Universidad de Valladolid

Grado en Estadística

Trabajo de Fin de Grado: Mediación y moderación en modelos lineales

PRESENTADO POR:
Alberto Calvo Madurga

TUTELADO POR:
Lourdes Barba Escribá

Índice

Resumen

En el presente documento se pretende analizar la utilidad de las técnicas de *mediación* y *moderación* en modelos lineales. La mediación trata el "cómo" una variable X afecta a una variable Y y la moderación trata el "cuándo" X afecta a Y. Se realiza una introducción de las metodologías con el fin de poder ilustrar los conceptos con dos conjuntos de datos reales. Este trabajo es de carácter introductorio por lo que se elaboran modelos simples con una posible ampliación posterior. Para la mediación se utiliza un conjunto de datos que incluye información sobre los suburbios de la ciudad de Boston, de donde se estudia cómo una mayor tasa de crimen o una mayor proporción de gente de clase baja influye negativamente en la relación entre el precio de las viviendas y la antigüedad de las mismas. Para la moderación utilizaremos un conjunto de datos que recoge características físicas acerca de los diamantes, de donde se obtiene que la relación entre la forma y el peso en quilates queda *moderada* por el corte del diamante. A lo largo del documento se exponen limitaciones o complicaciones de las técnicas con la finalidad de dotar al lector de una visión crítica acerca de las mismas.
Palabras clave: *mediación*, *moderación*, *modelos lineales*

Abstract

In the present document is intended to analyse the utility of *mediation* and *moderation* techniques in linear models. Mediation covers "how" a X variable affects a Y variable and moderation "when" X affects Y. An introduction of the methodologies is realised in order to ilustrate the concepts with two real datasets. This work is of an introductory nature, so simple models are elaborated with potential for further expansion. In mediation, a dataset including information about the suburbs of Boston city is used, where is studied how a higher crime rate or a higher proportion of lower class people negatively influences the relatioship between home prices and their age. For moderation we use a dataset that colects physical characteristics about diamonds, from where we obtain that relationship between shape and carat weight is moderated by the cut of the diamond. Throughout the document, limitations or complications of techniques are presented in order to give the lector a critical view of them.
Keywords: *mediation*, *moderation*, *linear models*

1 Introducción

Durante la investigación del funcionamiento y utilidad de las distintas aplicaciones de los modelos lineales se han desarrollado los conceptos de variables *mediadora* y *moderadora*. Estos tipos de variables indagan en la relación entre variables predictoras y variable dependiente.

La **mediación** pretende explicar la influencia de una variable predictora X en la variable respuesta Y. Esto se consigue mediante la descomposición de los efectos en componentes directos e indirectos. El efecto indirecto de X en Y cuantifica como un cambio en X produce un cambio en Y a través de una serie de pasos donde X está influenciada por una variable mediadora M, que a su vez influye en Y. El efecto directo, por otra parte, pretende cuantificar como un cambio en X produce un cambio en Y manteniendo constantes las variables mediadoras en el modelo. Este efecto directo representa los mecanismos o procesos que no están formalizados en la descomposición de caminos. La inclusión de la variable mediadora lo que pretende es buscar explicaciones teóricas que ayuden a entender los procesos que operan en la realidad y puede estar relacionada con un estado psicológico, proceso cognitivo, un cambio biológico etc.

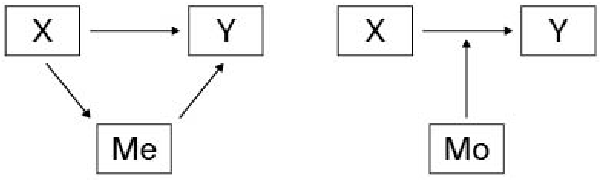

Figura 1.1: *Mediación y Moderación en modelos lineales*

La **moderación** o interacción lineal se produce cuando al interactuar dos variables predictoras X_1 y X_2, el efecto de una de ellas en la respuesta se expresa como una función de la otra, que es la denominada variable moderadora. En el modelo más básico, la interacción lineal entre el predictor focal X_1 y la variable moderadora X_2 se puede estimar y medir mediante la inclusión del producto cruzado X_1X_2 como regresor adicional. La propiedad de simetría de la interacción nos permite intercambiar los roles entre las variables predictoras sin cambiar la naturaleza de la interacción. Al aplicar la regresión obtenemos los coeficientes de las variables, donde el coeficiente de X_1 estima el **efecto condicional** de X_1 en la variable respuesta cuando X_2 es 0 y viceversa, y el coeficiente de X_1X_2 cuantifica como cambia el efecto condicional de X_1 sobre Y cuando X_2 se incrementa en 1 unidad. Cuando este último coeficiente es significativamente diferente de cero, podemos afirmar que X_2 modera el efecto de X_1 sobre Y.

La moderación en contraposición al ANOVA, no requiere que las variables interactuando sean categóricas, si bien es compatible con este tipo de datos así como multicategóricos.

Se estudiarán e implementarán modelos que incorporen estos conceptos mediante el software SAS, más especificamente utilizando la macro PROCESS para la mediación y distintos PROC como GLM o REG para la moderación y efectos condicionales. Se analizan los resultados y las conclusiones obtenidas poniendo en relieve posibles continuaciones del trabajo.

2 Mediación

Un buen análisis puede reflejar que existe relación entre una variable independiente y una dependiente, pero aún con experimentos con los que podamos concluir la existencia de esta relación, puede que no se explique lo suficiente de la naturaleza de la relación. Es decir, ¿cual es el verdadero proceso que lleva a X a causalmente influenciar a Y?. Con las limitaciones del análisis estadístico para establecer la relación causa-efecto, entraremos en el concepto de *análisis de la mediación* utilizando la regresión lineal. Este análisis permite cuantificar los *caminos de influencia* o los procesos que relacionan las variables independientes con la variable respuesta. Con todo esto sabido, podremos cerciorarnos del grado en el que una variable se puede decir que funciona como mediadora de una relación.

2.1 Base teórica

En un sistema causal una variable puede afectar a otra de forma *directa*, *indirecta*, a través de otras variables o tanto *directa* como *indirectamente*. Por ejemplo supongamos que se está estudiando elevar los requisitos para pasar de cuarto de la ESO a primero de Bachillerato, de forma que se quiere incentivar el estudio en los alumnos y por tanto elevar su rendimiento. El aumento de los requisitos podría influenciar directamente en el paso de curso o indirectamente en un mayor tiempo de estudio que a su vez consiguiese un mayor número de superaciones del curso.

En un modelo de regresión simple que estima Y a través de dos o más regresores, el coeficiente de una variable X_j cuantifica el efecto directo de esa variable en Y, ignorando los efectos indirectos a través de otras variables. Por tanto si quisiéramos conocer la cantidad en la que afecta el aumento de los requisitos en el grado de estudiantes que pasan de curso controlando el tiempo de estudio, no sería una buena idea. Si estuviésemos interesados en el *efecto total* de una variable independiente podríamos efectuar un experimento donde estudiantes de distintas comunidades tengan requisitos diferentes para ver que sucede.

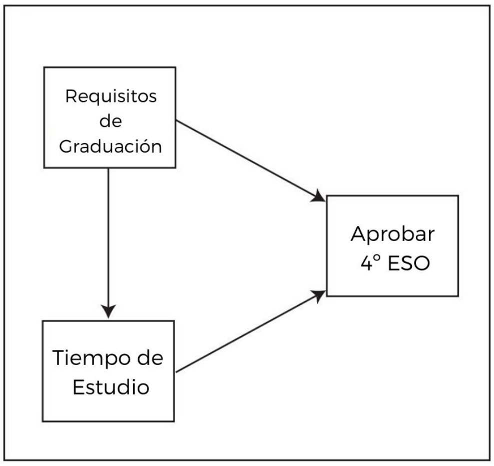

Figura 2.1: *Esquema básico de mediación*

Estaríamos implementando un modelo donde el tiempo de estudio es la variable *mediadora* en el proceso porque es la que conduce el efecto del aumento de requisitos en la completitud del curso. El diagrama 2.1 nos muestra que un aumento de requisitos afectará al tiempo de estudio, que a su vez afectará al numero de estudiantes que completen el curso. Esto es el efecto indirecto. Además el modelo incluye un camino donde el aumento de requisitos influencia directamente a la completitud del curso. Este efecto directo significa que elevar los requisitos puede influenciar mediante otro proceso diferente al tiempo de estudio, es decir, un mediador no especificado ni formalizado en el diagrama de caminos.

Los efectos directo, indirecto y totales en un *modelo de mediación* se pueden calcular con regresión de mínimos cuadrados. Para ilustrar los conceptos básicos de esta tarea se analizará un modelo con un solo mediador, *modelo simple de mediación* .En el diagrama 2.2 se ven claramente los tres caminos que surgen al desglosar los efectos. Cada uno de los caminos del modelo está etiquetado con un coeficiente de regresión procedente de las fórmulas 2.1, 2.2 y 2.3

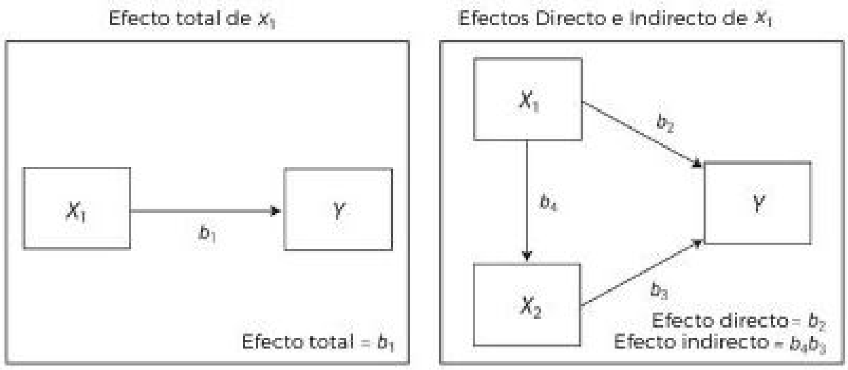

Figura 2.2: *Efectos directo, indirecto y total*

El efecto total de la variable independiente X_1 sobre Y se estima como

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 \tag{2.1}$$

Mediante la regresión podemos dividir el efecto total b_1 en dos componentes (directo e indirecto). El efecto directo de X_1 en Y viene del modelo que incluye X_1 y la variable mediadora X_2 como regresores

$$\hat{Y} = b_0 + b_2X_1 + b_3X_2 \tag{2.2}$$

donde b_2 es el efecto directo de X_1 en Y.

Para computar el efecto indirecto de X_1 en Y a través de X_2 hace falta un regresor adicional cuantificando el efecto de la variable independiente X_1 en el mediador X_2:

$$\hat{X}_2 = b_0 + b_4X_1 \tag{2.3}$$

El efecto indirecto de X_1 en Y a través de X_2 se puede calcular como

$$\text{Efecto indirecto de } X_1 \text{ en Y} = b_4 b_3 \tag{2.4}$$

y con los efectos directos e indirectos definidos, ya podemos expresar el efecto total de X_1 como la suma de ambos. Esto es

$$b_1 = b_2 + b_4 b_3 \tag{2.5}$$

La ecuación 2.5 muestra la equivalencia en la descomposición de los efectos y es cierta siempre y cuando X_2 e Y sean estimados utilizando mínimos cuadrados. La interpretación de los efectos se puede interpretar como los coeficientes de la regresión:

- El efecto total b_1 estima cuanto cambian dos casos que difieren en 1 unidad de X_1, en Y.
- El efecto directo b_2 estima como cambian dos observaciones que difieren en 1 unidad de X_1 pero son iguales en X_2, en Y.
- El efecto indirecto $b_4 b_3$ estima como difieren dos casos en Y a través de la secuencia de pasos causales en que X_1 afecta a X_2, que a su vez afecta a Y.

Se han estimado y expresado los efectos de X_1 de forma no estandarizada. Si aplicáramos regresión estandarizando el análisis sería el mismo, sin embargo no recomendamos realizar esta operación como explicaremos más adelante.

2.2 Inclusión de Covariables

Hasta ahora no hemos mencionado la posibilidad de incluir covariables en el modelo. Esto se puede hacer añadiéndolas como regresores en el análisis de los caminos representado por las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3. De todas formas la relación en la ecuación 2.5 solo será cierta si las covariables están incluidas en todas las ecuaciones.

En un ejemplo donde quisiéramos añadir la edad (C_1) y el número de suspensos a lo largo de la ESO (C_2) como covariables, las incluiríamos como

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_5 C_1 + b_6 C_2 \tag{2.6}$$

$$\hat{Y} = b_0 + b_2 X_1 + b_3 X_2 + b_7 C_1 + b_8 C_2 \tag{2.7}$$

$$\hat{X}_2 = b_0 + b_4 X_1 + b_9 C_1 + b_{10} C_2 \tag{2.8}$$

De esta forma la ecuación 2.5 se mantiene y las interpretaciones de los efectos directo, indirecto y total anterior se pueden aplicar con la asunción de “mantener la edad y el número de suspensos constante”. Como es obvio, el no incluir todas las covariables en los modelos rompe la igualdad entre la suma de efectos directos e indirectos con la suma del efecto total. Esto se debe a que no tiene sentido esta igualdad si no se mantienen constantes las covariables a lo largo de las ecuaciones.

