Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Transformación de Laplace

Autor: Carlos Arranz Simón

Tutor: Luis Alberto Tristán Vega

Índice general

Introducción

El objetivo de este Trabajo Fin de Grado es presentar una introducción de la teoría de la Transformación de Laplace, tanto de funciones como de distribuciones o funciones generalizadas, desde el punto de vista del Análisis Matématico moderno.

Aunque existen una gran cantidad de textos en la literatura que hacen referencia a la Transformada de Laplace, debido principalmente a sus aplicaciones a la hora de resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, esta se suele presentar en el marco de la integral de Riemann y definiendo axiomáticamente las distribuciones y postulando sus propiedades, con el fin de estar al alcance de estudiantes de otras disciplinas sin conocimientos avanzados de análisis matemático. La referencia más importante en esta disciplina es un libro escrito por el matemático alemán Gustav Doetsch [Doe74], cuya primera edición data de 1937. Aunque en este texto ya se tratan la mayoría de los problemas de la Transformada de Laplace, se evita por completo la utilización de la integral de Lebesgue, limitándose a indicar en algunos casos que las pruebas se pueden simplificar utilizando técnicas más avanzadas. En este trabajo se pretende desarrollar la teoría utilizando técnicas propias del Análisis Real, como la integral de Lebesgue, y del Análisis Funcional en el que se apoya la teoría de distribuciones, lo que permite probar de forma más directa muchas de las propiedades tratadas.

En el primer capítulo se desarrolla la teoría de la Transformada de Laplace clásica, esto es, de funciones en el sentido ordinario. Se comienza definiendo de forma precisa la transformación de Laplace para funciones medibles y probando sus propiedades básicas. Se muestran algunos ejemplos de transformadas de funciones elementales habituales en las aplicaciones y se ejemplifican las propiedades anteriores. Posteriormente, en la prueba de resultados relativos a las transformadas de convoluciones, derivadas, holomorfía de la transformada, etc, es cuando se comienza a hacer patente la utilidad de la integral de Lebesgue y su potencia y versatilidad frente a la integral de Riemann. Se cierra el capítulo con el estudio del problema de la inversión, de importancia central en las aplicaciones prácticas. Además del texto de Doetsch mencionado anteriormente, para este capítulo también se utilizan [Sch99] y [Gal19] .

El segundo capitulo se dedica a extender al espacio de funciones generalizadas las propiedades de la transformación de Laplace estudiadas en el capítulo anterior. Aunque se presentan dos definiciones alternativas, tratadas respectivamente por [Doe74] y [Zui91], se opta por la primera por ser más fácil de operar y parecida a la de funciones clásicas. A continuación, se demuestran las propiedades de la transformada para distribuciones, en muchos casos, extendiendo las ya conocidas en el caso funcional y se muestran algunos ejemplos sencillos. En la última sección del capítulo se calculan las transformadas de las pseudofunciones asociadas a las potencias t^n, un resultado que aunque se utiliza en [Doe74] en varias ocasiones aparece sin demostración.

En el último capítulo, se realiza una breve exposición de la aplicación de la transformada de Laplace en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias que culmina con el estudio de las soluciones fundamentales de las ecuaciones, en las que juegan un papel primordial las distribuciones y, en particular, la delta de Dirac. Se concluye con tres ejemplos que tratan de poner en valor la utilidad de las técnicas estudiadas en la resolución de ecuaciones diferenciales.

En los apéndices que siguen a la teoría se exponen algunos resultados utilizados en el desarrollo del texto. En el primero se mencionan resultados propios del análisis real y de la transformación de Fourier, mientras que en el segundo se enuncian la definición y las propiedades más importantes de las funciones generalizadas.

Desarrollo histórico de la transformada de Laplace

La versión moderna de la transformada de Laplace se atribuye a los trabajos del matemático alemán Gustav Doetsch, tras la publicación de su *Theorie und Anwedung der Laplace Transformation* en 1937 se establecieron las bases de una teoría que sigue siendo aceptada en lo esencial hasta el día de hoy. Los trabajos que conducen al establecimiento definitivo de la teoría han sido exhaustivamente estudiados por Michel Deakin en [Dea81] y [Dea82].

Dada una función f, su transformada de Laplace, que será un función de variable compleja, se define como

$$\mathfrak{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt,$$

y resulta de gran utilidad, entre otras cuestiones, en la resolución de ecuaciones diferenciales ordiarias, pues permite tratar el problema mediante métodos algebraicos. Sin embargo, la utilización de fórmulas integrales que involucran al núcleo integral e^{-zt} se remontan a los trabajos de Leonard Euler en la primera mitad del siglo XVIII.

En *de constructe aequationum* y *Institutiones Calculi Integralis*, Euler buscó soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$z(x; a) = \int_0^x e^{at} x(t) dt,$$

donde a es un parámetro real. Sin embargo, las trató de una forma poco sistemática y desde un punto de vista lejano al de los trabajos modernos sobre transformadas integrales. Aún existe cierta controversia acerca de si se pueden considerar auténticas transformadas de Laplace.

En 1759, Joseph-Louis Lagrange publicó un artículo sobre la propagación del sonido (lo que en la actualidad se conoce como ecuación de ondas) en el que transformó una ecuación en derivadas parciales en una ecuación diferencial ordinaria mediante técnicas similares a la transformación de Laplace, aunque no profundizó en su estudio.

Mucho más avanzó Pierre Simón Laplace, quien da nombre a la transformada, a partir de su trabajo *Mémoire sur les approximations des formulas qui sont functiones de trés grandes nombres* de 1782, en el que pasó de buscar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y en diferencias en forma de series de potencias como

$$y(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

a considerar el parámetro continuo

$$y(s) = \int e^{-sx} \phi(x)\, dx,$$

donde la integral es indefinida y los límites, en principio, no se especifican. A medida que avanzó en su investigación reparó en la utilidad de considerar 0 y ∞ como límites de integración.

En *Memoire sur les integrales definus et leur application aux probabilités*, consideró integrales de la forma

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-ax}\, dx$$

evaluando un gran número de expresiones de este tipo mediante métodos ingeniosos. En este trabajo, por ejemplo, se resuelve la ecuación

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 2U + 2\nu \frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2}$$

mediante el uso de la transformación de Laplace. Aunque la esencia del método ya se encontraba en los trabajos de Euler, fue Laplace quién hizo un tratamiento más general y profundo, destacando explícitamente el papel de núcleo integral e^{-st}.

En el año 1800, el francés Lacroix, escritor de libros por excelencia de la época, incluyó en su *Traité des différences et des series* parte de los trabajos de Euler y Laplace contribuyendo a su difusión, destacando la diferencia entre ambos enfoques. A lo largo de este siglo, Fourier y Poisson también contribuyeron indirectamente al desarrollo de la teoría en sus trabajos sobre la transmisión del calor. Mucho más relevante fue la aportación de Cauchy, que incorpora el cálculo de residuos, una importante cantidad de análisis y aplicaciones de la transformada de Fourier y trabaja en métodos simbólicos. Aunque en la totalidad de sus obras se entrevee el cuerpo de una nueva teoría no realizó un tratamiento sistemático de la transformada de Laplace.

El primer intento sistemático de exploración de las propiedades de la transformada de Laplace se puede atribuir a un trabajo póstumo de Abel escrito en los años 1820. Reconoció la transformación como un operador lineal (en el lenguaje actual) y demostró muchas propiedades relevantes, aunque su trabajo pasó muy desapercibido.

Posteriormente, Petzval escribió un libro en dos tomos, *Integration der linearen Differentialgleichungen mit constanten und verinder lichen Coefficienten* que recoge gran parte de lo estudiado hasta 1860. Duplicó y fue más allá del trabajo de autores como Laplace y Lobatto e incorporó otras influencias como Lioville y, en parte, de Cauchy, aunque no explotó completamente el potencial del cálculo de residuos. Fue un alumno suyo, Spitzer, quién empezó a denominar *método de Laplace* a esta serie de técnicas. Fue Poincaré quien introdujo la denominación definitiva de *transformada de Laplace* e investigó la integral en contornos más generales.

El ingeniero británico Oliver Heaviside jugó papel muy destacado en el desarrollo de la transformada de Laplace en la segunda mitad del siglo XIX. Estando fuera de la órbita de la investigación matemática de vanguardia de su época, desarrolló unos métodos para resolver ecuaciones diferenciales, el *cálculo operacional*, en los que procede tratando los operadores diferenciales como variables algebraicas. Aunqué su uso se extendió rápidamente y gozó de una gran popularidad, el método fue criticado por muchos matemáticos de la época por su falta de rigor, pero motivó el trabajo posterior de matemáticos como Bromwich y Van der Pol que trataron de buscarle una justificación rigurosa.

Ya en el siglo XX, Lerch incluyó en su *Acta Mathematica* de 1903 la demostración del teorema sobre la unicidad de la transformación de Laplace, que ahora lleva su nombre, en su versión más fuerte (1.48). Bromwich, Carson y Wagner produjeron diferentes versiones de la tranformada de Laplace en su intento de hacer riguroso el cálculo operacional de Heaviside. El trabajo más relevante de estos tres autores es el de Bromwich, que estudió el problema de la inversión, esto es, de encontrar la función original dada su transformada de Laplace; mediante integrales sobre diferentes caminos en el plano complejo. La fórmula más importante, que ahora lleva su nombre, establece que para una función continua f se cumple que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt} F(z)\, dz.$$

relación que se demostrará en 1.52. Durante la primera mitad del siglo XX, Gustav Doetsch llevó a cabo una síntesis de todo lo anterior publicando en 1937 su *Theorie und Anwedung der Laplace Transformation*, donde toma la forma con la que se la conoce hoy en día.

Capítulo 1

La teoría clásica de la transformada de Laplace

En este capítulo se desarrolla la teoría de la transformación de Laplace clásica, esto es, de funciones en el sentido ordinario, así como la prueba de sus propiedades fundamentales. Se presenta siguiendo la pauta de la teoría de Bromwich, con argumento complejo, mucho más fructífero que el caso real, que es el que se suele presentar en las aplicaciones habituales en Ecuaciones Diferenciales.

1.1. Definición y primeras propiedades

El planteamiento de la transformación de Laplace de una función f pasa por por considerar la existencia de la siguiente familia de integrales:

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Considerando funciones integrables en el intervalo $[0, \infty)$ se obtendría una primera clase de funciones para las que siempre existe algún $s_0 \in \mathbb{C}$ para el que la integral anterior toma un valor finito (basta tomar cualquier s_0 con parte real positiva). Esta es, por ejemplo, la clase de funciones para la que se estudia la transformada de Fourier. Sin embargo, restringirse a la clase de funciones integrables es exagerado, pues excluye a la gran mayoría de funciones útiles en la práctica. Es por ello que se amplía el marco de trabajo a funciones integrables en los conjuntos acotados.

Definición 1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Se dice que una función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *localmente integrable* si es integrable en todo conjunto medible y acotado $K \subset \Omega$ (o, equivalentemente si Ω es abierto o cerrado, en cada conjunto compacto), esto es, si

$$\int_K |f(t)|\, dt < \infty.$$

El conjunto de las funciones localmente integrables en Ω se denota por $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ y es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, con las operaciones habituales.

Observaciones 1.2.

1. La relación en $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$, $f \sim g$ cuando $f \underset{c.s.}{=} g$ en Ω, es una relación de equivalencia, y el espacio cociente se denota por $L^1_{loc}(\Omega)$. Este espacio resulta ser un espacio vectorial con las operaciones definidas entre clases de equivalencia. Puesto que dos funciones iguales casi siempre son idénticas a todos los efectos de integración, este será el espacio que consideraremos para el estudio de la transformación de Laplace.

2. Si $f : \Omega \to \infty$ es una función continua o acotada, entonces es localmente integrable.

3. Si $f \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, entonces es localmente integrable.

La integral que define la transformada de Laplace solo involucra los valores de la función en el intervalo $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, por lo que se conviene en que las funciones definidas en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ toman el valor 0 fuera de dicho intervalo.

Definición 1.3. Se dice que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *admite transformada de Laplace* si existe un número complejo $z \in \mathbb{C}$ tal que la integral

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

existe. La integral anterior se denomina *integral de Laplace de f en z.*

Dado el conjunto

$$L = \left\{ z \in \mathbb{C} : \int_0^\infty f(t) e^{-zt}\, dt < \infty \right\}, \tag{1.1}$$

se denomina *abscisa de convergencia* de la transformada de Laplace de f al valor $\sigma_f = \text{ínf}\, L \cap \mathbb{R} \in [\infty, \infty)$.

Observación 1.4. Las integrales de las funciones en las definiciones anterior se entienden como integrales en el sentido de Lebesgue. En estas condiciones, conviene recordar que la integrabilidad de una función f en el sentido de Lebesgue equivale a la integrabilidad de su módulo $|f|$.

Además, si la función $t \in [0, \infty) \mapsto e^{-zt} f(t)$ es integrable, el Teorema de la Convergencia Dominada garantiza que

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \int_0^T e^{-zt} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt.$$

Por otro lado, si $s = \Re z$ y

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \int_0^T |f(t)|\, e^{-st}\, dt < \infty,$$

el Teorema de la Convergencia Monótona asegura que $|f(t)|\, e^{-st}$ es integrable, por lo que también lo es $f(t) e^{-zt}$.

Antes de definir la función transformada conviene estudiar el conjunto de números complejos para los que la integral anterior existe, que determinará el dominio donde estará definida la transformada de Laplace de una función.

Proposición 1.5. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f. El conjunto L definido en (1.1) de f es o bien un semiplano abierto: $\Re z > \sigma_f$, o bien un semiplano cerrado: $\Re z \geq \sigma_f$; admitiendo la posibilidad de que $\sigma_f = -\infty$.

Demostración. En primer lugar, veamos que si $\Re z > \sigma_f$, entonces $z \in L$. Si $\Re z > \sigma_f$, de la definición de σ_f se deduce que existe $s \in \mathbb{R}$, $\Re z > s > \sigma_f$, tal que existe la integral de Laplace de f en s. En estas condiciones la acotación $\left|e^{-zt}f(t)\right| = \left|e^{-\Re zt}f(t)\right| \leq e^{-st}\left|f(t)\right|$ y el criterio de comparación para integrales permiten concluir que la función $\left|e^{-zt}f(t)\right|$ es integrable en $[0,\infty)$ y, por 1.4, se tiene que $z \in L$.

A continuación, se prueba que si $\Re z < \sigma_f$, entonces $z \notin L$. Se supone que existe z con $\Re z < \sigma_f$ tal que la integral de Laplace de f converge en z. Entonces, se verifica que $\left|e^{-zt}f(t)\right| = \left|e^{-\Re zt}f(t)\right|$ y, puesto que la integrabilidad de una función equivale a la de su módulo, la integral de Laplace de f converge en $\Re z$. Pero esto es absurdo, puesto que entonces $\Re z \in L \cap \mathbb{R}$ y $\Re z < \text{ínf}\, L$, por lo que no existe z con tal propiedad.

Finalmente, si $\Re z = \sigma_f$ se verifica que $\left|e^{-zt}f(t)\right| = e^{-\Re zt}\left|f(t)\right|$ y, puesto que la integrabilidad de una función equivale a la de su módulo, todas las integrales tienen el mismo carácter (esto es, o todas existen o no existe ninguna). ■

Corolario 1.6. Sean $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Si la integral de Laplace de f en s existe para todo $s \in \mathbb{R}$, $s > \gamma$, entonces $\sigma_f \leq \gamma$.

Observación 1.7. En algunos textos se desarrolla la teoría de la transformación de Laplace sin hacer referencia a la integral de Lebesgue, considerando las integrales que aparecen como integrales impropias de Riemann. En este contexto la integrabilidad impropia de una función no equivale a la de su módulo, por lo que el estudio de la abscisa de convergencia es más complicado: se puede definir una abscisa de convergencia absoluta y otra de convergencia simple. Este es el camino que se sigue, por ejemplo, en el libro de Doetsch [Doe74]. Nos limitaremos a estudiar el caso señalado en la proposición 1.5, pues es más adecuado para tratar con la integral de Lebesgue, aunque se adopta la denominación clásica de abscisa "de convergencia" en vez de utilizar el término, quizá más apropiado, de abscisa "de integrabilidad".

Ejemplo 1.8. Se muestran ejemplos de funciones para las que el conjunto L es abierto y cerrado, respectivamente.

Para la función $f(t) = 1/(1+t^2)$ se verifica que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t^2}\,dt < \infty \Leftrightarrow \Re z \geq 0,$$

por lo que $\sigma_f = 0$ y la integral converge para todo $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z = 0$.

Tomando la función $f(t) = 1$, se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,dt < \infty \Leftrightarrow \Re z > 0.$$

En este caso $\sigma_f = 0$, pero la integral no converge para ningún $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z = 0$.

Definición 1.9. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ admite transformada de Laplace y σ_f es su abscisa de convergencia, se denomina *dominio de convergencia* de la transformada de Laplace de f al conjunto

$$D_f = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > \sigma_f\}.$$

Si $\sigma_f = -\infty$, entonces $D_f = \mathbb{C}$. En cualquier otro caso D_f es un semiplano abierto.

Se define la función *transformada de Laplace de f* como $\mathfrak{L}f : D_f \to \mathbb{C}$ tal que

$$\mathfrak{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt.$$

La transformada de Laplace de f se denotará por $\mathfrak{L}f$ o $\mathfrak{L}[f(t)]$.

Ejemplo 1.10 (**La función de Heaviside**)**.** Es habitual en los textos de física e ingeniería llamar *función de Heaviside* (o *escalón unidad*) a la función característica del intervalo $[0, \infty)$, que se denota por H. Explícitamente,

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Si $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z > 0$, entonces

$$\mathfrak{L}H(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, dt = \frac{1}{z},$$

mientras que si $\Re z \leq 0$ la integral anterior no existe. En consecuencia, H admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma_H = 0$ y

$$\mathfrak{L}H(z) = \frac{1}{z} \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma_H.$$

Además, la función de Heaviside resulta de gran utilidad a la hora de manipular funciones trasladadas o desfasadas. Por ejemplo, si $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$, la función *trasladada por t_0 de f*

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < t_0 \\ f(t - t_0) & \text{si} \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

se puede escribir, de forma más sencilla, como $g(t) = H(t - t_0) f(t - t_0)$. Esta ventaja de notación se aprovecha, por ejemplo, en la proposición siguiente.

A continuación se muestran algunas propiedades fundamentales de la transformada de Laplace de una función.

Proposición 1.11 (**Propiedades de la transformada de Laplace**). Sean f y g funciones que admiten transformada de Laplace con abscisas de convergencia σ_f y σ_g, respectivamente. Se verifican las siguientes propiedades:

1. **Linealidad**. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces $\alpha f + \beta g$ admite transformada de Laplace y $\sigma_{\alpha f+\beta g} \leq \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}$. De hecho, si $\sigma_f \neq \sigma_g$ se alcanza la igualdad en la desigualdad anterior. Además,
$$\mathfrak{L}\,[\alpha f + \beta g]\,(z) = \alpha \mathfrak{L} f(z) + \beta \mathfrak{L} g(z), \qquad \text{si} \quad \Re z > \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}\,.$$
Si $\beta = 0$, las afirmaciones anteriores son ciertas con la salvedad de que $\sigma_{\alpha f} = \sigma_f$.

2. **Escalado**. Sean $a > 0$ y $h(t) = f(at)$ para cada $t > 0$. Entonces h admite transformada de Laplace, $\sigma_h = a\sigma_f$, y se verifica
$$\mathfrak{L} h(z) = \frac{1}{a} \mathfrak{L} f\left(\frac{z}{a}\right), \qquad \text{si} \quad \Re z > \sigma_h.$$

3. **Desfase**. Sean $t_0 > 0$ y $h(t) = H(t-t_0) f(t-t_0)$ para cada $t > 0$. Entonces h admite transformada de Laplace, $\sigma_h = \sigma_f$, y se verifica
$$\mathfrak{L} h(z) = e^{-t_0 z} \mathfrak{L} f(z), \qquad \text{si} \quad \Re z > \sigma_h.$$

4. **Modulación**. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $h(t) = e^{z_0 t} f(t)$ para cada $t > 0$. Entonces h admite transformada de Laplace, $\sigma_h = \sigma_f + \Re z_0$ y se verifica
$$\mathfrak{L} h(z) = \mathfrak{L} f(z - z_0), \qquad \text{si} \quad \Re z > \sigma_h.$$

Demostración. Para probar (1), basta observar que, si $\Re z > \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}$,
$$\int_0^\infty e^{-zt} (\alpha f + \beta g)\, dt = \alpha \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt + \beta \int_0^\infty e^{-zt} g(t)\, dt \in \mathbb{C},$$
por lo que $\alpha f + \beta g$ admite transformada de Laplace y $\sigma_{\alpha f+\beta g} \leq \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}$. Además, si $\sigma_f \neq \sigma_g$ (se supone sin pérdida de generalidad que $\sigma_f < \sigma_g$), existe $z \in \mathbb{C}$ con $\sigma_f < \Re z < \sigma_g$, por lo que $\int_0^\infty \left|e^{-zt} f(t)\right|\, dt < \infty$, $\int_0^\infty \left|e^{-zt} g(t)\right|\, dt = \infty$ y se tiene que $\int_0^\infty \left|e^{-zt} (\alpha f + \beta g)\right|\, dt = \infty$; ya que de lo contrario $e^{-zt} \beta g(t)$ sería integrable por ser suma de funciones integrables, lo que es absurdo. Por tanto, $\sigma_{\alpha f+\beta g} \geq \sigma_g = \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}$ y finalmente $\sigma_{\alpha f+\beta g} = \sigma_g$.

Nótese que si f es tal que $\sigma_f \in \mathbb{R}$, tomando $g = f$, $\alpha = -\beta$ se tiene que $\alpha f + \beta g \equiv 0$ y $\sigma_{\alpha f+\beta g} = -\infty$. Pero entonces $\sigma_{\alpha f+\beta g} \neq \sigma_f = \sigma_g$. No siempre se alcanza la igualdad en la desigualdad anterior.

