



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas

### **Formulación Matemática de las teorías de gauge**

Grupos de Lie, Teoría de Representaciones, Acciones de Grupo, Fibrados, Conexión,  
Curvatura y Derivada Covariante, Aplicaciones Físicas

***Autor: Rubén Calvo Ibáñez***

***Tutor/es: Fernando Gómez Cubillo y José Manuel Izquierdo***



# Agradecimientos

*Muchas gracias a mi tutor, Fernando Gómez Cubillo. Por acogerme en su despacho en numerosas ocasiones para charlar sobre matemáticas y física y por permitirme hacer este trabajo conjunto.*

*A mis padres y a mi hermana, por soportarme en los momentos en los que me apetecía hablar sobre fibrados principales y clases características.*

*A mis amigos en la Universidad, por estos cinco años de compañerismo que tocan a su fin, pero que siempre serán atesorados y recordados con cariño.*

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Objetivo del trabajo . . . . .	6
1.2. Breve reseña histórica sobre las teorías gauge . . . . .	6
1.3. Noción intuitiva de teoría gauge . . . . .	7
1.4. Planteamiento matemático de las teorías gauge y estructura del trabajo . . . . .	7
<b>2. Grupos de Lie</b>	<b>10</b>
2.1. Primeras definiciones: . . . . .	10
2.2. Álgebras de Lie: . . . . .	11
2.3. El álgebra de Lie formada por los campos de vectores: . . . . .	13
2.4. Álgebras de Lie asociadas a un grupo de Lie: . . . . .	14
2.5. Homomorfismo inducido . . . . .	16
2.6. La aplicación exponencial . . . . .	18
2.7. La matriz exponencial . . . . .	22
2.8. El álgebra de Lie de los grupos lineales . . . . .	24
2.9. Estudio de algunos grupos de Lie particulares . . . . .	25
<b>3. Teoría de representaciones</b>	<b>29</b>
3.1. Primeras definiciones . . . . .	29
3.2. La representación adjunta . . . . .	30
3.3. Métricas invariantes . . . . .	31
<b>4. Acción de grupo</b>	<b>34</b>
4.1. Primeras definiciones y propiedades . . . . .	34
4.1.1. Propiedades de los grupos de isotropía . . . . .	36
4.1.2. Propiedades de las órbitas . . . . .	37
4.1.3. Propiedades de la aplicación de órbitas . . . . .	38
4.2. Campos de vectores fundamentales . . . . .	40
4.3. La forma de Maurer-Cartan . . . . .	41
4.4. Espacio de órbitas . . . . .	43
<b>5. Fibrados</b>	<b>45</b>
5.1. Fibrados en general . . . . .	45
5.2. Fibrados principales . . . . .	48

5.3. Morfismos de fibrados principales y gauges . . . . .	51
5.4. Atlas formal del fibrado . . . . .	51
5.5. Fibrados vectoriales . . . . .	52
5.6. Fibrados vectoriales asociados . . . . .	53
5.7. Estudio de algunos casos particulares . . . . .	56
5.7.1. La banda de Möbius . . . . .	56
5.7.2. El fibrado de Hopf . . . . .	58
5.7.3. El fibrado tangente . . . . .	61
<b>6. Conexión y curvatura</b> . . . . .	<b>63</b>
6.1. Transformaciones de gauge . . . . .	63
6.2. 1-formas de conexión . . . . .	65
6.3. Distribuciones del fibrado tangente . . . . .	68
6.4. 2-formas de curvatura . . . . .	70
6.5. Derivada covariante . . . . .	74
6.6. El electromagnetismo . . . . .	79
6.6.1. Invarianza gauge en el sentido usual . . . . .	79
6.6.2. Reescribiendo las ecuaciones de Maxwell . . . . .	80
6.6.3. El electromagnetismo como teoría gauge con grupo $U(1)$ . . . . .	81
6.6.4. ¿Dónde están el resto de ecuaciones? . . . . .	83
6.6.5. La energía electromagnética . . . . .	86
6.6.6. ¿Por qué una simetría $U(1)$ ? . . . . .	87
6.7. El monopolo magnético . . . . .	88

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Objetivo del trabajo

La presente memoria constituye el Trabajo de Fin de Grado que presenta el interesado para optar a la titulación de Graduado en Matemáticas. Está organizado como la primera parte matemática de un trabajo coordinado entre el Grado en Física y el Grado en Matemáticas. La idea es tratar el formalismo de las teorías gauge en este trabajo, para poder estudiar posteriormente algunos ejemplos y casos prácticos en el trabajo de Física.

### 1.2. Breve reseña histórica sobre las teorías gauge

Existen cuatro interacciones físicas fundamentales en la naturaleza: la gravedad, el electromagnetismo y las fuerzas nucleares fuerte y débil. En 1915, Einstein publica una serie de artículos que culminan con sus ecuaciones de campo describiendo la primera fuerza fundamental: la gravitación [5]. Esta teoría, conocida comúnmente como Relatividad General, es de naturaleza geométrica. Es decir, en ella la gravedad no se interpreta como una fuerza en el sentido usual, sino como la curvatura de una variedad 4-dimensional que representaría el espacio-tiempo en el que vivimos. En 1918, H. Weyl introduce lo que más tarde sería un prototipo de teoría gauge [13]. Esta teoría pretendía unificar el electromagnetismo con la gravedad a través de un enfoque geométrico, similar al que hizo Einstein. Aunque el planteamiento original de Weyl se probó incorrecto, más tarde se descubrió que una nueva idea de invarianza gauge podía explicar la simetría de isospín. En un artículo clásico [22], C.N.Yang y R.L. Mills propusieron que la fuerza nuclear fuerte se pudiese describir como una teoría gauge con grupo de simetría  $SU(2)$ . Esto resucitó el interés en las teorías de gauge, que en la actualidad constituyen nuestro marco de entendimiento más profundo y unificado de las fuerzas fundamentales. En particular, el electromagnetismo, y las interacciones nucleares fuerte y débil se han unificado en una única teoría de gauge con grupo de Lie  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Esta teoría constituye el conocido como **Modelo Estándar de partículas elementales**. Con el descubrimiento, en 2012, del bosón de Higgs [1] parece quedar confirmada la validez de este modelo y también el hecho de que la naturaleza de las interacciones fundamentales debería venir descrita por una gran teoría unificada de gauge. Por desgracia, no todas las fuerzas fundamentales están unificadas en una única teoría: la gravedad parece resistirse a los intentos de estos últimos años. Esto no quiere decir que la

gravedad no haya sido formulada en términos de teorías gauge. En 1956, R.Utiyama, en su artículo [19] demuestra que la gravedad puede entenderse como una teoría de gauge donde el grupo de simetrías fuese el grupo de Lorentz. No obstante, todavía queda por formular una teoría gauge que tenga al grupo de Poincaré (que es el grupo completo de simetrías de la Relatividad General) como grupo de simetrías locales. Intentos recientes [20],[21] lograron describir satisfactoriamente la gravedad en 2+1 dimensiones como teoría gauge. Es más, estas teorías probaron más tarde ser resolubles analíticamente. Aún con todo, el caso en 4 dimensiones continúa siendo un misterio. Resulta curioso que esta interacción, formulada en el lenguaje abstracto de la geometría diferencial por Einstein y que comparte tantas ideas con las teorías gauge actuales, escape aún a dicho formalismo.

### 1.3. Noción intuitiva de teoría gauge

Está clara, pues, la importancia de las teorías de gauge, pero aún no se ha presentado qué es exactamente una teoría gauge. Las teorías gauge son una clase de teorías físicas que describen la interacción de los campos fundamentales de la naturaleza en términos de una conexión en el espacio-tiempo cumpliendo ciertas propiedades, que se interpreta como un **potencial** en el sentido clásico, y una curvatura midiendo **la intensidad de dicha interacción**. La forma usual de llegar a una teoría gauge en física es observar la invarianza de un cierto Lagrangiano con respecto a una **transformación global**, que no depende del espacio-tiempo y promocionarla a una **transformación local** que sí que dependa. En este proceso, para conservar la invarianza, se ha de postular la existencia de un objeto matemático que transforme de acuerdo a una reglas determinadas, de manera que se pueda construir una variable dinámica -que será una derivada covariante- que sea invariante con respecto a la transformación local. Este objeto, que en física se llama **potencial de gauge**, resulta tener las mismas propiedades de transformación que una **1-forma local de conexión** en un fibrado principal, una vez escogida una sección del fibrado. La fuerza de la interacción mediada por este potencial, que físicamente puede construirse usando derivadas del mismo, en analogía a como se hace en el electromagnetismo con el tensor electromagnético, matemáticamente se corresponde con un objeto llamado **2-forma de curvatura**. Los campos físicos de materia se acoplan con la **derivada covariante** en lo que en física se conoce como **acople mínimo** (*minimal coupling*). Este acople da lugar a términos de interacción en los Lagrangianos representados por diagramas de Feynman.

### 1.4. Planteamiento matemático de las teorías gauge y estructura del trabajo

Desde el punto de vista matemático, pues, el estudio de las teorías de gauge es el de los **fibrados principales, fibrados vectoriales asociados, conexiones, curvaturas, derivadas covariantes**, etc. De este modo, aún muchas ramas interesantes de la geometría diferencial y la topología en una única y hermosa teoría. En este trabajo, se pretende dar una introducción de todos estos tópicos desde un punto de vista riguroso en el contexto de la

geometría diferencial. Los teoremas y resultados que se van a abordar son los clásicos en el estudio de este tipo de teorías y suponen una introducción a un amplio campo que todavía es foco de actual investigación. Como este trabajo está coordinado con el correspondiente trabajo de Física, la idea será presentar el máximo número de resultados orientados a la formalización de las teorías gauge. Así, en la posterior memoria de dicho trabajo, se podrá exponer el mayor número de ejemplos posible de interés en el ámbito físico. En vista de esto, la estructura del trabajo será:

1. **Grupos de Lie:** Primero, hay que hacer un estudio de los **Grupos de Lie**, ya que son los grupos de simetría que aparecen de manera natural en Física. Matemáticamente, estos no son más que grupos con una estructura de variedad diferenciable que hace que el producto sea una aplicación diferenciable. Sobre estos grupos, existe una estructura muy rica, que es la de **álgebra de Lie**, un espacio vectorial con la misma dimensión que el grupo y formado por campos de vectores invariantes por el *push-forward* de las multiplicaciones por la izquierda. A este espacio vectorial se le suma, además, una operación interna que cumple ciertas propiedades y que se denomina «corchete de Lie». Lo más fascinante del álgebra de Lie es que es capaz de parametrizar el grupo, al menos en un entorno de la identidad, a través del **mapa exponencial**. Las propiedades globales de este mapa (sobre todo la sobreyectividad) no se estudian en este trabajo, ya que suelen llevar asociadas una gran cantidad de resultados previos. No obstante, sí que se menciona el resultado clásico sobre la sobreyectividad en grupos compactos y conexos y se dan referencias adecuadas. Por otro lado, en la práctica, los grupos de Lie aparecen sobre todo como **grupos lineales** (también llamados **grupos matriciales**), que son subgrupos cerrados del grupo  $GL(n, \mathbb{R})$ . Por ello, se hace un breve estudio de cómo la **matriz exponencial** sustituye al mapa exponencial en estos casos y por qué el corchete de Lie no es ni más ni menos que el **conmutador de matrices**. Para terminar, se abordan algunos casos de interés práctico.
2. **Teoría de representaciones:** Después de haber introducido los grupos de Lie, se revisan sucintamente algunos conceptos básicos de la **teoría de representaciones**. Estas son de relevancia en Física, ya que serán la manera en que los grupos de simetría actuarán sobre espacios vectoriales. De todas las representaciones, hay una de especial importancia, que es la **representación adjunta**. El estudio de la **representación adjunta** y de las **métricas invariantes** será de importancia en el trabajo de Física, ya que proporcionará resultados que garantizan cuándo se pueden definir términos cinéticos en el Lagrangiano de Yang-Mills que sean invariantes por transformaciones gauge.
3. **Acción de grupo:** En este capítulo, se presentan la teoría elemental de las **acciones de grupo**. Si las representaciones se pueden entender como una forma «lineal» de actuar de un grupo, las acciones se pueden entender como una generalización «no lineal». En este sentido, las acciones serán la forma natural en que los grupos podrán operar sobre las variedades diferenciables. Se estudian los **campos de vectores fundamentales** que jugarán un rol importante, junto con la **forma de Maurer-Cartan**, a la hora de hallar la diferencial de una acción de grupo. Se termina estudiando el **espacio de órbitas**, que es de gran relevancia a la hora de definir los fibrados vectoriales asociados.



4. **Fibrados:** Se estudia, principalmente, la teoría de los **fibrados principales**, **fibrados vectoriales** y los **fibrados vectoriales asociados**. Aparece por primera vez el término de **gauge**, que se usa para referirse a una sección del fibrado principal en cuestión. La libertad de gauge, en este sentido, se traduce en la libertad de escoger una sección para el fibrado principal. Se termina con tres ejemplos clásicos: la banda de Möbius, la fibración de Hopf y el fibrado tangente.
5. **Conexión y Curvatura:** El último capítulo trata las **conexiones** y las **curvaturas**, que están definidas en ciertos fibrados y que serán las que se interpretarán como campos de gauge y fuerzas de interacción. Es de gran relevancia, desde el punto de vista físico, ver que estos objetos transformen adecuadamente al cambiar de gauge. Por ello, se estudian las **transformaciones de gauge** y cómo estas afectan a la 1-forma de conexión y la 1-forma de curvatura. En este apartado también se aclara por qué en algunos textos se refieren a las transformaciones de gauge como automorfismos de fibrados y otros se refieren como funciones definidas en un abierto de la variedad base y con valores en el grupo (**transformaciones de gauge físicas**). Para terminar, se presentan algunos ejemplos de relevancia en el ámbito físico: comenzando por la teoría del **electromagnetismo de Maxwell**, que es la teoría de gauge más simple (por tener un grupo de simetría abeliano) para concluir con un análisis sobre los **monopolos magnéticos**, un ejemplo sencillo en el que intervienen fibrados no triviales. Este ejemplo servirá como base en el trabajo de Físicas para introducir las clases características, que serán la base del estudio de las teorías de Chern-Simons.

Conviene notar que, durante el desarrollo del trabajo, se considerarán siempre variedades diferenciables que son de clase  $C^\infty$ , como es costumbre en numerosos textos.

Las referencias principales son el libro de Mark J.D. Hamilton, *Mathematical gauge theory* [6] y los dos tomos de G. Rudolph y M.Schmidt *Differential Geometry and Mathematical Physics* [15] y [16], que tratan los temas anteriormente mencionados con aras a una posterior aplicación en teorías Físicas. Para algunas cuestiones genéricas sobre el estudio de variedades diferenciables, se consultó sobre todo la referencia clásica de Jeffrey M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry* [9]. En los últimos apartados, en los que se exponen ejemplos de relevancia en el contexto físico, se usaron las referencias: los dos libros de G.L. Naber, *Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations* y *Interactions* [11] [8], de J. Baez y J. P. Muniain *Gauge fields, knots and Gravity* [2], de M. Nakahara *Geometry, Topology and Physics* [12], y de Y.M. Shnir *Magnetic Monopoles* [18], principalmente. Otras referencias se usan en casos particulares, especificándose en cada sección.

# Capítulo 2

## Grupos de Lie

### 2.1. Primeras definiciones:

**Observación 2.1.1.** Como ya se ha mencionado en la Introducción, aquí siempre se considerarán variedades que son de clase  $C^\infty$ . Por ello, «diferenciable», « $C^\infty$ » y «regular» se usarán indistintamente (*smooth*).

**Definición 2.1.1 (grupo de Lie).** Un **grupo de Lie** es un grupo que además tiene estructura de variedad diferenciable y en el que la aplicación:

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longrightarrow g \cdot h^{-1} \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

es regular (es  $C^\infty$ ).

**Observación 2.1.2.** Como se demuestra en [7], basta con que la aplicación

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longrightarrow g \cdot h \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

sea regular para que el grupo sea de Lie.

**Ejemplo 2.1.1.** Algunos ejemplos de grupos de Lie son: el grupo de rotaciones en el plano  $SO(2)$  (está claro que es un grupo. Para verlo como variedad diferenciable basta verlo como una subvariedad de dimensión 1 en  $\mathbb{R}^4$ , parametrizada por el ángulo de la rotación. Además, por la observación anterior, basta con ver que el producto de dos elementos es una aplicación regular) o el grupo  $U(1)$  de números complejos de módulo 1. Este último se puede identificar con la circunferencia de radio unidad, una subvariedad de dimensión 1 de  $\mathbb{R}^2$ .



Como siempre que se estudia una estructura en matemáticas, es conveniente definir lo que es una «subestructura» de la anterior. Obsérvese que no todo subgrupo de un grupo de Lie tiene por qué ser grupo de Lie, ya que podría no ser variedad diferenciable. Formalmente:

**Definición 2.1.2 (subgrupos de Lie).** Dado  $G$ , un grupo de Lie:

1. Un **subgrupo de Lie inmerso en  $G$**  es la imagen de una inmersión inyectiva  $\phi : H \rightarrow G$  de un grupo de Lie  $H$  de manera que  $\phi$  sea un homomorfismo de grupos.
2. Un **subgrupo de Lie embebido en  $G$**  es un subgrupo inmerso que además verifica que  $\phi$  es homeomorfismo sobre su imagen.

**Recordatorio 2.1.1.** El concepto de **inmersión** y **submersión** es el siguiente. Dada  $F : M \rightarrow N$ , con  $M$  y  $N$  variedades diferenciables:

- $F$  es **inmersión** si es una aplicación diferenciable ( $C^\infty$ ) y su diferencial es inyectiva en todo punto de  $M$ .
- $F$  es **submersión** si  $F$  es diferenciable y su diferencial es sobreyectiva en cada punto de  $M$ .

**Observación 2.1.3.** La noción intuitiva de lo que debería ser un subgrupo de Lie es la de subgrupo embebido, ya que, en este caso, la estructura topológica del subgrupo es la misma (por ser  $\phi$  homeomorfismo) que la que heredaría por ser subespacio topológico de  $G$ .



Estudiado el concepto de la estructura matemática y sus subestructuras, el siguiente paso es establecer cuándo una función preserva dicha estructura. Es decir, cuando se puede hablar de un «homomorfismo de grupos de Lie». Obviamente, la definición tendrá que hacer referencia a la dos estructuras que tiene un grupo de Lie: la de grupo y la de variedad diferenciable.

**Definición 2.1.3 (homomorfismo de grupos de Lie).** Sean  $G$  y  $H$  dos grupos de Lie. Una aplicación  $\phi : G \rightarrow H$  se dice que es un **homomorfismo de grupos de Lie** si:

1. La aplicación entre variedades diferenciables es regular.
2. Es un homomorfismo de la estructura de grupo.

Una aplicación que sea, además, un **difeomorfismo**, se dice que es un **isomorfismo de grupos de Lie**. Un isomorfismo de grupos en el que  $H=G$  se dice que es un **automorfismo** de  $G$ .

## 2.2. Álgebras de Lie:

Asociado al concepto de **grupo de Lie** está el de **álgebra de Lie**, de gran relevancia en física, ya que permitirán parametrizar los grupos de Lie (asumiendo que sean compactos y conexos) por medio de la aplicación exponencial y los llamados «generadores del grupo».

**Definición 2.2.1 (álgebra de Lie).** Un espacio vectorial  $V$ , junto con una aplicación:

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V \quad (2.2.1)$$

se llama **álgebra de Lie** si verifica las siguientes propiedades:

1.  $[\cdot, \cdot]$  es **bilineal**.
2.  $[\cdot, \cdot]$  es **antisimétrica**.
3.  $[\cdot, \cdot]$  satisface la siguiente identidad:

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0, \forall u, v, w \in V \quad (2.2.2)$$

conocida como **identidad de Jacobi**.

En este caso, a la aplicación de (2.2.1) se le llama **Corchete de Lie**.

**Ejemplo 2.2.1.** Todo espacio vectorial  $V$  con el corchete trivial:  $[u, v] = 0, \forall u, v \in V$  es un álgebra de Lie. Si el corchete de un álgebra es el trivial, se dice que el álgebra es **abeliana**.

**Ejemplo 2.2.2.** Los espacios de matrices, como  $V = Mat(n \times n, \mathbb{K})$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  con el corchete siendo el conmutador:  $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$  es un álgebra de Lie. Como se verá más adelante, las álgebras de Lie de los grupos lineales tienen como corchete al conmutador.

Para una cierta álgebra de Lie, el concepto de subálgebra es:

**Definición 2.2.2 (subálgebra de Lie).** Sea  $(V, [\cdot, \cdot])$  un álgebra de Lie. Dado un subespacio  $W \subset V$ , se dice que es una **subálgebra** (con el corchete restringido al subespacio) cuando el corchete de dos elementos de  $W$  vuelve a ser un elemento de  $W$ . Esto es:  $\forall w_1, w_2 \in W, [w_1, w_2] \in W$ .

Por otro lado, el concepto de homomorfismo de álgebras es:

**Definición 2.2.3 (homomorfismo de álgebras de Lie).** Sean  $(V, [\cdot, \cdot]_V), (W, [\cdot, \cdot]_W)$  álgebras de Lie. Una aplicación lineal  $\Phi : V \rightarrow W$  se dice que es un **homomorfismo de álgebras de Lie** si:

$$[\Phi(u), \Phi(v)]_W = \Phi([u, v]_V), \forall u, v \in V \quad (2.2.3)$$

El homomorfismo será un **isomorfismo** cuando  $\Phi$  sea biyectiva. Un isomorfismo será **automorfismo** cuando  $V=W$ .



Al ser el corchete una aplicación bilineal, queda completamente determinada por los que se llaman **factores de estructura** (notación muy usada en Física):

**Definición 2.2.4 (factores de estructura).** Sea  $(V, [\cdot, \cdot])$  un álgebra de Lie, donde  $V$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. Dada una base  $\{T_1, \dots, T_n\}$  de  $V$ , se puede escribir:

$$[T_a, T_b] = \sum_{c=1}^n f_{abc} T_c \quad (2.2.4)$$

Los coeficientes  $f_{abc} \in \mathbb{K}$  se llaman **factores de estructura** asociados con la base  $\{T_1, \dots, T_n\}$ .

Los factores de estructura tienen varias propiedades interesantes que se derivan de las propiedades del corchete. En particular:

- Son antisimétricos en los dos primeros índices. Esto es:  $f_{abc} = -f_{bac}$ .
- Verifican la identidad de Jacobi:  $f_{abd}f_{dce} + f_{bcd}f_{dae} + f_{cad}f_{dbc} = 0$ .

Los factores de estructura determinan por completo el álgebra a través de la ecuación (2.2.4).

## 2.3. El álgebra de Lie formada por los campos de vectores:

Como se discute en [9], existen varias formas equivalentes de ver el espacio tangente a una variedad. Una de ellas es ver cada vector  $v \in T_P M$  como una derivación:

$$\begin{aligned} v : C^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow df_P(v) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

siendo lineal y cumpliendo la **regla de Leibniz** del producto.

Consecuentemente, se puede ver un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  en la variedad como una aplicación:

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longrightarrow (X(f))(P) = X_P(f) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

que sea lineal y que cumpla también la **regla de Leibniz**. En base a esta identificación se define el concepto de **derivada de Lie**:

**Definición 2.3.1 (derivada de Lie).** Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , se define la **derivada de Lie**  $L_X$  como la aplicación:

$$\begin{aligned} L_X : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longrightarrow (X(f))(P) = X_P(f) = d_P f(X_P) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$



La derivada de Lie es un **operador de derivación**; esto es, es un operador lineal que satisface **la regla del producto de Leibniz**. Usando la derivada de Lie, se puede definir el concepto de conmutador de dos campos:

**Definición 2.3.2 (conmutador de dos campos).** Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $\mathfrak{X}(M)$  su campo de vectores. Se define el **conmutador en  $\mathfrak{X}(M)$**  como:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Esto es tanto como decir que la derivada de Lie del conmutador de los campos sea el conmutador de las derivadas de Lie:  $L_{[X, Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$ .



Con el conmutador anterior, el espacio de campos de vectores en la variedad  $M$  es un álgebra de Lie. Este álgebra de Lie es, en general, infinito-dimensional.

## 2.4. Álgebras de Lie asociadas a un grupo de Lie:

**Recordatorio 2.4.1.** Dadas dos variedades  $M$  y  $N$  y un difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow N$ , el morfismo estrella es un morfismo entre las álgebras de Lie  $\mathfrak{X}(M)$  y  $\mathfrak{X}(N)$ , definido como:  $\phi_*(X)_{\phi(p)} = d_p\phi(X_p)$ . Este morfismo, en la literatura anglosajona se suele llamar el *push-forward* de  $\phi$ . Para poder definir este morfismo correctamente (y que el resultado de aplicarlo sea un campo diferenciable), es necesaria la hipótesis de que  $\phi$  sea difeomorfismo.

Asociada a una variedad diferenciable  $M$  arbitraria, se tiene un álgebra de Lie infinito-dimensional formada por los campos de vectores  $\mathfrak{X}(M)$  regulares con el conmutador (2.3.4). Este álgebra es demasiado grande (en dimensión) para ser manejada con comodidad. Por tanto, se construye un nuevo álgebra más chica con el siguiente procedimiento:

**Definición 2.4.1 (campos invariantes por difeomorfismos).** Sea  $\Gamma \subset \{\phi : M \rightarrow M \text{ tal que } \phi \text{ es difeomorfismo}\}$ . Asociado a  $\Gamma$ , se define el conjunto de campos invariantes por  $\Gamma$  como  $A_\Gamma(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : \phi_*(X) = X, \forall \phi \in \Gamma\}$ .

**Proposición 2.4.2 ( $A_\Gamma(M)$  es subálgebra).** Sea  $\Gamma \subset \{\phi : M \rightarrow M \text{ tal que } \phi \text{ es difeomorfismo}\}$ . El conjunto  $A_\Gamma(M)$  es una subálgebra de  $\mathfrak{X}(M)$ .

*Demostración.* Hay que ver varias cosas:

1.  $A_\Gamma(M)$  es un subespacio lineal de  $\mathfrak{X}(M)$ : Dados  $X, Y \in A_\Gamma(M)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  y sea  $\phi \in \Gamma$  arbitrario, por la linealidad del morfismo estrella:  $\phi_*(aX + bY) = aX + bY \Rightarrow aX + bY \in A_\Gamma(M)$ .

2. Dados  $X, Y \in A_\Gamma(M)$ ,  $[X, Y] \in A_\Gamma(M)$ : sea  $\phi \in \Gamma$  y  $p \in M$  arbitrario. Entonces:  $\phi_*[X, Y](f)(\phi(p)) = (d\phi_p(X_p))(Y(f)) - (d\phi_p(Y_p))(X(f))$ . Por ser  $X$  e  $Y$  invariantes, se tiene que  $d\phi_p(X_p) = (\phi_*X)_{\phi(p)} = X_p$  y  $d\phi_p(Y_p) = (\phi_*Y)_{\phi(p)} = Y_p$ , por lo que:  $\phi_*[X, Y](f)(\phi(p)) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = [X, Y](f)(p)$  y listo.

□



En el caso de un grupo de Lie  $G$ , se tiene un conjunto de difeomorfismos especial, (que requiere de la estructura de grupo) que son las multiplicaciones por la izquierda:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longrightarrow g \cdot h \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

y las multiplicaciones por la derecha:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longrightarrow h \cdot g \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

para un cierto  $g \in G$ . Estas aplicaciones son difeomorfismos porque la multiplicación en un grupo de Lie es regular y las inversas vendrían dadas por  $\mathcal{L}_{g^{-1}}$  y  $\mathcal{R}_{g^{-1}}$ . Entonces, la proposición 2.4.2 motiva siguiente definición:

**Definición 2.4.3** (álgebra de Lie asociada con un grupo de Lie  $G$ ). El álgebra de Lie asociada con un grupo de Lie  $G$  es el álgebra  $A_\Gamma(G)$  donde  $\Gamma = \{\mathcal{L}_g : g \in G\}$ . Se denota por  $\mathfrak{g}$ .

**Observación 2.4.1.** El haber escogido los difeomorfismos de multiplicación por la izquierda es solo un convenio. Todo se podría hacer exactamente igual con la multiplicación por la derecha.

Lo importante de haber escogido esta álgebra es que es finito dimensional:

**Teorema 2.4.4** ( $\mathfrak{g}$  es isomorfo a  $T_eG$ ). La aplicación evaluación:

$$\begin{aligned} ev : \mathfrak{g} &\longrightarrow T_eG \\ X &\longrightarrow X_e \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. En particular, el álgebra de Lie es finito-dimensional y de la misma dimensión que la dimensión de  $G$  como variedad. Es más, todo campo invariante por la izquierda está unívocamente determinado por su valor en el elemento unidad  $e$ .

*Demostración.* Está claro que la evaluación es una aplicación lineal. Para construir la inversa, se toma un  $v \in T_eG$  y se define el campo  $X$  que en el punto  $h \in G$  vale  $X_h = d_e\mathcal{L}_h(v)$ . Este va a ser el candidato para  $ev^{-1}(v)$ . Obsérvese que, como  $\mathcal{L}_e = Id$  y como  $ev(d_e\mathcal{L}_e(v)) = d_e Id(v) = v$ , este es un buen candidato para inversa. Hay que comprobar dos cosas:

1. Para empezar, hay que ver que  $X$  es un campo de  $\mathfrak{X}(M)$ . Para esto, como el producto:

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\longrightarrow h \cdot g \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

es una aplicación regular, cuya diferencial es justamente:  $d_{(h,g)}\mu(Y_h, X_h) = d_g\mathcal{L}_h(X) + d_h\mathcal{R}_g(Y)$ ; entonces, se tiene que la aplicación  $h \rightarrow d_{(h,e)}\mu(0_h, v) = d_e\mathcal{L}_h(v) = X_h$  es regular.

2. Ahora hay que ver que  $X$  es un campo invariante por la izquierda. Para ello, se toma un  $h \in G$  y un  $p \in G$  y se calcula:  $\mathcal{L}_{h*}(d_e\mathcal{L}.(v))_{\mathcal{L}_h(p)} = d_p\mathcal{L}_h(d_e\mathcal{L}.(v))_p = d_e(\mathcal{L}_h \circ \mathcal{L}_p(v)) = d_e\mathcal{L}.(v)_{h \cdot p}$  y listo.

□

## 2.5. Homomorfismo inducido

En el caso de grupos de Lie, el morfismo  $\phi_*$  de 2.4.1 se define de una manera alternativa, de modo que no haga falta que  $\phi$  sea un difeomorfismo, aunque se conserva la notación empleada para el *push-forward*:

**Definición 2.5.1 (morfismo inducido).** Dados  $G$  y  $H$  grupos de Lie y  $\phi : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos, el morfismo inducido se define como  $\phi_*(X)_e = d_e\phi(X_e)$ , para cada elemento  $X \in \mathfrak{g}$ .

**Observación 2.5.1.** Con la definición anterior, está claro que  $\phi_*(X)_e$  es un elemento del álgebra de Lie de  $H$ ,  $\mathfrak{h}$  (basta con usar el teorema 2.4.4).

En las condiciones de la definición 2.5.1, el morfismo estrella induce un homomorfismo entre las álgebras de Lie. Para probarlo, primero se introduce el concepto de campos  $\phi$ -relacionados. Se siguen las directrices de [15]:

**Definición 2.5.2 (campos  $\phi$ -relacionados).** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y  $\phi : M \rightarrow N$  una aplicación regular. Se dice que  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  está  $\phi$ -relacionado con  $X \in \mathfrak{X}(M)$  si:

$$Y_{\phi(p)} = d_p\phi(X_p), \quad \forall p \in M \quad (2.5.1)$$

**Lema 2.5.3 (derivadas de Lie de campos  $\phi$ -relacionados).** En las condiciones de la definición anterior, si  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  está  $\phi$ -relacionado con  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces:

$$(\mathcal{L}_Y f) \circ \phi = \mathcal{L}_X(f \circ \phi), \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad (2.5.2)$$

*Demostración.* Si  $Y$  está  $\phi$ -relacionado con  $X$ , entonces:  $Y_{\phi(p)} = d_p\phi(X_p)$ . Sea  $f \in C^\infty(M)$  arbitraria. Entonces:  $Y_{\phi(p)}(f) = d_p\phi(X_p)(f)$ . El lado izquierdo de esta ecuación sería, por la



definición 2.3.1,  $(\mathcal{L}_Y f)(\phi(p))$ . El lado derecho de la ecuación sería, usando el hecho de que la diferencial se puede ver como una derivación:

$$d_p\phi(X_p)(f) = X_p(f \circ \phi) \stackrel{\text{por 2.3.1}}{=} \mathcal{L}_X(f \circ \phi)(p)$$

□

Empleando este lema, ya se puede probar una propiedad que hará mucho más sencillo ver que el morfismo inducido es un homomorfismo de álgebras.

