmapsto \int_a^n \psi(s,r) dr = \int_a^n e^{-r} r^{-s} dr$ es holomorfa en Ω. De manera análoga se prueba que $\int_C e^t t^{-s} dt$, vista como función de $s \in \Omega$, es holomorfa en Ω, parametrizando la circunferencia C como $t = ae^{ir}, r \in [0, 2\pi]$. Por lo tanto deducimos que $F_n(s)$ es una función holomorfa.

Además, $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente convergente en cada conjunto compacto K de $\mathbb{C}$, como vemos a continuación. Existe $M > 0$ tal que $-M \leq \operatorname{Re} s \leq M$ para todo $s \in K$. Dado $\varepsilon > 0$, y puesto que la integral $\int_a^\infty e^{-r} r^M dr$ es convergente, existe $b > a$ tal que

$$\int_b^\infty e^{-r} r^M dr < \varepsilon.$$

Si tomamos $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n \geq b$, se tiene que para cada $s \in K$,

$$|F_m(s) - F_n(s)| = \left| \int_n^m e^{-r} r^{-s} dr \right| \leq \int_n^m e^{-r} r^M dr < \varepsilon.$$

De acuerdo con el teorema de convergencia de Weierstrass la sucesión $F_n(s)$ converge hacia una función límite $F(s)$ holomorfa en todo el plano complejo. Esta función es igual a

$$F(s) = 2i \sin \pi s \int_a^\infty e^{-r} r^{-s} dr + \int_C e^t t^{-s} dt.$$

□

Lema 1.3.3. *La función $F(s)$ del lema previo, que denotaremos por $F(s) = \int_{L(a)} e^t t^{-s} dt$, no depende de a.*

Demostración. Basta probar que $\int_{L_n(b,\varphi)} f(z)dz = \int_{L_n(a,\varphi)} f(z)dz$ para $a \neq b$ y, puesto que $F(s)$ es el límite de dichas funciones, se tendría entonces que $\int_{L(b)} e^t t^{-s} dt = \int_{L(a)} e^t t^{-s} dt$. Supongamos $a < b$ y consideremos la función

$$G(s) = \int_{L_n(b,\varphi)} e^t t^{-s} dt - \int_{L_n(a,\varphi)} e^t t^{-s} dt.$$

Dicha función es una integral a través del camino cerrado formado por los arcos de circunferencia $S_b = \{z \in \mathbb{C} : |z| = b, |\arg z| \leq \varphi\}$ recorrido en sentido positivo y $S_a = \{z \in \mathbb{C} : |z| = a, |\arg z| \leq \varphi\}$ recorrido en sentido negativo, y por los segmentos $\{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq b, \arg z = \varphi\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq b, \arg z = -\varphi\}$ (figura 1.4).

Puesto que dicho camino está contenido en un abierto simplemente conexo y el integrando en $G(s)$ es una función holomorfa en dicho abierto, podemos concluir que $G(s) = 0$ y pasando al límite se tiene que $\int_{L_n(b,\varphi)} f(z)dz = \int_{L_n(a,\varphi)} f(z)dz$ como queríamos probar. □

Lema 1.3.4. *Existe una única función $F(x)$ definida en el eje real positivo que satisface:*

(i) $F(1) = 1$;

(ii) $F(x+1) = xF(x)$, *para todo* $x > 0$;

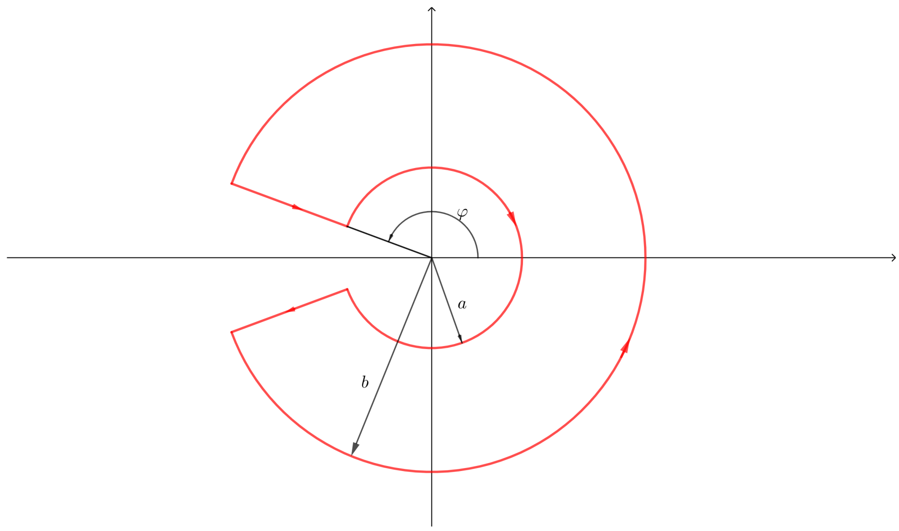

Figura 1.4: $L_n(b,\varphi) - L_n(a,\varphi)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{F(x+n)}{n^x F(n)} = 1$, *para todo* $x \in (0,1)$.

Demostración. La función Gamma cumple las tres condiciones, siendo la tercera de ellas la menos evidente, que se deduce a partir de la fórmula de Gauss (1.10). Si $x \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x\Gamma(n)} = \Gamma(x) \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n^x(n-1)!} = \Gamma(x)\frac{1}{\Gamma(x)} = 1.$$

Por tanto solo resta probar la unicidad.

Supongamos que $F(x)$ es una función que cumple las condiciones del enuciado. Por (ii) se tiene que

$$F(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)F(x),\ x > 0,$$

y teniendo además en cuenta (i)

$$F(n) = (n-1)! = \Gamma(n),\ n \in \mathbb{N},$$

luego F y Γ coinciden en $\mathbb{N}$. De (iii) deducimos que para cada $x \in (0,1)$ se tiene que

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x+n)}{n^x F(n)} = F(x) \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{(n-1)!n^x} = \frac{F(x)}{\Gamma(x)},$$

luego necesariamente $F(x) = \Gamma(x)$ en $(0,1)$. Por último, si $y \in (1,\infty)\setminus\mathbb{N}$, escribimos $y = x+n$, donde n es la parte entera de y, y $x = y-n \in (0,1)$. Entonces, sabemos ya que $F(x) = \Gamma(x)$, luego

$$\begin{aligned} F(y) &= F(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)F(x) \\ &= x(x+1)\cdots(x+n-1)\Gamma(x) = \Gamma(x+n) = \Gamma(y), \end{aligned}$$

y F y Γ coinciden en todo $(0, \infty)$. □

Proposición 1.3.5. *La función Gamma se puede expresar como*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \text{ Re } z > 0.$$

Demostración. Debido al principio de identidad, es suficiente probar la igualdad para $x \in (0, \infty)$.

En lo que sigue vamos a denotar $F(x) = \int_0^\infty e^t t^{x-1} dt$ y probaremos que $F(x)$ satisface las condiciones del lema 1.3.4 para obtener así $F(x) = \Gamma(x)$ en $(0, \infty)$.

Sustituyendo en la fórmula se obtiene fácilmente que

$$F(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{t\to\infty} = 1.$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} F(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = [-e^{-t} t^x]_{t=0}^{t\to\infty} + \int_0^\infty x e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = xF(x), \end{aligned}$$

luego queda probado (ii).

Falta únicamente por probar (iii). Se tiene que, si $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$F(x+n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x+n-1} dt,$$

y sustituyendo t por nt,

$$F(x+n) = \int_0^\infty e^{-nt} (nt)^{x+n-1} n dt = n^{x+n} \int_0^\infty e^{-nt} t^{x+n-1} dt.$$

Además, utilizando nuevamente la integración por partes se deduce que

$$F(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = [-e^{-t} t^{n-1}]_{t=0}^{t\to\infty} + (n-1) \int_0^\infty e^{-t} t^{n-2} dt =$$

$$= (n-1)F(n-1) = \cdots = (n-1)! = \Gamma(n).$$

Por lo tanto
$$\frac{F(x+n)}{F(n)n^x} = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-nt} t^{x+n-1} dt.$$

El objetivo ahora es mostrar que el límite del lado derecho de la igualdad vale 1 cuando $n \to \infty$. Tenemos las igualdades

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt; \quad \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt,$$

luego sustituyendo al igual que antes t por nt obtenemos

$$n^{-n}\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-nt} t^{n-1} dt, \tag{1.14}$$

$$n^{-n}\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-nt} t^n dt. \tag{1.15}$$

Integrando la igualdad

$$e^{-nt}t^{n-1} - e^{-nt}t^n = \frac{1}{n}\frac{d}{dt}(e^{-nt}t^n)$$

entre 0 y 1 tenemos que

$$\int_0^1 e^{-nt}t^{n-1}dt - \int_0^1 e^{-nt}t^n dt = \frac{1}{n}[e^{-nt}t^n]_{t=0}^{t=1} = n^{-1}e^{-n}.$$

Restando a la ecuación (1.14) la anterior igualdad obtenemos

$$\int_1^\infty e^{-nt}t^{n-1}dt + \int_0^1 e^{-nt}t^n dt = n^{-n}\Gamma(n) - n^{-1}e^{-n} \tag{1.16}$$

y sumando la ecuación (1.15) a la misma igualdad se deduce que

$$\int_0^1 e^{-nt}t^{n-1}dt + \int_1^\infty e^{-nt}t^n dt = n^{-n}\Gamma(n) + n^{-1}e^{-n}. \tag{1.17}$$

Suponiendo que $0 < x < 1$, para $0 < t < 1$ se tiene que

$$t^n < t^{x+n-1} < t^{n-1}$$

mientras que para $t > 1$ se tiene

$$t^{n-1} < t^{x+n-1} < t^n.$$

Por tanto si en los integrandos de (1.16) y (1.17) remplazamos t^n y t^{n-1} por t^{x+n-1} se obtienen las desigualdades

$$n^{-n}\Gamma(n) - n^{-1}e^{-n} < \int_0^\infty e^{-nt}t^{x+n-1}dt < n^{-n}\Gamma(n) + n^{-1}e^{-n}.$$

Multiplicando ahora cada miembro por $\frac{n^n}{\Gamma(n)}$ se tiene que

$$1 - \frac{n^n e^{-n}}{n!} < \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-nt}t^{x+n-1}dt < 1 + \frac{n^n e^{-n}}{n!}$$

y como además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} = 0,$$

podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-nt}t^{x+n-1}dt = 1.$$

Luego queda finalmente probado (*iii*) del lema 1.3.4. □

Teorema 1.3.6. *La inversa de la función Gamma se puede expresar en forma de integral como sigue:*

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L(a)} e^t t^{-z}dt, \;\; z \in \mathbb{C}.} \tag{1.18}$$

Esta expresión se denomina integral de Hankel.

Demostración. Consideramos la función

$$F(z) = 2i \sin \pi z \int_a^\infty e^{-r}r^{-z}dr + \int_C e^t t^{-z}dt = \int_{L(a)} e^t t^{-z}dt,$$

que por los lemas previos sabemos que es holomorfa en todo el plano complejo y no depende de a. Escribiendo z como $z = x + iy$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\int_C e^t t^{-z}\right| &\leq 2\pi a \sup_{t\in C}|e^t t^{-z}| = 2\pi a \sup_{t\in C}|e^t||t^{-x}t^{-iy}| \\ &\leq 2\pi a e^a \sup_{s\in[0,2\pi]}|(ae^{is})^{-x}||(ae^{is})^{-iy}| = 2\pi a e^a \sup_{s\in[0,2\pi]}|a^{-x}e^{-isx}||a^{-iy}e^{sy}| \\ &\leq 2\pi a e^a a^{-x}e^{2\pi|y|} \leq 2\pi a^{1-x}e^{a+2\pi|y|}.\end{aligned}$$

Suponiendo además que $x = \mathrm{Re}\ z < 1$ se tiene que

$$\lim_{a \to 0} 2\pi a^{1-x} e^{a+2\pi|y|} = 2\pi e^{2\pi|y|} \lim_{a \to 0} a^{1-x} = 0.$$

Ya que F no depende de a podemos hacer tender $a \to 0$ y por la proposición 1.3.5 obtenemos que

$$F(z) = 2i \sin \pi z \int_0^\infty e^{-t} t^{-z} dt = 2i \sin \pi z \Gamma(1-z).$$

Por la fórmula de los arguentos complementarios (1.13) se tiene que

$$F(z) = \frac{2\pi i}{\Gamma(z)}$$

es decir,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(a)} e^t t^{-z} dt, \mathrm{Re}\ z < 1,$$

y se concluye por el principio de identidad. □

1.4. Fórmula de Stirling.

Es bien conocida la fórmula de Stirling para números naturales que nos dice que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Debido a la relación entre el factorial y la función Gamma, sería lógico plantearse la existencia de una fórmula similar para dicha función evaluada en x real. En efecto, la proposición 1.3.5 nos permite demostrar la existencia de dicha fórmula. Para ello nos basamos en ideas extraidas del libro de Galindo, Sanz y Tristán [3] que a su vez detallan el desarrollo realizado en un artículo de R. Michel [5].

Proposición 1.4.1 (fórmula de Stirling para números reales)**.** *Se tiene la relación*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\Gamma(1+x)}{x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}} = 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

También se suele reescribir esta relación como

$$\Gamma(1+x) \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Demostración. Sea $x > 0$ un número real, la proposición 1.3.5 nos dice que

$$\Gamma(1+x) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt.$$

Realizando el cambio de variable $t = y\sqrt{x} + x$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\Gamma(1+x) &= \int_0^\infty e^{-(y\sqrt{x}+x)} (y\sqrt{x}+x)^x \sqrt{x} dy \\
&= x^x e^{-x} \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty \left(\frac{y}{\sqrt{x}} + 1 \right)^x e^{-y\sqrt{x}} dy.
\end{aligned}$$

Por tanto, para $y \in \mathbb{R}$, definimos la función $g_x(y)$ como

$$g_x(y) = \begin{cases} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-y\sqrt{x}} & \text{si } y > -\sqrt{x}, \\ 0 & \text{si } y \leq -\sqrt{x}, \end{cases}$$

y, puesto que $x > 0$, tenemos por tanto

$$\frac{\Gamma(1+x)}{x^x e^{-x} \sqrt{x}} = \int_{-\infty}^\infty g_x(y) dy. \tag{1.19}$$

Para probar el resultado vamos a estudiar lo que ocurre con la integral

$$\int_{-\infty}^\infty \left(g_x(y) - e^{-y^2/2} \right) dy$$

cuando hacemos tender $x \to \infty$. Para cada $x > 0$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{-\infty}^\infty \left(g_x(y) - e^{-y^2/2} \right) dy \right| \leq \int_{-\infty}^\infty \left| g_x(y) - e^{-y^2/2} \right| dy \\
&= \int_{-\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}/2} \left| g_x(y) - e^{-y^2/2} \right| dy + \int_{|y|>\sqrt{x}/2} \left| g_x(y) - e^{-y^2/2} \right| dy,
\end{aligned}$$

puesto que las integrales impropias involucradas son convergentes. Acotemos cada uno de estos sumandos por separado.

Comenzamos por el primero de ellos. Observamos que si $|y| < \sqrt{x}/2$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\left| g_x(y) - e^{-y^2/2} \right| = \left| \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^n e^{-y\sqrt{x}} - e^{-y^2/2} \right| = \left| e^{x \log\left(1+y/\sqrt{x}\right) - y\sqrt{x}} - e^{-y^2/2} \right| \\
&\leq e^{-y^2/2} \left| x \log\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right) - y\sqrt{x} + \frac{y^2}{2} \right| \exp\left(\left| x \log\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right) - y\sqrt{x} + \frac{y^2}{2} \right| \right)
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se deduce de que para cada para $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $\left|e^a - e^b\right| \leq e^b|a-b|e^{|a-b|}$.

Por otro lado, a partir del desarrollo de Taylor del logaritmo es sencillo probar que, para $|t| < 1$ se tiene que

$$\left|\log(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2\right| \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|t|^k}{k} \leq \frac{1}{3}\frac{|t|^3}{1-|t|}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned}\left|x\log\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right) - y\sqrt{x} + \frac{y^2}{2}\right| &= x\left|\log\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)^2\right| \\ &\leq \frac{x}{3}\frac{\left|y/\sqrt{x}\right|^3}{1-|y/\sqrt{x}|} = \frac{1}{3}\frac{|y|^3}{\sqrt{x}-|y|}.\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta que habíamos supuesto que $|y| < \sqrt{x}/2$, en esta última expresión podemos acotar el denominador de dos maneras, $\sqrt{x}-|y| \geq \frac{1}{2}\sqrt{x}$ y $\sqrt{x}-|y| \geq |y|$. Recapitulando obtenemos por tanto

$$\begin{aligned}\left|g_x(y) - e^{-y^2/2}\right| &\leq e^{-y^2/2}\frac{1}{3}\frac{|y|^3}{\sqrt{x}-|y|}\exp\left(\frac{1}{3}\frac{|y|^3}{\sqrt{x}-|y|}\right) \\ &\leq e^{-y^2/2}\frac{2}{3}\frac{|y|^3}{\sqrt{x}}\exp\left(\frac{1}{3}|y|^2\right) \leq \frac{|y|^3}{\sqrt{x}}e^{-y^2/2}e^{-y^2/3} = \frac{|y|^3}{\sqrt{x}}e^{-y^2/6}\end{aligned}$$

luego podemos acotar el primer sumando por

$$\int_{-\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}/2}\left|g_x(y) - e^{-y^2/2}\right|dy \leq \int_{-\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}/2}\frac{|y|^3}{\sqrt{x}}e^{-y^2/6}dy \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{x}/2}^{\sqrt{x}/2}|y|^3e^{-y^2/6}.$$

Este último término tiene sentido puesto que la correspondiente integral impropia es convergente y además observamos que su límite es 0 cuando $x \to \infty$.

Vamos con el segundo sumando. Tenemos que para cada $x > -1$ se verifica que

$$\log(1+t) - t \leq -\frac{5}{6}\frac{t^2}{2+t},$$

desigualdad que se deduce fácilmente de un estudio de la monotonía de la función que resulta al restar ambas expresiones. Teniendo en cuenta esta relación, para $y > -\sqrt{x}$ podemos deducir la desigualdad siguiente

$$\begin{aligned}\log\left(g_x(y)\right) &= x\log\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right) - y\sqrt{x} \\ &= x\left(\log\left(1+\frac{y}{\sqrt{x}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x}}\right) \leq -\frac{5}{6}\frac{y^2}{2+y/\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Si además $|y| > \sqrt{x}/2$ resulta que $5|y| > 2\sqrt{x} + |y|$, con lo que se obtiene

$$\log\left(g_x(y)\right) \leq -\frac{|y|}{6}\frac{5|y|}{2 + y/\sqrt{x}} \leq -\frac{|y|}{6}\frac{2\sqrt{x} + |y|}{2 + y/\sqrt{x}} = -\frac{|y|}{6}\sqrt{x} \leq -\frac{|y|}{6},$$

y tomando exponenciales a ambos lados de la desigualdad se tiene que

$$g_x(y) \leq e^{-|y|/6}.$$

Por lo tanto se deduce que

$$\begin{aligned}\int_{|y|>\sqrt{x}/2} \left| g_x(y) - e^{-y^2/2} \right| dy &\leq \int_{|y|>\sqrt{x}/2} g_x(y)dy + \int_{|y|>\sqrt{x}/2} e^{-y^2/2}dy \\ &\leq \int_{|y|>\sqrt{x}/2} e^{-|y|/6}dy + \int_{|y|>\sqrt{x}/2} e^{-y^2/2}dy.\end{aligned}$$

Puesto que las integrales $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|/6}dy$ y $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy$ son convergentes, se tiene que el último termino de la desigualdad converge hacia 0 cuando $x \to \infty$.

Hemos probado por lo tanto que

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(g_x(y) - e^{-y^2/2} \right) dy = 0.$$

Para concluir, de la igualdad (1.19) deducimos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(1+x)}{x^x e^{-x}\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_x(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy = \sqrt{2\pi}$$

y dividiendo por $\sqrt{2\pi}$ obtenemos el resultado deseado. □

Capítulo 2

Función de Mittag-Leffler.

