



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas

**Métodos espectrales en espacio y exponenciales en tiempo para  
discretizar la ecuación de Schrödinger**

*Autor: Alberto Descalzo García*

*Tutor/es: Cesáreo Jesús González Fernández*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Métodos espectrales</b>	<b>5</b>
1.1. Fundamentos de los métodos espectrales . . . . .	5
1.2. Método de Fourier . . . . .	7
<b>2. Métodos Runge-Kutta exponenciales</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Problemas lineales . . . . .	14
2.3. Problemas semilineales . . . . .	24
<b>3. Discretización del problema no lineal</b>	<b>43</b>
3.1. Discretización . . . . .	43
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>49</b>
4.1. Introducción . . . . .	49
4.2. Historia . . . . .	50
4.3. Solitones . . . . .	51
4.4. Análisis . . . . .	52
4.5. Conclusiones . . . . .	63
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>



# Introducción

El prototipo de métodos espectrales para la solución de problemas diferenciales es el bien conocido método de Fourier que consiste en representar la solución como un desarrollo truncado de una serie de Fourier, donde las incógnitas son los coeficientes espectrales de dicho desarrollo. Además, la base de Fourier es apropiada para problemas periódicos en espacio.

Así, los fundamentos de los métodos espectrales no son tan recientes. Durante muchos años, antes de la aparición de los ordenadores, los estudios teóricos en física matemática, y en particular, en mecánica de fluidos, emplearon un extenso uso de desarrollos en serie. De este modo, dichos estudios nos han conducido al desarrollo importante de “funciones especiales” que constituyeron una gran parte del análisis matemático durante los siglos XIX y primer mitad del XX.

Sin embargo, los métodos de desarrollo en serie han mostrado varias limitaciones debido a la dificultad para calcular la suma truncada con un amplio número de términos o para tratar problemas no lineales. Esto conllevó un mayor uso de métodos numéricos discretos tales como diferencias finitas o elementos finitos. Sin embargo, la baja precisión de estas discretizaciones fue un obstáculo para la representación de flujos complejos con una estructura muy fina. Fue en la década de los 70 cuando vimos un resurgimiento del método de Fourier, el cuál fue aplicado a una simulación numérica de turbulencia [15]. Dicho éxito se basó en dos hechos: el incremento de la potencia de los ordenadores y la eficiencia del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) para el cálculo de la serie. Estas mejoras fueron fundamentales para el rápido cálculo de los términos no lineales a través de la técnica “pseudospectral”: la derivación se hace en el espacio espectral (i.e., el espacio de los coeficientes del desarrollo) y los productos se realizan en el espacio físico (i.e., el espacio de los valores de las incógnitas en ciertos nodos discretos); la conexión entre ambos espacios está determinada por el algoritmo FFT.

Uno de las principales propiedades de las series de Fourier consiste en su rápido radio de convergencia, que es exponencial para funciones infinitamente

derivables. Esto posiciona preferiblemente su uso en lugar de diferencias finitas, siempre y cuando el problema sea periódico en espacio. En un problema no periódico, la presencia de oscilaciones de Gibbs debido a la convergencia no uniforme de las series de Fourier en los extremos del dominio de definición implica el uso de otros métodos, los pseudoespectrales, como los de Chebyshev o Legendre.

El objetivo de este trabajo es la discretización en espacio y tiempo de la ecuación de Schrödinger, tanto para términos fuentes lineales como no lineales. Las diferentes partes que lo constituyen son las siguientes: métodos de Fourier para la discretización espacial, métodos Runge-Kutta exponenciales para la discretización en tiempo, la discretización aplicada en la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger y la posible aplicación en fibras ópticas.

La solución está basada en algoritmos que envuelven una discretización en tiempo, y para cada paso en tiempo, la solución de un problema diferencial elemental tales como ecuación de Poisson, advección-difusión, etc. En nuestro caso, se tratará del problema elemental del Laplaciano. Por consiguiente, la eficiencia global requiere un esquema de discretización en tiempo eficiente y, al mismo tiempo, un método espectral adecuado para la discretización espacial. Por ese motivo, dado que nuestro problema será periódico, el método de Fourier y el método Runge-Kutta exponencial son una buena elección.

En el primer capítulo, se describirán los fundamentos de los métodos espectrales, es decir, las diferentes formulaciones con las que se puede trabajar con vistas a obtener una aproximación de una función dada. Estos son los métodos de Galerkin y de colocación. También, se estudiará el método de Fourier aplicado a ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes usando dichas formulaciones. Nótese nuestro interés en discretizar el Laplaciano, donde no intervienen coeficientes no constantes.

En el segundo capítulo, introduciremos los métodos Runge-Kutta exponenciales para la discretización en tiempo. Nuestro objetivo es estudiarlos en problemas lineales y semilineales de la ecuación de Schrödinger. Además, probamos en ambos casos, y con las hipótesis adecuadas, que métodos de  $s$  etapas son de orden  $s$ , y damos condiciones suficientes para alcanzar órdenes  $s + 1$  y  $s + 2$ .

En el tercer capítulo, hallaremos la discretización de la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger, aplicando ambas discretizaciones, en espacio y en tiempo. Adicionalmente, explicaremos el procedimiento a seguir para obtener una posible implementación.

En el cuarto capítulo, para observar una posible aplicación de nuestro estudio a la realidad, lo que haremos es deducir la ecuación de Schrödinger

a partir de las leyes de Maxwell del electromagnetismo. A partir de dicha deducción veremos, de forma directa, como la ecuación de Schrödinger es la que nos modela la transmisión de señales por las fibras ópticas. Es claro que el estudio del comportamiento tanto el analítico como el numérico de sus soluciones nos da una información muy importante con respecto a la construcción tanto de receptores como de amplificadores a la hora de utilizar las fibras ópticas en la transmisión de señales en telecomunicaciones. En este sentido, nuestros desarrollos también permitirían hacer un estudio más preciso de la distancia máxima a la que podemos poner un receptor con respecto a un emisor.



# Capítulo 1

## Métodos espectrales

### 1.1. Fundamentos de los métodos espectrales

El objetivo de esta sección es presentar, en términos generales, los métodos espectrales en sus diferentes formulaciones: Galerkin y colocación. Galerkin se basa en el producto escalar en el espacio en el que estamos trabajando, que en este caso involucra el cálculo de ciertas integrales. El método de colocación se construye a partir de la interpolación de aquella función que vamos a aproximar en ciertos nodos.

En primer lugar, introducimos el producto escalar entre dos funciones  $u(x)$  y  $v(x)$  definidas en  $[\alpha, \beta]$  y con una función peso  $w(x)$ :

$$(u, v)_w = \int_{\alpha}^{\beta} u v w dx. \quad (1.1)$$

Para empezar, vamos a considerar que tenemos una función  $u$  que puede ser desarrollada en serie de funciones,  $\varphi_k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , (éstas dependerán del método empleado para la discretización en espacio) de la forma siguiente

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k \varphi_k(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta. \quad (1.2)$$

Para llegar a construir nuestra discretización consideramos el desarrollo truncado de la serie de la función  $u(x)$  siguiente:

$$u_m(x) = \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k \varphi_k(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (1.3)$$

donde las funciones base  $\varphi_k(x)$  son las consideradas anteriormente y los coeficientes espectrales deben ser determinados posteriormente.

En los métodos espectrales, tomamos dichas funciones base ortogonales: en el caso del método de Fourier son las funciones trigonométricas  $e^{ikx}$  (donde  $i^2 = -1$ ). Por tanto, tenemos que:

$$(\varphi_k, \varphi_l)_w = c_k \delta_{k,l}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad (1.4)$$

donde  $c_k$  son ciertas constantes que dependerán de la selección del producto escalar y  $\delta_{k,l}$  es el delta de Kronecker.

Veamos ahora cómo determinar los coeficientes  $\hat{u}_k$  en el desarrollo (1.3) correspondiente al desarrollo de la función  $u$ . Nos referimos a [13] para una introducción de los aspectos teóricos básicos de la aproximación, aunque se pueden encontrar análisis más detallados en [7] y [8].

### Método de Galerkin

Es cierto que el residuo del desarrollo (1.3) es

$$R_m(x) = u - u_m = u - \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k \varphi_k.$$

Imponiendo entonces que el producto escalar  $(R_m, \varphi_l)$  se anule para  $l = -m/2, \dots, m/2$ , tenemos que

$$(R_m, \varphi_l) = \int_{\alpha}^{\beta} \left( u - \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k \varphi_k \right) \varphi_l w dx = 0, \quad l = -m/2, \dots, m/2. \quad (1.5)$$

Por tanto, obtenemos  $m + 1$  ecuaciones para determinar los  $m + 1$  coeficientes  $\hat{u}_k$ . Para llevar a cabo su cálculo basta con utilizar la propiedad de ortogonalidad de las funciones base. Obtenemos entonces la siguiente expresión para los coeficientes  $\hat{u}_k$

$$\hat{u}_k = \frac{1}{c_k} \int_{\alpha}^{\beta} u \varphi_k w dx, \quad k = -m/2, \dots, m/2 \quad (1.6)$$

### Método de colocación

Sea  $R_m = u - u_m$  el residuo. Este se anulará en los  $m + 1$  nodos de colocación  $x_l$ ,  $l = 0, \dots, m$ , por tanto, la aproximación interpola la función  $u$  en dichos nodos, esto es

$$u_m(x_l) = u(x_l), \quad l = 0, \dots, m. \quad (1.7)$$

Por lo tanto,

$$u_m(x_l) = \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k \varphi_k(x_l) = u(x_l), \quad l = 0, \dots, m \quad (1.8)$$

Esto nos proporciona un sistema algebraico para determinar las  $m+1$  incógnitas  $\hat{u}_k$ ,  $k = -m/2, \dots, m/2$ . La existencia de una solución para este sistema implica:  $\det\{\varphi_k(x_l)\} \neq 0$ . Ésta es una primera condición que debe ser verificada por los nodos de interpolación. De hecho, los coeficientes  $\hat{u}_k$ , solución del sistema (1.8), pueden ser hallados explícitamente sin resolver el propio sistema. Esto se da gracias a la propiedad de ortogonalidad discreta de las funciones base  $\varphi_k$  asociada al conjunto especial de nodos de interpolación  $x_l$ . Obsérvese que el método de colocación no es más que una técnica de interpolación basada en el conjunto de nodos  $x_l$ .