**Proposición 2.5.4.** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y  $\phi : M \rightarrow N$  una aplicación regular. Supongamos que  $X'$  está  $\phi$ -relacionado con  $X$  e  $Y'$  lo está con  $Y$ . Entonces,  $[X', Y']$  está  $\phi$ -relacionado con  $[X, Y]$ .

*Demostración.* Hay que ver que  $d_p\phi([X, Y]_p)(f) = [X', Y']_{\phi(p)}(f)$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$ . Lo primero es, por 2.3.1,  $\mathcal{L}_{[X, Y]}(f \circ \phi)(p)$  y lo segundo es  $(\mathcal{L}_{[X', Y']}f)(\phi(p))$ . Ahora, como la derivada de Lie del conmutador de dos campos es:  $\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ , se deduce que:

- Lo primero sería:  $\mathcal{L}_{[X, Y]}(f \circ \phi)(p) = (\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y)(f \circ \phi)(p) - (\mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)(f \circ \phi)(p) \stackrel{\text{por 2.5.3}}{=} (\mathcal{L}_X \circ ((\mathcal{L}_{Y'}f) \circ \phi))(p) - (\mathcal{L}_Y \circ ((\mathcal{L}_{X'}f) \circ \phi))(p)$ .
- Lo segundo sería:  $(\mathcal{L}_{X'} \circ \mathcal{L}_{Y'}(f))(\phi(p)) - (\mathcal{L}_{Y'} \circ \mathcal{L}_{X'}(f))(\phi(p)) \stackrel{\text{por 2.5.3}}{=} (\mathcal{L}_X \circ ((\mathcal{L}_{Y'}f) \circ \phi))(p) - (\mathcal{L}_Y \circ ((\mathcal{L}_{X'}f) \circ \phi))(p)$ .

Y de esto se ve que lo primero es igual a lo segundo, como quería demostrarse. □

Usando esta propiedad, ya se llega al resultado fundamental de esta subsección:

**Proposición 2.5.5 (homomorfismo inducido).** El morfismo  $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un homomorfismo de álgebras.

*Demostración.* Recordando la definición 2.2.3, hay que probar que se verifica la propiedad de la ecuación (2.2.3). Esta propiedad se puede reescribir así: dados  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $[d_p\phi(X_p), d_p\phi(Y_p)] = d_p\phi([X_p, Y_p]) \circ \phi(p)$ . Es decir, que  $[d.\phi(X.), d.\phi(Y.)]$  esté  $\phi$ -relacionado con  $[X, Y]$ . Para ello, basta con probar, por la proposición anterior, que  $(\phi_*)_{\phi(\cdot)} = d.\phi(X.)$  está  $\phi$ -relacionado con  $X$  y lo mismo para el campo  $Y$ . Las demostraciones son análogas, así que solo se detallará la de  $X$ . Como  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , para probar la propiedad basta verla en  $p = e$ . Allí,  $(\phi_*)_{\phi(e)=e} = d_e\phi(X_e)$ , luego están  $\phi$ -relacionados, como quería verse. □

Como corolario, se puede deducir que un subgrupo de un grupo de Lie genera una subálgebra del álgebra de Lie asociada:

**Corolario 2.5.6 (subálgebras de los subgrupos de un grupo de Lie).** Sea  $H \subset G$  un subgrupo embebido o inmerso. El álgebra de lie de  $H$ ,  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}$ .

*Demostración.* Basta con observar que el homomorfismo inducido por la inclusión  $i : H \hookrightarrow G$  induce un homomorfismo inyectivo entre las álgebras de Lie. □

## 2.6. La aplicación exponencial

La aplicación exponencial es muy relevante en los grupos de Lie, pues permite parametrizar el grupo en el caso de que este sea compacto y conexo. Para empezar, se introducen algunas nociones y resultados, a modo de repaso, sobre la teoría general de las curvas integrales:

**Definición 2.6.1 (curva integral).** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo. Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow M$  una curva diferenciable. Se dice que  $\alpha$  es una **curva integral** de  $X$  si:

$$X_{\alpha(t)} = \alpha'(t), \quad \forall t \in (a, b) \quad (2.6.1)$$

El siguiente resultado es crucial:

**Teorema 2.6.2 (de existencia de curvas integrales).** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo. Para cada  $p \in M$ , existe y es única la curva  $\gamma_p : (a(p), b(p)) \rightarrow M$ , verificando:

1.  $\gamma_p$  es curva integral del campo  $X$ .
2.  $0 \in (a(p), b(p))$  y el intervalo es maximal: es decir, es el mayor intervalo en el que la solución está definida.
3. La curva pasa por  $p$  a tiempo 0:  $\gamma_p(0) = p$ .

**Observación 2.6.1.** Dadas dos curvas que pasan por un punto; si son curvas integrales, han de ser idénticas por la unicidad. Además, por cada punto pasa una curva integral, para cada campo diferenciable escogido. Es decir, las curvas integrales de un cierto campo llenan toda la variedad y nunca se intersecan.

**Definición 2.6.3 (completitud).** Un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se dice que es **completo** si,  $\forall p \in M$ ,  $\gamma_p$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 2.6.4.** Sea  $\gamma_p$  curva integral del campo  $X$  que pasa por el punto  $p$  a tiempo 0. Entonces:

$$\gamma_p(t + s) = \gamma_{\gamma_p(t)}(s) \quad (2.6.2)$$

siempre y cuando  $t, s$  y  $s + t \in (a(p), b(p))$

*Demostración.* Sea  $\beta(s) = \gamma_p(t + s)$ . Entonces:  $\beta'(s) = \gamma_p'(t + s) \stackrel{\text{por 2.6.1}}{=} X_{\gamma_p(t+s)} = X_{\beta(s)}$ , luego  $\beta$  es una curva integral de  $X$  que pasa por el punto  $\gamma_p(s)$  en  $t=0$ . No obstante, también  $\gamma_{\gamma_p(t)}(s)$  es curva integral de  $X$  pasando por  $\gamma_p(s)$  en  $t=0$ . Por la unicidad (teorema 2.6.2), se deduce que:  $\beta(s) = \gamma_{\gamma_p(t)}(s)$ , como se quería probar.  $\square$



Hasta aquí, no se estaba trabajando con ninguna variedad en especial. Ahora, se toma  $M = G$  un grupo de Lie. Entonces:

**Teorema 2.6.5.** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\gamma : I \rightarrow G$  una curva integral de un cierto campo  $X$  que es invariante por la izquierda. Es decir:  $X \in \mathfrak{g}$ . Se supone que  $I$  es maximal y que  $\gamma(0) = e$ . Esta curva se denotará por  $\gamma_X(t)$ . Entonces:

1.  $\gamma$  está definida en todo  $\mathbb{R}$  (es decir, los campos invariantes por la izquierda son **completos**)
2.  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  es un **homomorfismo de grupos de Lie** (con la estructura de grupo de  $(\mathbb{R}, +)$ ). Esto es:  $\gamma(s+t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t)$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{R}$ .
3.  $\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(s \cdot t)$ ,  $\forall s, t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* La prueba se hace por apartados:

- Apartados 1 y 2: Supóngase que  $\gamma_X(t)$  es la curva integral en las condiciones del enunciado. Entonces,  $a \cdot \gamma(t)$  también es una curva integral,  $\forall a \in G$ . En efecto:  $\mathcal{L}_a(\gamma(t)) = a \cdot \gamma(t) \Rightarrow (a \cdot \gamma(t))' = d_{\gamma(t)}(\mathcal{L}_a(\gamma'(t))) = (\mathcal{L}_{a*}(X))|_{a \cdot \gamma(t)} = X_{a \cdot \gamma(t)}$  (en el último paso, se ha usado que  $X$  es un campo invariante por la izquierda). Entonces,  $a \cdot \gamma(t)$  es curva integral de  $X$ . Como esto ocurre para cada  $a \in G$ ; en particular,  $\forall s \in I$ ,  $\gamma(s) \cdot \gamma(t)$  sigue siendo curva integral que, en  $t = 0$  pasa por  $\gamma(s)$ . Como  $\gamma(s+t)$  también es curva integral que pasa por  $\gamma(s)$  en  $t = 0$ , se deduce que  $\gamma(s+t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t)$ . Con este método se puede ampliar el intervalo de definición  $I$  tanto como se quiera, ya que si  $\gamma$  está definida en  $(a, b)$ , entonces  $\tilde{\gamma}(t+b) = \gamma(t) \cdot \gamma(b)$  sigue siendo curva integral, pero definida ahora en el intervalo  $(a, b+b)$ . Por unicidad, tienen que ser la misma curva, pero como  $I$  era maximal, se deduce que  $I = \mathbb{R}$ . Además, ya ha quedado probada la fórmula del apartado 2.
- Apartado 3: Usando la regla de la cadena:  $\gamma'(s \cdot t) = s\gamma'(s \cdot t) = (sX)_{\gamma(s \cdot t)}$ , luego  $\gamma(s \cdot t)$  es curva integral de  $sX$ .

□

Del teorema anterior, se desprenden dos definiciones. La primera es la de **subgrupo uniparamétrico**:

**Definición 2.6.6 (subgrupo uniparamétrico).** El homomorfismo  $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$  dado por el teorema anterior se llama **subgrupo uniparamétrico asociado a  $X \in \mathfrak{X}(G)$** .

Y la segunda es la de **aplicación exponencial**, que es la más importante:

**Definición 2.6.7 (aplicación exponencial).** Sea  $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$  la curva integral de  $X \in \mathfrak{g}$  pasando por  $e \in G$  a tiempo  $t = 0$ . Entonces, se define la aplicación exponencial

como:

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longrightarrow \gamma_X(t=1) \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Visualmente, esto se muestra en la Figura 2.1

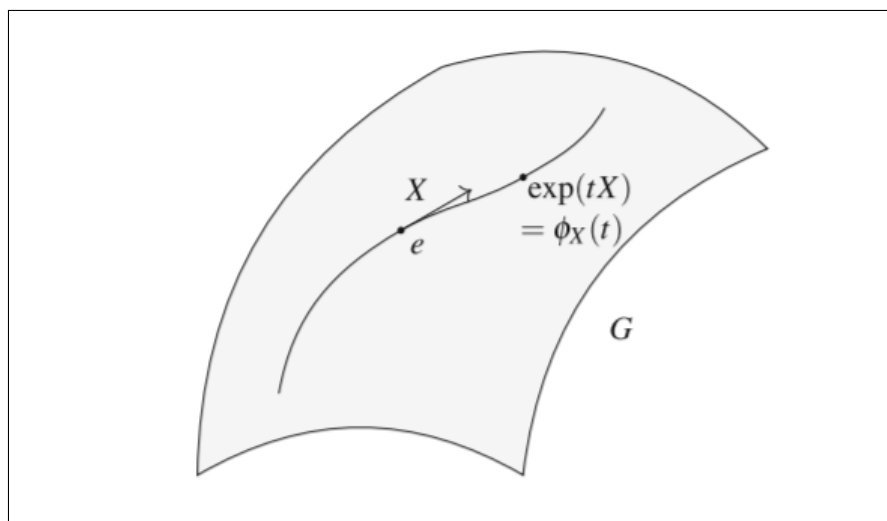


Figura 2.1: aplicación exponencial. Es la curva integral de un campo  $X \in \mathfrak{g}$  que pasa por  $e$  a  $t = 0$  evaluada en  $t = 1$ . Imagen extraída de [6]

Lo interesante de la **aplicación exponencial** son sus propiedades:

**Proposición 2.6.8 (propiedades de la exponencial).** La **aplicación exponencial** verifica:

1.  $\exp(0) = e$ .
2.  $\exp((s+t)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$ .
3.  $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$ .

*Demostración.* La demostración se basa en el teorema 2.6.5:

1. Por el teorema 2.6.5,  $\gamma_{sX}(t) = \gamma_X(st)$ . Entonces:  $\exp(sX) = \gamma_{sX}(t=1) = \gamma_X(s)$ . Entonces, haciendo  $s = 0$ , se deduce que  $\exp(0) = \gamma_X(0) = e$ , ya que la curva pasa por  $e$  en  $t = 0$ .
2. Por definición,  $\exp((s+t)X) = \gamma_{(s+t)X}(t'=1)$ . Usando la tercera propiedad del 2.6.5, se deduce que lo anterior es:  $\gamma_X((s+t) \cdot 1)$ . Usando ahora la propiedad 2 del teorema,  $\gamma_X((s+t) \cdot 1) = \gamma_X(s) \cdot \gamma_X(t)$  y volviendo a usar la propiedad 3, lo anterior queda:  $\gamma_{sX}(t'=1) \cdot \gamma_{tX}(t'=1) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$  y listo.
3. Si  $s = -t$ , entonces por 2 y por 1:  $\exp(0) = e = \exp(-tX) \exp(sX) \Rightarrow \exp(-tX) = \exp(tX)^{-1}$ .

□



Un concepto importante asociado con las curvas integrales es el de **flujo** de un cierto campo a través de un punto:

**Definición 2.6.9 (flujo de un campo a través de un punto).** Sea  $X \in \mathfrak{g}$ . Se denomina **flujo de  $X$  a través del punto  $p \in G$**  y se denota por  $\gamma_t^X(p)$  a la curva  $\gamma$  verificando:

1.  $\gamma_0^X(p) = p$
2.  $\frac{d}{dt}|_{t=s}(\gamma_t^X(p)) = X_{\gamma_s^X(p)}, \forall s \in \mathbb{R}$ .

**Observación 2.6.2.** Es decir, el flujo  $\gamma_t^X(p)$  no es más que una aplicación que, en cada punto  $p \in G$ , da la curva integral a  $X$  que, en  $t = 0$  pasa por  $p$ .

**Proposición 2.6.10 (relación entre flujo y exponencial).** Sea  $G$  un grupo de Lie,  $X \in \mathfrak{g}$ . Para ahorrar notación, se tomará el flujo de  $X$  a través de  $p$  como  $\gamma_t(p)$ . Entonces:

$$\gamma_t(p) = p \cdot \exp(tX) = \mathcal{R}_{\exp(tX)}(p) = \mathcal{L}_p(\exp(tX))$$

La prueba de lo anterior es un simple cálculo, y está detallado en [6].



Una propiedad interesante es que la aplicación exponencial es un difeomorfismo local en el  $0 \in \mathfrak{g}$ :

**Corolario 2.6.11 (la aplicación exponencial es un difeomorfismo local).** Bajo las identificaciones canónicas:

$$T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}, \quad T_eG \cong \mathfrak{g}$$

se tiene que la diferencial de la aplicación exponencial:

$$d_0 \exp : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

es la aplicación identidad. En particular, existen entornos abiertos  $V \subset \mathfrak{g}$ , con  $p \in V$  y  $U \subset G$ , con  $\exp(0) = e \in G$  tales que:

$$\exp|_V : V \rightarrow U$$

es un difeomorfismo.

*Demostración.* Para hallar  $d_0 \exp(X)$ , con  $X \in \mathfrak{g}$ , basta con tomar una curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathfrak{g}$  tal que  $\gamma(0) = e$  y  $\gamma'(t=0) = X$ . La curva  $\gamma(t) = tX$  vale. Entonces:  $d_0 \exp(X) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tX) = X$ , ya que  $\exp(tX) \stackrel{\text{por 2.6.10}}{=} \gamma_t^X(e)$ , luego es curva integral de  $X$ . □

**Observación 2.6.3.** La aplicación exponencial, en general, no es un difeomorfismo global. Más que sea un difeomorfismo, interesa especialmente que sea una aplicación sobreyectiva, ya que esto garantizaría que se tiene una parametrización del grupo a través de los elementos del álgebra. Esto tampoco es lo que ocurre en el caso general, y solo se puede garantizar en ciertas situaciones. Un caso de especial interés se da cuando el grupo es **compacto y conexo**.

**Teorema 2.6.12 (aplicación exponencial es sobreyectiva en grupos compactos y conexos).** Sea  $G$  un grupo de Lie **compacto y conexo**. Entonces, la aplicación exponencial es sobreyectiva.

La prueba del teorema se puede encontrar en textos más avanzados, como [17] (*Maximal Torus Theorem*). Por suerte, el caso de grupos compactos y conexos se da en numerosos casos prácticos de grupos matriciales. En la sección 2.9, se verán ejemplos en los que la compacidad permite garantizar la sobreyectividad de la aplicación exponencial. A lo largo de este texto, por norma general, no se tomarán hipótesis adicionales sobre la compacidad del grupo  $G$ , a no ser que estas sean necesarias.

## 2.7. La matriz exponencial

Para espacios de matrices, es común encontrar una definición de exponencial que es:

**Definición 2.7.1 (matriz exponencial).** Sea  $A \in Mat(n \times n, \mathbb{K})$ . Se define la **exponencial de  $A$**  como:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad (2.7.1)$$

La matriz exponencial está íntimamente relacionada con la aplicación exponencial, cuando se consideran grupos de matrices:

**Teorema 2.7.2 (propiedades de la matriz exponencial).** En las condiciones de la definición anterior:

1. (Convergencia de la serie)  $e^A$  converge con la norma matricial:  $\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|A\mathbf{x}\|$
2. Si  $A$  y  $B$  conmutan, entonces  $e^{A+B} = e^A e^B$ . En particular,  $e^{-A} = e^A$ .
3. Para cada  $A \in Mat(n \times n, \mathbb{K})$ , se denota  $\gamma_A : t \rightarrow e^{tA}$ . Entonces,  $\gamma_A$  es regular y  $\gamma(0) = Id$ ,  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \gamma_A(t) = \gamma_A(s)A$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ .
4. (Relación entre matriz exponencial y aplicación exponencial) Sea  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  el álgebra de Lie del grupo lineal general  $GL(n, \mathbb{K})$ , que es isomorfa a  $Mat(n \times n, \mathbb{K})$ . Entonces,  $exp(A) = e^A$ .

*Demostración.* Por apartados:

1. El espacio de aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  con la norma matricial es un **Banach** por serlo  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, basta con demostrar que la serie es de Cauchy. Para ello, hay que ver que, dados  $p < q$  naturales:

$$\left\| \sum_{k=p}^q \frac{1}{k!} A^k \right\| < \epsilon$$

Pues bien, usando la desigualdad triangular:

$$\left\| \sum_{k=p}^q \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=p}^q \frac{1}{k!} \|A^k\|$$

Como  $A$  es una aplicación lineal, existe una cota  $M > 0$  de modo que:  $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| = M \|\mathbf{x}\|$ . En particular:  $\|A^k \mathbf{x}\| \leq \|A\|^k \|\mathbf{x}\| = M^k \|\mathbf{x}\|$ . Por tanto, lo anterior es:

$$\sum_{k=p}^q \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=p}^q \frac{1}{k!} M^k$$

Pero lo anterior es  $< \epsilon$  por la exponencial una función analítica.

2. Es un simple cálculo, usando la fórmula del binomio de Newton (que solo se puede aplicar si  $A$  y  $B$  conmutan):

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} A^l B^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} A^l \frac{1}{(k-l)!} B^{k-l}$$

Si se denota  $a_{kl} = \frac{1}{l!} A^l \frac{1}{(k-l)!} B^{k-l}$ , entonces se tiene que, para  $l$  fijo,  $\sum_{k=l}^{\infty} a_{kl} = \frac{A^l}{l!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = \frac{1}{l!} A^l e^B$ . Sumando para cada  $l$ , se obtiene por fin:  $e^A e^B$ .

3. Se toma  $\gamma_A = e^{tA}$ , que es regular por ser la exponencial una función analítica. Además,  $\gamma_A(0) = e^0 = 1$  y

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \gamma_A(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{sA+hA} - e^{sA}}{h} \stackrel{\text{por 2}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{sA}(e^{hA} - 1)}{h} = e^{sA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - 1}{h}$$

Usando el desarrollo de  $e^{hA}$ , se llega a que el límite anterior es  $A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k h^{k-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} A$ , luego

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \gamma_A(t) = e^{sA} A = \gamma_A(s) A$$

justo como quería verse.

4. El álgebra de Lie del grupo lineal se puede hallar fácilmente calculando el espacio tangente a la identidad y usando el teorema 2.4.4. Como  $Gl(n, \mathbb{K})$  es un abierto de  $Mat(n \times n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ . Como este último es un espacio vectorial, su espacio tangente a la identidad es isomorfo a sí mismo. Por tanto,  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \cong Mat(n \times n, \mathbb{K})$ . Con esto en mente, como  $exp(A) = \gamma_A(t=1)$ , usando el apartado anterior, se concluye que:  $exp(A) = e^A$ .

□

Para concluir con esta sección, se presenta una fórmula útil para calcular el determinante de la exponencial de una matriz:

**Proposición 2.7.3 (determinante de la exponencial).** Sea  $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ , con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Entonces:

$$\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$$

Cuya demostración es un simple cálculo, y se encuentra detallado en [6].

## 2.8. El álgebra de Lie de los grupos lineales

Un caso particular de grupos de Lie que aparecen con frecuencia son los grupos lineales, que no son más que subgrupos cerrados del grupo lineal general  $Gl(n, \mathbb{R})$ . Para estos grupos, es interesante que el corchete de Lie no es más que el conmutador de matrices. Para demostrar esta propiedad, primero hay que demostrar algunos lemas técnicos:

**Lema 2.8.1.**  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$  (el espacio vectorial de matrices cuadradas con  $n$  filas y coeficientes reales, que también se suele denotar simplemente como  $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$ ) y, además, si  $X \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ , entonces el campo de vectores  $\tilde{X} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  asociado por el isomorfismo es  $\tilde{X}_A = AX, \forall A \in G$ .

*Demostración.* El hecho de que  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$  ya se probó en la demostración del teorema 2.7.2. Para probar que el isomorfismo es el que dice el lema, hay que usar el teorema 2.4.4. En efecto, dada  $X \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \cong T_{Id}(Gl(n, \mathbb{R}))$ , el campo asociado por este isomorfismo es  $\tilde{X} = ev^{-1}(X) = d_e \mathcal{L}(X)$ . En particular,  $\tilde{X}_A = d_e \mathcal{L}_A(X)$ . Tomando ahora una curva  $\gamma_X(t)$  tal que  $\gamma_X(0) = Id$  y  $\gamma'_X(0) = X$ , se deduce que:

$$\tilde{X}_A = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathcal{L}_A \circ \gamma_X)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A \cdot \gamma_X(t)) = A \cdot \gamma'_X(0) = A \cdot X$$

□

**Lema 2.8.2.** Dados  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  campos de vectores definidos en un cierto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , si  $\gamma_{\tilde{X}}$  y  $\gamma_{\tilde{Y}}$  son curvas tangentes a estos campos en  $p \in U$ , entonces:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_P = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{Y}_{\gamma_{\tilde{X}}(t)} - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{X}_{\gamma_{\tilde{Y}}(t)} \quad (2.8.1)$$

*Demostración.* Se toma una base  $e_1, \dots, e_n$  del espacio euclideo y se escribe:  $\tilde{X} = \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k e_k$  e  $\tilde{Y} = \sum_{k=1}^n \tilde{Y}_k e_k$ . Como  $[e_k, e_l] = 0$ , resulta que:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \sum_{k,l=1}^n (\tilde{X}_k (\mathcal{L}_k \tilde{Y}_l) - \tilde{Y}_k (\mathcal{L}_k \tilde{X}_l)) e_l = \sum_{l=1}^n (\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Y}_l - \mathcal{L}_{\tilde{Y}} \tilde{X}_l) e_l$$



donde  $\mathcal{L}_k \tilde{Y}_l = e_k(\tilde{Y}_l)$ . Usando la regla de la cadena, se puede ver que:  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{Y}_{\gamma_{\tilde{X}}(t)} = \sum_{l=1}^n \mathcal{L}_{\tilde{X}}(\tilde{Y}_l) e_l$ , y lo mismo para  $\tilde{X}$ . Por tanto,  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{Y}_{\gamma_{\tilde{X}}(t)} - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{X}_{\gamma_{\tilde{Y}}(t)} = \sum_{l=1}^n (\mathcal{L}_{\tilde{X}} \tilde{Y}_l - \mathcal{L}_{\tilde{Y}} \tilde{X}_l) e_l = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ , como quería verse.  $\square$

**Teorema 2.8.3 (el corchete de Lie en grupos lineales es el conmutador de matrices).** El corchete de Lie del álgebra  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = Mat(n \times n, \mathbb{R})$  es el conmutador de matrices:

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \quad (2.8.2)$$

*Demostración.* Basta con usar los dos lemas anteriores. Como  $GL(n, \mathbb{R})$  es un abierto del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ , se puede aplicar el lema 2.8.2:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{Y}_{\gamma_{\tilde{X}}(t)} - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{X}_{\gamma_{\tilde{Y}}(t)} \stackrel{\text{por 2.8.1}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\gamma_{\tilde{X}}(t) \cdot Y) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\gamma_{\tilde{Y}}(t) \cdot X) = X \cdot Y - Y \cdot X$$

$\square$

## 2.9. Estudio de algunos grupos de Lie particulares

El objetivo de esta sección es presentar un estudio de algunos grupos de Lie de relevancia en Física:

**Ejemplo 2.9.1 (grupo ortogonal).** Recuérdese que el grupo ortogonal es  $O(n) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) : A A^T = Id\}$ . Matemáticamente, este grupo representa todas las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  que preservan el producto escalar usual. Es decir, las isometrías de  $\mathbb{R}^n$ . Es claro que este es un subgrupo del grupo lineal general. Para ver que es una variedad diferenciable, se puede usar el **teorema del valor regular**, viendo  $O(n)$  dentro de  $Mat(n \times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ . Para ello, se toma  $F : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow Sim(n, \mathbb{R})$ , definida como  $F(A) = A A^T$ . El conjunto  $Sim(n, \mathbb{R})$  es el conjunto de todas las matrices simétricas de tamaño  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ . Este es un espacio vectorial de dimensión  $n^2 - \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$  ( $n^2$  es la dimensión del espacio de matrices, y luego hay que poner  $n(n-1)/2$  restricciones de la forma  $a_{ij} = a_{ji}$ ). Con esto dicho, resulta que  $O(n) = F^{-1}(Id)$ . Para usar el teorema del valor regular, pues, basta con ver que  $d_A F$  es una aplicación sobreyectiva, para cada  $A \in F^{-1}(Id)$ . Esto es fácil de ver sin más que tomar una curva  $A(t)$  con  $A(0) = A$  y  $A'(0) = B$ . Entonces:  $d_A F(B) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (A(t) A(t)^T) = B A^T + A B^T$ . Para ver que esto es sobreyectivo, dada  $C \in Sim(n, \mathbb{R})$ , hay que ver que  $\exists B \in GL(n, \mathbb{R})$  tal que:  $B A^T + A B^T = C$ . Como  $A \in F^{-1}(Id) = O(n)$  es fija, basta con tomar  $B = \frac{1}{2} C A \in GL(n, \mathbb{R})$ . Con esto, queda probado que  $O(n)$  es una variedad diferenciable y su dimensión no es más que  $(n^2 - n)/2$  (por el teorema del valor regular). En particular, como el producto de matrices es una expresión polinómica en sus componentes (y, por tanto, regular),  $O(n)$  sería un grupo de Lie.

Para hallar el álgebra de Lie de este grupo ortogonal, basta, en virtud del teorema 2.4.4, calcular el espacio tangente a la identidad. Para ello, se toma  $\gamma(t)$  una curva cuya imagen esté contenida en  $O(n)$  y tal que  $\gamma(0) = Id$  y  $\gamma'(0) = A \in T_{Id}(O(n))$ . Entonces, como  $\gamma(t)$  está contenida en el grupo:  $\gamma(t)\gamma(t)^T = Id$ . Derivando implícitamente en  $t = 0$  en la ecuación anterior se llega a que:  $A + A^T = 0$ . Es decir,  $T_{Id}(O(n)) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) : A + A^T = 0\}$ .

**Ejemplo 2.9.2 (grupo de rotaciones).** El grupo  $O(n)$  tiene dos componentes conexas, cuya interpretación geométrica es la de: **isometrías que conservan la orientación** (giros) e **isometrías que cambian la orientación** (simetrías). El grupo de giros es  $SO(n)$  y formalmente se define como  $SO(n) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) : A A^T = Id, \det(A) = 1\}$ . Está claro que es subvariedad de  $O(n)$ , ya que  $SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) > 0\} = \det^{-1}((0, \infty)) \cap O(n)$ , luego es un abierto de  $O(n)$ . En particular, tiene la misma dimensión que  $O(n)$ .

Para hallar el álgebra de Lie del grupo, basta con hallar el plano tangente a la identidad. Para ello, se toma una curva  $\gamma(t)$  cuya imagen esté contenida en el grupo y tal que  $\gamma(0) = Id$ ,  $\gamma'(0) = X \in T_{Id}(SO(n)) \cong \mathfrak{so}(n)$ . La curva  $e^{tX}$  valdría. Entonces, como  $\det(\gamma(t)) = 1$  y  $\gamma\gamma^T = Id$ , derivando respecto a  $t$  y evaluando en  $t = 0$ , se obtiene:  $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\det(e^{tX})) \stackrel{\text{por 2.7.3}}{=} tr(X)e^{tX}\big|_{t=0} = tr(X) = 0$  por un lado y  $X + X^t = 0$ . Es decir:  $\mathfrak{so}(n) = \{X \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) : X + X^T = 0 \text{ y } tr(X) = 0\}$ .

El grupo  $SO(n)$  es una de las componentes conexas de  $O(n)$  y por tanto es un conjunto conexo. Además, es acotado si se considera como un subconjunto de  $\mathbb{R}^{n^2}$  y se hace uso del **teorema de Heine-Borel**. En efecto, empleando la norma usual: dada  $A \in O(n)$ ,  $A A^T = Id$ , se deduce que:  $(A A^T)_{ij} = \delta_{ij}$ . En particular:  $(A A^T)_{ii} = A_{i1}^2 + \dots + A_{in}^2 = 1$ . Por tanto,  $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n 1 = n$ . Esto implica que  $O(n)$  está acotado, y por tanto también lo estará  $SO(n)$ . Además, es claramente cerrado, ya que  $O(n)$  lo es, y es una componente conexa del mismo (luego es abierto-cerrado). Entonces,  $SO(n)$  sería un conjunto compacto. Por el teorema 2.6.12, se deduce que la exponencial es una aplicación sobreyectiva en este grupo. Esto quiere decir que el grupo se puede parametrizar usando la exponencial y los llamados **generadores infinitesimales**, que no son más que una base del álgebra de Lie. A continuación, se hallan estas bases en ejemplos particulares:

1. **Caso n=2:** Como el álgebra de Lie tiene la misma dimensión que la variedad, y esta es 1 en el caso de  $n = 2$ , se deduce que solo habrá un generador. El generador más sencillo que se puede escoger cumpliendo las ecuaciones del plano tangente es:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, para cada  $A \in SO(n)$ ,  $\exists \theta \in \mathbb{R}$  tal que:  $A = e^{\theta X}$ . De hecho, es fácil calcular  $X^k$ , ya que  $X^2 = -Id$ . Entonces:

$$X^k = \begin{cases} (-1)^{k/2} & \text{si } k \text{ es par} \\ (-1)^{(k-1)/2} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Esto implica que  $e^{\theta X} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k X^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n} (-1)^n}{(2n)!} Id + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^{2n+1} (-1)^n}{(2n+1)!} X = \cos(\theta) Id + \sin(\theta) X$ . Es decir:

$$e^{\theta X} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Que es la típica matriz de una rotación en el plano de ángulo  $\theta$ .

2. **Caso n=3:** En este caso, la dimensión del álgebra es 3, y se pueden tomar los siguientes

generadores:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es una cuestión de cuentas probar que los generadores escogidos tienen los siguientes factores de estructura:  $[J_a, J_b] = \epsilon_{abc} J_c$ . El tensor  $\epsilon_{abc}$  es el **tensor de Levi-Civita**. Este ejemplo es de especial importancia en física, porque las matrices  $J_i$  son **operadores generalizados de momento angular**. Por ello se dice que el momento angular es un generador infinitesimal de las rotaciones en el espacio.

**Ejemplo 2.9.3 (grupo de matrices unitarias).** El grupo de matrices unitarias,  $U(n) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A A^\dagger = Id\}$ . Estas matrices **conservan el producto escalar hermítico**:  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^\dagger \mathbf{w} = \sum_{k=1}^n \bar{v}_k w_k$ , con  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{C}^n$  y  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{C}^n$  y siendo  $\bar{z}$  el conjugado de  $z$ . En física, el grupo de matrices unitarias es de gran importancia, ya que todo operador que vaya a representar una magnitud física (un observable) debería ser un operador hermítico para conservar la probabilidad (producto hermítico) asociada a los vectores de onda. Es sencillo probar, igual que se hizo en el ejemplo 2.9.1, que  $U(n)$  es una variedad diferenciable y por tanto, un grupo de Lie. De hecho, la dimensión del grupo es  $n^2$ . Un ejemplo sencillo, aunque importante, se obtiene de estudiar el caso de  $n=1$ .