En este capítulo presentaremos la definición de la función de Mittag-Leffler, así como una representación de esta en forma de integral y algunas propiedades, en especial el comportamiento asintótico de la función. Estos resultados nos servirán más adelante para poder definir la sumabilidad de Mittag-Leffler y obtener una prolongación analítica de la suma de una serie de potencias dada fuera de su disco de convergencia.

2.1. Definición

Definición 2.1.1. *Sea* $\alpha \in \mathbb{C}$*, la* función de Mittag − Leffler *se define como:*

$$\boxed{E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+\alpha n)}, \ z \in \mathbb{C}.} \tag{2.1}$$

En particular vamos a interesarnos en el caso en que α toma valores reales positivos.

Observamos además que para $\alpha = 1$ se tiene que $E_1(z) = \exp z$ y para $\alpha = 2$, $E_2(z) = \cosh \sqrt{z}$.

Necesitamos a continuación obtener información acerca del crecimiento exponencial de la función de Mittag-Leffler cuando z tiende hacia infinito. Para ello, referimos al lector al apéndice B, en el que se introduce el concepto de orden exponencial de crecimiento de una función entera, y cómo calcularlo a partir de los coeficientes del desarrollo de Taylor de la misma en el origen.

Proposición 2.1.2. *La función de Mittag-Leffler (función* (2.1)*) es una función entera de orden* $\frac{1}{\alpha}$*.*

Demostración. La fórmula de Stirling para números reales (proposición 1.4.1) nos dice que dado $x \in \mathbb{R}$

$$\Gamma(1+x) \approx x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}.$$

Sustituyendo x por $n\alpha$ se obtiene que $\Gamma(1+n\alpha) \approx (n\alpha)^{n\alpha}e^{-n\alpha}\sqrt{2\pi n\alpha}$ y por tanto aplicando el criterio de Cauchy-Hadamard se tiene que el radio de convergencia de la función $E_\alpha(z)$, que denotaremos por R, es

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{\Gamma(1+\alpha n)}\right|} = \lim_{n\to\infty}\sup \frac{1}{\left((n\alpha)^{n\alpha}e^{-n\alpha}\sqrt{2\pi n\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n\alpha)^{\alpha}e^{-\alpha}(2\pi n\alpha)^{\frac{1}{2n}}} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto obtenemos que $R = \infty$, es decir, que $E_\alpha(z)$ es una función holomofa en todo el plano complejo.

Para calcular el orden de la función $E_\alpha(z)$ aplicamos la fórmula (B.1) del apéndice B:

$$\begin{aligned}-\lim_{n\to\infty}\sup \frac{n\log n}{\log\left|\frac{1}{\Gamma(1+n\alpha)}\right|} &= \lim_{n\to\infty}\sup \frac{n\log n}{\log|\Gamma(1+n\alpha)|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{n\alpha\log n\alpha - n\alpha + log\sqrt{2\pi n\alpha}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{(n\alpha+\frac{1}{2})\log n\alpha - n\alpha + log\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$

Luego el orden de la función $E_\alpha(z)$ es $\frac{1}{\alpha}$. □

2.2. Representación de la función E_α en forma de integral.

Para realizar el estudio de la función de Mittag-Leffler vamos a considerar la integral de Hankel, obtenida en el capítulo precedente, como representación de la función gamma. Para ello, dados $a > 0$ y $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, vamos a modificar ligeramente el camino $L_n(a,\varphi)$ sustituyendo los segmentos de longitud $n-a$ por las semirrectas $\{t \in \mathbb{C} : a \leq |t|, \arg t = \varphi\}$ y $\{t \in \mathbb{C} : a \leq |t|, \arg t = -\varphi\}$. Denotaremos este nuevo camino por $L(a,\varphi)$ (figura 2.1).

Teorema 2.2.1. *La función de Mittag-Leffler se puede expresar en forma de integral como sigue:*

$$\boxed{E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L(a,\varphi)} \frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^\alpha - z}dt \ , \frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi, \ a > 0,} \tag{2.2}$$

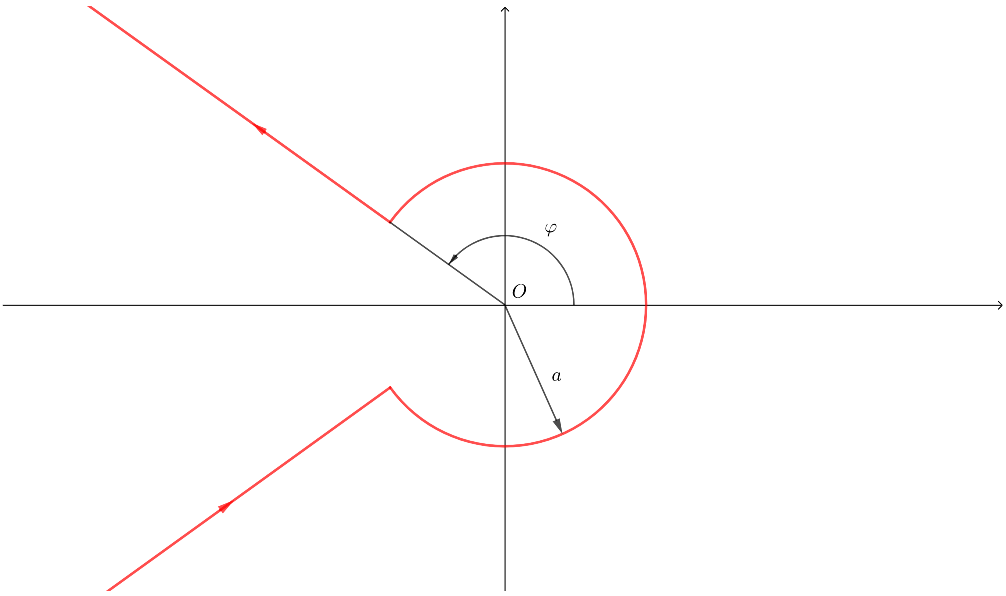

Figura 2.1: $L(a, \varphi)$

escogiendo a de forma que $a^\alpha > |z|$.

Demostración. Vamos a fijarnos en la parte del camino $L(a, \varphi)$ contenida en el plano superior. Sea A un arco tal que $|t| = R$ y $\varphi \leq \theta = \arg t \leq \pi$ con $R > a$, se tiene que

$$\int_A e^t t^{-s} dt = \int_\pi^\varphi e^{Re^{i\theta}} (Re^{i\theta})^{-s} Rie^{i\theta} d\theta.$$

Tomando módulos y teniendo en cuenta que $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$ y por tanto $\cos\theta$ es negativo y estrictamente decreciente en el intervalo $[\varphi, \pi]$, observamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_A e^t t^{-s} dt \right| &\leq (\pi - \varphi) R \sup_{\theta \in [\varphi, \pi]} \left| e^{Re^{i\theta}} (Re^{i\theta})^{-s} Rie^{i\theta} \right| \\ &\leq (\pi - \varphi) e^{R\cos\varphi} R^{2-\operatorname{Re} s} \sup_{\theta \in [\varphi, \pi]} \left| e^{-is\theta} \right| \end{aligned}$$

término que converge a 0 cuando $R \to \infty$.

Esta misma integral es igual a cero integrando a lo largo del camino cerrado formado por dos arcos de circunferencia de radios a y R respectivamente y tal que $\varphi \leq |\arg t| \leq \theta$, y por los dos segmentos que los unen (figura 2.2). En efecto dicho camino está contenido en un abierto simplemente conexo y el integrando es una función holomorfa en el mismo.

Este mismo razonamiento es válido para la parte del camino contenida en el plano situado por debajo del eje real. Por tanto podemos reescribir la integral de

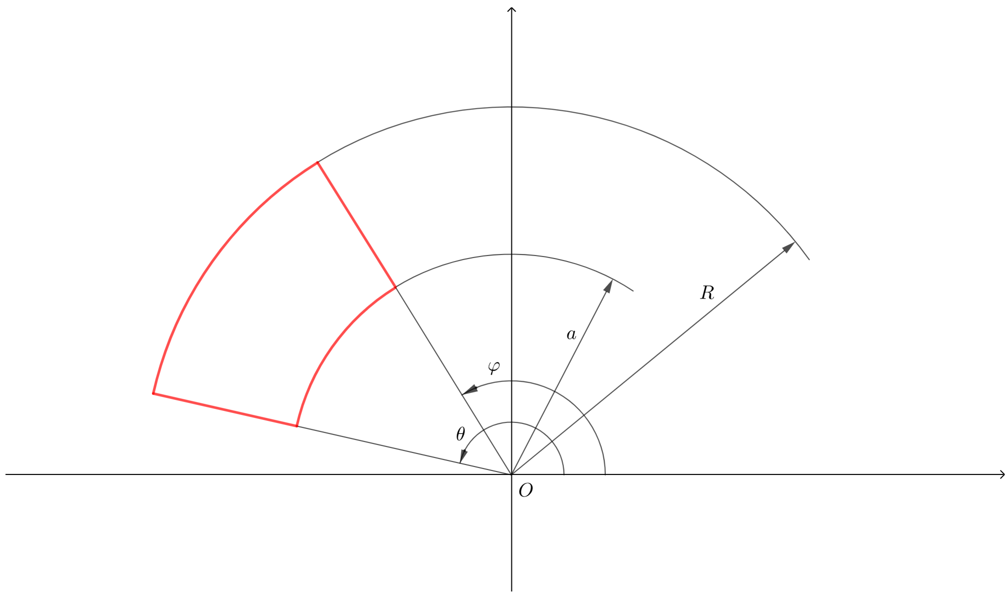

Figura 2.2: Camino auxiliar.

Hankel de la siguiente forma

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L(a,\varphi)} e^t t^{-z} dt.$$

Por tanto tenemos que

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i}\int_{L(a,\varphi)} e^t t^{-\alpha n-1} dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{L(a,\varphi)} \frac{e^t}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{t^\alpha}\right)^n dt.$$

Para justificar el cambio en el orden de sumación e integración observamos que para cada t en el soporte de la curva, se tiene que $|t| \geq a$ y por lo tanto $|t^\alpha| \geq a^\alpha$. Puesto que hemos escogido a de forma que $a^\alpha > |z|$, existe un $r < 1$ real positivo tal que

$$\left|\frac{z}{t^\alpha}\right| < r$$

luego podemos aplicar el criterio mayorante de Weierstrass ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n < \infty$$

y concluir por tanto que la serie converge uniformemente.

Por otro lado se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{t^\alpha}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{t^\alpha}} = \frac{t^\alpha}{t^\alpha - z}.$$

Por lo tanto
$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L(a,\varphi)} \frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^\alpha - z}dt.$$
□

2.3. Comportamiento asintótico de la función.

En esta sección vamos a denotar $r = |z|$ y $\theta = \arg z$. Supondremos además $r > 1$ ya que queremos estudiar el comportamiento de $E_\alpha(z)$ cuando $|z|$ toma valores grandes. Consideremos dos posiciones de $L(a,\varphi)$, en la primera tomamos $a = 1$ y en la segunda, $a > (2r)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Lema 2.3.1. *Sea $K = \{k \in \mathbb{Z} : -\frac{1}{2}\alpha\pi \leq \theta + 2k\pi \leq \frac{1}{2}\alpha\pi\}$ (con la posibilidad de que $K = \emptyset$), entonces*
$$E_\alpha(z) = E(z) + \sum_{k\in K} R_k \tag{2.3}$$
donde
$$E(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L(1,\varphi)} \frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^\alpha - z}dt,$$
$$R_k = \frac{1}{\alpha}e^{r^{1/\alpha}e^{i(\theta+2k\pi)/\alpha}}.$$

Demostración. Observamos que el integrando, visto como función de t, presenta polos simples en los puntos en los cuales $t^\alpha - z = 0$. Si escribimos $z = re^{i\theta}$ dichos polos son $p_k = r^{1/\alpha}e^{i(\theta+2k\pi)/\alpha}$ cuyo módulo es $|p_k| = r^{1/\alpha}$, por lo que tomando $a > (2r)^{\frac{1}{\alpha}}$ nos aseguramos de que ninguno de ellos pertenece al soporte del camino $L(a,\varphi)$.

Escojamos ahora un φ de modo que esté lo suficientemente próximo a $\frac{\pi}{2}$ y adecuado para que el camino $L(1,\varphi)$ tampoco pase por ningún polo del integrando. Para ello denotemos por H el complementario en $\mathbb{Z}$ del conjunto K y tomemos φ de modo que $0 < \varphi - \frac{\pi}{2} < \operatorname{dist}\left(\frac{\theta+2\pi H}{\alpha}, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Consideremos por tanto el abierto U limitado por la parte no común de los soportes de ambos caminos mencionados anteriormente (figura 2.3) y observamos que
$$E_\alpha(z) - E(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^\alpha - z}dt.$$

Por el teorema de los residuos se tiene que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^\alpha - z}dt = \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i\sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^\alpha - z}, p_k\right)\right)$$

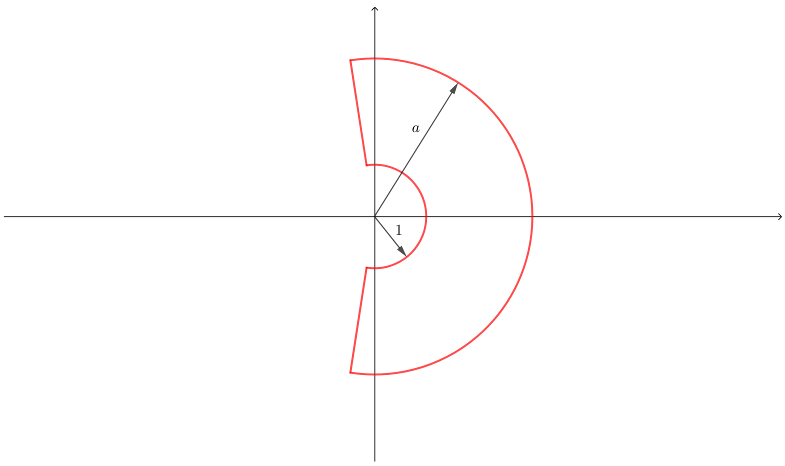

Figura 2.3: Abierto U.

teniendo en cuenta únicamente los p_k contenidos en U. Como hemos supuesto que $r > 1$, se tiene que $1 < |p_k| = r^{1/\alpha} < (2r)^{1/\alpha}$. Por tanto, para que estos pertenezcan a U nos falta exigir que $|\arg t| \leq \varphi$, que habíamos elegido próximo a $\frac{1}{2}\pi$. Es decir, se necesita que $-\frac{1}{2}\pi \leq (\theta + 2k\pi)/\alpha \leq \frac{1}{2}\pi$.

Para concluir solo resta calcular el valor de los residuos en cada polo contenido en U.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^\alpha - z}, p_k\right) &= \lim_{t\to p_k} (t-p_k)\frac{e^t t^{\alpha-1}}{t^\alpha - z} \\ &= \lim_{t\to p_k} \frac{e^t t^{\alpha-1} + (t-p_k)e^t t^{\alpha-1} + (t-p_k)e^t(\alpha-1)t^{\alpha-2}}{\alpha t^{\alpha-1}} \\ &= \frac{e^{p_k}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} e^{r^{1/\alpha} e^{i(\theta+2k\pi)/\alpha}}\end{aligned}$$

aplicando la regla de L'Hôpital en la segunda igualdad. □

Proposición 2.3.2. *El módulo de $zE(z)$ permanece acotado cuando z tiende hacia infinito a través de un rayo que parte del origen.*

Demostración. Las semirrectas de $L(1, \varphi)$ pueden ser escogidas de tal forma que los puntos $z^{1/\alpha}$ no pertenezcan a ellas cuando z varía a lo largo del rayo mencionado anteriormente, tomando φ de forma que $|\alpha\varphi| \neq \arg z$. Como consecuencia, $\frac{t^\alpha}{z}$ tendrá argumento constante distinto de 0 cuando t recorra dichas semirrectas.

Además se tiene que $|t| = 1$ para todo t perteneciente a la parte circular de $L(1, \varphi)$, luego $|t^\alpha| = 1$. Por lo tanto para $|z| \geq R > 1$ vamos a tener que $\left|\frac{t^\alpha}{z}\right| \leq \frac{1}{R} < 1$.

Por lo tanto para cada $t \in L(1, \varphi)$ se tiene que $t^\alpha \neq z$ y la expresión $\frac{t^\alpha}{z} - 1$ no se anula. De hecho $\left|\frac{t^\alpha}{z} - 1\right|$ está acotado inferiormente por una constante $m > 0$.

En efecto, si $M, R > 0$ son números reales tales que $\left|\frac{t^\alpha}{z}\right| \geq R > 1$ para $|t| > M$ se tiene que $\left|\frac{t^\alpha}{z} - 1\right| \geq 1 - \frac{1}{R} > 0$. Además, la parte de $L(1, \varphi)$ tal que $|t| \leq M$ es un compacto de $\mathbb{C}$, por lo que $\left|\frac{t^\alpha}{z} - 1\right|$ alcanza un mínimo que ha de ser forzosamente mayor que 0 ya que hemos visto que dicha expresión no se anula en ningún punto de $L(1, \varphi)$.

Además

$$zE(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(1,\varphi)} \frac{e^t t^{\alpha-1}}{\frac{t^\alpha}{z} - 1} dt$$

y el módulo del integrando está acotado superiormente por el módulo de $\frac{e^t t^{\alpha-1}}{m}$ que es una función integrable. Aplicando entonces el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\lim_{z\to\infty} zE(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(1,\varphi)} \lim_{z\to\infty} \frac{e^t t^{\alpha-1}}{\frac{t^\alpha}{z} - 1} dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L(1,\varphi)} e^t t^{\alpha-1} dt = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$$

donde reconocemos rápidamente la integral de Hankel. □

Proposición 2.3.3. *Si $0 < \alpha < 2$ se tiene que:*

(i) Si $\frac{1}{2}\alpha\pi < |\arg z| \leq \pi$ entonces $zE_\alpha(z)$ es acotada. En particular

$$\lim_{|z|\to\infty} E_\alpha(z) = 0.$$

(ii) Si $|\arg z| < \frac{1}{2}\alpha\pi$ entonces $E_\alpha(z)$ se comporta como $\exp z^{1/\alpha}$ para valores gandes de $|z|$. En particular

$$\lim_{|z|\to\infty} \alpha e^{-z^{1/\alpha}} E_\alpha(z) = 1.$$

(iii) Si $\arg z = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ entonces $E_\alpha(z)$ se comporta como $\exp z^{1/\alpha}$ para valores gandes de $|z|$. En particular

$$\lim_{|z|\to\infty} |E_\alpha(z)| = \frac{1}{\alpha}.$$

Demostración. (*i*) Veamos que si $\frac{1}{2}\alpha\pi < |\arg z| \leq \pi$ el conjunto K del lema 2.3.1 es vacío. Puesto que $0 < \alpha < 2$ se tiene que $\left[-\frac{1}{2}\alpha\pi, \frac{1}{2}\alpha\pi\right] \subset [-\pi, \pi]$ estrictamente. Supongamos que $\arg z > 0$. Como $\arg z \leq \pi$ se tiene que $\arg z - 2\pi \leq -\pi$. En el caso en que $\arg z < 0$ se razona de forma análoga.