Destacamos las siguientes observaciones:

- Para el índice de los sumatorios hemos elegido  $\{-m/2, \dots, m/2\}$ , dado que nuestra función  $u(x)$  será real, y en consecuencia, los dos coeficientes de Fourier, con valor de  $k$  opuesto, son complejos conjugados, i.e.

$$\hat{u}_{-k} = \overline{\hat{u}_k}, \quad (1.9)$$

mientras que, obviamente,  $\hat{u}_0$  es real.

- Asumimos que  $m$  es par, y por tanto,  $\lceil \frac{m}{2} \rceil = \frac{m}{2}$ . En caso contrario, obtendríamos  $m - 1$  incógnitas y  $m - 1$  ecuaciones, y en consecuencia, el procedimiento es análogo, resolviendo un sistema de tamaño inferior.

## 1.2. Método de Fourier

Los métodos de Fourier son los métodos espectrales más familiares, en los cuales la base está compuesta por funciones trigonométricas:  $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ .

A continuación, presentaremos las propiedades básicas de las series de Fourier y las técnicas de resolución asociadas a ellas. El objetivo es exponer las herramientas que serán usadas para discretizar la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger.

### Serie truncada de Fourier

Sea  $u(x)$  una función definida en  $[0, 2\pi]$ . Vamos a considerar que la función es  $2\pi$ -periódica, ya que en otro caso, la convergencia de la serie asociada podría no ser uniforme cerca de la frontera y, además, el fenómeno de las oscilaciones de Gibbs altera todo el dominio. De hecho, ésta es la razón por la que para aproximar utilizando series de Fourier, dichas series deben estar asociadas a la representación de funciones periódicas y regulares.

Como bien sabemos la serie de Fourier viene dada por

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k e^{ikx},$$

con lo que la serie truncada, que ya hemos introducido en (1.3), es:

$$u_m(x) = \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k e^{ikx}. \quad (1.10)$$

Este desarrollo contiene  $m+1$  coeficientes complejos como incógnitas. Tal y como ha sido mencionado anteriormente, debido al hecho de que  $u(x)$  es una función real, se tiene la propiedad (1.9). A efectos prácticos, esto nos permite calcular todos los coeficientes, hallando únicamente  $u_k$ , con  $k = 0, \dots, m/2$ . Nótese que (1.10) es muy práctica a la hora de aplicar la FFT, en caso de implementación.

A continuación, vamos a calcular tales coeficientes espectrales. Para ello, tomamos el producto escalar (1.1) con peso igual a la unidad  $w = 1$  y conjugando la segunda componente. El producto escalar es entonces

$$(u, v) = \int_0^{2\pi} u \bar{v} dx.$$

Con dicho producto escalar la ortogonalidad de las funciones base se obtiene de forma directa, llegando a que

$$(e^{ikx}, e^{ilx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = l, \\ 0 & \text{si } k \neq l. \end{cases} \quad (1.11)$$

Ahora vamos a calcular  $\hat{u}_k$ ,  $k = -m/2, \dots, m/2$ , usando el método de Galerkin. Consideramos entonces el residuo  $R_m = u - u_m$  e imponemos la

condición de que el producto escalar del residuo con ciertas funciones de la base se anule

$$(R_m, e^{ilx}) = 0, \quad l = -m/2, \dots, m/2.$$

Aplicando explícitamente el producto escalar en la expresión anterior tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \left[ u e^{-ilx} - \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k e^{i(k-l)x} \right] dx = 0, \quad l = -m/2, \dots, m/2.$$

Tras tomar la integral en el sumatorio anterior y aplicando entonces la propiedad de ortogonalidad (1.11), lo que observamos es que todos los términos del sumatorio son nulos excepto para  $k = l$ . Despejando entonces en la expresión anterior se obtienen los siguientes valores de los coeficientes de (1.10),

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u e^{-ikx} dx, \quad k = -m/2, \dots, m/2. \quad (1.12)$$

### Serie discreta de Fourier

Podemos hacer un razonamiento similar utilizando el método de colocación. Ahora bien, en este caso, el razonamiento se hará usando la serie discreta de Fourier.

Lo primero que hacemos en este caso es decir cuales van a ser los nodos de colocación. Estos se consideran los siguientes,

$$x_j = \frac{2\pi j}{m}, \quad j = 0, \dots, m, \quad (1.13)$$

de manera que  $x_0 = 0$  y  $x_m = 2\pi$ . Teniendo en cuenta la periodicidad de la función, se satisface  $u(x_0) = u(x_m)$  e igualdades similares para las derivadas. La serie para la aproximación es de la misma forma que la hallada en (1.10). La diferencia a la hora de calcularla es que en este caso se pide que el residuo  $R_m(x) = u(x) - u_m(x)$  se anule en los distintos nodos de colocación (1.13), es decir,

$$R_m(x_j) = u(x_j) - u_m(x_j) = 0, \quad j = 0, \dots, m,$$

o bien

$$\sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k e^{ikx_j} = u(x_j), \quad j = 0, \dots, m. \quad (1.14)$$

De nuevo, obtenemos un sistema de  $m+1$  ecuaciones con  $m+1$  incógnitas complejas. Además, la matriz  $\mathcal{M}$  asociada al sistema (1.14) verifica  $\mathcal{M}^* \mathcal{M} =$

$m\mathcal{I}$  (donde  $\mathcal{M}^*$  es la transpuesta conjugada de  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{I}$  es la matriz identidad), y en consecuencia,  $\det(\mathcal{M}) \neq 0$ . Esto implica que la matriz es inversible y el sistema (1.14) tiene solución única. Además, es posible emplear la siguiente propiedad de ortogonalidad discreta:

$$\sum_{l=0}^m e^{i(k-l)\frac{2\pi l}{m}} = \begin{cases} m+1 & \text{si } k-l = pm, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Por tanto, multiplicando a ambos lados del sistema (1.14) por  $e^{-ilx}$  y sumando, obtenemos los coeficientes deseados

$$\hat{u}_k = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m u(x_j) e^{-ikx_j}, \quad k = -m/2, \dots, m/2. \quad (1.16)$$

Obsérvese que la ortogonalidad discreta (1.15), así como la fórmula (1.16), pueden deducirse directamente de (1.11) y (1.12) respectivamente, por medio de reglas de cuadratura tales como la regla del trapecio.

### Ec. diferencial con coeficientes constantes

Presentamos ahora el método de Fourier aplicado a una ecuación diferencial con coeficientes constantes. Sea

$$Lu \equiv -au'' + bu' + cu = f, \quad (1.17)$$

donde  $a, b, c$  son constantes y  $f = f(x)$  es  $2\pi$ -periódica. Nos interesamos ahora por la serie solución de (1.17) representada por la serie truncada (1.10), utilizando el método de Galerkin con los productos escalares. Análogamente se sigue el razonamiento con el método de colocación, que como ya hemos comentado anteriormente, se verifica que, una vez obtenida la solución con integrales por el método de Galerkin, es posible, mediante reglas de cuadratura, obtener el método de colocación.

Sea el residuo

$$R_m = Lu_m - f = \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k L e^{ikx} - f. \quad (1.18)$$

Construimos las ecuaciones de Galerkin multiplicando por las funciones base  $\{e^{ilx}\}_{l=-m/2}^{m/2}$  e igualando a 0, esto es,

$$(R_m, e^{ilx}) = \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k (Le^{ikx}, e^{ilx}) - (f, e^{ilx}) = 0, \quad l = -m/2, \dots, m/2. \quad (1.19)$$

Teniendo en cuenta que

$$Le^{ikx} = (ak^2 + ibk + c)e^{ikx} \equiv G_k e^{ikx},$$

y que

$$(f, e^{ilx}) = 2\pi \hat{f}_l,$$

donde  $\hat{f}_l$  es el coeficiente de Fourier de  $f$  correspondiente a la frecuencia  $l$ , (1.19) puede ser escrita como:

$$\sum_{k=-m/2}^{m/2} G_k \hat{u}_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx - 2\pi \hat{f}_l = 0 \quad l = -m/2, \dots, m/2.$$

Finalmente, gracias a la ortogonalidad de las funciones base, obtenemos las siguientes ecuaciones de Galerkin,

$$G_k \hat{u}_k - \hat{f}_k = 0, \quad k = -m/2, \dots, m/2,$$

donde  $\hat{u}_k$  se calcula explícitamente (asumiendo  $G_k \neq 0$ ). De hecho, sólo es necesario calcular  $\hat{u}_k$  para  $k = 0, \dots, m/2$ , y después utilizar la relación (1.9).

Obsérvese que, a pesar de la aplicación del método de Galerkin, los coeficientes de Fourier del término fuente  $f$  nunca son evaluados a través de la integral, ya que la integración analítica es, en términos generales, imposible. Estos coeficientes son evaluados a través de la serie discreta de Fourier y de la FFT, por lo que, ambos métodos son numéricamente idénticos.

Así, concluimos el Capítulo 1 donde hemos introducido los métodos numéricos con los que vamos a discretizar en espacio la ecuación de Schrödinger. Aunque sería una cuestión muy interesante para trabajos posteriores, en este no vamos a estudiar explícitamente la estabilidad y las cotas de convergencia de dichos métodos ya que el Trabajo Fin de Grado está más enfocado al estudio de las discretizaciones en tiempo y el estudio tanto de la estabilidad como de la convergencia de éstas.