2.3 Inferencia sobre los efectos

2.3.1 Inferencia sobre los efectos directo y total

Se cuantifica a través de los coeficientes b_1 y b_2 de las ecuaciones 2.1 y 2.2 o, si el modelo incluye covariables, mediante las ecuaciones 2.6 y 2.7. Una vez se implementa el modelo, cualquier software que realice la regresión devolverá los errores estándar para estos coeficientes con los que se puede realizar test de hipótesis nula sobre dichos efectos o la construcción de intervalos de confianza asociados.

2.3.2 Inferencia sobre los efectos indirectos

Como sabemos los efectos indirectos representan el camino a través de las variables mediadoras explicando la relación entre las variables independientes y la variable dependiente. Tenemos que poder descartar la casualidad como una explicación de la presencia del efecto indirecto. Esto lo podemos hacer mediante un test de hipótesis para comprobar que el valor verdadero del efecto indirecto, es decir ${}_Tb_{4T}b_3$, sea igual a cero. Se puede computar el error estándar asociado a este efecto de una manera simple

$$SE\left(b_4b_3\right) = \sqrt{b_4^2 SE^2\left(b_3\right) + b_3^2 SE^2\left(b_4\right)} \tag{2.9}$$

Sobel (1982) [3] sugiere utilizar $Z = b_4b_3/SE(b_4b_3)$, interpretando Z como una variable normal con su p-valor correspondiente asociado a la hipótesis nula de ${}_Tb_{4T}b_3 = 0$. No obstante no se recomienda utilizar este test ya que se está asumiendo una distribución normal de la muestra.

Dos alternativas mejores son la creación del *Intervalo de Confianza Bootstrap* y del *Intervalo de Confianza Monte Carlo* ya que ninguno de estos dos asumen ninguna distribución de b_4b_3. Son dos métodos intensivos computacionalmente hablando. El método de Boostrap requiere la estimación del modelo de mediación muchas veces. Para ello remuestrea aleatoriamente y con repetición N casos de los datos existentes y utilizando la distribución resultante de todas estas estimaciones se crea un intervalo de confianza del 95% del efecto indirecto con los valores de la distribución Bootstrap que definen los percentiles 2.5o y 97.5o de la distribución.

El método de Monte Carlo solo requiere una estimación del modelo. Se estima una vez b_3 y b_4 y sus errores estándar. Posteriormente se genera un valor correspondientes a una distribución normal de media b_4 y desviación estandar SE(b_4) que se multiplica con otro correspondiente a una distribución normal de media b_3 y desviación estandar SE(b_3). Este proceso se repite muchas veces y de nuevo se construye el intervalo de confianza del 95% para el efecto indirecto con los valores de la distribución Monte Carlo que definen los percentiles 2.5o y 97.5o de la distribución. Investigadores han demostrado que estos dos últimos métodos funcionan mejor que el test de Sobel y además no mantienen ninguna asunción sobre la distribución de los datos.

2.4 Modelos de mediación múltiples

Hasta ahora hemos hablado únicamente del modelo de mediación más simple, donde tenemos una única variable independiente X, una variable dependiente Y y una variable mediadora M. Obviamente a partir de esta base se puede añadir mayor complejidad a los modelos añadiendo un mayor número de variables. Un ejemplo es el *modelo de mediación paralelo* donde existe más de un mediador entre la variable independiente y la dependiente, pero estas variables mediadoras no están conectadas entre ellas. En el modelo correspondiente al diagrama 2.3 se pretende analizar como influye la frecuencia de ejercicio X_1 en la pérdida de peso Y y donde se han incluido dos variables mediadoras como son la ingesta de comida X_2 y la tasa metabólica X_3. Estas variables mediadoras no están relacionadas entre si. El modelo resultante pretende explicar como afecta la frecuencia de ejercicio en la pérdida de peso a través de tres caminos: uno indirecto a través de la ingesta de comida; otro indirecto a través del metabolismo y uno final directo sin tener en cuenta el efecto de estas dos.

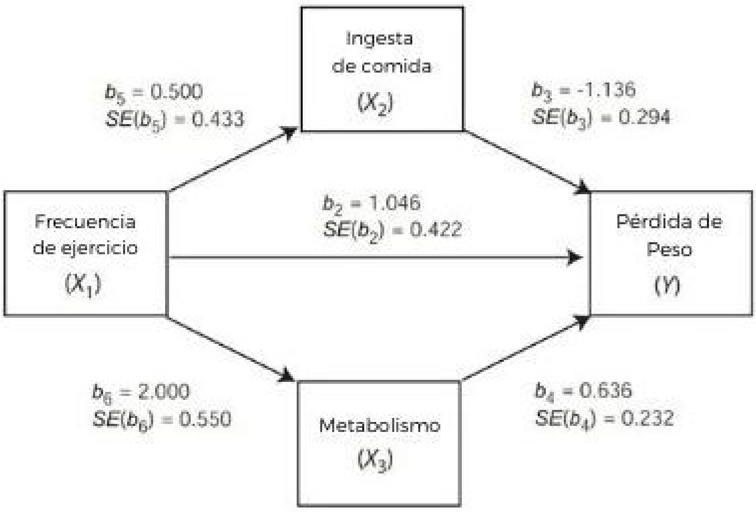

Figura 2.3: *Modelo de Mediación Multiple Paralelo*

Del mismo modo podríamos tener información a priori de que la tasa metabólica influencie la ingesta de comida. De esta manera podríamos desear la construcción de un *modelo de mediación en serie*, como el descrito en el diagrama 2.4. En este modelo surgen cuatro caminos de influencia, tres indirectos y uno directo. Un camino indirecto explica el efecto solo a través de la ingesta de comida; otro indirecto explica el efecto a través de la tasa metabólica y otro opera a través de la tasa de metabolismo y la ingesta de comida en secuencia o *en serie*. El camino final es el efecto directo que no tiene en cuenta ni la ingesta de comida ni la tasa metabólica.

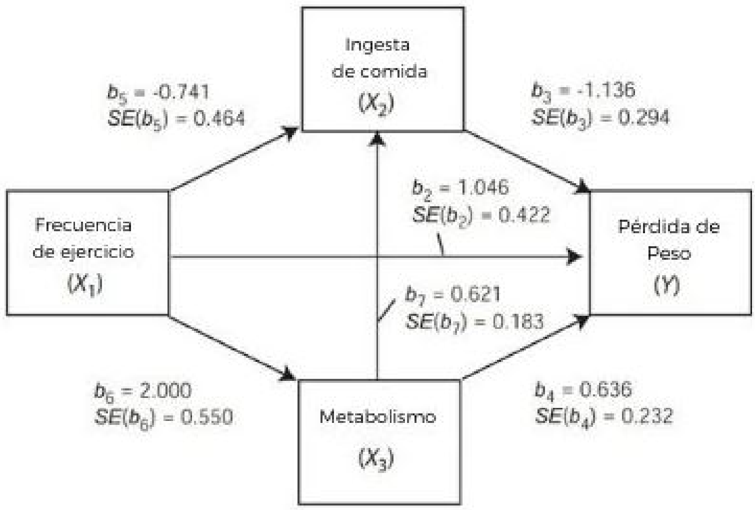

Figura 2.4: *Modelo de Mediación Multiple en Serie*

En ambos modelos, el efecto total se puede de nuevo desglosar en componentes directos e indirectos, y estos efectos se pueden estimar a través del análisis de regresión como en el caso más simple.

2.4.1 Modelo de mediación paralelo

El efecto total en un modelo de mediación no está determinado por el número de mediadores entre la variable independiente X_1 y dependiente Y. El efecto total de X_1 en Y es b_1 en el modelo de regresión estimando Y con X_1 como en la ecuación 2.1. En un modelo de mediación paralelo con k variables mediadoras, podemos estimar los efectos directo e indirecto regresando la variable dependiente de la variable independiente y todas las variables mediadoras en una única regresión y luego cada uno de los mediadores con las variables independientes en k regresiones separadas con X_1 como único regresor. En el ejemplo del diagrama 2.3 se estima la pérdida de peso (Y) de la frecuencia de ejercicio (X_1), ingesta de comida (X_2) y tasa metabólica (X_3):

$$\hat{Y} = b_0 + b_2X_1 + b_3X_2 + b_4X_3 \tag{2.10}$$

De nuevo el coeficiente de las variables mediadoras cuantifica como un cambio de una unidad en la variable independiente afecta la variable respuesta manteniendo el resto constante.

Los efectos indirectos de la frecuencia de ejercicio X_1 en la pérdida de peso Y requieren dos coeficientes de regresión para cada mediador, uno proveniente del modelo de la variable dependiente en 2.10 y otro de una regresión estimando el mediador con la variable independiente. Los modelos de la variable independiente serían

$$\begin{aligned} \hat{X}_2 &= b_0 + b_5X_1 \\ \hat{X}_3 &= b_0 + b_6X_1 \end{aligned} \tag{2.11}$$

En este ejemplo, $b_5 = 0.5$ y $b_6 = 2.0$, por tanto una hora adicional de ejercicio (X_1) se transforma en 0.5 unidades más de ingesta de comida y 2 unidades más de tasa metabólica.

Estas estimaciones, combinadas con las estimaciones de los efectos de los mediadores en la variable dependiente, nos dan los efectos indirectos. El efecto indirecto de X_1 en Y a través de X_2 es el producto del efecto de X_1 en X_2 (b_5) y de X_2 en Y (b_3) manteniendo el resto constante. De la misma forma el efecto indirecto de X_1 en Y a través de X_3 es el producto del efecto de X_1 en X_3 (b_6) y de X_3 en Y (b_4).

Se cumple que el efecto total de b_1 es la suma del efecto directo de X_1 y los efectos indirectos de X_1 a través de X_2 y X_3. Esto es

$$b_1 = b_2 + b_5 b_3 + b_6 b_4 \tag{2.12}$$

Ya hemos comentado como realizar inferencia sobre los efectos directo y total. Para la inferencia sobre los efectos indirectos podemos utilizar los métodos de la sección 2.3.2 a través de los intervalos de confianza Bootstrap y/o Monte Carlo.

2.4.2 Modelo de mediación en serie

La diferencia del modelo de mediación en serie con el modelo de mediación en paralelo es la inclusión del efecto causal entre las variables mediadoras. En un modelo de mediación en serie como el de la figura 2.4, la única diferencia con el modelo en paralelo que acabamos de comentar es el efecto causal de X_3 en X_2. De esta forma las tres ecuaciones necesarias para estimar los efectos directo e indirecto son

$$\begin{aligned}\hat{Y} =& b_0 + b_2 X_1 + b_3 X_2 + b_4 X_3 \\ \hat{X}_2 =& b_0 + b_5 X_1 + b_7 X_3 \\ \hat{X}_3 =& b_0 + b_6 X_1\end{aligned} \tag{2.13}$$

Podemos caer en la cuenta de que las ecuaciones para Y y X_3 en 2.13 son las mismas que con el modelo paralelo asociado. Esto se debe a que el efecto directo de X_1 viene del modelo de Y, que no cambia al conectar los mediadores en una cadena causal. Del mismo modo el efecto total no va a cambiar ya que no depende del número de mediadores incluidos o las relaciones entre ellos.

Los efectos indirectos de la frecuencia de ejercicio en la pérdida de peso, que ahora son tres, se computan multiplicando los componentes de cada camino que enlaza X_1 con Y.

- El efecto indirecto a través únicamente de la tasa metabólica (X_3) es $b_6 b_4$. Es el mismo que en el modelo paralelo ya que las ecuaciones donde operan b_4 y b_6 son las mismas en ambos modelos.
- El efecto indirecto a través únicamente de la ingesta de comida (X_2) es el único diferente con respecto al modelo en paralelo asociado. Esto se debe a que en este caso el efecto se estima controlando el metabolismo. Los coeficientes b_5 de ambos modelos por tanto son distintos.

- El efecto indirecto restante es el que pasa primero por el metabolismo, después por la ingesta de comida y finalmente por la pérdida de peso. Es el producto de los tres tramos consecutivos que constituyen el camino más largo en el diagrama.

De nuevo el efecto total se estima como la suma de efectos directos e indirectos. En este caso

$$b_1 = b_2 + b_5 b_3 + b_6 b_4 + b_6 b_7 b_3 \tag{2.14}$$

Para realizar inferencias acerca de los efectos nos podemos basar de nuevo en los métodos comentados en las secciones anteriores.

2.5 Complicaciones y ampliaciones

2.5.1 Causalidad y Orden Causal

En el análisis de caminos y de la mediación, el estudio puede complicarse en exceso ya que la mediación implica una secuencia de al menos dos relaciones causales. Bajo un estudio de un diseño experimental correcto podríamos llegar a establecer inferencia causal sobre el efecto de una variable independiente en el mediador y la variable dependiente, así como la dirección del orden causal para dichos efectos. Sin embargo esto no nos permite concluir que el mediador afecte a la variable dependiente. Pudiera ser que sea la variable dependiente la que realmente afecte a la mediadora, alterando el orden de la relación.

Aunque se nos puede ocurrir reconstruir el análisis cambiando los roles de mediador y variable dependiente, lo normal es encontrar evidencias de efecto indirecto significativo de nuevo y por tanto de presencia de mediación. No hay manera de determinar cual es la configuración correcta. Además cuando la variable independiente no es asignada aleatoriamente, se pierde la potestad de realizar afirmaciones inequívocas sobre la dirección de orden causal. De esta forma la causalidad y orden causal solo se puede establecer a través de teoría, información a priori, lógica o combinación de estas.