Por lo tanto la función $E_\alpha(z)$ coincide con $E(z)$, luego se tiene que

$$\lim_{|z|\to\infty} E_\alpha(z) = \lim_{|z|\to\infty} E(z) = 0.$$

(*ii*) Cuando $|\arg z| < \frac{1}{2}\alpha\pi$ solamente $k = 0$ cumple la condición requerida para pertenecer al conjunto K. Por tanto se tiene que $E_\alpha(z) = E(z) + \frac{1}{\alpha}e^{z^{1/\alpha}}$ luego

$$\lim_{|z|\to\infty} \alpha e^{-z^{1/\alpha}} E_\alpha(z) = \lim_{|z|\to\infty} \left(\alpha e^{-z^{1/\alpha}} E(z) + 1\right) = 1.$$

(*iii*) En las semirrectas $\arg z = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ tenemos que, al igual que en el caso anterior, solamente $k = 0$ pertenece al conjunto K. Además, denotando por $r = |z|$ se tiene que

$$z^{1/\alpha} = \left(re^{\pm i\frac{1}{2}\alpha\pi}\right)^{1/\alpha} = r^{1/\alpha}e^{\pm i\frac{1}{2}\pi} = \pm ir^{1/\alpha}.$$

Por tanto $e^{-z^{1/\alpha}} = e^{\pm ir^{1/\alpha}} = \left(\cos r^{1/\alpha} \pm \operatorname{sen} r^{1/\alpha}\right)^{-1}$, luego se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{|z|\to\infty} \alpha e^{-z^{1/\alpha}} E_\alpha(z) &= \lim_{r\to\infty} \alpha(\cos r^{1/\alpha} \pm \operatorname{sen} r^{1/\alpha})^{-1} E_\alpha(z) \\ &= \lim_{r\to\infty} \alpha(\cos r^{1/\alpha} \pm \operatorname{sen} r^{1/\alpha})^{-1} E(z) + 1 = 1.\end{aligned}$$

Además observamos que $\left|\alpha(\cos r^{1/\alpha} \pm \operatorname{sen} r^{1/\alpha})^{-1} E_\alpha(z)\right| = \alpha\, |E_\alpha(z)|$ y por tanto

$$\lim_{|z|\to\infty} |E_\alpha(z)| = \frac{1}{\alpha}.$$

□

Proposición 2.3.4. *En el caso en que $\alpha = 2$ se tiene que:*

(*i*) *Si $\arg z \neq \pi$ la función $E_\alpha(z)$ se comporta como $\exp z^{1/\alpha}$ cuando $|z|$ toma valores grandes.*

(*ii*) *En el semieje real negativo la función $E_\alpha(z)$ es acotada.*

Demostración. El caso $\alpha = 2$ no ofrece dificultades ya que como vimos al comienzo del capítulo se tiene que $E_2(z) = \cosh\sqrt{z}$.

(*i*) Si $\arg z \neq \pi$ estamos en el caso (ii) de la proposición anterior con $\alpha = 2$, por lo que

$$\lim_{|z|\to\infty} 2e^{-z^{1/2}} E_2(z) = 1.$$

(*ii*) En el semieje real negativo, se tiene que $z = -r$, con $r > 0$ real, luego tenemos

$$\cosh\sqrt{-r} = \cosh i\sqrt{r} = \cos\sqrt{r}.$$

Por lo tanto $E_\alpha(z)$ es acotada.

□

Podemos concluir por tanto que para valores grandes de $|z|$ la función $E_\alpha(z)$ se comporta como $\exp z^{1/\alpha}$ si $-\frac{1}{2}\alpha\pi \leq \arg z \leq \frac{1}{2}\alpha\pi$ y en caso contrario tiende a cero.

Capítulo 3

Sumabilidad de Borel y de Mittag-Leffler.

Una vez llegados a este punto tenemos la información suficiente para abordar el objetivo principal del trabajo: prolongar analíticamente la función suma de una serie de potencias centrada en 0 por una función holomorfa en un conjunto estrellado, mediante los métodos de Borel y Mittag-Leffler. Este estudio se podría ampliar al de cualquier serie de potencias.

Comenzaremos por dar algunas definiciones sobre lo que entendemos por prolongación analítica y prolongación analítica radial de una serie, así como por estrella principal y punto barrera. Presentaremos también algunos ejemplos para poder comprender y asentar bien estos conceptos, entre los que se encuentra el de la serie geométrica, que destaca por su sencillez y el amplio conocimiente que se tiene de ella.

Una vez adquirido este conocimiento comenzaremos a estudiar la sumabilidad de Borel, que es un caso particular de la sumabilidad de Mittag-Leffler, el cual nos ayudará a introducir y enteder esta última. Para ello definiremos primero la suma y el polígono de Borel, acto seguido estudiaremos la sumabilidad de Borel a través de segmentos y veremos cómo obtener una prolongación analítica radial de una serie de potencias, y por último daremos un resultado que nos permite prolongar analíticamente una serie de potencias, esta vez globalmente en todo el polígono de Borel.

Para finalizar el capítulo y con ello el objetivo del trabajo, realizaremos estos mismos pasos con la sumabilidad de Mittag-Leffler, introduciendo conceptos análogos a los de suma y polígono de Borel, pero esta vez en un ambiente más general. Estudiaremos también la sumabilidad a lo largo de un segmento y la prolongación analítica radial. Para concluir, daremos un resultado que resumirá el modo de prolongar de forma analítica una serie de potencias a un conjunto maximal denominado estrella de Mittag-Leffler.

3.1. Estrella principal de una función.

3.1.1. Prolongación analítica radial.

Sea f una función holomorfa en un abierto conexo $\mathcal{R}$ que contiene al origen y que admite un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.1}$$

con un radio de convergencia positivo. El principio de identidad nos asegura que es la única función holomorfa definida en $\mathcal{R}$ que coincide con la suma de la serie (3.1) en un entorno del origen. Por tanto las propiedades de f están totalmente determinadas por las de la serie.

Definición 3.1.1. *(i) Se dice que la función f es una* prolongación analítica *de la serie* (3.1) *en el abierto $\mathcal{R}$.*

(ii) Se denomina estrella principal *de la serie* (3.1) *(o de la función cuyo desarrollo de Taylor en el origen es el dado por dicha serie) al mayor abierto estrellado respecto del origen que contiene el disco abierto de convergencia de la serie* (3.1) *y tal que existe una función holomorfa en dicho abierto que coincida con la suma de la serie dentro del disco abierto de convergencia.*

(iii) Se dice que un punto $a \in \mathbb{C}$ es un punto barrera *de la serie* (3.1) *(o de la correspondiente función f) si no pertenece a la estrella principal de la serie y la semirrecta que parte del origen y pasa por a cumple que si z es un punto contenido en dicha semirrecta que se encuentra más próximo al origen que a, entonces z pertenece a la estrella principal de la serie.*

(iv) Sea $z \neq 0$ un punto de la estrella principal o un punto barrera. Una función holomorfa en todos los puntos del segmento $(O, z) = \{tz : t \in (0, 1)\}$, es decir, en un abierto que contiene dicho segmento, que coincide con la suma de la serie (3.1) *en la intersección de dicho abierto con un entorno del origen se denomina una* prolongación analítica radial *de la serie a través del segmento Oz.*

Proposición 3.1.2. *No es posible extender una serie radialmente más allá de un punto barrera.*

Demostración. Sea $z = a$ un punto barrera de la serie y f una prolongación analítica radial de la serie a través del segmento Oa. Si dicha prolongación se extendiera mas allá de a, existiría una función φ holomorfa en el punto a y en todos los puntos

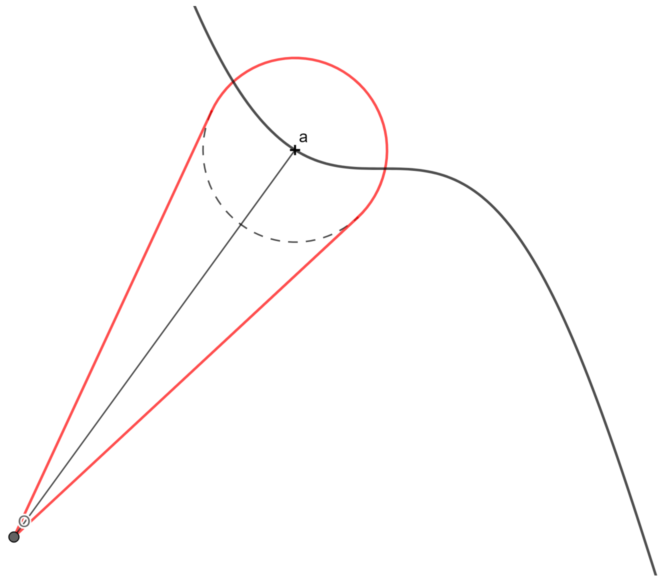

Figura 3.1: Punto barrera

entre el origen y a que coincidiera con f en un entorno del origen, y podríamos definir una función g que coincidiera con f dentro de su abierto de definición y con φ en el abierto en el cual φ es holomorfa.

Tomando un disco lo suficientemente pequeño centrado en a, podemos ampliar la estrella principal por un abierto convexo (que se superpone a la estrella principal), delimitado por las tangentes al disco trazadas desde el origen y por un arco de circunferencia que contiene puntos que no pertenecen a la estrella (figura 3.1), en contra de la definición de estrella principal.

$\square$

Proposición 3.1.3. *Supongamos que el radio de convergencia R de la serie* (3.1) *es real y positivo. Sea z_0 un punto de la circunferencia de convergencia (es decir, de la frontera del disco abierto de convergencia) tal que*

$$\lim_{r\to 1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (rz_0)^n\right) = \lim_{r\to 1} f(rz_0) = \infty,$$

entonces z_0 es un punto barrera.

Demostración. Supongamos que z_0 no es un punto barrera. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una función h holomorfa en $B(z_0, \varepsilon)$ que coincide con f en los puntos de $B(0, R) \cap B(z_0, \varepsilon)$. Por lo tanto para r suficientemente próximo a 1 se tiene que rz_0 pertenece al disco $B(z_0, \varepsilon)$ y por tanto

$$\lim_{r\to 1} f(rz_0) = \lim_{r\to 1} h(rz_0) = h(z_0) \in \mathbb{C},$$

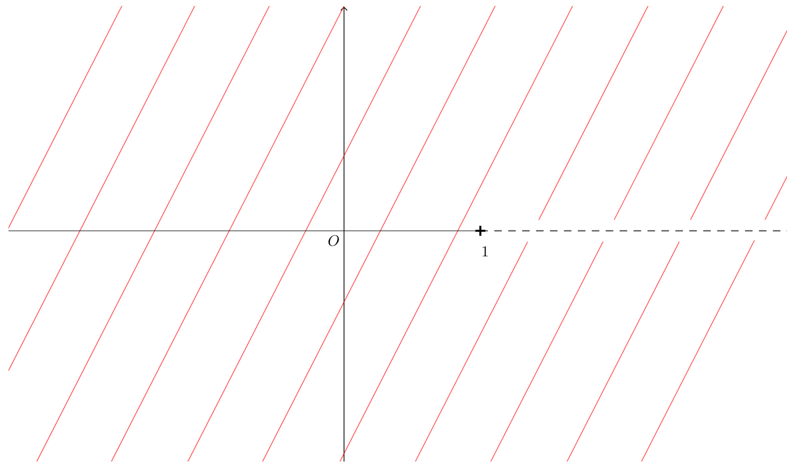

Figura 3.2: Estrella principal de la serie geométrica: $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$

lo cual es absurdo ya que habíamos supuesto que dicho límite valía ∞. $\square$

Nota 3.1.4. *De aquí en adelante, siempre que escribamos disco de convergencia, estaremos refiriéndonos al disco abierto y escribiremos circunferencia de convergencia para referirnos a la frontera del disco abierto de convergencia.*

3.1.2. Estrella principal de la serie geométrica.

Encontramos un ejemplo muy sencillo de estrella principal en la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Esta serie converge en el disco $|z| < 1$, y su suma,

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \ |z| < 1,$$

tiende hacia infinito cuando $z \to 1$ a través del segmento que parte del origen, por lo que la proposición 3.1.3 nos asegura que el punto $z = 1$ es un punto barrera. En particular, toda prolongación analítica de la serie tiende hacia infinito cuando $z \to 1$ desde el interior del disco unidad.

Además, la función f es obviamente holomorfa cuando se la considera definida en todo el plano complejo salvo el punto barrera $z = 1$, por lo que concluimos que la estrella principal de la serie geométrica coincide con el plano complejo excluyendo la semirrecta que va desde 1 hasta $+\infty$ (figura 3.2).

Ejemplo 3.1.5.

Cabe destacar que en un punto barrera situado en la circunferencia de convergencia de una serie, dicha serie no es necesariamente divergente. Es el caso de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{3.2}$$

que es convergente en $z = 1$ pero su derivada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

tiende hacia infinito cuando $z \to 1$ en el segmento que une 0 y 1. La serie (3.2) puede ser extendida en la misma estrella que la serie geométrica por la función

$$\int_0^z \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{1-\omega} d\omega$$

siendo el camino de integración el segmento Oz, con z un número complejo no perteneciente a la semirrecta real que parte de 1 hacia $+\infty$. En efecto, para todo número complejo tal que $|z| < 1$ se tiene que

$$-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

donde log es la determinación principal del logaritmo. Por tanto deducimos que la derivada de la serie (3.2) es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{1}{z}\left(-\log(1-z)\right) = \frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z}, \ |z| < 1,$$

fórmula que hace evidente la afirmación anterior acerca del límite de la serie derivada en el punto 1. Además, se deduce que la serie (3.2) es igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = C + \int_0^z \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{1-\omega} d\omega,$$

donde la integral se calcula sobre el segmento de extremos 0 y z, y donde C es el valor de la serie cuando evaluamos en $z = 0$, luego se tiene que $C = 0$ y por tanto concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = \int_0^z \frac{1}{\omega} \log \frac{1}{1-\omega} d\omega.$$

La función a la derecha de la igualdad es de hecho holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$, lo que prueba que este conjunto es la estrella principal de la serie (3.2).

3.2. Existencia de puntos barrera.

3.2.1. Existencia de al menos un punto barrera.

Veamos que no es posible extender una serie de potencias en cada punto de la circunferencia de convergencia.

Proposición 3.2.1. *Supongamos que la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.3}$$

tiene radio de convergencia finito y no nulo. Entonces tiene al menos un punto barrera en su circunferencia de convergencia.

Demostración. Sea $R > 0$ el radio de convergencia de la serie, f la función suma en $B(0, R)$, y supongamos que no existe ningún punto barrera tal que $|z| = R$. Veamos que, entonces, existe una prolongación analítica de f en un abierto que contiene a la circunferencia de convergencia. Por hipótesis, en todo punto z_0 de la circunferencia la función f puede ser prolongada analíticamente por una serie de potencias de $z - z_0$, de radio de convergencia $R(z_0) > 0$. Así, la circunferencia $|z| = R$ puede ser recubierta por un conjunto de discos abiertos y, puesto que es un conjunto compacto, se puede extraer un subrecubrimiento finito. La frontera del abierto obtenido ampliando el disco $|z| < R$ por el interior de estos discos está separada de la curva $|z| = R$ por una distancia estrictamente positiva, ya su complementario es un cerrado y la curva $|z| = R$ es un compacto, y son conjuntos disjuntos. Por lo tanto podemos encontrar un abierto $|z| < R'$ con $R' > R$ donde la prolongación analítica de f es holomorfa. Como consecuencia la serie de Taylor de f en $z = 0$, que coincide con la de su prolongación, tiene un radio de convergencia superior a R, en contra de la suposición inicial de que el radio de convergencia de la serie (3.3) era igual a R. □

Como consecuencia del resultado previo podemos deducir el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2 (de Pringsheim-Vivanti)**.** *Si el radio de convergencia de la serie* (3.3) *es la unidad y todos los coeficientes son números reales no negativos, entonces* $z = 1$ *es un punto barrera.*

Demostración. Supongamos, razonando por redicción al absurdo, que $z = 1$ no es un punto barrera y denotemos por $f(z)$ la suma de la serie (3.3). Por tanto existe $r > 0$ tal que f admite una prolongación analítica al conjunto $B(0, 1) \cup B(1, r)$, el cual contiene un disco centrado en $\frac{1}{2}$ y de radio $R > \frac{1}{2}$ (figura 3.3).

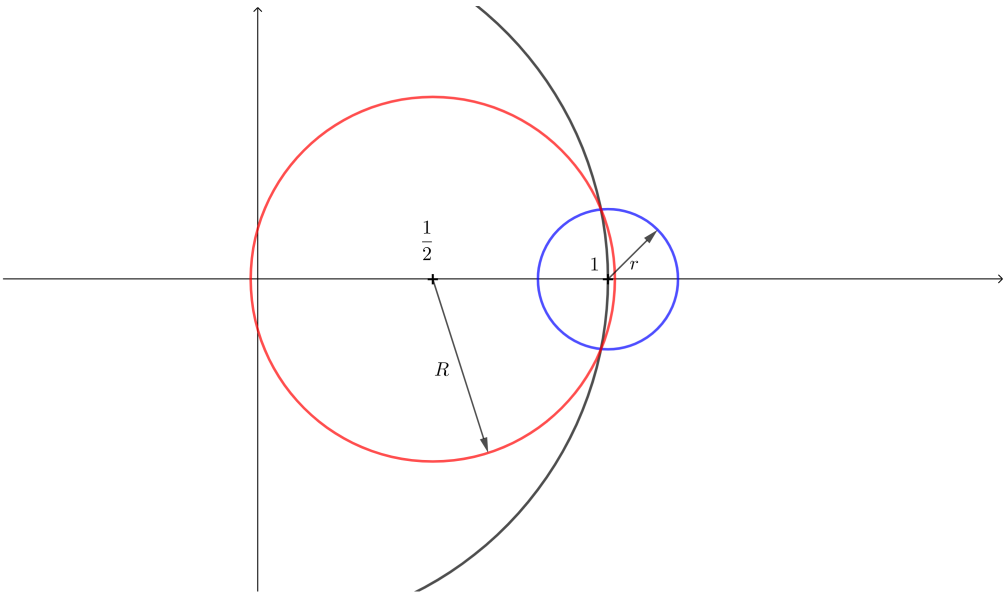

Figura 3.3: Conjunto de prolongación de f a través del punto 1.

Por lo tanto el desarrollo de Taylor de f centrado en $\frac{1}{2}$ es de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!}\left(z-\frac{1}{2}\right)^n$$

y es convergente para $|z-\frac{1}{2}|<R$ con $R>\frac{1}{2}$.

Vamos a probar que para cada punto de la circunferencia centrada en 0 de radio $\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}e^{i\theta}$ con $0\leq\theta<2\pi$, el radio de convergencia de la serie de Taylor de f centrada en $\frac{1}{2}e^{i\theta}$ es al menos R. Como todos los coeficientes de la serie son no negativos, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\frac{(n+k)!}{k!}\frac{1}{2^k}e^{ik\theta}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{n+k}\frac{(n+k)!}{k!}\frac{1}{2^k}e^{ik\theta}\right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\frac{(n+k)!}{k!}\frac{1}{2^k} = f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Deducimos por tanto que para cada $\theta\in[0,2\pi)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)}{n!}\left(z-\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)^n$$

es convergente en el abierto $|z-\frac{1}{2}e^{i\theta}|<R_\theta$, con $R_\theta\geq R>\frac{1}{2}$.

Puesto que $e^{i\theta}$ es un punto de dicho abierto, deducimos que no es un punto barrera de f. Al ser θ arbitrario, llegamos a una contradicción con la proposición 3.2.1 $\square$

3.2.2. Frontera natural.

Definición 3.2.3. *Un arco formado únicamente por puntos barrera se denomina una* frontera natural.

A continuación, vamos a presentar algunos ejemplos de series de potencias que tienen a la circunferencia de convergencia como su frontera natural. El primero de ellos pertenece a la clase de las llamadas series de potencias lacunares, que se caracterizan por presentar muchos coeficientes nulos en su desarrollo y que tienen esta propiedad de frontera natural siempre que se espacien adecuadamente los términos no nulos.

Lema 3.2.4. *Los puntos barrera de la circunferencia de convergencia son un cerrado en la misma. En otras palabras, todo punto de acumulación de puntos barrera es barrera.*

Demostración. Para probar este aserto vamos a demostrar que el complementario del conjunto de puntos barrera en la circunferencia de convergencia es un abierto.

Sea z un punto de la circunferencia de convergencia que no es un punto barrera. Existe entonces $r > 0$ tal que la serie en cuestión se puede prolongar analíticamente a través del disco $B(z, r)$, y por tanto dicho disco no contiene ningún punto barrera. $\square$

Proposición 3.2.5. *La circunferencia de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \tag{3.4}$$

es una frontera natural.

Demostración. Observamos que el radio de convergencia de dicha serie es 1 por la fórmula de Cauchy-Hadamaard. Denotemos por $f(z)$ la suma de la serie (3.4), la cual satisface la ecuación

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n} + f(z^{2^m}) \tag{3.5}$$

para m un entero positivo. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n} + f(z^{2^m}) &= \sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(z^{2^m}\right)^{2^n} = \sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^m 2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{m+n}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema 3.2.2 observamos que la serie (3.4) presenta un punto barrera en $z = 1$, por lo que todos los puntos de la forma $z = e^{i\theta}$ con $\theta = \frac{2k\pi}{2^m}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{m-1}$ para todo m entero positivo son puntos barrera. En efecto, sabemos que $\lim_{r\to 1} f(r) = \infty$, por lo que teniendo en cuenta la relación (3.5) se tiene que

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} \left(\sum_{n=0}^{m-1} (re^{i\theta})^{2^n} + f((re^{i\theta})^{2^m}) \right) = \sum_{n=0}^{m-1} (e^{i\theta})^{2^n} + \lim_{r\to 1} f(r^{2^m}) = \infty$$

y la proposición 3.1.3 nos dice que $z = e^{i\theta}$ es un punto barrera.