# Capítulo 2

## Métodos Runge-Kutta exponenciales

En este capítulo vamos a introducir y considerar los métodos Runge-Kutta exponenciales de tipo colocación. El desarrollo de este capítulo está organizado de la siguiente forma: comenzaremos por una introducción a los métodos numéricos relacionándolos con otros. En las siguientes secciones, trataremos los métodos exponenciales Runge-Kutta de tipo colocación aplicados a la ecuación de Schrödinger lineal y semilineal. Para ello, introduciremos la notación que será empleada en lo sucesivo, estudiaremos y probaremos la existencia y unicidad de la solución correspondiente a cada problema (lineal y semilineal), aplicando dichos métodos Runge-Kutta exponenciales de  $s$  etapas internas con vistas a obtener soluciones numéricas únicas de orden al menos  $s$ . Además, añadiendo nuevas hipótesis, probaremos que el orden para métodos de  $s$  etapas será  $s + 1$  o incluso  $s + 2$ .

### 2.1. Introducción

Los integradores exponenciales han llegado a ser muy populares recientemente para la integración de problemas de primer orden en tiempo (ver [14]). De hecho, se han utilizado múltiples integradores exponenciales específicos para resolver la ecuación no lineal de Schrödinger [4], [6], [10].

Los métodos Runge-Kutta exponenciales son una de las clases de integradores exponenciales que nos podemos encontrar. Estos métodos han sido derivados y analizados para problemas de Cauchy parabólicos semilineales [11, 12]. En este trabajo se trata con tales métodos exponenciales Runge-Kutta de tipo colocación aplicados a las ecuaciones lineales y semilineales de

Schrödinger que son de la forma

$$\partial_t u(t, x) - i\Delta_x u(t, x) = f(t, x), \quad (2.1)$$

y

$$\partial_t u(t, x) - i\Delta_x u(t, x) = f(t, u(t, x)), \quad (2.2)$$

respectivamente, donde  $\Delta_x$  representa el laplaciano con respecto de la variable espacial  $x$  y  $\partial_t u$  corresponde a la derivada de  $u$  con respecto a la variable temporal  $t$ .

El análisis de estos problemas es diferente del realizado para problemas parabólicos ya que los espectros de los operadores lineales son diferentes. Proporcionamos un análisis numérico de los métodos exponenciales de Runge-Kutta de tipo colocación aplicado a (2.1) y (2.2) en el toro de una dimensión,  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ , esto es, ciñéndonos a un intervalo de longitud  $2\pi$ , siempre y cuando nuestra función  $u$  sea  $2\pi$ -periódica. Mostramos que los métodos de colocación de  $s$  etapas son de orden  $s$  en espacios de Sobolev adecuados. Además, establecemos condiciones algebraicas suficientes en los nodos de colocación de un método de  $s$  etapas para lograr ordenes  $s + 1$  y  $s + 2$  al resolver problemas de Cauchy de la ecuación de Schrödinger. Lógicamente, estos resultados necesitan hipótesis adicionales sobre el término no lineal de (2.2) que se cumplen en ecuaciones tales como la que estamos tratando, la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger.

Mencionamos también que existen muchos otros integradores geométricos para integrar numéricamente los problemas de Schrödinger. Por ejemplo, algunos de ellos aprovechan la conservación de las propiedades del espacio de fases considerando fórmulas multisimplécticas [3].

## 2.2. Problemas lineales

### Notación

Sea  $\mathbb{T}$  el toro de una dimensión  $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ . Para  $k \in \mathbb{Z}$ , denotamos por  $p_k$  la función en  $\mathbb{T}$  definida por  $p_k(x) = e^{ikx}$  con  $x \in \mathbb{T}$ .  $L^2(\mathbb{T})$  (o simplemente  $L^2$ ) denota el conjunto de (clases de) funciones complejas  $f$  en  $\mathbb{T}$  tal que  $\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx < +\infty$ , dotadas de la norma  $\|f\|_{L^2} = (\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$ . Un operador lineal no acotado  $A$  actuando sobre  $L^2$  decimos que es diagonal si para todo entero  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $p_k$  está en el dominio de  $A$  y existe un  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  tal que  $Ap_k = \lambda_k p_k$ . Por ejemplo, el operador de Laplace  $\Delta : L^2 \rightarrow L^2$

anteriormente mencionado, dado que está incluido en nuestro problema de Cauchy, es diagonal para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\Delta p_k = -|k|_2^2 p_k$ . Otro ejemplo viene dado por el operador identidad en  $L^2$  denotado por  $Id$ . Para tales operadores  $A$  y todas las funciones  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , denotamos por  $\varphi(A)$  el operador lineal no acotado actuando en  $L^2$  cuyo dominio es el conjunto de combinaciones lineales de funciones  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  definido por

$$\varphi(A)p_k = \varphi(\lambda_k)p_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Para toda función  $f \in L^2$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , denotamos por  $\hat{f}_k$  el coeficiente de Fourier  $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{ikx} dx$ . Para  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , denotamos  $H^\alpha(\mathbb{T})$  (o simplemente  $H^\alpha$ ) el espacio de (clases de) funciones complejas  $f \in L^2$  tales que  $\sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} |\hat{f}_k|^2 |k|_2^{2\alpha} < +\infty$ , dotadas con la norma

$$\|f\|_{H^\alpha} = \left( |\hat{f}_0|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} |\hat{f}_k|^2 |k|_2^{2\alpha} \right)^{1/2}.$$

Notemos que  $L^2 = H^0$  con la misma norma. Con las notaciones anteriores, si  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  acotada por  $M \geq 0$  en  $i\mathbb{R}$ , entonces para todo  $h > 0$  y  $\alpha \geq 0$ ,  $\varphi(ih\Delta)$  es un operador lineal acotado de  $H^\alpha$  en  $H^\alpha$  con  $\|\varphi(ih\Delta)\|_{H^\alpha \rightarrow H^\alpha} \leq M$ . Notemos que, por supuesto, para cada  $\alpha \geq 0$  y cada operador lineal  $A$  de  $H^\alpha$  en  $H^\alpha$ , denotamos por

$$\|A\|_{H^\alpha \rightarrow H^\alpha} = \sup_{v \in H^\alpha, v \neq 0} \frac{\|Av\|_{H^\alpha}}{\|v\|_{H^\alpha}}.$$

En particular, tenemos que  $\|e^{ih\Delta}\|_{H^\alpha \rightarrow H^\alpha} = 1$ .

Análogamente al razonamiento seguido en [12], definimos ahora, para todo natural  $k \neq 0$ , las funciones dadas por la siguiente expresión

$$\begin{cases} \varphi_k(z) &= \frac{1}{z^k} \left( e^z - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{z^p}{p!} \right), & z \neq 0 \\ \varphi_k(0) &= \frac{1}{k!} \end{cases} \quad (2.4)$$

Para  $k = 0$  tenemos que  $\varphi_0 = \exp$ . De hecho, todas estas funciones  $\varphi_k$  son holomorfas en  $\mathbb{C}$  y acotadas en  $i\mathbb{R}$ , por lo que podemos aplicarlas a un operador lineal diagonal no acotado como puede ser  $A$ . Su aplicación viene dada por las siguientes integrales:

$$\varphi_{k+1}(-hA) = \frac{1}{h^{k+1}} \int_0^h e^{-(h-\tau)A} \frac{\tau^k}{k!} d\tau, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Queremos obtener aproximaciones numéricas en tiempo del siguiente problema de Cauchy (ecuación lineal de Schrödinger)

$$\begin{aligned}\partial_t u(t, x) + Au(t, x) &= f(t, x), & (x, t) \in \mathbb{T} \times (0, T], \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{T},\end{aligned}\quad (2.6)$$

donde  $T > 0$ ,  $A = -i\Delta$ ,  $u_0$  y  $f$  son dados. Para ello vamos a estudiar el siguiente método numérico, llamado Runge-Kutta exponencial de tipo colocación; de manera fundamental, hacemos referencia a [12] para una derivación de tales métodos para problemas semilineales basados en la fórmula de variación de las constantes. Sean  $h > 0$  y  $s \in \mathbb{N}^*$ , consideramos también  $(c_1, \dots, c_s) \in [0, 1]^s$  y llamamos  $N = \lfloor T/h \rfloor$ . Asumimos además que si  $(i, j) \in \{1, \dots, s\}^2$  son tales que  $i \neq j$ , entonces  $c_i \neq c_j$ . Entonces, para todo  $n \in \{0, \dots, N\}$ , tenemos que el tiempo tras  $n$  pasos es  $t_n = nh$ . En general sabemos que la aproximación de un paso en tiempo para un método Runge-Kutta exponencial viene dada por

$$u_{n+1} = e^{-hA}u_n + h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) f(t_n + c_i h). \quad (2.7)$$

Ahora bien, en el método que nosotros vamos a introducir ahora, el operador  $b_i(-hA)$  está definido por

$$b_i(-hA) = \frac{1}{h} \int_0^h e^{-(h-\tau)A} l_i(\tau) d\tau, \quad i \in \{1, \dots, s\}, \quad (2.8)$$

donde para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $l_i$  es el  $i$ -ésimo polinomio de Lagrange con respecto a los nodos  $(c_j h)_{j \in \{1, \dots, s\}}$ ,

$$l_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^s \frac{\tau/h - c_j}{c_i - c_j}. \quad (2.9)$$

Notemos que para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ , de la definición de  $b_i$  deducimos que  $b_i \in \text{span}(\varphi_0, \dots, \varphi_{s-1})$ . Asimismo, tenemos que  $b_i$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$  y acotada en  $i\mathbb{R}$ .