La afirmación (2) se prueba utilizando el cambio de variable $u = at$ en la integral de Laplace de h,
$$\int_0^\infty e^{-zt} h(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt} f(at)\, dt = \int_0^\infty \frac{1}{a} e^{-zu/a} f(u)\, du,$$

que prueba que la primera y la última integral tienen el mismo carácter. Por tanto $\Re z > \sigma_h \Leftrightarrow \Re z/a > \sigma_f$, lo que demuestra que h admite transformada de Laplace con $\sigma_h = a\sigma_f$. La ecuación anterior, para los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\Re z > \sigma_h$, prueba la relación entre las transformadas de f y h que se quería probar.

La prueba de (3) pasa por utilizar el cambio de variable $u = t - t_0$,

$$\int_0^\infty e^{-zt}h(t)\,dt = \int_{t_0}^\infty e^{-zt}f(t-t_0)\,dt = e^{zt_0}\int_0^\infty e^{-zu}f(u)\,du,$$

que prueba que la primera y la última integral tienen el mismo carácter. Por tanto $\Re z > \sigma_h \Leftrightarrow \Re z > \sigma_f$, lo que demuestra que h admite transformada de Laplace con $\sigma_h = \sigma_f$. De nuevo, la última ecuación, para los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\Re z > \sigma_h$, prueba la relación entre las transformadas de f y h que se quería probar.

Finalmente (4) es consecuencia de

$$\int_0^\infty e^{-zt}h(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-zt}e^{z_0t}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}f(t)\,dt,$$

que prueba que la primera y la última integral tienen el mismo carácter y que $\Re z > \sigma_h \Leftrightarrow \Re z - \Re z_0 > \sigma_f$, lo que demuestra que h admite transformada de Laplace con $\sigma_h = \sigma_f + \Re z_0$. La ecuación anterior, para los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\Re z > \sigma_h$, prueba el apartado (4). ■

El siguiente corolario muestra que las propiedades 1.11.2 y 1.11.3 se pueden combinar adecuadamente.

Corolario 1.12. Sea f una función que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f; $a, b > 0$ y $h(t) = H(t - b/a)f(at - b)$ para cada $t > 0$. Entonces h admite transformada de Laplace con $\sigma_h = a\sigma_f$ y además

$$\mathfrak{L}h(z) = \frac{1}{a}e^{-(b/a)z}\mathfrak{L}f\left(\frac{z}{a}\right) \qquad \textit{si } \Re z > \sigma_h.$$

Demostración. Basta aplicar sucesivamente las propiedades 1.11.2 y 1.11.3 a las funciones $g(t) = H(t-b)f(t-b)$ y $h(t) = g(at) = H(t-b/a)f(at-b)$, definidas para cada $t > 0$. ■

La transformada de Laplace de una función desfasada h como en el apartado (3) de 1.11 tiene una expresión sencilla en términos de la de la función original f debido a que h toma los mismos valores que f pero al recorrer el intervalo $[t_0, \infty)$. Si, con la notación utilizada en la proposición, se definiera la función con $t_0 < 0$ la función desfasada no toma los valores de f en el intervalo $[0, t_0)$, por lo que se debe incluir un sumando adicional para corregirlo.

Proposición 1.13 (Fórmula de truncamiento). Sea f una función que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f, $a, b > 0$ y $h(t) = H(t)f(at + b)$ para cada $t > 0$. Entonces h admite transformada de Laplace con $\sigma_f = a\sigma_h$ y, además

$$\mathfrak{L}h(z) = \frac{1}{a}e^{(b/a)z}\left(\mathfrak{L}f\left(\frac{z}{a}\right) - \mathfrak{L}f_b\left(\frac{z}{a}\right)\right) \qquad \text{si } \Re z > \sigma_h$$

donde $f_b(t) = H(b-t)f(t)$ si $t > 0$. Es decir, $f_b(t) = f(t)$ para $t < b$ y $f_b(t) = 0$ para $t > 0$.

Demostración. En primer lugar, conviene notar que como f es localmente integrable y $t \mapsto e^{-zt}$ es una función acotada en todo intervalo cerrado, entonces f_b admite transformada de Laplace con $\sigma_{f_b} = -\infty$. A continuación, si $b > 0$ y $g(t) = f(t+b)$ se tiene que, aplicando el cambio de variable $u = t - b$,

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t+b)\,dt = \int_b^\infty e^{-zu} e^{zb} f(u)\,du =$$
$$e^{zb}\left(\int_0^\infty e^{-zu} f(u)\,du - \int_0^b e^{-zu} f(u)\,du\right).$$

La segunda integral del último miembro es finita e igual a $\mathfrak{L}f_b(z)$, por lo que razonando como en la proposición 1.11 se prueba que $\sigma_g = \sigma_f$. Además, si $\Re z > \sigma_g$ se ha demostrado que

$$\mathfrak{L}g(z) = e^{bz}\left(\mathfrak{L}f(z) - \mathfrak{L}f_b(z)\right).$$

Se concluye aplicando el apartado 2 de 1.11 a $h(t) = g(at) = f(at+b)$. ■

El siguiente teorema, de gran importancia en el estudio de la fórmula de inversión y sus consecuencias, establece que la Transformada de Laplace de una función es siempre una función analítica. Para ello, hay que extender previamente el teorema de derivación bajo el signo integral al caso en el que el parámetro es un número complejo.

Teorema 1.14. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $X \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Sea $f : X \times I \to \mathbb{C}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

(a) Para cada $z \in X$, la función $f_z(t) = f(z,t)$ definida en I es medible y $f_z \in L^1(I)$.

(b) Para cada $t \in I$, la función $f_t(z) = f(z,t)$ es holomorfa en X.

(c) Existe una función no negativa $g \in L^1(I)$ tal que $|f_t'(z)| \leq g(t)$ para todo punto de $X \times I$.

Entonces la función F definida en X por $F(z) = \int_I f(z,t)\,dt$ es holomorfa en X y, además, su derivada viene dada por

$$F'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,dt.$$

Demostración. Se extiende el teorema para el caso de un parámetro real [Apo96, Teorema 10.39] aplicándolo a las partes real e imaginaria de F y utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Puesto que

$$F(z) = \int_I f(z,t)\,dt = \int_I \Re f(z,t)\,dt + i\int_I \Im f(z,t)\,dt = \Re F(z) + i\Im F(z),$$

el teorema real se puede aplicar para derivar paramétricamente las integrales de $\Re f(z,t) = u$ e $\Im f(z,t) = v$ respecto de sus partes real e imaginaria. Puesto que para cada $t \in I$ f_t es holomorfa, en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\begin{aligned} |u_x| = |v_y| = \left|\Re f_t'\right| \le \left|f_t'\right| \le |g| \\ |u_y| = -\left|v_x\right| = \left|\Im f_t'\right| \le \left|f_t'\right| \le |g|\,, \end{aligned}$$

donde el subíndice x denota derivación respecto de la parte real y el subíndice y derivación respecto de la parte imaginaria. En estas condiciones el teorema permite concluir que F es holomorfa, puesto que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} (\Re F)_x = & \int_I u_x\,dt = & \int_I v_y\,dt = (\Im F)_y \\ (\Re F)_y = & \int_I u_y\,dt = & -\int_I v_x\,dt = -(\Im F)_x. \end{aligned}$$

Finalmente, la derivada de F es

$$F'(z) = (\Re F)_x(z) + i(\Im F)_x(z) = \int_I u_x(z,t)\,dt + i\int_I v_x(z,t)\,dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,dt.$$

■

Teorema 1.15 (Holomorfía de la transformada de Laplace). Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f. Entonces, la función $\mathfrak{L}f$ es holomorfa en el semiplano $\Re z > \sigma_f$. Además, si $\Re z > \sigma_f$,

$$(\mathfrak{L}f)^{(n)}(z) = \int_0^\infty (-t)^n e^{-zt} f(t)\,dt = (-1)^n \mathfrak{L}\left[t^n f(t)\right]. \tag{1.2}$$

Demostración. La definición de la transformación de Laplace como una integral paramétrica permite hacer uso del teorema de derivación bajo el signo integral 1.14 para comprobar que es una función holomorfa. Dado z_0 con $\Re z_0 > \sigma_f$, basta acotar la derivada del integrando respecto del parámetro por una función integrable en un entorno de z_0. Sea $\delta > 0$ tal que $\Re z_0 - \delta > \sigma_f$. Entonces, para z con $\Re z \in (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left\{e^{-zt} f(t)\right\}\right| = t\,\left|e^{-zt} f(t)\right| \le \left(t e^{-\Re(z - z_0 + \delta)t}\right)\left|e^{-(z_0-\delta)t} f(t)\right|,$$

donde el primer factor es una función acotada para $t > 0$, pues $\Re(z - z_0 + \delta) > 0$, y el segundo es una función integrable ya que f admite transformada de Laplace y $z_0 - \delta \in D_f$. Por tanto el producto es integrable y, por aplicación del teorema de derivación, $\mathfrak{L}f$ es analítica en z_0 y su derivada es

$$(\mathfrak{L}f)'(z_0) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z}\left\{e^{-zt} f(t)\right\}_{z=z_0} dt = \int_0^\infty -t\,e^{-z_0 t} f(t)\,dt = -\mathfrak{L}\left[t f(t)\right](z_0)$$

siempre que $\Re z_0 > \sigma_f$. Finalmente, procediendo por inducción,

$$(\mathfrak{L}f)^{(n+1)}(z_0) = -\mathfrak{L}\left[t\,(-1)^n t^n f(t)\right]'(z_0) = (-1)^{n+1}\mathfrak{L}\left[t^{n+1}f(t)\right](z_0).$$

■

Corolario 1.16. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f, entonces $t^n f(t)$ también. Además, se cumple la ecuación (1.2).

1.2. Transformadas de Laplace de algunas funciones

En esta sección se estudian las transformadas de Laplace de algunas funciones elementales sencillas con las que se pretende ejemplificar los resultados de la sección anterior. La primera proposición muestra el caso más simple.

Proposición 1.17. Si f es localmente integrable y de soporte compacto, su transformada de Laplace $\mathfrak{L}f$ es una función entera.

Demostración. Puesto que f es de soporte compacto, existe $t_0 > 0$ tal que $f(t) = 0$ siempre que $t > t_0$. Por tanto, para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\int_0^\infty \left|e^{-zt}f(t)\right|\,dt \leq \max_{t\in[0,t_0]}\left|e^{-zt}\right|\int_0^{t_0}|f(t)|\,dt < \infty,$$

puesto que f es localmente integrable. Esto garantiza que $D_f = -\infty$ y $\mathfrak{L}f$ es entera por 1.15. ■

Ejemplo 1.18. Un ejemplo de función que no admite transformada de Laplace lo da la función $f(t) = e^{t^2}$, $t \in [0,\infty)$. f es localmente integrable por ser una función continua y además, para cada $z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-\Re z t}\,|f(t)|\,dt = \infty.$$

Por tanto, f no admite transformada de Laplace.

La razón por la que la función del ejemplo anterior no admite transformada de Laplace es que crece más rápido que e^{st} para todo $s \in \mathbb{R}$. Una condición suficiente, aunque no necesaria, que garantiza la existencia de transformada de Laplace evitando este problema la da la definición siguiente. Aunque la clase de funciones de orden exponencial no engloba a todas las funciones que admiten transformada, sí incluye a muchas de las funciones empleadas habitualmente en las aplicaciones.

Definición 1.19. Una función $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es de *orden exponencial* si existen constantes $M > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $t_0 > 0$, tales que para cada $t > t_0$

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}.$$

En el caso anterior, se escribe $f(t) = o\left(e^{\gamma t}\right)$.

Proposición 1.20. Si f es localmente integrable y de orden exponencial, admite transformada de Laplace. Además, con la notación de la definición anterior, $\sigma_f \leq \gamma$.

Demostración. Cuando $\Re z > \gamma$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\mathfrak{L}f(z)| &\leq \int_0^{t_0} \left|e^{-zt}f(t)\right| dt + \int_{t_0}^{\infty} Me^{-(\Re z-\gamma)t}dt \\ &\leq \max_{t\in[0,t_0]} \left|e^{-zt}\right| \int_0^{t_0} |f(t)|\, dt + \frac{M}{\Re z-\gamma} < \infty, \end{aligned}$$

por lo que la integral existe y $\sigma_f \leq \gamma$ por 1.6. ■

Corolario 1.21. Si f es localmente integrable y acotada, admite transformada de Laplace.

Ejemplo 1.22 (Función de orden no exponencial). La condición de la proposición 1.20 es suficiente pero no necesaria. Como contraejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{n^2} & x \in \left(n, n+\dfrac{1}{e^{n^2}}\right) \qquad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

no es de orden exponencial, puesto que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{t^2}/e^{\gamma t} = \infty$ para todo $\gamma > 0$, pero el teorema de la convergencia monótona asegura que

$$|\mathfrak{L}f(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1/e^{n^2}} e^{n^2}e^{-\Re z\, n}dt = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\Re z\, n} < \infty,$$

puesto que se trata de una serie geométrica que converge si $\Re z > 0$; f admite transformada de Laplace y no es de orden exponencial.

A continuación se estudian algunas de las transformada de Laplace más importantes en las aplicaciones. Este resultado sirve también como ejemplo de aplicación de las propiedades expuestas en la proposición 1.11.

Proposición 1.23. Sean $k \geq 0$, $a \in \mathbb{C}$. Las siguientes funciones, definidas en $[0, \infty)$, admiten transformada de Laplace:

1. $\mathfrak{L}\left[H(t-k)\right](z) = \dfrac{e^{-kz}}{z}$ si $\Re z > \sigma = 0$.
2. $\mathfrak{L}\left[e^{at}\right](z) = \dfrac{1}{z-a}$ si $\Re z > \sigma = \Re a$.
3. $\mathfrak{L}\left[\sin at\right](z) = \dfrac{a}{z^2+a^2}$ si $\Re z > \sigma = |\Im a|$.
4. $\mathfrak{L}\left[\cos at\right](z) = \dfrac{z}{z^2+a^2}$ si $\Re z > \sigma = |\Im a|$.
5. $\mathfrak{L}\left[\sinh at\right](z) = \dfrac{a}{z^2-a^2}$ si $\Re z > \sigma = |\Re a|$.

6. $\mathfrak{L}\left[\cosh at\right](z) = \dfrac{z}{z^2 - a^2} \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma = |\Re a|.$

Demostración. Las transformadas se calculan utilizando la ya conocida transformada de H (prop. 1.10) y las propiedades expuestas en 1.11. Utilizando 1.11.3, se tiene que

$$\mathfrak{L}\left[H(t-k)\right](z) = e^{-kt}\mathfrak{L}H(z) = \frac{e^{-kt}}{z}$$

y que $\sigma = \sigma_H = 0$. La segunda afirmación es consecuencia de 1.10 y 1.11.4:

$$\mathfrak{L}\left[e^{at}\right](z) = \mathfrak{L}H(z-a) = \frac{1}{z-a}$$

y $\sigma = \Re a + \sigma_H = \Re a$. Para probar (3), notemos que $\sin(at) = (1/2i)[e^{iat} - e^{-iat}]$. Combinándolo con la afirmación (2) y la propiedad 1.11.1 se tiene

$$\mathfrak{L}\left[\sin at\right] = \frac{1}{2i}\left(\mathfrak{L}\left[e^{at}\right](z) - \mathfrak{L}\left[e^{-at}\right](z)\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia}\right) = \frac{a}{z^2+a^2}.$$

Además, $\sigma = \max\{\Re(ia), \Re(-ia)\} = \max\{-\Im a, \Im a\} = |\Im a|$. Los resultados (4), (5) y (6) se deducen razonando análogamente a la (3) teniendo en cuenta las definiciones de las funciones correspondientes: $\cos at = (1/2)[e^{iat} + e^{-iat}]$, $\sinh at = (1/2)[e^{at} - e^{-at}]$ y $\cosh at = (1/2)[e^{at} + e^{-at}]$. ∎

En la siguiente proposición se muestra una de las posibles aplicaciones de la fórmula de truncamiento.

Proposición 1.24. Sean $a, b > 0$. Las siguientes funciones, definidas en $[0, \infty)$, admiten transformada de Laplace:

1. $\mathfrak{L}\left[\sin(at+b)\right](z) = \dfrac{z\sin b + a\cos b}{z^2+a^2} \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma = |\Im a|.$

2. $\mathfrak{L}\left[\cos(at+b)\right](z) = \dfrac{z\cos b - a\sin b}{z^2+a^2} \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma = |\Im a|.$

Demostración. Si $f(t) = \sin(at)$ y $g(t) = \sin(at+b)$, las funciones se relacionan según $g(t) = f(t + b/a)$. Siguiendo lo indicado en la proposición 1.13 se calcula en primer lugar la transformada de la función truncada $f_{b/a}$

$$\mathfrak{L}f_{b/a}(z) = \int_0^{b/a} e^{-zt}\sin(at)\,dt = \frac{a - e^{-(b/a)z}\left(z\sin b + a\cos b\right)}{z^2+a^2}$$

y recurriendo a la proposición, con un desplazamiento $t_0 = b/a$, y al resultado anterior 1.23.3,

$$\mathfrak{L}g(z) = e^{(b/a)z}\left(\mathfrak{L}f(z) - \mathfrak{L}f_{(b/a)}(z)\right) = \frac{z\sin b + a\cos b}{z^2+a^2}.$$

Además, $\sigma_g = \sigma_f$. La otra transformada se calcula de manera análoga. ∎

Proposición 1.25. Sea $b \in \mathbb{C}$, $\Re b > -1$. Las siguientes funciones, definidas en $[0, \infty)$, admiten transformada de Laplace:

$$\mathfrak{L}\left[t^b\right](z) = \frac{\Gamma(b+1)}{z^{b+1}} \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma = 0.$$

En particular, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{L}\left[t^n\right](z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma = 0$$

$$\mathfrak{L}\left[t^{n-1/2}\right](z) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}\frac{1}{z^{n+1/2}} \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma = 0$$

Demostración. Cabe hacer las siguientes aclaraciones acerca de la definición de las funciones en anteriores. Para las potencias se escoge la rama principal del logaritmo $z^{b+1} = e^{(b+1)\log z}$, expresión que está bien definida siempre que $\Re z > 0$. Además, la función *Gamma de Euler* admite la siguiente representación integral, si $\Re z > 0$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

Además, Γ es holomorfa en el semiplano real positivo. Dado $b \in \mathbb{C}$ con $\Re b > -1$, se razona en primer lugar para los $s \in \mathbb{R}$ con $s > 0$. Aplicando el cambio de variable $st = u$ en la integral de Laplace de t^{b+1} se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-st}t^b\,dt = \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^b\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{b+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^b\,du = \frac{\Gamma(b+1)}{s^{b+1}},$$

por lo que la función admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma \leq 0$. La función $z \in \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\} \mapsto \Gamma(b+1)/z^{b+1}$ es una función analítica que coincide en $\{z \in \mathbb{C} \cap \mathbb{R} : z > 0\}$, un conjunto con puntos de acumulación, con la transformada de Laplace de la función considerada, que también es analítica en virtud del teorema 1.15. En estas condiciones, el principio de identidad para funciones holomorfas (ver [Ash07, p.33, corolario 2.4.9]) garantiza que ambas funciones coinciden. Además, puesto que $z \in \{\Re z > 0\} \mapsto \Gamma(b+1)/z^{b+1}$ no se puede extender a una función holomorfa que contenga a la recta vertical $\{z \in \mathbb{C} : \Re z = 0\}$, la abscisa de convergencia de la transformación es precisamente $\sigma = 0$. Para terminar basta con particularizar los valores de la función Gamma en los puntos de la forma n y $n + 1/2$ si $n \in \mathbb{N}$. ■

En algunas aplicaciones prácticas de la transformada de Laplace, por ejemplo, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales relacionados con la teoría de circuitos, es habitual tratar con funciones periódicas. El siguiente resultado facilita el cálculo de la transformada de tales funciones.

Proposición 1.26. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ una función periódica con período $T > 0$, esto es, $f(t+T) = f(t)$ si $t > 0$. Entonces, f admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma_f \leq 0$ y para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re z > 0$, se tiene que

$$\mathfrak{L}f(z) = \frac{1}{1-e^{-zT}}\int_0^T e^{-zt}f(t)\,dt.$$

Demostración. En primer lugar, veamos que f admite transformada de Laplace. Si $z \in \mathbb{C}$ y $\Re z > 0$, se tiene que

$$\int_0^\infty \left|e^{-zt} f(t)\right| \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} \left|e^{-zt} f(t)\right| \, dt =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \left|e^{-z(u+nT)} f(u+nT)\right| \, du \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Re z nT} \int_0^T |f(u)| \, du < \infty,$$

donde el primer paso es consecuencia del teorema de la convergencia monótona, en el segundo se aplica el cambio de variable $u = t - nT$ en cada intervalo $(nT, (n{+}1)T)$ y el tercero se sigue de que $\left|e^{-zu}\chi_{[0,T]}\right| \leq 1$ si $\Re z > 0$ y de la periodicidad de f. Finalmente, la convergencia de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Re z nT}$ para $\Re z > 0$ y el carácter localmente integrable de f garantizan que la integral es finita. Por lo tanto, f admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma_f \leq 0$. En estas condiciones, el teorema de la convergencia dominada permite operar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-zt} f(t) \, dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-zt} f(t) \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-znT} \int_0^T e^{-zt} f(t) \, dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-zT}} \int_0^T e^{-zu} f(u) \, du. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.27 (La función onda cuadrada). La proposición 1.26 se puede aplicar para calcular de forma sencilla la transformada de Laplace de la *función onda cuadrada* s definida como

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [2n, 2n+1) \qquad n \in \mathbb{N}_0 \\ -1 & \text{si} \quad t \in [2n+1, 2n+2) \qquad n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Claramente s es una función periódica con período $T = 2$ y es localmente integrable. Por lo tanto, la proposición 1.26 asegura que s admite transformada de Laplace con $\sigma_f \leq 0$ y, además,

$$\mathfrak{L}s(z) = \frac{1}{1 - e^{-2z}} \left(\int_0^1 e^{-zt} \, dt - \int_1^2 e^{-zt} \, dt \right) = \frac{1 - 2e^{-z} + e^{-2z}}{z\,(1 - e^{-2z})} = \frac{e^z - 1}{z\,(e^z + 1)}$$

si $\Re z > 0$. Esta función se puede escribir en términos de la función tangente hiperbólica:

$$\mathfrak{L}s(z) = \frac{1}{z} \tanh \frac{z}{2}.$$

1.3. Transformadas de Laplace de primitivas, derivadas y convoluciones.

La transformación de Laplace resulta de gran utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales e integrales, puesto que convierte las operaciones de derivación e integración respecto de la variable original en operaciones algebraicas (multiplicaciones y divisiones) en el dominio transformado. Esta sección se ocupa de estas ideas.