Deducimos que el conjunto de puntos barrera es denso en la circunferencia de convergencia y por el lema anterior sabemos que todo punto de acumulación de puntos barrera es un punto barrera, por lo que la circunferencia de convergencia de la serie (3.4) es una frontera natural. $\square$

Corolario 3.2.6. *La estrella principal de la serie* (3.4) *es el interior del disco unidad.*

En el segundo ejemplo vamos a presentar la serie de potencias denominada serie de Lambert, dada en este caso por una serie no lacunar.

Lema 3.2.7. *Se tiene la igualdad entre series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n z^n$$

donde τ_n denota el número de divisores positivos de n.

Demostración. Si denotamos $f_m(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{z^k}{1-z^k}$, se tiene que para cada $m \in \mathbb{N}$, f_m es holomorfa en el disco de centro el origen y radio la unidad, y la sucesión $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente en todos los compactos de dicho disco.

En efecto, sea $r < 1$, si $|z| \leq r$ se tiene que

$$|1 - z^k| \geq |1 - |z|^k| \geq |1 - r^k| = 1 - r^k \geq 1 - r$$

y por tanto

$$\left|\frac{z^k}{1-z^k}\right| \leq \frac{r^k}{1-r}.$$

Aplicando el criterio M de Weierstrass deducimos que la sucesión $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos del disco unidad hacia una función f y en virtud del teorema de convergencia de Weierstrass deducimos que la función f es holomorfa en el disco $|z| < 1$. Dicha función es

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} f_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z^k}.$$

Además, para cada k natural se tiene la igualdad

$$\frac{z^k}{1-z^k} = \frac{1}{1-z^k} - 1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} z^{\mu k}.$$

Por tanto podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} z^{\mu k} \right).$$

Escribamos esta última serie en términos de z^n. Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que calcular el coeficiente τ_n de z^n, que es igual al número de veces que se da la igualdad $\mu k = n$ para $\mu, k \in \mathbb{N}$. Si fijamos $k \in \mathbb{N}$, se tiene que existe un único $\mu \in \mathbb{N}$ tal que $\mu k = n$ si, y solo si, k es un divisor de n. En caso contrario no existe un tal μ. Por tanto τ_n es igual al número de divisores positivos de n. □

Proposición 3.2.8. *La circunferencia de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n z^n, \tag{3.6}$$

donde τ_n denota el número de divisores positivos de n, es una frontera natural.

Demostración. Para $|z| < 1$ denotemos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$$

que sabemos gracias al lema 3.2.7 que coincide con la suma de la serie (3.6). Veamos que $z_0 = e^{2\pi i p/q}$ es un punto barrera de la serie para $q > 1$ entero y p entero positivo, primos entre sí, probando que $f(z) \to \infty$ cuando $z \to z_0$ a través del segmento Oz_0. Para ello vamos a considerar $z_r = re^{2\pi ip/q}$ con $0 < r < 1$ y vamos a demostrar que

$$\lim_{r\to 1}(1-r)f(z_r) = \infty.$$

Para cada z en el disco unidad escribamos

$$f(z) = f(z^q) + g(z)$$

donde $f(z^q)$ incluye todos los términos de la serie tales que n es un múltiplo de q y por lo tanto $g(z)$ engloba el resto, es decir, los términos de la serie correspondientes a valores de n no divisibles por q. Consideremos primero la expresión $(1-r)f(z_r^q)$. Como $z_r^q = r^q$ tenemos que

$$\begin{aligned}(1-r)f(z_r^q) &= (1-r)f(r^q) = (1-r)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{qn}}{1-r^{qn}} = \frac{(1-r)}{(1-r^q)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-r^q)}{1-r^{qn}}r^{qn}\\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{q-1}r^k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{qn}}{\sum_{k=1}^{n-1}r^{qk}} > \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{qn}}{n} = \frac{1}{q}\log\frac{1}{1-r^q} \to \infty\end{aligned}$$

cuando $r \to 1$.

Por otro lado, si q no divide a n se tiene que

$$\begin{aligned}|1-z_r^n|^2 &= \left|1-r^n e^{2\pi ipn/q}\right|^2 = \left(1-r^n\cos\frac{2\pi pn}{q}\right)^2 + \left(r^n\sin\frac{2\pi pn}{q}\right)^2\\ &= 1-2r^n\cos\frac{2\pi pn}{q} + r^{2n}\cos^2\frac{2\pi pn}{q} + r^{2n}\sin^2\frac{2\pi pn}{q}\\ &= 1+r^{2n}-2r^n\cos\frac{2\pi pn}{q} = (1-r^n)^2 + 2r^n - 2r^n\cos\frac{2\pi pn}{q}\\ &= (1-r^n)^2 + 2r^n\left(1-\cos\frac{2\pi pn}{q}\right) > 4r^n\sin^2\frac{\pi pn}{q}.\end{aligned}$$

Además podemos encontrar un entero λ_n tal que $np = \lambda_n q + t$ con $0 < t < q$, luego

$$|1-z_r^n|^2 > 4r^n\sin^2\frac{\pi(\lambda_n q+t)}{q} = 4r^n\sin^2\frac{\pi t}{q} > 4r^n\sin^2\frac{\pi}{q}$$

y por tanto deducimos

$$\begin{aligned}|(1-r)g(z_r)| &\le (1-r)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{2r^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi}{q}} = \frac{1-r}{2\sin\frac{\pi}{q}}\sum_{n=0}^{\infty}r^{\frac{1}{2}n}\\ &= \frac{1-r}{2(1-\sqrt{r})\sin\frac{\pi}{q}} = \frac{1+\sqrt{r}}{2\sin\frac{\pi}{q}} \le \frac{1}{\sin\frac{\pi}{q}}.\end{aligned}$$

Deducimos entonces que $f(z_r) = f(z_r^q) + g(z_r)$ tiende hacia ∞ cuando $r \to 1$ y por la proposición 3.1.3 tenemos que todos los puntos de la forma $z = e^{2\pi ip/q}$ son puntos barrera, los cuales constituyen un conjunto denso sobre la circunferencia $|z| = 1$. Podemos concluir por tanto que la circunferencia de convergencia de la serie (3.6) es una frontera natural aplicando el lema 3.2.4. $\square$

3.3. Sumabilidad de Borel de una serie de potencias.

3.3.1. La suma de Borel.

La definición habitual de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.7}$$

no tiene sentido fuera del disco de convergencia. Sin embargo, es posible dar una definición alternativa que asocia determinados valores a ciertos puntos situados fuera del disco y además conserva los mismos valores que la definición habitual para los puntos situados en el disco de convergencia.

En particular vamos a considerar un método debido a Émile Borel estrechamente relacionado con la teoría de la prolongación analítica radial. Dicho método se basa en la asignación de valores a la suma de la serie (3.7) mediante una integral.

Sea $u \in \mathbb{R}$, denotemos

$$a(zu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(zu)^n}{n!},$$

asumiendo que dicha suma existe para ciertos valores de z y todos los valores positvos de u. Entonces el método de Borel propone que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \int_0^{\infty} e^{-u} a(zu) du. \tag{3.8}$$

Veamos mediante un sencillo cálculo que esta asignación es razonable. Razonando de manera formal, lo que permite el intercambio de serie e integral sin considerar su justificación, observamos que

$$\int_0^{\infty} e^{-u} a(zu) du = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(zu)^n}{n!} \right) du = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^n du.$$

Además sabemos que esta última integral coincide con el valor de la función Gamma y por lo tanto

$$\int_0^\infty e^{-u}u^n du = \Gamma(1+n) = n!,$$

luego podemos concluir que

$$\sum_{n=0}^\infty a_n z^n = \int_0^\infty e^{-u} a(zu) du.$$

Definición 3.3.1. *Se dice que la serie* (3.7) *es* B_1-sumable *en los puntos en los que la integral* (3.8) *tiene sentido. Nos referimos al valor de la integral* (3.8) *como* B_1-suma *o* suma de Borel *de la serie* (3.7) *en el punto* z.

Nota 3.3.2. *En numerosos casos la integral* (3.8) *solo tiene sentido en ciertos puntos fuera del disco de convergencia.*

Ejemplo 3.3.3.

Un ejemplo instructivo es el dado por la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^\infty z^n$$

a la que asociamos la serie

$$a(zu) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(zu)^n}{n!} = e^{zu},$$

válida para todo u positivo y todo punto del plano complejo.

Veamos que dicha serie es B_1 - sumable en el semiplano complejo $\mathrm{Re}(z) < 1$. Para ello veamos cuáles son los puntos en los que converge la integral

$$\int_0^\infty e^{-u} a(zu) du.$$

Suponiendo que $z \neq 1$, se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-u} a(zu) du = \int_0^\infty e^{-(1-z)u} du = \left[\frac{1}{z-1} e^{(z-1)u}\right]_{u=0}^{u\to\infty}.$$

Como

$$\left|\frac{1}{z-1} e^{(z-1)u}\right| = \frac{1}{|z-1|} e^{(\mathrm{Re}(z)-1)u},$$

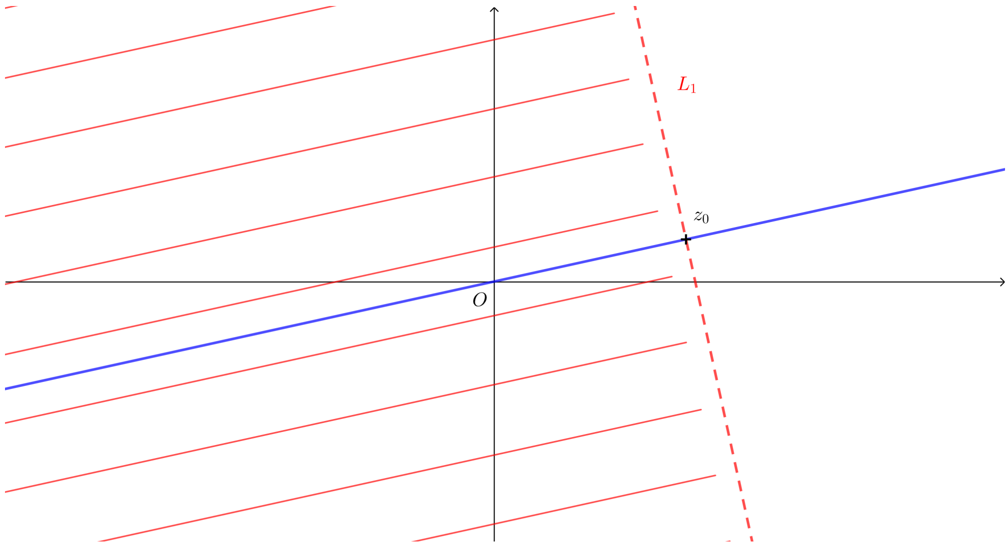

Figura 3.4: Semiplano $\mathrm{Re}(z/z_0) < 1$.

la integral converge si $\mathrm{Re}(z) - 1 < 0$, es decir, si $\mathrm{Re}(z) < 1$, y vale

$$\int_0^{\infty} e^{-u} e^{zu} du = \frac{1}{1-z}. \tag{3.9}$$

Más generalmente, se tiene que para $z_0 \neq 0$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_0^{n+1}}$$

es B_1 - sumable en el semiplano $\mathrm{Re}(z/z_0) < 1$. En este abierto se tiene que

$$\frac{1}{z_0} \int_0^{\infty} e^{\frac{zu}{z_0}} e^{-u} du = \frac{1}{z_0} \left[\frac{1}{\frac{z}{z_0} - 1} e^{\left(\frac{z}{z_0} - 1\right) u} \right]_{u=0}^{u \to \infty} = \frac{1}{z_0} \frac{-z_0}{z - z_0} = \frac{1}{z_0 - z}.$$

El semiplano $\mathrm{Re}(z/z_0) < 1$ es el definido por los puntos que se encuentran en el mismo lado que el origen al dividir el plano complejo mediante una recta L_1 perpendicular al segmento Oz_0 y que pasa por z_0 (figura 3.4).

En efecto, sean $z = x + iy$ y $z_0 = a + ib$, se tiene que

$$\frac{z}{z_0} = \frac{z\overline{z_0}}{|z_0|^2} = \frac{(x+iy)(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{xa+yb}{a^2+b^2} + i\frac{ya-xb}{a^2+b^2}.$$

Por tanto $\mathrm{Re}(z/z_0) < 1$ equivale a

$$xa + yb < a^2 + b^2 \Leftrightarrow x < \frac{a^2+b^2-yb}{a} \Leftrightarrow x < a - \frac{b}{a}(y-b).$$

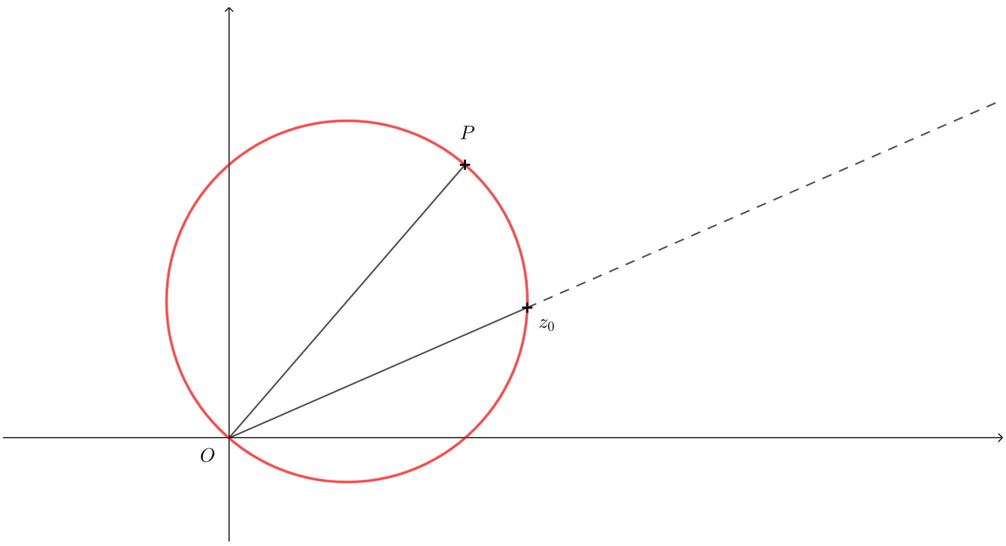

Figura 3.5: Definición del conjunto $\mathcal{B}_1$ (z_0 representa un punto barrera).

3.3.2. El polígono de Borel.

Sea f una función holomorfa en el origen (es decir, en un abierto que lo contiene) y sea $\mathcal{B}$ la estrella principal de la serie de potencias (3.7) que representa f en un entorno del origen. Consideramos el conjunto $\mathcal{B}_1$ formado por los puntos P tales que el interior del disco de diámetro OP está contenido en $\mathcal{B}$ (figura 3.5).

Proposición 3.3.4. *$\mathcal{B}_1$ es un conjunto estrellado respecto del origen y su interior está contenido en $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $P \in \mathcal{B}_1$, veamos que todos los puntos del segmento OP también están en $\mathcal{B}_1$. Si P' pertenece a dicho segmento, se tiene que el disco de diámetro OP' está contenido en el disco de diámetro OP, y por lo tanto también lo está en $\mathcal{B}$, luego $P' \in \mathcal{B}_1$.

Veamos ahora que el interior de $\mathcal{B}_1$ está contenido en $\mathcal{B}$. Para ello tomamos P en el interior de $\mathcal{B}_1$ y elegimos $r > 0$ tal que el disco $B(P, r)$ esté contenido en $\mathcal{B}_1$. Entonces todo punto $P' \in B(P, r)$ cumple que el disco de diámetro OP' está contenido en $\mathcal{B}$. En particular, si tomamos P' situado en la recta que une el origen con P de forma que esté más alejado del origen que el punto P, se tiene que P pertenece al disco de diámetro OP' y por lo tanto, pertenece también a $\mathcal{B}$. $\square$

Además, se puede probar que si el número de puntos barrera es finito $\mathcal{B}_1$ es un polígono.

Borel probó que la integral de (3.8) es convergente en el interior del conjunto $\mathcal{B}_1$ y Phragmén completó el resultado probando que dicha integral no converge en todo punto del interior del complementario de $\mathcal{B}_1$, resultados que veremos más adelante.

Definición 3.3.5. *El conjunto* $\mathcal{B}_1$ *se llama* polígono de sumabilidad de Borel *de la serie* (3.7).

Nota 3.3.6. *La frontera del polígono de sumabilidad de Borel no tiene por qué estar compuesta de segmentos rectilíneos. De hecho, cuando la circunferencia de convergencia es una frontera natural,* $\mathcal{B}_1$ *coincide con la adherencia del disco de convergencia.*

Ejemplo 3.3.7.

Sean $m \in \mathbb{N}$ y $z_n \neq 0$ para cada $n = 1, 2, \ldots, m$, consideramos la serie de potencias en términos de potencias de z cuya prolongación analítica viene dada por la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{z_n - z}.$$

Cada uno de los sumandos de dicha suma es B_1 - sumable en un semiplano, que se puede determinar mediante un cambio de variable a partir del estudio de la serie geométrica. En consecuencia, la función suma será B_1 - sumable en la intersección de la familia finita de semiplanos, que constituye un polígono convexo (figura 3.6). Esta intersección se puede reducir, por ejemplo, a un ángulo (si está delimitada por dos rectas secantes), una banda (si está delimitada por dos rectas paralelas), o un semiplano (si está delimitada por una sola recta).

3.3.3. Sumabilidad a lo largo de un segmento rectilíneo.

Establezcamos estos hechos de forma más rigurosa, comenzando por demostrar un teorema relacionado con la sumabilidad de Borel a través de un segmento. Para ello vamos a necesitar dar algunos resultados relacionados con la transformada de Laplace de una función compleja definida para valores reales.

Definición 3.3.8. *Sea* $a : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ *tal que siempre tenga sentido calcular la integral* $\int_0^T e^{-st} a(t)dt$ *para todo* $T > 0, s \in \mathbb{C}$*. Entonces se define la* transformada de Laplace *en* s *de la función* a *por*

$$\mathcal{L}(a)(s) = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} a(t)dt = \int_0^\infty e^{-st} a(t)dt$$

cuando dicho límite exista y sea finito.

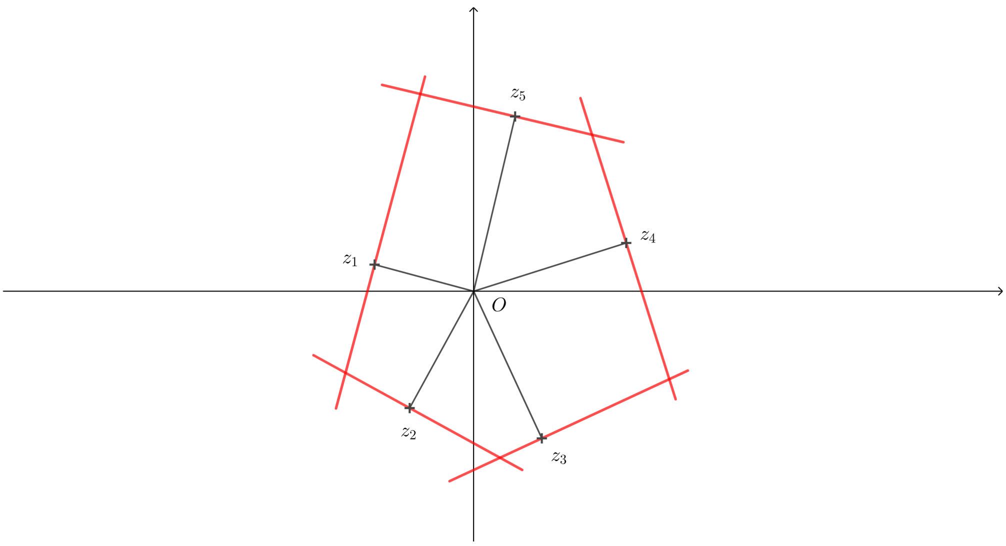

Figura 3.6: Polígono de Borel para $m = 5$.