**Caso  $n=1$ :** Si la dimensión es 1, el grupo no es más que el de los números complejos de módulo unidad, que es una subvariedad de dimensión 1 en  $\mathbb{R}^2$ , la circunferencia de radio unidad., como se muestra en la Figura 2.2

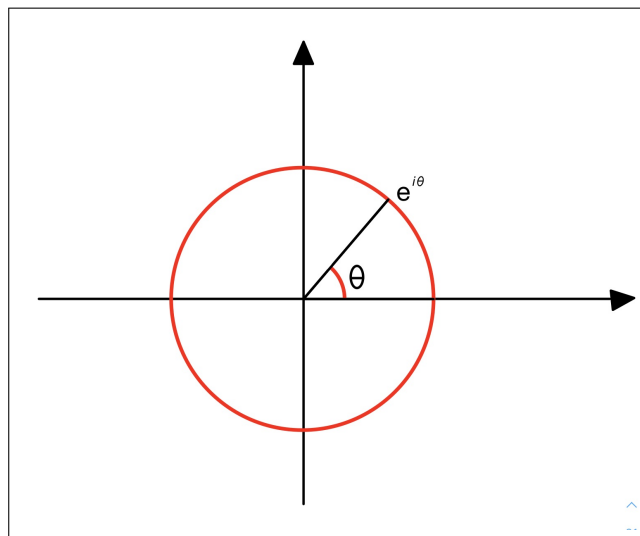


Figura 2.2: Grupo  $U(1)$  como subvariedad de dimensión 1 en  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ .

Para este grupo, el elemento unidad no es más que la unidad real:  $e = 1$ . Entonces, el plano tangente a la circunferencia en  $e$  no es más que la recta imaginaria  $i\mathbb{R}$ . Una base de este espacio puede ser el elemento  $i$  mismamente. Por ser la circunferencia, además, una variedad compacta y conexa, se podrá parametrizar todo elemento del grupo a través del generador infinitesimal  $i$ . Es decir, dado  $z \in U(1)$ , existirá un  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $z = e^{i\theta}$ , como era de esperar.

Este caso tan sencillo es de relevancia en física porque el electromagnetismo es una **teoría gauge con grupo de gauge**  $U(1)$ . Intuitivamente, esto tiene sentido si uno piensa que la función de onda es invariante por una transformación del tipo  $\Psi \rightarrow \Psi e^{i\theta}$ , que es solo añadir un factor de fase, que no altera las probabilidades que se extraen de la función de onda. En la sección 6.6.6, se trata el tema con mayor profundidad.

**Ejemplo 2.9.4 (grupo de matrices especiales y unitarias).** El grupo de matrices especiales y unitarias es:  $SU(n) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{C}) : A A^\dagger = Id \text{ y } det(A) = 1\}$ . Es fácil probar que es un grupo de Lie con dimensión  $n^2 - 1$ .

En el **caso de  $n=2$** , el grupo es el grupo de rotaciones en el espacio del spin. Para verlo, basta con hallar el plano tangente a la identidad, que es  $\{A \in Mat(n \times n, \mathbb{C}) : A + A^\dagger = 0 \text{ y } tr(A) = 0\}$ . Una base de este espacio es:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Que cumplen las relaciones de conmutación  $[\tau_a, \tau_b] = \epsilon_{abc} \tau_c$ , haciendo que la aplicación:  $\mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{su}(2) : J_a \rightarrow \tau_a$  sea un isomorfismo de álgebras de Lie. Físicamente, esto quiere decir que las matrices  $\tau_i$  son generadores de rotaciones, y por tanto, operadores de momento angular. El momento angular, en este caso, es el spin.

# Capítulo 3

## Teoría de representaciones

El objetivo de esta sección es exponer los conceptos más revelantes de la teoría de representaciones a la hora de describir las teorías gauge. Para este trabajo, lo más importante es: **la representación adjunta y las métricas invariantes.**

### 3.1. Primeras definiciones

**Definición 3.1.1 (representación).** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $V$  un espacio vectorial sobre los números reales o complejos. Una **representación** de  $G$  sobre  $V$  es una homomorfismo de grupos de Lie:

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

**Notación 3.1.1.** Si la representación  $\rho$  está clara, en ocasiones se denota simplemente:

$$\rho(g) \cdot v = g \cdot v = gv$$

para  $v \in V$ ,  $g \in G$ .

**Definición 3.1.2 (morfismo de representaciones).** Sean  $\rho_V$  y  $\rho_W$  dos representaciones del grupo  $G$  sobre los espacios vectoriales  $V$  y  $W$ . Entonces, un **morfismo** de representaciones es una aplicación lineal y **G-equivariante**  $f : V \rightarrow W$ . Es decir, una aplicación lineal verificando que:

$$f(\rho_V(g)v) = \rho_W(g)f(v)$$

$\forall g \in G$ ,  $v \in V$ . Si  $f$  es un **isomorfismo**, se dice que las representaciones son **equivalentes**.

Análogo al concepto de representación de grupos, está el concepto de representación de álgebras de Lie:

**Definición 3.1.3 (representación de álgebras).** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales o los complejos. Una **representación** de  $\mathfrak{g}$  sobre  $V$  es un homomorfismo de álgebras:

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \cong \text{End}(V)$$

**Definición 3.1.4 (morfismo de representaciones de álgebras).** Sean  $\phi_V$  y  $\phi_W$  dos representaciones del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  sobre los espacios vectoriales  $V$  y  $W$ . Un **morfismo** de representaciones es una aplicación lineal y  **$\mathfrak{g}$ -equivariante**  $f : V \rightarrow W$ . Es decir, una aplicación lineal verificando que:

$$f(\phi_V(X)v) = \phi_W(X)f(v)$$

Para cada  $X \in \mathfrak{g}$  y  $v \in V$ . Si  $f$  es un **isomorfismo**, se dice que las representaciones son **equivalentes**.

La pregunta natural que surge ahora es: ¿cómo están relacionadas las representaciones de un grupo y las de su álgebra de Lie asociada? La respuesta la da el morfismo inducido:

**Proposición 3.1.5.** Sea  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación del grupo  $G$ . Entonces, el morfismo inducido:  $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  es una representación de  $\mathfrak{g}$ .

*Demostración.* Basta con usar la proposición 2.5.5. □

## 3.2. La representación adjunta

Dado un grupo de Lie, un conjunto de difeomorfismos muy especiales son las multiplicaciones por la izquierda y por la derecha, definidas por las ecuaciones (2.4.1) y (2.4.2). Otro difeomorfismo muy útil es la llamada **conjugación**:

$$\begin{aligned} c_g = \mathcal{L}_g \circ \mathcal{R}_{g^{-1}} : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow gxg^{-1} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

El homomorfismo inducido por la conjugación  $(c_g)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  (que coincide con el *push-forward* por ser  $C_g$  un difeomorfismo) será un homomorfismo de álgebras de Lie, en virtud de la proposición 2.5.5. Esto hace que se pueda representar de una manera natural, un grupo sobre el grupo de isomorfismos con espacio vectorial  $V = \mathfrak{g}$ :

**Teorema 3.2.1 (representación adjunta).** La aplicación:

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longrightarrow Ad(g) = (c_g)_* \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

es una representación del grupo  $G$  en el espacio  $\mathfrak{g}$ , llamada **representación adjunta**.

*Demostración.* Hay que ver:

1. Que  $Ad$  es un homomorfismo de la estructura de grupo. Para ello, basta con usar las propiedades del *push-forward*:  $Ad(g \cdot h) = (c_{g \cdot h})_* = (c_g \circ c_h)_* = (c_g)_* \circ (c_h)_* = Ad(g)Ad(h)$  y listo.
2. Que  $Ad$  es una aplicación regular. Para verlo, basta con ver que  $\forall v \in V$ ,  $Ad(\cdot)v : G \rightarrow \mathfrak{g}$  es regular, ya que tomando bases en  $\mathfrak{g}$ , se puede escribir  $Ad(\cdot)$  como una matriz, luego  $Ad(\cdot)v$  será un vector cuyas entradas serán combinación lineal de funciones regulares. Para ver que  $Ad(\cdot)v$  es regular, basta con usar que  $(c_g)_*$  lo es (por ser  $c_g$  un difeomorfismo).

□

En el caso de grupos lineales, la representación adjunta toma una forma familiar:

**Proposición 3.2.2 (representación adjunta de los grupos lineales).** Sea  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ , con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  un subgrupo de Lie del grupo lineal general con álgebra  $\mathfrak{g}$ . Entonces, dada  $Q \in G$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ :

$$Ad_Q X = Q \cdot X \cdot Q^{-1} \quad (3.2.3)$$

*Demostración.* Como  $Ad_Q(X) = (C_Q)_*(X) = d_{Id}C_Q(X)$ , bastará con tomar una curva  $\gamma(t)$  que pase por  $Id$  en  $t = 0$  y tenga a  $X$  como vector tangente. La curva  $e^{tX}$  vale. Entonces:

$$Ad_Q(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Q \cdot e^{tX} \cdot Q^{-1}) = Q \cdot X \cdot Q^{-1}$$

□

La representación adjunta, a su vez, induce una representación sobre las álgebras:

**Teorema 3.2.3 (representación adjunta sobre las álgebras).** La aplicación  $ad = Ad_* : \mathfrak{g} \rightarrow End(\mathfrak{g})$  es un homomorfismo de álgebras, llamado **representación adjunta del álgebra  $\mathfrak{g}$** . Además, verifica que:

$$ad(X)(Y) = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad (3.2.4)$$

El hecho de que sea  $ad$  un homomorfismo de álgebras se sigue de la proposición 2.5.5. La demostración de la ecuación (3.2.4) se encuentra en [6].

### 3.3. Métricas invariantes

**Recordatorio 3.3.1.** Dada una variedad  $M$ , una métrica definida sobre  $M$  es una aplicación  $s : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  suave y multilineal que es **simétrica** y **definida positiva**. En cada  $p \in M$ , define una aplicación  $s_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  que es multilineal, simétrica y definida positiva, luego es una métrica del espacio vectorial  $T_p M$ . En el espacio tangente  $T_p M$  se denota  $s_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ , con  $X, Y \in T_p M$ .

**Definición 3.3.1 (métricas invariantes).** Sea  $G$  un grupo con una métrica  $s$ . Esta métrica se dice que es **invariante por la izquierda** si  $\mathcal{L}_g^*s = s$ ,  $\forall s \in G$  y se dice que es **invariante por la derecha** si  $\mathcal{R}_g^*s = s$ ,  $\forall s \in G$ . La métrica se dice **bi-invariante** si es invariante por la izquierda y por la derecha. La métrica es **Ad-invariante** si verifica:  $\langle Ad_g v, Ad_g w \rangle = \langle v, w \rangle$ ,  $\forall v, w \in \mathfrak{g}$ ,  $g \in G$ .

Las métricas bi-invariantes y Ad-invariantes están estrechamente relacionadas:

**Teorema 3.3.2 (métricas bi-invariantes y Ad-invariantes).** Sea  $s$  una métrica **invariante por la izquierda**. Entonces,  $s$  es **bi-invariante** si y solo si, es **Ad-invariante**.

*Demostración.* Se supone que  $s$  es invariante por la izquierda. Hay que ver si puede ser invariante por la derecha. Para ello, se empieza por aplicar el *pull-back* de  $\mathcal{R}_g$  a la métrica: dados  $X, Y \in T_p(G)$ ...

$$\mathcal{R}_g^*(s)(X, Y) = \langle (\mathcal{R}_g)_*(X), (\mathcal{R}_g)_*(Y) \rangle = \langle (\mathcal{L}_{pg^{-1}})_*(\mathcal{R}_g)_*(X), (\mathcal{L}_{pg^{-1}})_*(\mathcal{R}_g)_*(Y) \rangle$$

(se ha usado, en la segunda igualdad, el hecho de que  $s$  es invariante por la izquierda). El caso es que lo anterior puede escribirse como:  $\langle Ad_{g^{-1}} \circ (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(X), Ad_{g^{-1}} \circ (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(Y) \rangle$  y, como  $X, Y \in T_p G$ , resulta que  $(\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(X), (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(Y) \in T_e G \cong \mathfrak{g}$ . Por otro lado, usando de nuevo la invarianza de  $s$  por la izquierda se llega a que:

$$s_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle = \langle (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(X), (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(Y) \rangle$$

Entonces, se ve claramente que, para que la expresión anterior sea igual a  $\mathcal{R}_g^*(s)(X, Y)$  (y, por tanto, la métrica sea bi-invariante) ha de ser Ad-invariante. Y recíprocamente, si  $\mathcal{R}_g^*(s)(X, Y) = s_p(X, Y)$  (bi-invarianza), entonces ha de ser:  $\langle Ad_{g^{-1}} \circ (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(X), Ad_{g^{-1}} \circ (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(Y) \rangle = \langle (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(X), (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(Y) \rangle$  (Ad-invarianza).  $\square$

El resultado más importante de esta sección es que existan métricas bi-invariantes para grupos compactos. Para demostrar esto, hay que demostrar primero que:

**Lema 3.3.3 (producto escalar Ad-invariante).** Sea  $G$  un grupo de Lie compacto y  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación en el espacio vectorial  $V$ , que puede ser real o complejo. Entonces, existe un producto escalar invariante por  $\rho$ . Esto es:  $\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$ .

*Demostración.* La demostración es larga y técnica, por lo que solo se dará la idea. Esta se basa en el **teorema del cambio de variable** en integración de formas. La demostración se haría en varios pasos:

1. Lo primero sería definir una  $n$ -forma (se supone que  $\dim(G) = n$ ) que sea invariante por la derecha y no se anule, por lo que defina una orientación. Esto se puede hacer sin más que tomar  $\{X_1, \dots, X_n\}$  una base de  $T_e G$  y definir  $\tilde{X}_i(p) = d_e \mathcal{R}_p(X_i)$ ,  $\forall p \in G$ . Estos vectores son invariantes por la derecha, y definen un conjunto de  $n$  1-formas  $\omega_1, \dots, \omega_n$  (tomando la base dual). Estas 1-formas son invariantes por la derecha por el *pull-back*  $(\mathcal{R}_g)^*$ . Además, como el **pull-back** conmuta con el producto exterior:  $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = \Phi^*(\alpha) \wedge \Phi^*(\beta)$ , se deduce que la  $n$ -forma  $\sigma = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$  es invariante por la derecha y no se anula por ser  $\omega_i$  una base de 1-formas en cada  $p \in G$ .



2. Se toma un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  arbitrario en  $V$  y se construye un nuevo producto escalar de la siguiente forma:

$$\langle v, w \rangle = \int_G \tau_{v,w} \sigma$$

donde  $\tau_{v,w}(h) = \langle \rho(h)v, \rho(h)w \rangle$ ,  $\forall h \in G$ . Lo importante es que esta integral está bien definida por ser **G compacto**, lo que garantiza que el integrando sea una  $n$ -forma de **soporte compacto**. Habría que probar que este nuevo producto es verdaderamente un producto escalar. Probar la bilinealidad y la simetría es sencillo, se deducen de la definición de  $\tau$ . Probar que el producto es definido positivo es fácil también ya que, como la orientación escogida en  $G$  ha sido la de  $\sigma$ , resulta que  $\int_G \sigma > 0$ . Ahora bien, como  $\tau_{vv} \geq 0$ , de esto se deduce que el producto escalar solo puede ser 0 si  $\tau_{vv} = 0$ , lo cual ocurre si y solo si  $v = 0$ .

3. Por último, habría que ver que el producto escalar es invariante por la la representación. Esto es fácil usando el teorema del cambio de variable:

$$\langle gv, gw \rangle = \int_G \tau_{gv,gw} \sigma = \int_G \mathcal{R}_{g^{-1}}^*(\tau_{gv,gw} \sigma) = \int_G \tau_{v,w} \sigma = \langle v, w \rangle$$

donde, en el segundo igual se ha usado el teorema del cambio de variable y en el tercer igual se ha usado que sigma es invariante por la derecha. □

Del anterior resultado ya se deduce que:

**Teorema 3.3.4 (métricas bi-invariantes para grupos compactos).** Todo grupo compacto  $G$  admite una métrica bi-invariante.

*Demostración.* Usando el lema 3.3.3, se tiene que existe un producto escalar que es Ad-invariante. Con este producto escalar se construye la métrica en  $G$ : dados  $X, Y \in T_p G$

$$s_p(X, Y) = \langle (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(X), (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(Y) \rangle$$

La métrica construida con la fórmula anterior es claramente invariante por la izquierda, ya que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_g)_*(s(X, Y))_p &= s_{g \cdot p}((\mathcal{L}_g)_*(X), (\mathcal{L}_g)_*(Y)) = \langle (\mathcal{L}_{(g \cdot p)^{-1}})_*((\mathcal{L}_g)_*(X)), (\mathcal{L}_{(g \cdot p)^{-1}})_*((\mathcal{L}_g)_*(Y)) \rangle = \\ &= \langle (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(X), (\mathcal{L}_{p^{-1}})_*(Y) \rangle = s_p(X, Y) \end{aligned}$$

donde, en el segundo igual y en el último se ha usado la definición de  $s$  y en el tercer igual se ha usado la propiedad del *push-forward*:  $(\chi \circ \phi)_* = \chi_* \circ \phi_*$ . Con esto, la métrica que se ha construido es invariante por la izquierda. Por el 3.3.2, bastaría con que  $s$  fuera Ad-invariante para ser bi-invariante. Pero esto es trivial ya que: dados  $X, Y \in T_e G \cong \mathfrak{g}$ ,  $s_e(X, Y) = \langle X, Y \rangle$  y como el producto escalar era ad-invariante por hipótesis, se tendría el resultado. □

# Capítulo 4

## Acción de grupo

No se puede definir el concepto de fibrado principal sin haber hablado de acción de grupo. En esta sección, se van a introducir los conceptos esenciales sobre las acciones de grupo, que se pueden interpretar como generalizaciones no-lineales de las representaciones. Los tópicos que se van a tratar son: **campos vectoriales fundamentales**, **la forma de Maurer-Cartan** y los **espacios cociente**. Esto último será esencial a la hora de hablar de fibrados vectoriales asociados. Aunque la teoría es extensa, la exposición se limitará a los resultados fundamentales que permitan formular las teorías gauge.

### 4.1. Primeras definiciones y propiedades

**Definición 4.1.1 (acción por la izquierda).** Una **acción por la izquierda** sobre el grupo  $G$  en un conjunto  $M$  es una aplicación:

$$\begin{aligned}\Phi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longrightarrow g \cdot p\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

verificando los siguientes axiomas:

1.  $(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ ,  $\forall p \in M$  y  $g, h \in G$ .
2.  $e \cdot p = p$ ,  $\forall p \in M$

El grupo  $G$  se llama **grupo de transformaciones de  $M$** . Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $G$  es un grupo de Lie, y  $\Phi$  además, es una función regular, se dice que es una **acción regular por la izquierda**.

De forma análoga se pueden definir acciones por la derecha:

**Definición 4.1.2 (acción por la derecha).** Una **acción por la derecha** sobre el

grupo  $G$  en un conjunto  $M$  es una aplicación:

$$\begin{aligned}\Phi : M \times G &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longrightarrow p \cdot g\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

verificando los siguientes axiomas:

1.  $p \cdot (g \cdot h) = (p \cdot g) \cdot h$ ,  $\forall p \in M$  y  $g, h \in G$ .
2.  $p \cdot e = p$ ,  $\forall p \in M$

Como pasa con acciones por la izquierda, en el caso de que  $M$  sea una variedad diferenciable y  $G$  sea un grupo de Lie; si  $\Phi$  es una función regular, se dice que es una **acción regular por la derecha**.

Fijando el elemento  $g$  se obtienen las multiplicaciones a izquierda y derecha:

**Definición 4.1.3 (multiplicaciones a izquierda y derecha).** Sea  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción por la izquierda. Para cada  $g \in G$  fijo, se define la **multiplicación por la izquierda** como:

$$\begin{aligned}l_g : M &\longrightarrow M \\ p &\longrightarrow g \cdot p\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

y si la acción  $\Phi : M \times G \rightarrow M$  es por la derecha, se define la **multiplicación por la derecha**:

$$\begin{aligned}r_g : M &\longrightarrow M \\ g &\longrightarrow p \cdot g\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

Análogo al concepto de multiplicación a izquierda y derecha está el de aplicación de órbitas:

**Definición 4.1.4 (aplicación de órbitas).** Sea  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción por la izquierda. Para cada  $p \in M$  fijo, se define la **aplicación de órbitas** como:

$$\begin{aligned}\phi_p : G &\longrightarrow M \\ g &\longrightarrow g \cdot p\end{aligned}\tag{4.1.5}$$

Análogamente, en el caso de que la acción  $\Phi : M \times G \rightarrow M$  sea por la derecha, se define así:

$$\begin{aligned}\phi_p : G &\longrightarrow M \\ g &\longrightarrow p \cdot g\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

**Observación 4.1.1.** Está claro que tanto las aplicaciones de órbitas como las multiplicaciones (ya sean a derecha o izquierda) son **regulares** si la acción de grupo lo es. Es más, es

trivial demostrar, usando los axiomas de las acciones de grupo, que **las multiplicaciones a izquierda y a derecha son biyecciones**. De hecho, son **difeomorfismos**.



Otros conceptos importantes asociados con las acciones son:

**Definición 4.1.5 (órbitas, puntos fijos y grupos pequeños).** Sea  $\Phi$  una acción por la izquierda del grupo  $G$  sobre el conjunto  $M$ . Entonces:

1. La **órbita** de  $G$  por un punto  $p \in M$  es el conjunto:

$$\mathcal{O}_p = G \cdot p = \{g \cdot p : p \in M\}$$

2. El **conjunto de puntos fijos** para un cierto  $g \in G$  es:

$$M^g = \{p \in M : g \cdot p = p\}$$

3. El **grupo de isotropía**, o **grupo pequeño** (*little group*) de un punto  $p \in M$  es:

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$$

**Observación 4.1.2.** Los conceptos anteriores se definen de manera idéntica en el caso de una acción por la derecha.

#### 4.1.1. Propiedades de los grupos de isotropía

**Proposición 4.1.6 (los grupos de isotropía son subgrupos).** El grupo de isotropía  $G_p$  es un subgrupo de  $G$ ,  $\forall p \in M$ .

*Demostración.* Hay que ver que se verifiquen los axiomas de subgrupo. Se hace para acciones por la izquierda, pero es todo equivalente:

1. **Clausura:** Sean  $g, h \in G_p$ . Entonces,  $g \cdot h \in G_p$  trivialmente:  $(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p) = g \cdot p = p$  (se ha usado, en la primera igualdad, el primer axioma de acción de grupo).
2. **El elemento unidad está en el subgrupo:** Es trivial por el segundo axioma de las acciones de grupo.

□

En el caso de que  $M$  tenga una estructura adicional, se puede decir más sobre  $G_p$ :

**Proposición 4.1.7 (los grupos de isotropía son subgrupos cerrados).** Sea  $\Phi$  una acción del grupo  $G$  sobre un espacio topológico  $M$  que es Hausdorff. Si  $\Phi$  es continua, entonces el grupo de isotropía es un subgrupo cerrado. En particular, si  $M$  es una variedad

diferenciable y  $\Phi$  es regular, el grupo de isotropía es un subgrupo embebido.

*Demostración.* Si  $M$  es Hausdorff, los conjuntos unipuntuales son cerrados. Como  $\Phi$  es continua, la aplicación  $\phi_p(g) = \Phi(g, p) : G \rightarrow M$  también lo es. Entonces, como  $G_p = \phi_p^{-1}(\{p\})$ , se deduce que es la preimagen de un cerrado por una aplicación continua, y por tanto un conjunto cerrado. En el caso de que  $M$  sea una variedad diferenciable, basta con usar el **teorema de Cartan** ([6], sección 1.8) todo subgrupo cerrado es un subgrupo de Lie embebido.  $\square$

Otra propiedad interesante es que los subgrupos de isotropía en dos puntos distintos son isomorfos si los puntos están en la misma órbita:

**Proposición 4.1.8 (grupos de isotropía en distintos puntos).** Sea  $\phi : G \times M \rightarrow M$  una acción por la izquierda y  $G_p$  y  $G_q$  los grupos de isotropía en los puntos  $p, q \in M$ . Entonces, si  $p$  y  $q$  están en la misma órbita (es decir,  $\exists g \in G$  tal que  $q = g \cdot p$ ),  $c_g(G_p) = G_q$ . En particular,  $G_p$  y  $G_q$  son isomorfos.

*Demostración.* Si  $q$  está en la misma órbita que  $p$ , existe un  $g \in G$  tal que  $q = g \cdot p$ . Entonces,  $p = g^{-1} \cdot p$  (trivialmente, usando los axiomas de acción de grupo). En particular, dado un  $h \in G_p$ ,  $c_g(h) \cdot p = (ghg^{-1}) \cdot p = g \cdot p = q$ , luego  $c_g(h) \in G_q$ . Recíprocamente, si  $h' \in G_q$ , entonces  $h' \cdot q = q$ . Como  $q = g \cdot p$ , se deduce que:  $h' \cdot (g \cdot p) = g \cdot p$ , luego:  $(g^{-1} \cdot h' \cdot g) \cdot p = p$ , lo que implica que  $(c_g)^{-1}(h') \in G_p$  y con esto se habría probado que  $c_g(G_p) = G_q$ . Como  $c_g$  es un isomorfismo de grupos, se deduce que  $c_p$  y  $c_q$  son isomorfos.  $\square$

### 4.1.2. Propiedades de las órbitas

**Proposición 4.1.9 (las órbitas son idénticas o disjuntas).** Sea  $\Phi$  una acción del grupo  $G$  sobre el conjunto  $M$  y sean  $p, q \in M$ . Si  $q \in \mathcal{O}_p$ , entonces,  $\mathcal{O}_q = \mathcal{O}_p$ .

*Demostración.* Si  $q \in \mathcal{O}_p$ , entonces  $q = g \cdot p$ , para algún  $g \in G$ . Entonces,  $\mathcal{O}_q = G \cdot q = (G \cdot g) \cdot p$  y como  $\mathcal{R}_g : G \rightarrow G$  es una biyección, se deduce que lo anterior es  $G \cdot p = \mathcal{O}_p$ .  $\square$

El resultado anterior motiva lo siguiente:

**Proposición 4.1.10 (relación de equivalencia en órbitas).** Sea  $\Phi$  una acción por la izquierda del grupo  $G$  sobre el conjunto  $M$ . La relación  $p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G : q = g \cdot p$  define una relación de equivalencia en  $M$ , siendo las órbitas las clases de equivalencia. En particular,  $M$  es unión disjunta de órbitas de  $G$ .

El espacio que surge al tomar cocientes por la anterior relación de equivalencia es el **espacio de órbitas**:

**Definición 4.1.11 (espacio de órbitas).** Sea  $\Phi$  una acción por la izquierda del grupo  $G$  en el conjunto  $M$ . Se define el siguiente conjunto:

$$M/G = \{\mathcal{O}_P \subset M : p \in M\}$$

que se llama **espacio de órbitas**, o simplemente **espacio cociente por la acción de grupo**.

### 4.1.3. Propiedades de la aplicación de órbitas

En el caso en que  $G$  sea un grupo de Lie, el grupo de isotropía guarda una estrecha relación con la aplicación de órbitas:

**Proposición 4.1.12 (el álgebra de isotropía y la aplicación de órbitas).** Sea  $\Phi$  una acción regular del grupo  $G$  sobre la variedad  $M$ . Sea  $p \in M$  y  $\phi_p$  la aplicación de órbitas en ese punto. Se denota  $\mathfrak{g}_p$  al álgebra de Lie del grupo de isotropía  $G_p$ , denominada **álgebra de isotropía**. Entonces, el núcleo de la diferencial  $d_e\phi_p : \mathfrak{g} \rightarrow T_pM$  es igual al álgebra de isotropía.

*Demostración.* La prueba se hace para el caso de acción regular por la izquierda (idéntico para acciones por la derecha). Se toma  $X \in \mathfrak{g}_p$  y se calcula  $\exp(tX) \in G_p, \forall t \in \mathbb{R}$ . Entonces:  $\phi_p(\exp(tX)) = \exp(tX) \cdot p = p$ , ya que  $\exp(tX) \in G_p$ . Además, como lo anterior ocurre  $\forall t \in \mathbb{R}$ , derivando respecto a  $t$  se llega a que:  $0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_p(\exp(tX))) = d_{\exp(0)}\phi_p(X) = d_e\phi_p(X)$ . Esto es:  $X \in \ker(d_e\phi_p)$ .

Recíprocamente, si  $X \in \ker(d_e\phi_p)$ , ello implica que  $d_e\phi_p(X) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} (\phi_p(\exp(tX))) = 0$ . Esto implica que, por la regla de la cadena (haciendo el cambio  $t = s + \tau$ ):

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} (\exp(tX) \cdot p) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} (\exp(sX) \cdot \exp(\tau X) \cdot p) = d_p l_{\exp(sX)} \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{\tau=0} \phi_p(\exp(tX)) \right) = 0$$

Y por tanto la curva  $\exp(tX) \cdot p$  es constante en cada  $t \in \mathbb{R}$ , luego será igual al valor en  $t = 0$ :  $\exp(0) \cdot p = e \cdot p = p$ . Por tanto,  $\exp(tX) \in G_p, \forall t \in \mathbb{R}$ , luego  $X \in \mathfrak{g}_p$ .  $\square$



la aplicación de órbitas se suele clasificar atendiendo a su sobreyectividad e inyectividad, de la siguiente manera:

**Definición 4.1.13 (clasificación de las aplicaciones de órbitas).** Sea  $\Phi$  una acción del grupo  $G$  sobre el conjunto  $M$ . Entonces:

1. La acción se dice que es **transitiva** si la aplicación de órbitas es **sobreyectivo para cada  $p$  de  $M$** . Ello implica que  $M$  solo consiste en una órbita. Por tanto,  $M$  se dice un **espacio homogéneo** para  $G$ .
2. La acción se dice **libre** si la aplicación de órbitas es **inyectivo para cada  $p$  de  $M$** .
3. La acción se dice **simplemente transitiva** si es **transitiva y libre**.

La siguiente proposición da criterios para saber de qué tipo es una determinada acción:

**Proposición 4.1.14 (caracterización de la inyectividad y sobreyectividad de la aplicación de órbitas).** Sea  $\Phi$  una acción del grupo  $G$  sobre el conjunto  $M$ . Entonces:

1. La acción es transitiva si, y solo si, la aplicación de órbitas es sobreyectivo para algún  $p \in M$ .
2. La acción es transitiva si, y solo si, el conjunto  $M/G$  consta de un único punto.
3. la aplicación de órbitas es inyectivo en  $p \in M$  si, y solo si,  $G_p = \{e\}$ . Es decir, la acción es **libre** si, y solo si,  $G_p = \{e\}$ ,  $\forall p \in M$ .

*Demostración.* Se hace la demostración para una acción  $\Phi$  por la izquierda, aunque todo es análogo para acciones por la derecha:

1. Supóngase que  $\phi_p$  es sobreyectiva par algún  $p \in M$  y sea  $q \in M$  otro punto distinto. Por ser  $\phi_p$  sobreyectiva,  $\exists g \in G$  tal que  $g \cdot p = q$ . Se considera la aplicación de órbitas  $\phi_q$ . Se quiere ver que esta aplicación es sobreyectiva. Para ello, se toma  $q' \in M$  arbitrario. Por ser  $\phi_p$  sobre,  $\exists g' \in G$  tal que  $g' \cdot p = q'$ . Entonces, tomando  $h = g' \cdot g^{-1}$ , se tiene que:  $\phi_q(h) = (g' \cdot g^{-1}) \cdot q$  y por los axiomas de acción, esto es:  $\phi_q(h) = q'$ , como quería verse.
2.  $\Phi$  es transitiva  $\Leftrightarrow \phi_p$  es sobreyectiva para cada  $p \in M$ . En particular, esto ocurre si, y solo si,  $\mathcal{O}_p = M$  para cada  $p \in M$ . Por tanto, todas las órbitas son la misma, solo hay una clase de equivalencia por 4.1.9.
3. Si  $\phi_p$  es inyectivo, y  $g \in G_p$ , entonces  $g \cdot p = p = e \cdot p \Rightarrow \phi_p(g) = \phi_p(e) \Rightarrow g = e$ . Recíprocamente, si  $G_p$  es el subgrupo trivial  $\{e\}$ , entonces: si  $\phi_p(g) = \phi_p(\omega) \Rightarrow (\omega^{-1} \cdot g) \cdot p = p$ , luego  $\omega^{-1} \cdot g \in G_p$  y por tanto  $g = \omega$ .

□

Como corolario de lo anterior y de la proposición 4.1.12, se tiene:

**Corolario 4.1.15 (aplicación de órbitas de acciones libres).** Sea  $\Phi$  una acción regular y libre del grupo de Lie  $G$  sobre la variedad diferenciable  $M$ . Entonces, las aplicaciones de órbitas  $\phi_p : G \rightarrow M$  son inmersiones inyectivas para cada  $p \in M$ . Si  $G$  es, además, compacto, las aplicaciones de órbitas son embebimientos.