En el caso  $A = 0$ , el problema de Cauchy lineal (2.3) se reduce a un sistema lineal de EDOs para  $x \in \mathbb{T}$

$$\frac{du}{dt}(t, x) = f(t, x), \quad t \in (0, T],$$

con valores iniciales  $u(0, x) = u_0(x)$ . Además, el método exponencial Runge-Kutta de tipo de colocación (2.7) se reduce a un método de Runge-Kutta clásico (o también llamado fundamental) cuyos coeficientes son  $(b_i(0))_{i \in \{1, \dots, s\}}$ , dado que para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $b_i(-hA) = b_i(0)Id$ .

## Existencia y unicidad de la aproximación numérica

En primer lugar, mostraremos el resultado siguiente: un método Runge-Kutta exponencial de tipo colocación de  $s$  etapas aplicado a la ecuación de Schrödinger (2.6) es de orden al menos  $s$ , si el término fuente en (2.6) es lo suficientemente regular con respecto al tiempo, tomando valores en  $L^2(\mathbb{T})$ . Este resultado natural es, en cierto modo, muy similar al obtenido en el contexto de ecuaciones lineales parabólicas en [12] (ver Teorema 1). Sin embargo, en el caso de la ecuación lineal de Schrödinger, el orden de la constante  $C$  no depende de  $T$ .

**Teorema 2.1.** *Un método Runge-Kutta exponencial de tipo colocación de  $s$  etapas (2.7) aplicado al problema lineal (2.6) con  $f \in C^s([0, T], L^2(\mathbb{T}))$  es de orden global  $s$ , en el sentido de que existe una constante positiva  $C$  que depende sólo de  $(c_1, \dots, c_s)$  tal que para todo  $h > 0$  y todo  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,*

$$\|u_n - u(t_n)\|_{L^2} \leq Ch^s \int_0^{t_n} \|f^{(s)}(\tau)\|_{L^2} d\tau. \quad (2.10)$$

**Demostración.** Sea  $e_n = u_n - u(t_n)$  para todo  $n \in \{0, \dots, N\}$ . La fórmula de variación de las constantes aplicada a la solución exacta  $u$  del problema (2.6) nos proporciona:

$$u(t+h) = e^{-hA}u(t) + \int_0^h e^{-(h-s)A}f(t+s) ds. \quad (2.11)$$

donde  $h \in (0, T)$  y  $t \in (0, T-h]$ . Usando los desarrollos de Taylor de  $f$  en (2.7) y (2.11) y las propiedades de los polinomios de Lagrange (2.9) incluidos en las funciones  $(b_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$  (ver (2.8)), uno obtiene:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e^{-hA}e_n \\ &+ \int_0^h e^{-(h-\tau)A} \int_0^\tau \frac{(\tau-\sigma)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s)}(t_n+\sigma) d\sigma d\tau \\ &- \sum_{i=1}^s \int_0^h e^{-(h-\tau)A} l_i(\tau) d\tau \int_0^{c_i h} \frac{(c_i h - \sigma)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s)}(t_n+\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Observemos que  $\|e^{-hA}\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 1$ . Denotando  $\delta_{n+1} = e_{n+1} - e^{-hA}e_n$ , tenemos

$$\|\delta_{n+1}\|_{L^2} \leq Ch^s \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f^{(s)}(\tau)\|_{L^2} d\tau,$$

para cierta constante  $C$  que depende de  $(c_1, \dots, c_s)$ .

Esta desigualdad y la relación

$$e_n = \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \delta_{n-p}.$$

finalizan la demostración.  $\square$

**Observación 2.2.** Nótese que para todo  $r > 0$ , la estimación (2.10) sigue verificándose con la norma en  $H^r$  y  $f \in C^s([0, T], H^r(\mathbb{T}))$  en lugar de emplear el espacio  $L^2$ .

### Orden $s + 1$

Ahora bien, si el método Runge-Kutta fundamental es de orden  $s + 1$ , entonces el método Runge-Kutta exponencial de tipo colocación (2.7) aplicado al problema lineal de Schrödinger (2.6) también tiene orden  $s + 1$ , asumiendo que el término fuente de (2.6) tiene una regularidad espacial mayor que  $L^2$  (ver Teorema 2.4 para mayor precisión). Esto muestra una diferencia con respecto al caso de ecuaciones lineales parabólicas estudiado en [12] (ver Teorema 2). En primer lugar, recordamos (ver [12], fórmula (12)) que

**Lema 2.3.** *Si el método Runge-Kutta fundamental es de orden  $s+1$ , entonces*

$$\sum_{i=1}^s c_i^s b_i(0) = \frac{1}{s+1} \tag{2.13}$$

Somos capaces ahora de establecer el siguiente resultado:

**Teorema 2.4.** *Suponemos que  $r > 0$ , el método Runge-Kutta fundamental es de orden  $s + 1$  y  $f \in C^{s+1}((0, T], L^2(\mathbb{T}))$  es tal que  $f^{(s)} \in C^1([0, T], H^{r+2})$ . Entonces, el método Runge-Kutta exponencial de tipo colocación (2.7) aplicado al problema (2.6) es de orden  $s + 1$ , esto es, existe una constante  $C > 0$  que depende de  $(c_1, \dots, c_s)$  tal que para todo  $h > 0$  y  $n \in \{0, \dots, N\}$ , tenemos*

$$\|u_n - u(t_n)\|_{H^r} \leq CTh^{s+1} \left( \|f^{(s)}(0)\|_{H^{r+2}} + \int_0^{t_n} \|f^{(s+1)}(\tau)\|_{H^{r+2}} d\tau \right) \tag{2.14}$$

**Demostración.** Con la notación de la demostración anterior, usando de nuevo el desarrollo de Taylor de  $f$  en (2.12), denotamos

$$\delta_{n+1} = \delta_{n+1}^{(1)} + \delta_{n+1}^{(2)},$$

con

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}^{(1)} = & \left( \int_0^h e^{-(h-\tau)A} \int_0^\tau \frac{(\tau-\sigma)^{s-1}}{(s-1)!} d\sigma d\tau \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^s \int_0^h e^{-(h-\tau)A} l_i(\tau) d\tau \int_0^{c_i h} \frac{(c_i h - \sigma)^{s-1}}{(s-1)!} d\sigma \right) f^{(s)}(t_n), \end{aligned}$$

y, después de una integración por partes,

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}^{(2)} = & \int_0^h e^{-(h-\tau)A} \int_0^\tau \frac{(\tau-\sigma)^s}{s!} f^{(s+1)}(t_n + \sigma) d\sigma d\tau \\ & - \sum_{i=1}^s \int_0^h e^{-(h-\tau)A} l_i(\tau) d\tau \int_0^{c_i h} \frac{(c_i h - \sigma)^s}{s!} f^{(s+1)}(t_n + \sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (2.15)$$

Por tanto, establecemos

$$e_n^{(1)} = \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \delta_{n-p}^{(1)} \quad \text{y} \quad e_n^{(2)} = \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \delta_{n-p}^{(2)}.$$

De nuevo recordamos que  $\|e^{ihA}\|_{H^r \rightarrow H^r} = 1$ . Acotando la norma de los operadores previos tenemos que

$$\|\delta_{n+1}^{(2)}\|_{H^r} \leq C_1 h^{s+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f^{(s+1)}(\tau)\|_{H^r} d\tau,$$

con lo que podemos deducir de forma directa la siguiente cota para uno de los sumandos de los errores

$$\|e_n^{(2)}\|_{H^r} \leq C_1 h^{s+1} \int_{t_0}^{t_{n+1}} \|f^{(s+1)}(\tau)\|_{H^r} d\tau. \quad (2.16)$$

Por otra parte, dado que

$$\delta_{n+1}^{(1)} = h^{s+1} \left( \varphi_{s+1}(-hA) - \frac{1}{s!} \sum_{i=1}^s c_i^s b_i(-hA) \right) f^{(s)}(t_n),$$

la suma de Abel produce:

$$e_n^{(1)} = h^{s+1} \psi_{s+1}(-hA) \left( \left( \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \right) f^{(s)}(0) + \sum_{p=0}^{n-2} \left( \sum_{k=0}^p e^{-khA} \right) (f^{(s)}(t_{n-p-2}) - f^{(s)}(t_{n-p-1})) \right),$$

donde

$$\psi_{s+1}(z) = \varphi_{s+1}(z) - \frac{1}{s!} \sum_{i=1}^s c_i^s b_i(z).$$

Para conocer algo más sobre esta función, aplicando el Lema 2.3 y el hecho de que  $\varphi_{s+1}(0) = \frac{1}{(s+1)!}$  deducimos que  $\psi_{s+1}(0) = 0$ , ya que el método Runge-Kutta es de orden  $s + 1$ . Además,  $\psi_{s+1}$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$  y está acotada en  $i\mathbb{R}$ . Por tanto, deducimos la existencia de una función holomorfa  $\tilde{\psi}_{s+1}$  que está acotada en  $i\mathbb{R}$  tal que  $\forall z \in \mathbb{C}, \psi_{s+1}(z) = z\tilde{\psi}_{s+1}$ . Es más, existe una constante positiva  $C_2$  dependiendo únicamente de  $(c_1, \dots, c_s)$  tal que  $\|\tilde{\psi}_{s+1}\|_{H^r \rightarrow H^r} \leq C_2$ . Deducimos que

$$\|e_n^{(1)}\|_{H^r} \leq C_2 h^{s+1} \left( \left\| -hA \left( \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \right) f^{(s)}(0) \right\|_{H^r} + \sum_{p=0}^{n-2} \left\| -hA \left( \sum_{k=0}^p e^{-khA} \right) \int_{t_{n-p-2}}^{t_{n-p-1}} f^{(s+1)}(\tau) d\tau \right\|_{H^r} \right).$$

Para todo  $k \in \mathbb{Z}$  y  $p \in \{0, \dots, N-1\}$ ,

$$\left| -ih|k|_2^2 \sum_{l=0}^p e^{-ilh|k|_2^2} \right| \leq (p+1)h|k|_2^2 \leq T|k|_2^2. \quad (2.17)$$

En consecuencia, para todo  $p \in \{0, \dots, N-1\}$  y  $u \in H^{r+2}$ ,

$$\left\| -hA \sum_{l=0}^p e^{-lhA} u \right\|_{H^r} \leq T \|u\|_{H^{r+2}}. \quad (2.18)$$

Esto nos permite acotar  $\|e_n^{(1)}\|$ . Junto con la estimación (2.16), deducimos la desigualdad deseada (2.14).  $\square$

Nótese que la constante del resultado anterior depende de  $T$ . Esto corresponde al caso del método exponencial Runge-Kutta (2.7) aplicado a problemas lineales parabólicos (ver [14], Teorema 2). En el caso del problema lineal

de Schrödinger (2.6), si el método Runge-Kutta fundamental es de orden  $s + 1$ , es posible obtener un orden  $s + 1$  que no dependa de  $T$ , mediante una restricción de los valores del paso en tiempo, esto es, evitar que se produzca el efecto de resonancia.