Lema 3.3.9. *Sea $a(t)$ una función compleja cumpliendo las condiciones de la definición anterior, se tiene que si la transformada de Laplace está bien definida para $s_0 \in \mathbb{C}$, entonces también lo está para cualquier valor de s tal que* $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$.

Demostración. Vamos a probar primero que la integral de Laplace converge uniformemente en un sector angular definido por

$$|\arg(s - s_0)| \leq \theta < \frac{\pi}{2} \tag{3.10}$$

para un cierto $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ (figura 3.7). Esto nos permitirá deducir la convergencia de la integral deseada.

Denotemos por

$$R(x) = \int_x^\infty e^{-s_0 t} a(t) dt$$

para $x > 0$. Observamos que

$$R'(x) = -e^{-s_0 x} a(x).$$

Por lo tanto para cada $s \in \mathbb{C}$ se tiene que, integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_x^\omega e^{-st} a(t) dt &= \int_x^\omega e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} a(t) dt \\ &= -e^{-(s-s_0)\omega} R(\omega) + e^{-(s-s_0)x} R(x) - (s - s_0) \int_x^\omega e^{-(s-s_0)t} R(t) dt.\end{aligned}$$

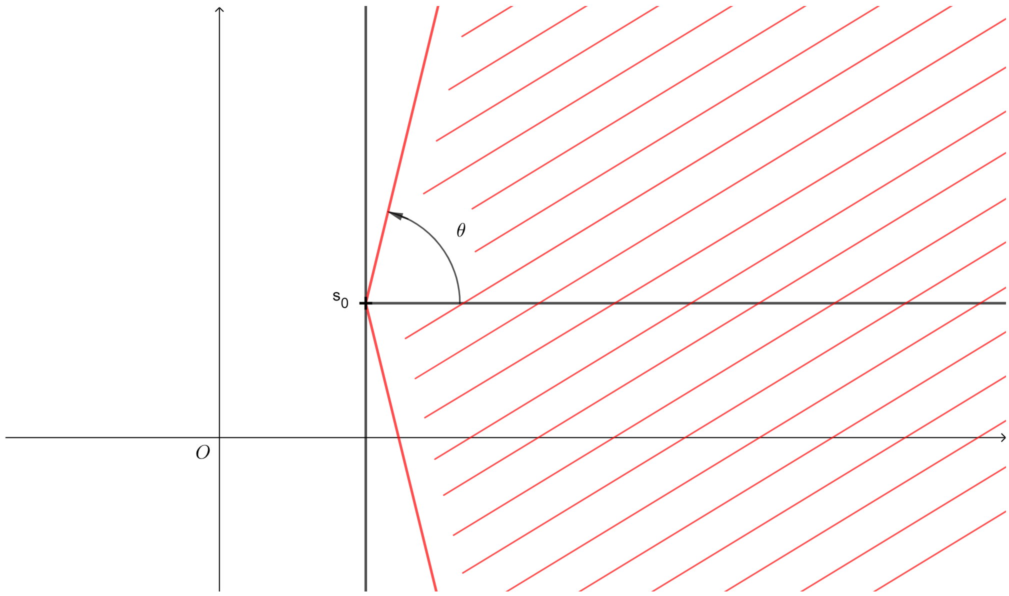

Figura 3.7: Sector angular (3.10).

Además, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $x_0 > 0$ tal que para cada $x > x_0$ se tiene que $|R(x)| < \varepsilon$. Por lo tanto, suponiendo que $\omega > x > x_0$ y que $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$, o equivalentemente $\mathrm{Re}(s - s_0) > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_x^\omega e^{-(s-s_0)t} R(t)dt\right| &\leq \varepsilon \int_x^\omega e^{-t\mathrm{Re}(s-s_0)} dt \leq \varepsilon \int_x^\infty e^{-t\mathrm{Re}(s-s_0)} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(s-s_0)} e^{-x\mathrm{Re}(s-s_0)} \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(s-s_0)}.\end{aligned}$$

Entonces, suponiendo que se cumple la condición (3.10) deducimos que

$$\begin{aligned}\left|\int_x^\omega e^{-st} a(t)dt\right| &< \varepsilon e^{-\omega\mathrm{Re}(s-s_0)} + \varepsilon e^{-x\mathrm{Re}(s-s_0)} + |s-s_0| \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(s-s_0)} \\ &\leq \varepsilon \left(2 + \frac{|s-s_0|}{\mathrm{Re}(s-s_0)}\right) \leq \varepsilon(2 + \sec\theta).\end{aligned}$$

La última desigualdad se deduce de que si $z = re^{i\varphi}$ entonces $\frac{|z|}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{r}{r\cos\varphi} = \sec\varphi$ y además la secante es una función creciente en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Acabamos de acotar el módulo de la integral de Laplace por una expresión que no depende de s, por lo que se tiene la convergencia uniforme de dicha integral en el sector angular indicado.

Además observamos que para cada $s \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ se tiene que $|\arg(s - s_0)| < \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto existe un θ de modo que $|\arg(s - s_0)| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, luego la integral de Laplace es convergente en s de acuerdo con lo anterior. $\square$

Teorema 3.3.10. *Dada una serie de potencias del tipo* (3.7)*, la cual puede tener o no disco de convergencia, supongamos que:*

(i) Existe un valor $z_0 \neq 0$ *tal que la serie asociada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z_0 u)^n}{n!} \tag{3.11}$$

es convergente para todo u positivo. Denotaremos por $a(z_0 u)$ *la suma de dicha serie.*

(ii) La integral

$$\int_0^{\infty} e^{-u} a(z_0 u) du \tag{3.12}$$

es convergente.

Entonces la integral es convergente en todo punto del segmento Oz_0*.*

Demostración. Vamos a parametrizar el segmento Oz_0 como $z = \nu z_0$ para $0 \leq \nu \leq 1$. Para $\nu = 0$ se tiene que $a(\nu z_0) = a(0) = a_0$, luego el resultado es evidente. Por tanto vamos a suponer $0 < \nu \leq 1$.

Por hipótesis, la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-u} a(zu) du = \int_0^{\infty} e^{-u} a(\nu z_0 u) du$$

es convergente para $\nu = 1$. Para ν fijo, hacemos el cambio de variable $t = \nu u$ (y por tanto $u = \frac{t}{\nu}$) y denotamos $s = \frac{1}{\nu}$. La integral se transforma en

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\nu}} a(z_0 t) \frac{1}{\nu} dt = s \int_0^{\infty} e^{-st} a(z_0 t) dt.$$

Esta integral es convergente para $s_0 = 1$, luego por el lema previo podemos deducir también que es convergente para $s > s_0 = 1$, es decir, para cada $0 < \nu \leq 1$. □

Corolario 3.3.11. *Si la serie* (3.7) *es* B_1 *- sumable en* $z = z_0$*, entonces es* B_1 *- sumable en* $z = \nu z_0$ *para* $0 \leq \nu \leq 1$*, y su* B_1 *- suma para dichos valores de z está dada por una función holomorfa en el disco cuyo diámetro es* Oz_0 *(figura 3.8).*

Demostración. La B_1 - sumabilidad de la serie en los puntos $z = \nu z_0$ es consecuencia directa del teorema anterior. Además, en la demostración de este mismo teorema hemos visto que la B_1 - suma en el segmento Oz_0 está definida por la función

$$\varphi(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} a(z_0 t) dt$$

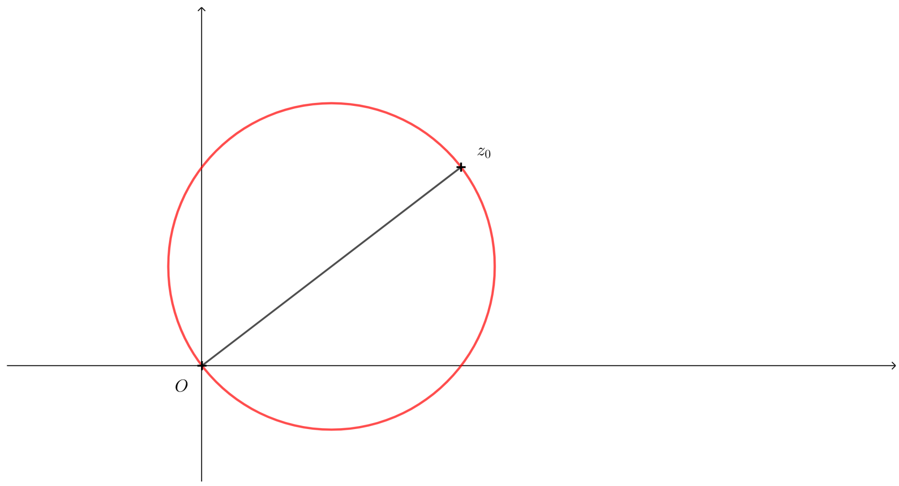

Figura 3.8: Abierto $\mathrm{Re}(z_0/z) > 1$.

para $s > 1$ real. De hecho, el teorema de holomorfía bajo el signo integral nos asegura que esta función está bien definida para valores complejos de s y es holomorfa en el abierto $\mathrm{Re}(s) > 1$. En efecto, sabemos que la integral converge para $s_0 = 1$. Tomando $s = z_0/z$ podemos considerar $\varphi(s)$ como una función de z

$$h(z) = \frac{z_0}{z} \int_0^\infty e^{-tz_0/z} a(z_0 t) dt$$

y teniendo en cuenta el lema 3.3.9 podemos deducir que $h(z)$ está bien definida en el abierto $\mathrm{Re}(z_0/z) > 1$. Veamos que este abierto es el disco de diámetro Oz_0.

En efecto, sean $z_0 = a + ib$ y $z = x + iy$, se tiene que

$$\frac{z_0}{z} = \frac{(a+ib)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{ax+by}{x^2+y^2} + i\frac{bx-ay}{x^2+y^2}.$$

Luego $\mathrm{Re}(z_0/z) > 1$ equivale a

$$ax + by > x^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{4} = \left(\frac{|z_0|}{2}\right)^2.$$

Deducimos por tanto que nuestro abierto coincide con el disco de centro $\frac{z_0}{2}$ y radio $\frac{|z_0|}{2}$, es decir, el disco cuyo diámetro es Oz_0. $\square$

3.3.4. Prolongación analítica radial.

Asumamos ahora que la serie (3.7) posee un radio de convergencia R finito y positivo. Se tiene por tanto el siguiente resultado.

Teorema 3.3.12. *Si la integral*

$$\int_0^\infty e^{-u}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(zu)^n}{n!}\right) du$$

es convergente en $z = z_0$, entonces representa una función holomorfa dentro del disco de diámetro Oz_0 y nos proporciona una prolongación analítica de la serie (3.7) a lo largo del segmento Oz_0. En todo punto de dicho segmento la serie es B_1 - sumable.

Demostración. Si denotamos por R el radio de convergencia de la serie (3.7), el criterio de Cauchy-Hadamard nos dice que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Aplicando este mismo criterio a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = \frac{1}{R} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{R} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}} = \frac{1}{R} \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n \sqrt[2n]{2\pi n}} = 0$$

aplicando la fórmula de Stirling en la segunda igualdad, que nos dice que $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Por tanto el radio de convergencia de dicha serie es ∞, lo cual quiere decir que representa una función entera. Se cumplen entonces las hipótesis del teorema 3.3.10 ya que la serie (3.11) converge para todo u positivo y hemos supuesto que la integral (3.12) converge para $z = z_0$.

Solo nos queda probar que dicha itegral nos proporciona una prolongación analítica de la serie (3.7). Supongamos que z está dentro del disco de convergencia de la serie y veamos que el valor de la integral coincide con el de la suma.

En primer lugar se tiene que la serie $a(zu)$ converge uniformemente (respecto de u) en los compactos de $[0,\infty)$, es decir, en $[0,\omega]$ para cada $\omega > 0$. Por lo tanto se tiene la igualdad

$$\int_0^\omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(zu)^n}{n!}\right) e^{-u} du = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \frac{z^n}{n!}\int_0^\omega e^{-u}u^n du\right). \tag{3.13}$$

En segundo lugar, pongamos

$$g_n(\omega) = a_n \frac{z^n}{n!} \int_0^\omega e^{-u} u^n du, \ \omega > 0.$$

Teniendo en cuenta que u es real positivo se tiene que

$$|g_n(\omega)| \leq \frac{|a_n z^n|}{n!} \int_0^\infty e^{-u} u^n du = \frac{|a_n z^n|}{n!} \Gamma(1+n) = |a_n z^n|$$

para todo $\omega > 0$. Puesto que hemos supuesto que z está en el disco de convergencia, la serie (3.7) converge absolutamente en z. Por lo tanto podemos aplicar el criterio M de Weierstrass y obtenemos la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=0}^\infty g_n(\omega)$. Como cada sumando tiene límite cuando $\omega \to \infty$ podemos asegurar que

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{n=0}^\infty g_n(\omega) = \sum_{n=0}^\infty \lim_{\omega\to\infty} g_n(\omega) = \sum_{n=0}^\infty \left(a_n \frac{z^n}{n!} \int_0^\infty e^{-u} u^n du \right) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n.$$

Por lo tanto, haciendo el paso al límite cuando $\omega \to \infty$ en la igualdad (3.13), obtenemos que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{(zu)^n}{n!} \right) e^{-u} du = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$$

como queríamos probar. □

3.3.5. Sumabilidad dentro del polígono de Borel.

Recordamos que el polígono de Borel de la serie (3.7), que denotamos $\mathcal{B}_1$, está formado por los puntos z_0 tales que el disco de diámetro Oz_0 está incluido en la estrella principal.Como se ha visto en la demostración del cororario 3.3.11 podemos definir $\mathcal{B}_1$ de manera equivalente como el conjunto de puntos z_0 tales que el abierto $\mathrm{Re}(z/z_0) < 1$ está contenido en la estrella principal, puesto que $\mathrm{Re}(z/z_0) < 1$ coincide con el disco abierto de diámetro el segmento Oz_0. Veamos que la integral (3.12) es convergente en el interior de dicho polígono y no es convergente en ningíun punto situado fuera de $\mathcal{B}_1$.

Proposición 3.3.13. *La integral* (3.12) *no puede ser convergente en un punto* z_0 *situado en el interior del complementario de* $\mathcal{B}_1$*.*

Demostración. Si z_0 es un punto interior al complementario de $\mathcal{B}_1$ quiere decir que el disco abierto de diámetro Oz_0 contiene algún punto barrera z_1. Según el teorema 3.3.12, si la integral es convergente en z_0 entonces representa una función holomorfa dentro del disco abierto de diámetro Oz_0 y nos proporciona una prolongación analítica de la serie (3.7). Dicha prolongación existiría también en un entorno de z_1, puesto que está definida en todo el disco abierto, en contra de que z_1 es un punto barrera. □

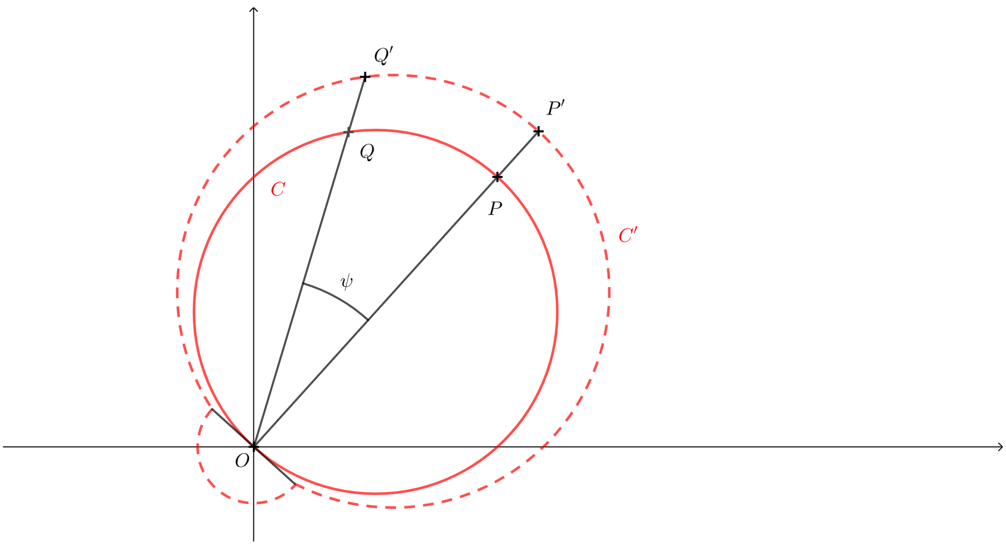

Figura 3.9: Camino C'.

Vamos a probar ahora un resultado que nos servirá a modo de recíproco del teorema 3.3.12.

Teorema 3.3.14. *Denotemos por f la prolongación analítica de la serie* (3.7)*. Se tiene que para todo z en el interior de $\mathcal{B}_1$ la integral*

$$\int_0^\infty e^{-u} a(zu) du$$

es convergente, y su valor coincide con el de $f(z)$.

Demostración. Sea P un punto z interior de $\mathcal{B}_1$ y sea C el disco de diámetro OP. Por la proposición 3.3.4, P pertenece a la estrella principal de la función f, luego esta es también holomorfa en un punto P' situado más allá de P en la recta OP y a distancia η de P, con η suficientemente pequeño. Podemos describir por tanto un contorno C' ligeramente más grande que interseca la recta OP en el punto P' y que esté incluido en la estrella, construyéndolo de la siguiente manera. Si Q es un punto de C alargamos el segmento OQ por un pequeño segmento QQ' de longitud η. Encontramos por tanto un arco que puede ser completado, hasta convertirlo en una curva cerrada, por una semicircunfuerencia de radio η y centro O (figura 3.9).

Sea ξ un punto de C'; denotando por ψ el ángulo formado por Oz y $O\xi$ se tiene que

$$\frac{z}{\xi} = \frac{|z|e^{i \arg z}}{|\xi|e^{i \arg \xi}} = \frac{|z|}{|\xi|} e^{i\psi}.$$

Cuando ξ se encuentra en la semicircunferencia tenemos que $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2}$ y por tanto

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\xi}\right) = \frac{|z|}{|\xi|}\cos\psi \leq 0.$$

En caso contrario tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\xi}\right) &= \frac{|z|}{|\xi|}\cos\psi = \frac{OP\cdot\cos\psi}{OQ'} = \frac{OQ}{OQ'} = \frac{OQ}{OQ+\eta} \\ &= 1 - \frac{\eta}{OQ+\eta} \leq 1 - \frac{\eta}{OP+\eta} = 1-\delta\end{aligned}$$

donde δ es un número positivo. Por tanto para todo $\xi \in C'$ tenemos que $\operatorname{Re}(z/\xi) < 1$.

Veamos que además podemos escoger η de modo que f sea holomorfa en todo punto de C' y del abierto que encierra. Denotando el complementario de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{C}$ por $\mathcal{B}^c = \mathbb{C}\setminus\mathcal{B}$ y puesto que C es un compacto contenido en el abierto $\mathcal{B}$, se tiene que la $\mathcal{B}^c$ es un cerrado y por tanto la distancia $d = \operatorname{dist}(C, \mathcal{B}^c)$ es estrictamente positiva. Además, como $0 \in C$, se tiene que d es menor o igual que el radio de convergencia de la serie. Por lo tanto, tomando $\eta < d$ nos aseguramos de que C' esté contenido en la estrella principal de la serie (3.7) y por tanto que f sea holomorfa en todo punto de C'.

Teniendo en cuenta la relación (3.9) y la fórmula integral de Cauchy, se tiene

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{1}{1-\frac{z}{\xi}}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\int_0^\infty e^{-u}e^{zu/\xi}du\right)d\xi,\end{aligned}$$

siendo la última integral convergente ya que hemos probado que $\operatorname{Re}(z/\xi) < 1$. Veamos que podemos invertir el orden de integración y que haciendo algunas manipulaciones adiciones obtenemos el resultado deseado.