1.3.1. Transformada de Laplace de la convolución

Definición 1.28. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funciones medibles y $x \in \mathbb{R}$. Se define el *producto de convolución*, o simplemente convolución, de f con g en el punto x, y se representa por $(f * g)(x)$, como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\, dy,$$

si dicha integral existe.

Observación 1.29. La convolución de dos funciones definidas en $\mathbb{R}_+$ se reduce a

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)\, dx = \int_0^t f(x)g(t-x)\, dx,$$

puesto que si $x < 0$, $f(x) = 0$ y si $t < x$, entonces $g(t-x) = 0$. Además, $(f * g)(t) = 0$ si $t < 0$ pues solo intervienen en la integral los valores de f con abscisa negativa. También ocurre que $|(f * g)(t)| \leq \int_0^t |f(x)g(t-x)|\, dx$.

Proposición 1.30. Sean $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. La convolución de f con g está bien definida para casi todo $t \in \mathbb{R}$, esto es, la integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)\, dx$$

existe para casi todo $t \in \mathbb{R}$. Además, $f * g$ es una función localmente integrable.

Demostración. Dado $M \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\int_0^M (f * g)(t)\, dt = \int_0^M \int_0^t f(x)g(t-x)\, dx\ dt = \iint_A f(x)g(t-x)\, dxdt$$

donde A es el conjunto $A = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq t \leq M\}$. La aplicación

$$\phi : (x,t) \in A \to (x, t-x) \in B = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u, 0 \leq v, 0 \leq u+v \leq M\}$$

es un difeomorfismo entre los conjuntos A y B. Por lo tanto, el teorema del cambio de variable permite concluir que

$$\left|\int_0^M (f * g)(t)\, dt\right| = \left|\iint_B f(u)g(v)\, du\, dv\right| \leq \int_0^M |f(u)|\, du \int_0^M |g(v)|\, dv < \infty,$$

por lo que $f * g$ es integrable en cada intervalo $[0, M]$ con $M \in \mathbb{N}$, así que $f * g$ es localmente integrable. En particular, $f * g$ está bien definida en casi todo punto de $[0, M]$. Si $A_M \subset [0, M]$ es el conjunto (de medida nula) para el que no existe la integral en cada intervalo $[0, M]$, entonces $f * g$ está bien definida en $\mathbb{R}$ salvo, a lo sumo, en $\cup_{M \in \mathbb{N}} A_M$, que es un conjunto de medida nula. ■

Teorema 1.31 (**Transformada de Laplace de la convolución**)**.** Sean f y g funciones que admiten transformada de Laplace con abscisas de convergencia σ_f y σ_g. Entonces $f*g$ admite transformada de Laplace y $\sigma_{f*g} \leq \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}$. Además, si $\Re z > \sigma_{f*g}$, se tiene que

$$\mathfrak{L}\,[f*g]\,(z) = \mathfrak{L}f(z)\mathfrak{L}g(z).$$

Demostración. Se trata de aplicar el criterio de Tonelli para garantizar que $f*g$ admite transformada de Laplace. En primer lugar, notemos que en virtud de la observación 1.29,

$$|(f*g)(t)| \leq \int_0^t |f(x)g(t-x)|\,dx.$$

Sea $A = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq t\right\}$. Si $s \in \mathbb{R}, s > \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}$, se verifica, en virtud de la observación 1.29, que

$$\int_0^\infty e^{-st} \int_0^t |f(x)g(t-x)|\;dx\,dt = \iint\limits_A e^{-sx}e^{-s(t-x)}\,|f(x)g(t-x)|\;dx\,dt.$$

A continuación se aplica el teorema del cambio de variable con el difeomorfismo $(u,v) : A \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) = (x, t-x)$. Dicho teorema garantiza que la integral anterior tiene el mismo carácter y es igual que

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-su}\,|f(u)|\,e^{-sv}\,|g(v)|\;du\,dv = \int_0^\infty e^{-su}\,|f(u)|\;du \int_0^\infty e^{-sv}\,|g(v)|\;dv < \infty,$$

que es finita porque $s \in D_f \cap D_g$. El criterio de Tonelli garantiza que la función $e^{-st}\,|f(x)g(t-x)|\,\chi_A$ es integrable y por el criterio de comparación, la integral de Laplace de $f*g$ existe si $\Re z > s$, lo que prueba que $\sigma_{f*g} \leq \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}$. Aplicando el teorema de Fubini y operando como se hizo en la ecuación anterior se establece finalmente la igualdad

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\,[f*g]\,(z) &= \int_0^\infty e^{-zt}\int_0^t f(x)g(t-x)\,dx\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-zu}f(u)\,du \int_0^\infty e^{-zv}g(v)\,dv = \mathfrak{L}f(z)\mathfrak{L}g(z)
\end{aligned}$$

para $\Re z > \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}$. ■

1.3.2. Transformada de Laplace de la primitiva

Una función localmente integrable admite infinitas primitivas, pues al sumar una constante cualquiera a una primitiva se obtiene otra. A la única primitiva de una función f que se anula en $-\infty$ se la denomina tradicionalmente integrador de f. Para una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ el integrador φ se escribe de la siguente manera:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx = \int_0^t f(x)dx$$

Teorema 1.32 (transformada de Laplace del integrador). Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f, y sea $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ cuando $t \geq 0$. Entonces:

1. La función φ admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma_\varphi \leq \text{máx}\{0, \sigma_f\}$ y se verifica
$$\mathfrak{L}\varphi(z) = \frac{1}{z}\mathfrak{L}f(z) \qquad \text{si} \quad \Re z > \text{máx}\{0, \sigma_f\}.$$

2. Si $s > \text{máx}\{0, \sigma_f\}$,
$$\varphi(t) = o\left(e^{st}\right),$$
esto es, la función φ es de orden exponencial.

Demostración. En virtud de la observación 1.29, la función φ se puede escribir como
$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty f(\tau)H(t-\tau)\, d\tau = (f * H)(t).$$
En el ejemplo 1.10 se demostró que H admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma_H = 0$. Por lo tanto, el teorema 1.31 garantiza que φ admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma_\varphi \leq \text{máx}\{\sigma_H, \sigma_f\} = \text{máx}\{0, \sigma_f\}$. Además,
$$\mathfrak{L}\varphi(z) = \mathfrak{L}[f * H](z) = \mathfrak{L}f(z)\mathfrak{L}H(z) = \frac{1}{z}\mathfrak{L}f(z), \quad \text{si} \quad \Re z > \text{máx}\{0, \sigma_f\}.$$
Finalmente,
$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq \int_0^t |\varphi(\tau)|\, d\tau = \int_0^t e^{s\tau}e^{-s\tau}|\varphi(\tau)|\, d\tau \\ &\leq e^{st}\int_0^t e^{-s\tau}|\varphi(\tau)|\, d\tau \leq e^{st}\int_0^\infty e^{-s\tau}|\varphi(\tau)|\, d\tau \end{aligned}$$
y como la última integral es finita porque $s \in D_\varphi$, se verifica que φ es una función de orden exponencial. ■

La transformada de otra primitiva de f, que diferirá en una constante aditiva del integrador, se obtendrá a partir del resultado anterior y teniendo en cuenta la linealidad de la transformación y que las funciones constantes admiten transformada de Laplace.

1.3.3. Transformada de Laplace de las derivadas

Definición 1.33. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Se dice que $f : I \to \mathbb{C}$ es de clase $\mathcal{C}^1((0,\infty))$ a trozos si $f \in \mathcal{C}^{k-1}(I)$ y existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \in I$ y $t_n < t_{n+1}$ tal que $f^{(k-1)}$ es derivable en $I \setminus \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$

Lema 1.34. Si f es de clase $\mathcal{C}^1((0,\infty))$ a trozos y f' es localmente integrable, entonces el límite
$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$$

existe y es finito. Además, para cada $t \in I$,

$$f(t) = f(0^+) + \int_0^t f'(t)\, dt.$$

Demostración. Como f es de clase $\mathcal{C}^1((0,\infty))$ a trozos, existe $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \in I$ y $t_n < t_{n+1}$ tal que $f^{(k-1)}$ es derivable en $I \setminus \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se supone sin pérdida de generalidad que $t_1 = 0$. El Teorema Fundamental del Cálculo garantiza que para todo $a_n \in (t_n, t_{n+1})$ se tiene que

$$f(t) = f(a_n) + \int_{a_n}^t f'(x)\, dx, \qquad \text{si} \quad t_n < t < t_{n+1}.$$

f' es localmente integrable, en particular, es integrable en (t_n, t_{n+1}) y se verifica que (ver observación 1.4)

$$f(t_n^+) = \lim_{t\to t_n^+} f(t) = f(a_n) - \int_{t_n}^{a_n} f'(x)\, dx.$$

En particular, existe $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$. Como f es continua, $f(t_n^-) = f(t_n^+)$ si $n > 1$. En consecuencia, para cada $t \in (t_n, t_{n+1})$,

$$f(t_n^+) + \int_{t_n}^t f'(x)\, dx = f(a_n) - \int_{t_n}^{a_n} f'(x)\, dx + \int_{t_n}^t f'(x)\, dx = f(t).$$

Por último, dado $t \in (0,\infty)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_n < t \leq t_{n+1}$ y se tiene que

$$\begin{aligned} f(0^+) + \int_0^t f'(x)\, dx = f(0^+) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(x)\, dx + \int_{t_n}^t f'(x)\, dx &= \\ f(0^+) + \sum_{k=1}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k)) + \int_{t_n}^t f'(x)\, dx = f(t_n) + \int_{t_n}^t f'(x)\, dx &= f(t). \end{aligned}$$

■

Teorema 1.35. Supongamos que f es de clase $\mathcal{C}^1((0,\infty))$ a trozos y que $f^{(n)}$ admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_{f_n}. Entonces:

1. Existen los límites

$$\lim_{t\to 0} f^{(j)}(t) = f^{(j)}(0^+), \qquad 0 \leq j \leq n-1.$$

2. f admite transformada de Laplace y $\sigma_f \leq \max\{\sigma_{f_n}, 0\}$. Además, si $\Re z > \max\{\sigma_{f_n}, 0\}$,

$$\mathfrak{L}\left[f^{(n)}\right](z) = z^n \mathfrak{L}f(z) - z^{n-1} f(0^+) - z^{n-2} f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+).$$

3. Las derivadas hasta el orden $n-1$ de f son de orden exponencial. Concretamente, si $s > \max\{\sigma_{f_n}, 0\}$,

$$f^j(t) = o\left(e^{st}\right) \qquad \textit{cuando } t \to \infty \qquad 0 \le j \le n-1.$$

Demostración. Como $f^{(n)}$ admite transformada de Laplace, es localmente integrable y el lema 1.34 garantiza que existe $\lim_{t\to 0^+} f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(0^+)$ y que, para cada $t \in (0,\infty)$,

$$f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(0^+) + \int_0^t f^{(n)}(x)\,dx.$$

Para el primer sumando $\mathfrak{L}\left[f^{(n-1)}(0^+)\right] = f(0^+)/z$ si $\Re z > 0$ (las funciones constantes admiten TL con abscisa de convergencia $\sigma = 0$). El teorema 1.32 garantiza que el segundo sumando admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma \le \max\{\sigma_{f_n}, 0\}$ y que es igual a $\mathfrak{L}\left[f^{(n)}\right](z)/z$. Finalmente, por la propiedad de linealidad de la TL (1.11.1) se verifica que

$$\mathfrak{L}\left[f^{(n)}\right](z) = z\mathfrak{L}\left[f^{(n-1)}\right](z) - f^{(n-1)}(0^+) \qquad \text{si} \quad \Re z > \max\{\sigma_{f_n}, 0\}.$$

Además, si $s > \max\{\sigma_{f_n}, 0\}$ el teorema 1.32 asegura que $f^{n-1}(t) = o\left(e^{st}\right)$ cuando $t \to \infty$. Aplicando sucesivamente el mismo razonamiento a $f^{(j)}$, $j = n-1, n-2, \ldots, 0$ y razonando por inducción se demuestran los tres apartados del teorema. ■

Observaciones 1.36.

1. Si las funciones $f^{(j)}$, $j = 0;\cdots n$ son continuas en $t=0$ por la derecha, la ecuación en 1.35.2 se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathfrak{L}\left[f^{(n)}\right](z) = z^n\mathfrak{L}\left[f(t) - \left(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \cdots + \frac{f^{(n-1)(0)}}{(n-1)!}t^{n-1}\right)\right](z).$$

   Donde se pueden reconocer en la función entre corchetes los n primeros términos del desarrollo de Taylor de f en torno a $t=0$.

2. En el teorema 1.35, la hipótesis de que f sea de clase $\mathcal{C}^n((0,\infty))$ a trozos se puede sustituir por que las funciones $f^{(i)}$, para $0 \le i < n$, sean absolutamente continuas (ver apéndice A). De hecho, el lema 1.34 prueba precisamente para las funciones de clase $\mathcal{C}^n((0,\infty))$ a trozos y localmente integrables las primeras $n-1$ derivadas son funciones absolutamente continuas. Esta hipótesis más sencilla se incluye, en primer lugar, porque no es necesario recurrir a los métodos del Análisis Real avanzado. En segundo lugar, porque las funciones regulares a trozos aparecen frecuentemente en las aplicaciones prácticas, veáse por ejemplo

Ejemplo 1.37 (**La función dientes de sierra**)**.** La función *dientes de sierra* S en $\mathbb{R}$ está caracterizada por ser la única función continua que toma el valor 1 en los enteros impares, 0 en los enteros pares y en el resto es lineal afin. Esta función se puede expresar como

$$S(t) = 1 - |t - (2n+1)| \quad \text{si} \quad t \in [2n, 2n+2].$$

Sin embargo, se puede expresar de forma más sencilla a partir de la función onda cuadrada presentada en el ejemplo 1.27 como

$$S(t) = \int_0^t s(\tau)\, d\tau,$$

basta notar que $S'(t) = s(t)$ si $t \notin \mathbb{Z}$ y que $S(0) = 0$ y aplicar el lema 1.34. En estas condiciones, el teorema 1.32 prueba que S admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma_S \leq 0$ y que

$$\mathfrak{L}S(z) = \frac{1}{z}\mathfrak{L}s(z) = \frac{1}{z^2}\tanh\frac{z}{2} \quad \text{si} \quad \Re z > 0.$$

1.4. Valor final de la transformada de Laplace

El objetivo de esta sección es probar que la transformada de Laplace de una función localmente integrable tiende a 0 cuando el módulo de su argumento tiende a infinito, en un sentido que se precisará.

El primer resultado muestra que la función transformada se anula en el infinito cuando la variable tiende a infinito a través de ciertos sectores angulares. En lo que sigue, se denota por $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$, para $z \in \mathbb{C}$, el argumento de un número complejo en su determinación principal.

Proposición 1.38. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f y $z_0 \in \mathbb{R}$ con $z_0 > \sigma_f$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que si $|\arg(z - z_0)| \leq \psi < \pi/2$ y $|z - z_0| > R$, se tiene que $|\mathfrak{L}f(z)| < \epsilon$.

En particular, si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $|\arg(z_n - z_0)| \leq \psi < \pi/2$ y $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, se tiene que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathfrak{L}f(z_n) = 0$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $z \in \mathbb{C}, \Re z > 0$, con $|\arg(z - z_0)| \leq \psi < \pi/2$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\int_0^\delta \left|e^{-zt} f(t)\right| dt \leq \int_0^\delta |f(t)|\, dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

Además, si $\Re z > \Re z_0$ la función $t \mapsto \left|e^{-(z-z_0)t}\right|$ es decreciente, por lo que alcanza su máximo en un intervalo en el extremo inferior del mismo. Esta función tiende a 0 cuando t tiende a infinito. Por tanto, se tiene que para valores suficientemente grandes (digamos, $\Re z > \alpha$):

$$\left|\int_\delta^\infty e^{-zt} f(t)\, dt\right| \leq e^{-\Re(z-z_0)\delta} \int_\delta^\infty \left|e^{-z_0 t} f(t)\right| dt = M e^{-\Re(z-z_0)\delta} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si $\Re z > \text{máx}\,\{0, z_0, \alpha\}$ se verifica que

$$|\mathfrak{L}(z)| \leq \left| \int_0^\delta e^{-zt} f(t)\, dt \right| + \left| \int_\delta^\infty e^{-zt} f(t)\, dt \right| < \epsilon.$$

Finalmente, basta ver que para cada z con $|\arg(z - z_0)| \leq \psi < \pi/2$ se tiene que

$$0 < \cos\psi \leq \cos(\arg(z - z_0)) = \frac{\Re(z - z_0)}{|z - z_0|} \Rightarrow \Re z \geq \Re z_0 + |z - z_0| \cos\psi,$$

por lo que la primera parte del teorema se concluye tomando R de forma que si $|z - z_0| \geq R$, entonces $\Re z > \text{máx}\,\{0, z_0, \alpha\}$. La segunda parte de la proposición es consecuencia directa de la primera. ■

A continuación se presenta un lema importante en la teoría de series y transformadas de Fourier: el lema de Riemann-Lebesgue. Este resultado asegura que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de una función en un intervalo cerrado tienden a 0 cuando n tiende a infinito. También establece que la transformada de Fourier de una función integrable tiende a 0 en infinito. Aquí se enuncia una versión general del lema cuya prueba puede encontrarse en [Bac00].

Lema 1.39 (de Riemann-Lebesgue). Para cada $f \in L^1([a, b])$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, y para cada función medible y acotada h definida en $\mathbb{R}$ que verifica la *condición de promedio*

$$\lim_{c \to \pm\infty} \frac{1}{c} \int_0^c h(t)\, dt = 0,$$

entonces,

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_a^b f(t) h(\omega t)\, dt = 0$$

Observación 1.40. Las funciones sinusoidales sin y cos satisfacen la condición de promedio anterior. Por ejemplo, para $h(t) = \text{sen}(t)$:

$$\left| \frac{1}{c} \int_0^c \sin t\, dt \right| = \left| \frac{1}{c}(1 - \cos c) \right| \leq \frac{2}{|c|} \to 0 \qquad \text{cuando} c \to \pm\infty,$$

razonándose análogamente con la función coseno. Si f es una función compleja e integrable se verifica que:

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \int_0^\infty e^{i\omega t} f(t)\, dt = 0$$

sin más que separar la exponencial como combinación lineal de seno y coseno y aplicar el resultado anterior a la parte real e imaginaria de cada integral.

El siguiente lema es consecuencia del Lema de Riemann-Lebesgue y su demostración, que no se incluye, se puede encontrar en [Doe74, p.144].

Lema 1.41. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}+)$, entonces la integral

$$\int_0^t e^{-iy\tau} f(\tau)\, d\tau$$

tiende hacia 0 cuando $y \to \pm\infty$ uniformemente en $[0, T]$, para cada $T > 0$.

Proposición 1.42. Si f admite transformada de Laplace en $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{y\to\pm\infty} \mathfrak{L}f(x + iy) = 0$ uniformemente para $x \geq x_0$.

Demostración. Para cada $T > 0$ se tiene que

$$\left|\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt\right| \leq \left|\int_0^T e^{-zt} f(t)\, dt\right| + \left|\int_T^\infty e^{-zt} f(t)\, dt\right|$$

En primer lugar, para acotar el segundo sumando es claro que si $z \in D_f$ con $\Re z > x_0$, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que

$$\left|\int_T^\infty e^{-zt} f(t)\, dt\right| \leq \int_T^\infty e^{-xt}\, |f(t)|\, dt \leq \int_T^\infty e^{-x_0 t}\, |f(t)|\, dt \leq \epsilon.$$

Para acotar el primer sumando, integrando por partes se sigue que

$$\int_0^T e^{-xt} \left[e^{-iyt} f(\tau)\right]\, dt = e^{-xT} \int_0^T e^{-iy\tau} f(\tau)\, d\tau + x \int_0^T e^{-xt} \int_0^t e^{-iy\tau} f(\tau) d\tau,$$

entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T e^{-xt} e^{-iyt} f(t)\, dt\right| \quad &\leq \quad e^{-x_0 T} \left|\int_0^T e^{-iy\tau} f(\tau)\, d\tau\right| + \\ &\quad |x| \max_{0\leq t\leq T} \left|\int_0^t e^{-iy\tau} f(\tau)\, d\tau\right| \int_0^T e^{-xt}\, dt.\end{aligned}$$

El Lema de Riemann-Lebesgue 1.39 garantiza que el primer sumando del lado derecho de la desigualdad anterior tiende a 0, cuando $y \to \pm\infty$, independientemente de x. Para el segundo término se tiene que

$$|x| \int_0^T e^{-xt}\, dt = \left|1 - e^{-xT}\right| \leq 1 + e^{-x_0 T},$$

y de nuevo por el Lema 1.41 dicho sumando también tiende a 0 uniformemente en x. ∎

Teorema 1.43. Si f admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f, para cada $\epsilon > 0$ existen X e Y tales que si $\Re z \geq X$ o $|\Im z| \geq Y$, entonces $|\mathfrak{L}f(z)| \leq \epsilon$. En particular, $\mathfrak{L}(z)$ tiende a 0 siempre que $|z| \to \infty$.