### Orden $s + 2$

Como en el caso de los métodos exponenciales Runge-Kutta aplicados a problemas lineales parabólicos estudiados en [14] (ver Teorema 3), si el método fundamental Runge-Kutta es de orden  $s + 2$  y nuestro término fuente de (2.6) es lo suficientemente regular con respecto a la variable espacial, entonces el método Runge-Kutta exponencial (2.7) aplicado al problema lineal (2.6) es de orden  $s + 2$ . Antes de precisar un enunciado del principal teorema de esta subsección, nos referimos a [14] (Lemma 3) para obtener el siguiente resultado:

**Lema 2.5.** *Si el método fundamental Runge-Kutta es de orden  $s + 2$ , entonces:*

$$\sum_{i=1}^s c_i^{s+1} b_i(0) = \frac{1}{s+2}, \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^s c_i^s b_i'(0) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}. \quad (2.20)$$

Esto nos permite probar el siguiente:

**Teorema 2.6.** *Suponemos que  $r > 0$ , el método Runge-Kutta fundamental es de orden  $s + 2$  y  $f \in C^{s+2}((0, T], L^2(\mathbb{T}))$  es tal que  $f^{(s)} \in C^2((0, T], H^{r+4})$ . Entonces, el método Runge-Kutta exponencial de tipo colocación (2.7) aplicado al problema (2.6) es de orden  $s + 2$ , esto es, existe una constante  $C > 0$  que depende de  $(c_1, \dots, c_s)$  tal que para todo  $h > 0$  y  $n \in \{0, \dots, N\}$ , tenemos*

$$\begin{aligned} \|u_n - u(t_n)\|_{H^r} \leq & CTh^{s+2} \left( \|f^{(s)}(0)\|_{H^{r+4}} + \int_0^{t_n} \|f^{(s+1)}(\tau)\|_{H^{r+4}} d\tau \right. \\ & \left. + \|f^{(s+1)}(0)\|_{H^{r+2}} + \int_0^{t_n} \|f^{(s+2)}(\tau)\|_{H^{r+2}} d\tau \right) \end{aligned}$$

**Demostración.** Sea  $\delta_{n+1}^{(2)}$  definido por (2.15). Podemos escribir entonces

$$\delta_{n+1}^{(2)} = \delta_{n+1}^{(2.1)} + \delta_{n+1}^{(2.2)}$$

siendo cada uno de los sumandos dados por las siguientes expresiones

$$\delta_{n+1}^{(2.1)} = h^{s+2} \left( \varphi_{s+2}(-hA) - \frac{1}{(s+1)!} \sum_{i=1}^s c_i^{s+1} b_i(-hA) \right) f^{(s+1)}(t_n),$$

y

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}^{(2.2)} &= \int_0^h e^{-(h-\tau)A} \int_0^\tau \frac{(\tau-\sigma)^{s+1}}{(s+1)!} f^{(s+2)}(t_n + \sigma) d\sigma d\tau \\ &\quad - \sum_{i=1}^s \int_0^h e^{-(h-\tau)A} l_i(\tau) d\tau \int_0^{c_i h} \frac{(c_i h - \sigma)^{s+1}}{(s+1)!} f^{(s+2)}(t_n + \sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Fácilmente deducimos que existe  $C > 0$  dependiendo sólo de  $(c_1, \dots, c_s)$  tal que

$$\|\delta_{n+1}^{(2.2)}\|_{H^r} \leq Ch^{s+2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f^{(s+2)}(\tau)\|_{H^r} d\tau.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \delta_{n-p}^{(2.2)} \right\|_{H^r} &\leq Ch^{s+2} \sum_{p=0}^{n-1} \int_{t_{n-p-1}}^{t_{n-p}} \|f^{(s+2)}(\tau)\|_{H^r} d\tau \\ &\leq Ch^{s+2} \int_{t_0}^{t_n} \|f^{(s+2)}(\tau)\|_{H^r} d\tau. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como el método Runge-Kutta fundamental es de orden  $s+2$ , el Lema anterior nos garantiza que

$$\sum_{i=1}^s c_i^{s+1} b_i(0) = \frac{1}{s+2}$$

(ver (2.19)). Además,

$$\varphi_{s+2}(0) = \frac{1}{(s+2)!}.$$

En consecuencia, existe una función holomorfa  $\varsigma_{s+2}$  en  $\mathbb{C}$  tal que

$$\frac{1}{(s+1)!} \sum_{i=1}^s c_i^{s+1} b_i(z) - \psi_{s+2}(z) = z\varsigma_{s+2}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Asimismo,  $\varsigma_{s+2}$  está acotada en  $i\mathbb{R}$ . Por lo tanto, tenemos

$$\delta_{n+1}^{(2.1)} = -hA h^{s+2} \varsigma_{s+2}(-hA) f^{(s+1)}(t_n),$$

y gracias a la suma de Abel

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \delta_{n-p}^{(2.1)} \right\|_{H^r} &= h^{s+2} \zeta_{s+2}(-hA) \left( -hA \left( \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \right) f^{(s+1)}(0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=0}^{n-2} -hA \left( \sum_{k=0}^p e^{-khA} \right) (f^{(s+1)}(t_{n-p-2}) - f^{(s+1)}(t_{n-p-1})) \right) \end{aligned}$$

Para acotar la expresión anterior aplicamos (2.17) y sabemos entonces que existe una constante positiva  $C_1$  que depende únicamente de  $(c_1, \dots, c_s)$  tal que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \delta_{n-p}^{(2.1)} \right\|_{H^r} &\leq C_1 T h^{s+2} \left( \|f^{(s+1)}(0)\|_{H^{r+2}} \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{t_{n-1}} \|f^{(s+2)}(\tau)\|_{H^{r+2}} d\tau \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Para completar la demostración, dado que el método Runge-Kutta exponencial es de orden  $s + 2$ , gracias a los lemas anteriores, obtenemos

$$\sum_{i=1}^s c_i^s b_i(0) = \frac{1}{s+1}$$

y, por otra parte,

$$\sum_{i=1}^s c_i^s b_i'(0) = \frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

(ver igualdades (2.13) y (2.20), respectivamente).

Por ello, existe una función holomorfa  $\kappa_{s+2}$  en  $\mathbb{C}$  tal que

$$\varphi_{s+1}(z) - \frac{1}{s!} \sum_{i=1}^s c_i^s b_i(z) = z^2 \kappa_{s+2}(z).$$

Del mismo modo que hemos razonado anteriormente,  $\kappa_{s+2}$  está acotada en  $i\mathbb{R}$ . Adicionalmente, gracias a un razonamiento análogo para el orden  $s + 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \delta_{n-p}^{(1)} &= -h h^{s+1} \kappa_{s+2}(-hA) \left( -hA \left( \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \right) f^{(s)}(0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=0}^{n-2} -hA \left( \sum_{k=0}^p e^{-khA} \right) (f^{(s)}(t_{n-p-2}) - f^{(s)}(t_{n-p-1})) \right). \end{aligned}$$

Así pues, usando la desigualdad (2.17), existe una constante positiva  $C_2$  dependiendo únicamente de  $(c_1, \dots, c_s)$  tal que

$$\left\| \sum_{p=0}^{n-1} e^{-phA} \delta_{n-p}^{(1)} \right\|_{H^r} \leq C_2 T h^{s+2} \left( \|f^{(s)}(0)\|_{H^{r+4}} + \int_{t_0}^{t_{n-1}} \|f^{(s+1)}(\tau)\|_{H^{r+4}} d\tau \right). \quad (2.24)$$

El resultado se consigue uniendo (2.22), (2.23) y (2.24).  $\square$

## 2.3. Problemas semilineales

### Notación

Consideramos ahora el siguiente problema de Cauchy semilineal

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + Au(t, x) &= g(t, u(t, x)), & (t, x) &\in (0, T] \times \mathbb{T}, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x &\in \mathbb{T}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $T > 0$ ,  $A = -i\Delta$ ,  $r \geq 0$ ,  $u_0 \in H^r(\mathbb{T})$  y  $g$  son dadas. En la siguiente y en muchas aplicaciones, para todo  $t \in (0, T]$ ,  $g(t, u(t, x))$  procede de una función no lineal de  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{C}$ . Por ejemplo, para la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger,  $g(t, u) = g(t)(u) = i|u|^2 u$ .

Para resolver numéricamente el problema (2.25), consideramos de nuevo los métodos Runge-Kutta exponenciales de tipo de colocación (ver [12]). También hacemos referencia a [12] para una derivación de tales métodos para problemas semilineales basados en la fórmula de variación de constantes. Sea  $s \in \mathbb{N}^*$ , y consideramos tanto  $c_1, \dots, c_s \in [0, 1]$ , como  $h > 0$  dados. Llamamos  $N = \lfloor T/h \rfloor$ . También suponemos que si  $(i, j) \in \{1, \dots, s\}^2$  son tales que  $i \neq j$ , entonces  $c_i \neq c_j$ .