Como es lógico existen detractores de la utilidad de estas técnicas y es que las conclusiones a las que se pueden llegar están determinadas por la forma de diseño del estudio, forma de recoger los datos... El análisis de la mediación es un enfoque para describir relaciones y comprobar hipótesis, pero la conexión de variables en un orden teórico y la posterior medida de los efectos directos e indirectos no implica que haya que interpretar dicha relación en términos causales. En definitiva, en los ejemplos mostrados no se intenta imponer que las relaciones modeladas son necesariamente causales, pero la mediación nos ayuda a interpretar los efectos en un sentido puramente matemático.

2.5.2 Mediación de un efecto total no significativo

Existe la asunción de que la mediación solo es interesante una vez que se establece que existe un efecto a mediar. Hablando en términos estadísticos esto significa que el análisis de mediación solo tiene sentido si existe una evidencia de efecto de la variable independiente en la variable dependiente. La ausencia de esta evidencia, implica que el análisis de la mediación no tiene sentido.

Sin embargo, no nos queda más remedio que estar en desacuerdo con esta perspectiva. Una variable independiente puede afectar causalmente a una dependiente incluso sin estar correladas. Hay que caer en cuenta de que el efecto total de una variable independiente es la suma de efecto directo e indirecto y no existe ningún requisito matemático que imponga que estos efectos deban tener el mismo signo. Siendo diferentes en signo, pudiera ser que la suma diese cero y por tanto no podríamos rechazar la no existencia de efecto.

En modelos complejos con más de un mediador entre la variable independiente y la variable dependiente, los efectos indirectos a través de los distintos mediadores podrían ser diferentes en signo y si el efecto directo es pequeño, el resultado global podría ser un efecto total nulo. En el trabajo de Pitts y Safer (2016) [4], no se encontraron evidencias acerca de la relación entre experiencia en combate y depresión en una muestra de médicos de la armada norteamericana. La experiencia tenía un efecto indirecto positivo en la depresión a través de los sentimientos de los médicos afectados y un efecto indirecto negativo a través del positivismo acerca de su percepción de la experiencia de combate. Médicos con mayor experiencia en combate percibían mayor espanto durante las experiencias, lo cual estaba relacionado positivamente con la depresión (efecto indirecto positivo). Pero a su vez tenían una visión más positiva de la experiencia en combate, la cual estaba relacionada negativamente con la depresión (efecto indirecto negativo). No existía efecto directo y además al sumar los dos efectos indirectos opuestos, obteníamos un resultado donde el efecto no era estadísticamente significativo.

En resumen, el efecto directo e indirecto de una variable independiente es una agregación de múltiples caminos que pueden funcionar en direcciones opuestas y por tanto no podemos condicionar la búsqueda de efectos a la existencia o no del efecto total, esto nos puede llevar a resultados erróneos o incluso a la no realización de análisis que si debieran ser efectuados.

2.5.3 Variables independientes categóricas

Hemos visto que el efecto indirecto de una variable independiente en una variable dependiente a través de una variable mediadora se pueden calcular como el producto de dos coeficientes, uno que cuantifica el efecto de la variable independiente en el mediador y otro que cuantifica el efecto del mediador en la variable dependiente. Pero, ¿qué sucede si la variable independiente es multicategórica? Se requieren g-1 coeficientes para representar g categorías de una variable categórica y la interpretación de los coeficientes dependerá del sistema de codificación utilizado.

De este modo, cuando en un análisis de mediación la variable independiente es multicategórica, no existe un efecto directo, indirecto y total único de la variable, si no que tenemos g-1 efectos directos, indirectos y totales relativos.

2.5.4 Fijación de los efectos directos a cero

Si nos encontramos en una situación en la que queremos realizar un análisis de mediación y tenemos la creencia de que no hay ningún proceso por el que la variable independiente pueda influenciar la variable dependiente más que a través del mediador propuesto, ¿se debe fijar el efecto directo a cero? La respuesta es no y hay dos razones principales para ello:

- El efecto total de una variable independiente en una variable dependiente es la suma de efecto directo e indirecto, de forma que si fijamos el efecto directo a cero estamos forzando a que el efecto indirecto sea igual al total. Esto pudiera no ser un problema si en verdad fuese así, pero si estamos equivocados haremos del efecto indirecto un estimador sesgado del efecto indirecto verdadero.

  Es mejor dejar que el efecto directo se derive de los datos y aunque no observemos una significancia de este, se debe resistir la tentación de eliminarlo del modelo. De hecho existen partidarios de que por mucho que un modelo de regresión nos diga que existen covariables no significativas, esto no sea una razón de peso suficiente para eliminarlas del modelo.

- La segunda razón es que fijar el efecto directo a cero es igual a presuponer que no existe ningún otro proceso actuando sobre el modelo más que el que opera a través del mediador. La inclusión del efecto directo proporciona un modelo mas realista que no fuerza a que los mecanismos de actuación solo se puedan manifestar a través de los efectos indirectos estimados.

2.6 Implementación de modelos

En esta sección vamos a efectuar un análisis inicial que nos permita ilustrar los conceptos introducidos hasta ahora. Los ejemplos que hemos utilizado no dejan de ser idóneos para clarificar la materia, pero esto en general no pasa al utilizar conjunto de datos reales. Por este motivo es necesaria una tarea de búsqueda de datos que permitan realizar un análisis de mediación y moderación en una primera fase de acercamiento. La moderación se explica e implementa hace más adelante en el documento.

2.6.1 Conjunto de datos: Boston housing

El conjunto de datos seleccionado se compone de 506 suburbios de la ciudad de Boston en los que se han recogido diferentes parámetros de calidad de vida junto con la mediana del valor de las casas. Estos datos fueron recogidos en el censo de 1970 y son muy adecuados para realizar las labores de regresión y más específicamente de análisis de mediación.

2.6.2 Análisis de mediación en paralelo

Se pretende observar como influye la antigüedad de las viviendas en el precio de las mismas, esto lo hacemos con la variable ***age*** X_1 que mide la proporción de edificios construidos antes de 1940. La variable respuesta Y es ***medv*** que contiene la mediana del precio de las viviendas para cada suburbio. Para realizar el análisis de mediación se utilizarán dos mediadores: X_2 corresponde a la variable ***crim*** que indica la tasa de crimen per cápita y X_3 que corresponde a la variable ***lstat*** e indica la proporción de personas de clase social baja. Estos dos mediadores pretenden explicar la relación entre X_1 e Y en un modelo de mediación paralelo.

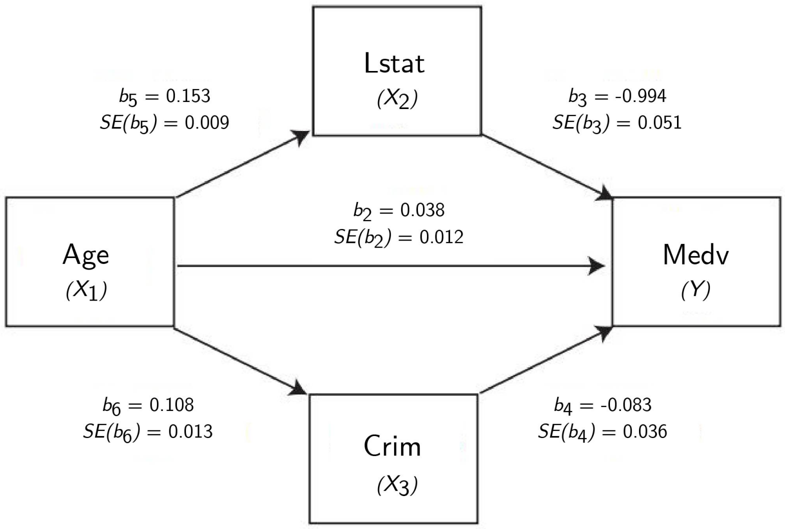

Figura 2.5: *Modelo de Mediación Paralelo*

El análisis lo vamos a realizar en SAS con ayuda de la macro **PROCESS** (ver Anexo A) que tiene una sintaxis muy intuitiva en la que se le indica fácilmente qué papel juega cada variable. Una vez ejecutadas las órdenes se muestra en la salida toda la información necesaria para validar y analizar el funcionamiento del modelo (figuras 2.6, 2.7 y 2.8). Podemos representar con las ecuaciones 2.10 y 2.11 el modelo como

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= 32.82 + 0.038X_1 - 0.994X_2 - 0.083X_3 \\ \hat{X}_2 &= 2.174 + 0.153X_1 \\ \hat{X}_3 &= -3.778 + 0.108X_1 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Sistema SAS

** PROCESS v3.4.1 for SAS **

Written by Andrew F. Hayes, Ph.D. http://www.afhayes.com

Documentation available in Hayes (2018) www.guilford.com/p/hayes3

****

Model and Variables	
Model:	4
Y:	MEDV
X:	AGE
M1:	LSTAT
M2:	CRIM

Sample size:
506

Custom seed:
15456

****

OUTCOME VARIABLE:
LSTAT

Model Summary						
R	R-sq	MSE	F	df1	df2	p
0.6023	0.3628	32.5577	286.9750	1.0000	504.0000	0.0000

Model						
	coeff	se	t	p	LLCI	ULCI
constant	2.1744	0.6686	3.2523	0.0012	0.8609	3.4879
AGE	0.1528	0.0090	16.9403	0.0000	0.1351	0.1705

****

Figura 2.6: *Salida de PROCESS para SAS en un modelo de mediación paralelo estimando los efectos directo e indirecto de la proporción de viviendas construidas antes de 1940 en la mediana del precio de las viviendas, con dos intervalos de confianza bootstrap del 95% para la tasa de crimen para los efectos indirectos a través de la tasa de crimen per cápita y la proporción de gente de clase baja*

OUTCOME VARIABLE:
CRIM

Model Summary						
R	R-sq	MSE	F	df1	df2	p
0.3527	0.1244	64.9096	71.6194	1.0000	504.0000	0.0000

Model						
	coeff	se	t	p	LLCI	ULCI
constant	-3.7779	0.9440	-4.0021	0.0001	-5.6325	-1.9233
AGE	0.1078	0.0127	8.4628	0.0000	0.0828	0.1328

****

OUTCOME VARIABLE:
MEDV

Model Summary						
R	R-sq	MSE	F	df1	df2	p
0.7456	0.5559	37.7858	209.4951	3.0000	502.0000	0.0000

Model						
	coeff	se	t	p	LLCI	ULCI
constant	32.8280	0.7477	43.9031	0.0000	31.3590	34.2971
AGE	0.0376	0.0122	3.0736	0.0022	0.0136	0.0617
LSTAT	-0.9941	0.0508	-19.5875	0.0000	-1.0938	-0.8944
CRIM	-0.0826	0.0359	-2.2987	0.0219	-0.1532	-0.0120

Figura 2.7: *Salida de PROCESS para SAS en un modelo de mediación paralelo estimando los efectos directo e indirecto de la proporción de viviendas construidas antes de 1940 en la mediana del precio de las viviendas, con dos intervalos de confianza bootstrap del 95% para la tasa de crimen para los efectos indirectos a través de la tasa de crimen per cápita y la proporción de gente de clase baja*

******************************** TOTAL EFFECT MODEL ********************************

OUTCOME VARIABLE:
MEDV

Model Summary						
R	R-sq	MSE	F	df1	df2	p
0.3770	0.1421	72.7114	83.4775	1.0000	504.0000	0.0000

Model						
	coeff	se	t	p	LLCI	ULCI
constant	30.9787	0.9991	31.0064	0.0000	29.0158	32.9416
AGE	-0.1232	0.0135	-9.1366	0.0000	-0.1496	-0.0967

************** TOTAL, DIRECT, AND INDIRECT EFFECTS OF X ON Y **************

Total effect of X on Y					
Effect	se	t	p	LLCI	ULCI
-0.1232	0.0135	-9.1366	0.0000	-0.1496	-0.0967

Direct effect of X on Y					
Effect	se	t	p	LLCI	ULCI
0.0376	0.0122	3.0736	0.0022	0.0136	0.0617

Indirect effect(s) of X on Y:				
	Effect	BootSE	BootLLCI	BootULCI
TOTAL	-0.1608	0.0128	-0.1861	-0.1364
LSTAT	-0.1519	0.0135	-0.1790	-0.1262
CRIM	-0.0089	0.0038	-0.0151	-0.0002

Figura 2.8: *Salida de PROCESS para SAS en un modelo de mediación paralelo estimando los efectos directo e indirecto de la proporción de viviendas construidas antes de 1940 en la mediana del precio de las viviendas, con dos intervalos de confianza bootstrap del 95% para la tasa de crimen para los efectos indirectos a través de la tasa de crimen per cápita y la proporción de gente de clase baja*

El efecto directo de la antigüedad de los edificios es $b_2 = 0.038$ con $p<0.005$, es decir que es significativamente diferente de cero. Los efectos parciales de los dos mediadores $b_3 = -0.994$ y $b_4 = -0.083$ también son significativamente distintos de cero. Podemos interpretar como que manteniendo la antigüedad y la tasa de crimen per cápita constantes, un aumento de 1 unidad en la proporción de gente de clase baja se relaciona con una reducción de 1 unidad en la mediana del precio de las viviendas. De la misma manera, manteniendo la antigüedad y proporción de gente de clase baja constantes, un aumento de 1 unidad en la tasa de crimen per cápita se corresponde con la reducción de 0.08 unidades en la mediana del precio de las viviendas.