*Demostración.* Si la acción es libre, el grupo de istropía es trivial en cada punto. Por tanto, usando la proposición 4.1.12 se tiene que la diferencial de la aplicación de órbitas es inyectiva en el punto  $e \in G$ . Para ver que es inyectiva en cualquier punto, se toma  $g \in G$ . Entonces (se supone que la acción es por la izquierda), se tiene:

$$\begin{array}{ccc} T_g G & \xrightarrow{d_g \phi_p} & T_{g \cdot p} M \\ d_e \mathcal{L}_g \uparrow & & \uparrow d_p l_g \\ T_e G & \xrightarrow{d_e \phi_p} & T_p M \end{array}$$

Como  $\mathcal{L}_g$  es difeomorfismo,  $d_e\phi_p$  es inyectiva y  $l_g$  es difeomorfismo, se puede asegurar que  $d_g\phi_p$  es inyectiva, luego  $\phi_p$  son inmersiones inyectivas.

En el caso de que  $G$  sea compacto, se puede ver que son embebimientos. Para ello, basta con demostrar que  $\phi_p$  es un embebimiento topológico. Esto quiere decir que es un homeomorfismo sobre su imagen. Para verlo, se demostrará que  $\phi_p$  es una aplicación cerrada. Dado un cerrado  $F \subset G$ , como  $G$  es compacto,  $F$  es compacto. Entonces, como  $\phi_p$  es continua, la imagen de  $F$  es un compacto. Como  $\phi_p(F)$  es un compacto dentro de  $M$ , que es Hausdorff, es cerrado, como se quería ver. Entonces,  $\phi_p$  es una aplicación inyectiva y cerrada, luego un embebimiento topológico.  $\square$

## 4.2. Campos de vectores fundamentales

**Definición 4.2.1 (campo de vectores fundamental).** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $M$  una variedad diferenciable. Si  $\Phi : M \times G \rightarrow M$  es una acción por la derecha, y  $X \in \mathfrak{g}$  es un campo de vectores, se define el **campo de vectores fundamental**  $\tilde{X}$  como:

$$\tilde{X}_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p \cdot \exp(tX)) = (d_e\phi_p)(X_e) \quad (4.2.1)$$

Si la acción es por la izquierda, el campo de vectores se define de una manera distinta:

$$\tilde{X}_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(-tX) \cdot p) = (d_e\phi'_p)(X_e) \quad (4.2.2)$$

siendo  $\phi'_p(g) = g^{-1} \cdot p$ .

**Notación 4.2.1.** la aplicación que envía  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M) : X \mapsto \tilde{X}$  se denota por  $\phi_*$ . Esto se hace porque es formalmente muy parecida a la expresión del morfismo inducido de 2.5.1. No obstante, esto no inducirá a error porque, en el caso de vectores fundamentales, la aplicación  $\phi$  no es entre grupos de Lie, sino que es la acción de un grupo en una variedad.

**Proposición 4.2.2 (campos de vectores fundamentales para acciones libres).**

Sea  $G$  un grupo de Lie actuando sobre la variedad diferenciable  $M$ . Si la acción es libre, entonces la aplicación  $\phi_*$  es inyectivo.

*Demostración.* Es inmediato usando 4.1.12 y 4.1.14.  $\square$

**Proposición 4.2.3 (los campos de vectores fundamentales definen un homomorfismo de álgebras).** Sea  $G$  un grupo de Lie que actúa sobre la variedad diferenciable  $M$  de manera regular. la aplicación  $\phi_*$  es un homomorfismo de álgebras de Lie. Esto es:

$$[\widetilde{[X, Y]}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \quad (4.2.3)$$



*Demostración.* Se considera el caso de una acción por la izquierda. El caso de una acción por la derecha sería similar. La demostración hace uso de la proposición 2.5.4. Usando esta proposición, se ve que basta con probar que dados  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , y siendo:  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  sus imágenes, que  $X$  está  $\phi'_p$ -relacionado con  $\tilde{X}$  y lo mismo con  $Y$  y  $\tilde{Y}$ . Se detalla para  $X$  y  $\tilde{X}$ . Lo que se quiere ver es que  $\tilde{X}_{\phi'_p(a)} = (d_a \phi'_p)(X_a)$ ,  $\forall a \in G$ . Como  $X$  está en  $\mathfrak{g}$  es invariante por la izquierda, luego  $X_a = X_{\mathcal{L}_a(e)} = (\mathcal{L}_a)_*(X)_e = d_e(\mathcal{L}_a)(X_e)$ . Es más,  $X_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX)$ . Por tanto:

$$(d_a \phi'_p)(X_a) = (d_a \phi'_p) d_e(\mathcal{L}_a) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) = d_e(\phi'_p \circ \mathcal{L}_a) \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \right)$$

En la última igualdad se ha usado la regla de la cadena. Ahora, si  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) = v$ , para hallar  $d_e(\phi'_p \circ \mathcal{L}_a)(v)$  basta con tomar una curva que pase por  $e$  en  $t = 0$  y sea tangente a  $v$ . La propia  $\exp(tX)$  vale, luego se tiene:

$$\begin{aligned} d_e(\phi'_p \circ \mathcal{L}_a) \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \right) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi'_p \circ \mathcal{L}_a \circ \exp(tX)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(-tX) \cdot a^{-1} \cdot p) = \\ &= \tilde{X}_{a^{-1} \cdot p} = \tilde{X}_{\phi'_p(a)} \end{aligned}$$

Como se quería probar. □

Los campos de vectores fundamentales transforman de la siguiente manera por multiplicaciones a izquierda y derecha:

**Proposición 4.2.4 (multiplicaciones a izquierda y derecha sobre campos fundamentales).** Sea  $G$  un grupo de Lie actuando sobre la variedad diferenciable  $M$ . Se toma  $X \in \mathfrak{g}$  y  $g \in G$ :

1. Si la acción es por la derecha, entonces:

$$(r_g)_* \tilde{X} = \widetilde{Ad_{g^{-1}}(X)} \quad (4.2.4)$$

2. Si la acción es por la izquierda, entonces:

$$(l_g)_* \tilde{X} = \widetilde{Ad_{g^{-1}}(X)} \quad (4.2.5)$$

### 4.3. La forma de Maurer-Cartan

**Definición 4.3.1 (la forma de Maurer-Cartan).** La forma de maurer-Cartan  $\mu_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$  es una 1-forma con valores en  $\mathfrak{g}$  definida por:

$$\begin{aligned} \mu_G : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathbb{C}^\infty(G, \mathfrak{g}) \\ X &\longrightarrow (\mu_G(X))_g = (d_g \mathcal{L}_{g^{-1}})(X_g) \in \mathfrak{g} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

**Observación 4.3.1.**  $(\mu_G(X))_g \in T_e G$ , luego el campo  $Y$  en  $\mathfrak{g}$  asociado a este vector es  $Y_h = d_e \mathcal{L}_h((\mu_G(X))_g) = d_e \mathcal{L}_h((d_g \mathcal{L}_{g^{-1}})(X_g))$ . Usando la regla de la cadena, lo anterior es:  $d_g(\mathcal{L}_h \circ \mathcal{L}_{g^{-1}})(X_g) = d_g(\mathcal{L}_{h \cdot g^{-1}})(X_g)$ . En particular, si  $h = g$ , se tiene que  $Y_g = X_g$ . Dicho de otro modo: “La forma de Maurer-Cartan asocia, a cada campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , un campo de vectores invariante por la izquierda que, en el punto  $g \in G$ , coincide con  $X_g$ ”.

Es fácil probar que  $\mu_G$  cumple las siguientes propiedades de invarianza:

**Proposición 4.3.2 (invarianza de la forma de Maurer-Cartan).** La forma de Maurer-Cartan verifica:

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_g)^*(\mu_G) &= \mu_G \\ (R_g)^*(\mu_G) &= Ad_{g^{-1}} \circ \mu_G \end{cases} \quad (4.3.2)$$

para cada  $g \in G$ .



La forma de Maurer-Cartan aparece al hallar la diferencial de una acción:

**Proposición 4.3.3 (la diferencial de una acción de grupo regular).** Sea  $G$  un grupo de Lie actuando de manera regular sobre la variedad diferenciable  $M$ . Con la identificación canónica:  $T_{(x,g)}(M \times G) \cong T_x M \oplus T_g G$ , la diferencial de  $g$  es:

1. Si la acción es por la izquierda, entonces es:

$$\begin{aligned} d_{(g,x)}\Phi : T_g G \oplus T_x M &\longrightarrow T_{g \cdot x}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow (d_x l_g)(Y) + \widetilde{\mu_G(X)}_{g \cdot x} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

2. Si la acción es por la derecha, entonces es:

$$\begin{aligned} d_{(x,g)}\Phi : T_x M \oplus T_g G &\longrightarrow T_{x \cdot g}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow (d_x r_g)(X) + \widetilde{\mu_G(Y)}_{x \cdot g} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

*Demostración.* Se hace para acciones por la derecha, aunque para acciones por la izquierda sería análogo. Entonces, sea  $\phi_x : G \rightarrow M$  la aplicación de órbitas:  $\phi_x(g) = x \cdot g$ . Sea  $x(t)$  una curva cuya imagen está contenida en  $M$  y que es tangente a  $X$  en tiempo  $t = 0$  y sea  $g(t)$  una curva contenida en  $G$ , tangente a  $Y$  en  $t = 0$  pasando por  $g$ . Entonces, la diferencial de la acción de grupo sería:

$$\begin{aligned} d_{(x,g)}\Phi(X, Y) &= d_{(x,g)}\Phi(X, 0) + d_{(x,g)}\Phi(0, Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r_g(x(t)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_x(g(t)) = \\ &= d_x(r_g)(X) + d_g\Phi_x(Y) \end{aligned}$$

Como ya se vio en la prueba de 4.2.3 (allí se hizo para acciones por la izquierda pero sería análogo para acciones por la derecha),  $X$  está  $\phi_x$ -relacionado con  $\tilde{X}$ . En particular, en este caso:  $d_g \Phi_x(Y) = \widetilde{\mu_G(Y)}_{\phi_x(g)} = \widetilde{\mu_G(Y)}_{x \cdot g}$ .  $\square$

## 4.4. Espacio de órbitas

En esta subsección se estudia el espacio de órbitas, definido en 4.1.11. Lo importante es ver bajo qué condiciones  $M/G$  tiene una estructura de variedad diferenciable que haga que la proyección canónica  $\pi : M \rightarrow M/G$  sea una submersión. Esta parte es muy técnica, aunque hay algunos resultados en particular que se usan en múltiples demostraciones.

La razón por la cual se espera que  $\pi$  sea una submersión es de manera que existan secciones locales (*local gauges*):

**Lema 4.4.1 (las submersiones sobreyectivas admiten secciones locales).** Sea  $p : M \rightarrow N$  una submersión sobreyectiva entre variedades diferenciables. Entonces,  $p$  admite **secciones locales regulares**. Es decir, para cada  $x \in N$ , existe un entorno abierto  $U \subset N$  de  $x$  y una aplicación regular  $s : U \rightarrow M$  tal que  $p \circ s = Id_U$

*Demostración.* La demostración de este lema puede encontrarse en [9] (sección 3.3. *Submersions*). La idea que subyace es el conocido teorema de que, dada una submersión,  $p : M \rightarrow N$ , para cada  $x' \in M$ , existe una carta  $(V, \phi)$  de  $M$  con  $x' \in V$  y una carta  $(U, \Psi)$  de  $N$  con  $p(x') = x \in U$  tal que  $p(V) \subset U$  y  $(\Psi \circ p \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m) = pr_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ . Tomando entornos más reducidos de ser necesario, puede conseguirse que  $\phi(V)$  sea de la forma  $A \times B \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$  y  $\Psi(U) = B$ . Entonces, la sección local deseada sería  $s := \phi^{-1} \circ i \circ \Psi$ , siendo  $i : A \rightarrow B : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ . En efecto:  $\Psi \circ p \circ s = \Psi \circ p \circ \phi^{-1} \circ i \circ \Psi = pr_m(i \circ \Psi) = (pr_m \circ i) \circ \Psi = \Psi$ .  $\square$

El siguiente lema es de ayuda:

**Lema 4.4.2.** Sea  $p : M \rightarrow N$  una submersión sobreyectiva. Entonces, una aplicación  $f : N \rightarrow Q$  es regular si, y solo si,  $f \circ p : M \rightarrow Q$  es regular. Es más,  $f$  es una submersión si, y solo si,  $f \circ p$  es submersión y es sobreyectiva si, y solo, si  $f \circ p$  lo es.

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ p \downarrow & \searrow f \circ p & \\ N & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$



**Definición 4.4.3 (acción principal).** Una acción regular por la derecha (análogo para acciones por la izquierda) del grupo de Lie  $G$  sobre la variedad diferenciable  $M$  se dice

que es **principal** si es libre y la aplicación:

$$\begin{aligned} \Psi : M \times G &\longrightarrow M \times M \\ (p, g) &\longrightarrow (p, p \cdot g) \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

es cerrado.

El siguiente teorema va a ser el que permita probar el resultado importante de esta sección. Su prueba está en [6], pero es extremadamente técnica y larga para reproducirla aquí:

**Teorema 4.4.4 (Teorema de Godement sobre la estructura de variedad de los espacios cociente).** Sea  $R$  una relación de equivalencia en la variedad  $M$ . Se supone que  $R$  es una subvariedad embebida y cerrada de  $M \times M$  y que  $pr_1|_R : R \rightarrow M$  es una submersión sobreyectiva. Entonces, existe una única estructura de variedad en  $M/R$  que hace que  $\pi : M \rightarrow M/R$  sea una submersión sobreyectiva.

Con esto, se llega al resultado importante:

**Teorema 4.4.5 (las acciones principales definen espacios de órbitas que son subvariedades submersas).** Sea  $\Phi$  una acción principal por la derecha (lo mismo para izquierda) de  $G$  en  $M$ . Entonces,  $M/G = M/R$  (con  $R$  la relación de equivalencia de “estar en la misma órbita”) tiene una única estructura de variedad diferenciable que hace que  $\pi : M \rightarrow M/G$  sea una submersión.

*Demostración.* Como la acción es libre,  $\Psi$  es una aplicación inyectiva. La diferencial de  $\Psi$  es, usando la proposición 4.3.3:  $d_{(x,g)}(\Psi) = (X, d_x r_g(X) + \mu_G(Y)_{x \cdot g})$ . Entonces, si esto se anula se deduce que  $X = 0$ , luego  $\mu_G(Y)_{x \cdot g} = 0$ , pero como la acción es libre, por 4.2.2, se deduce que  $\mu_G(Y) = d_g \mathcal{L}_{g^{-1}}(Y) = 0$ . Como  $\mathcal{L}_{g^{-1}}$  es un difeomorfismo, se deduce que  $Y = 0$ . Esto prueba que  $\Psi$  tiene diferencial inyectiva. Además, como la acción es **principal**, es cerrada e inyectiva, luego es un homeomorfismo topológico. Esto, junto con el hecho de que su diferencial sea inyectiva, prueban que es un embebimiento, y la imagen de este embebimiento, que es  $R$  será una subvariedad embebida. Es más, como  $R = \Psi(M \times G)$ , es la imagen de un cerrado por  $\Psi$ , es cerrado. Para aplicar el Teorema de Godement, todo lo que se necesita es que  $pr_1|_R$  sea una submersión sobreyectiva. Esto es trivial por el Lema 4.4.2, ya que  $pr_1|_R \circ \Psi = pr_1$ , que es submersión.  $\square$

# Capítulo 5

## Fibrados

Los fibrados aparecen en física al describir las teorías gauge. La variedad base es el espacio-tiempo: una variedad de dimensión 4 que es localmente el espacio de Minkowski. Cuando se tienen campos vectoriales que, en cada punto, están definidos en distintos espacios, aparece de manera natural el concepto de fibrado. En ese caso, el fibrado es vectorial, y cada fibra es un espacio vectorial en el que «vive» el campo en cuestión.

### 5.1. Fibrados en general

**Definición 5.1.1 (fibras y secciones).** Sea  $\pi : E \rightarrow M$  una aplicación diferenciable y sobreyectiva entre variedades diferenciables. Se denomina:

1. **Fibra de  $\pi$  sobre  $x$ :** al conjunto  $E_x = \pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(\{x\}) \subset E$ . Dado un subconjunto  $U \subset M$ , se denota  $E_U = \pi^{-1}(U)$  que es unión de todas las fibras de  $U$ .
2. **Sección de  $\pi$ :** Una aplicación diferenciable  $s : M \rightarrow E$  cumpliendo  $\pi \circ s = Id_M$  se llama **sección global**. Si  $s$  está definida solo en un subconjunto abierto  $U \subset M$ , cumpliendo  $\pi \circ s = Id_U$ ,  $\pi$  se dice una **sección local**.

**Definición 5.1.2 (fibrados).** Sean  $E, F, M$  variedades diferenciables y  $\pi : E \rightarrow M$  una aplicación diferenciable y sobreyectiva. Entonces,  $(E, \pi, M; F)$  se dice que es un **fibrado** (o una **trivialización local por fibras**) y se denota así:

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ & & \pi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

o simplemente:  $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ , si verifica que: « para cada  $x \in M$ , existe un entorno abierto de  $x$ ,  $U \subset M$ , tal que  $\pi|_U$  admite una **trivialización**; es decir, existe un difeomorfismo  $\phi_U : E_U \rightarrow U \times F$  con  $pr_1 \circ \phi_U = \pi$  ». En estas condiciones, se denomina:

1. **espacio total** a  $E$ .
2. **variedad base** a  $M$ .
3. **fibra general** a  $F$ .
4. **proyección** a  $\pi$ .
5. **trivialización local** o **carta del fibrado** a  $(U, \phi_U)$ .

**Observación 5.1.1.** Visualmente, un fibrado es un producto cartesiano “retorcido”. Esta forma de retorcerlo se puede eliminar localmente a través de una **trivialización local**, que hace que una cierta colección de fibras sea difeomorfa a un producto cartesiano usual. En la Figura 5.1, extraída de [6], se muestra intuitivamente lo que es un fibrado:

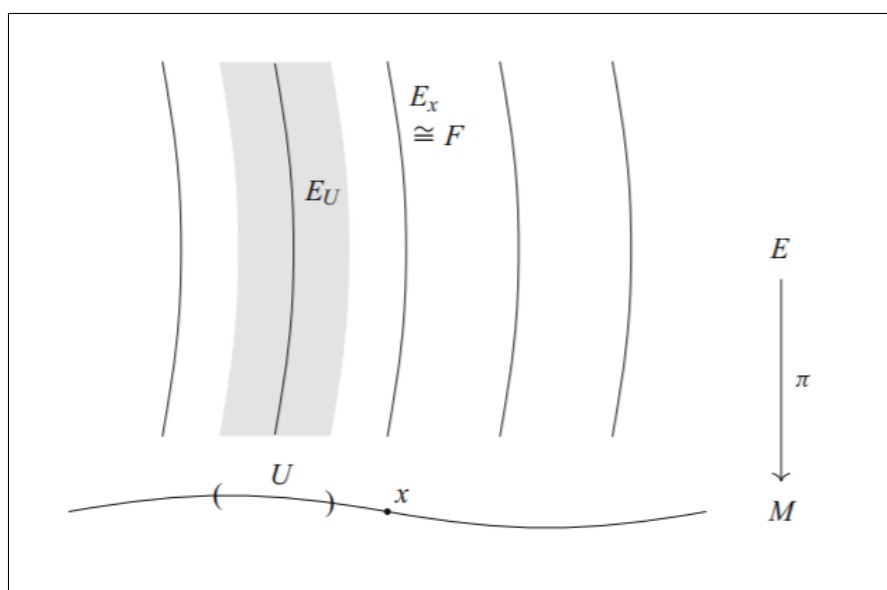


Figura 5.1: Representación de un fibrado. La variedad  $E$  se proyecta sobre la variedad base  $M$ . Una colección de fibras  $E_U$  es difeomorfa a  $U \times F$ , luego  $E$  se puede trivializar localmente. Como se verá más adelante, cada fibra es difeomorfa a  $F$ , de ahí que se llame fibra principal.

**Proposición 5.1.3 (cada fibra es difeomorfa a la fibra principal).** Sea  $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  un fibrado. Entonces:

1. La proyección  $\pi : E \rightarrow M$  es una submersión, y por tanto  $E_x = \pi^{-1}(x)$  es una subvariedad embebida.
2.  $\phi_{U_x} = pr_2 \circ \phi_U|_{E_x} : E_x \rightarrow F$  es un difeomorfismo entre cada fibra y la fibra general.

*Demostración.* Basta con aplicar la definición de fibrado: Sea  $x \in M$  arbitrario, existe un entorno de  $x$ ,  $U$ , abierto y una función  $\phi_U$  tal que:  $\phi_U : E_U \rightarrow U \times F$  es un difeomorfismo, con  $pr_1 \circ \phi_U = \pi$ . Como la proyección  $pr_1 : U \times F \rightarrow U$  es una submersión, esto implica, por

el lema 4.4.2 que  $\pi$  es una submersión. Usando el teorema del valor regular, se tiene que  $E_x$  es una subvariedad embebida.

Por otro lado: dado  $p \in E_x$ ,  $\phi_{U_x}(p) = pr_2 \circ \phi_U(p)$ . Esto va así:

$$\begin{array}{ccc} E_x & \xrightarrow{\phi_U|_{E_x}} & \{x\} \times F \\ & \searrow \phi_{U_x} & \downarrow pr_2 \\ & & F \end{array}$$

Está claro que  $pr_2 : \{x\} \times F \rightarrow F$  es un difeomorfismo. En cuanto a  $\phi_U|_{E_x}$ , para ver que es difeomorfismo, se usa que:  $\phi_U|_{E_x} : E_x \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\phi_U} U \times F$  es diferenciable y su diferencial es inyectiva (porque  $i$  tiene diferencial inyectiva por ser  $E_x$  subvariedad embebida y  $\phi_U$  es difeomorfismo). Por tanto, es un difeomorfismo local. Como es biyectiva, se deduce que es difeomorfismo global.  $\square$

**Ejemplo 5.1.1 (fibrado trivial).** El caso más simple de fibrado es cuando el espacio total es  $M \times F$ , en cuyo caso, el fibrado se dice **trivial**, y admite una trivialización global.



A continuación, se define cuándo dos estructuras de fibrado son similares (morfismo):

**Definición 5.1.4 (morfismos de fibrados).** Sean  $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  y  $F' \rightarrow E' \xrightarrow{\pi'} M$  dos fibrados sobre la misma variedad base  $M$ . Un **morfismo de fibrados** es una aplicación regular  $H : E \rightarrow E'$  tal que:  $\pi' \circ H = \pi$ . la aplicación se llama **isomorfismo de fibrados** si es, además, un difeomorfismo.

**Definición 5.1.5 (fibrados triviales).** Los fibrados isomorfos al fibrado trivial del ejemplo 5.1.1 también se llaman **fibrados triviales**.



Los fibrados admiten un atlas especial, en consonancia con su estructura:

**Definición 5.1.6 (atlas del fibrado).** Dado un fibrado  $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ , un **atlas del fibrado** es un conjunto de **cartas de fibrado**:  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  tal que  $\{U_i\}_{i \in I}$  forman un recubrimiento abierto de la variedad base y  $\phi_i : E_{U_i} \rightarrow U_i \times F$  es difeomorfismo.

Las distintas cartas de un fibrado se solapan mediante las funciones de transición:

**Definición 5.1.7 (funciones de transición).** Sea  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  un atlas del fibrado  $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$ . Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , se define la **función de transición** como:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{(U_i \cap U_j) \times F} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$$

**Observación 5.1.2.** Las funciones de transición son difeomorfismos, claramente. Además, preservan las fibras. Esto es, si se denota  $\phi_{ix} = \phi_i|_{E_x}$ , entonces para cada  $x \in U_i \cap U_j$ , se tiene que:  $\phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1} : F \rightarrow F$  es un difeomorfismo (por 5.1.3).

Esto motiva que se defina:

$$\begin{aligned} \phi_{ji} : U_i \cap U_j &\longrightarrow \text{Dif}(F) \\ x &\longrightarrow \phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1} \end{aligned}$$

que, en ocasiones, también se denomina función de transición.

## 5.2. Fibrados principales

Los fibrados principales combinan el concepto de fibrado con el de acción de grupo.

**Definición 5.2.1 (fibrado principal).** Sea:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

un fibrado en el que  $G$  es un grupo de Lie que actúa por la derecha sobre  $P$ :  $P \times G \rightarrow P$ . Entonces, se dice que lo anterior es un **fibrado principal** si:

1. La acción **preserva las fibras** y es **simplemente transitiva en las mismas**. Esto es, la acción se restringe a las fibras:  $P_x \times G \rightarrow P_x$  (dicho de otro modo,  $p \cdot g \in P_x, \forall p \in P_x, g \in G$ ) y la aplicación de órbitas  $G \rightarrow P_x : g \mapsto p \cdot g$  es una biyección,  $\forall x \in M, p \in P_x$ .
2. Existe un atlas del fibrado que es **G-equivariante**. Es decir, existe un atlas  $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$  en las condiciones de 5.1.6 que además cumple la propiedad:

$$\phi_i(p \cdot g) = \phi_i(p) \cdot g, \quad \forall p \in P_{U_i}, g \in G$$

donde se supone que, en el lado derecho de la ecuación, el grupo  $G$  actúa en un elemento  $(x, a) \in U_i \times G$  de la siguiente forma:

$$(x, a) \cdot g = (x, a \cdot g)$$

A un atlas en estas condiciones se le llama **atlas principal**.

El grupo  $G$  se llama **grupo de estructura** del fibrado.



**Notación 5.2.1.** Se suele denotar al fibrado principal:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \pi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

de manera abreviada como G-fibrado principal  $P \rightarrow M$ .



Las funciones de transición en los fibrados principales tienen una expresión especial:

**Proposición 5.2.2 (funciones de transición de fibrados principales).** Sea  $P \rightarrow M$  un G-fibrado principal y  $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$  un atlas principal del fibrado. Entonces, las funciones de transición son elementos de  $G \subset \text{Dif}(G)$ :

$$\begin{array}{ccc} \phi_{ji} : U_i \cap U_j & \longrightarrow & G \subset \text{Dif}(G) \\ x & \longrightarrow & \phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1} \end{array}$$

entendiendo a  $G$  como un subgrupo del grupo de difeomorfismos a través de las multiplicaciones por la izquierda. Es decir,  $g(h) = g \cdot h = \mathcal{L}_g(h) \Rightarrow g$  se identifica con  $\mathcal{L}_g$ .

*Demostración.* Para ver que las funciones de transición actúan como dice el enunciado, habría que ver que, fijado un  $x \in U_i \cap U_j$ , existe un  $g \in G$  de tal modo que: para todo  $h \in G$ ,  $\phi_{jx} \circ \phi_{ix}(x, h) = \mathcal{L}_g(h)$ . De ser cierta la premisa, entonces es claro que el candidato para  $g$  debería ser:  $g = \phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1}(x, e)$ . Ahora se trata de usar la G-equivarianza:  $\phi_{ix}(p \cdot h) = \phi_{ix}(p) \cdot h$ ,  $\forall p \in P_x$ ,  $h \in G$ . En particular,  $\phi_{ix}^{-1}(\phi_{ix}(p) \cdot h) = p \cdot h$ . Componiendo con  $\phi_{jx}$  a ambos lados:  $\phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1}(\phi_{ix}(p) \cdot h) = \phi_{jx}(p \cdot h) = \phi_{jx}(p) \cdot h$ . Se toma ahora  $p = \phi_{ix}^{-1}(x, e)$ . Entonces,  $\phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1}(x, h) = \phi_{jx}(\phi_{ix}^{-1}(x, e) \cdot h) = g \cdot h = \mathcal{L}_g(h)$ , que era lo que se quería probar.  $\square$

Para los fibrados principales, se puede construir un atlas principal con tan solo usar las secciones locales:

**Teorema 5.2.3 (atlas principal definido por las secciones locales).** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $\pi : P \rightarrow M$  una aplicación regular y sobreyectiva entre variedades diferenciables. Se supone también que  $G$  actúa sobre  $P$  con una acción regular por la derecha  $P \times G \rightarrow P$ . entonces,  $P$  es un G-fibrado principal, si y solo si:

1. La acción en  $G$  preserva las fibras y es simplemente transitiva en ellas.
2. Existe un recubrimiento por abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $M$  junto con secciones locales  $s_i : U_i \rightarrow P$  de la aplicación  $\pi$ .

*Demostración.* Básicamente, lo único que hay que ver es que se puede construir un atlas con tan solo usar secciones, ya que la condición 1 de este resultado es idéntica a la condición 1 de la definición de fibrado principal 5.2.1. Entonces:

1.  $\Rightarrow$ ) Hay que ver que un atlas de fibrado principal define secciones locales. Para ello, basta con usar  $s_i : U_i \rightarrow P : x \mapsto \phi_i^{-1}(x, e)$ . En efecto, esto es una aplicación regular por ser  $\phi_i$  un difeomorfismo y además, dado  $x \in U_i \subset M$ ,  $\pi \circ s_i(x) = \pi \circ \phi_i^{-1}(x, e) = pr_1(x, e) = x = Id_{U_i}(x)$ , donde se ha usado que  $pr_1 \circ \phi_i = \pi$ .
2.  $\Leftarrow$ ) Hay que ver que las secciones locales  $s_i : U_i \rightarrow P$  definen un atlas principal. Se toma como atlas a  $\{(U_i, t_i^{-1})\}_{i \in I}$ , donde  $t_i$  está definida así:

$$\begin{aligned} t_i : U_i \times G &\longrightarrow P_{U_i} \\ (x, g) &\longrightarrow s(x) \cdot g \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Entonces, hay que comprobar que:

- $t_i$  es **diferenciable**. En efecto:  $t_i(x, g) = \Psi(s(x), g)$ , siendo  $\Psi$  la acción. Entonces, es composición de la acción (diferenciable) junto con la aplicación  $(s, Id) : (x, g) \mapsto (s(x), g)$  que es diferenciable por serlo en cada componente.
- Es **equivariante**. En verdad, la función que tiene que ser equivariante es  $t_i^{-1}$ . La equivarianza de  $t_i^{-1}$  es equivalente a que  $p \cdot g = t_i((x, a) \cdot g)$ ,  $\forall x \in U_i, g \in G$ , siendo  $p = t_i(x, a)$  (siempre y cuando  $t_i$  sea biyectiva). Pero esto es trivial ya que:  $t_i((x, a) \cdot g) = s(x) \cdot ag$  y  $t_i(x, a) = s(x) \cdot a$  y, por los axiomas de acción de grupo:  $t_i((x, a) \cdot g) = s(x) \cdot ag = (s(x) \cdot a) \cdot g = p \cdot g$ .
- Es **biyectiva**. Lo es por ser la aplicación de órbitas biyectiva en cada fibra.
- Es un **difeomorfismo**. Basta con probar que es **difeomorfismo local** (pues ya es biyectiva). Para ello, hay que ver que **la diferencial es inyectiva**. La diferencial de  $t_i$  se puede calcular usando la Proposición 4.3.3. En efecto, como la acción es por la derecha, la diferencial será:  $d_{(x,g)}t(X, Y) = d_x(r_g \circ s)(X) + \widetilde{\mu_G(Y)}_{s(x) \cdot g}$  con  $X \in T_x(M)$ ,  $Y \in T_g(G)$ . Se quiere probar que esto es inyectivo. La prueba es un tanto delicada. Primero hay que definir  $s' = r_g \circ s$ . Es fácil probar que  $s'$  también es una sección, luego  $\pi \circ s' = Id_U$ . Usando la regla de la cadena, dado  $x \in M$ :  $d_{s'(x)}\pi \circ d_x s' = Id_{T_x M}$ . El hecho de que el lado derecho de la ecuación anterior sea una aplicación biyectiva implica que  $d_x s'$  ha de ser, por lo menos, inyectiva. Como  $\pi$  es constante en cada fibra,  $T_{s'(x)}P_x \subset \ker(d_{s'(x)}\pi)$ . Ahora, como  $Id_{T_x M}$  es biyectiva, ha de ser  $Im(d_x s') \cap T_{s'(x)}P_x = \{0\}$ , ya que si hubiera una intersección no nula,  $Id_{T_x M}$  tendría un núcleo no trivial.

Ahora hay que ver que:  $\widetilde{\mu_G(Y)}_{s(x) \cdot g} \in T_{s'(x)}P_x$ . Para ello, basta con observar que:  $\widetilde{\mu_G(Y)}_{s(x) \cdot g} = (d_g \Psi_{s(x)})(Y)$ , como ya se vio en la demostración de la Proposición 4.3.3. Entonces, como  $\Psi$  se restringe a las fibras:  $\Psi_{s(x)} : G \rightarrow P_x : g \mapsto p \cdot g$ . En particular, su diferencial tiene llegada en  $T_{s'(x)}P_x$  como quería verse.