En primer lugar vamos a integrar respecto de u en el compacto $[0,\omega]$ con $\omega > 0$ y vamos a denotar por $g_\omega(z)$ dicha integral. En virtud del teorema de Fubini, puesto que estamos integrando en un producto de compactos, se tiene que

$$g_\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\int_0^\omega e^{-u}e^{zu/\xi}du\right)d\xi = \int_0^\omega e^{-u}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}e^{zu/\xi}d\xi\right)du.$$

Por tanto, denotando por C'' la circunferencia centrada en 0 con un radio menor que η y lo suficientemente pequeño como para que esta esté contenida en el disco de convergencia de la serie (3.7), podemos intercambiar C' y C'' como caminos de integración puesto que son dos caminos homótopos en un abierto en el cual el integrando es holomorfo, y obtenemos por lo tanto

$$\begin{aligned}
g_\omega(z) &= \int_0^\omega e^{-u}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}e^{zu/\xi}d\xi\right)du \\
&= \int_0^\omega e^{-u}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\xi)}{\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zu/\xi)^n}{n!}d\xi\right)du \\
&= \int_0^\omega e^{-u}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zu)^n}{n!}\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi\right)du \\
&= \int_0^\omega e^{-u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zu)^n}{n!}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}du \\
&= \int_0^\omega e^{-u}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(zu)^n}{n!}du = \int_0^\omega e^{-u}a(zu)du.
\end{aligned}$$

Para justificar el cambio en el orden de sumación e integración en la tercera igualdad observamos que la exponencial es una función entera y por lo tanto su disco de convergencia coincide con todo el plano complejo. Puesto que C'' es un compacto contenido en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, la serie converge uniformemente respecto de ξ. Además, puesto que $\frac{f(\xi)}{\xi}$ es una función holomorfa en C'', dicho factor está acotado y por lo tanto no afecta a la convergencia uniforme.

En segundo lugar vamos a probar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega e^{-u}e^{zu/\xi}du\right)d\xi = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\int_0^\omega e^{-u}e^{zu/\xi}du\right)d\xi.$$

Teniendo en cuenta que anteriormente hemos probado que para cada $\xi\in C'$ se tiene que $\mathrm{Re}(z/\xi)\leq 1-\delta$ para cierto $\delta>0$ podemos deducir que

$$\left|e^{-u}e^{zu/\xi}\right| = e^{-u}e^{u\mathrm{Re}(z/\xi)} \leq e^{-u}e^{u(1-\delta)} = e^{-\delta u}.$$

Luego se tiene convergencia uniforme respecto de ξ y por lo tanto podemos extraer el límite fuera de la integral, como queríamos probar.

Recapitulando obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\int_0^\infty e^{-u}e^{zu/\xi}du\right)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega e^{-u}e^{zu/\xi}du\right)d\xi \\
&= \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\int_0^\omega e^{-u}e^{zu/\xi}du\right)d\xi \\
&= \lim_{\omega\to\infty} g_\omega(z) = \lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega e^{-u}a(zu)du = \int_0^\infty e^{-u}a(zu)du.
\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que la serie (3.7) es B_1 - sumable en cada punto z dentro de $\mathcal{B}_1$, siendo $f(z)$ su B_1 - suma. □

3.4. Sumabilidad de Mittag-Leffler de una serie de potencias.

3.4.1. Introducción.

En la relación (3.9) hemos visto cómo representar la función $1/(1-z)$ en forma de integral. Mittag-Leffler observó que es posible representarla de forma más general como

$$\frac{1}{1-z} = \int_0^\infty e^{-u}E_\alpha(zu^\alpha)du, \ \alpha > 0. \tag{3.14}$$

Esta representación es válida en el abierto $\mathrm{Re}(z^{1/\alpha}) < 1$, siendo $E_\alpha(z)$ la función de Mittag-Leffler (2.1). Nos limitaremos al caso más interesante en el que $\alpha \leq 2$.

Más adelante veremos que el abierto de convergencia es aquel que contiene al origen y está limitado por la curva

$$r\cos^\alpha\frac{\theta}{\alpha} = 1$$

con $r = |z|$ y $-\frac{1}{2}\alpha\pi < \arg z < \frac{1}{2}\alpha\pi$. Cuando $\alpha < 1$ dicha curva se asemeja a una hipérbola, para $\alpha = 1$ obtenemos una recta vertical y para $\alpha = 2$ la curva es una parábola (figura 3.10).

El abierto de convergencia tiende a la estrella principal de la serie geométrica $\sum_{n=0}^\infty z^n$ cuando $\alpha \to 0$.

Es natural por tanto extender el método de Borel de la siguiente manera. Consideremos la serie

$$\sum_{n=0}^\infty a_n E_\alpha(zu^\alpha) = \sum_{n=0}^\infty a_n\frac{(zu^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)} \tag{3.15}$$

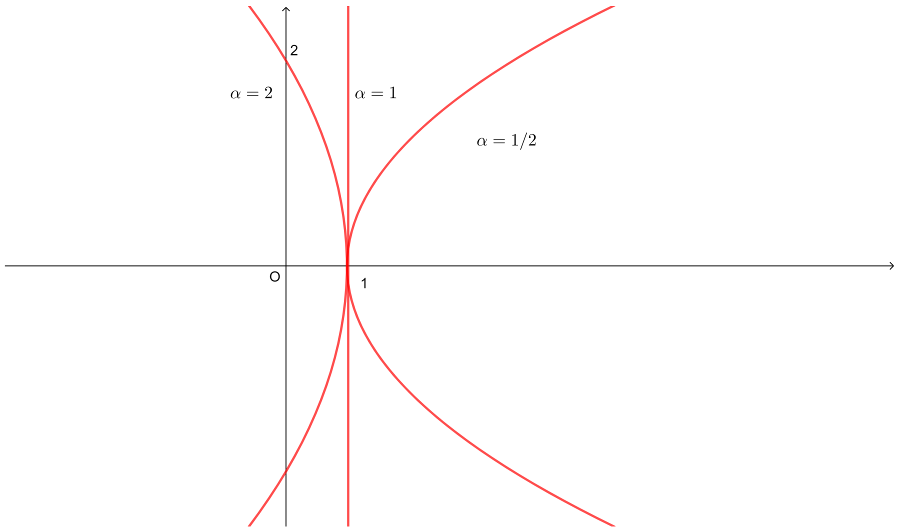

Figura 3.10: Abiertos de convergencia de la integral (3.14).

y denotemos por $a_\alpha(zu^\alpha)$ la suma de dicha serie. Supongamos que la serie es convergente para todos los valores positivos de u cuando z es un número complejo elegido adecuadamente y también la integral

$$\int_0^\infty e^{-u} a_\alpha(zu^\alpha)du \tag{3.16}$$

es convergente.

Definición 3.4.1. *En este caso se denomina* suma de Mittag − Leffler *o* B_α − suma *de la serie* (3.15) *en un punto dado z al valor de la integral* (3.16)*.*

Para $\alpha = 1$ la definición se reduce a la suma de Borel vista en la sección precedente.

3.4.2. Sumabilidad a lo largo de un segmento rectilíneo.

El siguiente teorema es una extensión del teorema 3.3.10.

Teorema 3.4.2. *Dada una serie de potencias del tipo* (3.7)*, la cual puede tener o no disco de convergencia, supongamos que:*

(i) Existe un valor $z_0 \neq 0$ tal que la serie asociada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z_0 u^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)} \tag{3.17}$$

es convergente para todo u positivo. Denotaremos por $a_\alpha(z_0 u^\alpha)$ la suma de dicha serie.

(ii) La integral

$$\int_0^\infty e^{-u} a_\alpha(z_0 u^\alpha) du \tag{3.18}$$

es convergente.

Entonces la integral es convergente en todo punto del segmento Oz_0.

Demostración. Sea $z = \nu z_0$ con $0 \leq \nu \leq 1$. Para $\nu = 0$ se tiene que $a_\alpha(\nu z_0) = a_\alpha(0) = a_0$, luego el resultado es evidente. Consideremos entonces $0 < \nu \leq 1$. La integral

$$\int_0^\infty e^{-u} a_\alpha(z u^\alpha) du = \int_0^\infty e^{-u} a_\alpha(\nu z_0 u^\alpha) du$$

converge para $\nu = 1$ por hipótesis. Para ν fijo, hacemos el cambio de variable $t^\alpha = \nu u^\alpha$ (y por tanto $u = \frac{t}{\nu^{1/\alpha}}$) y denotamos $s = \frac{1}{\nu^{1/\alpha}}$. La integral se transforma en

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\nu^{1/\alpha}}} a_\alpha(z_0 t^\alpha) \frac{1}{\nu^{1/\alpha}} dt = s \int_0^\infty e^{-st} a_\alpha(z_0 t^\alpha) dt.$$

Esta integral es convergente para $s_0 = 1$, luego por el lema 3.3.8 podemos deducir también que es convergente para $s > s_0 = 1$, es decir, para cada $0 < \nu \leq 1$. $\square$

Corolario 3.4.3. *Si la serie* (3.7) *es B_α - sumable en $z = z_0$, entonces es B_α - sumable en $z = \nu z_0$ para $0 \leq \nu \leq 1$, y su B_α - suma para dichos valores de z está dada por una función holomorfa en el abierto*

$$\mathfrak{R}_\alpha(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{1/\alpha} > 1, -\frac{1}{2}\alpha\pi < \arg\frac{z_0}{z} < \frac{1}{2}\alpha\pi \right\} \tag{3.19}$$

incluyendo también los puntos interiores al segmento Oz_0.

Demostración. La B_α - sumabilidad de la serie en los puntos $z = \nu z_0$ es consecuencia directa del teorema anterior. Además, en la demostración de este mismo teorema hemos visto que la B_α - suma en el segmento Oz_0 está definida por la función

$$\varphi(s) = s \int_0^\infty e^{-st} a_\alpha(z_0 t^\alpha) dt$$

para $s > 1$ real. Si consideramos s un número complejo, entonces $\varphi(s)$ es una función holomorfa en el abierto $\operatorname{Re}(s) > 1$. Si escribimos

$$s = \left(\frac{z_0}{z}\right)^{1/\alpha}$$

la función $\varphi(s)$ puede ser considerada como una función

$$h(z) = \frac{z_0}{z}^{1/\alpha} \int_0^\infty e^{-t(z_0/z)^{1/\alpha}} a_\alpha(z_0 t^\alpha) dt$$

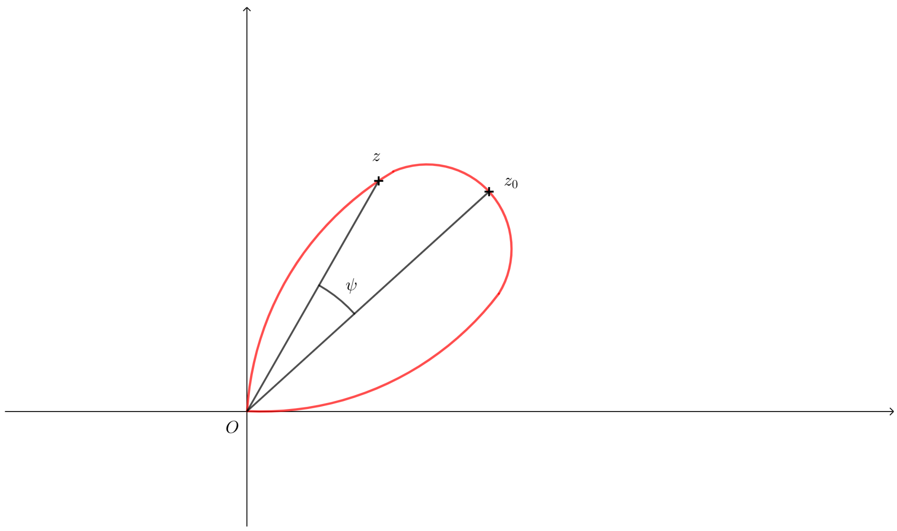

Figura 3.11: Curva (3.20).

la cual es holomorfa en el abierto

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{1/\alpha} > 1.$$

Dependiendo de la determinación que se escoja para los argumentos, van apareciendo diferentes“pétalos”, pero nosotros nos quedamos únicamente con aquel tal que

$$-\frac{1}{2}\alpha\pi < \arg\frac{z_0}{z} < \frac{1}{2}\alpha\pi$$

donde se supone que $0 < \alpha \leq 2$. Cuando $z = \nu z_0$, $0 \leq \nu \leq 1$, la función coincide con la integral (3.18). $\square$

Vamos a describir el abierto $\mathfrak{R}_\alpha(z_0)$ para comprender mejor dónde estamos definiendo la función $h(z)$. Veremos que está delimitado por la curva

$$r = r_0 \cos^\alpha \frac{\psi}{\alpha} \tag{3.20}$$

con $-\frac{1}{2}\alpha\pi < \psi < \frac{1}{2}\alpha\pi$, donde ψ es el ángulo entre Oz y Oz_0, $r = |z|$ y $r_0 = |z_0|$ (figura 3.11).

En efecto, se tiene que

$$\frac{z_0}{z} = \frac{r_0}{r}e^{i(\arg z_0 - \arg z)} = \frac{r_0}{r}e^{i\psi}$$

luego

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_0}{z}\right)^{1/\alpha} = \operatorname{Re}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/\alpha} e^{i\frac{\psi}{\alpha}} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/\alpha} \cos\frac{\psi}{\alpha}$$

y por tanto

$$\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/\alpha}\cos\frac{\psi}{\alpha}=1\Leftrightarrow\frac{r_0}{r}\cos^\alpha\frac{\psi}{\alpha}=1\Leftrightarrow r_0\cos^\alpha\frac{\psi}{\alpha}=r.$$

Nos referiremos al segmento Oz_0 como diámetro de la curva.

3.4.3. Prolongación analítica radial.

Asumamos ahora que la serie (3.7) posee un radio de convergencia R finito y positivo. Se tiene por tanto el siguiente resultado:

Teorema 3.4.4. *Si la integral*

$$\int_0^\infty e^{-u}\left(\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{(zu^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)}\right)du$$

es convergente en $z=z_0$, entonces representa una función holomorfa en el abierto $\mathfrak{R}_\alpha(z_0)$ y nos proporciona una prolongación analítica de la serie (3.7) *a lo largo del segmento Oz_0. En todo punto de dicho segmento, la serie es B_α - sumable.*

Demostración. Vamos a aplicar el criterio de Cauchy-Hadamard a la serie

$$\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{z^n}{\Gamma(1+\alpha n)}.$$

Como ya vimos en la prueba de la proposición 2.1.2 se tiene que $\Gamma(1+n\alpha)\approx(n\alpha)^{n\alpha}e^{-n\alpha}\sqrt{2\pi n\alpha}$, por tanto

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\frac{a_n}{\Gamma(1+\alpha n)}}&=\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{\frac{a_n}{n\alpha^{n\alpha}e^{-n\alpha}\sqrt{2\pi n\alpha}}}\\&=\frac{1}{R}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n\alpha)^\alpha e^{-\alpha}(2\pi n\alpha)^{1/2n}}=0.\end{aligned}$$

Así el radio de convergencia de dicha serie es ∞, lo cual quiere decir que es una serie entera, luego se cumplen las hipótesis del teorema 3.4.2. Solo queda probar que dicha integral nos proporciona una prolongación analítica de la seri (3.7). Para ello supongamos que z está en el disco de convergencia y veamos que el valor de la integral coincide con el de la suma.

En primer lugar se tiene que la serie $a_\alpha(zu^\alpha)$ converge uniformemente (respecto de u) en los compactos de $[0,\infty)$ puesto que hemos probado que su radio de convergencia es ∞. Por lo tanto, dado $\omega>0$ se tiene la igualdad

$$\int_0^\omega\left(\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{(zu^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)}\right)e^{-u}du=\sum_{n=0}^\infty\left(a_n\frac{z^n}{\Gamma(1+\alpha n)}\int_0^\omega e^{-u}u^{\alpha n}du\right).\qquad(3.21)$$

En segundo lugar, pongamos

$$g_n(\omega) = a_n \frac{z^n}{\Gamma(1+\alpha n)} \int_0^\omega e^{-u} u^{\alpha n} du, \ \omega > 0,$$

y teniendo en cuenta que u es real positivo se tiene que

$$|g_n(\omega)| \leq \frac{|a_n z^n|}{|\Gamma(1+\alpha n)|} \left| \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha n} du \right| = \frac{|a_n z^n|}{|\Gamma(1+\alpha n)|} |\Gamma(1+\alpha n)| = |a_n z^n|$$

para todo $\omega > 0$. La penúltima igualdad es consecuencia de la proposición 1.3.5. Puesto que hemos supuesto que z está en el disco de convergencia, la serie (3.7) converge absolutamente en z. Por lo tanto podemos aplicar el criterio M de Weierstrass y obtenemos la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=0}^\infty g_n(\omega)$. Como cada sumando tiene límite cuando $\omega \to \infty$ podemos asegurar que

$$\lim_{\omega\to\infty} \sum_{n=0}^\infty g_n(\omega) = \sum_{n=0}^\infty \lim_{\omega\to\infty} g_n(\omega) = \sum_{n=0}^\infty \left(a_n \frac{z^n}{\Gamma(1+\alpha n)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha n} du \right) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n.$$

Por lo tanto, haciendo el paso al límite en la igualdad (3.21), obtenemos que

$$\int_0^\infty \left(\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{(zu^\alpha)^n}{n!} \right) e^{-u} du = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$$

como queríamos probar. □

Definición 3.4.5. *El conjunto de los puntos z_0 tales que el abierto $\mathfrak{R}_\alpha(z_0)$ (ver* (3.19)*) está contenido en la estrella principal de la serie* (3.7) *se llama* estrella de Mittag – Leffler para el valor $\alpha > 0$*. Vamos a denotarlo por $\mathcal{B}_\alpha$.*

Observamos que cuando $\alpha = 1$ la estrella de Mittag-Leffler coincide con el polígono de Borel $\mathcal{B}_1$.

Proposición 3.4.6. *$\mathcal{B}_\alpha$ es un conjunto estrellado respecto del origen y su interior está contenido en $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $P \in \mathcal{B}_\alpha$, veamos que todos los puntos del segmento OP también están en $\mathcal{B}_\alpha$. Si P' pertenece a dicho segmento, se tiene que el abierto $\mathfrak{R}_\alpha(P')$ está contenido en el abierto $\mathfrak{R}_\alpha(P)$, y por lo tanto también lo está en $\mathcal{B}$, luego $P' \in \mathcal{B}_\alpha$.

Veamos ahora que el interior de $\mathcal{B}_\alpha$ está contenido en $\mathcal{B}$. Para ello tomamos P en el interior de $\mathcal{B}_\alpha$ y elegimos $r > 0$ tal que el disco $B(P, r)$ esté contenido en $\mathcal{B}_\alpha$. Entonces todo punto $P' \in B(P, r)$ cumple que $\mathfrak{R}_\alpha(P')$ está contenido en $\mathcal{B}$. En particular, si tomamos P' situado en la recta que une el origen con P de forma que esté más alejado del origen que el punto P, se tiene que P pertenece al $\mathfrak{R}_\alpha(P')$ y por lo tanto, pertenece también a $\mathcal{B}$. □

Proposición 3.4.7. *La integral* (3.18) *no puede ser convergente en un punto z_0 situado en el interior del complementario de $\mathcal{B}_\alpha$.*

Demostración. Si z_0 pertenece al interior del complementario de $\mathcal{B}_\alpha$ quiere decir que el abierto $\mathfrak{R}_\alpha(z_0)$ contiene algún punto barrera z_1. Según el teorema 3.4.4, si la integral es convergente en z_0 entonces representa una función holomorfa dentro del abierto $\mathfrak{R}_\alpha(z_0)$ y nos proporciona una prolongación analítica de la serie (3.7) en un entorno de z_1, en contra de que z_1 es un punto barrera. $\square$

3.4.4. Caso de la serie geométrica.

Consideremos en particular la serie geométrica. La correspondiente integral (3.16) es

$$\frac{1}{1-z} = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{n=0}^\infty \frac{(zu^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)} du = \int_0^\infty e^{-u} E_\alpha(zu^\alpha) du. \tag{3.22}$$

Gracias al estudio realizado en la sección 2.3 sabemos que, si $-\frac{1}{2}\alpha\pi \leq \arg z \leq \frac{1}{2}\alpha\pi$, la función $E_\alpha(z)$ se comporta como $\exp z^{1/\alpha}$ para valores grandes de $|z|$. En este caso particular estamos considerando la función $E_\alpha(zu^\alpha)$ con z fijo y $u \in [0,\infty)$, luego se tiene que dicha función se comporta como $\exp\left(uz^{1/\alpha}\right)$ cuando u toma valores grandes. De este modo observamos que el integrando se comporta como $\exp\left(u(z^{1/\alpha}-1)\right)$ cuyo módulo es

$$e^{\mathrm{Re}\left(u(z^{1/\alpha}-1)\right)} = e^{u\left(\mathrm{Re}\left(z^{1/\alpha}\right)-1\right)}$$

y por el criterio de comparación deducimos que la integral es convergente cuando $\mathrm{Re}\left(z^{1/\alpha}\right) - 1 < 0$, es decir, en el abierto $\mathrm{Re}(z^{1/\alpha}) < 1$.