Por otro lado, tenemos $b_5 = 0.153$ y $b_6 = 0.108$ que indican que un aumento de 1 unidad en la antigüedad de las casas se traduce en 0.153 unidades más de proporción de gente de clase baja y 0.108 unidades más en la tasa de criminalidad. Estas estimaciones, combinadas con las estimaciones de los efectos de los mediadores en la variable dependiente, nos dan los efectos indirectos. El efecto indirecto de X_1 en Y a través de X_2 es $b_5b_3 = (0.153)(-0.994) = -0.152$ lo que nos indica que 1 unidad más en la variable que mide la antigüedad de los edificios X_1 reduce la mediana del precio Y en 0.152 unidades a través de la proporción de gente de clase baja X_2. El efecto indirecto de X_1 en Y a través de X_3 se calcula de la misma manera, sería $b_6b_4 = (0.108)(-0.083) = -0.009$ que es muy pequeño pero es significativamente distinto de cero. Este valor indica que 1 unidad más en la X_1 reduce la mediana del precio Y en 0.009 unidades a través de la tasa de criminalidad por cabeza X_3.

Utilizando la macro **PROCESS**, el programa además genera por defecto los intervalos de confianza Bootstrap del 95% para los efectos indirectos utilizando 5000 muestras 2.8. En ellos se muestra la evidencia de la mediación de X_2 y X_3 en la relación entre X_1 e Y. Ambos efectos son negativos y significativamente distintos de cero ya que este valor no está incluido en los intervalos de confianza.

Como se indica en el apartado final de posibles ampliaciones, se podría haber profundizado mucho más en los datos y haber realizado análisis con tareas como selección de variables, implementación de modelos más complejos o visualización de los modelos pero estas tareas se consideran más allá del propósito del trabajo.

3 Moderación (interacción lineal)

En un modelo básico de regresión lineal el efecto de un regresor se explica a través de su coeficiente y es invariante frente a valores en otros regresores. Esto sin embargo no tiene por que ser así y en este capítulo vamos a explicar como cuando el efecto de una variable depende de otra, podemos decir que estas dos variables *interactúan* o que una variable *modera* el efecto de la otra. Nos centraremos en la interacción lineal, mediante la que el efecto de un regresor es una función lineal de otro.

A diferencia del ANOVA, no existe ningún requisito de que las variables predictoras tengan que ser categóricas. Mediante cualquier software que pueda realizar la regresión, se pueden estimar y realizar test de hipótesis sobre la interacción entre variables numéricas, dicotómicas o categóricas en la combinación que sea.

3.1 Fundamentos de la interacción

Hasta ahora en un modelo de la forma $\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$, un cambio de una unidad en X_1 cambia $\hat{Y}$ de la misma forma independientemente del valor de X_2. Por tanto cuando decimos que el efecto de X_1 es b_1 controlando X_2, realmente decimos que fijando X_2, cambiar una unidad de X_1 cambia $\hat{Y}$ independientemente del valor en el que se haya fijado X_2. Esta idea se expresaría de forma visual como un conjunto de lineas paralelas representando el efecto de X_1.

Sin embargo el efecto de un regresor puede depender de otro. Cuando esto sucede decimos que los dos regresores *interactúan* o que existe *interacción* entre los dos regresores en su efecto sobre Y. Un ejemplo clásico podría ser la realización de un experimento donde se mide el efecto de un tratamiento sobre hombres y mujeres teniendo un grupo de control y otro al que se le aplica el tratamiento. Si en el grupo de control, en la variable dependiente tenemos un valor para los hombres y otro distinto para las mujeres, diríamos que la condición del experimento y el sexo interactúan. En otras palabras, la diferencia media entre las dos condiciones es diferente entre hombres y mujeres. De esta forma podemos decir que la interacción significa que **"las diferencias son diferentes"**.

Otro término aceptado y utilizado con frecuencia es el de *moderación*. En este ejemplo diríamos que el efecto de la condición experimental (tratamiento vs control) está *moderado* por el sexo. Por tanto el sexo es la variable moderadora y la condición experimental es el *predictor focal*. De forma más general:

"Si X_2 modera la relación entre X_1 e Y, cambiar X_1 tiene un efecto distinto en Y dependiendo del valor de X_2".

3.2 Interacción entre dos regresores numéricos

La definición de interacción que acabamos de comentar es genérica y nos sirve para explicar los fundamentos esenciales de la moderación en el caso en el que ambas variables regresoras son numéricas. En la figura 3.1 observamos la interacción entre dos regresores numéricos X_1 y X_2 y nos podemos fijar en que la ordenada de Y cambia conforme el valor de X_2. Además la pendiente también cambia, algo que no sucedería si no existiera interacción entre las variables. Cada línea representa la relación de Y con X_1 bajo un determinado valor de X_2 y cada uno de esos efectos se denomina *efecto condicional*. Siendo X_2 una variable numérica podemos tener infinitos efectos condicionales pero si X_2 fuera variable categórica con g categorías, habría únicamente g efectos condicionales de X_1.

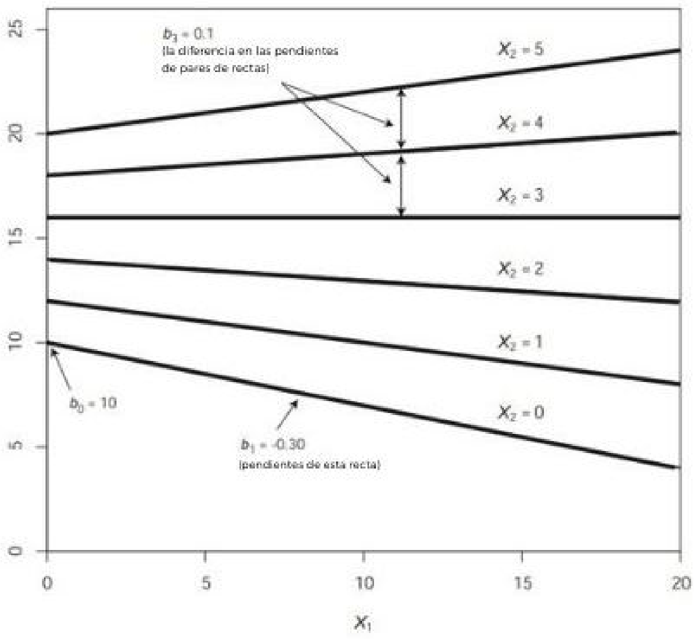

Figura 3.1: *Interacción lineal simple*

A veces se confunden los términos interacción e intercorrelación. Teniendo una variable X, una covariable C y la respuesta Y, decimos que la *interacción* entre X y C explica como se relacionan con Y cuando se consideran de forma conjunta, por tanto solo pueden ser computadas cuando los valores de Y son conocidos. Sin embargo la *correlación* entre X y C puede ser calculada sin la presencia de una variable tercera Y. La correlación por tanto explica como el efecto de X en Y es afectado por la *inclusión* de C mientras que la interacción significa que el efecto de X en Y *depende* del valor de C.

3.2.1 Interacción lineal simple

Si bien cualquier patrón de lineas de regresión no paralelas describe interacción, nos centraremos en el modelo de interacción simple, donde el efecto de un regresor en Y está relacionado linealmente con el valor de otro regresor. En la tabla 3.1 observamos claramente como los seis efectos condicionales tienen una relación lineal exacta con X_2; por cada incremento de 1 unidad en X_2, se produce un incremento de 0.1 en b_1. De hecho esta relación lineal se puede formular como $b_1 = -0.3 + 0.1X_2$, que es el modelo del efecto condicional de X_1 sobre Y.

X_2	b_0	b_1
0	10.0	−0.3
1	12.0	−0.2
2	14.0	−0.1
3	16.0	0.0
4	18.0	0.1
5	20.0	0.2

Figura 3.2: *Rectas de regresión representadas en la figura* 3.1

La interacción lineal simple se puede representar con una ecuación con dos términos lineales y un producto cruzado definido como el producto de las dos variables interaccionando

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_1X_2 \tag{3.1}$$

Considerando el diagrama 3.1 sabemos que:

- La recta de regresión cuando $X_2 = 0$, tiene pendiente -0.3 y esta pendiente aumenta 0.1 por cada incremento de una unidad en X_2
- La relación entre el efecto de X_1 en Y y X_2 se puede representar como $-0.3+0.1X_2$ como hemos comentado anteriormente
- La ordenada de Y en la recta de regresión es 10 cuando $X_2 = 0$ y aumenta de dos en dos por cada incremento de una unidad de X_2

Con todo esto en cuenta, podríamos expresar la relación entre la ordenada en el origen y X_2 como una función de la forma $10 + 2X_2$. Si sustituimos estas dos funciones en la ecuación de regresión lineal simple $\hat{Y} = b_0 + b_1X_1$, obtenemos

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 = (10 + 2X_2) + (-0.3 + 0.1X_2)X_1 \tag{3.2}$$

que se puede escribir de forma equivalente como

$$\hat{Y} = 10 - 0.3X_1 + 2X_2 - 0.1X_2X_1 \tag{3.3}$$

No se debe perder la perspectiva de que un modelo con un producto cruzado X_1X_2 puede tomar la forma de rectas de regresión paralelas, que significaría que el efecto de X_1 en Y es constante independientemente del valor de X_2. Este modelo se puede ver como un caso especial de la ecuación 3.1 donde el coeficiente b_3 está fijado a cero. Esto significaría que el modelo no contiene interacción y se puede expresar como $\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + 0X_1X_2$.

En la ecuación 3.1, b_3 cuantifica cuanto cambia el efecto condicional de X_1 cuando X_2 cambia una unidad. Como cualquier coeficiente proveniente de un análisis de regresión, se pueden realizar test de hipótesis acerca de su valor. Para comprobar la no interacción habría que comprobar si el verdadero valor del coeficiente b_3 es 0 ($_Tb_3 = 0$). Cualquier programa de análisis de regresión proporciona la información necesaria para la realización de este test. El rechazo de la hipótesis nula de que el verdadero valor sea 0, indica que el efecto de X_1 en Y depende de X_2 y de la misma forma se puede construir un intervalo de confianza para ver si el 0 está o no incluido en él. En el caso de que esté fuera del intervalo, concluiríamos en la existencia de interacción.

3.2.2 Simetría de la Interacción

Hasta ahora hemos hablado de la interacción lineal con un modelo base que incluye X_1, X_2 y el producto cruzado X_1X_2, que es el que establece que el efecto de X_1 en Y depende linealmente de X_2. Interpretado así, X_2 tiene el papel de moderador y X_1 de predictor focal. Sin embargo, podríamos haber cambiado los roles de X_1 y X_2 y tendríamos una descripción alternativa de la relación entre X_1 y X_2 donde en este caso el modelo nos diría como el efecto condicional de X_2 en Y cambia cuando X_1 cambia.

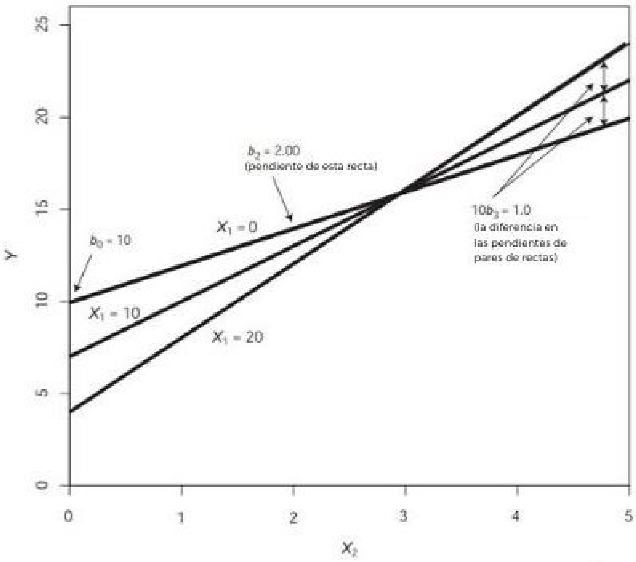

Figura 3.3: *Representación alternativa basada en la simetría de la interacción*

Este diagrama muestra una representación alternativa del modelo $\hat{Y} = 10 - 0.3X_1 + 2.0X_2 + 0.1X_1X_2$ y luce muy diferente a la figura 3.1, mientras que están representando el mismo modelo. Ahora estas rectas se encuentran en la forma $\hat{Y} = b_0 + b_2X_2$ y utilizando la misma lógica de la sección anterior, tendríamos la ecuación alternativa como

$$\hat{Y} = b_0 + b_2X_2 = (10 - 3X_1) + (2.0 + 0.1X_1)X_2 \tag{3.4}$$

que a su vez se podría simplificar como

$$\hat{Y} = 10 - 0.3X_1 + 2X_2 - 0.1X_2X_1 \tag{3.5}$$

Se demuestra que matemáticamente el modelo es el mismo alterando los papeles de moderador y predictor focal y tampoco altera como es lógico el test de hipótesis de la interacción asociado al estimador de b_3

Además de las representaciones de las figuras 3.1 y 3.3, podríamos tener otra más en un espacio tridimensional. Esta representación se denomina *superficie deformada*

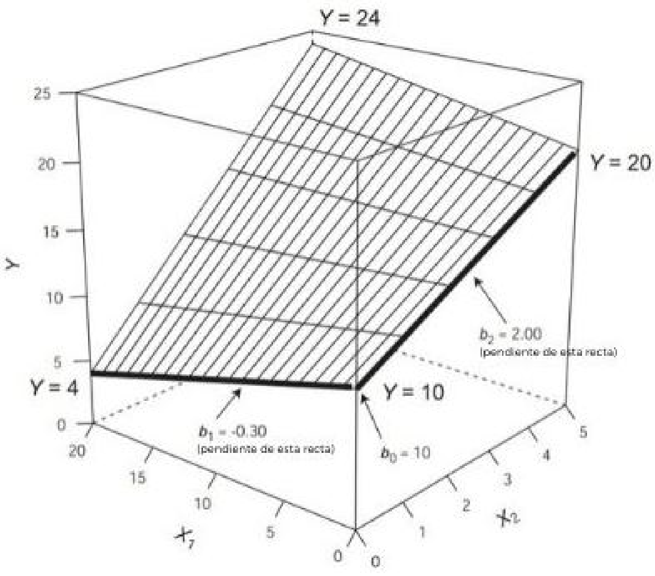

Figura 3.4: *Representación de la interacción tridimensional*

Con respecto a las covariables en un modelo de regresión con interacción, el funcionamiento es el mismo. Las covariables se añaden al modelo simplemente incluyéndolas como regresores adicionales en el modelo.