Con esto ya se remata la demostración, puesto que  $\widetilde{\mu_G(Y)}_{s(x) \cdot g} \in T_{s'(x)}P_x$  y  $d_x(r_g \circ s)(X) = d_x s'(X) \in Im(d_x s')$ . Entonces, una combinación lineal de estos vectores solo puede ser nula si ambos son nulos. Por el resultado 4.2.2, se deduce que  $\mu_G(Y)_{s(x) \cdot g} = (d_g \Psi_{s(x)})(Y) = 0$ . Usando 4.1.15, se deduce que  $Y = 0$ . Por otro lado, como  $d_x s'$  era inyectiva, ha de ser  $X = 0$ .

□

### 5.3. Morfismos de fibrados principales y gauges

**Definición 5.3.1 (morfismos de fibrados principales).** Sean  $G \rightarrow P \xrightarrow{\pi} M$  y  $G' \rightarrow P' \xrightarrow{\pi'} M$  dos fibrados principales compartiendo la variedad base  $M$ . Sea  $f : G \rightarrow G'$  un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces, un **morfismo de fibrados principales** es un morfismo de fibrados  $H : P \rightarrow P'$  regular que es **f-equivariante**. Es decir, verifica:

1.  $\pi' \circ H = \pi$  por ser morfismo de fibrados.
2.  $H(p \cdot g) = H(p) \cdot f(g)$ ,  $\forall p \in P, g \in G$  por ser **f-equivariante**.

Si  $f : G \rightarrow G'$  es un embebimiento, entonces  $H$  se llama  **$G$ -reducción** de  $P'$  y la imagen de  $H$ ,  $H(P)$  se llama **subfibrado principal** de  $P'$ .

El concepto de sección es clave en la teoría gauge:

**Definición 5.3.2 (gauge).** Sea  $\pi : P \rightarrow M$  un fibrado principal. Un **gauge global** es una sección global de  $\pi$ . El gauge es **local** si la sección es local. Al conjunto de todas las secciones locales (gauges) de un abierto  $U \subset M$  se las denota  $\Gamma(U, P)$

**Observación 5.3.1 (los gauges corresponden a trivializaciones).** Por el Teorema 5.2.3, está claro que tener secciones locales de cada entrono abierto de la variedad es equivalente a construir un atlas del fibrado principal. De hecho, si las secciones son globales, esto quiere decir que se puede construir  $t_i$  como en la demostración del teorema pero globalmente, lo cual correspondería a una trivialización global del fibrado (fibrado trivial).

Esta idea es similar a la libertad de escoger un sistema localmente inercial en Relatividad General. Todos los sistemas de referencia localmente inerciales deberían observar la misma física, de igual manera que todas las elecciones de gauge deberían. La idea de las teorías de gauge es la independencia de la elección de un gauge (una sección local).

### 5.4. Atlas formal del fibrado

En ocasiones, se tiene una variedad  $M$ , un conjunto  $E$  y una aplicación sobreyectiva  $\pi : E \rightarrow M$ , pero no se tiene ninguna estructura definida en  $E$ . Entonces, aparece la pregunta de cómo dar estructura al conjunto  $E$  de modo que se obtenga un fibrado. Esto es lo que pasa, por ejemplo, si se quiere dar estructura de fibrado al conjunto de todos los espacios tangentes a una variedad:  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ . Se podría dar una estructura de variedad diferenciable en  $TM$  y ver que, con ella, se obtiene un fibrado. Esta es la lógica que se sigue en [9] (pág. 83). Esto tiene la desventaja de que se ha de tener un cierto *ansatz* sobre cómo construir un atlas de variedad sobre  $M$ .

En esta sección, se usan atlas formales del fibrado, que son atlas con ciertas propiedades específicas que no requieren de una estructura en  $E$ , pero que van a ser precursores de los atlas del fibrado:

**Definición 5.4.1 (atlas formal del fibrado).** Sean  $M$  y  $F$  variedades,  $E$  un conjunto y  $\pi : E \rightarrow M$  una aplicación sobreyectiva. Entonces:

1. Se dice que el abierto  $U \subset M$  y la biyección  $\phi_U : E_U \rightarrow U \times F$  verificando  $pr_1 \circ \phi_U = \pi|_{E_U}$  forman una **carta formal del fibrado**:  $(U, \phi_U)$ .
2. Una familia de cartas formales  $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ , en la que los subconjuntos  $U_i$  formen un recubrimiento abierto de la variedad se llamará **atlas formal del fibrado**.
3. Las cartas se dice que son **compatibles diferenciablemente** cuando las transiciones:  $\phi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{(U_i \cap U_j) \times F} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F$  sean difeomorfismos.

Entonces, se puede probar (aunque la demostración es larga y muy técnica) que:

**Teorema 5.4.2 (los fibrados formales definen fibrados).** Sean  $M$  y  $F$  variedades,  $E$  un conjunto arbitrario y  $\pi : E \rightarrow M$  una aplicación sobreyectiva. Se supone que  $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$  es un atlas formal del fibrado formado por cartas que son compatibles diferenciablemente. Entonces, existe una única topología, y estructura diferenciable en  $E$  que hacen que  $F \rightarrow E \xrightarrow{\pi} M$  sea un fibrado.

**Observación 5.4.1.** La topología definida en  $E$  es: « $A \in E$  es abierto si, y solo si,  $\phi_i(A \cap E_{U_i})$  es abierto en  $U_i \times F, \forall i \in I$ ». Es lógico definir esta topología, ya que se va buscando que  $\phi$  sean difeomorfismos, para lo cual también han de ser homeomorfismos. Esta topología hace que  $\phi$  sea una aplicación abierta. De hecho, es la única topología que hace que las cartas sean homeomorfismos.

En cuanto a la estructura diferenciable en  $E$ , basta con dar un atlas sobre  $E$  para que esto defina una estructura diferenciable. Luego se toman atlas maximales por la relación de unión de atlas (ver [9]). En este caso, para construir un atlas basta con tomar:  $(U, \Psi)$  carta de  $M: \Psi : U \rightarrow \Psi(U) \subset \mathbb{R}^m$  y  $(V, \chi)$  carta de  $F: \chi : V \rightarrow \chi(V) \subset \mathbb{R}^p$ . Con esto, se construye la carta  $(E_{U \cap U_i}, \Phi)$ , definida como:  $\Phi = (\Psi, \chi) \circ \phi_i|_{U \cap U_i} : E_{U \cap U_i} \rightarrow \Psi(U \cap U_i) \times \chi(V) \subset \mathbb{R}^{m+p}$ .

## 5.5. Fibrados vectoriales

**Definición 5.5.1 (fibrados vectoriales).** Un fibrado

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & E \\ & & \pi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

se dice **fibrado vectorial de rango  $m$**  si:

1. La fibra general  $V$  y cada fibra  $E_x, x \in M$  son espacios vectoriales  $m$ -dimensionales.
2. Existe un atlas  $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$  del fibrado de manera que las aplicaciones  $\phi_{ix} = \phi_i|_{E_x} :$

$E_x \rightarrow V$  son isomorfismos, para cada  $x \in U_i$ . A este tipo de atlas se le llama **atlas vectorial del fibrado**.

**Notación 5.5.1.** Se denota, a un fibrado como el de la definición anterior, de manera abreviada como: un fibrado vectorial  $E \rightarrow M$  de fibra  $V$ .

Como pasaba en el caso de fibrados principales, las funciones de transición entre fibrados vectoriales toman una forma especial:

**Proposición 5.5.2 (funciones de transición en fibrados vectoriales).** Sea  $E \rightarrow M$  un fibrado vectorial de fibra  $V$ , un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y  $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$  un atlas vectorial del fibrado. Entonces, las funciones de transición  $\phi_{ji}$  actúan en  $GL(m, \mathbb{K}) \subset \text{Dif}(\mathbb{K}^n)$ .

*Demostración.* Es elemental, ya que cada  $\phi_{ix}$  es un isomorfismo lineal. □

**Definición 5.5.3 (morfismos de fibrados vectoriales).** Sean  $V \rightarrow E \xrightarrow{\pi_E} M$  y  $W \rightarrow F \xrightarrow{\pi_F} M$  dos fibrados vectoriales, con  $V, W$  espacios sobre el mismo cuerpo. Un morfismo regular de fibrados  $L : E \rightarrow F$  (cumple, por tanto, que  $\pi_F \circ L = \pi_E$ ) se llama **morfismo de fibrados vectoriales** si la restricción a cada fibra:  $L|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$  es un morfismo de espacios vectoriales. Si este morfismo es un isomorfismo, entonces se dice que  $L : E \rightarrow F$  es un **isomorfismo de fibrados vectoriales**.

**Definición 5.5.4 (subfibrado vectorial).** Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado vectorial de fibra  $V$ , un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión  $m$ . Un subconjunto  $F \subset E$  se dice que es un **subfibrado vectorial** de rango  $k$  si, para cada punto  $p \in M$ , existe un entorno abierto  $p \in U \subset M$  junto con una carta del atlas de fibrado:  $(U, \phi)$  verificando que:  $\phi(E_U \cap F) = U \times \mathbb{K}^k \subset U \times \mathbb{K}^m$ , donde  $\mathbb{K}^k = \mathbb{K}^k \times 0^{m-k} \subset \mathbb{K}^m$ .

## 5.6. Fibrados vectoriales asociados

La idea detrás de los fibrados vectoriales asociados es combinar el concepto de  $G$ -fibrado principal, con el de representación del grupo  $G$  para construir un fibrado vectorial asociado a la representación. En lo que sigue,  $\mathbb{K}$  denotará el cuerpo de los números reales o el de los números complejos.

Se parte de la situación en que se tiene un  $G$ -fibrado principal:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \pi_P \downarrow \\ & & M \end{array}$$

Y una representación

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

del grupo  $G$  sobre el  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$ . Entonces:

**Lema 5.6.1.** En la situación anteriormente descrita, la aplicación:

$$\begin{aligned} (P \times V) \times G &\longrightarrow P \times V \\ (p, v, g) &\longrightarrow (p, v) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g)^{-1}v) \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

define una acción principal libre por la derecha del grupo de Lie  $G$  en la variedad producto  $P \times V$ . El espacio cociente  $E = (P \times V)/G$ , que se denota  $E = P \times_{\rho} V$  es una variedad diferenciable tal que la proyección  $P \times V \rightarrow E$  es una submersión.

*Demostración.* Ver que la acción  $\Psi(p, v, g) = (p \cdot g, \rho(g)^{-1}v)$  es una acción por la derecha es fácil usando los axiomas de acción por la derecha. Habría que ver también:

1. Que la acción es libre. Esto ocurre, por la Proposición 4.1.14, cuando el grupo de isotropía  $G_{(p,v)}$  es trivial para cada  $(p, v) \in P \times V$ . Para ver esto, supóngase que:  $(p \cdot g, \rho(g)^{-1}v) = (p, v)$ . En particular,  $p \cdot g = p$  y, como la acción era libre, se deduce que  $p = e$ .
2. Ahora se quiere probar que la acción es principal, para lo cual, la aplicación:

$$\begin{aligned} \psi \quad (P \times V) \times G &\longrightarrow (P \times V) \times (P \times V) \\ (p, v, g) &\longrightarrow (p, v, (p, v) \cdot g) \end{aligned}$$

es una aplicación cerrada. Para verlo, se toma  $A \subset (P \times V) \times G$  un cerrado y  $\{(p_n, v_n, g_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión contenida en  $\psi(A)$ , que es convergente. Para ver que  $\psi(A)$  es cerrado, usando la caracterización secuencial, bastaría con ver que la sucesión converge hacia un punto que está en  $\psi(A)$ . Como  $\Psi$  es libre, y la sucesión está contenida en  $\psi(A)$ ; para cada  $n$ , existen y son únicos  $g_n \in G$  tales que:  $(q_n, w_n) = (p_n, v_n) \cdot g_n = (p_n \cdot g_n, \rho(g_n)^{-1}v_n)$ , con  $((p_n, v_n), g_n) \in A$ . Si se demuestra que la sucesión  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge en  $G$ , se tendrá que, tomando límites:  $(q_n, w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (q, w) \in P \times V$ , con  $(q, w) = \Psi((p, v), g)$ , por ser  $\Psi$  continua,  $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$  y  $(p_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (p, v)$ . En esta situación,  $(q, w) \in \psi(A)$ , ya que, por ser  $A$  cerrado, la sucesión  $\{((p_n, v_n), g_n)\}_n$  convergería hacia un elemento de  $A$ .

Para ver que la sucesión  $\{g_n\}_n$  converge, se toma  $\pi(p) = x$ . Se toma  $U$  entorno abierto de  $x$  y  $P_U$  su fibra.  $P_U$  es entorno abierto de  $p$  (preimagen por una aplicación continua de  $U$ , abierto). Como  $p_n$  converge hacia  $p$ , existirá un  $n_0 \in \mathbb{N}$  de tal modo que  $\forall n \geq n_0$ ,  $p_n \in P_U$ . Se toma ahora  $\phi : P_U \rightarrow U \times G$  el difeomorfismo de la definición de fibrado. Entonces,  $\phi(p_n) = (x_n, h_n)$ , con  $h_i \in G$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Por otro lado, como  $(q_n, w_n) = (p_n, v_n) \cdot g_n$  y el fibrado conserva las fibras,  $\pi(q_n) = \pi(p_n) = x_n$ . Además, como el fibrado es principal, la aplicación  $\phi$  se puede tomar equivariante. En particular:  $\phi(q_n) := (x_n, s_n) \Rightarrow (x_n, s_n) = \phi(q_n) = \phi(p_n \cdot g_n) = (x_n, h_n) \cdot g_n$ , luego  $s_n = h_n \cdot g_n$ . Ahora, como  $p_n \rightarrow p$  y  $\phi$  es difeomorfismo,  $\phi(p) = (x, h)$ , donde  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ ,  $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ . De nuevo, por ser  $\phi$  difeomorfismo, y como  $q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q$ ,  $\phi(q) = (x, h')$  pero como  $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$ ,  $h_n \cdot g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h'$ , luego  $g_n = h_n^{-1} \cdot (h_n \cdot g_n)$  que converge en  $G$  hacia  $g = h^{-1} \cdot h'$ , que era lo que quería verse.

Después, basta con usar el Teorema 4.4.5, para ver que  $E$  tiene estructura de variedad diferenciable y que la proyección es una submersión.  $\square$

**Teorema 5.6.2 (fibrado vectorial asociado).** Sea  $P$  un  $G$ -fibrado principal y  $\rho$  una representación del grupo de Lie  $G$  en un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$ . Entonces, el espacio cociente  $E = P \times_{\rho} V$  tiene la estructura de un fibrado vectorial sobre  $M$ , con proyección:

$$\begin{aligned} \pi_E : E &\longrightarrow M \\ [p, v] &\longrightarrow \pi_P(p) \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

y fibras  $E_x = (P_x \times V)/G$ , isomorfas a  $V$ . El espacio vectorial en cada fibra  $E_x$  está definido así:

$$\lambda[p, v] + \mu[p, w] = [p, \lambda v + \mu w], \forall v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \tag{5.6.3}$$

y  $\pi_P(p) = x$ . Al fibrado anterior se le llama **fibrado vectorial asociado** al fibrado principal y a la representación  $\rho$ . El grupo  $G$  se conoce como el **grupo de estructura** de  $E$ .

La demostración se basa en ir comprobando una a una que se dan las condiciones de fibrado principal. Como cartas de fibrado, se toman:

$$\begin{aligned} \Psi_U : E_U &\longrightarrow U \times V \\ [p, v] &\longrightarrow (\pi_E[p, v], \rho(\beta_U(P))v) \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

donde  $\beta_U$  está definida de la siguiente manera: «Si  $(U, \phi_U)$  es una carta del fibrado principal, entonces:  $\phi_U : P_U \rightarrow U \times G : p \mapsto (\pi_P(p), \beta_U(p))$ . Es decir, es la segunda componente de  $\phi_U$ . La primera está determinada por el hecho de que, por la definición de fibrado, ha de ocurrir:  $pr_1 \circ \phi_U = \pi_P$ ».



Es interesante que en Física los campos que describen la materia en el contexto de las teorías de gauge se puedan expresar como secciones regulares del fibrado vectorial asociado con un cierto fibrado principal. Esto es porque, tras escoger un gauge en el fibrado principal, una sección del fibrado vectorial asociado se puede asociar con una función  $f : U \rightarrow V$ :

**Proposición 5.6.3 (las secciones de los fibrados vectoriales asociados).** Sea  $P \xrightarrow{\pi_P} M$  un  $G$ -fibrado principal, con  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación del grupo  $G$  sobre el espacio vectorial  $V$  y sea  $E = P \times_{\rho} V$  el fibrado vectorial asociado. Sea  $s : U \rightarrow P$  un gauge local. Entonces, existe una correspondencia biunívoca entre secciones  $\tau : U \rightarrow E$  regulares del fibrado vectorial y aplicaciones regulares  $f : U \rightarrow V$  dada por:

$$\tau(x) = [s(x), f(x)], \forall x \in U \tag{5.6.5}$$

*Demostración.* Sea  $f : U \rightarrow V$  una aplicación regular. Se comienza demostrando que  $\tau : U \rightarrow E : x \mapsto [s(x), f(x)]$  es una sección regular. Obsérvese que, por ser  $s$  una sección local regular del fibrado principal, y  $f$  una función regular, la aplicación:  $x \mapsto (s(x), f(x)) \in P \times V$  es regular. Como el paso al cociente es una aplicación regular por el Lema 5.6.1 (de hecho, es una submersión), se deduce que  $\tau$  es regular. Para ver que es una sección, se comprueba que:  $\pi_E \circ \tau(x) = \pi_E \circ [s(x), f(x)] = \pi_P(s(x)) = x$ , donde se ha usado que, por la ecuación 5.6.2,  $\pi_E([p, v]) = \pi_P(p)$  y el hecho de que  $s$  es sección local.

Recíprocamente, sea  $\tau : U \rightarrow E$  una sección regular. Entonces,  $\tau(x) \in E$ , para cada  $x \in U$ , por lo que existen  $p(x), v(x)$  tales que  $\tau(x) = [p(x), v(x)]$ . Como  $\tau$  tiene que ser sección,  $\pi_E \circ \tau(x) = \pi_P(p(x)) = p$ , luego  $p(x) \in P_x$ . Como se puede escoger el representante de  $p(x)$  que se quiera, es lícito tomar  $p(x) = s(x)$ , que también está en la fibra  $P_x$ , en cuyo caso también se ha de cambiar  $v$  a  $v'(x)$ . Entonces,  $\tau(x) = [s(x), v'(x)]$ . Pero este  $v'(x)$  está ahora unívocamente determinado por ser la acción simplemente transitiva. Este hecho implica que ha de existir un único  $g \in G$  tal que  $p(x) = s(x) \cdot g$ , en cuyo caso también este  $g$  ha de haber actuado sobre la componente  $v$  así:  $v(x) = \rho(g)^{-1}v'(x)$ . Esto es tanto como decir que existe una única  $f : U \rightarrow V$ , que es la que antes se denotaba por  $v'(x)$  tal que:  $\tau(x) = [s(x), f(x)]$ . Se trata de ver, por tanto, que  $f$  es regular. Se toma  $(U, \phi_U)$  la carta del fibrado definida a través de la sección local  $s$  en virtud del Teorema 5.2.3. Es decir:  $\phi_U^{-1} : U \times G \rightarrow P_U : (x, g) \mapsto s(x) \cdot g$ . Entonces, esta carta define una carta del fibrado  $\Psi_U$  como en 5.6.4. Entonces,  $\Psi_U \circ \tau(x) = \Psi_U[s(x), f(x)] = (\pi_P(s(x)), \rho(\beta_U(s(x)))f(x))$ . Por un lado, por ser  $s$  una sección del fibrado principal, la primera componente de lo anterior es  $x$ . Por otro lado, recuérdese que  $\phi_U = (\pi_P, \beta_U)$ . Además:  $\phi_U(s(x) \cdot g) = \phi_U \circ \phi_U^{-1}(x, g) = (x, g)$ . Es decir,  $\beta_U(s(x) \cdot g) = g$ , luego  $\beta_U(s(x)) = e$  (sin más que tomar  $g = e$ ). Esto ya termina la demostración, puesto que entonces:  $\Psi_U \circ \tau(x) = (x, f(x))$  y, como  $\Psi_U$  es regular y  $\tau$  también,  $f(x)$  también ha de serlo.  $\square$

## 5.7. Estudio de algunos casos particulares

### 5.7.1. La banda de Möbius

La banda de Möbius es un ejemplo muy ilustrativo para ver cómo un fibrado se corresponde con la noción intuitiva de un producto cartesiano “retorcido” (la palabra *twisted* se suele usar en los libros). Para tratar este ejemplo, se siguen las directrices de [18].

Para empezar, se comienza por definir la banda de Möbius como una subvariedad:

$$M = \{(e^{i\theta}, re^{i\theta/2}) : \theta \in [0, 2\pi], r \in [-1, 1]\} \subset S^1 \times \mathbb{C}$$

Para construir un fibrado a través de la banda de Möbius, se considera la proyección  $\pi : M \rightarrow S^1$  definida como  $\pi = pr_1|_M$ . La variedad base será  $S^1$ . El espacio total será  $M$  y la fibra general será el intervalo  $[-1, 1] = F$ . Visualmente, la representación sería la de la Figura 5.2:



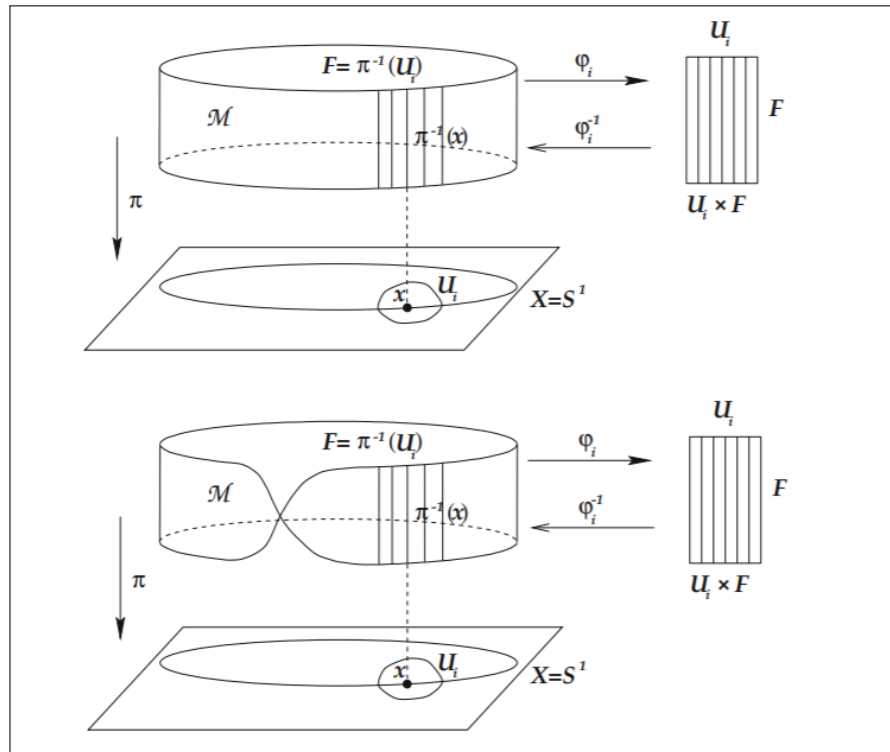


Figura 5.2: Dos fibrados con variedad base  $S^1$ . Arriba, el cilindro, un fibrado trivial, ya que es claramente difeomorfo a  $F \times S^1$ . Abajo, la banda de Möbius. Aunque se puede trivializar localmente, no admite una trivialización global. Esto es porque está, en cierto sentido, “retorcida”. En la figura, se muestra la aplicación de proyección  $\pi : M \rightarrow S^1$  y la fibra general  $F$ . Las  $(U_i, \varphi_i)$  representan las cartas del fibrado. Imagen extraída de [18].

La variedad base, se puede parametrizar por el ángulo  $\theta$  usando dos cartas. Los abiertos recubridores de estas dos cartas son:

$$U_1 = \{e^{i\theta} : -\epsilon < \theta < \pi + \epsilon\} \quad U_2 = \{e^{i\theta} : \pi - \epsilon < \theta < 2\pi + \epsilon\}$$

Si se calcula la preimagen por  $\pi$  de estos dos abiertos, se obtienen  $M_{U_1}$  y  $M_{U_2}$ . Para ver que hay una verdadera estructura de fibrado, se toma  $z \in S^1$ . Supóngase que  $z \in U_1$  (el caso de  $U_2$  sería análogo). Entonces, se quiere ver que existe un difeomorfismo:  $\phi_{U_1} : M_{U_1} \rightarrow U_1 \times F$ . Este difeomorfismo se puede construir así:

$$\begin{aligned} \phi_{U_1} : \quad M_{U_1} &\longrightarrow U_1 \times F \\ (e^{i\theta}, re^{i\theta/2}) &\mapsto (e^{i\theta}, r) \end{aligned}$$

Obsérvese que la primera componente de  $\phi_{U_1}$  no podía ser otra, si se pretendía que  $(pr_1 \circ \phi_{U_1})(e^{i\theta}, re^{i\theta/2}) = e^{i\theta} = \pi(e^{i\theta}, re^{i\theta/2}) = e^{i\theta}$ . Para construir la inversa de la anterior aplicación, uno podría pensar que vale con tomar:  $U_1 \times F \rightarrow M_{U_1} : (e^{i\theta}, r) \mapsto (e^{i\theta}, re^{i\theta/2})$ . Esto es tanto como escribir:  $U_1 \times F \rightarrow M_{U_1} : (z, r) \mapsto (z, r\sqrt{z})$ . Esta expresión es problemática ya que la raíz  $n$ -ésima de un número complejo no es una función bien definida (es multi-valuada). Esta inconveniencia queda salvada por el hecho de que se está restringiendo  $S^1$  a  $U_1$ . En efecto, dado un número complejo  $z = e^{i\theta}$ , hay dos raíces suyas, que son:  $z_1 = e^{i\theta/2}$  y  $z_2 = e^{i(\theta/2+\pi)}$ ,

ambas en  $S^1$ . La **primera siempre está en  $U_1$** , para cualquier  $z \in S^1$  y **la segunda de ellas siempre está en  $U_2$** , para cualquier  $z \in S^1$ . La cuestión es que, al restringirse  $\phi_{U_1}$  a  $M_{U_1}$ , la segunda posibilidad,  $z_2$ , queda descartada, por estar en  $U_2$ . Esto hace que la inversa esté bien definida y sea una función diferenciable.

Se pueden ahora calcular las funciones de transición en las regiones de solapamiento. Estas regiones son:

$$U_1 \cap U_2 = \{e^{i\theta} : \theta \in [-\epsilon, \epsilon]\} \cup \{e^{i\theta} : \theta \in [\pi - \epsilon, \pi + \epsilon]\} = I_R \cup I_L$$

Para calcular las funciones de transición, primero hay que ver quién es  $\phi_{U_2}$ . Para ello, hay que continuar con el razonamiento del párrafo anterior. Puesto que la raíz  $z_2$  siempre está en  $U_2$ ,  $\phi_{U_2}^{-1} : U_2 \times F \rightarrow M_{U_2} : (z, r) \mapsto (z, rz_2) = (z, -rz_1)$ , donde se ha usado que  $z_2 = -z_1$ . Pero para que esta sea  $\phi_{U_2}^{-1}$ , ha de ser:

$$\begin{aligned} \phi_{U_2} : \quad M_{U_2} &\longrightarrow U_2 \times F \\ (e^{i\theta}, re^{i\theta/2}) &\mapsto (e^{i\theta}, -r) \end{aligned}$$

Solo de este modo se consigue que:  $\phi_{U_2}^{-1} \circ \phi_{U_2}(e^{i\theta}, re^{i\theta/2}) = \phi_{U_2}^{-1}(e^{i\theta}, -r) = (e^{i\theta}, -r(-e^{i\theta/2})) = (e^{i\theta}, re^{i\theta/2})$ , dando la identidad como se esperaba.

Con esto, ya se pueden hallar las funciones de transición como:

$$\phi_{21} = \phi_{2z} \circ \phi_{1z}^{-1} = \begin{cases} (z, -r) & \text{si } z \in I_R \\ (z, r) & \text{si } z \in I_L \end{cases}$$

Este resultado se puede interpretar como el cambio de sentido que han adquirido las fibras al dar una vuelta a la banda. Si no hubiera aparecido ese cambio, se tendría un fibrado trivial.

### 5.7.2. El fibrado de Hopf

En esta sección se sigue [12],[14] y [11]. El objetivo es describir  $S^3$  (espacio total) como un fibrado principal con grupo  $U(1)$  (fibra general) y variedad base  $S^2$ .

Se parte de la esfera  $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\|^2 = 1\}$ . Si se identifica  $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ , se tiene que  $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ . Entonces, se define la **acción de Hopf** como:

$$\begin{aligned} \Psi : \quad S^3 \times U(1) &\longrightarrow S^3 \\ ((z_1, z_2), z) &\longrightarrow (z_1, z_2) \cdot z = (z_1 z, z_2 z) \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

Es trivial demostrar que  $\Psi$  es realmente una acción regular por la derecha.  $S^3$  se puede “imaginar” con una representación tridimensional del siguiente modo: Si se escribe  $z_1$  y  $z_2$  en forma polar, de manera que:  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  y  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , entonces se ve que  $|r_1|^2 + |r_2|^2 = 1$ , por lo que existirá un  $\phi \in [0, \pi]$  de tal modo que  $r_1 = \cos(\phi/2)$ ,  $r_2 = \sin(\phi/2)$  ( $\phi \in [0, \pi]$  para que  $r_1$  y  $r_2$  sean cantidades positivas). Entonces:

$$S^3 = \bigcup_{\phi \in [0, \pi]} T_\phi, \text{ con } T_\phi = \{(\cos(\phi/2)e^{i\theta_1}, \sin(\phi/2)e^{i\theta_2}) : \theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]\} \tag{5.7.2}$$

Para  $\phi$  fijo,  $T_\phi$  es un toro. A medida que  $\phi$  varía, se van obteniendo distintos toros, cuyo radio exterior es cada vez mayor a coste de su radio interior. Dado un punto  $p \in S^3$ , este ha de estar en alguno de los toros anteriores. Si  $p \in T_\phi$ , entonces su órbita por la acción del grupo también está contenida en  $T_\phi$ , claramente, ya que: si  $p = (\cos(\phi/2)e^{i\theta_1}, \sin(\phi/2)e^{i\theta_2})$ , dado  $z = e^{i\varphi}$ ,  $p \cdot z = (\cos(\phi/2)e^{i(\theta_1+\varphi)}, \sin(\phi/2)e^{i(\theta_2+\varphi)}) \in T_\phi$ . Se podría probar que, de hecho, estas órbitas son circunferencias máximas de la esfera en  $\mathbb{R}^4$ , o cortes planos del toro  $T_\phi$ , lo cual da lugar al dibujo que suele aparecer en los libros de textos sobre la fibración de Hopf (ver Figura 5.3).

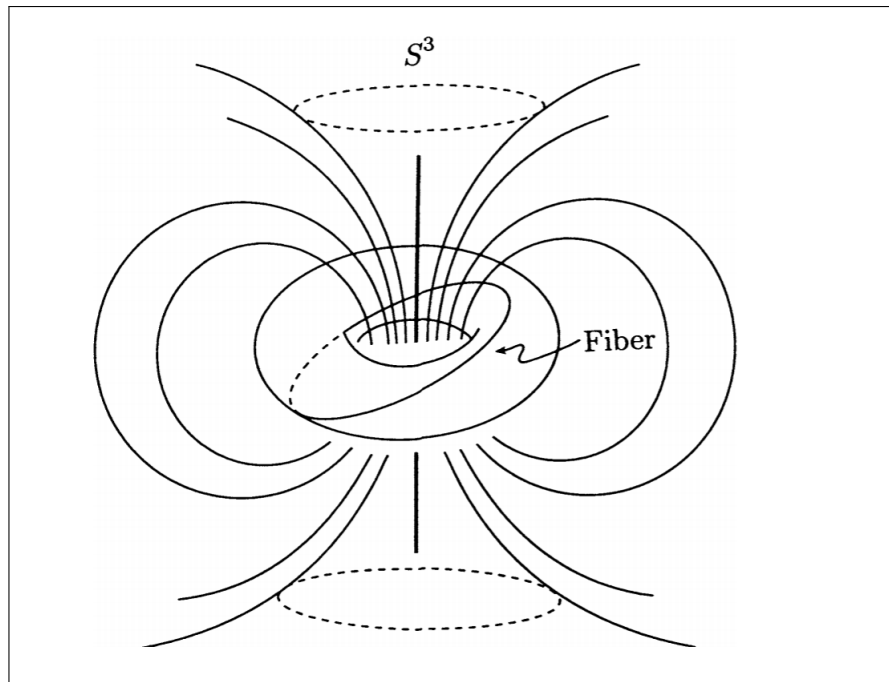


Figura 5.3: Representación pictórica de  $S^3$  como colección de toros. Las órbitas, que más tarde serán las fibras, son circunferencias máximas contenidas en un cierto toro. Imagen extraída de [11].