Además, en el caso en que $|\arg z| > \frac{1}{2}\alpha\pi$ la función $E_\alpha(z)$ tiende a 0 cuando $|z| \to \infty$, luego para u a partir de un cierto $M > 0$, se tiene que de $|E_\alpha(zu^\alpha)| < 1$ y por tanto el módulo del integrando es menor que e^{-u}.

Deducimos por lo tanto que dicha integral representa la función $1/(1-z)$ en el abierto $\mathrm{Re}(z^{1/\alpha}) < 1$.

Observamos que, fijado $z \in \mathbb{C} \setminus [1,\infty)$, es posible determinar $\alpha > 0$ de modo que $\mathrm{Re}(z^{1/\alpha}) < 1$, y por lo tanto, la representación (3.22) es siempre válida si se escoge para cada z en la estrella principal un valor de $\alpha > 0$ acorde.

3.4.5. Sumabilidad dentro de la estrella de Mittag-Leffler.

Estamos ya en condiciones de completar la solución a nuestro problema de prolongar de forma analítica la serie (3.7) a través de una función f holomorfa en un abierto lo más amplio posible de forma que contenga el disco de convergencia de la serie y coincida con esta dentro de dicho disco. La solución al problema viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.4.8. *Denotemos por f la prolongación analítica de la serie* (3.7). *Se tiene que para todo z en el interior de $\mathcal{B}_\alpha$ la integral*

$$\int_0^\infty e^{-u} a_\alpha(zu^\alpha)du$$

es convergente, y su valor coincide con el de $f(z)$.

Demostración. Sea P un punto z interior de $\mathcal{B}_\alpha$ cuya distancia al origen vamos a denotar por r. Sea Q otro punto de $\mathcal{B}_\alpha$, denotaremos por ρ la distancia entre el origen y Q y por ψ el ángulo entre OP y OQ. El conjunto de puntos Q tales que

$$\rho = r\cos^\alpha \frac{\psi}{\alpha} \tag{3.23}$$

con $-\frac{1}{2}\alpha\pi < \psi < \frac{1}{2}\alpha\pi$, es una curva que delimita un abierto incluido en la estrella principal y en el cual la función f es holomorfa (ver corolario 3.4.3 y curva (3.20)). Como P es un punto interior a $\mathcal{B}_\alpha$, la proposición 3.4.6 nos dice que $P \in \mathcal{B}$ luego f también es holomorfa en un punto P' situado más allá de P en la recta OP y a distancia η de P, con η suficientemente pequeño. Podemos por tanto describir un contorno C' donde $f(z)$ sea holomorfa, ligeramente más grande que (3.23) y que interseca la recta OP en el punto P', construyéndolo de la siguiente manera. Si Q es un punto de la curv (3.23), alargamos el segmento OQ por un pequeño segmento de longitud η. Encontramos por tanto un arco que puede ser completado, hasta convertirlo en una curva cerrada, por un arco de circunferencia de radio η y centro O (figura 3.12).

Sea ξ un punto de C', se tiene que

$$\left(\frac{z}{\xi}\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{|z|e^{\arg z}}{|\xi|e^{\arg \xi}}\right)^{1/\alpha} = \frac{|z|^{1/\alpha}}{|\xi|^{1/\alpha}}e^{\frac{\psi}{\alpha}}.$$

Cuando ξ se encuentra en el arco de circunferencia se tiene que $|\psi| > \frac{1}{2}\alpha\pi$, y por tanto

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{1/\alpha} = \frac{|z|^{1/\alpha}}{|\xi|^{1/\alpha}}\cos\frac{\psi}{\alpha} < 0.$$

En caso contrario se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{1/\alpha} &= \frac{|z|^{1/\alpha}}{|\xi|^{1/\alpha}}\cos\frac{\psi}{\alpha} = \frac{(OP)^{1/\alpha}\cos\frac{\psi}{\alpha}}{(OQ')^{1/\alpha}} = \left(\frac{OQ}{OQ'}\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{OQ}{OQ+\eta}\right)^{1/\alpha}\\ &= \left(1-\frac{\eta}{OQ+\eta}\right)^{1/\alpha} \leq \left(1-\frac{\eta}{OP+\eta}\right)^{1/\alpha} = 1-\delta,\end{aligned}$$

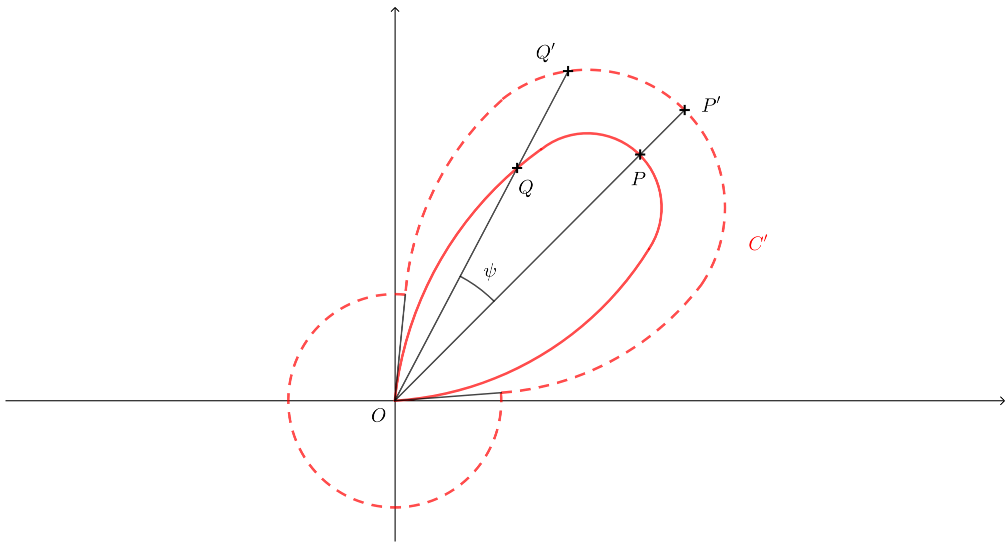

Figura 3.12: Camino C'.

donde δ es un número positivo. Por tanto para todo $\xi \in C'$ tenemos que $\operatorname{Re}(z/\xi)^{1/\alpha} < 1$.

Veamos que además podemos escoger η de modo que $f(z)$ sea holomorfa en todo punto de C' y del abierto que encierra. Denotando el complementario de $\mathcal{B}$ en $\mathbb{C}$ por $\mathcal{B}^c = \mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$ y puesto que C es un compacto contenido en el abierto $\mathcal{B}$, se tiene que $\mathcal{B}^c$ es un cerrado y por tanto la distancia $d = \operatorname{dist}(C, \mathcal{B}^c)$ es estrictamente positiva. Además, como $0 \in C$, se tiene que d es menor o igual que el radio de convergencia de la serie. Por lo tanto, tomando $\eta < d$ nos aseguramos de que C' esté contenido en la estrella principal de la serie (3.7) y por tanto que $f(z)$ sea holomorfa en todo punto de C'.

Teniendo en cuenta la relación (3.22) y la fórmula de Cauchy, se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)}{\xi} \left(\int_0^\infty e^{-u} E_\alpha \left(\frac{z u^\alpha}{\xi} \right) du \right) d\xi
\end{aligned}
$$

siendo la última integral convergente ya que hemos probado que $\operatorname{Re}(z/\xi)^{1/\alpha} < 1$ para cada $\xi \in C'$. Veamos que se puede invertir el orden de integración en esta última integral y que haciendo algunas manipulaciones adicionales obtenemos el resultado deseado.

En primer lugar vamos a integrar respecto de u en el compacto $[0, \omega]$ con $\omega > 0$, denotando dicha integral por $g_\omega(z)$. En virtud del teorema de Fubini, puesto que estamos integrando en un producto de compactos, se tiene que

$$\begin{aligned} g_\omega(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\int_0^\omega e^{-u}E_\alpha\left(\frac{zu^\alpha}{\xi}\right)du\right)d\xi \\ &= \int_0^\omega e^{-u}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}E_\alpha\left(\frac{zu^\alpha}{\xi}\right)d\xi\right)du. \end{aligned}$$

Por tanto, denotando por C'' la circunferencia centrada en 0 con un radio menor que η y lo suficientemente pequeño como para que esta esté contenida en el disco de convergencia de la serie (3.7), podemos intercambiar C' y C'' como caminos de integración puesto que son dos caminos homótopos en un abierto en el cual el integrando es holomorfo y obtenemos por lo tanto

$$\begin{aligned} g_\omega(z) &= \int_0^\omega e^{-u}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\sum_{n=0}^\infty\frac{(zu^\alpha/\xi)^n}{\Gamma(1+\alpha n)}d\xi\right)du \\ &= \int_0^\omega e^{-u}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\xi)}{\xi}\sum_{n=0}^\infty\frac{(zu^\alpha/\xi)^n}{\Gamma(1+\alpha n)}d\xi\right)du \\ &= \int_0^\omega e^{-u}\left(\sum_{n=0}^\infty\frac{(zu^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)}\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi\right)du \\ &= \int_0^\omega e^{-u}\sum_{n=0}^\infty\frac{(zu^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}du \\ &= \int_0^\omega e^{-u}\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{(zu^\alpha)^n}{\Gamma(1+\alpha n)}du = \int_0^\omega e^{-u}a_\alpha(zu^\alpha)du. \end{aligned}$$

Para justificar el cambio en el orden de sumación e integración en la tercera igualdad observamos que la función de Mittag-Leffler es una función entera y por lo tanto su disco de convergencia coincide con todo el plano complejo . Puesto que C'' es un compacto contenido en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, la serie converge uniformemente respecto de ξ. Además, puesto que $\frac{f(\xi)}{\xi}$ es una función holomorfa en C'', dicho factor está acotado y por lo tanto no afecta a la convergencia uniforme.

En segundo lugar vamos a probar que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega e^{-u}E_\alpha\left(\frac{zu^\alpha}{\xi}\right)du\right)d\xi \\ &\quad= \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\xi)}{\xi}\left(\int_0^\omega e^{-u}E_\alpha\left(\frac{zu^\alpha}{\xi}\right)du\right)d\xi. \end{aligned}$$

Como ya mencionamos en el estudio de la serie geométrica, la función $E_\alpha(z)$ se comporta como $\exp z^{1/\alpha}$ para valores grandes de $|z|$. Por lo tanto, en nuestro caso se tiene que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left| E_\alpha \left(\frac{zu^\alpha}{\xi} \right) \right| \leq M \left| \exp \left(\frac{zu^\alpha}{\xi} \right)^{1/\alpha} \right| = M e^{\mathrm{Re}\left(\frac{zu^\alpha}{\xi}\right)^{1/\alpha}} = M e^{u \mathrm{Re}\left(\frac{z}{\xi}\right)^{1/\alpha}}$$

para valores grandes de u. Además, anteriormente hemos probado que para cada $\xi \in C'$ se tiene que $\mathrm{Re}(z/\xi)^{1/\alpha} \leq 1 - \delta$ para cierto $\delta > 0$. Por lo tanto deducimos que

$$\left| e^{-u} E_\alpha \left(\frac{zu^\alpha}{\xi} \right) \right| \leq M e^{-u} e^{u(1-\delta)} = M e^{-\delta u}.$$

Luego se tiene convergencia uniforme respecto de ξ y por lo tanto podemos extraer el límite fuera de la integral, como queríamos probar.

Recapitulando obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)}{\xi} \left(\int_0^\infty e^{-u} E_\alpha \left(\frac{zu^\alpha}{\xi} \right) du \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)}{\xi} \left(\lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega e^{-u} E_\alpha \left(\frac{zu^\alpha}{\xi} \right) du \right) d\xi \\
&= \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(\xi)}{\xi} \left(\int_0^\omega e^{-u} E_\alpha \left(\frac{zu^\alpha}{\zeta} \right) du \right) d\xi \\
&= \lim_{\omega \to \infty} g_\omega(z) = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega e^{-u} a_\alpha(zu^\alpha) du = \int_0^\infty e^{-u} a_\alpha(zu^\alpha) du.
\end{aligned}$$

Por lo tanto vemos que la serie (3.7) es B_α - sumable en cada punto dentro de $\mathcal{B}_\alpha$, siendo $f(z)$ su B_α - suma. □

Si z_0 es un punto de la estrella principal de la serie (3.7) y dado el carácter abierto y estrellado respecto del origen de dicho conjunto, es posible probar que se puede encontrar $\alpha > 0$ de modo que z_0 sea interior a la estrella de Mittag-Leffler $\mathcal{B}_\alpha$, y por lo tanto, la representación de $f(z)$ mediante la integral dada en el teorema 3.4.8 siempre es posible en cada punto de la estrella principal.

En la figura 3.13 podemos ver de manera más detallada cómo escoger un α adecuado. Al ser la estrella principal un abierto, podemos tomar un disco abierto centrado en z_0 y de radio $\varepsilon > 0$ contenido en dicha estrella. Debido al carácter estrellado respecto del origen, para cada punto P del disco, se tiene que el segmento OP también está contenido en la estrella principal. Se deduce de aquí que el abierto delimitado por el disco (incluido) y las tangentes a este trazadas desde el origen está contenido en la estrella. A la vista de la expresión (3.19) y mediante consideraciones geométricas, basta tomar un valor de $\alpha > 0$ suficientemente pequeño (sujeto a la condición $\alpha < \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\varepsilon}{|z_0|}\right)$) y un punto $z = \lambda z_0$, con $\lambda > 1$ y sucientemente

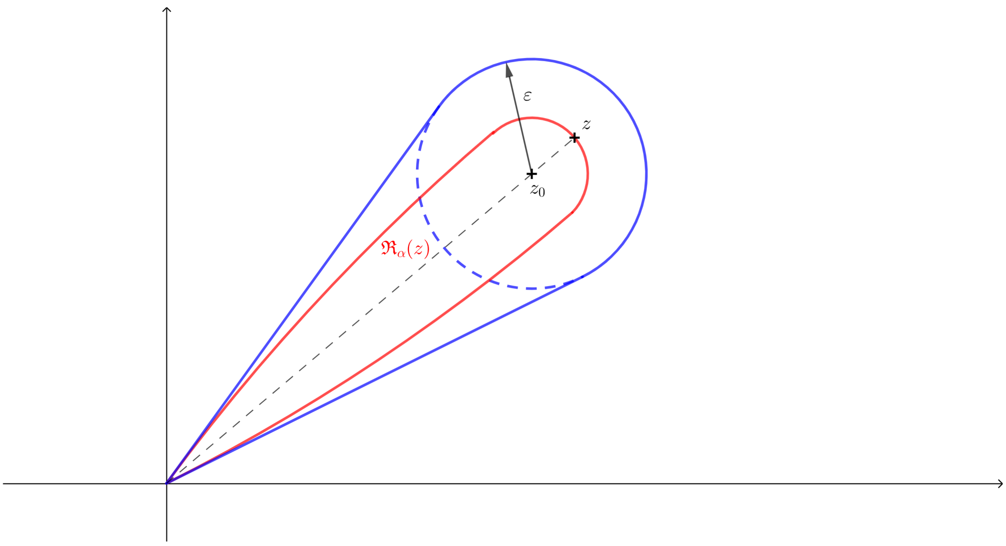

Figura 3.13: El punto z_0 pertenece a $\mathfrak{R}_\alpha(z)$, contenido en $\mathcal{B}$.

próximo a 1 (en particular, ha de ser $\lambda < 1 + \frac{\varepsilon}{|z_0|}$) para garantizar que $z_0 \in \mathfrak{R}_\alpha(z)$, y que además este conjunto está contenido en el abierto del dibujo, y por lo tanto en la estrella principal.

Veamos por último cómo deducir la condición $\alpha < \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\varepsilon}{|z_0|}\right)$ impuesta anteriormente. Observamos que, por la definición de $\mathfrak{R}_\alpha(z)$, para cada $\omega \in \mathfrak{R}_\alpha(z)$ se tiene la condición

$$-\frac{1}{2}\alpha\pi < \arg\frac{z}{\omega} < \frac{1}{2}\alpha\pi,$$

donde sabemos que $\arg\frac{z}{\omega}$ es el ángulo que forman los segmentos Oz y $O\omega$, que denotaremos ψ. Por tanto, para que ω pertenezca a nuestro abierto, el ángulo ψ ha de ser menor que el ángulo formado por el segmento Oz y la tangente al disco, que denotaremos por θ. Se obtiene así la condición $\psi < \frac{1}{2}\alpha\pi < \theta$, de donde deducimos que basta con imponer

$$\alpha < \frac{2}{\pi}\theta.$$

Finalmente, observamos que por razones geométricas, se tiene que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\varepsilon}{|z_0|}$, de donde se deduce que $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\varepsilon}{|z_0|}\right)$. Mostramos una representación gráfica de este razonamiento en el caso más extremo en el que ω se encuentra en la fronetra de $\mathfrak{R}_\alpha(z)$ (figura 3.14).

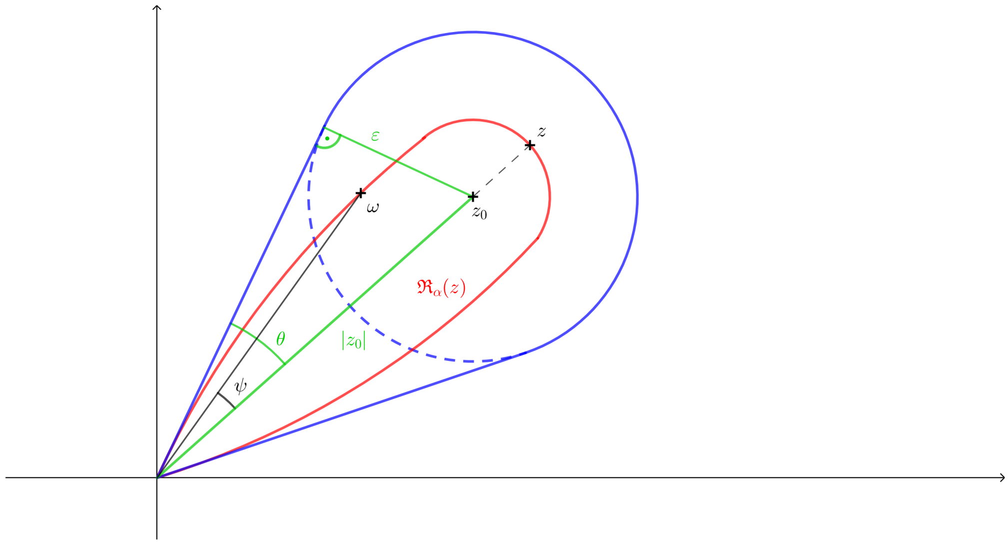

Figura 3.14: Condición $\alpha < \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\varepsilon}{|z_0|}\right)$.

Apéndice A

Productos infinitos.

Recogemos en este apéndice algunos resultados relativos a productos infinitos de números y funciones complejas, necesarios para demostrar el teorema de Weierstrass y para obtener una expresión de la función $\operatorname{sen} \pi z$ en forma de producto infinito que utilizaremos en la prueba de la segunda relación fundamental para Γ.

Definición A.0.1. *Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos, se llama* $n-$ésimo producto parcial *al producto $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_n$. Se dice que el producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty} z_n$ converge si la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente hacia un número complejo P, y en ese caso escribimos $P = \prod_{k=1}^{\infty} z_n$.*

Lema A.0.2. *Sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números complejos con $z_n \neq 0, n = 1, 2, \ldots$ Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si, y solo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$ converge (donde $\log z$ toma la determinación principal del logaritmo, es decir, $-\pi \leq \arg z < \pi$).*

Demostración. Denotemos por $P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} \log z_k$. Si $S_n \to S$ cuando n tiende hacia infinito, entonces $P_n = e^{S_n} \to e^S \neq 0$.