Demostración. El teorema es consecuencia directa de 1.42 y 1.38. ∎

1.5. Transformada de Laplace inversa. La fórmula de inversión.

1.5.1. Unicidad de la transformación de Laplace.

El objetivo de este apartado es estudiar bajo qué condiciones dos funciones localmente integrables tienen la misma transformada de Laplace. Claramente, si dos funciones son iguales casi siempre en $[0,\infty)$ tendrán la misma transformada. Lo que se persigue es probar que este es el único caso posible en el que las transformadas pueden coincidir, es decir, que si $\mathfrak{L}f = \mathfrak{L}g$ en un semiplano, entonces $f \underset{c.s.}{=} g$ en $[0,\infty)$. Esto es, $f = g$ en $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Lema 1.44. Sea $\psi \in \mathcal{C}[a,b]$ tal que todos los momentos de ψ en el intervalo (a,b) son nulos, esto es, que $\int_a^b x^n\psi(x)\,dx = 0$ para cada $n = 0,1,\ldots$ Entonces, $\psi \equiv 0$ en $[a,b]$.

Demostración. La condición del enunciado garantiza que $\int_a^b P(x)\psi(x)\,dx = 0$ para todo polinomio. El teorema de Weierstrass (ver, por ejemplo, [Apo96, Teorema 11.15]) asegura que existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a la función continua $\bar{\psi}$. En estas condiciones

$$0 = \lim_{n\to\infty}\int_a^b P_n(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b \bar{\psi}(x)\psi(x)\,dx = \int_a^b |\psi(x)|^2\,dx.$$

Esto garantiza que $|\psi|^2 \underset{c.s.}{=} 0$ en $[a,b]$, y la continuidad permite concluir que $\psi \equiv 0$. ■

Este lema juega un papel central en la demostración del teorema de unicidad, pero requiere que la función sea continua. El resultado siguiente premite salvar esta dificultad, pues asegura que se puede expresar la transformada de una función localmente integrable en términos de la de una función absolutamente continua

Lema 1.45. Sea f que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\Re z_0 > \sigma_f$. Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re z > \Re z_0$ se tiene que

$$\mathfrak{L}f(z) = (z - z_0)\int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}\varphi(t)\,dt,$$

con

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-z_0\tau}f(\tau)\,d\tau.$$

Demostración. Las funciones

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-z_0\tau}f(\tau)\,d\tau \quad \text{y} \quad e^{-(z-z_0)t} - 1 = -(z-z_0)\int_0^t e^{-(z-z_0)\tau}\,d\tau$$

son absolutamente continuas en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que $\varphi(0) = 0$ e integrando por partes se sigue que

$$\begin{aligned}\int_0^T e^{-zt}f(t)\,dt &= \int_0^T e^{-(z-z_0)t}e^{-z_0t}f(t)\,dt = \\ &= e^{-(z-z_0)T}\varphi(T) + (z-z_0)\int_0^T e^{-(z-z_0)t}\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Puesto que φ es una función continua y, por el teorema de la convergencia dominada, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \mathfrak{L}f(z_0)$, φ es una función acotada.

Por tanto, la función $t \in [0,\infty) \mapsto e^{-(z-z_0)t}\varphi(t)$ es integrable, por ser producto de una función acotada y otra integrable, y tiende a 0 cuando $T \to \infty$. Tomando límites cuando $T \to \infty$ y utilizando de nuevo el teorema de la convergencia dominada se tiene que

$$\mathfrak{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,dt = (z-z_0)\int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}\varphi(t)\,dt,$$

como se quería demostrar. ∎

Teorema 1.46 (Unicidad de la transformada de Laplace). Sean $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admiten transformada de Laplace. Si $\mathfrak{L}f = 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re z > \sigma_f$, entonces $f \underset{c.s.}{=} 0$ en $[0,\infty)$.

En particular, si $\mathfrak{L}f(z) = \mathfrak{L}g(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re z > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$, entonces $f \underset{c.s.}{=} g$ en $[0,\infty)$.

Demostración. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ con $\Re z_0 > \sigma_f$. El lema 1.45 asegura que

$$\mathfrak{L}f(z) = (z-z_0)\int_0^\infty e^{-(z-z_0)t}\varphi(t)\,dt,$$

con

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-z_0\tau} f(\tau)\,d\tau.$$

Entonces, para cualquier $\sigma > 0$ se tiene que

$$\mathfrak{L}f(z_0+n\sigma) = n\sigma\int_0^\infty e^{-n\sigma t}\varphi(t)\,dt = 0 \quad \text{para} \quad n = 1,2,3\ldots$$

y realizando el cambio de variable $t \in (0,\infty) \mapsto x = e^{-\sigma t} \in (0,1)$,

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^1 x^{n-1}\psi(x)\,dx = 0 \quad \text{para} \quad n = 1,2,3\ldots$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{\sigma}\int_0^1 x^{n}\psi(x)\,dx = 0 \quad \text{para} \quad n = 0,1,2\ldots$$

donde $\psi(x) = \varphi(-\log x/\sigma)$, que es precisamente la hipótesis del lema 1.44. Para utilizar este resultado se requiere que la función ψ sea continua, por lo que se definen $\psi(0) = \lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \mathfrak{L}f(z_0)$ y $\psi(1) = \varphi(0) = 0$. Así, el lema mencionado garantiza que $\psi \equiv 0$ y, en consecuencia, que $\varphi \equiv 0$. Puesto que la función $t \in [0,\infty) \mapsto e^{-z_0 t}f(t)$ es integrable, φ es absolutamente continua en cada intervalo acotado y el teorema fundamental del cálculo garantiza que es derivable en casi todo punto de $[0,\infty)$ y que, además,

$$0 = \varphi'(t) \underset{c.s.}{=} e^{-z_0 t}f(t) \quad \text{en} \quad [0,\infty).$$

Como $e^{-z_0 t} \neq 0$, se deduce que $f \underset{c.s.}{=} 0$ en $[0,\infty)$.

La segunda afirmación se deduce de la primera y de la linealidad de la transformación. ∎

La demostración del teorema sigue siendo válida bajo una hipótesis más débil.

Corolario 1.47. Sean $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admiten transformada de Laplace, y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\Re z_0 > \sigma_f$. Si $\mathfrak{L}f$ se anula en una sucesión de puntos equiespaciados en una recta paralela al eje real

$$\mathfrak{L}f(z_0 + n\sigma) = 0 \quad \text{para} \quad \sigma > 0, \, n \in \mathbb{N},$$

entonces $f \underset{c.s.}{=} 0$ en $[0, \infty)$.

En particular, si $\mathfrak{L}f(z) = \mathfrak{L}g(z)$ en una sucesión de puntos equiespaciados en una recta paralela al eje real, entonces $f \underset{c.s.}{=} g$ en $[0, \infty)$.

Corolario 1.48 (Teorema de Lerch). Sean f y g funciones continuas que admiten transformada de Laplace. Si $\mathfrak{L}f(z) = \mathfrak{L}g(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re z > \max\{\sigma_f, \sigma_g\}$ (o, al menos, en una sucesión de puntos equiespaciados paralela al eje real), entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demostración. El teorema 1.46 asegura que $f \underset{c.s.}{=} g$ en $[0, \infty)$ bajo las hipótesis del enunciado. El hecho de que dos funciones continuas e iguales casi siempre son iguales permite concluir. ∎

Corolario 1.49. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ admite transformada de Laplace y $\mathfrak{L}f$ es una función periódica, entonces $\mathfrak{L}f \equiv 0$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{L}f$ es periódica con periodo $\sigma \in \mathbb{C}$, $\Re\sigma > 0$. Para cada $z \in D_f$ se tiene que $\mathfrak{L}f(z) = \mathfrak{L}f(z + \sigma)$, luego

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt - \int_0^\infty e^{-(z+\sigma)t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-zt}(1 - e^{-\sigma t}) f(t)\, dt = 0,$$

por lo que $(1 - e^{-\sigma t}) f(t) \underset{c.s.}{=} 0$. Si $\Re\sigma \neq 0$, el factor $(1 - e^{-\sigma t})$ solamente se anula si $t = 0$; mientras que si σ es imaginario puro, se anula cuando $t = (2\pi i n)/\sigma$, $n \in \mathbb{N}$. En cualquier caso, se trata a lo sumo de una cantidad numerable de ceros, por lo que $f \underset{c.s.}{=} 0$ en $[0, \infty)$. ∎

1.5.2. La fórmula de inversión y sus consecuencias.

Abordamos a continuación el problema de encontrar una función localmente integrable f tal que $\mathfrak{L}f = F$, dada una función F holomorfa en un semiplano. Este problema es de importancia central en la aplicación de la transformación de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, como se detallará en el capítulo 3.

Ejemplo 1.50 (Función racional como transformada de Laplace). Sea $R(z) = P(z)/Q(z)$, donde P y Q son polinomios con $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$. Se supone que los ceros de Q son $z_1, \ldots, z_k$ con ordenes respectivos $n_1, \ldots, n_k$. Entonces R se puede escribir de la siguiente manera:

$$R(z) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{a^{(j)}_{n_k - i}}{(z - z_j)^i},$$

donde
$$a_r^{(j)} = \lim_{z\to z_j} \frac{1}{r!}\frac{d^r}{dz^r}\left[(z-z_j)^{n_j} R(z)\right] \quad \text{si} \quad r = 1,\dots,n_j.$$

Esto se debe a que los coeficientes $a_{j,r}$ son los coeficientes que acompañan a la potencia $(z-z_j)^{-n_j+r}$ en el desarrollo en serie de potencias de Laurent de R en torno a z_j. Por tanto, la función

$$R^*(z) = R(z) - \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_k} \frac{a_{n_k-i}^{(j)}}{(z-z_j)^i}$$

es holomorfa en todo el plano complejo. Pero $R(z) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$ por hipótesis (grad $P <$ grad Q) y el segundo sumando también tiende a 0 en infinito por cómo está construido. Por lo tanto, R^* tiende a 0 en infinito, así que es una función holomorfa y acotada. El teorema de Liouville (ver [Ash07, Teorema 2.4.1]) garantiza que R^* es una función constante que debe coincidir con el límite de la función en infinito, luego $R^* \equiv 0$ como queríamos demostrar.

En estas condiciones, podemos asegurar que toda fracción racional R que se puede escribir de la forma anterior es la transformada de Laplace inversa de una función localmente integrable, puesto que, en virtud de las proposiciones 1.25 y 1.11.4, se tiene que

$$\mathfrak{L}\left[e^{z_j t}\frac{t^k}{k!}\right](z) = \frac{1}{(z-z_j)^k},$$

así que la función

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{n_k} a_{n_k-i}^{(j)}\, e^{z_j t}\frac{t^n}{n!} \tag{1.3}$$

es tal que $\mathfrak{L}f(z) = R(z)$ con $\sigma_f = \max\{\Re z_1, \cdots, \Re z_k\}$.

Definición 1.51. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Se llama *valor principal de Cauchy de* $\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx$ al valor del siguiente límite, si existe,

$$VP\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx = \lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{p} f\,dx.$$

La existencia del valor principal de Cauchy no garantiza la integrabilidad de la función en $\mathbb{R}$, aunque el límite sea finito. Un contraejemplo clásico de este hecho lo da la función $f(x) = x^{-1}\operatorname{sen} x\,\chi_{(0,\infty)}$, que no es integrable en el sentido de Lebesgue; pero.

$$\lim_{p\to\infty}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \lim_{p\to\infty}\int_{0}^{p}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Si la función es integrable en $\mathbb{R}$, entonces el valor principal de Cauchy existe y es igual a la integral de f en $\mathbb{R}$, como consecuencia del Teorema de la Convergencia Dominada.

A continuación se enuncia la fórmula de inversión para la transformada de Laplace, que permite recuperar los valores de una función a partir de los de su función transformada. La prueba se apoya en el resultado correspondiente para la transformada de Fourier, que se recoge en el apéndice.

Teorema 1.52 (Fórmula integral de Bromwich). Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace, $\mathfrak{L}f$, con abscisa de convergencia σ_f. Si $x > \sigma_f$, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que f es de variación acotada en un entorno de t, se verifica que

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} VP \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{tz}\mathfrak{L}f(z)dz,$$

donde $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}$ denota la integral sobre el camino $\gamma_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_x(t) = x + ti$.

Demostración. Si $x > \sigma_f$, entonces la integral de Laplace de f en $z = x + iy$ existe para cada $y \in \mathbb{R}$. En consecuencia, la función $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-xt}f(t)$ (conviniendo en que $f(t) < 0$ si $t < 0$) es integrable en $\mathbb{R}$, pues $\int_{\mathbb{R}} \left|e^{-xt}f(t)\right| dt = \int_0^\infty \left|e^{-zt}f(t)\right| dt < \infty$. Por tanto, $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-xt}f(t)$ admite transformada de Fourier. Además, si f es de variación acotada en un entorno de $t \in \mathbb{R}$, puesto que e^{-xt} también lo es por ser derivable con continuidad en el entorno; y también lo es $e^{-xt}f(t)$ por ser producto de funciones de variación acotada. Por lo tanto, la fórmula de inversión para la transformada de Fourier garantiza que

$$\left[\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}\right] e^{-xt} = \frac{1}{2\pi} VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt}\mathfrak{F}\left\{e^{-xt}f(t)\right\}(y)\, dy.$$

Pero la transformada de Fourier y la de Laplace se relacionan según la fórmula

$$\mathfrak{F}\left\{e^{-xt}f(t)\right\}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt}e^{-xt}f(t)\, dt = \mathfrak{L}f(x+iy).$$

Combinando las dos últimas expresiones e introduciendo la exponencial en la integral

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} VP \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+iy)t}\mathfrak{L}f(x+iy)\, dy,$$

que coincide con la expresión enunciada en el teorema, puesto que si h es una función cuyo dominio de definición incluye al soporte de γ_x se tiene que

$$\int_{\gamma_x} h(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} h(x+iy)i\, dy.$$

■

Observaciones 1.53.

1. Si, bajo las hipótesis del teorema anterior, f es continua en t, entonces la fórmula de inversión proporciona el valor $f(t)$.

2. Si $t < 0$, entonces $f \equiv 0$ en un entorno de t y f es una función de variación acotada en dicho entorno, por lo que la integral en 1.52 es nula.

3. Nótese que en la fórmula de inversión 1.52 la integración se puede realizar en cualquier recta vertical $\Re z = x$, con tal de que $x > \sigma_f$. Este hecho, aparentemente sorprendente, es consecuencia del Teorema de Cauchy y del carácter holomorfo de $\mathfrak{L}f$. Dada una función f que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f y $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 > x_1 > \sigma_f$, $M > 0$, se consideran los siguientes caminos orientados:

   - $\Gamma_1 = [x_1 - Mi, x_1 + Mi]$
   - $\Gamma_2 = [x_1 - Mi, x_2 - Mi]$
   - $\Gamma_3 = [x_2 - Mi, x_2 + Mi]$
   - $\Gamma_4 = [x_2 + Mi, x_1 + Mi]$

   El teorema 1.15 garantiza que la función, para cada $t \in \mathbb{R}$, $z \in D_f \mapsto e^{zt}\mathfrak{L}f(z)$ es holomorfa y en virtud del Teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma_1} e^{zt}\mathfrak{L}f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} e^{zt}\mathfrak{L}f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} e^{zt}\mathfrak{L}f(z)\,dz + \int_{\Gamma_4} e^{zt}\mathfrak{L}f(z)\,dz.$$

   Además, teniendo en cuenta que si $z \in [x_1 - Mi, x_2 - Mi]$ se tiene que $\left|e^{tz}\right| \leq e^{t\Re z} \leq e^{|t|x_2}$, se puede acotar la integral en Γ_2 de la siguiente manera:

$$\left|\int_{\Gamma_2} e^{zt}\mathfrak{L}f(z)\,dz\right| \leq (x_2 - x_1)e^{|t|x_2} \max_{z\in\Gamma_2} |\mathfrak{L}f(z)|$$

   puesto que $(x_2 - x_1)$ es la longitud del camino Γ_2. El teorema 1.43 garantiza que el lado derecho de la desigualdad tiende a 0 cuando M tiende a ∞, por lo que la integral en el camino Γ_2 se anula. El mismo razonamiento permite concluir que la integral en Γ_4 se anula cuando M tiende a ∞. Por tanto:

$$\lim_{M\to\infty} \int_{\Gamma_1} e^{zt}\mathfrak{L}f(z)\,dz = \lim_{M\to\infty} \int_{\Gamma_3} e^{zt}\mathfrak{L}f(z)\,dz,$$

   esto es,

$$V.P. \int_{x_1-\infty}^{x_1+\infty} e^{zt}\mathfrak{L}f(z)\,dz = V.P. \int_{x_2-\infty}^{x_2+\infty} e^{zt}\mathfrak{L}f(z)\,dz.$$

La observación 1.53 es un ejemplo de como se puede modificar el camino de integración de la fórmula de inversión. El carácter analítico de la función transformada y el teorema de Cauchy permiten modificar dicho camino y encontrar expresiones más manejables para calcular la transformada de Laplace inversa de una función.

En general, la transformada de Laplace de una función f, definida originalmente en su dominio de convergencia D_f, no se puede extender a una función analítica en todo el plano complejo. Sin embargo, en muchas ocasiones $\mathfrak{L}f$ sí se puede extender a una función que es analítica salvo en un número finito de singularidades aisladas. Si estas singularidades, además, son polos de F, se dice que F es meromorfa. Esta extensión ha de ser única en virtud del principio de identidad para funciones analíticas. Además, si σ_f es la abscisa de convergencia de f, los polos de F tienen que estar necesariamente en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \leq \sigma_f\}$.

A continuación se prueban una serie de resultados encaminados a obtener fórmulas más sencillas para calcular la transformada de Laplace inversa de una función.

Proposición 1.54. Sea F una función analítica en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de singularidades aisladas y $z_0 \in \mathbb{C}$. Sea $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos estrictamente creciente y no acotada. Se consideran los caminos semicirculares γ_n centrados en z_0, de radio ρ_n y a la izquierda de la vertical, esto es, $\gamma_n : [\pi/2, 3\pi/2] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_n(t) = \rho_n e^{it}$ (resp. a la derecha de la vertical, esto es, $\gamma_n : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma_n(t) = \rho_n e^{it}$). Se supone que los radios de las semicircunferencias son tales que no hay ninguna singularidad de f en el soporte de las curvas.

Además, se supone que existen $R, M, p > 0$ tales que

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^p} \quad \text{siempre que} \quad |z| \geq R \quad \text{y} \quad \Re z < \Re z_0 \quad (\text{resp.}\, \Re z > \Re z_0).$$

En estas condiciones, se tiene que

$$\int_{\gamma_n} e^{tz} F(z)\, dz \to 0 \quad \text{para} \quad t > 0 \quad (\text{resp.}\, t < 0) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

El teorema sigue siendo válido si se utilizan porciones de las semicircuferencias γ_n como caminos de integración.

Demostración. Si $z = z_0 + \theta$

$$\int_{\gamma_n} e^{tz} F(z)\, dz = e^{tz_0} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{t\theta} F(z_0 + \theta)\, d\theta,$$

donde la integral de la derecha se evalúa en el camino $t \in [\pi/2, 3\pi/2] \mapsto \rho_n e^{it}$. Puesto que la sucesión de integrales de la izquierda tiende a cero si lo hace la de la derecha, basta probar el resultado para $z_0 = 0$. En estas condiciones, para n suficiente grande (tal que $\rho_n > R$) se tiene que

$$\left| \int_{\gamma_n} e^{tz} F(z)\, dz \right| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\Re(t\rho_n e^{i\theta})} \left| F(\rho_n e^{i\theta}) \rho_n i e^{i\theta} \right| d\theta \leq$$

$$M\rho_n^{-p} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{t\rho_n \cos\theta} \rho_n d\theta = M\rho_n^{-p+1} \int_0^{\pi} e^{-t\rho_n \sin\varphi}\, d\varphi$$

$$= 2M\rho_n^{-p+1} \int_0^{\pi/2} e^{-t\rho_n \sin\varphi}\, d\varphi.$$

En el penúltimo paso de la ecuación anterior se ha realizado el cambio de variable $\varphi = \theta - \pi/2$. En el intervalo $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ la función seno verifica la acotación $\sin\varphi \geq (2/\pi)\varphi$, por lo que

$$\left| \int_{\gamma_n} e^{tz} F(z)\, dz \right| \leq 2M\rho_n^{-p+1} \int_0^{\pi/2} e^{-t\rho_n\varphi}\, d\varphi = 2M\rho_n^{-p} \frac{1 - e^{-t\rho_n}}{t(2/\pi)} \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$, siempre que $t > 0$. Si se utilizan porciones de circunferencia con el ángulo fijo $\pi/2 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 3\pi/2$, la secuencia de integrales $p(\rho_n) \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{t\rho_n \cos\theta} \rho_n \, d\theta$ está dominada por las integrales en las circunferencias completas, puesto que el integrando es positivo.

Cuando las semicircunferencias están a la derecha de la vertical, con $t < 0$, basta poner $z = -\theta$ y notar que

$$\int_{\gamma_n} e^{tz} F(z) \, dz = -\int e^{-t\theta} F(-\theta) \, d\theta,$$

donde las integrales de la derecha se evalúan de nuevo en el camino $t \in [\pi/2, 3\pi/2] \mapsto \rho_n e^{it}$, por lo que se razona de la misma forma. ■

El teorema anterior permite conectar la fórmula integral de Bromwich con el teorema de los residuos para el cálculo de la transformada de Laplace inversa.