Por otro lado, la esfera  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 = 1\}$  se puede identificar con un subconjunto de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  tomando  $(x, y, z) \mapsto (\omega, s)$ . Entonces, habría que pedir que  $|\omega|^2 + s^2 = 1$ .

Se considera ahora:

$$\begin{array}{ccc}
 U(1) & \longrightarrow & S^3 \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & S^2
 \end{array}$$

donde  $h$  es la **aplicación de Hopf**, que está definido por:

$$\begin{aligned}
 \pi : \quad S^3 & \longrightarrow S^2 \\
 (z_1, z_2) & \mapsto (2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2)
 \end{aligned} \tag{5.7.3}$$

Para ver que verdaderamente  $h$  llega en la esfera, basta con comprobar que:  $|2z_1\bar{z}_2|^2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = 1$ , lo cual es un sencillo cálculo. Aunque esta es la forma conocida de la aplicación

de Hopf, este también puede escribirse usando las variables  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  como:

$$\begin{aligned} \pi : \quad S^3 &\longrightarrow S^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto (2(x^1x^3 + x^2x^4), 2(x^2x^3 - x^1x^4), x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) \end{aligned} \tag{5.7.4}$$

Para darle una estructura de  $U(1)$ -fibrado a  $S^3 \rightarrow S^2$ , hay que dar, para cada  $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ , un entorno abierto  $U$  de  $x$  y una aplicación  $\phi_U : S^3_U \rightarrow U \times U(1)$ . Esta aplicación ha de cumplir que  $pr_1 \circ \phi_U = \pi$ . Es decir, la primera componente de  $\phi_U$  debería ser  $\pi$ . La segunda componente ha de llegar sobre  $U(1)$ . El *ansatz* más sencillo sería tomar:  $\phi_U : S^3_U \rightarrow U \times U(1) : (z_1, z_2) \mapsto (\pi(z_1, z_2), z_1/|z_1|)$  o también podría valer  $\phi_U : S^3_U \rightarrow U \times U(1) : (z_1, z_2) \mapsto (\pi(z_1, z_2), z_2/|z_2|)$ . El problema es asegurar en qué abiertos  $z_1 \neq 0$  ó  $z_2 \neq 0$ . En [12], se usa la proyección estereográfica de la esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Aquí se va a hacer de manera directa, como en [16]. Si uno se fija en la ecuación 5.7.3, se ve que, cuando  $z_1$  ó  $z_2$  son cero, se obtiene un punto del eje  $Z$  en la esfera, luego ha de ser el Polo Norte o el Polo Sur. En particular, si  $z_2$  es 0, entonces para que  $(z_1, z_2) \in S^3$ , ha de ser  $|z_1|^2 = 1$ . Esto implica que  $\pi(z_1, 0) = (0, 1)$ , que es el polo Norte. Si  $z_1$  es 0, entonces,  $\pi(0, z_2) = (0, -1)$ , el polo Sur. Se toma un  $\epsilon > 0$ . Sean  $U_N = \{(z, s) \in S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} : s > -\epsilon\}$  y  $U_S = \{(z, s) \in S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} : s < \epsilon\}$ . Estos conjuntos se representan en la Figura 5.4.

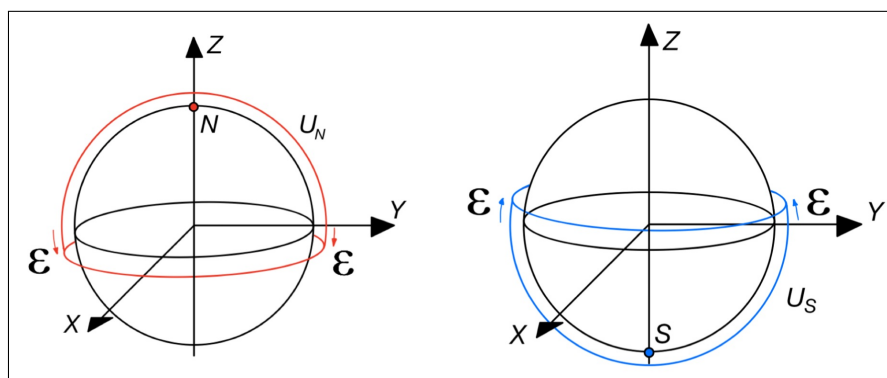


Figura 5.4: Recubrimiento de la esfera en dos abiertos:  $U_S$  y  $U_N$ . Obsérvese que hay un entorno del ecuador donde los dos se solapan.

$U_S$  y  $U_N$  forman un recubrimiento de  $S^2$ . Además,  $\pi^{-1}(U_N) \subset \{(z_1, z_2) \in S^3 : z_1 \neq 0\}$  y  $\pi^{-1}(U_S) \subset \{(z_1, z_2) \in S^3 : z_2 \neq 0\}$ . Por tanto, se pueden definir:

$$\begin{aligned} \phi_N : \quad S^3_{U_N} &\longrightarrow U_N \times U(1) \\ (z_1, z_2) &\mapsto (\pi(z_1, z_2), z_1/|z_1|) \end{aligned} \tag{5.7.5}$$

Y, para el abierto  $U_S$ :

$$\begin{aligned} \phi_S : \quad S^3_{U_S} &\longrightarrow U_S \times U(1) \\ (z_1, z_2) &\mapsto (\pi(z_1, z_2), z_2/|z_2|) \end{aligned} \tag{5.7.6}$$

Ambas son aplicaciones diferenciables. Su primera componente es una aplicación diferenciable, y la segunda es un cociente definido en un abierto adecuado de modo que el denominador

no se anule. Sus inversas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_N^{-1} : U_N \times U(1) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times U(1) &\longrightarrow S_{U_N}^3 \\ (u, s, \omega) &\mapsto \left( \omega \sqrt{\frac{s+1}{2}}, \frac{\bar{u}}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2(1+s)}} \right) \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

en el polo Norte y, para el polo Sur:

$$\begin{aligned} \phi_S^{-1} : U_S \times U(1) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times U(1) &\longrightarrow S_{U_S}^3 \\ (u, s, \omega) &\mapsto \left( \frac{u}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2(1-s)}}, \omega \sqrt{\frac{1-s}{2}} \right) \end{aligned} \quad (5.7.8)$$

Es fácil comprobar que estas son las inversas. Por ejemplo, para 5.7.8, basta con hallar  $\phi_S \circ \phi_S^{-1}(u, s, \omega)$ , y tener en cuenta las restricciones de que:  $(u, s, \omega) \in U_S \times U(1)$ . En particular, esto se traduce en que  $|\omega| = 1$  y en que  $|u|^2 + s^2 = 1 \Rightarrow |u|^2 = (1-s)(1+s)$ . Entonces:

$$\phi_S \circ \phi_S^{-1}(u, s, \omega) = \left( u, \frac{|u|^2}{2(1-s)} - \frac{1-s}{2}, \frac{\omega}{|\omega|} \right) = (u, s, \omega) \quad (5.7.9)$$

donde se ha usado, en el último igual, las condiciones de  $(u, s, \omega) \in U_S \times U(1)$  mencionadas con anterioridad.

Las inversas definidas en 5.7.7 y 5.7.8 son diferenciables en cada caso. Esto es porque  $\omega$  es de módulo 1 y, por tanto, nunca se anula, mientras que las raíces están definidas de modo que no se anulen en los abiertos en los que se trabaja. Esto concluye la demostración de que el fibrado de Hopf es efectivamente un fibrado principal con grupo  $U(1)$ . Se podrían calcular, para terminar, las funciones de transición. Se toma un  $(u, s)$  en la variedad base,  $S^2$  y se calcula  $\phi_{sn} := \phi_s \circ \phi_n^{-1}$ , donde  $\phi_s := \phi_{S,(u,s)}$  y  $\phi_n := \phi_{N,(u,s)}$ :

$$\phi_{sn}(u, s, \omega) = \left( (u, s), \frac{\bar{u}}{|u|} \omega \right) \quad (5.7.10)$$

Prescindiendo del punto  $(u, s)$ , es interesante observar que:

$$\phi_{sn}(\omega) = \frac{\bar{u}}{|u|} \omega = \mathcal{L}_{\frac{\bar{u}}{|u|}}(\omega) \quad (5.7.11)$$

y como  $\bar{u}/|u| \in U(1)$ , esto confirma el resultado 5.2.2.

### 5.7.3. El fibrado tangente

El fibrado tangente es el ejemplo prototipo de fibrado vectorial. Su definición es:  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ , la unión de todos los planos tangentes a la variedad. La proyección que se considera sobre el fibrado es:

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ v &\longrightarrow p \text{ tal que } v \in T_p M \end{aligned} \quad (5.7.12)$$

Para dotar a  $TM \xrightarrow{\pi} M$  de estructura de  $\mathbb{R}^n$ -fibrado vectorial (con  $n = \dim(M)$ ), se usará el Teorema 5.4.2. Para ello, se ha de construir una atlas formal del fibrado. Sea  $(U_i, \Psi_i)$  una carta local de la variedad base  $M$  y se considera:

$$\begin{aligned} T\Psi_i : (TM)_{U_i} &\longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^n \\ v \in T_p M &\mapsto (p = \pi(v), d_p \Psi_i(v)) \end{aligned} \tag{5.7.13}$$

hay que ver que esto da un atlas formal del fibrado. Es decir, hay que comprobar que se verifican:

1.  $T\Psi_i$  hay que ver que es biyección. En efecto, si  $(p, d_p \Psi_i(v)) = (p', d_{p'} \Psi_i(v'))$ , ello implica que  $p = p'$ , y como  $\Psi_i$  es un difeomorfismo, su diferencial es inyectiva luego  $v' = v$ . La sobreyectividad la hereda de sus componentes. También hay que ver que cumple  $pr_1 \circ \phi_U = \pi|_{E_U}$ , pero esto es trivial.
2. Hay que ver que las funciones de transición son compatibles de manera diferenciable:

$$\begin{aligned} \Psi_j \circ \Psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto (p = \pi(v), d_p(\Psi_j \circ \Psi_i^{-1})(v)) \end{aligned} \tag{5.7.14}$$

es claramente diferenciable por ser los  $\Psi_i$  difeomorfismos.

Esto prueba que lo anterior es un atlas formal del fibrado, luego el fibrado tangente es un fibrado vectorial.

# Capítulo 6

## Conexión y curvatura

En esta sección, se exponen los conceptos de conexión, curvatura y derivada covariante. Estos conceptos juegan un papel clave en las teorías gauge, en las que las interacciones se median por la acción de un potencial vectorial que, en este contexto, será una 1-forma de conexión. Estas 1-formas se pueden interpretar, una vez escogido un gauge, como funciones de un abierto de la variedad en un cierto espacio vectorial (un campo en el sentido usual). La fuerza de la interacción mediada por el campo vendrá codificada en una 2-forma de curvatura.

A lo largo de este capítulo, la convención será la de usar acciones por la derecha cuando se hable de fibrados principales.

### 6.1. Transformaciones de gauge

Se comienza por estudiar los distintos gauges que se pueden escoger en el fibrado y cómo están relacionado entre sí.

Se considerará, a lo largo de esta sección, un  $G$ -fibrado principal:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \pi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

**Definición 6.1.1 (transformación de gauge).** Una **transformación global de gauge** es un automorfismo de fibrados. Esto es, un difeomorfismo  $f : P \rightarrow P$  verificando:

1. Conserva las fibras de  $P$ . Esto es tanto como decir que:  $\pi \circ f = \pi$ .
2. Es  $G$ -equivariante. Es decir:  $f(p \cdot g) = f(p) \cdot g$ , para cada  $p \in P$  y  $g \in G$ .

**Observación 6.1.1.** Con la composición de difeomorfismos, el conjunto de todas las transformaciones de gauge forma un grupo, que se denota por  $Aut(P)$ . Las teorías físicas formuladas en el lenguaje de los gauges deberían ser invariantes por transformaciones de gauge, luego tendrían el grupo  $Aut(P)$  como grupo de simetrías.

Los automorfismos de fibrados son la forma en que los matemáticos se refieren a las transformaciones de gauge. Para un físico, la transformación de gauge es:

**Definición 6.1.2 (transformación de gauge física).** Una **transformación de gauge física** es una aplicación regular  $\tau : U \rightarrow G$  definido en un cierto subconjunto  $U \subset M$ . El conjunto de todas las transformaciones físicas de gauge forma un grupo con la multiplicación punto a punto, que es  $C^\infty(U, G)$ .



**Definición 6.1.3 (funciones  $G$ -valuadas).** Se denota por  $C^\infty(P, G)^G$  al conjunto:

$$C^\infty(P, G)^G = \{ \sigma : P \rightarrow G \text{ regular} : \sigma(p \cdot g) = c_{g^{-1}}(\sigma(p)) = g^{-1} \cdot \sigma(p) \cdot g \} \quad (6.1.1)$$

que tiene estructura de grupo con la multiplicación punto a punto:  $(\sigma' \cdot \sigma)(p) = \sigma'(p) \cdot \sigma(p)$ , donde la aplicación constantemente igual a  $e$  hace de elemento identidad.

**Proposición 6.1.4 (correspondencia entre automorfismos de fibrados y funciones  $G$ -valuadas).** La aplicación:

$$\begin{aligned} \text{Aut}(P) &\longrightarrow C^\infty(P, G)^G \\ f &\longrightarrow \sigma_f \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

con  $\sigma(f)$  definida como  $f(p) = p \cdot \sigma_f(p)$ ,  $\forall p \in P$  es un isomorfismo de grupos. Entonces, se puede identificar  $\text{Aut}(P)$  con  $C^\infty(P, G)^G$ .



Las transformaciones de gauge y las transformaciones de gauge físicas están estrechamente relacionadas:

**Proposición 6.1.5 (las transformaciones de gauge físicas definen automorfismos de fibrados).** Sea  $s : U \rightarrow P$  una sección local (gauge). Entonces,  $s$  define un isomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} C^\infty(P_U, G)^G &\longrightarrow C^\infty(U, G) \\ \sigma &\longrightarrow \tau_\sigma = \sigma \circ s \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Cuya inversa viene dada por:

$$\begin{aligned} C^\infty(U, G) &\longrightarrow C^\infty(P_U, G)^G \\ \tau &\longrightarrow \sigma_\tau \end{aligned} \quad (6.1.4)$$



donde  $\sigma_\tau(s(x) \cdot g) = g^{-1} \cdot \tau(x) \cdot g$ , para cada  $x \in U$ ,  $g \in G$ .

*Demostración.* Sea  $\sigma \in C^\infty(P_U, G)^G$  y se toma  $\tau_\sigma = \sigma \circ s$ . Está claro que  $\tau_\sigma$  es regular, por ser composición de funciones regulares y va de  $U \xrightarrow{s} P_U \xrightarrow{\sigma} G$ . Recíprocamente, dada  $\tau \in C^\infty(U, G)$ , se toma  $\sigma_\tau$  tal que  $\sigma_\tau(s(x) \cdot g) = g^{-1} \cdot \tau(x) \cdot g$ . Hay que ver que esta está bien definida. Para ello:

$$\begin{array}{ccc} U \times G & & \\ \downarrow s(x) \cdot g & \searrow \sigma_\tau(s(x) \cdot g) = c_{g^{-1}}(\tau(x)) & \\ P & \xrightarrow{\sigma_\tau} & G \end{array}$$

Se usa el resultado 4.4.2. Para que este lema se pueda aplicar, hay que demostrar primero que la aplicación:  $U \times G \rightarrow P_U : (x, g) \rightarrow s(x) \cdot g$  es, al menos, una submersión sobreyectiva. Pero es que, de hecho, ya se demostró cuando se probó el 5.2.3, que esta aplicación (5.2.1) es un difeomorfismo. Por tanto, se puede aplicar el lema y se tiene que  $\sigma_\tau$  es regular por serlo  $c_{g^{-1}}(\tau(x))$ . Entonces, para terminar la demostración, habría que ver que  $\sigma_\tau(p \cdot g) = c_{g^{-1}}(\sigma_\tau(p))$ . Para ello, se toma un  $p \in P_U$ . Sea  $x = \pi(p)$ . Entonces,  $p = s(x)$ . Por tanto,  $\sigma_\tau(p \cdot g) = \sigma_\tau(s(x) \cdot g) = c_{g^{-1}}(\tau(x)) = c_{g^{-1}}(\tau(\pi(p)))$ . Como  $\tau_\sigma(\pi(p)) = \sigma(s(\pi(p))) = \sigma(p)$ , se deduce que:  $\sigma_\tau(p \cdot g) = c_{g^{-1}}(\tau(\pi(p))) = c_{g^{-1}}(\sigma_\tau(p))$ , como se quería ver.  $\square$

**Observación 6.1.2.** El resultado anterior, combinado con la Proposición 6.1.4, aseguran que, una vez fijado un gauge, hay una correspondencia biunívoca entre transformaciones de gauge matemáticas (vistas como automorfismos de fibrados) y transformaciones de gauge físicas (vistas como aplicaciones regulares de un abierto de la variedad base sobre el grupo  $G$ ).

## 6.2. 1-formas de conexión

Se considera un  $G$ -fibrado principal:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

**Recordatorio 6.2.1.** Dada una variedad  $M$ , se definen las formas de grado  $k$  como aplicaciones multilineales y alternadas:  $A : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ , donde  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  o simplemente  $C^\infty(M)$  son las funciones  $\mathbb{R}$ -valuadas diferenciables definidas sobre la variedad  $M$ . El espacio vectorial de  $k$ -formas se denota  $\Omega^k(M)$ . Aparte de las  $k$ -formas en el sentido usual, existen las  $k$ -formas con valores en un espacio vectorial  $W$ , que no son más que aplicaciones:  $A : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, W)$  multilineales y alternadas, que se denotan por  $\Omega^k(M, W)$ . Fijado un  $p \in M$ , estas formas se pueden interpretar como aplicaciones  $A_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow W$ .

**Definición 6.2.1 (1- formas de conexión).** Una **1-forma de conexión**, o simplemente una **conexión** para el  $G$ -fibrado principal anterior es una 1-forma  $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  verificando:

1.  $(r_g)_*A = Ad_{g^{-1}} \circ A$ , para cada  $g \in G$ .
2.  $A(\tilde{X}) = X$ , para cada  $X \in \mathfrak{g}$ , siendo  $\tilde{X}$  el campo vectorial fundamental asociado a  $X$  (ver la Definición 4.2.1).

Una conexión también se denomina **campo gauge** sobre  $P$ .

**Observación 6.2.1.** En cada punto  $p \in P$ , la 1-forma con valores en  $\mathfrak{g}$  se puede interpretar como una aplicación lineal:  $A_p : T_pM \rightarrow \mathfrak{g}$ . Por eso, como  $Ad_{g^{-1}}$  actúa sobre  $\mathfrak{g}$  tiene sentido la condición 1.

Si se quiere poder interpretar la 1-forma como un verdadero campo sobre la variedad base, hay que aplicarle un *pull-back* de manera que se pueda ver como una 1-forma sobre la misma. Como el *pull-back* de una cierta función va en sentido contrario al de la función, para traer la 1-forma a la variedad base, hay que usar una función  $s : U \rightarrow P$ . Es decir, una sección local (gauge local) del fibrado.

**Definición 6.2.2 (1- formas de conexión locales).** Sea  $s : U \rightarrow P$  un gauge local del fibrado principal definido sobre un cierto abierto  $U \subset M$ . Una **1-forma local de conexión** (o **campo de gauge local**)  $A_s \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$  es una 1-forma en la variedad base con valores en el álgebra de Lie del grupo definida por:

$$A_s = s^*A \quad (6.2.1)$$

Dada una carta de la variedad  $(U, \phi)$  y  $\{\partial_\mu\}_{\mu=1, \dots, n}$  una sistema local de coordenadas en torno a  $U$ , si se define  $A_\mu = A_s(\partial_\mu)$ , se puede expandir:

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{\dim(\mathfrak{g})} A_\mu^a e_a \quad (6.2.2)$$

siendo  $\{e_a\}$  una base del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Los campos  $A_\mu^a \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  son funciones reales que se suelen denominar **campos de gauge bosónicos locales**.



Está claro, de la definición anterior, que la expresión de un campo de gauge local depende fuertemente del gauge escogido. Para determinar cómo cambia una conexión al cambiar de gauge, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 6.2.3 (transformaciones de un campo de gauge local al cambiar el gauge).** Sean  $s_i : U_i \rightarrow P$  y  $s_j : U_j \rightarrow P$  dos gauges locales, con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Se considera una 1-forma de conexión  $A$  y las 1-formas de conexión locales asociadas con los gauges:  $A_i = s_i^*A$ ,  $i = 1, 2$ . Sea también  $\mu_G(v) = (\mathcal{L}_{g^{-1}})_*(v)$ ,  $v \in T_pG$  la forma de Maurer-Cartan. Entonces:

1. Existe una función regular  $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  (una **transformación de gauge**

física) tal que:

$$s_i(x) = s_j(x) \cdot g_{ji}(x), \quad \forall x \in U_i \cap U_j \quad (6.2.3)$$

2. Si se denota  $\mu_{ji} = g_{ji}^* \mu_G \in \Omega^1(U_i \cap U_j, \mathfrak{g})$ , se tiene que, los campos de gauge locales transforman de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$A_i = Ad_{g_{ji}^{-1}} \circ A_j + \mu_{ji} \quad (6.2.4)$$

*Demostración.* La prueba se hace por apartados:

1. Por el Teorema 5.2.3, se tiene que las secciones locales definen cartas del fibrado, dadas por la ecuación 5.2.1, que se denotarán:

$$\begin{aligned} g_i^{-1} : U_i \times G &\longrightarrow P_{U_i} \\ (x, g) &\longrightarrow s_i(x) \cdot g \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Entonces,  $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G : x \mapsto g_{jx} \circ g_{ix}^{-1}(e) =: g_{ji}(x)$ . Ahora, sea  $x \in U_i \cap U_j$  arbitrario. Se calcula:  $s_j(x) \cdot g_{ji}(x) \stackrel{\text{por 6.2.5}}{=} s_j(x) \cdot g_j(s_i(x) \cdot e) \stackrel{\text{por 6.2.5}}{=} g_j(g_j(s_i(x))) = s_i(x)$ .

2. Recuérdense que:  $A_i : T_x(U_i \cap U_j) = T_x M \rightarrow \mathfrak{g}$ . Se toma  $x \in U_i \cap U_j$ , y  $Z \in T_x M$ . El objetivo es comparar  $A_i(Z)$  con  $A_j(Z)$ . Para ello, sea:  $X = d_x s_j(Z) \in T_{s_j(x)} P$ . Obsérvese que, por el apartado anterior, si  $\Phi$  denota la acción de grupo:  $\Phi : P \times G \rightarrow P : (p, g) \mapsto p \cdot g$ , se tiene que:  $s_i = \Phi \circ (s_j, g_{ji})$ , por lo que se puede calcular la diferencial de  $s_i$  usando la regla de la cadena y la Proposición 4.3.3. Esto da:

$$\begin{aligned} d_x s_j(Z) &= d_x(\Phi \circ (s_j, g_{ji}))(Z) = d_{s_j(x)} r_{g_{ji}(x)}(d_x s_j(Z)) + \widetilde{\mu}_G(d_x g_{ji}(Z))_{s_i(x)} = \\ &= d_{s_j(x)} r_{g_{ji}(x)}(X) + \widetilde{\mu_{ji}}(Z)_{s_i(x)} \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Por tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} A_i(Z) &= A \left( d_{s_j(x)} r_{g_{ji}(x)}(X) + \widetilde{\mu_{ji}}(Z)_{s_i(x)} \right) \stackrel{\text{linealidad}}{=} A \left( d_{s_j(x)} r_{g_{ji}(x)}(X) \right) + A \left( \widetilde{\mu_{ji}}(Z)_{s_i(x)} \right) = \\ &= A \left( (r_{g_{ji}})_*(X) \right) + A \left( \widetilde{\mu_{ji}}(Z)_{s_i(x)} \right) \stackrel{\text{por 6.2.1}}{=} Ad_{g_{ji}^{-1}} \circ A_j(Z) + \mu_{ji}(Z) \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

□

**Observación 6.2.2.** En el caso de que  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$  sea un grupo de matrices, se tiene que:  $A_i = g_{ji}^{-1} \cdot A_j \cdot g_{ji} + g_{ji}^{-1} \cdot dg_{ji}$ , donde  $g_{ji}$  es una matriz,  $g_{ji}^{-1}$  denotaría su inversa en el sentido usual y  $dg_{ji}$  es la derivada componente a componente de la matriz. Esto ocurre porque la forma de Maurer-Cartan es  $\mu_{ji}(Z) = \mu_G(d_x g_{ji}(Z)) = g_{ji}^{-1} \cdot dg_{ji}(Z)$ . Para ver esta última igualdad, basta con darse cuenta de que la forma de Maurer-Cartan no es más que la multiplicación por la izquierda en el caso de grupos de matrices:  $\mu_G(v) = (\mathcal{L}_{g^{-1}})_*(v) = g^{-1} \cdot v$ ,  $\forall v \in T_g G$ . En la literatura física, la transformación de gauge se suele encontrar escrita así:  $A'_\mu = G^{-1} A_\mu G + G^{-1} \partial_\mu G$ .

### 6.3. Distribuciones del fibrado tangente

Como siempre, sea:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \pi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

un  $G$ -fibrado principal.

**Definición 6.3.1 (espacio vertical y horizontal).** El **espacio vertical**  $V_p$  del espacio total  $P$  en el punto  $p \in P$  es el espacio tangente a la fibra  $T_p(P_x)$ , con  $p \in P_x$ . Un **espacio horizontal**  $H_p$  del espacio  $P$  en el punto  $p \in P$  sería un subespacio de  $T_pP$  complementario al espacio vertical:  $T_pP = V_p \oplus H_p$ .

La unión de todos los espacios verticales en distintos puntos del espacio total es un subfibrado del fibrado tangente. A los subfibrados de  $TM$  se les llama **distribuciones**:

**Proposición 6.3.2 (conexiones, espacios verticales y horizontales).** Los espacios verticales y horizontales verifican:

1.  $V_p = \ker(d_p\pi)$ .
2. La aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \phi_* : \mathfrak{g} & \longrightarrow & V_p \\ X & \longrightarrow & \tilde{X}_P \end{array} \quad (6.3.1)$$

es un **isomorfismo de espacios vectoriales**.

3. El conjunto de todos los espacios verticales  $V_p$ , cuando  $p$  recorre el espacio total forma una distribución en  $P$ , que se llama **fibrado vertical**  $V$ . La dimensión de cada fibra es la dimensión de  $G$ . Además, la distribución admite una trivialización global (es un fibrado trivial) dada por:

$$\begin{array}{ccc} P \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & V \\ (p, X) & \longrightarrow & \tilde{X}_P \end{array} \quad (6.3.2)$$

4. El fibrado es **invariante por la derecha**. Es decir:  $(r_g)_*(V_p) = V_{p \cdot g}, \forall g \in G$ .
5. Si  $A$  es una conexión, entonces  $H_p = \ker(A_p)$  es un espacio horizontal.
6. Si  $H_p$  es el espacio horizontal definido como en el apartado anterior, entonces  $H_p$  verifica:  $(r_g)_*(H_p) = H_{p \cdot g}, \forall p \in P, g \in G$ .

*Demostración.* Se demuestran uno a uno:

1. Como  $\pi$  es constante en cada fibra, está claro que  $V_p \subset \ker(d_p\pi)$ . Además, como  $\pi$  es una submersión sobreyectiva,  $d_p\pi : T_pP \rightarrow T_{\pi(p)}(M)$  es una aplicación sobreyectiva. Por el teorema de la dimensión:  $\dim(M) + \dim(\ker(d_p\pi)) = \dim(T_pP)$ . En particular, como  $\dim(T_pP) \stackrel{\phi \text{ es dif.}}{=} \dim(T_{\phi(p)}(U \times F)) = \dim(M) + \dim(F)$ , y como cada fibra es difeomorfa a la fibra general,  $\dim(F) = \dim(P_x)$ , se tiene que:  $\dim(\ker(d_p\pi)) = \dim(T_pP) - \dim(M) = \dim(F) = \dim(P_x)$ , luego  $V_p$  es un espacio vectorial contenido en  $\ker(d_p\pi)$  y con la misma dimensión  $\Rightarrow V_p = \ker(d_p\pi)$
2. Basta con usar el hecho de que  $\phi_*$  es inyectiva por 4.2.2. Como la acción se restringe a las fibras,  $\phi_x : P_xG \rightarrow P_x$  es también una acción regular y libre. Por el resultado anterior,  $(\phi_x)_* : \mathfrak{g} \rightarrow V_p : X \mapsto \tilde{X}_p$  es una aplicación inyectiva también. Como las dimensiones concuerdan, ha de ser un isomorfismo de espacios vectoriales.
3. Se quiere probar que:  $\mathfrak{g} \rightarrow V \xrightarrow{\pi_V} P$  es un subfibrado del fibrado tangente (ver 5.5.4). Se denota  $\mathbb{R}^n \rightarrow TP \xrightarrow{\pi_{TP}} P$  al fibrado tangente a  $P$ , que se supone que es de rango  $n$  (la dimensión de  $P$  como variedad). Hay que ver que, para cada punto  $p \in P$ , existe una carta del fibrado entorno a  $p$ :  $(U, \phi)$  tal que:  $\phi(TP_U \cap V) = U \times \mathbb{R}^k$ , siendo  $k$  la dimensión de  $\mathfrak{g}$ . Las cartas del fibrado tangente son las de la ecuación 5.7.13. Si se restringen estas cartas a  $V$  se tiene que  $d_p\Psi_i|_{V_p}(v_1) \in \mathbb{R}^k$  trivialmente. Por tanto, se cumple la condición de subfibrado.  
Además, la aplicación dada por la ecuación 6.3.2, restringida a cada fibra, es un isomorfismo por el apartado anterior. Por tanto, 6.3.2 es un isomorfismo de fibrados entre el fibrado  $\mathfrak{g} \rightarrow V \xrightarrow{\pi_V} P$  y el fibrado trivial  $\mathfrak{g} \rightarrow P \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi_1} P$ .
4.  $V_p \cong \mathfrak{g}$  como se ha visto en el apartado 2. Entonces, dado  $v \in V_p$ , existe un único campo fundamental  $X \in \mathfrak{g}$  tal que  $\tilde{X}_p = v_p$ . Usando la Proposición 4.2.4, se tiene que  $(r_g)_*(\tilde{X}) = \tilde{Y}$ , donde  $Y = Ad_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{g}$ . Esto es tanto como:  $(r_g)_*(\tilde{X})_{p \cdot g} = d_p r_g(\tilde{X}_p) = (r_g)_*(\tilde{X}_p)$ . Es decir:  $(r_g)_*(\tilde{X}_p) = \tilde{Y}_{p \cdot g}$ , y como  $\tilde{X}_p \in V_p$  y  $\tilde{Y}_{p \cdot g} \in V_{p \cdot g}$ , se deduce que:  $(r_g)_*(V_p) = V_{p \cdot g}$ .
5. Es bastante técnico de probar, la demostración está en [6].
6. Basta con tomar  $v \in H_p$ . Entonces,  $A_{p \cdot g}((r_g)_*(v)) = (r_g^*A)_p(v) = Ad_{g^{-1}}(A_p(v)) = 0$ . En la penúltima igualdad se ha usado el hecho de que  $A$  es una 1-forma de conexión. El caso es que, como todo son igualdades, está claro que se tiene contención en ambos sentidos. Es decir:  $(r_g)_*(H_p) = H_{p \cdot g}$ .

□

**Observación 6.3.1.** Los subfibrados horizontales  $H = \bigcup_{p \in P} H_p$  del fibrado tangente cumpliendo  $(r_g)_*(H_p) = H_{p \cdot g}$ ,  $\forall p \in P, g \in G$  se llaman **conexiones de Ehresmann**. El último apartado del resultado anterior liga las conexiones con los espacios horizontales. De hecho, se puede probar que es recíproco: los fibrados horizontales cumpliendo ciertas propiedades (conexiones de Ehresmann) dan conexiones en el sentido de la definición 6.2.1.

## 6.4. 2-formas de curvatura

Sea  $A$  una 1-forma de conexión:  $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ . Sea  $H$  el espacio vertical asociado con la conexión (dado por el núcleo de la misma, según la Proposición 6.3.2. Se denota  $\pi_H : TP \rightarrow H$  a la proyección sobre el fibrado horizontal. Aplicando la diferencial exterior sobre la 1-forma de conexión, se obtiene la 2-forma de curvatura:

**Definición 6.4.1 (2-forma de curvatura).** En las condiciones especificadas anteriormente, se define la 2-forma de curvatura asociada con la conexión  $A$ ,  $F \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$  como:

$$F(X, Y) = dA(\pi_H(X), \pi_H(Y)), \forall X, Y \in T_p P, p \in P \quad (6.4.1)$$

**Observación 6.4.1.** La diferencial exterior que se ha escrito arriba tiene sentido para  $k$ -formas  $V$ -valuadas (véase, por ejemplo, [9], sección 8.4) En general, dada una  $k$ -forma  $V$ -valuada  $\omega \in \Omega^k(U, V)$ , se tiene que  $\omega$  se puede expandir en la base  $v_1, \dots, v_r$  de  $V$  como  $\omega_p = \omega_p^\mu e_\mu$  (usando el convenio de sumación de Einstein). Entonces, se puede interpretar la diferencial exterior de  $\omega$  como la  $k$ -forma  $V$ -valuada cuyas  $r$  componentes son las diferenciales de las  $r$   $k$ -formas:  $d\omega = (d\omega^\mu)e_\mu$ .