3.2.3 Interpretación de los coeficientes de la regresión

Partiendo del modelo base que hemos introducido $\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_1X_2$ podemos establecer la interpretación de los coeficientes de regresión independientemente de la forma de codificación o escalado de los datos.

- b_0: es la estimación de Y cuando X_1 y X_2 son cero, y en el caso de que hubiera covariables en el modelo, estas también fuesen cero.
- b_1: es la diferencia estimada en la variable respuesta Y entre dos casos que difieren en 1 unidad de X_1 pero X_2 es cero. Es el efecto condicional de X_1 cuando $X_2 = 0$
- b_2: es la diferencia estimada en la variable respuesta Y entre dos casos que difieren en 1 unidad de X_2 pero X_1 es cero. Es el efecto condicional de X_2 cuando $X_1 = 0$
- b_3: es el cambio estimado en el efecto condicional de X_1 cuando X_2 se incrementa en una unidad y viceversa. Si hubiese covariables en el modelo habría que imponer la condición adicional de mantener las covariables constantes.

El coeficiente que más explicación y visualización requiere es b_3. En el ejemplo analizado es la diferencia en la pendiente condicional de la recta que relaciona X_1 con Y entre dos casos que difieren en una unidad en X_2. Por la simetría de interacción, b_3 es también la diferencia en la pendiente condicional de la recta que relaciona X_2 con Y entre dos casos que difieren en una unidad en X_1.

3.3 Interacción entre un regresor dicotómico y uno numérico

Imaginemos un experimento en el que se mide la relación entre X_1 e Y para dos grupos codificados en la variable X_2. Las personas asignadas al grupo de tratamiento estarán codificadas como $X_2 = 1$ y las asignadas al grupo de control estarán codificadas como $X_2 = 0$. Con todo lo explicado ya uno se puede imaginar que la relación entre X_1 e Y se caracterizará mediante dos rectas de regresión, una para el grupo tratamiento y otra para el grupo de control. Consideramos por ejemplo estas dos rectas de regresión

$$\begin{aligned} \hat{Y} =& 3.0 + 0.7X_1 \text{ cuando } X_2 = 1 \text{ (grupo tratamiento)} \\ \hat{Y} =& 2.0 + 0.3X_1 \text{ cuando } X_2 = 0 \text{ (grupo control)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Estas rectas difieren en $1.0 + 0.4X_1$ por lo que tomando como el grupo de control como categoría referencia, podríamos considerar la ecuación

$$\hat{Y} = 2.0 + 0.3X_1 + (1.0 + 0.4X_1)X_2 \tag{3.7}$$

que se aplica para ambos grupos dependiendo del valor de X_2. Eliminando los paréntesis nos quedaríamos con

$$\hat{Y} = 2.0 + 0.3X_1 + 1.0X_2 + 0.4X_1X_2 \tag{3.8}$$

como ecuación única para la relación entre X_1 e Y aplicada para ambos grupos. La interacción se puede comprobar de la misma forma que con regresores numéricos. Se elabora el test de hipótesis para el coeficiente de regresión del producto cruzado donde X_2 modera el efecto de X_1 en Y. La simetría de interacción hace que a la vez se esté comprobando que X_1 modera el efecto de X_2 sobre Y

3.3.1 Interpretación de los coeficientes de la regresión

La interpretación de los coeficientes de regresión presentada en la sección anterior se aplica indistintamente del escalado o codificación de X_1 y X_2. Ahora podemos ser más específicos diciendo que b_1 es el coeficiente de efecto condicional de X_1 sobre Y ya no cuando hay un cambio de una unidad en X_2, si no cuando hay diferencia de grupo en X_2 dado que esta variable es dicotómica.

Sabiendo que el efecto condicional en el grupo de control de X_1 es $b_1 = 0.3$ y que cuando X_2 se incrementa en 1 unidad, el efecto condicional de X_1 aumenta en 0.4, podemos computar el efecto condicional de X_1 para el grupo de tratamiento que es $b_1 + b_3 = 0.3 + 0.4 = 0.7$. Este valor es el valor de la pendiente de la recta de regresión que relaciona X_1 con Y en el grupo de tratamiento. Cabe destacar que en este ejemplo b_3 representa la diferencia entre las dos pendientes porque los grupos han sido codificados de forma que solo difieren en una unidad, pero si se hubiese utilizado otro tipo de codificación que no mantuviera esta diferencia, obtendríamos otro valor para b_3. No obstante, el t- y p- valor asociados para el coeficiente se mantienen independientemente del sistema de codificación.

3.4 Interacción entre un regresor categórico y uno numérico

Para modelar una variable independiente categórica se puede utilizar un procedimiento similar a lo que se ha explicado hasta el momento. Una variable categórica de g grupos y se puede representar con g-1 regresores a los que se le aplica un sistema de codificación. La interacción entre la variable categórica X_2 y la numérica X_1 implica construir g-1 términos producto teniendo cada uno de ellos un código de grupo.

Vamos a analizar el caso más básico que es el de una variable multicategórica X_2 de tres grupos representada con dos variables indicadoras D_1 y D_2. El primer grupo se codificará como $D_1 = 1$ y $D_2 = 0$ y el segundo grupo como $D_1 = 0$ y $D_2 = 1$ de manera que el tercer grupo será el de referencia con estas variables igualadas a cero. La interacción entre X_1 y X_2 entonces se podría estimar con el siguiente modelo

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2D_1 + b_3D_2 + b_4X_1D_1 + b_5X_1D_2 \tag{3.9}$$

Con el sistema de codificación que hemos introducido se observa claro como el valor de la variable respuesta $\hat{Y}$ va a ir cambiando conforme al grupo representado en X_2. Para el grupo 1 tendremos

$$\begin{aligned}\hat{Y} =& b_0 + b_1X_1 + b_2(1) + b_3(0) + b_4X_1(1) + b_5X_1(0)\\ =& b_0 + b_1X_1 + b_2 + b_4X_1\\ =& (b_0 + b_2) + (b_1 + b_4)X_1\end{aligned} \tag{3.10}$$

para el grupo 2

$$\begin{aligned}\hat{Y} =& b_0 + b_1X_1 + b_2(0) + b_3(1) + b_4X_1(0) + b_5X_1(1)\\ =& b_0 + b_1X_1 + b_3 + b_5X_1\\ =& (b_0 + b_3) + (b_1 + b_4)X_1\end{aligned} \tag{3.11}$$

y para el grupo 3

$$\begin{aligned}\hat{Y} =& b_0 + b_1X_1 + b_2(0) + b_3(0) + b_4X_1(0) + b_5X_1(0)\\ =& b_0 + b_1X_1\end{aligned} \tag{3.12}$$

Este modelo permite que el efecto condicional de X_1 sobre Y sea diferente en los tres grupos. En el caso en el que X_2 sea el moderador y X_1 el predictor focal, el efecto condicional de X_1 en Y se puede representar como

$$\hat{Y} = b_0 + (b_1 + b_4D_1 + b_5D_2)X_1 + b_2D_1 + b_3D_2 \tag{3.13}$$

que claramente nos muestra como el efecto de X_1 depende del patrón de codificación del grupo: $b_1 + b_4D_1 + b_5D_2$. Si le diéramos la vuelta, la ecuación 3.9 también se puede representar como

$$\hat{Y} = b_0 + (b_2 + b_4X_1)D_1 + (b_3 + b_5X_1)D_2 + b_1X_1 \tag{3.14}$$

donde lo que se muestra es que las diferencias entre grupos dependen claramente de X_1.

3.4.1 Inferencia cuando la interacción requiere más de un coeficiente de regresión

En un modelo con una variable categórica codificando g grupos, g-1 términos producto son necesitados de estimar y por tanto para realizar inferencias se utiliza otro enfoque al comentado hasta ahora de estadístico t y p-valor.

La estrategia utilizada cuando existe una variable multicategórica es la de comparar el ajuste de dos modelos, uno que permite que el efecto del predictor focal dependa del moderador y otro en el que el efecto del predictor focal es independiente del moderador. Si el primer modelo ajusta mejor que el segundo, es que existe la interacción. Consideraremos los dos siguientes modelos

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2D_1 + b_3D_2 + b_4X_1D_1 + b_5X_1D_2 \tag{3.15}$$

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2D_1 + b_3D_2 \tag{3.16}$$

Como podemos observar el primer modelo tiene los mismos regresores que el segundo modelo más b_4 y b_5. El único caso en el que funcionen igual es cuando estos dos coeficientes sean cero. Sabiendo que mediante la diferencia de R^2 podemos comprobar si el primer modelo tiene un ajuste significativamente mejor, construiremos un test para ver si la verdadera diferencia entre los modelos es cero mediante el *test-F*. Bajo la hipótesis nula de no interacción entre X_1 y la variable multicategórica, el ratio-F es F(g-1,gl$_{residuales}$). Esto es equivalente a hacer el test de que los términos producto son cero para cada uno de los g-1 coeficientes .

3.4.2 Interpretación de los coeficientes de regresión

Para la interpretación de los coeficientes nos vamos a ayudar de un ejemplo concreto. Se dispone de un estudio sobre las evaluaciones de los candidatos en la carrera presidencial de EEUU. Se dispone de la variable dependiente X_1, que se refiere al número de dias por semana que el candidato entabla una discusión política; la variable X_2 que tiene el código de identificación del partido político; y la interacción entre ambas. La identificación del partido está codificada con "Independiente" como categoría base, "Republicano" como $D_1 = 0$ y $D_2 = 1$ y "Demócrata" como $D_1 = 1$ y $D_2 = 0$.

Una vez realizado el análisis del modelo de regresión, obtendríamos la ecuación base 3.13 con los correspondientes estimadores

$$\hat{Y} = 2.078 + (0.038 - 0.071D_1 + 0.027D_2)X_1 - 0.049D_1 + 0.179D_2 \tag{3.17}$$

que muestra que la relación entre X_1 e Y varía con D_1 y D_2 como hemos explicado en la sección anterior ($b_1 + b_4D_1 + b_5D_2 = 0.038 - 0.071D_1 + 0.027D_2$), o más especificamente, con la identificación del partido político. Las tres combinaciones resultantes de los efectos condicionales por tanto son

$$\begin{aligned} \text{Demócratas: } & b_1 + b_4(1) + b_5(0) = 0.038 - 0.071(1) + 0.027(0) = -0.033 \\ \text{Republicanos: } & b_1 + b_4(0) + b_5(1) = 0.038 - 0.071(0) + 0.027(1) = 0.065 \\ \text{Independientes: } & b_1 + b_4(0) + b_5(0) = 0.038 - 0.071(0) + 0.027(0) = 0.038 \end{aligned} \tag{3.18}$$

El coeficiente de regresión para la frecuencia de discusión $b_1 = 0.038$ es el efecto condicional de X_1 en Y para los Independientes. La pendiente de la recta de regresión para los Demócratas es $b_1 + b_4 = -0.033$ y $b_4 = -0.071$ es la diferencia de pendientes de los Demócratas con respecto a los Independientes. La misma interpretación se hace con los Republicanos con sus coeficientes asociados. La propiedad de simetría de la interacción nos describe que se puede interpretar b_4 (y b_5) de otra forma. Por ejemplo cuando $X_1 = 1$, la diferencia es $-0.049 - 0.071(1) = -0.120$, que significa que los Demócratas que hablan un día por semana sobre política perciben a los propios Demócratas 0.120 unidades de forma menos negativa que los Independientes que hablan un dia a la semana sobre política. Pero cuando $X_1 = 2$ esta diferencia es $-0.049 - 0.071(2) = -0.191$. El cambio entonces en la diferencia de 1 unidad en X_1 para los Demócratas es $b_4 = -0.191 + 0.120 = -0.071$ y es un valor invariante siempre y cuando el incremento en X_1 sea 1.

Con respecto a b_2 y b_3 , la interpretación es la misma que hemos explicado anteriormente. Son los efectos condicionales de las variables condicionadas por $X_1 = 0$.

3.5 Interacción entre dos regresores categóricos

Hasta ahora todos los ejemplos de interacción comentados incluían al menos un regresor numérico ya sea como moderador o como predictor focal. Para los casos en los que ambos dos son categóricos en general se suele realizar ANOVA o ANCOVA, que no dejan de ser casos especiales de un modelo lineal general. El analizar interacciones entre modelos con: dos regresores dicotómicos; un regresor dicotómico y un regresor categórico; y dos regresores categóricos, queda considerado como un tema que se aleja del propósito de este trabajo y queda propuesto como posible ampliación.