Teorema 1.55. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ con $x_0 > \sigma_f$. Se supone que:

1. f es continua en $t \in [0, \infty)$ y de variación acotada en un entorno de t.
2. $\mathfrak{L}f$ se extiende a una función meromorfa F con polos $\{z_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$. Se supone que están ordenados de forma que $|z_0 - x_0| \leq |z_1 - x_0| \leq \cdots$.
3. Existen $R, M, p > 0$ tales que

$$|F(z)| \leq \frac{M}{|z|^p} \quad \text{siempre que} \quad |z| \geq R \quad \text{y} \quad \Re z < \Re z_0.$$

Entonces,

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathrm{Res}(e^{tz} F(z), z_\nu).$$

Demostración. Si γ_n son semicircunferencias de radio ρ_n centradas en $x_0 \in \mathbb{R}$ como en la proposición anterior y se consideran los caminos $\omega_n : [-\rho_n, \rho_n] \to \mathbb{C}$ tales que $\omega_n(t) = x_0 + it$, esto es, los diámetros que cierran las semicircunferencias γ_n. Si F es meromorfa, el teorema de los residuos establece que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} e^{tz} F(z) \, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_n} e^{tz} F(z) \, dz = \sum_{\substack{s \in P(f) \\ z_\nu \in D(x_0, \rho_n)}} \mathrm{Res}(e^{tz} F(z), z_\nu).$$

Puesto que $\mathfrak{L}f$ es analítica en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > \sigma_f\}$, todos los polos de F verifican $\Re z_\nu \leq x_0$. Esto garantiza que si $z_\nu \in D(x_0, \rho_n)$, entonces está encerrado en el contorno formado por la unión de los soportes de ρ_n y ω_n.

Cuando $n \to \infty$, se ha demostrado que la integral de la izquierda tiende a 0 en las condiciones del teorema en 1.54, mientras que la integral de la derecha permite obtener los valores de la tranformada de Laplace inversa mediante la fórmula de Bromwich. Como f es continua y de variación acotada en un entrono de t,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_n} e^{tz}F(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}VP\int_{x_0-i\infty}^{x_0+i\infty} e^{tz}F(z)\,dz = f(t).$$

Puesto que $\rho_n \to \infty$ cuando $n\to\infty$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{s\in P(f)\\ z_\nu\in D(x_0,\rho_n)}} \operatorname{Res}(e^{tz}F(z), z_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\operatorname{Res}(e^{tz}F(z), z_\nu).$$

Tomando límites cuando $n\to\infty$ en la primera igualdad se concluye la prueba. ∎

Este resultado permite representar una función continua y de variación acotada en términos de los residuos de su transformada de Laplace. Sin embargo, no siempre se puede tomar la transformada de Laplace inversa término a término en una serie infinita. El siguiente teorema añade más información en el caso de que la función transformada tenga un número finito de singularidades.

Teorema 1.56 (Fórmula de inversión de la transformada de Laplace). Sea F analítica en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de singularidades aisladas $z_1,\ldots,z_n$ que se encuentran en el semiplano $\{z\in\mathbb{C} : \Re z < \alpha\}$. Se supone que existen $M, R, p > 0$ tales que

$$|F(z)| \le \frac{M}{|z|^p} \quad \text{siempre que} \quad |z|\ge R.$$

Entonces, la función $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ dada por

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{Res}(e^{tz}F(z), z_\nu).$$

admite transformada de Laplace con $\sigma_f \le \alpha$ y $\mathfrak{L}f(z) = F(z)$ para cada $\Re > \alpha$.

Demostración. Sea $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente y no acotada de números positivos. Para cada $z\in\mathbb{C}$ con $\Re z > \alpha$ y cada $n\in\mathbb{N}$ se definen los caminos

$$\begin{aligned}
\gamma_n &: [\pi/2, 3\pi/2] \to \mathbb{C} & \gamma_n(t) &= \Re z + \rho_n e^{it}\\
\omega_n &: [-\rho_n, \rho_n] \to \mathbb{C} & \omega_n(t) &= \Re z + it\\
\widetilde{\gamma_n} &: [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{C} & \widetilde{\gamma_n}(t) &= \Re z + \rho_n e^{it}\\
\widetilde{\omega_n} &: [-\rho_n, \rho_n] \to \mathbb{C} & \widetilde{\omega_n}(t) &= \Re z - it
\end{aligned}$$

donde $\Gamma_n = \gamma_n + \omega_n$ es una semicircunferencia centrada en $\Re z$ hacia la izquierda de la vertical y $\widetilde{\Gamma_n} = \widetilde{\gamma_n} + \widetilde{\omega_n}$ es una semicircunferencia centrada en $\Re z$ hacia la derecha de la vertical. Para n suficientemente grande, las singularidades de F están dentro de Γ_n, por lo que

$$\int_{\Gamma_n} e^{t\xi}F(\xi)\,dz = 2\pi i\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{Res}(e^{tz}F(z), z_\nu) = 2\pi i\, f(t).$$

Por tanto,

$$2\pi i\, \mathfrak{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \left(\int_{\Gamma_n} e^{t\xi} F(\xi)\, d\xi \right) dt.$$

Puesto que la curva Γ_n está parametrizada por un intervalo finito y F es continua en Γ, para $\xi \in \Gamma_n$ y $t > 0$ se tiene que

$$\left| e^{-(z-\xi)t} F(z) \right| \leq e^{(\Re z - \alpha)t} \max_{\xi \in \Gamma_n} |F(\xi)| \,.$$

Así que,

$$\int_0^\infty \int_{\Gamma_n} e^{-zt} e^{\xi t} F(\xi)\, d\xi dt \leq \frac{1}{\Re z - \alpha} \max_{\xi \in \Gamma_n} |F(\xi)|\, L(\Gamma_n) < \infty,$$

donde $L(\Gamma_n)$ denota la longitud de la curva en cuestión. Por tanto, la función del integrando es integrable y se puede aplicar el teorema de Fubini para intercambiar el orden de integración, así que

$$\begin{aligned} 2\pi i\, \mathfrak{L}f(z) &= \int_{\Gamma_n} \int_0^\infty e^{-(z-\xi)t} F(z)\, dt\, d\xi = \int_{\Gamma_n} \frac{F(\xi)}{z-\xi} d\xi \\ &= \int_{\widetilde{\Gamma_n}} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\Gamma_n + \widetilde{\Gamma_n}} \frac{F(\xi)}{z-\xi} d\xi = 2\pi i\, F(z) + \int_{\gamma_n + \widetilde{\gamma_n}} \frac{F(\xi)}{z-\xi}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado, en primer lugar, la fórmula de Cauchy, puesto que $\operatorname{sop} \widetilde{\Gamma_n} \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re z > \alpha\}$ donde, donde F es analítica. En segundo lugar, que las integrales sobre $\Gamma_n + \widetilde{\Gamma_n}$ y $\gamma_n + \widetilde{\gamma_n}$ coinciden, puesto que las integrales en γ_n y $\widetilde{\gamma_n}$ se cancelan. Finalmente, puesto que el integrando satisface las hipótesis de 1.54, tomando el límite cuando n tiende a infinito se llega a que

$$\mathfrak{L}f(z) = F(z) \qquad \text{si} \qquad \Re z > \alpha,$$

como se quería demostrar. ■

Corolario 1.57. Sea F una fracción racional, es decir, tal que existen polinomios P, Q tales que $F = P/Q$. Se supone que *grad* $P <$ *grad* Q, que $z_1, \ldots, z_n$ son las raíces de Q y $\alpha = \max\{z_1, \ldots, z_n\}$. Entonces, la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Res}(e^{tz} F(z), z_\nu)$$

verifica las siguientes propiedades:

1. f es continua en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, con lo que admite transformada de Laplace. Además, $\sigma_f \leq \alpha$ y para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z > \alpha$ se tiene que $F(z) = \mathfrak{L}f(z)$.

2. Para cada número real $x > \alpha$ y cada $t \geq 0$ se tiene que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} VP \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{zt} F(z)\, dz.$$

Demostración. (1) Según lo expuesto en el ejemplo 1.50,

$$F(z)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_k}\frac{a^{(j)}_{n_k-i}}{(z-z_j)^i},$$

donde $z_1,\ldots,z_n$ son las raíces de Q y se tiene que

$$f(t)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{n_k}a^{(j)}_{n_k-i}\,e^{z_jt}\frac{t^n}{n!} \tag{1.4}$$

es tal que $\mathfrak{L}f(z)=F(z)$ con $\sigma_f=\max\{\Re z_1,\cdots,\Re z_k\}$. Por tanto, f es continua. Además, como $\alpha>\Re z_v$ para cada $\nu=1,\cdots,n$,

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{t^k e^{z_\nu t}}{e^{\alpha t}}\right|=\lim_{t\to\infty}t^k e^{(\Re z_\nu-\alpha)t}=0 \quad \text{para todos}\, k=1,\cdots,m_{\nu-1};\nu=1,\cdots,n.$$

Por tanto, existen constantes $t_{k\nu}>0$ y $M_{k\nu}>0$ tales que

$$\left|a^{(\nu)}_k\frac{t^k}{k!}e^{z_\nu t}\right|\le M_{k\nu}e^{\alpha t}\quad \text{si}\quad t>t_{k\nu}.$$

Finalmente, si $t>\max\limits_{k,\nu}t_{k\nu}$, se tiene que

$$|f(t)|\le\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_\nu}\left|\frac{t^{k-1}e^{tz_\nu}}{(k-1)!}\right|\le n(m_1+\cdots+m_n)\max_{k,\nu}M_{k\nu}\,e^{\alpha t},$$

por lo que f es de orden exponencial.

(2) f es admite derivadas continuas para cada $t>0$, por lo que es de variación acotada. Razonando entonces como en el teorema 1.55 se tiene que

$$f(t)=\sum_{\nu=0}^{n}\operatorname{Res}(e^{tz}F(z),z_\nu)=\frac{1}{2\pi i}VP\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{zt}F(z)\,dz.$$

■

Proposición 1.58 (**Fórmula de expansión de Heaviside**)**.** Sean P y Q polinomios tales que el grado de Q es mayor que el de P. Se supone que todos los ceros de Q son simples. Entonces, la función $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ dada por

$$f(t)=\sum_{\{z\in\mathbb{C}:Q(z)=0\}}e^{zt}\frac{P(z)}{Q'(z)}$$

es la única transformada inversa de Laplace de $F(z)=P(z)/Q(z)$ que es continua en $[0,\infty)$. Además,

$$\sigma_f=\max\{\Re z:Q(z)=0\}.$$

Demostración. La continuidad de f, el hecho de que admite transformada de Laplace con abscisa σ_f y que $\mathfrak{L}f=F$ se deducen del teorema anterior. Si z_0 es un cero simple de Q,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(e^{tz}\frac{P(z)}{Q(z)},z_0\right) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)e^{tz}\frac{P(z)}{Q(z)}\\ &= e^{tz_0}P(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{Q(z)-Q(z_0)}=e^{z_0t}\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)},\end{aligned}$$

dando así la expresión buscada. ■

Capítulo 2

La transformada de Laplace de distribuciones de orden finito

Las distribuciones o funciones generalizadas permiten tratar con rigor algunos problemas habituales en la física y la ingeniería a los que no se puede dar respuesta en el marco de las funciones clásicas. El objetivo de este capítulo es introducir la transformada de Laplace de distribuciones de orden finito así como sus propiedades más relevantes.

2.1. Preliminares.

Algunos fenómenos físicos relevantes, tales como un incremento de voltaje de duración extremadamente corta en electromagnetismo, o el impacto de un martillo en mecánica, no pueden ser tratados adecuadamente mediante las funciones en el sentido habitual. La introducción del concepto de distribución en los años 30 del sigo XX permitió tratar con rigor esta clase de problemas. La definición precisa y algunas propiedades relevantes de las distribuciones se recogen en el apéndice.

Se pueden seguir dos caminos, esencialmente equivalentes, para definir la transformada de Laplace de una distribución. El primero hace uso del concepto de distribución temperada y tiene la ventaja de que se define de una forma similar a la utilizada para las funciones localmente intregables, aunque resulta más díficil de manipular. El segundo, que es el que seguiremos, utiliza un resultado de estructura de las distribuciones para definir la transformada de Laplace de una distribución de orden finito a partir de la de una función localmente integrable adecuada. Se enuncia a continuación la primera definición posible (véase [Zui91]).

Definición alternativa de transformada de Laplace distribucional Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una distribución cuyo soporte está contenido en $\mathbb{R}_+$. Si existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-\xi t}u$ es un distribución temperada, entonces se define la transformada de Lapalace de la distribución u mediante la fórmula

$$\mathfrak{L}u(z) = \left\langle u, e^{-zt} \right\rangle$$

que tiene sentido cuando $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z > \xi$. Sea $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ una función con soporte en $\mathbb{R}_+$ e igual a 1 en un entorno del soporte de u. Para $\Re z > \xi$, la función $\alpha(t)e^{-(z-\xi)t}$ es una función de la clase de Schwartz y se puede escribir

$$\left\langle u, e^{-zt} \right\rangle = \left\langle e^{-zt} u, \alpha(t) e^{-(z-\xi)t} \right\rangle.$$

El lado derecho tiene sentido gracias a nuestras hipótesis.

La otra posibilidad es utilizar el siguiente resultado de análisis funcional, que se puede encontrar en [Rud91], que establece que cada distribución de orden finito es la derivada en el sentido de las distribuciones de una función localmente integrable.

Proposición 2.1. Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una distribución de orden finito n. Existe una función localmente integrable f tal que

$$u = D^{n+1} f \quad \text{en el sentido de las distribuciones.}$$

La transformada de Laplace de una de tales distribuciones se define entonces inspirándose en la proposición 1.35, que relaciona la transformada de una función y su derivada. En la siguiente sección se precisa esta cuestión.

Ejemplo 2.2 (La delta de Dirac). Dado $a \in \mathbb{R}$, la aplicación $\delta_a :\to \mathbb{C}$ tal que $\delta_a(\varphi) = \varphi(t_0)$ define una distribución de orden 0 llamada *delta de Dirac centrada en* t_0. Además, la distribución δ_a es la derivada en el sentido de las distribuciones de la distribución asociada a la función de Heaviside trasladada por a, $H_a : t \in \mathbb{R} \mapsto H(t-a)$. En efecto, dada $\varphi \in \delta(\mathbb{R})$ con sop $\varphi \in [-M, M]$, se tiene que

$$\left\langle H_a, \varphi' \right\rangle = \int_0^\infty H(t-a)\, \varphi'(t)\, dt = \varphi(M) - \varphi(a) = -\varphi(a) = -\left\langle \delta_a, \varphi \right\rangle,$$

por lo que $DH(t-a) = \delta_a$, puesto que φ es una función test arbitraria. Este ejemplo muestra que el orden de derivación $n+1$ en la proposición 2.1 no se puede reducir.

De hecho, si $u = D^{n+1} f$ también $u = D^{n+k+1} F_k$, donde F_k es una k-ésima primitiva de f,

$$F_k = \int \int \cdots \int f$$

Si se toma $k = 1$ se tiene que u es la derivada débil de orden $n+2$ de una función continua F_1, que además es absolutamente continua en cada compacto. Razonando así, se puede expresar u como la derivada $m+2+k$-ésima de una función con k derivadas continuas independientemente del orden de la misma.

2.2. Definición y propiedades de la transformada de Laplace de una distribución.

De la misma forma que en al tratar las funciones clásicas solo se tenían en cuenta las funciones definidas en el intervalo $[0, \infty)$, al estudiar la transformación de distribuciones se consideran aquellas que, de acuerdo con la proposición 2.1, se pueden escribir como la derivada distribucional de cierto orden de una de tales funciones.

Definición 2.3. Se define $D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ como la clase de distribuciones de orden finito en $\mathbb{R}$ tales que existe f localmente integrable con $\operatorname{sop} f \subset [0, \infty)$ y tal que $u = D^{k+1} f$ en el sentido de las distribuciones, siendo $k \in \mathbb{N}_0$ el orden de u.

Proposición 2.4. Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ una distribución de orden finito. Si existen f, g localmente integrables con $\operatorname{sop} f, \operatorname{sop} g \subseteq [0, \infty)$ y tales que $u = D^{k+1} f = D^{k+1} g$ en el sentido de las distribuciones, entonces $f \underset{c.s.}{=} g$ en $\mathbb{R}$.

Demostración. Puesto que $D^{k+1}(f - g) = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la proposición B.18 garantiza que existe $a_0 \in \mathbb{C}$ tal que $D^k(f - g) = a_0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, esto es, $D^k(f - g) = a_0$ es la distribución de tipo función asociada a la función $h \equiv a_0$. Puesto que para las distribuciones de tipo función las derivadas distribucionales coinciden con las clásicas, se tiene que, dado $a'_1 \in \mathbb{C}$

$$D\left(D^{k-1}(f - g) - (a_0 t + a'_1)\right) = D^k(f - g) - a_0 = 0$$

en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Aplicando de nuevo la proposición, existirá $c \in \mathbb{C}$ tal que $D^{k-1}(f - g) = a_0 t + a'_1 + c = a_0 t + a_1$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Razonando por inducción, se demuestra que existen $c_0, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ tales que

$$f - g = c_0 + c_1 t + \cdots + c_k t^k \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Puesto que se trata de una igualdad entre distribuciones de tipo función, la proposición B.6 garantiza que $f - g \underset{c.s.}{=} c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ en $\mathbb{R}$. Por hipótesis, $f(t) - g(t) = 0$ si $t < 0$, por lo que $0 \underset{c.s.}{=} c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ en $(-\infty, 0)$, pero un polinomio con infinitas raíces ha de ser idénticamente nulo, por lo que finalmente $f \underset{c.s.}{=} g$ en $\mathbb{R}$. ■

Proposición 2.5. Si $u \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$, entonces $\operatorname{sop} u \subseteq [0, \infty)$.

Demostración. La proposición se sigue de la definición de $D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ y del hecho de que si $u = D^k v$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, entonces $\operatorname{sop} u \subseteq \operatorname{sop} v$. ■

A continuación se define la transformada de Laplace de las distribuciones de la clase $D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ a partir de la transformada de funciones localmente integrables. Esta definición está motivada por la proposición 2.1 y el teorema 1.35.

Definición 2.6. Sean $u \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ una distribución de orden finito y $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ es tal que $u = D^k f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y admite *transformada de Laplace* con abscisa de convergencia σ_f, se dice que u admite transformada de Laplace.

Se define la *transformada de Laplace de* u como la función $\mathfrak{L}u : D_f \to \mathbb{C}$ dada por

$$\mathfrak{L}u(z) = z^k \mathfrak{L}f(z) \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma_f.$$

En este caso diremos que el dominio de convergencia D_u de la TL de u contiene a D_f o que la abscisa de convergencia σ_u es menor o igual que σ_f.

Observación 2.7. La proposición 2.4 garantiza que las definiciones anteriores no dependen de la función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ elegida. En efecto, otra función $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ verificando $u = D^k g$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ debe ser igual a f en casi todo punto de $\mathbb{R}$, por lo que tendrá la misma transformada de Laplace. Además, el dominio de convergencia y la abscisa de convergencia de f y g deben coincidir al ser dos funciones iguales casi siempre.
Además, podría ocurrir que para ciertas $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ se verificase $D^k f = D^l g = u$ en el sentido de las distribuciones, con $k > l$. En este caso la definición tampoco da lugar a ambigüedades, pues se tendría que $D^l\left(D^{k-l} f\right) = D^l g = u$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, y la proposición 2.4 garantiza que $D^{k-l} f$ es la distribución de tipo función asociada a un función que es igual casi siempre a g en $\mathbb{R}$. De hecho, se tiene que

$$\mathfrak{L}u(z) = z^k \mathfrak{L}f(z) = z^l \mathfrak{L}g(z).$$

En este caso, se tiene que $\sigma_u \leq \min\{\sigma_f, \sigma_g\}$.

Ejemplo 2.8 (La Delta de Dirac). En el ejemplo 2.2 se demostró que la distribución Delta de Dirac δ_a es la derivada en el sentido de las distribuciones de la distribución asociada a la función H_a. De acuerdo con la proposición 1.23, la distribución δ_a admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma_{\delta_a} \leq 0$ y

$$\mathfrak{L}\delta_a(z) = z\mathfrak{L}H_a(z) = e^{-az}$$

si $\Re z > 0$. En particular,

$$\mathfrak{L}\delta_0(z) = 1 \quad \text{si} \quad \Re z > 0.$$

Para las derivadas de orden $n \in \mathbb{N}$ de la distribución Delta, se tiene que $\delta_{t_0}^{(n)} = D^n \delta_a = D^{n+1} H_a$, por lo que también admiten transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones y

$$\mathfrak{L}\delta_a^{(n)}(z) = z^{n+1} \mathfrak{L}H_a(z) = z^n e^{-az}$$

si $\Re z > 0$. Las transformadas precedentes ponen de manifiesto que las transformadas de Laplace de distribuciones no satisfacen las mismas propiedades que las de funciones en el sentido clásico. Por ejemplo, los límites $\lim\limits_{\Im z \to \pm\infty} \mathfrak{L}\delta_a^{(n)}(z)$, que en el caso de las transformadas de funciones son 0 por el teorema 1.43, ni siquiera existen en este caso. De hecho, si $a = 0$, ni siquiera se verifican las tesis de la proposición 1.38.

Algunas propiedades de la transformación de Laplace clásica se extienden de forma sencilla al caso distribucional.

Teorema 2.9 (**Holomorfía de la transformada de Laplace distribucional**). Sea $u \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_u. Entonces, la función $\mathfrak{L}u$ es holomorfa en el dominio D_u.