Al igual que ocurría con la conexión, la 2-forma de curvatura transforma a través de  $Ad$  cuando se le aplica el *pull-back* de una multiplicación por la derecha:

**Proposición 6.4.2 (pull-back de transformaciones por la derecha sobre la curvatura).** La 2-forma de curvatura  $F$ , definida con anterioridad, verifica la siguiente identidad:

$$r_g^* F = Ad_{g^{-1}} \circ F, \forall g \in G \quad (6.4.2)$$

*Demostración.* No hay más que aplicar el *pull-back* y usar el hecho de que los espacios horizontales y verticales son invariantes por el mismo (los espacios verticales lo son por el cuarto punto de la Proposición 6.3.2, mientras que los espacios horizontales lo son por el sexto). Entonces, como  $T_p M = V_p \oplus H_p$ , se deduce que, dado  $v = v_1 \oplus v_2 \in T_p M$ , con  $v_1 \in H_p$ ,  $v_2 \in V_p \Rightarrow \pi_H \circ (r_g)_*(v_1 + v_2) = \pi_H((r_g)_*(v_1)) = (r_g)_*(v_1) = (r_g)_*(\pi_H(v_1)) \Rightarrow \pi_H \circ r_{g*} = r_{g*} \circ \pi_H$ . Por tanto, si se toman  $X, Y \in T_p P$ :  $(r_g^* F)_p(X, Y) = dA(\pi_H(r_{g*}(X)), \pi_H(r_{g*}(Y))) = (r_g^* dA)(\pi_H(X), \pi_H(Y))$ . Ahora se usa que la diferencial exterior y el *pull-back* conmutan y la definición de conexión y se obtiene:  $d(Ad_{g^{-1}} \circ A)(\pi_H(X), \pi_H(Y)) = d((c_{g^{-1}})_* \circ A)(\pi_H(X), \pi_H(Y)) = Ad_{g^{-1}} \circ F(X, Y)$  (la diferencial exterior conmuta con el *pull-back*).  $\square$



**Definición 6.4.3 (corchete de formas).** Sea  $\eta \in \Omega^k(P, \mathfrak{g})$  y  $\phi \in \Omega^l(P, \mathfrak{g})$ . Se define el **corchete de las formas** como:

$$[\eta, \phi](X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) [\eta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}), \phi(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})] \quad (6.4.3)$$

El conmutador también se encuentra en la literatura denotado como  $\eta \wedge \phi$  o  $[\eta \wedge \phi]$ .

La expresión que se suele emplear en física para la curvatura no es 6.4.1, sino  $F = dA + (1/2)A \wedge A$ , siendo  $A \wedge A = [A, A]$ . Para demostrar esta expresión, hay que introducir algunos lemas técnicos:

**Lema 6.4.4.** Sea  $M$  una variedad diferenciable y sean  $X$  e  $Y$  dos campos de vectores en  $\mathfrak{X}(M)$ . Se denota por  $\gamma_t$  al flujo de  $X$  a través del punto  $p \in M$  (véase 2.6.9). Entonces:

$$[X, Y]_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma_{-t})_* Y_{\gamma_t(p)} \quad (6.4.4)$$

**Lema 6.4.5.** Sea  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Sean  $X_0, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, X_1, \dots, X_k) &= \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) + \\ &+ \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

donde  $\widehat{X}_i$  denota que se extrae la componente  $i$ -ésima.

La prueba de estos lemas se pueden encontrar en [9] (pág. 105 y pág. 366) y son bastante técnicas (y necesitan, a su vez, lemas previos) por lo que no se detallarán aquí.

**Teorema 6.4.6 (ecuación de estructura).** La curvatura  $F$  asociada a la conexión  $A$  verifica la ecuación:

$$F = dA + \frac{1}{2}[A, A] \quad (6.4.6)$$

*Demostración.* La demostración se hace calculando  $F(X, Y)$  y  $(dA + \frac{1}{2}[A, A])(X, Y)$ , para  $X, Y \in T_p P$ . Obsérvese primero que, por el 6.4.4, se tiene que, «si  $X = \widetilde{V}$  es un campo fundamental e  $Y$  es un campo horizontal en  $P$ , entonces el conmutador  $[X, Y]$  es horizontal» (se denotará esta propiedad con  $[\star]$  a lo largo de la demostración). Esto se debe a que, como  $\widetilde{V}_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (r_{\exp(tV)}(p))$ , entonces  $\gamma_t = r_{\exp(tV)}$  es flujo de  $V$ . Usando el lema, se deduce que:  $[X, Y] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((r_{\exp(-tV)})_* (Y_{\gamma_t(p)}))$ . Pero, como ya se sabe de 6.3.2, el *pull-back* de las multiplicaciones por la derecha conserva el espacio horizontal. Es decir, que el anterior vector sigue estando en el espacio horizontal como quería verse.

Hay que diferenciar varios casos:

1. Si  $X$  e  $Y$  son ambos vectores del espacio vertical. Entonces, por 6.3.2, existen  $V, W \in \mathfrak{g}$  tales que:  $X = \widetilde{V}_p$  e  $Y = \widetilde{W}_p$ . Como los vectores están en el espacio vertical,  $\pi_H(X) = \pi_H(Y) = 0$ , luego  $F(X, Y) = 0$ . Por otro lado,

$$\frac{1}{2}[A, A](X, Y) = \frac{1}{2}([A(X), A(Y)] - [A(Y), A(X)]) = [A(X), A(Y)] = [V, W] \quad (6.4.7)$$

en la última igualdad se ha usado la definición de conexión 6.2.1. Si se prueba que  $dA(X, Y) = -[V, W]$ , ya se acabaría, pues se tendría que ambos lados de la ecuación que se quiere probar son 0. Para demostrar esto último, se usará 6.4.5. En el caso de 1-formas como  $A$ , toma una expresión más sencilla:

$$dA(X, Y) = X(A(Y)) - Y(A(X)) - A([X, Y]) \tag{6.4.8}$$

donde, en la ecuación anterior, se entiende que  $X$  e  $Y$  son un campo que extiende a  $X$  y a  $Y$  en el punto  $p$ . Por ejemplo, los campos fundamentales valen. Entonces, sustituyendo  $X = \tilde{V}$ ,  $Y = \tilde{W}$ , se obtiene:

$$dA(X, Y) = \tilde{V}(W) - \tilde{W}(V) - A([\tilde{V}, \tilde{W}]) \tag{6.4.9}$$

$\tilde{V}(W)$  es una derivación. Dada  $f \in C^\infty(P)$ , se tiene que  $W(f)$  es un valor real, constante porque  $W$  es un vector de  $T_eG$ . Entonces, si se vuelve a derivar  $W(f)$  usando  $\tilde{V}$ , se obtiene 0. Es decir, la ecuación anterior se reduce a  $-A([\tilde{V}, \tilde{W}])$ . Usando ahora 4.2.3, se tiene que lo anterior es:  $-A(\widetilde{[V, W]}) = -[V, W]$ , por la definición de conexión.

2. Tanto  $X$  como  $Y$  son horizontales. En ese caso,  $F(X, Y) = dA(X, Y)$ . Por otro lado:

$$\frac{1}{2}[A, A](X, Y) = [A(X), A(Y)] = [0, 0] = 0 \tag{6.4.10}$$

donde se ha usado el quinto punto de 6.3.2.

3. Si  $X$  es vertical e  $Y$  es horizontal, entonces  $X = \tilde{V}_p$ , para algún  $V \in \mathfrak{g}$ , y por tanto:  $F(X, Y) = dA(\pi_H(X), \pi_H(Y)) = dA(0, Y) \stackrel{\text{por 6.4.8}}{=} 0$ . También,  $\frac{1}{2}[A, A](X, Y) = [A(X), A(Y)] = [V, 0] = 0$ . Por último:

$$dA(X, Y) = \tilde{V}(A(Y)) - Y(V) - A([\tilde{V}, Y]) = 0 \tag{6.4.11}$$

donde se ha usado, término a término: que  $Y$  es horizontal, luego  $A(Y) = 0$ , que  $V$  es una aplicación constante (como en la demostración del primer apartado) luego al derivar con  $Y$  da 0 y que, por la propiedad  $[\star]$ ,  $[\tilde{V}, Y]$  era horizontal, luego al evaluarlo con  $A$  da 0.

□



La ecuación de estructura pone en manifiesto que, en general, la curvatura no es una forma exacta. Consecuentemente, su diferencial exterior no siempre será 0. No obstante, se tiene que:

**Proposición 6.4.7 (identidad de Bianchi).** La diferencial de la curvatura  $dF$  es 0 en  $H \times H \times H$ .



*Demostración.* Basta con aplicar la diferencial exterior sobre la ecuación de estructura:  $dF = \frac{1}{2}d[A, A]$ . Ahora, se denota  $\omega = \frac{1}{2}d[A, A]$  y se usa el 6.4.5. Esta expresión, para el caso concreto de 2-formas, es así:

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X) \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

Si  $V \in H$ , entonces:  $\omega(\cdot, V) = \omega(V, \cdot) = (1/2)[A, A](\cdot, V) = [A(\cdot), A(V)] = 0$ . Es decir, todos los términos de 6.4 son 0, luego  $d\omega(X, Y, Z) = 0$  en  $H \times H \times H$ .  $\square$



En física, en general, se suele usar la **forma local de la curvatura**:

**Definición 6.4.8 (2-forma local de curvatura).** Sea  $A$  una 1-forma de conexión en el fibrado principal,  $F$  su 2-forma de curvatura asociada y  $s : U \rightarrow P$  una elección de gauge local. Entonces, la **2-forma local de curvatura**  $F_s \in \Omega^2(U, \mathfrak{g})$ , definida por:

$$F_s = s^*F \quad (6.4.13)$$

Dada una carta  $(U, \phi)$  de la variedad base  $M$  en torno al punto  $p$  y  $\{\partial_\mu\}_\mu$  una base de  $T_pM$ , se define:  $F_{\mu\nu} = F_s(\partial_\mu, \partial_\nu)$ .

En forma local, la ecuación de estructura toma una forma familiar en física:

**Proposición 6.4.9 (ecuación de estructura).** La curvatura local verifica:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (6.4.14)$$

*Demostración.* La ecuación de estructura es  $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ . Entonces, aplicando el *pull-back* por  $s$ :

$$s^*F = s^*dA + \frac{1}{2}s^*[A, A] = d(s^*A) + \frac{1}{2}[s^*A, s^*A] = dA_s + \frac{1}{2}[A_s, A_s] \quad (6.4.15)$$

donde se ha utilizado que  $(s^*[A, A])(X, Y) = [s^*A, s^*A](X, Y)$ . Para demostrar esto, se usa la definición:

$$(s^*[A, A])(X, Y) = [A, A](s_*X, s_*Y) \stackrel{def.}{=} [A(s_*X), A(s_*Y)] \stackrel{def.}{=} [s^*A, s^*A](X, Y) \quad (6.4.16)$$

Entonces, tomando coordenadas en la ecuación 6.4.15, se obtiene:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= dA_s(\partial_\mu, \partial_\nu) + \frac{1}{2}[A_s, A_s](\partial_\mu, \partial_\nu) \stackrel{ec.6.4.8}{=} \partial_\mu dA_s(\partial_\nu) - \partial_\nu dA_s(\partial_\mu) - A_s[\partial_\mu, \partial_\nu] + [A_s(\partial_\mu), A_s(\partial_\nu)] = \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

$\square$



Se puede ver que la 2-forma de curvatura transforma de la siguiente manera bajo una transformación de gauge física (ver [6] sección 5.6):

**Teorema 6.4.10 (transformaciones de la 2-forma de curvatura al cambiar el gauge).** Sean  $s_i : U_i \rightarrow P$  y  $s_j : U_j \rightarrow P$  dos gauges locales, con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Sea una 1-forma de conexión  $A$ ,  $F$  su 2-forma de curvatura asociada y los *pull-back* de las 2-formas por los distintos gauges:  $F_i = s_i^* F$ ,  $i = 1, 2$ . Sea  $\mu_G(v) = (\mathcal{L}_{g^{-1}})_*(v)$ ,  $v \in T_p G$  la forma de Maurer-Cartan, y  $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  la transformación de gauge física que liga  $s_i$  y  $s_j$  por la ecuación 6.2.3. Entonces, las curvaturas locales transforman de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$F_i = Ad_{g_{ji}^{-1}} \circ F_j \quad (6.4.18)$$

## 6.5. Derivada covariante

Para definir una derivada covariante, primero hay que introducir el concepto de transporte paralelo. Como siempre, se considera:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \pi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

un  $G$ -fibrado principal. También se supone que se tiene especificada una determinada 1-forma de conexión  $A$  en el fibrado. Esto es esencial, ya que la 1-forma fija un fibrado horizontal, que es el que se usa para elevar curvas:

**Definición 6.5.1 (elevación horizontal).** Sea  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva sobre la variedad base. Una **elevación horizontal** de  $\gamma$  es una curva  $\gamma^* : I \rightarrow P$  verificando  $\pi \circ \gamma^* = \gamma$  y  $\dot{\gamma}^*(t) \in H_{\gamma^*(t)} \forall t \in I$ .

**Proposición 6.5.2 (existencia y unicidad de las elevaciones horizontales).** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva sobre la variedad base con  $\gamma(a) = x$ . Sea  $p \in P_x$ . Entonces, existe una única elevación horizontal  $\gamma_p^*$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma_p^*(a) = p$ .

**Definición 6.5.3 (transporte paralelo).** Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva sobre la variedad base. La aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \tau_\gamma : P_{\gamma(a)} & \longrightarrow & P_{\gamma(b)} \\ p & \longrightarrow & \gamma_p^*(b) \end{array} \quad (6.5.1)$$

se llama **transporte paralelo en el fibrado principal** a lo largo de la curva  $\gamma$  y asociado a la conexión  $A$ .

**Proposición 6.5.4 (propiedades del transporte paralelo).** El transporte paralelo a través de la curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  asociado a la conexión  $A$  verifica:

1. Es una aplicación regular entre las fibras, que no dependen de la parametrización de las curvas.
2. Si  $\gamma$  es una curva de  $x$  a  $y$  (ambos en  $M$ ),  $\gamma'$  es una curva de  $y$  a  $z$  (también en  $M$ ) y la curva  $\gamma*\gamma'$  es una curva diferenciable (donde  $\gamma*\gamma'$  denota la concatenación de curvas. En este caso, primero recorrer  $\gamma$  y luego  $\gamma'$ ) entonces:  $\tau_{\gamma*\gamma'} = \tau_{\gamma'} \circ \tau_{\gamma}$ . Es más, si  $\gamma^-$  denota la curva recorrida en sentido contrario, entonces:  $\tau_{\gamma^-} = (\tau_{\gamma})^{-1}$ . En particular, esta última propiedad convierte el transporte paralelo en un difeomorfismo entre las fibras.
3.  $\tau_{\gamma} \circ r_g = r_g \circ \tau_{\gamma}, \forall g \in G$ .

**Observación 6.5.1.** Como el transporte paralelo no depende de la parametrización de la curva, se puede suponer siempre que  $I = [0, 1]$ .



Ahora se considera  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación sobre  $V$  y  $E = P \times_{\rho} V$  el fibrado vectorial asociado al fibrado principal de partida. Se define el transporte paralelo en el fibrado asociado como:

**Teorema 6.5.5 (transporte paralelo para el fibrado vectorial asociado).** Dada una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ , la aplicación:

$$\begin{aligned} \tau_{\gamma}^E : E_{\gamma(0)} &\longrightarrow E_{\gamma(1)} \\ [p, v] &\longrightarrow [\tau_{\gamma}(p), v] \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

es un isomorfismo bien definido, llamado transporte paralelo en el fibrado vectorial asociado.

Usando estos resultados previos, cuya demostración se puede encontrar en [6], ya se puede pasar a definir la derivada covariante, que era el objetivo de esta sección:

**Definición 6.5.6 (derivada covariante).** Sea  $\Phi$  una sección del fibrado  $E$ ,  $x \in M$  un punto de la variedad base y  $X \in T_x M$  un vector del espacio tangente. Sea  $\gamma(t)$  una curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  cumpliendo:  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma'(0) = X$ . Para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , se toma  $\Phi(\gamma(t)) \in E_{\gamma(t)}$  y se transporta de forma paralela hasta  $E_x$  a lo largo de  $\gamma$ . La derivada en  $t = 0$  de la curva resultante en  $E_x$  es lo que se llama **derivada covariante**. Formalmente, está definida a través de la expresión:

$$D(\Phi, \gamma, x, A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\tau_{\gamma_t}^E)^{-1}(\Phi(\gamma(t))) \in E_x \tag{6.5.3}$$

donde  $\gamma_t$  denota la curva restringida a  $[0, t_{max}] \subset (-\epsilon, \epsilon)$ .

**Observación 6.5.2.** En principio, la derivada covariante depende de:

1. La conexión  $A$  (ya que esta se necesita para definir espacio horizontal y, por tanto, dar un transporte paralelo).
2. La curva  $\gamma$  que tiene a  $X$  como vector velocidad.
3. El punto  $x$  donde se calcula.
4. La sección del fibrado,  $\Phi$ , escogida.

Por ello, se ha querido enfatizar eso en la notación escribiendo  $D(\phi, \gamma, x, A)$ . Se anticipa que se va a probar que: la derivada solamente depende de la sección  $\Phi$  y del vector  $X$ . El vector  $X$  es el que especifica una “dirección” de derivación, luego localmente, tomando una base del espacio tangente, la derivada covariante se podrá escribir como un objeto que **actúa sobre las secciones**  $\Phi$  del fibrado vectorial asociado y depende de la conexión  $A$  considerada. Desde el punto de vista física y, en las teorías de gauge, importa que la derivada actúe sobre las secciones del fibrado vectorial asociado ya que, por 5.6.3, estas se pueden interpretar, tras la elección de un gauge local, como campos definidos en la variedad base en el sentido usual. Estos campos son los campos de materia, que describen la interacción de la materia (secciones del fibrado) con los bosones de gauge (conexiones del fibrado).

**Teorema 6.5.7 (fórmula para la derivada covariante).** Sea  $s : U \rightarrow P$  un gauge local,  $A_s = s^*A$  y  $\phi : U \rightarrow V$  la aplicación definida por 5.6.3 como  $\Phi = [s, \phi]$ . Entonces, el vector  $D(\Phi, \gamma, x, A) \in E_x$  viene dado por:

$$D(\Phi, \gamma, x, A) = [s(x), d\phi(X) + \rho_*(A_s(X))\phi(x)] \quad (6.5.4)$$

*Demostración.* Se halla:  $(\tau_{\gamma_t}^E)^{-1}(\Phi(\gamma(t))) = (\tau_{\gamma_t}^E)^{-1}([s \circ \gamma, \phi \circ \gamma]) \stackrel{\text{por 6.5.2}}{=} [((\tau_{\gamma_t}^E)^{-1}s \circ \gamma), \phi \circ \gamma]$ . Ahora, como  $\tau_{\gamma_t}$  es un difeomorfismo entre fibras por 6.5.4, se deduce que existe una única curva  $q(t)$ , que es regular, verificando:  $\tau_{\gamma_t}(q(t)) = s(\gamma(t))$ . Además, como el dominio de  $\tau_{\gamma_t}$  es la fibra  $P_{\gamma(0)} = P_x$ , se deduce que  $s(x)$  y  $q(t)$  están en la misma fibra:  $P_x$ . Como 5.2.1 es un difeomorfismo, existe una única  $g(t)$  tal que:  $q(t) = s(x) \cdot g(t)$ . Entonces:

$$(\tau_{\gamma_t}^E)^{-1}(\Phi(\gamma(t))) = [((\tau_{\gamma_t}^E)^{-1}s \circ \gamma), \phi \circ \gamma] = [q(t), \phi \circ \gamma(t)] = [s(x), \rho(g(t))\phi(\gamma(t))] \quad (6.5.5)$$

donde, en el último igual, se ha multiplicado por  $g^{-1}$ , dando otro representante de la clase. Para  $t = 0$ ,  $s(x) = s(\gamma(0)) = q(0)$ , luego  $g(0) = e$ . Entonces,  $\dot{g}(0) \in T_e G \cong \mathfrak{g}$ , por lo que, si se deriva y se usa la regla de la cadena:

$$D(\Phi, \gamma, x, A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [s(x), \rho(g(t))\phi(\gamma(t))] = [s(x), \rho_*(\dot{g}(0))\phi(x) + d\phi(X)] \quad (6.5.6)$$

Entonces, para acabar la demostración, bastará con hallar  $\rho_*(\dot{g}(0))$ . Por un lado:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} s(\gamma(t)) = d_x s(X) = s_*(X)_{s(x)} \quad (6.5.7)$$

De la tercera propiedad de 6.5.4 y del hecho de que:  $s(x) \cdot g(t) = q(t)$ , se deduce que:

$$\tau_{\gamma_t}(q(t)) = \tau_{\gamma_t}(r_{g(t)}(s(x))) = r_{g(t)}(\tau_{\gamma_t}(s(x))) \quad (6.5.8)$$

Entonces, si se denota  $\Psi$  a la acción de grupo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_{\gamma_t}(q(t)) &= d_{(x,e)} \Psi \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_{\gamma(t)}(s(x)), \dot{g}(0) \right) \stackrel{\text{por 4.3.3}}{=} \\ &= (r_{g(0)})_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_{\gamma(t)}(s(x)) \right) + \widetilde{\mu_G(\dot{g}(0))}_{\tau_{\gamma_t}(q(0))} \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Aplicando la conexión a ambos lados de la ecuación y usando sus propiedades, se obtiene:

$$A \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_{\gamma_t}(q(t)) \right) = (Ad_{g(0)^{-1}} \circ A) \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_{\gamma(t)}(s(x)) \right) + A \left( \widetilde{\mu_G(\dot{g}(0))}_{s(x)} \right) \quad (6.5.10)$$

La forma de Maurer-Cartan no es más que el *pull-back* de la multiplicación por la izquierda. En el caso de  $\dot{g}(0) \in \mathfrak{g}$ , la forma de Maurer-Cartan no afecta al vector. Teniendo en cuenta, además, el hecho de que, por la ecuación 6.5.7,  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_{\gamma_t}(q(t)) = s_*(X)$ , se obtiene:

$$A(s_*(X)) = A \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_{\gamma(t)}(s(x)) \right) + A \left( \widetilde{\dot{g}(0)}_{s(x)} \right) \quad (6.5.11)$$

Y ahora se remata la demostración usando:

1. por un lado, que  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \tau_{\gamma(t)}(s(x))$  es horizontal por la definición de transporte paralelo, luego, al aplicarle  $A$ , el primer término da 0.
2. por otro lado, por las propiedades de  $A$ ,  $A(\widetilde{\dot{g}(0)}_{s(x)}) = \dot{g}(0)$ .

Entonces,  $A_s(X) = \dot{g}(0) \Rightarrow \rho_*(\dot{g}(0)) = \rho_*(A_s(X))$ , lo cual concluye la demostración al sustituir en 6.5.6.  $\square$



La ecuación anterior demuestra que la derivada covariante depende solamente del vector  $X$ , la conexión  $A$  y, obviamente, la sección  $\Phi$ , pero no de la curva  $\gamma$  escogida. Esto hace que se defina una aplicación:

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(U, E) &\longrightarrow \Omega^1(M, E) \\ \Phi &\longrightarrow (\nabla\Phi(x))(X) = \nabla_X\Phi(x) := D(\Phi, \gamma, x, A) \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

que es la **derivada covariante** de las secciones  $\Phi \in \Gamma(U, E)$  en la dirección de  $X$ . Obsérvese que  $\nabla\Phi$  se puede interpretar como una 1-forma con valores en  $E$ , ya que toma un vector tangente  $X \in T_pM$  y devuelve otro vector que está en  $E_{s(p)}$ .

Escogido un gauge local  $s : U \rightarrow P$ , y siendo  $\phi$  el campo asociado con  $\Phi$ , se suele denotar:

$$\nabla_X\Phi = [s, \nabla_X\phi] \quad (6.5.13)$$

siendo  $\nabla_X\phi = d\phi(X) + \rho_*(A_s(X))\phi(x)$ . Es decir, se habla indistintamente de la derivada covariante actuando sobre secciones del fibrado vectorial asociado que sobre campos con llegada en la fibra general del fibrado vectorial. El caso es que, como  $\nabla_X\phi \in C^\infty(U, V)$ , si  $\phi \in C^\infty(U, V)$ , se deduce que  $\nabla_X\Phi$  es también una sección del fibrado principal.

**Proposición 6.5.8 (propiedades de la derivada covariante).** La aplicación  $\nabla$  es  $\mathbb{K}$ -lineal (con  $\mathbb{K}$  sobre el que la fibra general  $V$  del fibrado vectorial asociado es un espacio vectorial) en las secciones  $\Phi$  y en los vectores tangentes  $X$ . Además,  $\nabla_{fX}\Phi = f\nabla_X\Phi$ , para cada  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . También se verifica la **regla de Leibniz**:  $\nabla_X(\lambda\Phi) = (L_X\lambda)\Phi + \lambda\nabla_X\Phi$ , para cada función regular  $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{K})$ .

*Demostración.* Se prueban las propiedades una a una:

1. Linealidad: Se demostrará, por ejemplo, la linealidad en los vectores tangentes  $X$ . Es decir, hay que ver que, dados  $X, Y \in T_pM$ ,  $\lambda(x), \mu(x) \in C^\infty(M, \mathbb{K})$ ,  $\nabla_{\lambda X + \mu Y}\Phi = \lambda\nabla_X\Phi + \mu\nabla_Y\Phi$ . Para ver esto, se puede demostrar en la versión local. Se toma  $s$  un gauge local y  $\phi$  como en 6.5.7 y se tiene que:  $\nabla_{\lambda X + \mu Y}\Phi = [s(x), d\phi(\lambda X + \mu Y) + \rho_*(A_s(\lambda X + \mu Y))\phi(x)]$ . Como la estructura lineal sobre el fibrado vectorial asociado es la linealidad en la segunda componente (ver 5.6.2) y la diferencial, el *pull-back* de  $\rho$  y la 1-forma  $A$  son todas ellas lineales con respecto a las funciones regulares, es claro que la anterior expresión es lineal en los vectores tangentes. Tomando funciones constantes se obtiene la linealidad en el sentido usual.
2. Sea  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{K}$  una aplicación regular. Se toma un gauge local  $s$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_X(\lambda\Phi)(x) &= [s(x), d(\lambda\phi)(X_x) + \rho_*(A_s(X_x))(\lambda\phi)(x)] = \\ &= [s(x), d(\lambda)(X_x)\phi(x) + \lambda(x)d\phi(X_x) + \rho_*(A_s(X_x))(\lambda\phi)(x)] = \\ &= d\lambda(X_x)[s(x), \phi(x)] + \lambda(x)(\nabla_X\Phi)(x) = \\ &= (L_{X_x}\lambda)\Phi(x) + \lambda(x)(\nabla_X\Phi)(x) \end{aligned} \tag{6.5.14}$$

□



La linealidad con respecto a los campos garantiza que la derivada covariante quede determinada con saber cómo actúa con respecto a una base del espacio tangente. Por otro lado, la derivada con respecto a las secciones del fibrado tangente y la regla de Leibniz la hacen un operador de derivación en el sentido usual. Si se toma un sistema de coordenadas local en torno a  $p \in M$ , se suele denotar:

$$\nabla_\mu\phi = \nabla_{\partial_\mu}\phi = \partial_\mu\phi + A_\mu\phi \tag{6.5.15}$$

donde se denota  $A_\mu\phi = \rho_*(A_\mu)\phi$ . Esta es la expresión que uno se encuentra en los libros de Física. Desde el punto de vista físico, es de gran relevancia que, al escribir una teoría gauge, aparezca una derivada covariante como la de la ecuación 6.5.15. Esto se debe a que, desde el punto de vista físico, el segundo término, cuadrático en la conexión y el campo de materia es lo que en física se interpreta como una interacción entre bosones de gauge y materia. Esto se debe a que la aparición de un término cuadrático en la derivada covariante lleva a términos cuadráticos en el Lagrangiano y posteriormente en los correspondientes propagadores cuánticos. La no linealidad se denomina en los textos físicos **acople mínimo**.



Desde el punto de vista físico, la denominación covarianza siempre aparece para referirse a un objeto que transforme de acorde a ciertas reglas. En este caso, la derivada covariante es invariante con respecto a las transformaciones de gauge, lo cual es un tanto delicado de probar.

## 6.6. El electromagnetismo

### 6.6.1. Invarianza gauge en el sentido usual

En esta primera subsección se siguen, sobre todo, [3] y [2]. El objetivo es expresar la invarianza gauge, precursora de las ideas que se han estudiado a lo largo de este trabajo, en el contexto de las ecuaciones de Maxwell escritas en  $\mathbb{R}^3$ .



Históricamente, Weyl introdujo las teorías de gauge para explicar la libertad de elección en los potenciales electromagnéticos en la teoría de Maxwell. Dicha libertad se puede explicar de la siguiente manera: supóngase que  $\Phi$  y  $\mathbf{A}$  son el potencial escalar del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el potencial vector del campo magnético  $\mathbf{B}$ , respectivamente. Entonces, se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \wedge \mathbf{A} \end{cases} \quad (6.6.1)$$

Dados otros potenciales  $\Phi'$  y  $\mathbf{A}'$ , la pregunta es: ¿cómo se relacionan? Sustituyendo en las ecuaciones anteriores, uno llega a que los potenciales han de verificar:

$$\begin{cases} \nabla(\Phi' - \Phi) + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial(\mathbf{A}' - \mathbf{A})}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \nabla \wedge (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.6.2)$$

La segunda de las ecuaciones anteriores implica que  $\mathbf{A}' - \mathbf{A}$  es irrotacional. Por el Lema de Poincaré, esto implica que admite un potencial escalar  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  tal que:  $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \nabla\Psi(\mathbf{x}, t)$ . Sustituyendo esta ecuación en la primera, se llega a que:

$$\nabla \left( \Phi' - \Phi + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (6.6.3)$$

Esto quiere decir que la función dentro del paréntesis no depende de las coordenadas espaciales (el gradiente solo se toma sobre las coordenadas espaciales). Consecuentemente, existe una función  $f(t)$  tal que:

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\frac{\Psi}{c} + \int_0^t f(s) ds \right\} \quad (6.6.4)$$

Si se denota  $\Lambda(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x}, t) - c \int_0^t f(s) ds$ , se llega a que la siguiente familia de potenciales:

$$\begin{cases} \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \Lambda \end{cases} \quad (6.6.5)$$

son todos ellos potenciales del campo eléctrico y el magnético, respectivamente. Usando la notación relativista, esta ecuación se puede resumir incluso más. Usando la métrica Lorentziana para subir y bajar índices (y usando unidades naturales donde  $c=1$ ), se puede escribir  $\partial_\mu = (\partial_t, -\nabla)$ . Tomando el cuadri-potencial:  $A_\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ , la transformación de las ecuaciones anteriores se escribiría, de manera compacta, así:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (6.6.6)$$

En este contexto, se puede interpretar la teoría de gauge como la libertad a la hora de escoger un potencial de los de la familia dada por la ecuación anterior. Escoger cualquiera de estos potenciales no cambia la física del problema a nivel clásico (ver, por ejemplo, [10], sección 2.6, para una discusión intuitiva de la relevancia de la elección de gauge a nivel cuántico en el celebrado **efecto Aharonov-Bohm**), ya que los campos involucrados son los mismos.

### 6.6.2. Reescribiendo las ecuaciones de Maxwell

Lo que se pretende ahora es reescribir las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de 1-formas, pero sin hacer todavía alusión a ninguna estructura de fibrado. Se sigue [2] (capítulo 5).