4 Inferencia sobre los efectos condicionales

Definiremos lo primero los efectos condicionales como

$$\begin{aligned} \theta_{X_1} &= b_1 + b_3 X_2 \\ \theta_{X_2} &= b_2 + b_3 X_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1 Moderador y predictor focal numérico o dicotómico

Los errores estandar se pueden calcular como

$$SE\left(\theta_{X_1}\right) = \sqrt{SE\left(b_1\right)^2 + 2X_2 COV_{b_1 b_3} + X_2^2 SE\left(b_3\right)^2} \tag{4.2}$$

y

$$SE\left(\theta_{X_2}\right) = \sqrt{SE\left(b_2\right)^2 + 2X_1 COV_{b_2 b_3} + X_1^2 SE\left(b_3\right)^2} \tag{4.3}$$

Conocidos los errores estándar se puede construir el intervalo de confianza como siempre se ha hecho. Para comprobar la hipótesis nula de que el efecto condicional sea cero, la estimación se puede dividir por el error estándar y derivar el p-valor de la distribución-t asociada.

Un método recomendado para hacer estos cálculos es el *centrado de la regresión*. Este enfoque surge del hecho de que al estimar el efecto condicional de X_1 en Y, estas fijando X_2 en 0, por tanto los errores, valores de los test e intervalo de confianza solo se corresponden a este caso en particular. Si queremos estimar el efecto condicional de X_1 cuando X_2 es igual a un valor λ distinto a cero, construiremos una nueva variable $X_2' = X_2 - \lambda$ y entonces estimaremos

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2' + b_3 X_1 X_2' \tag{4.4}$$

De esta forma cuando calculemos el efecto condicional de X_1 en Y para $X_2' = 0$, b_1 será la estimación del efecto condicional cuando $X_2 = \lambda$

4.2 Moderador o predictor focal multicategórico

En el caso de que X_1 o X_2 sea multicategórico, la estrategia de inferencia cambia un poco. Si el moderador X_2 es multicategórico, estimaremos el modelo g veces utilizando cada vez uno de los g grupos como referencia. De esta manera el coeficiente de regresión de X_1 será el efecto condicional θ_{X_1} para el grupo de referencia.

Si el predictor focal es el que es multicategórico y el moderador es dicotómico o numérico, se pueden realizar dos tipos de inferencias. Podríamos realizar un test de igualdad de las g estimaciones de Y para un determinado valor de X_2, como podría ser si existe una diferencia en la percepción de Demócratas, Republicanos e Independientes en como perciben la carrera presidencial de los Demócratas, en gente que discute dos días a la semana de política (recuperando el ejemplo utilizado anteriormente).

El otro tipo de inferencia sería hacer comparaciones específicas condicionadas por un valor del moderador, como por ejemplo si los Demócratas que discuten 2 días a la semana perciben la carrera presidencial Demócrata diferente de los Republicanos que discuten 2 días a la semana.

4.3 Probando la interacción

Una vez explicados los conceptos generales de los modelos de moderación y las posibles interacciones entre las variables que puedan ser numéricas, dicotómicas o multicategóricas; a la hora de hacer un análisis estadístico se va a desear poder hacer asunciones sobre en qué valores específicos de la variable moderadora, la variable independiente esté relacionada con la variable respuesta y en cuales no. Esto es lo que se suele denominar *probar la interacción*.

Una vez tenemos evidencia de que X_1 y X_2 interactúan, una estrategia típica es escoger varios valores del moderador X_2 y comprobar si los efectos condicionales son distintos de cero con los métodos descritos en la sección anterior. Este método se puede denominar *"pick-a-point"*. Para una variable categórica la elección de los valores puede ser más sencilla, pero para un moderador numérico aparecen más problemas. Lo normal es tener información sobre los datos para poder hacer una elección con sentido basada en la teoría, pero si este no es el caso, nos podemos basar en las convenciones comunes de utilizar tres valores: relativamente bajo, relativamente moderado y relativamente alto. Otra posibilidad sería escoger percentiles de la distribución de X_2. Al final todas estas medidas son ciertamente arbitrarias. Mediante la inferencia para un efecto condicional único explicado en la sección 4.1 podemos repetir este proceso las veces necesarias para nuestro análisis. Además con la técnica de centrado de la regresión cada vez que haya que reconducir el análisis, nos bastará con centrar de nuevo X_2 con el valor correspondiente.

Para paliar la problemática de la elección de los valores arbitrarios para el moderador, que aunque existen convenciones de como hacerlo hay detractores del enfoque, surge la técnica **Johnson-Neyman**. Esta técnica también denominada *"floodlight analysis"* (Spiller, 2013 [5]) se utiliza cuando el moderador es numérico y se basa en la búsqueda de valores del moderador que representen "puntos de transición", es decir, puntos donde el efecto condicional cambie entre significativo y no significativo. Estos puntos definen *regiones de significancia*. Mientras "pick-a-point" seleccionaba valores y luego comprobaba la significancia, la técnica Johnson-Neyman define el nivel de significancia y recoge las regiones de valores que la cumplen. Al aplicar la técnica hay que tener cuidado con las interpretaciones ya que puede haber regiones que incluyan muy pocos datos y tenemos que ser cautelosos acerca de las afirmaciones que hagamos para rechazar o no una interacción.

Para finalizar, uno podría pensar que se deba comprobar donde los efectos condicionales son significativamente distintos unos de otros, ya que con el método recién contado podemos obtener regiones de significancia y de no significancia. Aunque este pensamiento parece razonable, se puede mostrar que en un modelo de interacción lineal que incluye X_1X_2 como regresor y donde X_1 y X_2 interactúan, cualquiera dos efectos condicionales de X_1 para distintos valores de X_2 son significativamente diferentes independientemente de los valores escogidos y de si X_2 es dicotómica o numérica. El ratio de la diferencia entre los efectos con el error estándar de la diferencia es igual al estadístico-t del coeficiente de regresión de X_1X_2, por tanto una vez hemos comprobado que existe interacción, no hace falta probar para distintos valores de X_2

4.4 Complicaciones en el estudio de las interacciones

4.4.1 Dificultad en la detección de interacciones

Si pensamos en el concepto de interacción definido, puede ser complicado el encontrar interacciones. Para empezar, el tamaño de la muestra sobre la que se realiza el estudio es determinante ya que por ejemplo una afirmación de la presencia de interacción encontrada en una muestra pequeña se va a extrapolar a un tamaño de muestra mayor, pero puede ser que la interacción haya sido significativa por uno o dos casos en los datos que influyan de una manera muy importante.

Otra razón podría ser el hecho de que si X_1 y X_2 se miden con un error elevado, el producto cruzado X_1X_2 va a tener un error incluso mayor elevando la probabilidad de que haya sesgo en la estimación. McClelland and Judd (1993) [6] constatan que las interacciones son más difíciles de detectar utilizando datos observacionales frente a datos experimentales. Esto se debe a que el error estándar de los coeficientes está determinado por la varianza residual de X_1X_2, que suele ser menor en estudios observacionales. Por tanto el encontrar significancia en dicho estudio, tiene un mayor peso a la hora de poder hacer afirmaciones.

4.4.2 Confusión de Interacción con Curvilinealidad

Observemos el siguiente ejemplo donde hay un regresor dicotómico X_2 que pretende explicar la relación entre X_1 e Y entre nueve mujeres ($X_2 = 0$) y nueve hombres ($X_2 = 1$). En la figura 4.1 vemos claro como tanto la curvilinealidad y la interacción pueden taparse una a otra. En este caso sencillo podríamos obtener dos modelos con un ajuste muy bueno: uno vendría de ignorar el efecto de la variable sexo (X_2) y modelizaría Y como una función parabólica de X_1; y el otro sería un modelo lineal de moderación con la variable sexo como moderadora y el producto cruzado X_1X_2. El punto es que ambas son buenas explicaciones de la relación entre X_1 e Y. Uno de los ejemplos de actuación es el propuesto por Lubinski y Humphreys (1990) [7] que sugieren utilizar métodos de selección de variables hacia delante, aunque bien sabemos que el rendimiento puede depender de muchos factores.

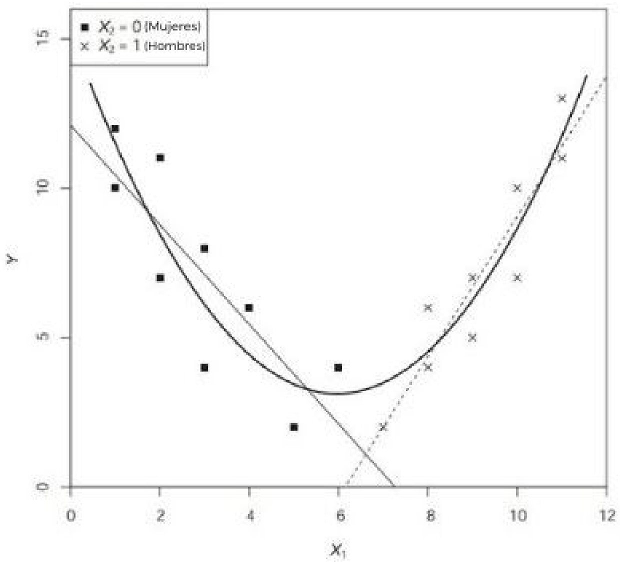

Figura 4.1: *Curvilinealidad e interacción enmascarándose una a otra*

4.4.3 Escalado de Y

Igual que en la mediación comentamos que la estandarización de la variable respuesta no influenciaba en el análisis, en este caso si que sucede. La transformación en Y puede afectar de manera muy significativa a la interacción. Esto nos quiere decir que hay que tener mucho cuidado con las transformaciones ya que dependiendo de la situación del análisis, tendremos que dirimir si realmente tenemos la información teórica necesaria para aplicar una transformación a una variable ya que el análisis va a depender de ello por completo.

4.4.4 Mito del centrado de las variables

Está ampliamente extendido que no se debe comprobar la interacción entre X_1 y X_2 incluyendo el producto cruzado X_1X_2 sin haber antes centrado X_1 y X_2. Con este cambio, estaríamos comprobando la interacción lineal en un modelo que estima

$$\hat{Y} = b_0 + b_1(X_1 - \overline{X}_1) + b_2(X_2 - \overline{X}_2) + b_3(X_1 - \overline{X}_1)(X_2 - \overline{X}_2) \tag{4.5}$$

Esta técnica se suele justificar diciendo que X_1X_2 suele estar altamente correlado con X_1, X_2 o con ambos y por tanto centrando X_1 y X_2 sobre sus medias, la tolerancia de X_1X_2 se eleva y resulta en un error estándar del coeficiente más bajo y por ende surge un test de interacción más potente. Éste mito está desestimado ya que aunque es verdad que la tolerancia del producto cruzado sería más alta, la varianza también lo será y por tanto el cambio en la tolerancia y el cambio en la varianza se van a anular resultando en una invarianza en el error estándar del coeficiente de la regresión de X_1X_2, y los test de interacción van a ser los mismos.

4.4.5 Organización de los test de interacción

El número de posibles interacciones que se pueden construir en un modelo de regresión puede resultar muy elevado. Si hay 10 regresores (dicotómicos o numéricos) en cualquier combinación, hay (10x9)/2=45 posibles interacciones dobles, lo que requeriría un mínimo de 56 muestras para estimar un modelo. Está claro que si queremos comprobar interacciones de mayor grado o utilizar variables multicategóricas, el número de posibles combinaciones se hace incontrolable. Ignorando el tamaño de la muestra que no suele ser problemático en la mayoría de las ocasiones, ¿como podríamos llevar a cabo las labores de realización de los test?, ¿tendríamos que comprobar todas las posibilidades?, ¿habría que hacerlo individualmente o por conjuntos?

Podemos distinguir entre tres tipos de test de interacción:

- Un test global que incluya todas las interacciones y que vaya evaluando el cambio del ajuste cuando se van eliminando del modelo
- Hacer test variable por variable. Es decir, comprobar todas las interacciones posibles que incluyen a un regresor específico.
- Test simples que comprueban una interacción específica.

El primer tipo sería denominado el más amplio (*broad*) y el último el más estrecho (*narrow*), estos términos tienen que ver con la especificidad de los test. Una de las ventajas de los test más amplios es que producen conclusiones no demasiado precisas, y es más fácil llegar a conclusiones imprecisas que a conclusiones específicas. La desventaja principal de los test amplios es que surgen problemas cuando el número de términos es muy largo con respecto al tamaño de la muestra. El caso más extremo lo tendríamos cuando con este número tan elevado de términos, solo uno de ellos tenga efecto en Y. En este caso sería mejor aplicar test más específicos ya que sería más probable que diesen con la variable que tiene realmente efecto.

Otra ventaja de los test más precisos es que utilizan un menor número de grados de libertad, dejando más para el residual. En un caso extremo un test global podría utilizar todos los grados de libertad.

En general los test más vagos son mejores cuando las muestras son más largas y los específicos cuando las muestras son más pequeñas, utilizando los test variable por variable quizás en los casos intermedios. Si el propósito del análisis es rechazar interacciones, lo mejor sería combinar los tres tipos para conseguir resultados no significativos.

4.5 Implementación de modelos

4.5.1 Conjunto de Datos: Diamantes

Se ha localizado un conjunto de datos que recoge distintas características de 54000 diamantes con el fin de observar como estas afectan al precio estimado de cada uno de ellos. Se incluyen tanto variables numéricas como categóricas y esto nos da la posibilidad de analizar el funcionamiento de un moderador numérico y categórico.