Demostración. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ que admite transformada de Laplace y tal que $u = D^k f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En estas condiciones,

$$\mathfrak{L}u(z) = z^k \mathfrak{L}f(z) \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma_f \geq \sigma_u.$$

El teorema 1.15 asegura que $\mathfrak{L}f$ es una función holomorfa, así que $\mathfrak{L}u$ también lo es por ser producto de funciones holomorfas. ■

Teorema 2.10 (**Transformada de Laplace distribucional de derivadas**). Sea $u \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ que admite transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones con abscisa de convergencia σ_u. Entonces, la distribución $D^k u$ también admite transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones con abscisa de convergencia σ_u y, además,

$$\mathfrak{L}\left[D^k u\right](z) = z^k \mathfrak{L}u(z)$$

Demostración. Bajo las condiciones del teorema, existen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace con abscisas σ_f y $l \in \mathbb{N}_0$ tal que $u = D^l f$. Además,

$$\mathfrak{L}u(z) = z^l \mathfrak{L}f(z) \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma_u.$$

En estas condiciones, $D^k u = D^{k+l} f$, por lo que

$$\mathfrak{L}\left[D^k u\right](z) = z^{k+l}\mathfrak{L}f(z) = z^k \mathfrak{L}u(z) \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma_u.$$

■

Observación 2.11. El teorema anterior difiere del teorema de diferenciación clásico 1.35 en la ausencia de valores iniciales. De hecho, no tiene sentido hablar de valores iniciales en este contexto pues no se puede definir el valor de una distribución en un punto. Una función f, considerada como distribución de $D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$, tiene asignado el valor 0 para $t < 0$, por lo que todos los límites por la izquierda en $t = 0$ de $f, f', \ldots, f^{(k)}$ son nulos. Si $f, f', \ldots, f^{(k)}$ existen como funciones clásicas y tienen límites $f(0^+), f'(0^+), \ldots, f^{(k)}(0^+)$, entonces, por la fórmula de los saltos B.13, se tiene que

$$D^n f = f^{(n)} + f^{(n-1)}(0^+)\delta + \cdots + f(0^+)\delta^{(n-1)}.$$

En consecuencia, si $f^{(n)}$ admite transformada de Laplace en el sentido clásico también la admite en el distribucional y se tiene que, utilizando 2.10 y 2.8,

$$z^n \mathfrak{L}f(z) = \mathfrak{L}\left[f^{(n)}\right](z) + f^{(n-1)}(0^+) + \cdots + f(0^+)z^{n-1}.$$

Este es el resultado análogo al 1.35.

Definición 2.12. Sean $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Se definen:

1. La *función trasladada de f por t_0*, $\tau_{t_0} f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mediante $\tau_{t_0} f(t) = f(t - t_0)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

2. La *distribución trasladada de u por t_0*, $\tau_{t_0} u : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, como la única distribución tal que $\langle \tau_{t_0} u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-t_0} \varphi \rangle$ para cada $\varphi \in \mathbb{R}$.

   Las dos definiciones coinciden para las distribuciones de tipo función:

$$\left\langle u_{\tau_{t_0} f}, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)\varphi(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t + t_0)\, dt = \langle u_f, \tau_{-t_0}\varphi \rangle$$

   para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, por lo que $u_{\tau_{t_0} f} = \tau_{t_0} u_f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Proposición 2.13. Sean $u, v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ que admiten transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones con abscisas de convergencia σ_u, σ_v, respectivamente. Se verifican las siguientes propiedades:

1. **Linealidad.** Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. La distribución $\alpha u + \beta v$ admite transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones con abscisa de convergencia $\sigma_{\alpha u + \beta v} \leq \text{máx}\{0, \sigma_f, \sigma_g\}$. Además,

$$\mathfrak{L}[\alpha u + \beta v](z) = \alpha \mathfrak{L}u(z) + \beta \mathfrak{L}v(z) \quad \text{si} \quad \Re z > \text{máx}\{0, \sigma_f, \sigma_g\}$$

2. **Desfase.** Sean $t_0 > 0$, $w = \tau_{t_0} u$. w admite transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones, $\sigma_w = \sigma_u$ y se verifica

$$\mathfrak{L}w(z) = e^{-t_0 z} \mathfrak{L}u(z) \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma_w.$$

3. **Modulación.** Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $w = e^{z_0 t} u$. w admite transformada de Laplace, $\sigma_w \leq \sigma_u + \Re z_0$ y se tiene que

$$\mathfrak{L}w(z) = \mathfrak{L}u(z - z_0) \quad \text{si} \quad \Re z > \sigma_w.$$

Demostración. En primer lugar, existen $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+$ tales que $u = D^k f$ y $v = D^l g$, se supone que $k \geq l$. En estas condiciones,

$$\mathfrak{L}u(z) = z^k \mathfrak{L}f(z) \quad \text{si } \Re z > \sigma_u, \qquad \mathfrak{L}v(z) = z^l \mathfrak{L}g(z) \quad \text{si } \Re z > \sigma_v.$$

Para la prueba de (1), se definen las funciones

$$g_0 = g \qquad g_i(t) = \int_0^t g_{i-1}(x)\, dx \quad \text{para } i = 1, \ldots, k - l.$$

Por el teorema 1.32, las funciones g_i admiten transformada de Laplace con $\sigma_{g_i} \leq \text{máx}\{0, \sigma_g\}$ y se tiene que

$$\mathfrak{L}g_i(z) = \frac{1}{z^i} \mathfrak{L}g(z) \quad \text{si } \Re z > \text{máx}\{0, \sigma_g\} \quad \text{para } i = 1, \ldots, k - l.$$

Además, $Dg_i = g_{i-1}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ para cada $i = 1, \ldots, k - l$. Según la proposición 1.11.1, la función $\alpha f + \beta g_{k-l}$ admite transformada de Laplace con $\sigma_{\alpha f + \beta g} \leq$

$\max\{0,\sigma_f,\sigma_g\}$ y además se tiene que $D^k(\alpha f+\beta g_{k-l})=\alpha u+\beta v$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[\alpha u+\beta v](z) &= z^k\mathfrak{L}[\alpha f+\beta g_{k-l}](z)=\alpha z^k\mathfrak{L}f(z)+\beta z^k\mathfrak{L}g_{k-l}(z)\\ &= \alpha z^k\mathfrak{L}f(z)+\beta z^l\mathfrak{L}g(z)=\alpha\mathfrak{L}u(z)+\beta\mathfrak{L}v(z),\end{aligned}$$

siempre que $\Re z>\max\{0,\sigma_f,\sigma_g\}$.

Para la prueba de (2), se observa que si $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle\tau_{t_0}u,\varphi\rangle &= \left\langle D^kf,\tau_{-t_0}\varphi\right\rangle=(-1)^k\left\langle f,(\tau_{-t_0}\varphi)^{(k)}\right\rangle=\\ &= (-1)^k\int_0^\infty f(t)\varphi^{(k)}(t+t_0)\,dt=(-1)^k\int_{t_0}^\infty f(t-t_0)\varphi^{(k)}(t)\,dt\\ &= (-1)^k\int_{-\infty}^\infty f(t-t_0)\varphi^{(k)}(t)\,dt=\left\langle D^k(\tau_{t_0}f),\varphi\right\rangle,\end{aligned}$$

por lo que $\tau_{t_0}u=D^k(\tau_{t_0}f)$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La proposición 1.11.3 garantiza que $\tau_{t_0}f$ admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_f, por lo que w admite transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones y $\sigma_w=\sigma_u$. Además,

$$\mathfrak{L}[\tau_{t_0}u](z)=z^k\mathfrak{L}[H(t-t_0)f(t-t_0)]=z^ke^{-t_0z}\mathfrak{L}f(z)=e^{-t_0z}\mathfrak{L}u(z),$$

siempre que $\Re z>\sigma_w$.

Para demostrar la afirmación (3) se observa que, para cada $\varphi\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\left\langle e^{z_0t}u,\varphi\right\rangle &= \left\langle u,e^{z_0t}\varphi\right\rangle=\left\langle D^kf,e^{z_0t}\varphi\right\rangle=(-1)^k\left\langle f,D^k\left(e^{z_0t}\varphi\right)\right\rangle\\ &= (-1)^k\sum_{n=0}^k\int_0^\infty\binom{k}{n}f(t)\,z_0^n\,e^{z_0t}\varphi^{(k-n)}(t)\,dt\\ &= (-1)^k\sum_{n=0}^k z_0^n\binom{k}{n}(-1)^{k-n}\left\langle D^{k-n}\left[e^{z_0t}f\right],\varphi(t)\right\rangle,\end{aligned}$$

por lo que

$$e^{z_0t}u=\sum_{n=0}^k\binom{k}{n}(-z_0)^nD^{k-n}\left[e^{z_0t}f\right]\quad\text{en}\quad\mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

La proposición 1.11.4 asegura que la función $t\in\mathbb{R}\mapsto e^{z_0t}f(t)$ admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\Re z_0+\sigma_f$. Por linealidad, la distribución w admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma_w\le\Re z_0+\sigma_f$ y se tiene que

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[e^{-z_0t}u\right](z) &= \sum_{n=0}^k\binom{k}{n}(-z_0)^nz^{k-n}\mathfrak{L}\left[e^{z_0t}f\right](z)\\ &= (z-z_0)^k\mathfrak{L}f(z-z_0)=\mathfrak{L}u(z-z_0).\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad se ha utilizado la fórmula del binomio de Newton. ■

Teorema 2.14 (Unicidad de la transformada de Laplace distribucional). Sea $u \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_u. Si $\mathfrak{L}u(z) = 0$ para cada $z \in D_u$, entonces $u = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En particular, si $u \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ es otra distribución que admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia σ_v y $\mathfrak{L}v(z) = \mathfrak{L}u(z)$ para cada $z \in D_v \cap D_u$, entonces $u = v$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ que admite transformada de Laplace y tal que $u = D^k f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z > \sigma_u$, se tiene que

$$\mathfrak{L}u(z) = z^k \mathfrak{L}f(z) = 0 \Rightarrow \mathfrak{L}f(z) = 0 \quad \text{si} \quad z \neq 0.$$

El teorema 1.46 asegura que $f \underset{c.s.}{=} 0$ en $\mathbb{R}$, por lo que $u = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La segunda afirmación es consecuencia de la primera y de la linealidad de la transformación. ∎

La convolución de dos distribuciones de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ puede no estar bien definida en general. Sin embargo, cuando las dos tienen soportes contenidos en $[0, \infty)$ siempre se puede realizar esta operación.

Lema 2.15. Si $u, v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ la convolución de u y v está bien definida y se tiene que $u * v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Demostración. En virtud del teorema B.17, basta comprobar que el conjunto

$$M_r = \left\{(x, y) \in \operatorname{sop} u \times \operatorname{sop} v : x + y \in \bar{B}(0, r)\right\}$$

es compacto en $\mathbb{R}$. M_r es un conjunto cerrado porque la aplicación $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$ es continua, el soporte de una distribución siempre es un conjunto cerrado y $M_r = f^{-1}([0, r]) \cap (\operatorname{sop} u \times \operatorname{sop} v)$. M_r es acotado porque si $(x, y) \in \operatorname{sop} u \times \operatorname{sop} v$, se tiene que $x, y \geq 0$, por lo que $|x| = x \leq x + y \leq r$ y entonces $M_r \subseteq \bar{B}(0, \sqrt{2}r)$. Además,

$$\operatorname{sop}(u * v) \subseteq \operatorname{sop} u + \operatorname{sop} v \subseteq [0, \infty) + [0, \infty) \subseteq [0, \infty)$$

. ∎

Teorema 2.16 (Transformada de Laplace distribucional de convoluciones). Sean $u, v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ que admiten transformada de Laplace con abscisas de convergencia σ_u y σ_v, respectivamente. Entonces la distribución $u * v \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ también admite transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones, $\sigma_{u*v} \leq \{\sigma_u, \sigma_v\}$ y se tiene que

$$\mathfrak{L}[u * v](z) = \mathfrak{L}u(z)\, \mathfrak{L}v(z) \quad \text{si} \quad \Re z > \{\sigma_u, \sigma_v\}.$$

Demostración. Sean $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ que admiten transformada de Laplace con abscisas $\sigma_f = \sigma_u$ y $\sigma_g = \sigma_v$, respectivamente, verificando $u = D^k f$, $v = D^l g$ en $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. De acuerdo con B.17.5, se tiene que

$$u * v = D^k f * D^l g = D^k \left(f * D^l g\right) = D^k D^l (f * g) = D^{k+l}(f * g).$$

El teorema 1.31 asegura que la función $f * g$ admite transformada con $\sigma_{f*g} \leq \{\sigma_u, \sigma_v\}$. Por tanto, $u * v$ admite transformada de Laplace en el sentido de las distribuciones y $\sigma_{u*v} = \sigma_{f*g} \leq \{\sigma_u, \sigma_v\}$. Además,

$$\mathfrak{L}\left[u * v\right](z) = z^{k+l}\mathfrak{L}\left[f * g\right](z) = z^k \mathfrak{L}f(z)\, z^l \mathfrak{L}g(z) = \mathfrak{L}u(z)\, \mathfrak{L}v(z),$$

como se quería demostrar. ■

Para terminar esta sección se enuncia un teorema que establece una condición necesaria y suficiente para que una función holomorfa en un semiplano sea la transformada de Laplace de una distribción. La prueba puede encontrarse en [Doe74, Cap. 21].

Teorema 2.17 (**Condición necesaria y suficiente de representabilidad**). Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $F : \{z \in \mathbb{C} : \Re z > \alpha\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Existe una distribución $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\mathfrak{L}u(z) = F(z)$.
- Existe un polinomio P con coeficientes reales tal que $|F(z)| \leq P(|z|)$ para cada $z \in \mathbb{C}$ con $\Re z > \alpha$.

Observación 2.18. El teorema 1.43 imponía una condición necesaria a una función F para ser la transformada de Laplace de una función localmente integrable. Esta condición no se aplica a las transformadas de distribuciones, prueba de ello lo da el ejemplo 2.8, en el que las funciones transformadas $\mathfrak{L}\delta^{(n)}(z) = z^n$ tienden hacia ∞ cuando $|z| \to \infty$. Sin embargo, no crecen más rápido que una potencia de $|z|$. El teorema anterior estable que esta es la única posibilidad.

2.3. Las distribuciones parte finita de t^{-n}.

Cada función localmente integrable se puede identificar con una distribución y, puesto que estas admiten derivadas de todos los órdenes en el sentido de las distribuciones, tiene sentido hablar de las derivadas de una función localmente integrable aunque no sea derivable en el sentido clásico. Además, si la función es derivable su derivada distribucional será la distribución de tipo función asociada a su derivada en el sentido habitual.

Sin embargo, ocurre que una función localmente integrable puede tener una derivada que no sea localmente integrable y, por tanto, no se le pueda asociar una distribución. Este es el caso de la función logaritmo.

Proposición 2.19. La función $t \in (0, \infty) \mapsto \ln t$ es localmente integrable, admite transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma = 0$ y se tiene que

$$\mathfrak{L}\left[\ln t\right](z) = -\frac{\log z + \gamma}{z} \quad \text{si} \quad \Re z > 0,$$

donde $\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = 0,577215...$ es la constante de Euler-Mascheroni.

Demostración. Puesto que $t\ln t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, para cada $M>0$ se verifica

$$\int_0^M \ln t\, dt = M\ln M - M,$$

así que la función es localmente integrable. Además, si $s>0$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[\ln t\right](s) &= \int_0^\infty e^{-zt}\ln t\, dt = \int_0^\infty e^{-x}\ln\left(\frac{x}{s}\right)\frac{dx}{s}\\ &= \frac{1}{s}\left[\int_0^\infty e^{-x}\ln x\, dx - \ln s\int_0^\infty e^{-x}\, dx\right] = -\frac{\ln s+\gamma}{s}.\end{aligned}$$

Puesto que las funciones $z\in\{z\in\mathbb{C} : \Re z>0\}\mapsto -(\log z+\gamma)/z$ y $\mathfrak{L}f$ son dos funciones holomorfas que coinciden en la semirrecta real positiva, un conjunto con puntos de acumulación, el principio de identidad garantiza que son iguales. Además, como la función no se puede extender a una función holomorfa en un dominio que contenga a la semirrecta $\{z\in\mathbb{C} : \Re z = 0\}$, necesariamente $\sigma = 0$. ∎

Aunque la proposición prueba que la función logaritmo es localmente integrable,

$$\frac{d^n}{dt^n}\log t = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{t^n} \quad \text{si} \quad t>0,$$

sus derivadas no son localmente integrables así que no se puede definir una distribución utilizando B.6. Pero se puede modificar adecuadamente esta fórmula para, coloquialmente hablando, quedarse con la parte no divergente de la integral. Las distribuciones asociadas a funciones no localmente integrables se llaman tradicionalmente pseudofunciones: las distribuciones asociadas a las derivadas de la función logaritmo son un ejemplo de esto.

Observación 2.20. Si φ es una función test, se denota por $P_n(\varphi,a)(t)$ al polinomio de Taylor de orden n en torno al punto $a\in\mathbb{R}$. Se tiene que

- $P_0(\varphi,a)=\varphi(a)$, $P_n(\varphi,a)(t) = P_{n-1}(\varphi,a)(t) + \dfrac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n$.
- $P_n(\varphi,a)'(t) = P_{n-1}(\varphi',a)(t)$
- Si $m\le n$, $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{\varphi(t)-P_n(\varphi,a)(t)}{(x-a)^m} = 0$.
- (Teorema de Taylor) Dado $t\in\mathbb{R}$, existe ξ perteneciente al intervalo de extremos a y t tal que

$$\varphi(t)-P_n(\varphi,a)(t) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{n!}(t-a)^{n+1}.$$

Proposición 2.21. Las aplicaciones $\mathrm{Pf}\,t^{-n} : \mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ definidas para cada $n\in\mathbb{N}$ como

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\,t^{-1}(\varphi) &= \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \quad ,\text{si} \quad n=1,\\ \mathrm{Pf}\,t^{-n}(\varphi) &= \int_0^1 \frac{\varphi(x)-P_{n-1}(\varphi,0)(x)}{x^n}\,dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)-P_{n-2}(\varphi,0)(x)}{x^n}\,dx,\end{aligned}$$

si $n \geq 2$, definen una distribución de orden finito de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que se *denomina distribución parte finita (de Hadamard) de* t^{-n}. Además, $\operatorname{sop} \operatorname{Pf} t^{-n} \subseteq [0, \infty)$.

Demostración. La linealidad se deduce de la linealidad de la integral y del polinomio de Taylor. Dados $K > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop} \varphi \subset [-K, K]$ se tiene que

$$\left| \frac{\varphi(t) - P_{m-1}(\varphi, 0)(t)}{t^n} \right| = \left| \frac{\varphi^{(n)}(\xi) t^{m-n}}{m!} \right| \leq \frac{t^{m-n}}{m!} \sup_{t \in [-K,K]} \left| \varphi^{(n)}(t) \right|.$$

Por tanto,se deduce que

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Pf} t^{-n}(\varphi) \right| &\leq \int_0^1 \frac{1}{n!} \sup_{t \in [-K,K]} \left| \varphi^{(n)}(t) \right| dt + \int_1^K \frac{1}{(n-1)!} \sup_{t \in [-K,K]} \left| \varphi^{(n-1)}(t) \right| \frac{dt}{t} \\ &\leq \frac{\ln K + 1}{(n-1)!} \sup_{\substack{t \in [-K,K] \\ 0 \leq m \leq n}} \left| \varphi^{(m)}(t) \right| \end{aligned}$$

y de acuerdo con la proposición 3, la aplicación es continua y de orden a lo sumo n. Además, si $\operatorname{sop} \varphi \subset (-\infty, 0)$, se tiene que $\operatorname{Pf} t^{-n}(\varphi) = 0$, por lo que $\operatorname{sop} \operatorname{Pf} t^{-n} \subseteq [0, \infty)$. ■

Proposición 2.22 (**Derivadas de la distribución logaritmo**)**.** Se verifica que

$$\begin{aligned} \operatorname{Pf} t^{-1} &= D[\ln t] \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \text{si} \quad n = 1 \\ \operatorname{Pf} t^{-n} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(D^n [\ln t] + \psi(n) \delta_0^{(n-1)} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D^n [\ln t + \psi(n) H(t)] \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \text{si} \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

donde

$$\psi(n) = 1 + 2 + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

Demostración. Se demuestra por inducción sobre n. Para $n = 1$, dada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Pf} t^{-1}(\varphi) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt + \int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} (\varphi(\epsilon) - \varphi(0)) \ln \epsilon - \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \varphi'(t) \ln t \, dt - \int_1^\infty \varphi'(t) \ln t \, dt \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \varphi'(\xi_\epsilon) \epsilon \ln \epsilon - \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^\infty \varphi'(t) \ln t \, dt = -\int_0^\infty \varphi'(t) \ln t \, dt, \end{aligned}$$

donde en el primer paso se ha integrado por partes y en el segundo se utiliza el teorema del valor medio. Esto prueba que $\operatorname{Pf} t^{-1} = D[\ln t]$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Suponiendo cierta la igualdad para $n-1$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pf}\, t^{-n}(\varphi) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{\varphi(t)-P_{n-1}(\varphi,0)(t)}{x^n}\,dt + \int_1^\infty \frac{\varphi(t)-P_{n-2}(\varphi,0)(t)}{t^n}\,dt \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\varphi(\epsilon)-P_{n-1}(\varphi,0)(0)}{(n-1)\epsilon^{n-1}} + \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1 \frac{\varphi'(t)-P_{n-2}(\varphi',0)(t)}{(n-1)t^{n-1}}\,dt \\
&+ \lim_{t\to\infty}\frac{P_{n-2}(\varphi,0)(t)}{(n-1)t^{n-1}} + \frac{P_{n-1}(\varphi,0)(t)-P_{n-2}(\varphi,0)(t)}{n-1} \\
&+ \int_1^\infty \frac{\varphi'(t)-P_{n-3}(\varphi',0)(t)}{(n-1)t^{n-1}}\,dt = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \mathrm{Pf}\, t^{n-1}(\varphi')\right) \\
&= \frac{-1}{n-1}\left(D\left[\mathrm{Pf}\, t^{n-1} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}\delta_0^{(n-2)}\right](\varphi)\right) \\
&= \frac{-1}{n-1} D\left[\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\left(D^{n-1}\left[\ln t\right] + \left(\psi(n-1)+\frac{1}{n-1}\right)\delta_0^{(n-2)}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(D^n\left[\ln t\right] + \psi(n)\delta_0^{(n-1)}\right),
\end{aligned}
$$

como se quería demostrar. ■

Proposición 2.23. Las distribuciones parte finita de t^{n-1} admiten transformada de Laplace con abscisa de convergencia $\sigma = 0$ y se tiene que

$$\mathfrak{L}\left[\mathrm{Pf}\, t^{-(n+1)}\right](z) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} z^n\left(\log z - \psi(n+1) + \gamma\right) \quad \text{si} \quad \Re z > 0,$$

donde

$$\psi(1) = 0 \quad \psi(n+1) = 1 + 2 + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{si} \quad n \geq 1.,$$

Demostración. La demostración es inmediata teniendo en cuenta el teorema anterior y la definición de transformada de una distribución. ■

Capítulo 3

Aplicaciones de la transformada de Laplace

En este capítulo final se muestra cómo aplicar la transformación de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden arbitrario, tanto el caso de funciones clásicas como en el de distribuciones. Finalmente, se detallan tres ejemplos de aplicación de la teoría desarrollada.