De la misma manera que en el caso lineal, denotamos para todo  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,  $t_n = nh$ . Para tal  $n$ , si  $u_n \in H^r(\mathbb{T})$  es una aproximación dada de la solución exacta  $u(t_n)$  del problema (2.25), entonces construimos una aproximación  $u_{n+1}$  de  $u(t_{n+1})$  resolviendo en primer lugar el sistema no lineal que consiste en las siguientes ecuaciones, también conocidas como etapas intermedias,

$$u_{n,i} = e^{-c_i h A} u_n + h \sum_{j=1}^s a_{i,j}(-hA) g(t_n + c_j h, u_{n,j}), \quad i \in \{1, \dots, s\}. \quad (2.26)$$

Las  $s$  incógnitas que tenemos que calcular son  $u_{n,1}, \dots, u_{n,s} \in H^r(\mathbb{T})$ . Los  $s^2$  coeficientes  $(a_{i,j}(-hA))_{(i,j) \in \{1, \dots, s\}^2}$  están definidos por la integral

$$a_{i,j}(-hA) = \frac{1}{h} \int_0^{c_i h} e^{-(c_i h - \tau)A} l_j(\tau) d\tau,$$

donde  $(l_j)_{j \in \{1, \dots, s\}}$  son los polinomios de Lagrange definidos en (2.9).

Una vez resueltas estas ecuaciones definimos la nueva aproximación en tiempo

$$u_{n+1} = e^{-hA} u_n + h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) g(t_n + c_i h, u_{n,i}), \quad (2.27)$$

donde los coeficientes  $(b_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$  vienen definidos en (2.8).

De la definición de  $a_{i,j}$  se deduce que, para todo  $(i, j) \in \{1, \dots, s\}^2$ ,

$$a_{i,j}(-hA) \in \text{span}(\varphi_0(c_i h A), \dots, \varphi_{s-1}(c_i h A))$$

y los coeficientes de cada combinación lineal dependen únicamente de la elección de los puntos  $(c_1, \dots, c_s)$ . Por lo tanto, cada coeficiente  $a_{i,j}(z)$  está acotado en  $i\mathbb{R}$  por una constante que depende sólo de la elección de  $(c_1, \dots, c_s)$ . En lo sucesivo,  $C$  denota una cota en  $i\mathbb{R}$  de las funciones  $(b_i(z))_{i \in \{1, \dots, s\}}$  y  $(a_{i,j}(z))_{(i,j) \in \{1, \dots, s\}^2}$  dependiendo sólo de la elección de  $(c_1, \dots, c_s)$ .

En el caso  $A = 0$ , el problema de Cauchy no lineal (2.25) se reduce a un sistema no lineal de EDOs para  $x \in \mathbb{T}$

$$\frac{du}{dt}(t, x) = g(t, u(t, x)), \quad t \in (0, T],$$

con valores iniciales  $u(0, x) = u_0(x)$ . Además, el método exponencial Runge-Kutta de tipo de colocación (2.26), (2.27) se reduce a un método de Runge-Kutta clásico (fundamental) cuyos coeficientes son los dados por  $(b_i(0))_{i \in \{1, \dots, s\}}$  y  $(a_{i,j}(0))_{(i,j) \in \{1, \dots, s\}^2}$ , porque, en ese caso, para todo  $(i, j) \in \{1, \dots, s\}^2$ ,

$$a_{i,j}(-hA) = a_{i,j}(0)Id, \quad b_i(-hA) = b_i(0)Id.$$

Para  $t \in (0, T]$ , denotamos  $f(t) = g(t, u(t))$ , el lado derecho de (2.25), donde  $u$  denota la solución exacta del problema.

El espacio  $(H^r(\mathbb{T}))^s$  dotado de la norma

$$\|(u_1, \dots, u_s)\|_{r,s} = \left( \sum_{j=1}^s \|u_j\|_{H^r(\mathbb{T})}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

es un espacio de Hilbert.

Para  $R > 0$ , denotamos por  $B(\mathbf{0}, R)$  al conjunto de  $\mathbf{u} \in (H^r(\mathbb{T}))^s$  tal que  $\|\mathbf{u}\|_{r,s} \leq R$ .

## Existencia y unicidad de la aproximación numérica

En esta subsección vamos a estudiar la existencia y unicidad de la solución numérica  $(u_0, \dots, u_N)$  proporcionada por el método exponencial de Runge-Kutta (2.26), (2.27), aplicado al problema semilineal (2.25) para  $h$  suficientemente pequeño y con las hipótesis adecuadas sobre la solución exacta y los diferentes elementos de la ecuación de Schrödinger. Además, daremos una primera cota para el error numérico cometido.

Nuestras hipótesis sobre la no linealidad de  $g$  y la solución exacta  $u$  de (2.25) son las siguientes:

- **Hipótesis 1.** La función  $g$  satisface

$$g(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

- **Hipótesis 2.** La no linealidad  $g$ , en el lado derecho de (2.25), es Lipschitziana, en el sentido de que existen constantes  $L > 0$  y  $\rho > 0$  tales que para todo  $t \in [0, T]$  y para todo  $u, v \in H^r(\mathbb{T})$  satisfaciendo  $\|u\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq \rho$  y  $\|v\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq \rho$ , se verifica que

$$\|g(t, u) - g(t, v)\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq L\|u - v\|_{H^r(\mathbb{T})}. \quad (2.29)$$

- **Hipótesis 3.** (2.25) admite una solución exacta  $u : [0, T] \rightarrow H^r(\mathbb{T})$  que es suficientemente regular. En particular, existe  $R > 0$  tal que para todo  $t \in [0, T]$ , se verifica que  $\|u(t)\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq R$ .

- **Hipótesis 4.** La función  $f : [0, T] \rightarrow H^r(\mathbb{T})$  es suficientemente regular.

En las aplicaciones, la Hipótesis 4 será a menudo una consecuencia de la Hipótesis 3 y de la regularidad de la función  $g$ .



Dado que  $\|(e^{-c_1 h A} y, \dots, e^{-c_s h A} y)\|_{r,s} \leq 3R\sqrt{s}$ , la desigualdad triangular y (2.30) implican que

$$\|f_{h,x,y}(v_1, \dots, v_s)\|_{r,s} \leq 3R\sqrt{s}.$$

Por lo tanto,  $f_{h,t,y}(B(\mathbf{0}, 3R\sqrt{s})) \subset B(\mathbf{0}, 3R\sqrt{s})$ .

Por otro lado, para  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_s) \in B(\mathbf{0}, 3R\sqrt{s})$  y  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_s) \in B(\mathbf{0}, 3R\sqrt{s})$ , por la Hipótesis 2 tenemos

$$\|f_{h,t,y}(\mathbf{v}) - f_{h,t,y}(\mathbf{w})\|_{r,s} \leq CLhs \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_{r,s}.$$

Por lo tanto, usando (2.30), uno deduce que

$$\|f_{h,t,y}(\mathbf{v}) - f_{h,t,y}(\mathbf{w})\|_{r,s} \leq \frac{h}{h_0} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_{r,s}.$$

Dado que  $hh_0^{-1} < 1$ , la ecuación  $\mathbf{x} = f_{h,t,y}(\mathbf{x})$  tiene exactamente una solución en  $B(\mathbf{0}, 3R\sqrt{s})$  por el teorema clásico de punto fijo de Picard.  $\square$

Ahora enunciamos un resultado clásico de convergencia, de forma que si  $h_0$  es suficientemente pequeño, entonces, para todo  $h \in (0, h_0)$ , el método exponencial Runge-Kutta de tipo de colocación dado por (2.26) y (2.27) proporciona una solución numérica única para todo  $n \in \{0, \dots, N\}$  tal que

$$\|u_n\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq 2R \quad \text{y} \quad \|(u_{n,1}, \dots, u_{n,s})\|_{r,s} \in B(0, 3R\sqrt{s}).$$

Además, tal método de  $s$  etapas es de orden  $s$  cuando se aplica al problema de Schrödinger semilineal (2.26).

**Teorema 2.8.** *Suponga que se verifican las Hipótesis 1 a 4 anteriores junto con (2.31). Sea*

$$\kappa_s = (s+1) \left( \frac{1}{s!} + \frac{Cs}{(s-1)!} \right).$$

Supongamos que  $h_0 > 0$  satisface (2.30), y

$$h_0^s \leq R \left( \kappa_s e^{2CsTL} \int_0^T \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r(\mathbb{T})} d\tau \right)^{-1}. \quad (2.32)$$

Entonces, para todo  $h \in (0, h_0)$ , el método Runge-Kutta exponencial expresado en (2.26) y (2.27) proporciona una solución numérica única tal que para todo  $n \in \{0, \dots, N\}$ ,  $\|u_n\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq 2R$  y  $\|(u_{n,1}, \dots, u_{n,s})\|_{r,s} \leq 3R\sqrt{s}$ . Además, para todo  $n \in \{0, \dots, N\}$ , se verifica la siguiente cota de error:

$$\|u_n - u(t_n)\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq \kappa_s e^{2CsLT} h^s \int_0^{t_n} \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r(\mathbb{T})} d\tau, \quad (2.33)$$

con  $0 \leq t_n \leq T$ .

**Demostración.** Sea  $h \in (0, h_0)$ . Probamos el resultado por inducción.

Supongamos que  $n \in \{0, \dots, N-1\}$  es tal que  $\|u_n\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq 2R$ . El lema 2.7 asegura que el sistema no lineal (2.26) tiene una única solución

$$(u_{n,1}, \dots, u_{n,s}) \in B(\mathbf{0}, 3R\sqrt{s}).$$

Por otra parte, las Hipótesis 3 y 4 aseguran que, para la solución exacta, tenemos

$$u(t_{n+1}) = e^{-hA}u(t_n) + h \sum_{i=1}^s b_i(-hA)f(t_n + c_i h) + \delta_{n+1}, \quad (2.34)$$

con

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} = & \int_0^h e^{-(h-\tau)A} \int_0^\tau \frac{(\tau-\sigma)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s)}(t_n + \sigma) d\sigma d\tau \\ & - h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \int_0^{c_i h} \frac{(c_i h - \tau)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s)}(t_n + \tau) d\tau, \end{aligned}$$

utilizando las propiedades de las reglas de cuadratura.