Los diamantes se evalúan mediante la **regla de las 4 C's** que son talla ("cut"), color ("colour"), pureza ("clarity") y peso en quilates ("carat weight"). En el análisis efectuado se utilizan las siguientes variables: ***carat*** recoge el peso en quilates del diamante; en la variable ***cut*** se mide la calidad del corte se mide en 3 categorías (pobre, bueno y premium) y por último ***table*** se refiere a la cara que representa el ancho de la cara superior del diamante como se ilustra en la siguiente imagen 4.2.

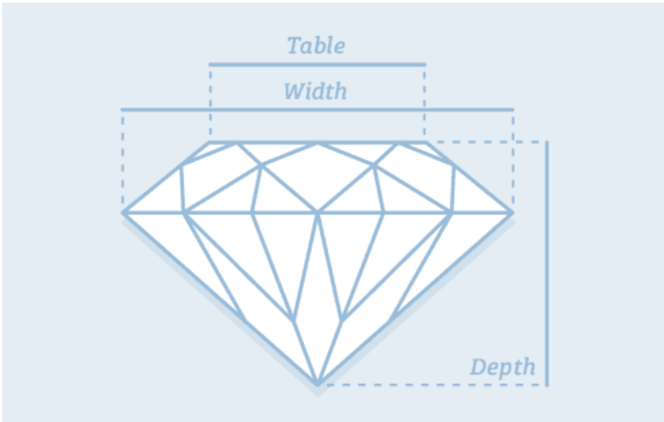

Figura 4.2: *Medidas de un diamante*

4.5.2 Análisis de moderación

Es bastante intuitivo pensar que el peso de un diamante está relacionado positivamente con el precio del mismo, y esto es así, pero queremos comprobar si la forma del diamante puede moderar el "cómo" de positiva es esta relación y si el precio varía dentro de dos diamantes con el mismo peso pero con distinta forma. Para ello realizamos un modelo de moderación simple para la relación de X_1 como el peso en quilates e Y como el precio del diamante, siendo este efecto moderado por X_2, la tabla del diamante. Realizando este análisis obtenemos los siguientes resultados.

Análisis de la varianza					
Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	3	7.306118E11	2.435373E11	102732	<.0001
Error	53936	1.278614E11	2370612		
Total corregido	53939	8.584731E11			

Raíz MSE	1539.67934	R-cuadrado	0.8511
Media dependiente	3932.79972	R-Sq Ajust	0.8511
Coef Var	39.14970		

Estimadores de parámetros					
Variable	DF	Estimador del parámetro	Error estándar	Valor t	Pr > |t|
Intercept	1	663.84065	339.45552	1.96	0.0505
carat	1	9419.46605	361.01102	26.09	<.0001
table	1	-51.70619	5.92208	-8.73	<.0001
crossprd	1	-27.72203	6.25235	-4.43	<.0001

Figura 4.3: *Análisis de moderación simple*

La salida del **PROC GLM** de SAS (ver Anexo 2) indicado en la figura 4.3, nos dice que el coeficiente de regresión para el producto X_1X_2 es -27.72, $t(53936)$=-4.43, p<0.001 por lo tanto concluimos en que estas variables interactúan. Este coeficiente es negativo, por lo que sabemos que dentro de un mismo peso, una tabla menor conduce a un precio mayor. El modelo de regresión que presenta un R^2 de 0.85 y está validado por el análisis de la varianza, quedaría como

$$\hat{Y} = 663.84 + 9419.46X_1 - 51.71X_2 - 27.72X_1X_2 \tag{4.6}$$

o también se podría escribir de forma equivalente como

$$\hat{Y} = 663.84 + (9419.46 - 27.72X_2)X_1 - 51.71X_2 \tag{4.7}$$

que nos lleva a ver que el efecto condicional del peso en el precio está moderado por una función lineal de la tabla del diamante: 9419.46-27.72X_2. Dada la diferencia entre unidades ya que el precio está recogido en decenas de miles de dolares y el peso en unidades entre 0 y 5, en una gráfica donde se muestren tres rectas de regresión para los valores del moderador correspondiente a los percentiles 25% ($X_2 = 57$), 50% ($X_2 = 58$)y 75% ($X_2 = 60$), no observamos prácticamente la diferencia. Sin embargo si miramos los valores para un peso de 0.79, que es la media de la variable, obtenemos precios de 4562.9, 4499.6 y 4373 respectivamente donde vemos bastante diferencia.

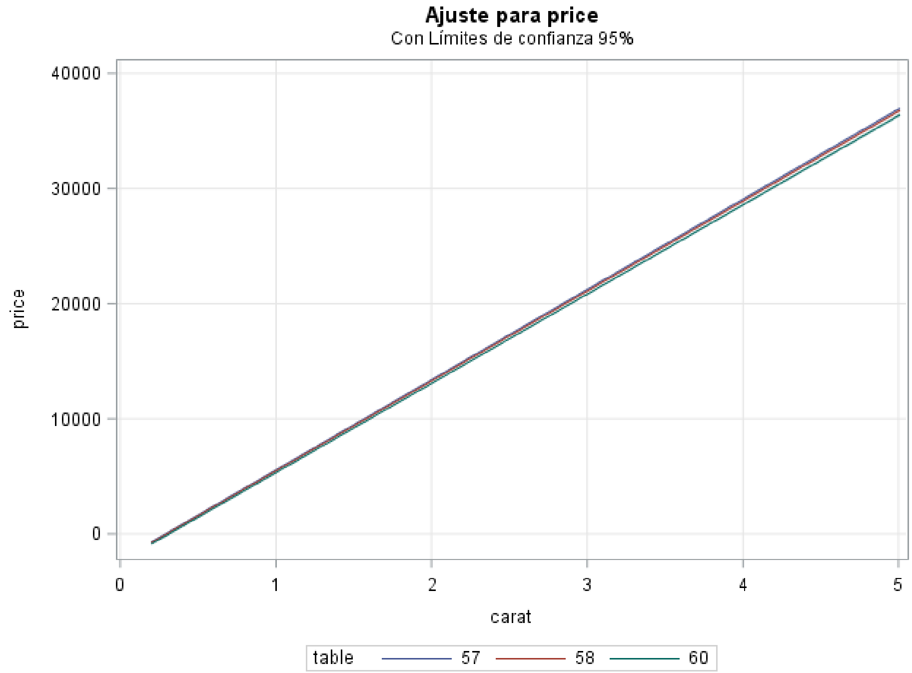

Figura 4.4: *Interacción entre peso y tabla*

Como hemos comentado anteriormente el peso de un diamante tiene un efecto mayor en el precio del mismo entre aquellos diamantes con una tabla menor. Consideremos dos diamantes que difieren en 1 unidad en el peso. El modelo nos dice que esos dos diamantes se estima que van a diferir más en el precio si su tabla es menor. Las pendientes de las rectas las podríamos calcular con la función lineal anterior. Introduciendo los valores de los percentiles 57,58 y 60 obtenemos unos efectos condicionales respectivos de 9419.46-27.72(57)=6472.22, 9419.46-27.72(58)=6420.512 y 9419.46-27.72(60)=6317.1.

El otro análisis que podemos realizar es con un moderador categórico como es la variable ***cut*** de 3 niveles. Este medida de nuevo se refiere a la inclinación del diamante como se muestra en la siguiente imagen.

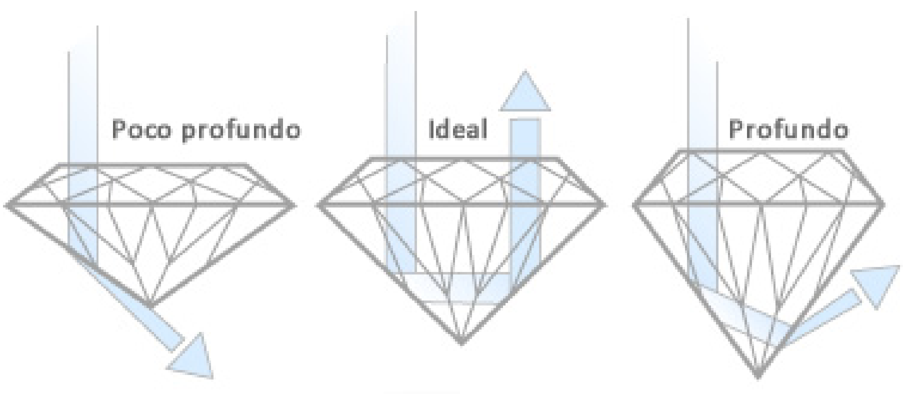

Figura 4.5: *Corte de un diamante*

Análisis de la varianza					
Fuente	DF	Suma de cuadrados	Cuadrado de la media	F-Valor	Pr > F
Modelo	5	7.353086E11	1.470617E11	64398.6	<.0001
Error	53934	1.231645E11	2283615		
Total corregido	53939	8.584731E11			

Raíz MSE	1511.16362	R-cuadrado	0.8565
Media dependiente	3932.79972	R-Sq Ajust	0.8565
Coef Var	38.42463		

Estimadores de parámetros					
Variable	DF	Estimador del parámetro	Error estándar	Valor t	Pr > |t|
Intercept	1	-2411.67886	23.73808	-101.60	<.0001
d1	1	572.60518	88.35419	6.48	<.0001
d2	1	148.35349	28.28929	5.24	<.0001
carat	1	7790.19271	25.29981	307.92	<.0001
crossp1	1	-1865.69761	77.21548	-24.16	<.0001
crossp2	1	142.15558	30.42255	4.67	<.0001

Figura 4.6: *Análisis de moderación con moderador categórico*

Marcaremos como referencia la categoría media (bueno) para así poder analizar si los tres niveles son significativamente diferentes, es decir, si la categoría modera la relación entre X_1 e Y. Las categorías están codificadas como D_1 para "Pobre" y D_2 para "Premium". Efectuando el análisis con el **PROC REG** de **SAS** (ver Anexo 3) obtenemos de una forma sencilla el siguiente modelo.

La salida nos proporciona una ecuación del modelo tal que

$$\hat{Y} = -2411.68 + 7790.19X_1 + 572.6D_1 + 148.35D_2 - 1865.7X_1D_1 + 142.15X_1D_2 \quad (4.8)$$

El modelo queda validado y además tenemos una mejora significativa en el R^2 a 0.856. Podemos concluir que la relación entre el peso en quilates y el precio de un diamante es diferente para los distintos grupos. La recta de regresión se podría haber escrito como

$$\hat{Y} = -2411.68 + (7790.19 - 1865.7D_1 + 142.15D_2)X_1 + 572.6D_1 + 148.35D_2 \quad (4.9)$$

donde vemos como claramente la relación entre X_1 e Y varía con D_1 y D_2. Tenemos para las tres combinaciones:

$$\begin{aligned}
\text{Pobre: } & b_1 + b_4(1) + b_5(0) = 7790.15 - 1865.7(1) + 142.16(0) = 5924.45 \\
\text{Buena: } & b_1 + b_4(0) + b_5(0) = 7790.15 - 1865.7(0) + 142.16(0) = 7790.15 \\
\text{Premium: } & b_1 + b_4(0) + b_5(1) = 7790.15 - 1865.7(0) + 142.16(1) = 7932.31
\end{aligned} \tag{4.10}$$

que nos dan los tres efectos condicionales para el peso en quilates X_1. Los tres coeficientes son significativamente distintos de cero. Estos valores son al mismo tiempo las pendientes de las rectas de regresión entre X_1 e Y para las tres categorías, observando claramente como una mejor calidad lleva a un mayor precio. Por la *simetría de la interacción* podríamos interpretar de otra manera b_4 y b_5. Los podemos interpretar como cuanto cambian las diferencias entre los grupos cuando el peso en quilates aumenta en 1 unidad. En este caso la categoría de referencia es la que tiene corte "Bueno". Reescribimos la ecuación 4.8 como

$$\hat{Y} = -2411.68 + 7790.19X_1 + (572.6 - 1865.7X_1)D_1 + (148.35 + 142.15X_1)D_2 \tag{4.11}$$

Para los diamantes con $X_1 = 1$, la diferencia es $572.6 - 1865.7(1) = -1293.1$ significando que para diamantes de 1 quilate, el precio si la calidad es pobre es 1293 dolares menor que si la calidad es buena. Para $X_1 = 2$, la diferencia es $572.6 - 1865.7(2) = -3158.8$ significando que para diamantes de 2 quilates, el precio si la calidad es pobre es 3158 dolares menor que si la calidad es buena. Observamos que la diferencia con un cambio de 1 unidad es siempre $b_4 = 1865.7$ y es un valor invariante ante X_2. Con el mismo razonamiento la diferencia con un cambio de 1 unidad con respecto a dimantes de calidad premium es $b_5 = 142.16$ dolares más.

5 Aplicación

La búsqueda de establecer asociaciones y relaciones es la base de la *mediación* y la *moderación*. Está claro que un fenómeno se entiende mejor cuando podemos responder preguntas no solo de si X afecta a Y, si no el *como* X ejerce el efecto en Y o el *cuando* X afecta a Y y cuando no. El "como" es el asunto que trata la mediación y se relaciona con procesos psicológicos, cognitivos o biológicos que enlacen X con Y, mientras que el "cuando" es tratado por la moderación e intenta explicar las condiciones límite donde se aplica la asociación causal.

A lo largo del tiempo se han realizado análisis de toda índole y tocando prácticamente cualquier sector, y es que como acabamos de comentar, en cada acción que el ser humano realiza día a día hay un "por qué" y un motivo, intencionado o instintivo que te lleva a tomar un camino y no otro.