Se considera el siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \end{cases} \quad (6.6.7)$$

Se considera el espacio  $\mathbb{R}^3$ . En el lenguaje de las formas diferenciables, la divergencia se convierte en la diferencial exterior de una 2-forma en  $\mathbb{R}^3$ , mientras que el rotacional es también la diferencial exterior, solo que de una 1-forma. Por tanto, se escribe  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^T$  como una 2-forma así:

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \quad (6.6.8)$$

Mientras que el campo eléctrico:  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T$  se escribe como 1-forma así:

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (6.6.9)$$

Ambas se pueden combinar en una 2-forma en  $\mathbb{R}^4$ , llamada **tensor electromagnético**:

$$F = B + E \wedge dt \quad (6.6.10)$$



Que, en coordenadas, puede escribirse como:

$$F = (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6.11)$$

Lo interesante de escribir el tensor electromagnético de esta manera es que unifica las dos ecuaciones de Maxwell de esta sección en una única condición, que es que sea una 2-forma cerrada:

$$dF = 0 \quad (6.6.12)$$

Para demostrar que esta ecuación lleva a las ecuaciones de 6.6.7, se calcula:

$$dF = d(B + E \wedge dt) = dB + dE \wedge dt \quad (6.6.13)$$

Es un ejercicio sencillo hallar las diferenciales de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} dB &= (\partial_x B_x dx + \partial_t B_x dt) \wedge dy \wedge dz + (\partial_y B_y dy + \partial_t B_y dt) \wedge dz \wedge dx + (\partial_z B_z dz + \partial_t B_z dt) \wedge dx \wedge dy \\ &= (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz + dt \wedge (\partial_t B_x dy \wedge dz + \partial_t B_y dz \wedge dx + \partial_t B_z) = \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{B}) + dt \wedge \partial_t \mathbf{B} \end{aligned} \quad (6.6.14)$$

Y para el campo eléctrico, de igual modo:

$$dE = dt \wedge \partial_t \mathbf{E} + \nabla \wedge \mathbf{E} \quad (6.6.15)$$

Sustituyendo en la ecuación 6.6.13, se llega finalmente a:

$$dF = (\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\partial_t \mathbf{B} + \nabla \wedge \mathbf{E}) \wedge dt = 0 \quad (6.6.16)$$

El primer término no tiene componente en  $dt$ , mientras que el segundo sí, luego para que esto sea 0, han de ser cada uno de los elementos cero, con lo que se recupera 6.6.7.

### 6.6.3. El electromagnetismo como teoría gauge con grupo $U(1)$

Se sigue, principalmente, [2] (capítulo 5) y [8] (sección 2.2) (aunque también algunas ideas de [3] y [14]). El objetivo de esta subsección es intentar formular el electromagnetismo como teoría de gauge con grupo de simetría  $U(1)$  usando los que se ha estudiado en este trabajo.



En la anterior subsección, se vio que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir de forma compacta empleando el tensor electromagnético. El hecho de que la diferencial del tensor sea 0, por el **Lema de Poincaré**, asegura que  $F$  es una forma exacta. Es decir, existe una 1-forma  $A$  tal que  $dA = F$ . Esto recuerda a la ecuación de estructura 6.4.6. Para ello, no obstante, debería tenerse un corchete nulo. Por suerte, este es el caso en teorías que tienen un grupo de simetría abeliano (en el electromagnetismo,  $U(1)$ ).

Se considera el espacio plano de Minkowski, que es  $\mathbb{R}^4$  equipado con la métrica:

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.6.17)$$

Se puede probar que, por ser este espacio contraíble, todos los fibrados que se definan en él son triviales (ver [6]), sección 4.2.1). Entonces, la teoría se puede formular en base al fibrado trivial:

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \longrightarrow & E = \mathbb{R}^4 \times U(1) \\ & & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Como  $U(1)$  es un grupo **abeliano**, todos los corchetes que aparezcan en la formulación de conexiones, curvaturas, o cambios de gauge desaparecen. El álgebra de Lie de  $U(1)$ , que ya se halló en la sección 2.9, no es más que  $i\mathbb{R}$ . El hecho de que el fibrado sea trivial implica que se puede encontrar trivializaciones y, por tanto, gauges que sean globales. Sea  $s : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \times U(1)$  un gauge globalmente definido. La 1-forma  $A_s = s^*A$  estaría globalmente definida y sería un elemento de  $\Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g})$ . Como  $\mathbb{R}^4$  tiene un sistema global de coordenadas, se puede escribir:

$$A_s = A_\mu dx^\mu \quad (6.6.18)$$

donde se usa el convenio de Einstein para realizar la sumación y  $dx^\mu$  es la base de 1-formas globales (dual de la base usual). Las funciones  $A_\mu$  son  $i\mathbb{R}$  valuadas. La curvatura asociada a la conexión anterior, en forma local, se puede escribir, usando 6.4.9, y considerando que el grupo es abeliano, como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (6.6.19)$$

Todavía no se sabe bien qué significan estos elementos de curvatura, conexión, etc. en el contexto de la teoría del electromagnetismo y cómo se relacionan con los campos clásicos o los potenciales. Obsérvese que la ecuación de cambio de gauge física:  $A_\mu = G^{-1}A_\mu G + G^{-1}\partial_\mu G$ , en el caso de grupos abelianos se reduce a:  $A'_\mu = A_\mu + G^{-1}\partial_\mu G$ . Esto resuena a 6.6.6. Teniendo en cuenta que  $G = e^{i\Lambda(x^\mu)}$  es la forma más general de un cambio de gauge que esté en  $U(1)$ , lo anterior puede interpretarse como una derivación logarítmica. Es decir:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu(\log(e^{i\Lambda(x^\mu)})) \quad (6.6.20)$$

El logaritmo complejo no es una función en el sentido usual, ya que es multivaluada. En este caso, eso no da problemas, ya que todas las ramas del logaritmo está relacionadas por  $\log(z) = \log(|z|) + i\theta + i2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (siendo  $\theta$  el argumento). Dado que  $z = e^{i\Lambda(x^\mu)}$  es de módulo unidad, su logaritmo sería:  $\log(z) = i(\Lambda + 2k\pi)$ , pero, como al derivar, el  $2k\pi$  va a desaparecer, la expresión está bien definida:

$$A'_\mu = A_\mu + i\partial_\mu\Lambda \quad (6.6.21)$$

De hecho, como las funciones  $A_\mu$  son  $i\mathbb{R}$  valuadas, tomando  $\mathcal{A}_\mu = -iA_\mu$ , se deduce que  $\mathcal{A}_\mu$  son  $\mathbb{R}$  valuadas, y su cambio de gauge es:

$$\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu\Lambda \quad (6.6.22)$$

que es idéntico a 6.6.6. Esto sugiere que se pueda identificar la conexión en el fibrado con el potencial electromagnético. Esta identificación queda reforzada si también se toma  $\mathcal{F}$  como curvatura  $\mathbb{R}$ -valuada de  $\mathcal{A}$  y se identifica con el tensor electromagnético. En ese caso, las ecuaciones de la curvatura 6.6.19 devuelven las ecuaciones de Maxwell para los potenciales electromagnéticos. Con esto queda totalmente identificada la teoría de Maxwell como teoría gauge de grupo  $U(1)$ .

Es interesante que, por el Teorema 6.4.10, la 2-forma de curvatura está unívocamente determinada al escoger un gauge en el caso de grupos abelianos. Esto implica que  $\mathcal{F}$  define globalmente una 2-forma cuya diferencial es 0 por la ecuación de estructura. Esto sería un forma simplificada de la identidad de Bianchi y lleva a las dos ecuaciones de Maxwell que se exponían en la subsección anterior.

#### 6.6.4. ¿Dónde están el resto de ecuaciones?

En las secciones anteriores, se ha demostrado que la identidad de Bianchi para la curvatura que describe la intensidad del campo electromagnético (tensor electromagnético) da lugar a las dos ecuaciones de 6.6.7. Estas no son todas las ecuaciones de Maxwell, sino que faltan:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} & = \rho \\ \nabla \wedge \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & = \mathbf{J} \end{cases} \quad (6.6.23)$$

Estas ecuaciones son en cierto sentido duales de las de 6.6.7, ya que aparecen al cambiar  $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B}$  y añadir, en el lado derecho de las ecuaciones, términos inhomogéneos que expresan las densidades de carga y corriente eléctrica. Estas ecuaciones se pueden obtener por medio del **operador dual de Hodge**, o **estrella de Hodge**. Se sigue [2] (sección 1.5) y también [6] (sección 7.2).



Obsérvese que, para llegar a las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de 1-formas y 2-formas, se tuvo que escribir el campo magnético  $\mathbf{B}$  como una 2-forma y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  como una 1-forma (ver sección 6.6.2). Esto era así porque se quería después calcular los operadores de: divergencia y rotacional, que se podían interpretar con la diferencial exterior en el contexto de formas. Si se quieren escribir las ecuaciones 6.6.23 de manera similar, se ha de poder calcular la divergencia del campo eléctrico y el rotacional del campo magnético. Esto se puede hacer por medio del **dual de Hodge**, que convierte las 1-formas en  $\mathbb{R}^3$  en 2-formas y viceversa.

Para definir el dual de Hodge, se necesita emplear una métrica. Considérese, pues,  $M$  una variedad orientada y  $n$ -dimensional con una métrica  $g$  definida sobre la variedad. La métrica, junto con la orientación, definen una **forma de volumen canónica**, que se denota  $dvol_g$ , o simplemente  $dvol$ . Para definirla, hay que decir cómo actúa sobre  $n$ -vectores en un cierto espacio tangente  $T_p M$ , con  $p \in M$ . Sea  $e_1, \dots, e_n$  una base ortonormal del plano tangente a  $M$  en  $p$ , que está orientada de acuerdo con la orientación prefijada. Entonces, se define la forma de volumen como:

$$dvol(e_1, \dots, e_n) = +1 \quad (6.6.24)$$

La forma de volumen, expresada en coordenadas locales, toma una expresión común en los textos de física:

**Proposición 6.6.1 (la forma de volumen en coordenadas locales).** Sea  $(U, \phi)$  una carta de  $M$  compatible con la orientación, con coordenadas locales  $\{x^\mu\}$ . Entonces:

$$dvol = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (6.6.25)$$

donde  $|g|$  denota el valor absoluto del determinante de la matriz de la métrica:  $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ .

*Demostración.* La forma  $dvol$  es una  $n$ -forma en la variedad. Como el espacio de  $n$ -formas en una variedad de dimensión  $n$  tiene dimensión 1, en coordenadas locales, la  $n$ -forma  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  constituye una base de dicho espacio. Por tanto, existe un  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que:  $dvol = \lambda dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Para hallar  $\lambda$ , sea  $e_1, \dots, e_n$  una base ortonormal con respecto a la métrica  $g$ . Aplicando  $e_1, \dots, e_n$  a ambos lados, se tiene:

$$1 = dvol(e_1, \dots, e_n) = \lambda dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det(e_1, \dots, e_n) \quad (6.6.26)$$

El hecho de que la matriz  $E := (e_1, \dots, e_n)$  tenga columnas que sean una base ortonormal de vectores implica que:

$$E^T g E = Id \Rightarrow \det(E)^2 = \frac{1}{|g|} \quad (6.6.27)$$

En particular, sustituyendo en 6.6.26, se llega finalmente a que:  $\lambda = \pm \sqrt{|g|}$ . La cuestión ahora es que, como la carta escogida es compatible con la orientación,  $\lambda = \sqrt{|g|}$ .  $\square$



El operador de Hodge se define usando la métrica así:

**Definición 6.6.2 (operador dual de Hodge).** El **operador dual de Hodge** es una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \star : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{n-k}(M) \\ \eta &\longrightarrow \star\eta \end{aligned} \quad (6.6.28)$$

donde  $\star\eta$  está definida de modo que:  $\langle \omega, \eta \rangle dvol = \omega \wedge \star\eta$ ,  $\forall \omega, \eta \in \Omega^k(M)$  y  $\langle \omega, \eta \rangle$  denota el producto escalar de dos formas:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (\omega, \eta) &\longrightarrow \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \eta^{\mu_1, \dots, \mu_k} \end{aligned} \quad (6.6.29)$$

donde se supone que  $\omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} = \omega(\partial_{\mu_1}, \dots, \partial_{\mu_k})$  y se sobrentienden las sumas sobre índices repetidos (convenio de Einstein).

**Observación 6.6.1.** Se puede probar que lo anterior está bien definido y es una  $(n - k)$ -forma. Por otro lado, la métrica aparece en dos sitios: por un lado, en la forma de volumen

y, por otro, en el producto escalar. El convenio físico es que se usa la métrica para subir y bajar índices, del siguiente modo:

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} T_{\rho\sigma} g^{\nu\sigma} \quad (6.6.30)$$

Conviene observar que  $g^{\nu\rho}$ , en notación relativista, denota la inversa de la métrica. Es decir:  $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}$ . Entonces, en verdad:  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \eta^{\mu_1, \dots, \mu_k} = \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} g^{\mu_1 \sigma_1} \dots g^{\mu_k \sigma_k} \eta_{\sigma_1, \dots, \sigma_k}$ .



Volviendo al caso del electromagnetismo, se quiere ahora calcular el dual de Hodge de  $F$ ,  $\star F$ . Usando la definición, se puede calcular el dual de Hodge de la base de dos-formas globales. Esto se muestra en el Cuadro 6.1.

Cuadro 6.1: Dual de Hodge de las dos formas en el espacio de Minkowski

Dos forma $\omega$	Dual de Hodge $\star\omega$
$dt \wedge dx$	$-dy \wedge dz$
$dt \wedge dy$	$dx \wedge dz$
$dt \wedge dz$	$-dx \wedge dy$
$dx \wedge dy$	$dt \wedge dz$
$dx \wedge dz$	$-dt \wedge dy$
$dy \wedge dz$	$dt \wedge dx$

Sustituyendo, se llega al dual del tensor electromagnético:

$$\star F = (\star F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6.31)$$

Por tanto, el dual de  $F$  es una 2-forma que se obtiene de reemplazar  $E_i \mapsto -B_i$  y  $B_i \mapsto E_i$  en  $F$ . Esto es tanto como poner ahora  $E' = E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy$ , y  $B' = -B_x dx - B_y dy - B_z dz$  y haber escrito:

$$d\star F = E' + B' \wedge dt \quad (6.6.32)$$

Entonces, como la expresión es formalmente la misma, su diferencial no será más que:

$$d\star F = (\nabla \cdot \mathbf{E}') + (\partial_t \mathbf{E}' + \nabla \wedge \mathbf{B}') \wedge dt \quad (6.6.33)$$

Si se denota  $J = j\rho dt$ , donde  $j = J_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3$ , se obtiene que las ecuaciones 6.6.23 son formalmente equivalentes a:

$$d\star F = J \quad (6.6.34)$$

### 6.6.5. La energía electromagnética

La densidad de energía electromagnética es, desde el punto de vista clásico:

$$\frac{1}{2}(\langle E, E \rangle + \langle B, B \rangle) \quad (6.6.35)$$

Y el Lagrangiano en el vacío del campo electromagnético sería:

$$\frac{1}{2}(\langle E, E \rangle - \langle B, B \rangle) \quad (6.6.36)$$

El objetivo de esta subsección es ligar esto con la 2-forma de curvatura. Se sigue, de nuevo, [2].



Para ligar lo anterior con la curvatura o tensor electromagnético, hay que encontrar alguna expresión cuadrática en el mismo, de modo que aparezcan de manera natural los productos escalares.

Primero nótese que los productos escalares de 6.6.35 también tienen sentido en el contexto de las formas, usando la definición de producto escalar de formas que se dio en 6.6.2. Para calcularlo en la práctica, lo mejor es usar notación matricial. Esto tiene la ventaja de que subir y bajar índices es multiplicar a izquierda y a derecha por la métrica y que, para calcular el producto escalar basta con hallar la traza de la matriz producto. Por ejemplo, el campo magnético  $B$  se puede poner como una 2-forma así:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_y \\ 0 & -B_z & 0 & B_x \\ 0 & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.6.37)$$

Como tiene ceros en la parte temporal, al multiplicar por la métrica va a quedar la misma matriz. Transponiendo y multiplicando por  $B$  se obtiene:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y^2 + B_z^2 & -B_y B_x & -B_z B_x \\ 0 & -B_y B_x & B_x^2 + B_z^2 & -B_z B_y \\ 0 & -B_z B_x & -B_z B_y & B_x^2 + B_y^2 \end{pmatrix} \quad (6.6.38)$$

Tomando la traza de lo anterior y dividiendo por 2! se obtiene que:  $\langle B, B \rangle = \|B\|^2$ . Es decir, coincide con la norma del campo visto como vector. Lo mismo ocurre para el campo eléctrico.

Esto parece indicar que tomando productos del tensor electromagnético visto como 2-forma, uno podría obtener un término cuadrático en los campos que se pudiese interpretar como una densidad de energía desde el punto de vista físico. Si se calcula el producto  $\langle F, F \rangle$ , se obtiene lo que aparece en la Figura 6.1:

$$P := \begin{bmatrix} -Ex^2 - Ey^2 - Ez^2 & By Ez - Bz Ey & -Bx Ez + Bz Ex & Bx Ey - By Ex \\ -By Ez + Bz Ey & By^2 + Bz^2 - Ex^2 & -Bx By - Ex Ey & -Bx Bz - Ex Ez \\ Bx Ez - Bz Ex & -Bx By - Ex Ey & Bx^2 + Bz^2 - Ey^2 & -By Bz - Ey Ez \\ -Bx Ey + By Ex & -Bx Bz - Ex Ez & -By Bz - Ey Ez & Bx^2 + By^2 - Ez^2 \\ 2 Bx^2 + 2 By^2 + 2 Bz^2 - 2 Ex^2 - 2 Ey^2 - 2 Ez^2 & & & \end{bmatrix}$$

Figura 6.1: Cálculo del producto  $\langle F, F \rangle$  usando el software de cálculo simbólico Maple. Lo que aparece debajo es la traza. Encima, se tiene la matriz producto. El valor de  $\langle F, F \rangle$  se obtiene dividiendo la traza por  $2!$ .

Es decir:  $-\frac{1}{2}\langle F, F \rangle = \frac{1}{2}(\langle E, E \rangle - \langle B, B \rangle)$ . Esto implica que el Lagrangiano del campo electromagnético puede escribirse como:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{2}\langle F, F \rangle \quad (6.6.39)$$

Esta ecuación es la precursora de la teoría de Yang-Mills.

### 6.6.6. ¿Por qué una simetría $U(1)$ ?

A lo largo de esta sección, se ha visto que el electromagnetismo puede tratarse, con el formalismo introducido, como un teoría de gauge con grupo de simetría  $U(1)$ . No obstante, una pregunta queda aún sin responder: ¿por qué el grupo de simetría es  $U(1)$ ? Para responder a esta pregunta, hay que escribir el hamiltoniano de una partícula cargada. Las fuerzas que experimentan las partículas cargadas, llamada fuerza de Lorentz, conduce al siguiente Lagrangiano dependiente de las velocidades:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) - e \left( \phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{A} \right) \quad (6.6.40)$$

siendo  $\mathbf{r}(t)$  la posición de la partícula,  $m$  su masa,  $e$  la carga,  $c$  la velocidad de la luz y  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  los potenciales escalar y vectorial, respectivamente (el primero del campo eléctrico y el segundo del magnético). En lo que sigue, se tomarán unidades naturales en las que  $c = 1$ . El momento canónico asociado con el Lagrangiano es, por definición:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} = m \dot{r}_i(t) + e A_i \quad (6.6.41)$$

Por tanto, el hamiltoniano (clásico) sería:

$$\mathcal{H} = p_i \dot{r}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi \quad (6.6.42)$$

Cuantizar este hamiltoniano consiste en sustituir las variables del espacio de fases por sus correspondientes operadores a nivel cuántico. Esto es:  $\mathbf{p} \rightarrow P = -i\hbar\nabla$  y  $\mathbf{x} \rightarrow X$ , de modo que se obtiene la versión cuántica de la ecuación 6.6.42 (ecuación de Schrödinger):

$$\mathcal{H}\Psi = \frac{1}{2m} (P - eA)^2 \Psi = E\Psi \quad (6.6.43)$$

donde  $\Psi$  es la función de onda, y  $E$  es el operador energía, que incluye la contribución de la energía cinética de la partícula y del potencial  $e\phi$ . Es decir:  $E = i\hbar\partial_t - e\phi$ . Entonces, la libertad de gauge clásica expuesta en la sección 6.6.1:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \partial_t\Lambda\end{aligned}\tag{6.6.44}$$

introducida en la ecuación de Schrödinger, hacen que la función de onda cambie por un factor de fase  $\Psi \rightarrow \Psi' = \exp(i e\Lambda/\hbar)\Psi$ . Esto explica que haya una relación biunívoca entre la simetría de gauge en el sentido usual y una simetría “interna”, de carácter cuántico, gobernada por el grupo  $U(1)$ .

## 6.7. El monopolo magnético

El objetivo de esta sección es describir un ejemplo físico en el que el fibrado en consideración no sea un fibrado trivial. Este ejemplo es el del monopolo magnético, de gran relevancia. En este caso, la no trivialidad del fibrado se ve forzada por las singularidades que existen en el campo. Las referencias para esta parte son, principalmente: [12] (sección 10.5.2), [8](sección 2.2), [11](sección 0.2), [18] y también [14].



Las ecuaciones de Maxwell tienen en cierto sentido, un caracter dual, salvo en la parte no-homogénea de 6.6.23. Estos términos, de hecho, describen dos aspectos fundamentales de la naturaleza: que existen las cargas eléctricas puntuales y que dichas cargas, en movimiento, producen campos magnéticos. Para que las ecuaciones de Maxwell sean completamente simétricas, deberían existir las cargas puntuales magnéticas, también conocidas como monopolos magnéticos.

Desde el punto de vista físico, un monopolo puede describirse demandando que el campo magnético tenga una divergencia. Es decir:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g\delta^{(3)}(\mathbf{r})\tag{6.7.1}$$

donde  $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)^T$  es el vector de posición,  $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$  representa la delta de Dirac tridimensional y la constante  $g$  sería la supuesta carga magnética. La ecuación anterior puede resolverse como:

$$\mathbf{B} = g\frac{\mathbf{r}}{r^3}\tag{6.7.2}$$

que puede interpretarse como la ecuación de Coulomb para el campo magnético. Para el campo anterior, un potencial vector que se puede encontrar es el siguiente:

$$A_x^N = \frac{-gy}{r(r+z)} \quad A_y^N = \frac{gx}{r(r+z)} \quad A_z^N = 0\tag{6.7.3}$$

Este potencial vector da lugar al campo 6.7.2 excepto en el eje  $z$  negativo, donde tiene singularidades. No obstante, para valores negativos de la coordenada  $z$  se puede tomar:

$$A_x^S = \frac{gy}{r(r-z)} \quad A_y^S = \frac{-gx}{r(r-z)} \quad A_z^S = 0\tag{6.7.4}$$



que está ahora definido para valores negativos de  $z$ , pero no para valores positivos. El hecho de que no se pueda encontrar un potencial vector global es una consecuencia de la ley de Gauss y del teorema de la divergencia. Por la ley de Gauss, el flujo de un campo como el de 6.7.2 debería ser  $4\pi g$ . Si  $B = \nabla \wedge \mathbf{A}$  globalmente, por el teorema de la divergencia, su flujo sería 0, lo cual llevaría a inconsistencias.

Ahora, se considera todo lo anterior en el lenguaje de las formas diferenciales. Tomando  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  y sustituyendo en 6.6.11 se obtiene, como tensor electromagnético:

$$F = \frac{g}{r^3}(x^1 dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^3 dx^1 \wedge dx^2) \quad (6.7.5)$$

Como  $F$  no depende de  $x^0$  (la coordenada temporal),  $F$  define una 2-forma en cada sección  $x^0 = \text{constante}$ . Es más, usando el *pull-back* del difeomorfismo de cambio de coordenadas a esféricas, 6.7.5 se puede escribir como:

$$F = g \sin(\varphi) d\varphi \wedge d\theta \quad (6.7.6)$$

siendo  $\theta$  y  $\varphi$  como en la Figura 6.2.

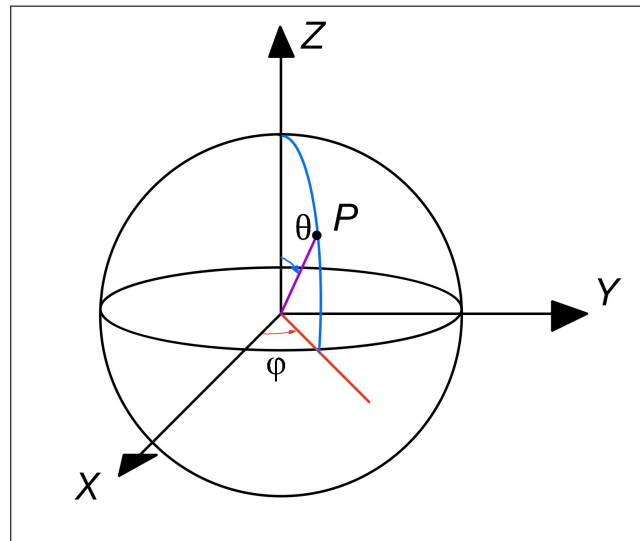


Figura 6.2: Coordenadas esféricas:  $(\rho, \theta, \varphi)$ . Solo se representan las dos últimas sobre una esfera de radio  $\rho$ .

Como  $F$  no depende de la coordenada radial, se puede restringir el estudio a la esfera de radio 1 y la sección, por ejemplo  $x^0 = 0$ . A todos los efectos, esto es estudiar el campo que crea el monopolo en la esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces, se quiere describir el efecto del monopolo en la esfera usando el hecho de que el electromagnetismo es una teoría de gauge con grupo de simetría  $U(1)$ . El primer paso será, por tanto, considerar un  $U(1)$ -fibrado principal con variedad base la esfera  $S^2$ . Para recubrir la esfera, se pueden usar los dos abiertos de la sección 5.7.2:  $U_N$  y  $U_S$ . En cada uno de estos abiertos, se puede definir una conexión  $A_s$  local que dependerá del gauge escogido. En este caso, para construir la conexión en cada abierto, basta con expresar los potencial-vectores hallados en 6.7.3 y 6.7.4 en el lenguaje de las 1-formas. En la base de 1-formas globales de  $\mathbb{R}^3$ , estos campos pueden escribirse simplemente

como los correspondientes duales:

$$\begin{aligned} A^N &= \frac{-gy}{r(r+z)} dx + \frac{gx}{r(r+z)} dy \\ A^S &= \frac{gy}{r(r-z)} dx + \frac{-gx}{r(r-z)} dy \end{aligned} \quad (6.7.7)$$

usando que  $dx = \sin(\theta) \cos(\varphi) dr + r \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta - r \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi$  y  $dy = \sin(\theta) \sin(\varphi) dr + r \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + r \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi$ , se llega a:

$$\begin{aligned} A^N &= g(1 - \cos(\theta)) d\varphi \\ A^S &= -g(1 + \cos(\theta)) d\varphi \end{aligned} \quad (6.7.8)$$

Es fácil comprobar, diferenciando las anteriores, que  $dA^i = F$ ,  $i = N, S$ . Para que las 1-formas de conexión sean verdaderamente  $i\mathbb{R}$  valuadas, se añade un  $i$  en  $A^N$  y  $A^S$  y también en la fuerza de la interacción. Se denota, pues:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^N &= ig(1 - \cos(\theta)) d\varphi \\ \mathcal{A}^S &= -ig(1 + \cos(\theta)) d\varphi \\ \mathcal{F} &= ig \sin(\varphi) d\varphi \wedge d\theta \end{aligned} \quad (6.7.9)$$

Si  $\mathcal{A}^N$  y  $\mathcal{A}^S$  se van a interpretar como conexiones en el sentido de las teorías gauge, en la zona de solapamiento  $U_N \cap U_S$  en torno al ecuador, debería existir una función  $\exp(i\Lambda(\theta, \phi)) \in U(1)$  (que representa el  $g_{ji}$  del Teorema 6.2.3) de modo que se verifique la expresión 6.6.6. Esto es:

$$\mathcal{A}^N = \mathcal{A}^S + id\Lambda \Rightarrow d\Lambda = -i(\mathcal{A}^N - \mathcal{A}^S) = 2gd\varphi \quad (6.7.10)$$

A medida que  $\varphi$  se mueve por el ecuador, desde  $0 \rightarrow 2\pi$ ,  $\Lambda$  cambia por una cantidad  $\Delta\Lambda$  igual a:

$$\Delta\Lambda = \int_0^{2\pi} d\Lambda = \int_0^{2\pi} 2gd\varphi = 4\pi g \quad (6.7.11)$$

Entonces, para que  $\exp(i\Lambda(\theta, \phi))$  esté bien definida, ha de ocurrir que:

$$\exp(i(\Lambda + \Delta\Lambda)) = \exp(i\Lambda) \Leftrightarrow \Delta\Lambda = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \Delta\Lambda/2\pi = 2g \in \mathbb{Z} \quad (6.7.12)$$

Esta curiosa condición sobre el número  $g$  tiene dos interpretaciones:

1. Por un lado, esta condición se puede interpretar como la cuantización de la carga magnética. Relacionando esta observación con el hecho de cómo cambia una función de onda al cambiar el gauge (ver Sección 6.6.6), Dirac demostró [4] que la existencia de monopolos conduciría a un hecho bien establecido en la experiencia diaria: la cuantización de la carga eléctrica.
2. Por otro lado, esta condición se puede interpretar como una condición sobre los  $U(1)$ -fibrados principales que se pueden construir con  $S^2$  como la variedad base. La condición implica que  $g = n/2$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . Además, la ecuación 6.7.10 lleva a  $\Lambda = 2g\varphi + \varphi_0$ . Cambiando la definición de la coordenada  $\varphi$  si fuera necesario, se puede eliminar el

factor de integración  $\varphi_0$  de modo que  $\Lambda = 2g\varphi = n\varphi$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . Como la función  $\exp(i\Lambda) = \exp(in\lambda)$  es la función de transición del fibrado, se deduce que: si  $\mathbf{n}=\mathbf{0}$ , entonces el fibrado es trivial, ya que la función de transición es la identidad. En este caso, la carga  $g$  del monopolo es 0, lo cual es lógico: sin la presencia de cargas, no hace falta usar un fibrado no trivial para describir el campo, ya que no hay singularidades de ningún tipo. Si  $\mathbf{n}=\mathbf{1}$  o  $\mathbf{n}=-\mathbf{1}$ , las funciones de transición son no triviales, y por tanto los fibrados también lo son. De hecho, estos fibrados son los de Hopf (como se demuestra en [8]).

Este ejemplo pone en manifiesto la importancia de la teoría matemática desarrollada, ya que se observa que no siempre se pueden usar fibrados triviales para describir una teoría física.

# Bibliografía

- [1] ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Physics Letters B*, 716(1):1–29, September 2012.
- [2] John Baez and Javier P. Muniain. *Gauge fields, knots and Gravity*, volume 4 of *Series on Knots and Everything 4*. World Scientific, 1994.
- [3] Ugo Bruzzo. Gauge Theory: from Physics to Geometry. *Rendiconti dell’Istituto di Matematica dell’Università di Trieste*, 42, 2011.
- [4] Paul Adrien Maurice Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field,. *Royal Society*, Volume 133(Issue 821):13, September 1931.
- [5] Albert Einstein. The field equations of Gravitation. *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 844-847, November 1915.
- [6] Mark J.D. Hamilton. *Mathematical Gauge Theory*. Universitext. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [7] Robert L. Bryant, editor. *Geometry and Quantum Field Theory*, volume 1 of *IAS/Park City Mathematics Series*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, March 1995.
- [8] Gregory L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge Fields: Interactions*, volume 141 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlang, 1991.
- [9] Jeffrey M. Lee. *Manifolds and differential geometry*. Number v. 107 in Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2009.
- [10] K. Moriyasu. *An Elementary Primer For Gauge Theory*. World Scientific Publishing Company, 1983.
- [11] Gregory L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge fields: Foundations*, volume 25 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer New York, New York, NY, 2011.
- [12] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Institute of Physics Publishing, June 2003.
- [13] Lochlainn O’Raifeartaigh and Norbert Straumann. Gauge theory: Historical origins and some modern developments. *Reviews of Modern Physics*, 72(1):1–23, January 2000.

- 
- [14] Barbara Roos. Principal bundles, Hopf bundles and Eigenbundles. *ETH Zürich*, 2018.
- [15] Gerd Rudolph and Matthias Schmidt. *Differential Geometry and Mathematical Physics: Part I: Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Netherlands, Dordrecht, 2013.
- [16] Gerd Rudolph and Matthias Schmidt. *Differential Geometry and Mathematical Physics: Part II. Fibre Bundles, Topology and Gauge Fields*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Netherlands, Dordrecht, 2017.
- [17] Mark R. Sepanski. *Compact Lie groups*. Number 235 in Graduate texts in mathematics. Springer, New York, N.Y, 2007. OCLC: ocm77530142.
- [18] Ya M. Shnir. *Magnetic monopoles*. Texts and monographs in physics. Springer, Berlin & New York, 2005. OCLC: ocm61430002.
- [19] Ryoyu Utiyama. Invariant Theoretical Interpretation of Interaction. *Physical Review*, 101(5):1597–1607, March 1956.
- [20] Edward Witten. 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B*, 311(1):46–78, December 1988.
- [21] Edward Witten. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. *Commun. Math. Phys.*, 121, 1989.
- [22] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, 96(1):191–195, October 1954.