Análogamente, para cualquier  $i \in \{1, \dots, s\}$  tenemos

$$u(t_n + c_i h) = e^{-c_i h A} u(t_n) + h \sum_{j=1}^s a_{i,j}(-hA) f(t_n + c_j h) + \Delta_{n,i}, \quad (2.35)$$

con

$$\begin{aligned} \Delta_{n,i} = & \int_0^{c_i h} e^{-(c_i h - \tau)A} \int_0^\tau \frac{(\tau-\sigma)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s)}(t_n + \sigma) d\sigma d\tau \\ & - h \sum_{j=1}^s a_{i,j}(-hA) \int_0^{c_j h} \frac{(c_j h - \tau)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s)}(t_n + \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por lo tanto, si denotamos el error de la aproximación numérica como  $e_n = u_n - u(x_n)$  y  $e_{n,i} = u_{n,i} - u(t_n + c_i h)$ , entonces obtenemos

$$e_{n,i} = e^{-c_i h A} e_n + h \sum_{j=1}^s a_{i,j}(-hA) (g(t_n + c_j h, u_{n,j}) - f(t_n + c_j h)) - \Delta_{n,i}. \quad (2.37)$$

Además para todo  $i \in \{1, \dots, s\}$ , tenemos que  $\|e^{-c_i h A}\|_{H^r \rightarrow H^r} = 1$  y, por lo tanto,

$$\|e_{n,i}\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq \|e_n\|_{H^r(\mathbb{T})} + hCL \left( \sum_{j=1}^s \|e_{n,j}\|_{H^r(\mathbb{T})} \right) + \|\Delta_{n,i}\|_{H^r(\mathbb{T})}. \quad (2.38)$$

Sumando estas  $s$  desigualdades y usando (2.30), obtenemos

$$\sum_{j=1}^s \|e_{n,j}\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq 2s\|e_n\|_{H^r(\mathbb{T})} + 2 \sum_{i=1}^s \|\Delta_{n,i}\|_{H^r(\mathbb{T})}. \quad (2.39)$$

Por otro lado, si restamos (2.34) de (2.27) se obtiene

$$e_{n+1} = e^{-hA} e_n + h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) (g(t_n + c_i h, u_{n,i}) - f(t_n + c_i h)) - \delta_{n+1}. \quad (2.40)$$

Por lo tanto, se puede deducir la desigualdad siguiente

$$\|e_{n+1}\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq \|e_n\|_{H^r(\mathbb{T})} + hCL \sum_{i=1}^s \|e_{n,i}\|_{H^r(\mathbb{T})} + \|\delta_{n+1}\|_{H^r(\mathbb{T})}. \quad (2.41)$$

Usando (2.39), tras aplicar (2.40) obtenemos

$$\begin{aligned} & \|e_{n+1}\|_{H^r(\mathbb{T})} \\ & \leq \|e_n\|_{H^r(\mathbb{T})} + 2hCL \left( s\|e_n\|_{H^r(\mathbb{T})} + \sum_{j=1}^s \|\Delta_{n,j}\|_{H^r(\mathbb{T})} \right) + \|\delta_{n+1}\|_{H^r(\mathbb{T})} \\ & \leq (1 + 2hCLs)\|e_n\|_{H^r(\mathbb{T})} + \sum_{j=1}^s \|\Delta_{n,j}\|_{H^r(\mathbb{T})} + \|\delta_{n+1}\|_{H^r(\mathbb{T})} \\ & \leq \sum_{p=0}^n (1 + 2hCLs)^p \left( \sum_{j=1}^s \|\Delta_{n-p,j}\|_{H^r(\mathbb{T})} + \|\delta_{n+1-p}\|_{H^r(\mathbb{T})} \right) \\ & \leq e^{2N h CL s} \sum_{p=0}^n \left( \sum_{j=1}^s \|\Delta_{n-p,j}\|_{H^r(\mathbb{T})} + \|\delta_{n+1-p}\|_{H^r(\mathbb{T})} \right). \end{aligned}$$

A partir del desarrollo de Taylor, tanto en la solución exacta  $u(t_n)$ , como en la aproximación  $u_n$ , podemos obtener la relación siguiente

$$\begin{aligned} e_{n+1} & = e^{-hA} e_n + \int_0^h e^{-(h-\tau)A} \int_0^\tau \frac{(\tau - \sigma)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s)}(t_n + \sigma) d\sigma d\tau \\ & \quad - \sum_{i=1}^s \int_0^h e^{-(h-\tau)A} l_i(\tau) d\tau \int_0^{c_i h} \frac{(c_i h - \sigma)^{s-1}}{(s-1)!} f^{(s)}(t_n + \sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Aplicando esta igualdad junto con (2.36) para cualesquiera  $j \in \{1, \dots, s\}$  y  $p \in \{0, \dots, n\}$ , obtenemos las desigualdades siguientes

$$\|\Delta_{n-p,j}\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq \left( \frac{1}{s!} + \frac{C_s}{(s-1)!} \right) h^s \int_{t_{n-p}}^{t_{n-p+1}} \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r(\mathbb{T})} d\tau, \quad (2.42)$$

y

$$\|\delta_{n+1-p}\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq \left( \frac{1}{s!} + \frac{C_s}{(s-1)!} \right) h^s \int_{t_{n-p}}^{t_{n-p+1}} \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r(\mathbb{T})} d\tau, \quad (2.43)$$

de donde deducimos de la expresión anterior que

$$\|e_{n+1}\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq e^{2NhCsL} (s+1) \left( \frac{1}{s!} + \frac{C_s}{(s-1)!} \right) h^s \int_{t_0}^{t_{n+1}} \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r(\mathbb{T})} d\tau.$$

A partir de (2.32), obtenemos que  $\|e_{n+1}\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq R$ . Por lo tanto, aplicando la desigualdad triangular tenemos

$$\|u_{n+1}\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq \|u(t_{n+1})\|_{H^r(\mathbb{T})} + \|e_{n+1}\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq R + R$$

y, por tanto, alcanzamos el resultado del teorema.  $\square$

## Orden $s + 1$

El método Runge-Kutta exponencial de colocación, (2.26) junto con (2.27), aplicado a la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger (2.25) es de orden  $s + 1$  siempre que el método Runge-Kutta fundamental sea de orden  $s + 1$ . Obsérvese que este resultado es muy similar al obtenido en [12] en el caso de problemas semilineales parabólicos. Comencemos con un Lema de Gronwall un poco diferente,

**Lema 2.9.** *Sea  $Y$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^+$ . Sean  $T > 0$  y  $a \geq 0$ . Existe una constante positiva  $C$  tal que para todas las funciones no negativas  $b$  definidas en  $Y$  y todas las sucesiones  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales no negativos verificando la desigualdad*

$$\varepsilon_n \leq ah \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k + b(h),$$

para  $h \in Y$  y  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq nh \leq T$ , tenemos

$$\varepsilon_n \leq Cb(h).$$

**Teorema 2.10.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.8, si  $f^{(s)} \in C^1((0, T], H^{r+2})$  y el método de Runge-Kutta fundamental es de orden  $s + 1$ , entonces existe una constante positiva  $C > 0$  dependiendo solo de las constantes  $(c_1, \dots, c_s)$ ,  $L$  y  $T$  tales que para todo  $h \in (0, h_0)$ , tenemos*

$$\|u_n - u(t_n)\|_{H^r} \leq Ch^{s+1} \left( \|f^{(s)}(0)\|_{H^{r+2}} + \int_0^T \|f^{(s+1)}(\tau)\|_{H^{r+2}} d\tau + \int_0^T \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r} d\tau \right),$$

para  $n \in \{0, \dots, N\}$ .

**Demostración.** Por inducción, la relación (2.40) se convierte en

$$e_n = h \left( \sum_{k=0}^{n-1} e^{-khA} d_{n-k-1} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-khA} \delta_{n-k},$$

donde

$$d_k = \sum_{i=1}^s b_i(-hA) (g(t_k + c_i h, u_{k,i}) - f(t_k + c_i h)).$$

Se puede probar además que existe una constante  $C_1 > 0$  dependiendo solo de  $(c_1, \dots, c_s)$  tal que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} e^{-khA} \delta_{n-k} \right\|_{H^r} \leq C_1 h^{s+1} \left( \|f^{(s)}(0)\|_{H^{r+2}} + \int_0^{x_{n-1}} \|f^{(s+1)}(\tau)\|_{H^{r+2}} d\tau \right). \quad (2.44)$$

Por otro lado, aplicando la Hipótesis 2, tenemos

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} e^{-khA} d_{n-k-1} \right\|_{H^r} \leq CL \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^s \|e_{k,i}\|_{H^r}.$$

Usando ahora (2.39) se puede probar que

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} e^{-khA} d_{n-k-1} \right\|_{H^r} \leq 2sCL \sum_{k=0}^{n-1} \|e_k\|_{H^r} + 2CL \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^s \|\Delta_{k,i}\|_{H^r}.$$

Las estimaciones (2.42) y (2.43) proporcionan la existencia de una constante  $C_2 > 0$  que sólo depende de  $(c_1, \dots, c_s)$  y de  $s$  tal que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^s \|\Delta_{k,i}\|_{H^r} \leq C_2 h^s \int_0^{t_n} \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r} d\tau.$$

Por lo tanto, juntando las desigualdades anteriores tenemos

$$\begin{aligned} \|e_n\|_{H^r} \leq & 2shCL \sum_{k=0}^{n-1} \|e_k\|_{H^r} + h^{s+1} \left( 2CLC_2 \int_0^T \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r} d\tau \right. \\ & \left. + C_1 \left( \|f^{(s)}(0)\|_{H^{r+2}} + \int_0^T \|f^{(s+1)}(\tau)\|_{H^{r+2}} d\tau \right) \right). \end{aligned}$$

Concluimos con la ayuda del Lema 2.9, siendo en el mismo  $\varepsilon_n = \|e_n\|_{H^r}$ ,  $a = 2sCL$  y  $b$  igual al término multiplicado por  $h^{s+1}$  en la cota anterior.  $\square$

Si nos fijamos en la dependencia intrínseca de las constantes que aparecen en la cota del Teorema anterior con respecto a ciertos parámetros del problema es interesante dar la siguiente observación.