Para ilustrar la utilidad de la transformación de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias se resuelve el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + c\,y(t) = H(t-a) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Si se supone que la función solución y admite transformada de Laplace Y y se transforman ambos lados de la ecuación, por 1.35, se tiene que

$$zY(z) - y_0 + cY(z) = \frac{e^{-az}}{z},$$

reagrupando,

$$Y(z) = \frac{y_0}{z+c} + \frac{e^{-az}}{z(z+c)}.$$

Por un lado, se tiene que

$$\mathfrak{L}\left[y_0 e^{-ct} H(t)\right](z) = \frac{y_0}{z+c},$$

mientras que

$$\mathfrak{L}\left[\frac{1}{c}\left(1 - e^{-ct}\right) H(t)\right](z) = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+c}\right) = \frac{1}{z(z+c)}.$$

Utilizando la propiedad de desfase 1.11.3 y juntando lo anterior se obtiene una función y tal que $\mathfrak{L}y = Y$:

$$y(t) = y_0\, e^{-ct} H(t) + \frac{1}{c}\left(1 - e^{-c(t-a)}\right) H(t-a).$$

De forma explícita se puede escribir

$$y(t) = \begin{cases} y_0 e^{-ct} & 0 \leq t < a \\ \dfrac{1}{c} - \left(\dfrac{e^{ac}}{c} - y_0\right) e^{-ct} & t \geq a. \end{cases}$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver utilizando ténicas elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias sin hacer uso de la transformación de Laplace. Sin embargo, pueden aparecer algunos problemas prácticos en la resolución.

Por un lado, el procedimiento habitual de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias consiste en obtener la solución general de la ecuación homogénea y sumar una solución particular de la ecuación no homogénea. Para ecuaciones de orden alto no existe un método directo sencillo para encontrar la solución particular. Al utilizar la transformación de Laplace el problema pasa a ser el de encontrar la transformada inversa de la función solución; un problema que, aunque tampoco tiene un método único, se ha abordado de forma sistemática.

Además, tratar con funciones definidas a trozos en el término independiente como en el ejemplo supone en la práctica aplicar el procedimiento anterior en cada intervalo en el que cambia la función. Estas funciones aparecen en multitud de aplicaciones prácticas y utilizando la transformada de Laplace se pueden resolver de una forma mucho más cómoda.

3.1. El problema de Cauchy en E.D.O. con coeficientes constantes

En esta sección se estudia la resolución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + c_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_0\, y(t) = f(t) \\ y(0^+) = y_0,\ \ldots\ , y^{(n-1)}(0^+) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{3.1}$$

donde f es una función localmente integrable y continua a trozos con saltos finitos (esto es, para cada $t > 0$ existen los límites laterales $f(t^-)$, $f(t^+)$ y son finitos) mediante la utilización de la transformación de Laplace.

Definición 3.1. Se considera una solución del problema 3.1 a aquella función $y : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que:

1. Verifica las condiciones iniciales del problema.
2. Las funciones $y^{(j)}$ son continuas para cada $0 \leq j \leq n-1$.
3. Satisface la ecuación diferencial para cada $t > 0$, al menos, por la derecha y por la izquierda:

$$y^{(n)}(t^+) + c_{n-1}\, y^{(n-1)}(t^+) + \ldots + c_0\, y(t^+) = f(t^+)$$
$$y^{(n)}(t^-) + c_{n-1}\, y^{(n-1)}(t^-) + \ldots + c_0\, y(t^-) = f(t^-)$$

Observación 3.2. Las condiciones 2 y 3 anterior garantizan que los saltos en la derivada n-ésima coinciden con los del término fuente f, pues restando ambas ecuaciones se tiene que

$$y^{(n)}(t^+) - y^{(n)}(t^-) = f(t^+) - f(t^-).$$

Proposición 3.3. Sea y la solución del problema 3.1. Suponiendo que f y $y^{(n)}$ admiten transformada de Laplace (por 1.35, $y^{(j)}$ con $0 \leq j \leq n-1$ también) y denotando por $p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$ al *polinomio característico* de la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} Y(z) = \frac{F(z)}{p(z)} + &\quad y_0 \frac{z^{n-1} + c_{n-1}z^{n-2} + \cdots + c_2 z + c_1}{p(z)} \\ + &\quad y_0' \frac{z^{n-2} + c_{n-1}z^{n-3} + \cdots + c_2}{p(z)} \\ + &\quad \cdots \\ + &\quad y_0^{(n-2)} \frac{z + c_{n-1}}{p(z)} \\ + &\quad y_0^{(n-1)} \frac{1}{p(z)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Demostración. Transformando ambos lados de la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} &\left[z^n Y(z) - y_0 z^{n-1} - y_0' z^{n-2} - \ldots y_0^{n-1}\right] \\ &+c_{n-1} \left[z^{n-1} Y(z) - y_0 z^{n-2} - y_0' z^{n-3} - \ldots y_0^{n-2}\right] \\ &+ \ldots \\ &+c_1 \left[z Y(z) - y_0\right] \\ &+c_0 Y(z) = F(z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

y reordenando términos se tiene la expresión del enunciado. De nuevo, los valores iniciales se incorporan autómaticamente a la solución a través de su transformada. ■

Observación 3.4. Los polinomios en los numeradores leídos sucesivamente, empezando por el último término, son las etapas sucesivas de la evaluación de $p(z)$ mediante el algoritmo de Horner.

En lo que sigue, separaremos el problema en dos partes

1. Ecuación homogénea ($f = 0$) con valores iniciales arbitrarios

2. Ecuación inhomogénea con valores iniciales nulos

Para construir una solución de 3.1 basta con sumar las soluciones de los problemas anteriores correspondientes.

3.1.1. Ecuación homogénea con valores iniciales arbitrarios

La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que las soluciones de la ecuación homogénea son de la forma $t^l e^{\alpha t}$, de forma que estas funciones y sus derivadas admiten transformada de Laplace.

Definición 3.5. Denotamos por g a la solución del siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + c_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_0\, y(t) = 0 \\ y_0 = 0,\ \ldots,\ y_0^{(n-2)} = 0,\ y_0^{(n-1)} = 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

La ecuación 3.2 para este problema se escribe

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)} \equiv G(z).$$

Es decir, la función g es tal que

$$\mathfrak{L}g(z) = G(z).$$

Esta función se denomina *función de Green* de la ecuación diferencial ordinaria (no depende de los valores iniciales).

Si se expande G en suma de fracciones simples (ver 1.50) se puede expresar la función g como

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t} && \text{si} \quad \alpha_\mu \quad \text{simple} \\ g(t) &= \sum_{\mu=1}^{n} \left(d_{\mu_1} + \frac{d_{\mu_2}}{1!} t + \cdots + \frac{d_{\mu k_\mu}}{(k_\mu - 1)!} t^{k_\mu - 1} \right) e^{\alpha_\mu t} && \text{si} \quad \alpha_\mu \quad k_\mu - \text{múltiple.} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Proposición 3.6. La solución y del problema arbitario de valores iniciales se puede escribir en términos de la función g y de sus derivades hasta el orden n:

$$\begin{aligned} y(t) = \quad & y_0 \left[g^{(n-1)}(t) + c_{n-1}\, g^{(n-2)}(t) + \cdots + c_2\, g'(t) + c_1\, g(t) \right] \\ + \quad & y_0' \left[g^{(n-2)}(t) + c_{n-1}\, g^{(n-2)}(t) + \cdots + c_2\, g(t) \right] \\ + \quad & \cdots \\ + \quad & y_0^{(n-1)} y(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Demostración. Utilizando el teorema de derivación 1.35 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}g(z) &= \frac{1}{p(z)} \\ \mathfrak{L}\left[g^{(j)}\right](z) &= \frac{z^j}{p(z)} \quad j = 1, \ldots, n-1 \\ \mathfrak{L}\left[g^{(n)}\right](z) &= \frac{z^n}{p(z)} - 1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

y se concluye utilizando la fórmula 3.2. ■

3.1.2. Ecuación inhomogénea con valores iniciales nulos

Proposición 3.7. La solución del problema con valores iniciales nulos y término fuente f

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + c_{n-1}\, y^{(n-1)}(t) + \ldots + c_0\, y(t) = f(t) \\ y_0 = 0,\, \ldots,\, y_0^{(n-2)} = 0,\, y_0^{(n-1)} = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

se puede expresar de la siguiente manera en términos de la función de Green g

$$y(t) = (g * f)(t) = \int_0^t g(t-\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{3.9}$$

Demostración. Para la ecuación con término fuente f (con $\mathfrak{L}f = F$), se escribe

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)} F(z) = G(z)F(z),$$

por lo que el teorema de convolución permite concluir. ■

Se puede comprobar directamente que la función y es solución del problema inhomogéneo con valores iniciales nulos utilizando que

$$y'(t) = g(0)f(t) + (g' * f)(t), \tag{3.10}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial y utilizando las propiedades que caracterizan a la función g.

3.2. La ecuación diferencial lineal ordinaria en el espacio de distribuciones

En este apartado se estudian las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria lineal de orden n en el espacio de distribuciones. Dada una distibución $u \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$, se trata de encontrar $y \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$D^n y + c_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + c_1 D y + c_0 y = u \tag{3.11}$$

en el sentido de las distribuciones. En ocasiones, se utilizará la notación $p(D)y$ para denotar el lado izquierdo de la ecuación anterior.

Observaciones 3.8.

1. Nótese que en este contexto no tiene sentido hablar de valores iniciales, puesto que no está definido de ninguna forma el valor de una distribución en un punto. Incluso al tratar con distribuciones de tipo función no tiene sentido considerarlo, pues al modificar el valor de una función en un conjunto de medida nula no se altera la distribución que define esta.

2. Cuando u o f representan distribuciones de tipo función, las funciones clásicas correspondientes deben ser tales que se anulen en casi todo punto de $(-\infty, 0)$.

Proposición 3.9. Una distribución $y \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ es solución del problema 3.11 si, y solo si,

$$\left(\delta^{(n)} + c_{n-1}\delta^{(n-1)} + \cdots + c_1\delta' + c_0\delta\right) * y = u \tag{3.12}$$

Demostración. Basta observar que por B.17.4, para cada distribución $y \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ se cumple que

$$D^j y = \delta^{(j)} * y.$$

■

Utilizando la notación habitual $\mathfrak{L}y = Y$, $\mathfrak{L}u = U$ y tomando transformadas de Laplace en ambos lados de la igualdad 3.11 se tiene que

$$\left(z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0\right) Y(z) = U(z), \tag{3.13}$$

con la notación del apartado anterior

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)}U(z) = G(z)U(z). \tag{3.14}$$

Observación 3.10. Para considerar la función de Green g como una distribución de $D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ se debe extender con el valor 0 a la semirrecta $t < 0$, de forma que

$$\begin{aligned} &g(0^-) = g'(0^-) = \cdots = g^{(n-1)}(0^-) = 0 \\ &g(0^+) = g'(0^+) = \cdots = g^{(n-2)}(0^-) = 0, \qquad g^{(n-1)}(0^+) = 1. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de los saltos B.13, se tiene que

$$\begin{aligned} Dg &= g' \\ &\cdots \\ D^{n-1}g &= g^{n-1} \\ D^n g &= g^{(n)} + \delta, \end{aligned} \tag{3.15}$$

y como g es solución de la ecuación homogénea en el sentido clásico, esto garantiza que

$$p(D)g = \delta,$$

por lo que la función g también recibe el nombre de *solución fundamental de la EDO.*

Teorema 3.11. Si la distibución $u \in D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ admite transformada de Laplace, la solución del problema 3.11 es la distribución y de $D'_{\mathrm{f}}(\mathbb{R}_+)$ definida como

$$y = g * u$$

Demostración. La transformada de Laplace de la distribución solución satisface la relación 3.14, por lo que el teorema de convolución para la transformada de Laplace de distribuciones garantiza que la función así definida es solución del problema.

También se puede comprobar directamente utilizando B.17.4, ya que

$$p(D)\,(g * u) = (p(D)g) * u = \delta * u = u$$

■

3.3. Ejemplos de aplicación

3.3.1. Fuerza impulsiva instantánea

Consideramos una masa m en reposo que se ve sometida a la acción de una fuerza instantánea en el instante $t = 0$, es decir, $F(t) = F_0\,\delta(t)$. La ecuación del movimiento es, según la segunda ley de Newton,

$$\begin{cases} my''(t) = F_0\,\delta(t) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Aplicando la transformación de Laplace

$$mz^2\mathfrak{L}y(z) = F_0 \Rightarrow \mathfrak{L}y(z) = \frac{F_0}{mz^2}.$$

Por lo que tomando la transformada de Laplace inversa

$$y(t) = \frac{F_0}{m}t \Rightarrow y'(t) = \frac{F_0}{m}$$

Por lo que la fuerza ha transferido instantáneamente un momento lineal F_0 a la partícula. A pesar de su simplicidad, este ejemplo muestra cómo se puede utilizar la delta de Dirac para modelizar fuerzas intantáneas y la sencillez con la que se resuelven estos problemas al usar la transformada de Laplace.

3.3.2. Oscilaciones forzadas y resonancia

A continuación se aplica la transformada de Laplace a la resolución de la ecuación diferencial ordinaria que rige el comportamiento de un oscilador forzado en mecánica. Esta ecuación es idéntica a la que describe las fluctuaciones de la corriente eléctrica en un circuito de corriente alterna con una resistencia, una bobina y un condensador.

Si m es la masa del oscilador, b un parámetro que da cuenta de la magnitud de la fuerza de fricción (fuerza proporcional a la velocidad del oscilador y de sentido contrario), k la constante elástica del muelle y $f(t)$ la fuerza externa que se aplica a este en cada instante; la ecuación es la siguiente

$$\begin{cases} my''(t) + b\,y'(t) + k\,y(t) = f(t) \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

en la que se toman condiciones iniciales nulas. Para resolverla se busca una solución fundamental, es decir, una función que verifique, en el sentido de las distribuciones, la siguiente igualdad:

$$g''(t) + \frac{b}{m}\,g'(t) + \frac{k}{m}\,g(t) = \delta(t).$$

Para esto, se supone que la solución fundamental y sus derivadas admiten transformada de Laplace y se toman transformadas a ambos lados de la ecuación. Se obtiene:

$$\left(mz^2 + bz + k\right)\mathfrak{L}g(z) = m \Rightarrow \mathfrak{L}g(z) = \frac{m}{mz^2 + bz + k}$$

Introduciendo el parámetro $\omega^2 = k/m - b^2/4m^2$ que se supone $\omega^2 > 0$ (esta condición se conoce en la literatura como "condición de oscilador débilmente amortiguado") y completando cuadrados en el denominador se puede expresar la transformada de la solución como

$$\mathfrak{L}g(z) = \frac{1}{\omega^2}\frac{\omega^2}{\left(z^2 + \dfrac{b}{2m}\right)^2 + \omega^2},$$

que es la transformada de la función coseno modulada por una exponencial, concretamente,

$$g(t) = \frac{1}{\omega^2}H(t)e^{-b/2m\,t}\cos(\omega t).$$

Ahora, la solución de la ecuación 3.17 se puede expresar mediante la convolución del término fuente con la solución fundamental

$$y(t) = \frac{1}{m\omega^2}\int_0^t f(t-\tau)e^{-b/2m\tau}\cos(\omega\tau)\,d\tau. \tag{3.18}$$

Aunque el problema general 3.17 está resuelto, nos fijamos en el caso particularmente interesante, desde el punto de vista físico, de las funciones de la forma $f(t) = A\cos(\gamma t)$ con $A, \gamma > 0$, que corresponden a aplicar una fuerza que varía sinusoidalmente con el tiempo con frecuencia γ. La solución para estas funciones tiene una expresión complicada

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{m\omega^2}\int_0^t e^{-b/2m\tau}\cos(\gamma t - \gamma\tau)\cos\omega\tau\,d\tau \\ &= \frac{1}{2}\frac{(\omega-\gamma)\left(\operatorname{sen}\gamma t + e^{-b/2mt}\operatorname{sen}\omega t\right) - b/2m\left(\cos\gamma t + e^{-b/2mt}\cos\omega t\right)}{b^2/4m^2 + (\omega-\gamma)^2} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{(\omega-\gamma)\left(\operatorname{sen}\gamma t + e^{-b/2mt}\operatorname{sen}\omega t\right) - b/2m\left(\cos\gamma t + e^{-b/2mt}\cos\omega t\right)}{b^2/4m^2 + (\omega+\gamma)^2}, \end{aligned}$$

pero permite explicar un fenómeno característico de estos sistemas: la resonancia. A medida que la frecuencia de oscilación de la fuerza externa γ se acerca a la *frecuencia propia* del oscilador ω, que a su vez depende de los tres parámetros del problema m, k, b; el denominador del primer sumando tiende a 0 por lo que la amplitud de oscilación puede crecer arbitrariamente.

Este fenómeno se observa en la experiencia cotidiana, por ejemplo, al columpiar acompasadamente a un niño en un columpio. Si se le empuja acompañando la oscilación natural del mismo, la altura máxima que alcanza en cada vuelta aumenta rápidamente, mientras que si se hace lo contrario se entorpece el movimiento del columpio. Un famoso ejemplo arquetípico de este hecho lo da asimismo el derrumbamiento del puente de Tacoma Narrows, en la localidad estadounidense de Tacoma, el 7 de noviembre de 1940, debido a que los vientos moderados que lo aquejaban produjeron un aleteo aeroelástico que coincidía con la frecuencia natural del puente.

3.3.3. La ecuación del calor en una semirrecta

La transformación de Laplace también se puede utilizar como herramienta en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). Mientras que en el caso de las EDOs la transformada de Laplace convertía la ecuación diferencial en una ecuación algebraica, en este caso una ecuación diferencial que contiene derivaciones con respecto a dos variables se convierte en una ecuación diferencial ordinaria con respecto a una de las variables.

Para el problema que se presenta se requiere calcular una nueva transformada.

Lema 3.12. La función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \frac{ae^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t^3}},$$

con $a > 0$, admite transformada de Laplace con $\sigma_f \leq 0$ y se tiene que

$$\mathfrak{L}f(z) = e^{-\sqrt{z}a} \qquad \text{si} \qquad \Re z > 0.$$

Demostración. f es una función acotada, pues es continua y $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$. Una primitiva de f, F, se puede expresar en términos de la función error de Gauss, erf,

$$F(t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx$$

como se puede comprobar directamente aplicando la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo. La función transformada de F se puede calcular siguiendo lo expuesto en [Gal19, Cap. 8, Prob. 8.7] y es

$$\mathfrak{L}F(z) = \frac{1}{z}e^{-a\sqrt{z}} \qquad \text{si} \qquad \Re z > 0.$$

Puesto que

$$\lim_{t\to 0^+} = 1 - \lim_{t\to\infty} \operatorname{erf}(t) = 1 - 1 = 0,$$

el teorema 1.35 garantiza que

$$\mathfrak{L}f(z) = z\mathfrak{L}F(z) - F(0^+) = e^{-a\sqrt{z}} \qquad \text{si} \qquad \Re z > 0,$$

como se quería demostrar. ■

El problema que trataremos como ejemplo es la ecuación del calor homogénea en una semirrecta con valores iniciales nulos y condición frontera dada por una función h del tiempo,

$$\begin{cases} u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) = & 0 & \text{si} & t > 0,\ x > 0 \\ u(t,0) = & h(t) & \text{si} & t > 0 \\ u(0,x) = & 0 & \text{si} & x > 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Además, buscamos una solución que sea acotada. Esta condición garantiza que u admite transformada de Laplace con respecto a t para cada $x > 0$,

$$\mathfrak{L}\left[u(t,x)\right](z) = \int_0^\infty u(t,x)e^{-zt}\,dt = U(x,z) \qquad \text{si} \qquad x > 0,\ \Re z > \sigma_u.$$

También se supone que la transformada de Laplace puede ser intercambiada con la derivación con respecto a la variable espacial x, es decir, que

$$\mathfrak{L}\left[u_{xx}(t,x)\right](z) = \frac{\partial}{\partial x^2}\int_0^\infty u(t,x)e^{-zt}\,dt = U_{xx}(x,z) \qquad \text{si} \qquad x > 0,$$

hipótesis que se puede comprobar una vez encontrada la solución. Aplicando la transformación de Laplace a cada lado de 3.19 se tiene, para cada $x > 0, \Re z > \sigma_u$,

$$zU(x,z) - U(0,z) - U_{xx}(x,z) = 0.$$

Conviene expresar la condición frontera en términos de la función transformada (los valores iniciales están implícitos en la ecuación anterior, como ocurría en el caso de las EDOs)

$$U(0,z) = \int_0^\infty u(0,t)e^{-zt}\,dt = \int_0^\infty h(t)e^{-zt}\,dt = \mathfrak{L}h(z).$$

El problema en el dominio transformado es

$$\begin{cases} zU(x,z) - U_{xx}(x,z) = & 0 \qquad \text{si} \qquad x > 0,\ \Re z > \sigma_u \\ \qquad\qquad U(0,z) = & \mathfrak{L}h(z) \qquad \text{si} \qquad \Re z > \sigma_u \end{cases} \tag{3.20}$$

que se trata de una familia uniparamétrica de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable x. La solución general de la EDO es

$$U(x,z) = \alpha(z)e^{\sqrt{z}x} + \beta(z)e^{-\sqrt{z}x},$$

si $\Re z > 0$, tomando la raíz en su determinación principal. Puesto que U debe ser una función acotada por 1.43, tomamos el coeficiente $\alpha(z) = 0$. Imponiendo la condición frontera

$$U(0,z) = \beta(z) = \mathfrak{L}h(z),$$

por lo que

$$U(x,z) = \mathfrak{L}h(z)e^{-\sqrt{z}x}.$$

Utilizando el lema anterior 3.12 y el teorema de convolución 1.31 se tiene que la función $u : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{xe^{-x^2/4(t-\tau)}}{\sqrt{4\pi(t-\tau)^3}}h(\tau)\,d\tau$$

es la transformada de Laplace inversa de $U(x,z)$ para cada $x > 0$ y es, por tanto, la solución buscada de 3.19.