Recíprocamente, supongamos que $P_n \to P \neq 0$. Notemos que $z_n = P_n/P_{n-1} \to P/P = 1$. Sea θ_0 el argumento de P, tomamos $\theta \neq \theta_0$ de manera que la función $\arg_\theta$ (determinación del argumento que toma valores en el intervalo $[\theta, \theta + 2\pi)$) es continua en P. De este modo obtenemos que

$$\log_\theta P_n = \ln |P_n| + i \arg_\theta(P_n) \to \ln |P| + i \arg_\theta(P) = \log_\theta P$$

cuando $n \to \infty$, por continuidad de ambas funciones.

Por otro lado, como $e^{S_n} = P_n$, se tiene

$$S_n = \log_\theta P_n + 2\pi i l_n$$

para algún entero l_n. Además sabemos que

$$S_n - S_{n-1} = \log(z_n) \to \log(1) = 0$$

puesto que, como hemos visto anteriormente, $z_n \to 1$. Por tanto,

$$S_n - S_{n-1} = \log_\theta P_n - \log_\theta P_{n-1} + 2\pi i(l_n - l_{n-1}) \to 0.$$

Como la determinación del logaritmo $\log_\theta$ es continua en P sabenemos que

$$\log_\theta P_n - \log_\theta P_{n-1} \to \log_\theta P - \log_\theta P = 0.$$

Además $l_n - l_{n-1} \in \mathbb{Z}$, luego ha de ser igual a cero a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ en adelante, es decir, a partir de dicho n_0, l_n es constante, digamos que con valor l. Se deduce entonces que

$$S_n \to \log_\theta P + 2\pi i l,$$

con lo que la serie converge como queríamos probar. $\square$

Lema A.0.3. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de números reales con $a_n \geq 0, n = 1, 2, \ldots$ Entonces $\prod_{n=1}^\infty(1 + a_n)$ converge si, y solo si, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge*

Demostración. Puesto que $1 + x \leq e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$a_1 + \cdots + a_n \leq (1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \leq e^{a_1 + \cdots + a_n}.$$

Y así se obtiene lo que se quería probar, pues la acotación (y por tanto la convergencia) de las sumas parciales de $\sum_{n=1}^\infty a_n$ equivale a la acotación (y convergencia) de los productos parciales de $\prod_{n=1}^\infty(1 + a_n)$. $\square$

Definición A.0.4. *Se dice que el producto $\prod_{n=1}^\infty(1 + z_n)$* converge absolutamente *si $\prod_{n=1}^\infty(1 + |z_n|)$ converge.*

Por lo tanto, gracias al lema A.0.3, deducimos que la convergencia absoluta del producto $\prod_{n=1}^\infty(1 + z_n)$ es equivalente a la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^\infty z_n$.

Lema A.0.5. *Si el producto infinito $\prod_{n=1}^\infty(1 + z_n)$ converge absolutamente, entonces converge.*

Demostración. Puesto que $\prod_{n=1}^\infty(1 + |z_n|)$ converge, el lema A.0.3 nos asegura que la serie $\sum_{n=1}^\infty |z_n|$ converge. Por tanto, se tiene que $|z_n| \to 0$, luego podemos suponer que $|z_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además para cada $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$ sabemos que

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n!} = zh(z),$$

donde

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{n-1}}{n!} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \cdots, \ |z| < 1.$$

Entonces para $0 < m \leq p$ tenemos que

$$\left| \sum_{n=m}^{p} \log(1 + z_n) \right| \leq \sum_{n=m}^{p} |\log(1 + z_n)| = \sum_{n=m}^{p} |z_n||h(z_n)|.$$

Como $\{h(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado (puesto que si $z_n \to 0$ entonces $h(z_n) \to 1$), y $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge y por tanto verifica la condición de convergencia de Cauchy, se tiene que

$$\left| \sum_{n=m}^{p} \log(1 + z_n) \right| \to 0, \ m, p \to \infty.$$

Así se obtiene, de nuevo por la condición de Cauchy, que $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + z_n)$ es convergente, lo que implica por el lema A.0.2 que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n)$ converge, como queríamos demostrar. □

El siguiente lema nos servirá como herramienta para probar el resultado que presentaremos a continuación.

Lema A.0.6. *Sean $w_1, \ldots, w_n$ valores complejos cualesquiera. Se verifica entonces que*

$$\left| \prod_{k=1}^{n} (1 + w_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + |w_k|) - 1.$$

Demostración. Razonemos por inducción para $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es obvio, pues se tiene:

$$|1 + w_1 - 1| = |w_1| \leq 1 + |w_1| - 1 = |w_1|.$$

Supongamos que se verifica para n, veamos que entonces se cumple para $n + 1$. En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^{n+1} (1 + w_k) - 1 \right| &= \left| \prod_{k=1}^{n} (1 + w_k)(1 + w_{n+1}) - 1 \right| \\ &= \left| \prod_{k=1}^{n} (1 + w_k) - 1 + w_{n+1} \prod_{k=1}^{n} (1 + w_k) \right|. \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción, la anterior expresión será menor o igual que

$$\prod_{k=1}^{n}(1+|w_k|)-1+|w_{n+1}|\left|\prod_{k=1}^{n}(1+w_k)\right|$$
$$\leq \prod_{k=1}^{n}(1+|w_k|)+|w_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|w_k|)-1=\prod_{k=1}^{n+1}(1+|w_k|)-1,$$

con lo que se concluye. □

Teorema A.0.7. *Si el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ converge absolutamente, entonces cualquier reordenación del mismo también lo hace, y además hacia el mismo límite. Es decir, si $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ converge y $P=\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ entonces para toda permutación $k\mapsto n_k$ se tiene que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z_{n_k})$ también converge hacia P.*

Demostración. La convergencia absoluta del producto implica la convergencia de $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$, y esto a su vez implica que $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ también converge (lema A.0.3). Ahora sabemos, en el caso de series de números reales, que cualquier reordenación $k\mapsto n_k$ de la misma converge y, de nuevo por el lema A.0.3, $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|z_{n_k}|)$ converge.

Veamos ahora que ambos lo hacen al mismo límite P. Para ello denotamos $P_i=\prod_{n=1}^{i}(1+z_n)$ y $Q_j=\prod_{k=1}^{j}(1+z_{n_k})$. Dado $\varepsilon>0$, elegimos un índice N lo suficientemente grande como para que $\sum_{n=N+1}^{\infty}|z_n|<\varepsilon$ y un J tal que para cada $j\geq J$ se cumpla que $\{1,2,\ldots,N\}\subseteq\{n_1,n_2,\ldots,n_j\}$. Entonces para $j\geq J$ se tiene que

$$|Q_j-P|\leq|Q_j-P_N|+|P_N-P|=|P_N|\left|\prod_{\substack{k\leq j\\ n_k>N}}(1+z_{n_k})-1\right|+|P_N-P|.$$

Aplicando el lema A.0.6, obtenemos que

$$|Q_j-P|\leq|P_N|\left|\prod_{\substack{k\leq j\\ n_k>N}}(1+z_{n_k})-1\right|+|P_N-P|\leq|P_N|(e^{\varepsilon}-1)+|P_N-P|.$$

Observamos que, tomando ε suficientemente pequeño y N suficientemente grande, podemos hacer esta última expresión tan pequeña como queramos. Deducimos entonces que $Q_j\to P$, como queríamos probar. □

Proposición A.0.8. *Sea $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones acotadas con valores complejos, definidas en un conjunto $S\subset\mathbb{C}$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|$ converge* *uniformemente en S, entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n)$ converge absoluta y uniformemente en S. Además si $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z)), z\in S$, entonces $f(z)=0$ para algún $z\in S$ si, y solo si $1+g_n(z)=0$ para algún $n\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Como $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|$ converge, el lema A.0.3 nos asegura que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|g_n|)$ converge, es decir, el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n)$ converge absolutamente.

Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|$ converge uniformemente en S, existe un N tal que para $n\geq N$ se tiene que $|g_n(z)|<1$ para todo $z\in S$. Por tanto para $r\geq N$ se tiene

$$\prod_{n=1}^{r}(1+g_n(z))=\prod_{n=1}^{N-1}(1+g_n(z))\prod_{n=N}^{r}(1+g_n(z)).$$

Procedemos como en la demostración del lema A.0.5: tomamos la misma función h y dos naturales $0<m\leq p$, y se tiene que

$$\left|\sum_{n=m}^{p}\log(1+g_n(z))\right|\leq\sum_{n=m}^{p}|g_n(z)||h(g_n(z))|\to 0$$

uniformemente en S cuando $m,p\to\infty$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+g_n(z))$ converge uniformemente en S. Como las funciones $g_N,g_{N+1},\ldots$ están acotadas en S, la serie $\sum_{n=N}^{\infty}|g_n(z)||h(g_n(z))|$ está acotada en S y por la desigualdad anterior también lo está $\sum_{n=N}^{\infty}\log(1+g_n(z))$. Puesto que la función exponencial es uniformemente continua en los conjuntos acotados de $\mathbb{C}$, tenemos que

$$\exp\left(\sum_{n=N}^{r}\log(1+g_n(z))\right)\to\exp\left(\sum_{n=N}^{\infty}\log(1+g_n(z))\right)\neq 0$$

uniformemente en S cuando $r\to\infty$. Esto prueba la convergencia uniforme en S de $\prod_{n=N}^{\infty}(1+g_n(z))$.

Además $1+g_n(z)$ nunca es 0 en S para $n\geq N$, luego si $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))$, entonces $f(z)=0$ para algún $z\in S$ si, y solo si, $1+g_n(z)=0$ para algún $n<N$. $\square$

Teorema A.0.9 (teorema M de Weierstrass)**.** *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto conexo $\Omega\in\mathbb{C}$, ninguna de las cuales es idénticamente nula. Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|1-f_n|$ converge uniformemente en los compactos de Ω. Entonces la función $F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ está bien definida y es holomorfa en Ω. Además se cumple que dado $z\in\Omega$, $F(z)=0$ si, y solo si, $f_n(z)=0$ para algún $n\in\mathbb{N}$.*

Demostración. La proposición A.0.8 aplicada a las funciones $g_n=f_n-1$, nos asegura que el producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+g_n(z))=\prod_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ converge uniformemente en los subconjuntos compactos de Ω. Por lo tanto el teorema de Weierstrass garantiza la holomorfía de F en Ω.

El último enunciado del teorema es de nuevo consecuencia de la proposición A.0.8. $\square$

Corolario A.0.10. *Sea $F : \Omega \to \mathbb{C}$ como en el teorema anterior y $\mathcal{Z}(F) = \{z \in \Omega : F(z) = 0\}$ el conjunto de ceros de F. Para cada $z \in \Omega \backslash \mathcal{Z}(F)$ se tiene que la derivada logarítmica de F es*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

Demostración. Calculando la derivada de F en el punto $z \in \Omega \backslash \mathcal{Z}(F)$ obtenemos que

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n'(z) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} f_k(z) \right).$$

Dividiendo ahora entre $F(z)$ se tiene que

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{f_n'(z) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} f_k(z)}{\prod_{k=1}^{\infty} f_k(z)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

como queríamos porbar. $\square$

Apéndice B

Orden exponencial de una función entera.

El objetivo de este apéndice es introducir el concepto de orden exponencial de una función entera, y obtener una fórmula para su cálculo a partir de los coeficientes de la serie de Taylor de dicha función centrada en el origen.

Definición B.0.1. *Se dice que una función entera f tiene* orden exponencial finito *si existe $\mu \in \mathbb{R}$ positivo y una constante $R(\mu) > 0$ tales que para todo $r > R(\mu)$*

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq e^{r^\mu}$$

Se define el orden de crecimiento exponencial *de f como el ínfimo de todas las constantes μ con dicha propiedad.*

Lema B.0.2. *Sean K y μ números reales positivos. Sea además, para cada n natural*

$$g_n(r) = \frac{e^{Kr^\mu}}{r^n}, \text{ para } r > 0.$$

Entonces se tiene que

$$\left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} \leq g_n(r) = \frac{e^{Kr^\mu}}{r^n}.$$

Demostración. Vamos a probar que, de hecho

$$\min_{r>0} g_n(r) = \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu}.$$

Se trata por lo tanto de un sencillo problema de optimización. Hacemos uso de la derivada logarítmica para obtener la condición que deberán cumplir los candidatos a extremos relativos. Dicha condición es

$$\mu K r^{\mu-1} - \frac{n}{r} = 0$$

Puesto que $r > 0$ podemos multiplicar por r a ambos lados de la igualdad y obtenemos la condición $\nu K r^{\mu-1} - n = 0$. Observamos que claramente se trata de un mínimo y que despejando y sustituyendo en cada una de las g_n, el valor que toma g_n en su mínimo correspondiente es el valor que queríamos obtener. □

Lema B.0.3. *Sea f una función transcendente, es decir, entera y no polinomial, cuyo desarrollo de Taylor es*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Supongamos además que existen $K, \mu > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, tales que

$$|a_n| < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu}, \textit{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Entones para todo $\varepsilon > 0$, existe R_ε tal que para $r > R_\varepsilon$ se tiene que

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon)r^\mu}$$

donde $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Demostración. Vamos a separar en tres sumas la serie de Taylor de f y a acotar cada una de ellas convenientemente utlizando las siguiente observaciones.

Es inmediato, comparando con cualquier serie geométrica convergente, que para K y μ fijos, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{eK\mu}{n}\right)^{n/\mu}$$

es convergente. Por ello existirá $N_1 = N(\mu, K)$ que supondremos mayor que el N del enunciado, $N_1 > N$, cumpliendo que

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} \left(\frac{eK\mu}{n}\right)^{n/\mu} < 1.$$

Ahora, por el lema anterior y por la hipótesis sobre los coeficientes a_n tendremos que, para $n > N$, se cumple que

$$|a_n| < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{n/\mu} \leq g_n(r) = \frac{e^{Kr^\mu}}{r^n}.$$

Es decir, que para cada $n > N$ tenemos que $|a_n|r^n < e^{Kr^\mu}$.

Teniendo en cuenta todas las observaciones anteriores y suponiendo que $r > 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} M(r) &\leq \sum_{n=N_1+1}^{\infty} |a_n|r^n + \sum_{n=N+1}^{N_1} |a_n|r^n + \sum_{n=0}^{N} |a_n|r^n \\ &< 1 + (N_1 - N)e^{Kr^\mu} + r^N \sum_{n=0}^{N} |a_n| < \\ &< e^{Kr^\mu} \left[N_1 - N + e^{-Kr^\mu} \left(1 + r^N \sum_{n=0}^{N} |a_n| \right) \right]. \end{aligned}$$

Además observamos que fijado $\varepsilon > 0$ existe un $R_\varepsilon > 1$ tal que la expresión que figura entre corchetes es menor que $e^{\varepsilon r^\mu}$ para $r > R_\varepsilon$.

Concluimos por tanto que, efectivamente, existe R_ε tal que

$$M(r) < e^{Kr^\mu} e^{\varepsilon r^\mu} = e^{(K+\varepsilon)r^\mu}$$

para cada $r > R_\varepsilon$. □

Proposición B.0.4. *Sea f una función transcendente cuyo desarrollo de Taylor es*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Entonces su orden exponencial viene dado por la fórmula

$$\mu = - \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n \log n}{\log |a_n|}. \tag{B.1}$$

Demostración. Por comodidad vamos a denotar

$$\alpha = - \lim_{n\to\infty} \sup \frac{n \log n}{\log |a_n|}.$$

Sea μ el orden exponencial de la función f, probaremos que:

(i) Si μ es finito, entonces α también lo es y se tiene que $\mu \leq \alpha$.

(ii) Si α es finito, entonces μ también lo es y se tiene que $\alpha \leq \mu$.

Por tanto si uno de dichos valores es finito, el otro también lo es y además coinciden.

(i) Supongamos que f es de orden finito μ. Por definición, para todo $\rho > \mu$ existe $R(\rho)$ tal que $M(r) < e^{r^\rho}$, siempre que $r > R(\rho)$. En virtud de las desigualdades de Cauchy tenemos que para $r > R(\rho)$

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} < \frac{e^{r^\rho}}{r^n} =: g_n(r)$$

Hacemos ahora uso del lema anterior para refinar lo máximo posible la desigualdad anterior. Este nos da los puntos en los que las funciones $g_n(r)$ alcanzan sus valores mínimos y el valor que toma la función $g_n(r)$ en ellos. Es decir, denotando por m_n dichos puntos, se tiene que

$$g_n(m_n) = \left(\frac{e\rho}{n}\right)^{n/\rho}$$

donde $m_n = \left(\frac{n}{\rho}\right)^{1/\rho}$. Notemos que esta información solo nos será de utilidad cuando se cumpla que $m_n > R$. No obstante, vemos que la sucesión de los m_n tiende hacia infinito cuando $n \to \infty$ y podremos encontrar un índice N, que dependerá de $R(\rho)$, tal que $m_n > R(\rho)$ para $n > N$.

En definitiva, tendremos que

$$|a_n| < \left(\frac{e\rho}{n}\right)^{n/\rho}$$

para cada $n > N$. Despejamos ahora ρ en la desigualdad anterior teniendo en cuenta que, puesto que f es una función entera, por el criterio de Cauchy-Hadamard se tiene que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log |a_n|} = 0.$$

Además, $|a_n| < 1$ para n suficientemente grande y por consiguiente tendremos que $\log |a_n| < 0$. Como a continuación vamos a tomar el límite superior cuando $n \to \infty$ podemos suponer que la desigualdad se invertirá cuando multipliquemos por el factor $\log |a_n|$. Obtenemos por tanto

$$\rho > \frac{n[\log(e\rho) - \log(n)]}{\log |a_n|}.$$

Finalmente tomando límite superior nos queda precisamente que

$$\rho \geq - \limsup_{n\to\infty} \frac{n \log n}{\log |a_n|} = \alpha.$$

Como todo lo anterior es válido para cualquier $\rho > \mu$ obtenemos lo que buscábamos, es decir, $\mu \geq \alpha$ y vemos por tanto que si μ es finito entonces α también lo es.

(ii) Supongamos ahora que α es finito. De la definición de α deducimos que dado cualquier $\rho > \alpha$, existe $N = N(\rho)$ tal que

$$-\frac{n\log(n)}{\log|a_n|} < \rho, \text{para todo } n > N.$$

De nuevo, por ser f entera en todo el plano complejo podemos asegurar que existe $N = N(f)$ tal que $\log|a_n| < 0$, para todo $n > N$. Es decir, para índices suficientemente grandes, $n > N(\rho, f)$, podremos despejar $|a_n|$ obteniendo la desigualdad

$$|a_n| < \left(\frac{1}{n}\right)^{n/\rho}, \text{para todo } n > N(\rho, f).$$

En virtud del lema anterior tomando $N = N(\rho, f)$ y $e\rho K = 1$, es decir, $K = 1/e\rho$ podremos asegurar que para todo $\varepsilon > 0$, existe R_ε tal que para cada $r > R_\varepsilon$ se tiene que

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon)r^\rho}.$$

Deducimos por tanto que f tiene orden finito $\mu \leq \rho$ y como esto es válido para cualquier $\rho > \alpha$ obtenemos la desigualdad buscada $\mu \leq \alpha$. Por lo tanto si α es finito, entonces μ también lo es. $\square$

Bibliografía

[1] R. B. Ash, W. P. Novinger: *Complex Variables*, Ed. Dover, 2007.

[2] J. Dieudonné: *Foundations of Modern Analysis*, Ed. Academic Press, 1969.

[3] F. Galindo, J. Sanz, L. A. Tristán: *Guía Práctica de Cálculo Infinitesimal en una Variable Real*, Ed. Thomson-Paraninfo, 2003, Madrid.

[4] A. I. Markushevich: *Theory of Functions of a Complex Variable*, Ed. American Mathematical Society, 2001.

[5] R. Michel: "On Stirling's Formula", *The American Mathematical Monthly*, vol. 109, no. 4, 2002, 388-390.

[6] G. Sansone, J. Gerretsen: *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable*, Ed. Wolters-Noordhoff Publishing, 1960, Groningen.