Alguno de los análisis más comunes son los que intentan explicar la aparición de síntomas médicos como depresiones o estrés postraumático, donde se realizan estudios longitudinales a afectados o posibles afectados intentando descubrir las razones para diferenciar grupos de riesgo. Encontramos ejemplos como: aparición o frecuencia de síntomas de estrés postraumático en trabajadores desplegados en el World Trade Center en los ataques del 11-S (Cukor et al., 2011 [8]), que tras el estudio concluye en que el alcance de los efectos está claramente moderado por la vulnerabilidad de los trabajadores; análisis de moderación para explicar la relación entre la búsqueda de ayuda y comportamiento frente a problemas mentales en jóvenes adultos (Beatie et al., 2016 [9]), llegando a la conclusión de que el autoestima, nivel de familiaridad con los problemas y la agudeza del problema moderaban claramente esta relación; o un análisis de mediación para investigar efectos mediadores en la relación entre edad y percepción de salud y calidad de vida en personas de edad avanzada (Condello et al., 2019 [10]), constatando la importancia de la actividad deportiva conforme al envejecimiento por su relación con el peso corporal y la insatisfacción con la propia imagen.

Son muchos los ejemplos de este calibre que podríamos encontrar, lo que nos indica que en este campo de aplicación las técnicas han sido aceptadas y empleadas con frecuencia. Con todo esto en mente no podemos olvidar que estamos efectuando análisis de regresión como base, por tanto no es un requisito fundamental que todos los análisis tengan que tratar procesos mentales, psicológicos o cognitivos.

6 Conclusiones

En este trabajo hemos analizado dos conceptos como son la mediación y la moderación. No debemos olvidar que ambos conceptos están montados sobre el análisis de regresión por lo que muchas de las técnicas que se utilizan son ampliaciones o especificaciones de otras que ya se emplean habitualmente como puede ser la validación de modelos, tareas de inferencia, selección de variables o visualización de datos. Del mismo modo se ha estudiado la aplicabilidad tratando tanto procesos que involucran la actividad humana, en el caso de la mediación, como valoraciones basándonos en características de un objeto, en el ámbito de la moderación, apoyando así la hipótesis de que existe una inmensidad de conjuntos de datos en los que se puedan incorporar estos análisis, contribuyendo a profundizar en las relaciones entre variables y obteniendo conclusiones interesantes.

Para la mediación utilizamos unos datos que incluían información sobre distintos parámetros de los suburbios de la ciudad de Boston. Sospechábamos que algunas características pudieran estar estrechamente relacionadas con el precio de las viviendas y efectivamente los análisis lo confirmaron: una mayor tasa de crimen o proporción de gente perteneciente a la clase baja influyen negativamente en el precio de las viviendas actuando como mediadores entre la antigüedad de los edificios y dicho precio.

Para la moderación hemos utilizado un conjunto de datos que recogía características físicas acerca de los diamantes. Existen unas medidas y proporciones ya establecidas que influyen en el precio de los mismos, por tanto se comprueba si la moderación como técnica también lo valida. De nuevo nos encontramos conclusiones significativas donde para distintos **cortes** de un diamante, una categoría de calidad mayor se refleja en un precio mayor o la relación entre forma (*tabla*) y peso (en quilates) nos dice que en diamantes del mismo peso, una tabla menor se traduce en un mayor valor del diamante.

Como hemos comentado a lo largo del documento existen vertientes tanto defensoras como detractoras de estos análisis. Esto se pone en relieve en las complicaciones mencionadas donde queda claro que hay que tener cuidado a la hora de hacer afirmaciones categóricas a partir de los modelos resultantes.

Con respecto al software utilizado, no encontramos impedimentos que nos compliquen el análisis. Podemos encontrar librerías o paquetes específicos para realizar esta tarea con una sintaxis sencilla e intuitiva y manuales con ejemplos para facilitar la comprensión.

7 Posibles ampliaciones del trabajo

A lo largo del documento hemos introducido los conceptos de mediación y moderación. Se han explicado los modelos más básicos para ambas técnicas con ayuda de ejemplos destinados a ilustrar de una forma más clara los conceptos. Posteriormente se ha realizado una búsqueda de datos reales para implementar los modelos en **SAS**, ayudándonos de: **PROC REG**, **PROC GLM** y **macro PROCESS**. Evidentemente este trabajo es una base de la que partir y de la que se pueden tomar muchos caminos que lleven a la ampliación de estos métodos. A lo largo del desarrollo de este documento han surgido ideas interesantes de cubrir pero que quizás se escapen de este primer contacto con el análisis de mediación y moderación donde quizás no exista una profundidad de conocimiento tal como para tomar decisiones completamente acertadas. A continuación se exponen posibles continuaciones y ampliaciones del trabajo:

- **Introducción y desarrollo de modelos de mediación más complejos**: Modelos que implementen una estructura de caminos más elaborada. Podemos encontrarnos múltiples mediadores en paralelo, múltiples mediadores en serie o una estructura que mezcle ambas variantes.

- **Introducción y desarrollo de modelos de moderación más complejos**: Inmensas posibilidades de desarrollo de modelos donde aparece el concepto de *mediación moderada* interesante a explicar. También el desarrollo de modelos de moderación con solo variables categóricas o dicotómicas.

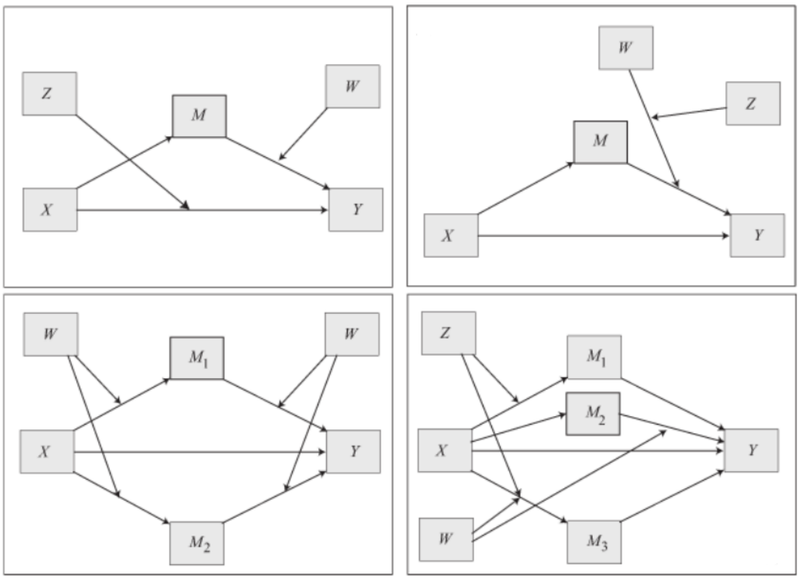

Figura 7.1: *Variantes de modelos de procesos condicionales*

- **Extensión del análisis en los conjuntos de datos encontrados**: Así como la búsqueda de datos reales o simulados con los que trabajar es una tarea exhaustiva, se puede profundizar muchísimo más en la estructura para encontrar detalles interesantes de incorporar a los modelos. De la misma forma son conjuntos de datos lo suficientemente extensos para probar el ajuste de modelos más complicados, realizar tareas de inferencia, hacer selección de variables o indagar en la tarea de visualización.

- **Análisis específico complementado con ANOVA y ANCOVA**: Es fácil encontrar interpretaciones en el análisis de mediación o moderación que funcionen igual que en ANOVA y ANCOVA, pero el desconocimiento y las similitudes de estas técnicas llevan a cometer errores en la explicación de conceptos de la misma forma en el análisis mientas que estamos hablando de dos cosas diferentes.

- **Mayor profundización en las complicaciones de los análisis**: Ya hemos introducido por cada capítulo los impedimentos de estas técnicas o las limitaciones con sus formas de abordarlas. Sería interesante profundizar más en las bases teóricas para dotar de una mayor credibilidad y aceptación a estos análisis.

- **Estudio de los detractores de la mediación y moderación**: Al igual que existen teorías, métodos o técnicas imposibles de refutar, nos podemos encontrar lo contrario. En este caso existen detractores de las técnicas que con sus respectivos argumentos pretenden invalidar estos análisis.

- **Análisis de software existente para la realización de estos análisis**. Hemos utilizado únicamente el software **SAS** con los **PROC REG, GLM** y macro **PROCESS**. Dado que las operaciones que se necesitan son bastante comunes, existen diversas implementaciones que nos ayudan a realizar estas labores. Se podría investigar la implementación tanto en R como SPSS por ejemplo y el análisis de distintos paquetes y librerías de distinto origen creadas para ello.

Referencias

[1] R.B.Darlington, A.F.Hayes (2017). *Regression Analysis and Linear Models.*

[2] A.F.Hayes (2018). *Introduction to mediation, moderation and conditional process analysis.*

[3] M.E.Sobel (1982) *Asymptotic confidence intervals for indirect effects in structural equation models.* In S.Leinhart (Ed.), Sociological methodology (pp.290-312). San Francisco, CA:Jossey-Bass.

[4] B.L.Pitts, M.A.Safer (2016) *Retrospective appraisals mediate the effects of combat experiences on PTS and depression symptons in U.S.Army medics*, Journal of Traumatic Stress, 29, 65-71.

[5] S.A.Spiller,G.J.Fitzsimons, J.G.Lynch, G.H.McClelland (2013). *Spotlights, floodlights, and the magic number zero: Simple effects tests in moderated regression*, Journal of Marketing Research, 50, 277–288.

[6] G.H.McClelland, C.M. Judd (1993) *Statistical difficulties of detecting interactions and moderator effects*, Psychological Bulletin, 113, 181-190.

[7] D.Lubinski, L.G.Humphreys (1990) *Assesing spurious "moderator effects": Illustrated substantively with the hypothesized ("synergistcic") relation between spatial and mathematical ability*, Psychological Bulletin, 1o7, 385-393.

[8] J.Cukor, K.Wyka, N.Jayasinghe, F.Weathers, C.Giosan, P.Leck, J.Roberts, L.Spielman, M.Crane, J.Difede (2011) *Prevalence and predictors of posttraumatic stress symptoms in utility workers deployed to the World Trade Center following the attacks of September 11, 2001.* Depression and Anxiety, 28, 210-217.

[9] B.E.Beatie, D.W.Stewart, J.R.Walder (2016). *A Moderator Analysis of the Relationship Between Mental Health Help-Seeking Attitudes and Behaviours among Young Adults.* Canadian Journal of Counselling and Psychotherapy. 50. 290-314.

[10] G.Condello, L.Capranica, S.Migliaccio, R.Forte, A.Baldassarre, C.Pesce. (2019). *Energy Balance and Active Lifestyle: Potential Mediators of Health and Quality of Life Perception in Aging.* Nutrients. 11. 2122. 10.3390/nu11092122.

Conjuntos de datos

[Boston] D.Harrison, D.L.Rubinfeld. (1978) *Hedonic prices and the demand for clean air*, J. Environ. Economics & Management, vol.5, 81-102, 1978.

[Diamonds] Shivamagrawal (2017, May) *Diamonds*, Version 1. Retrieved February, 2020 from https://www.kaggle.com/shivam2503/diamonds/version/1

Índice de figuras

Anexos

Anexo A: Código SAS Análisis de mediación

En el presente anexo se especifica el código SAS utilizado para la realización el análisis de mediación. Consiste en el cargado de los datos con los que se va a trabajar y la ejecución de la macro process que recibe los datos correspondientes para proporcionar la salida deseada.

Previa ejecución del código siguiente, es necesaria la ejecución de la macro PROCESS que puede ser descargada directamente de la web de su desarrollador Andrew F.Hayes **processmacro.org**

```
/* Cargado de los datos */;
proc import datafile = '...\datos\boston.csv'
 out = boston_housing
 dbms = CSV
 ;
run;

/* Mediacion (necesaria la ejecucion de la macro PROCESS) */;
%process (data=boston,y=medv, x=age, m=lstat crim,
model=4, total=1, seed=15456);
```

Anexo B: Código SAS Análisis de moderación

En el presente anexo se especifica el código SAS utilizado para la realización el análisis de moderación con un moderador contínuo. Consiste en el cargado de los datos con los que se va a trabajar y la ejecución de la orden mediante el proc **GLM** que recibe los datos correspondientes para proporcionar la salida deseada.

```
/* Cargado de los datos */;
 proc import datafile = '...\datos\diamantes.csv'
 out = diamantes
 dbms = CSV

/* Moderación */;
proc glm data=diamantes;
model price=carat table carat*table;
run;
```

Anexo C: Código SAS Análisis de moderación con moderador categórico

En el presente anexo se especifica el código SAS utilizado para la realización el análisis de moderación con un moderador categórico. Consiste en el cargado de los datos con los que se va a trabajar, la crecaión de los dos productos cruzados específicos que se desean comprobar y la ejecución de la orden mediante el proc **REG** que recibe los datos correspondientes para proporcionar la salida deseada.

```
/* Cargado de los datos */ ;
proc import datafile = '...datos\diamantes.csv'
 out = diamantes
 dbms = CSV
 ;
run;

/* Creación de los productos cruzados con cut="Fair" y cut"Premium" */ ;
data diamantes;
set diamantes;
d1=(cut="Fair");
d2=(cut="Premium");
crossp1=carat*d1;
crossp2=carat*d2;
run;

/* Moderación categórica con cut="Good" como categoría base */;
proc reg data=diamantes;
model price=d1 d2 carat crossp1 crossp2;
test crossp1=0,crossp2=0;
run;
```