Apéndice A

Algunos resultados de Análisis Real y Armónico

En este apéndice se recogen algunos resultados utilizados en el desarrollo del trabajo. En primer lugar, se introduce el concepto de continuidad absoluta, que permite enunciar el teorema fundamental del cálculo de una forma más general que la expuesta en los cursos de introducción al Cálculo. Después, se definen las funciones de variación acotada, necesarias para abordar el problema de la inversión en las transformadas de Fourier y Laplace. La referencia fundamental para estas primeras secciones es [Fol99]. Finalmente, se exponen sin demostración algunos resultados necesarios para la prueba de la fórmula de inversión de la transformada de Fourier, tal como se encuentran en el estudio completo que se realiza en [Bac00].

A.1. Continuidad absoluta. El teorema fundamental del Cálculo

Definición A.1. Sean I un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{C}$. Se dice que F es *absolutamente continua* en I si se verifica que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cualquiera que sea la familia de intervalos disjuntos $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ contenidos en I con $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$ se tiene que $\sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < \epsilon$.

Proposición A.2. Sean I un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{C}$.

1. Si F es absolutamente continua en I, entonces F es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

2. Si F es absolutamente continua en I, entonces F es de variación acotada.

3. Si $F \in \mathcal{C}^1(I)$, entonces F es absolutamente continua.

Teorema A.3 (fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue). Sean $[a, b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ y $F : [a, b] \to \mathbb{C}$. Son equivalentes:

1. F es absolutamente continua en $[a, b]$.

2. Existe $f \in L^1([a, b])$ tal que $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\, dt$ para cada $x \in [a, b]$.

3. F es derivable casi siempre en $[a, b]$, $F' \in L^1([a, b])$ y $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt$ para cada $x \in [a, b]$.

El concepto de continuidad absoluta permite enunciar una versión más general del teorema fundamental del Cálculo que la expuesta en los cursos de introducción al Cálculo Infinitesimal basada en la integral de Riemann. Coloquialmente hablando, el teorema dice que las funciones absolutamente continuas son exactamente las primitivas de las funciones localmente integrables. Sin embargo, cabe hacer énfasis en que no toda función derivable en casi todo punto de un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ es absolutamente continua, la integrabilidad de la función derivada es una condición necesaria y suficiente.

El resultado siguiente extiende la fórmula de integración por partes al marco de las funciones absolutamente continuas. La prueba hace uso del teorema Fundamental del Cálculo y del teorema de Fubini.

Teorema A.4 (Fórmula de integración por partes). Si F y G son absolutamente continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b F(x)G'(x)\,dx + \int_a^b F'(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

A.2. Funciones de variación acotada

Las funciones de variación acotada serán de utilidad a la hora de abordar el problema de la inversión en las transformadas integrales de Fourier y Laplace. En este apartado se definen y se demuestran algunas propiedades necesarias para el estudio de las transformadas.

Definición A.5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Se dice que f es de *variación acotada* en $[a, b]$ si existe $M > 0$ tal que para cualquier secuencia finita de puntos intermedios $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M.$$

Proposición A.6. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si f es de variación acotada en $[a, b]$, entonces f es acotada.
2. Si f es monótona en $[a, b]$, es de variación acotada en $[a, b]$.
3. Si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, es de variación acotada en $[a, b]$.
4. Si f y g son de variación acotada en $[a, b]$, entonces $f + g$ y fg también.

Demostración. 1. Sea $x \in [a, b]$, entonces $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M$, por lo tanto $|f(x)| \leq 2\,|f(x)| \leq |f(x) - f(b) + f(b)| + |f(x) - f(a) + f(a)| \leq M + |f(a)| + |f(b)|$, por lo que f está acotada.

2. Supongamos que f es creciente, si es decreciente se razona de forma análoga. Dados $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, se tiene que $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(b) - f(a)$, por lo que f es de variación acotada en $[a, b]$.

3. Dados $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, como $f \in \mathfrak{C}^1([a, b])$, el teorema del valor medio garantiza que existen $\xi_k \in (x_{i-1}, x_i)$ y $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Como f es continua en un compacto $|f'(\xi_k)| \leq M \quad \forall k$. Por tanto: $\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |f'(\xi_k)| (x_k - x_{k-1}) \leq M(b - a)$, por lo que f es de variación acotada en $[a, b]$.

4. Dados $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, como f y g son de variación acotada,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n & |f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})| \leq \\ \sum_{k=1}^n & |f(x_k) - f(x_{k-1}))| + \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq M_f + M_g,\end{aligned}$$

   luego $f + g$ es de variación acotada. Para ver que lo es fg, como f y g son acotadas por (1), se tiene que $f(x) \leq K_f$ y $g(x) \leq K_g$ si $x \in [a, b]$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n & |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = \\ \sum_{k=1}^n & |f(x_k)g(x_k) - f(x_k)g(x_{k-1}) + f(x_k)g(x_{k-1}) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq \\ \sum_{k=1}^n & |f(x_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))| + \sum_{k=1}^n |g(x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1}))| \leq \\ K_f M_g & + K_g M_f,\end{aligned}$$

   por lo que fg es de variación acotada.

■

Proposición A.7. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces son equivalentes:

1. f es de variación acotada.

2. f es la diferencia de dos funciones crecientes y acotadas.

A.3. La transformada de Fourier

La transformación de Fourier es una herramienta de gran utilidad para abordar problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales y el tratamiento de señales. En esta sección se define la transformada y se incluyen dos resultados utilizados en la prueba de la fórmula de Bromwich. Los detalles de la prueba, muy laboriosa, de la fórmula de inversión pueden encontrarse en el ya mencionado libro de Bachman [Bac00].

Definición A.8. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se define la *transformada de Fourier de f* como la aplicación $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega t} f(t)\, dt.$$

La transformada de Fourier de f se denota por $\hat{f}$ o $\mathfrak{F}(f)$.

Proposición A.9 (Relación entre la transformada de Laplace y la de Fourier). Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ una función que admite transformada de Laplace con $\sigma_f < 0$. Denotemos por f^* a su extensión por 0 a toda la recta (es decir, $f^*(t) = 0 sit < 0, y f^* \mid_{[0,\infty)}= f$). Entonces, la función f^* es integrable en $\mathbb{R}$ y para cada número real ω se tiene que

$$\mathfrak{F}(f^*)(\omega) = \hat{f}^*(\omega) = \mathfrak{L}f(i\omega).$$

En general, si $a > \sigma_f$ y se define $g(t) = e^{-at} f(t)$ (entonces $\sigma_g = \sigma_f - a < 0$), se tiene que

$$\mathfrak{F}(g^*)(\omega) = \mathfrak{L}g(i\omega) = \mathfrak{L}f(a + i\omega).$$

Teorema A.10 (Fórmula de inversión para la transformación de Fourier). Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si f es de variación acotada en un entorno de $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t} \hat{f}(\omega)\, d\omega$$

Apéndice B

Distribuciones

Este apéndice recoge algunas propiedades relevantes de las funciones generalizadas o distribuciones que se utilizan en el desarrollo de la teoría. Aunque la definición precisa del espacio de distribuciones requiere de la utilización del concepto de Espacio Vectorial Topológico, se omiten estos detalles, que pueden encontrarse en [Rud91], para enumerar las propiedades relevantes para el trabajo. Una exposición detallada de las propiedades de las distribuciones puede encontrarse en [Mit18].

Definición B.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $K \subset \Omega$ un conjunto compacto. Se denota por $\mathcal{D}_K(\Omega)$ al espacio vectorial topológico de las funciones $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \operatorname{sop} f \subset K\}$ con la topología inducida por la familia de seminormas $\{p_{K,m}\}_{m\in\mathbb{N}_0}$

$$\begin{aligned} p_{K,m} : \mathcal{D}_K(\Omega) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \max_{x\in K, |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)| \,. \end{aligned}$$

Se define el espacio de las *funciones test en* Ω, que se denota por $\mathcal{D}(\Omega)$, como el conjunto $\{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \operatorname{sop} f \in \Omega\}$ equipado con la topología de límite inductivo estricto de los espacios $\mathcal{D}_K(\Omega)$ (ver detalles en [Rud91]).

Definición B.2. Se dice que $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ es una *distribución en* Ω si u es lineal y continua, esto es, si u pertenece a $\mathcal{D}'(\Omega)$, el espacio dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se denota por $\langle u, \varphi\rangle$ a la imagen de φ por u.

Aunque la definición de la topología del espacio de funciones test no es sencilla, la proposición siguiente permite determinar si un funcional de $\mathcal{D}(\Omega)$ es continuo, es decir, si es una distribución.

Proposición B.3. Sea $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. u es una distribución.

2. Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $k \in \mathbb{N}_0$ y $M > 0$ tal que

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq \max_{x\in K, |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad \text{para cada} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

3. Para cada sucesión $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ con $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j = 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, se tiene que $\lim\limits_{j\to\infty} \langle u, \varphi_j\rangle = 0$.

Definición B.4. Sea u una distribución en Ω. Si el entero k en B.3.2 se puede escoger independientemente del compacto K, se dice que u es una *distribución de orden finito.*

Si u es una distribución de orden finito, se define el *orden de u* como el menor entero k tal que u satisface la condición de continuidad en B.3.2.

Definición B.5. Se dice que una distribución u en Ω es de tipo función si existe una función f localmente integrable en Ω tal que para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ se tiene que

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

En estas condiciones, se dice que u es la distribución asociada a la función f y se denota por u_f.

Proposición B.6. Para cada función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, la aplicación

$$u_f : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

es una distribución de orden finito en Ω. Además, si existe g localmente integrable tal que $u_g = u_f$, entonces $f = g$ casi siempre en Ω.

La proposición anterior establece que cada función localmente integable[1] en Ω se puede identificar con una distribución en Ω. Sin embargo, existen distribuciones que no son de tipo función, lo que justifica que también se llame funciones generalizadas a las distribuciones.

Ejemplo B.7. Sea $x_0 \in \Omega$. La aplicación

$$\delta_{x_0} : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \varphi(x_0)$$

se denomina *delta de Dirac centrada en* x_0 y es una distribución de orden 0 en Ω que no es de tipo función.

El espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con la suma y la multiplicación por escalares habituales de aplicaciones lineales. Además, este espacio se puede dotar de una topología de espacio localmente convexo mediante la familia de aplicaciones lineales $\{p_\varphi\}_{\varphi\in\mathcal{D}'(\Omega)}$ definidas como $p_\varphi(u) = \langle u, \varphi\rangle$ para cada $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, que se denomina topología débil*.

Proposición B.8. $\mathcal{D}'(\Omega)$ es un espacio topológico localmente convexo sobre $\mathbb{C}$. Además, una sucesión $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ cuando $j \to \infty$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ si, y solo si $\lim\limits_{j\to\infty} \langle u_j, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

[1]estrictamente hablando, cada clase de equivalencia de funciones localmente integrables iguales casi siempre.

Proposición B.9. $\mathcal{D}'(\Omega)$ es un espacio completo, en el sentido de que si una sucesión $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es tal que $\lim\limits_{j\to\infty}\langle u_j,\varphi\rangle$ existe para toda $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, entonces el funcional $u:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{C}$ definido por $\langle u,\varphi\rangle=\lim\limits_{j\to\infty}\langle u_j,\varphi\rangle$ para cada $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ es una distribución en Ω.

Algunos conceptos habituales de la teoría de funciones como la multiplicación por una función, la diferenciación y el soporte se extienden al espacio de distribuciones. En todos los casos la definición clásica y la distribucional coinciden para las distribuciones de tipo función.

Proposición B.10. Sean $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ y $a\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. La aplicación $au:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{C}$ definida por

$$(au)(\varphi)=\langle u,a\varphi\rangle,\quad \text{para cada}\quad \varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

es una distribución en Ω, denominada *multiplicación de a por u*. Si existe $f\in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $u=u_f$, se verifica que $au_f=u_{af}$.

Proposición B.11. Sean $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$. La aplicación $D^\alpha u:\mathcal{D}(\Omega)\to\mathbb{C}$ definida por

$$(D^\alpha u)(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}\langle u,D^\alpha\varphi\rangle,\quad \text{para cada}\quad \varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

es una distribución en Ω, denominada *derivada de orden α de u*. Si existe $f\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $u=u_f$, se verifica que $D^\alpha u_f=u_{D^\alpha f}$.

Observación B.12. En lo sucesivo utilizaremos la notación de Cauchy, D^kf, para desginar la derivación débil, mientras que con la de Lagrange, $f',\ldots,f^{(k)}$, significaremos la derivación ordinaria.

La proposición extiende el concepto de derivación al espacio de distribuciones y garantiza que toda distribución admite derivadas de cualquier orden en el sentido precisado. Además, de acuerdo con los comentarios que siguen a la proposición B.6, esto permite hablar de las derivadas de una función localmente integrable aunque no esta no sea derivable en el sentido clásico. En particular, se tiene una fórmula explícita para el caso en el que la función es derivable salvo en un punto en el que presenta discontinuidades de salto finito.

Proposición B.13 (Fórmula de los saltos). Sea $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $f^{(k)}(t)$ existe para todo t con la excepción del punto $t=a$ y representa una función localmente integrable. Además, se supone que existen los límites

$$\begin{array}{llll} f(a-), & f'(a-), & \ldots, & f^{(k-1)}(a-)\\ f(a+), & f'(a+), & \ldots, & f^{(k-1)}(a+)\end{array}$$

existen. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} D^kf=f^{(k)}\quad &+\left[f^{(k-1)}(a+)-f^{(k-1)}(a-)\right]\delta_a\\ &+\left[f^{(k-1)}(a+)-f^{(k-1)}(a-)\right]\delta_a'\\ &\cdots\\ &+\left[f^{(k-1)}(a+)-f^{(k-1)}(a-)\right]\delta_a^{(k-1)}\end{aligned}$$

Definición B.14 (Soporte de una distribución). Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se denomina *soporte de* u, denotado por $\operatorname{sop} u$, al conjunto de los puntos $t \in \mathbb{R}^n$ tales que para cada $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{sop} \varphi \subset B(t, \epsilon)$ y $\langle u, \varphi \rangle \neq 0$.

Se dice que u se anula en el abierto V si $\langle u, \varphi \rangle = 0$ para cada función test $\operatorname{sop} \varphi \subset V$. El soporte de u se define equivalentemente como el complementario del mayor abierto de anulación de u, por lo que siempre es un conjunto cerrado.

Proposición B.15. Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, entonces $\operatorname{sop} u_f = \operatorname{sop} f$[2], donde u_f es la distribución asociada a la función f como en B.6.

Teorema B.16. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, V un conjunto abierto de $\mathbb{R}^m$. Sean $u \in \mathcal{D}'(U)$ y $v \in \mathcal{D}'(V)$. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Existe una única distribución $u \otimes v \in \mathcal{D}'(U \times V)$, llamada *producto tensorial* de u y v, con la propiedad de que
$$\langle u \otimes v, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle u, \varphi_1 \rangle \langle v, \varphi_2 \rangle$$
para cada $\varphi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, $\varphi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(V)$.

2. Para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U \times V)$, la acción de la distribución $u \otimes v$ viene dada por
$$\langle u \otimes v, \varphi \rangle = \langle u(x), \langle v(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle v(y), \langle u(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle$$

Para definir la convolución de distribuciones, se observa como se comporta la distribución de tipo función asociada a $f * g$, siendo $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que
$$\langle u_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \varphi(x) dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y) \varphi(y+z) dz\, dy,$$
lo que sugiere definir la función $\varphi^\triangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tal que $\varphi^\triangle(x, y) = \varphi(x+y)$ para así definir la convolución de distribuciones como $\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u \otimes v, \varphi^\triangle \rangle$. Sin embargo, no se puede afirmar en general que la función $\varphi^\triangle$ tenga soporte compacto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. A pesar de esto, bajo ciertas condiciones sobre los soportes de las funciones u y v indicadas en el teorema siguiente, la distribución $u \otimes v$ se puede extender a un funcional lineal sobre la clase de funciones $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tales que $\operatorname{sop} \psi \cap (\operatorname{sop} u \otimes \operatorname{sop} v)$ es compacto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, denotado por $\widetilde{u \otimes v}$. Para más detalles, veáse [Mit18, Teoremas 2.60,2.92].

Teorema B.17. Sean $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tales que para cada $r > 0$ el conjunto
$$M_r = \left\{(x, y) \in \operatorname{sop} u \times \operatorname{sop} v : x + y \in \bar{B}(0, r)\right\} \quad \text{es compacto en } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$
Entonces, la aplicación $u * v : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ definida por
$$\langle u * v, \varphi \rangle = \left\langle \widetilde{u \otimes v}, \varphi^\triangle \right\rangle$$
es una distribución en $\mathbb{R}^n$ que se denomina *convolución de* u *con* v. Además, se verifican las siguientes propiedades:

[2]$\operatorname{sop} f$ denota el soporte esencial de f. Este se define como el complementario del abierto de anulación c.s, un conjunto abierto que es la unión de todas las bolas abiertas B tales que $f = 0$ para casi todo punto de B.

1. Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ son tales que $u = u_f$, $v = v_g$ la compacidad de M_r para cada $r > 0$ garantiza que $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Además, se tiene que $u_f * v_g = w_{f*g}$.

2. $\operatorname{sop}(u * v) \subseteq \sup u + \operatorname{sop} v$.

3. $u * v = v * u$.

4. Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene que $\delta_0^{(\alpha)} * u = D^\alpha u$. En particular, $\delta_0 * u = u$.

5. Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene que $D^\alpha (u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v)$

Proposición B.18. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y sea $u_0 \in \mathcal{D}'(I)$. Entonces:

1. La ecuación $u' = u_0$ en $\mathcal{D}'(I)$ admite al menos una solución.

2. Si $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(I)$ son tales que $(u_1)' = u_0$ en $\mathcal{D}'(I)$ y $(u_2)' = u_0$ en $\mathcal{D}'(I)$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $u_1 - u_2 = c$ en $\mathcal{D}'(I)$.

Proposición B.19. Sean I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $g \in \mathcal{C}^\infty(I)$ y $f \in \mathcal{C}^k(I)$ para algún $k \in \mathbb{N}_0$. Si $u_0 \in \mathcal{D}'(I)$ satisface $u' + gu = f$ en $\mathcal{D}'(I)$, entonces $u \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$.

Bibliografía

[Apo96] T. M. Apostol. *Análisis matemático.* Reverté, 1996.

[Ash07] R. B. Ash, W. P. Novinger. *Complex Variables.* Dover, 2007.

[Bac00] G. Bachman, L. Narici, E. Beckenstein. *Fourier and Wavelet Analysis.* Springer, 2000.

[Dea81] M. Deakin. *The developmento of the Laplace transform, 1737-1937, I. Euler to Spitzer, 1737-1880.* Archive for History of Exact Science volume 25, pages 343-390 (Springer, 1981).

[Dea82] M. Deakin. *The development of the Laplace Transform, 1737–1937 II. Poincaré to Doetsch, 1880–1937.* Archive for History of Exact Science volume 25, pages 343-390 (Springer, 1982).

[Doe74] G. Doetsch. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation* . Springer-Verlag, 1974 .

[Fol99] G. B. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications.* Wiley Interscience, 1999.

[Gal19] F. Galindo, J. Gómez, J. Sanz, L. A. Tristán. *Guía Práctica de variable compleja y aplicaciones.* Ediciones Universidad de Valladolid, Universidad de León; 2019.

[Mar96] J. E. Marsden, M. J. Hoffman. *Análisis Básico de Variable Compleja.* Editorial Trillas, 1996.

[Mit18] D. Mitrea. *Distributions, Partial Differential Equations and Harmonic Analysis.* Springer, 2018.

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1991.

[Sch99] J. L. Schiff. *The Laplace Transform. Theory and Applications.* Springer, 1999.

[Wid59] D. V. Widder. *The Laplace Transform.* Princeton University Press, 1970.

[Wil70] S. Willard. *General Topology.* Dover, 1970.

[Zui91] C. Zuily. *Problems in distributions and Partial Differential Equations.* North-Holand, 1991.