**Observación 2.11.** Nótese que en este caso no lineal, la constante de orden  $C$  que aparece en el teorema anterior depende a priori exponencialmente de  $T$ . Esto no es lo mismo en el caso lineal.

## Orden $s + 2$

Con el fin de dar condiciones algebraicas suficientes sobre los coeficientes del método Runge-Kutta fundamental para que el método exponencial Runge-Kutta de  $s$  etapas de colocación (2.26) y (2.27) sea de orden  $s + 2$ , vamos a reforzar nuestra hipótesis sobre la regularidad de la parte no lineal  $g$ . Suponemos entonces que la función  $g$  es regular en el sentido de funciones de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ . Por conveniencia, denotamos, por ejemplo, para  $v \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial g}{\partial u}(t, v)$  la aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal de  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  correspondiente a la primera derivada de  $g(t, v)$  respecto de una función de  $u \in \mathbb{R}^2$ . Para  $v \in H^r(\mathbb{T})$ , también denotamos por  $\frac{\partial g}{\partial u}(t, v)$  la aplicación inducida entre funciones en  $\mathbb{T}$  definida para una función  $w$  en  $\mathbb{T}$  por

$$\frac{\partial g}{\partial u}(t, v)(w)(x) = \frac{\partial g}{\partial u}(t, v(x))(w(x)), \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Nuestras hipótesis adicionales sobre el término no lineal  $g$  son las siguientes:

- **Hipótesis 5.** Existen constantes positivas  $L_1$  y  $\widetilde{L}_1$  tales que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial u}(t, u(t))v \right\|_{H^r(\mathbb{T})} \leq L_1 \|v\|_{H^r(\mathbb{T})}, \quad \forall t \in (0, T], \forall v \in H^r(\mathbb{T}),$$

y

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial u}(t, u(t))v \right\|_{H^{r+2}(\mathbb{T})} \leq \widetilde{L}_1 \|v\|_{H^{r+2}(\mathbb{T})}, \quad t \in (0, T], v \in H^{r+2}(\mathbb{T}).$$

- **Hipótesis 6.** Existe una constante positiva  $L_2$  tal que para todo  $t$  que pertenezca al intervalo  $(0, T]$  y para las funciones  $u, v, w \in H^r(\mathbb{T})$  que verifican que  $\max\{\|u\|_{H^r}, \|v\|_{H^r}, \|w\|_{H^r}\} \leq 2R$ , uno tiene la desigualdad siguiente

$$\begin{aligned} & \left\| g(t, v) - g(t, w) - \frac{\partial g}{\partial u}(t, u)(v - w) \right\|_{H^r} \\ & \leq L_2(\|u - v\|_{H^r} + \|u - w\|_{H^r})\|v - w\|_{H^r}. \end{aligned}$$

- **Hipótesis 7.** Existen constantes positivas  $L_3$  y  $\widetilde{L}_3$  tales que para todo  $t \in (0, T]$  y  $v, w \in H^{r+2}(\mathbf{T}^d)$ , tenemos que las desigualdades siguientes son ciertas

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t, u(t))(v, w) \right\|_{H^r} \leq L_3\|v\|_{H^r}\|w\|_{H^r}, \\ & \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}(t, u(t))v \right\|_{H^r} \leq L_3\|v\|_{H^r}, \\ & \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t, u(t))(v, w) \right\|_{H^{r+2}} \leq \widetilde{L}_3\|v\|_{H^{r+2}}\|w\|_{H^{r+2}}, \end{aligned}$$

y

$$\left\| \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial u}(t, u(t))v \right\|_{H^{r+2}} \leq \widetilde{L}_3\|v\|_{H^{r+2}}.$$

Las anteriores hipótesis sobre  $g$  están unidas a la siguiente, sobre la solución exacta  $u$  del problema (2.25), que refuerza la Hipótesis 3.

- **Hipótesis 8.** (2.25) tiene una solución exacta  $u : [0, T] \rightarrow H^{r+2}(\mathbb{T})$  que es lo suficientemente regular. En particular,  $u_0 \in H^{r+2}(\mathbb{T})$ .

Notemos que las hipótesis 5, 6 y 7 se satisfacen en el caso de la ecuación cúbica de Schrödinger cuando  $r > 1/2$  siendo  $r - 1/2 \notin \mathbb{N}$  siempre que  $u$  sea lo suficientemente regular.

Bajo estas hipótesis probamos que el método exponencial de Runge-Kutta dado por las ecuaciones (2.26) y (2.27) aplicado a la ecuación semilineal de Schrödinger es de orden  $s + 2$  siempre que el método de Runge-Kutta fundamental sea de orden  $s + 2$ .

**Teorema 2.12.** *Supongamos  $r \geq 0$ . Supongamos que el método de Runge-Kutta fundamental es de orden  $s + 2$ , y que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.8, y las anteriores Hipótesis 5, 6, 7 y 8. Si  $f \in \mathcal{C}^{s+2}((0, T], H^{r+4})$ ,*

entonces existe una constante positiva  $C > 0$  tal que para todo  $h \in (0, h_0)$  y todo  $n \in \{0, \dots, N\}$ , uno tiene

$$\|u(t_n) - u_n\|_{H^r} \leq Ch^{s+2}.$$

**Demostración.** Para  $n \in \{0, \dots, N\}$  definimos

$$J_n = \frac{\partial g}{\partial u}(t_n, u(t_n)),$$

y

$$\tilde{d}_{n,i} = g(t_n + c_i h, u_{n,i}) - g(t_n + c_i h, u(t_n + c_i h)) - J_n e_{n,i}.$$

Análogamente a lo anteriormente realizado, restando (2.34) de (2.27) tenemos que

$$e_{n+1} = e^{-hA} e_n - \delta_{n+1} + h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) J_n e_{n,i} + h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \tilde{d}_{n,i}.$$

Por inducción para  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ , concluimos que

$$e_{n+1} = - \sum_{p=0}^n e^{-phA} \delta_{n+1-p} \quad (2.45)$$

$$+ h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p} (e_{n-p,i} + \Delta_{n-p,i}) \quad (2.46)$$

$$- h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p} \Delta_{n-p,i} \quad (2.47)$$

$$+ h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \sum_{p=0}^n e^{-phA} \tilde{d}_{n-p,i}. \quad (2.48)$$

Dado que el método de Runge-Kutta fundamental es de orden  $s+2$ , del mismo modo que en el Teorema 2.6, se deduce que existe una constante positiva  $C_1$  tal que para todo  $h$  y  $n$ ,

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{p=0}^n e^{-phA} \delta_{n+1-p} \right\|_{H^r} \\ & \leq C_1 h^{s+2} \left( \|f^{(s)}(0)\|_{H^{r+4}} + \|f^{(s+1)}(0)\|_{H^{r+2}} \right. \\ & \quad \left. + \int_0^T \|f^{(s+1)}(\tau)\|_{H^{r+4}} d\tau + \int_0^T \|f^{(s+2)}(\tau)\|_{H^{r+2}} d\tau \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Lo que nos permite acotar (2.45).

Para el segundo término del error, es decir, (2.46), utilizamos (2.37) y luego (2.39) concluimos que

$$\begin{aligned} \|e_{n-p,i} + \Delta_{n-p,i}\|_{H^r} &\leq \|e_{n-p}\|_{H^r} + ChL \sum_{j=1}^s \|e_{n-p,j}\|_{H^r} \\ &\leq (1 + 2Ch_0Ls) \|e_{n-p}\|_{H^r} + 2ChL \sum_{j=1}^s \|\Delta_{n-p,j}\|_{H^r}. \end{aligned}$$

Utilizando la Hipótesis 5 y la estimación (2.43), concluimos que

$$\begin{aligned} &\left\| h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p,i}(e_{n-p,i} + \Delta_{n-p,i}) \right\|_{H^r} \\ &\leq Chs \left( \sum_{p=0}^n L_1 \left( (1 + 2Ch_0Ls) \|e_{n-p}\|_{H^r} + 2ChL \sum_{j=1}^s \|\Delta_{n-p,j}\|_{H^r} \right) \right) \\ &\leq ChsL_1(1 + 2Ch_0Ls) \sum_{p=0}^n \|e_p\|_{H^r} + 2C^2LL_1\kappa_s h^{s+2} \int_0^T \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r} d\tau. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existen constantes positivas  $C_2$  y  $C_3$  tales que para todo  $h$  y  $n$ , la norma en  $H^r$  del término (2.46) está acotada por

$$C_2h \sum_{p=0}^n \|e_p\|_{H^r} + C_3h^{s+2}.$$

Con la finalidad de acotar la norma de (2.47), llamamos

$$\psi_{i,s+1}(z) = \varphi_{s+1}(c_i z) c_i^{s+1} - \frac{1}{s!} \sum_{j=1}^s a_{i,j}(z) c_j^s,$$

y escribimos entonces

$$\Delta_{n-p,i} = h^{s+1} \psi_{i,s+1}(-hA) f^{(s)}(t_{n-p}) + \tilde{\Delta}_{n-p,i}$$

para obtener

$$\begin{aligned} & -h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p} \Delta_{n-p,i} \\ &= -h \sum_{i=1}^s b_i(0) \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p} h^{s+1} \psi_{i,s+1}(0) f^{(s)}(t_{n-p}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & -h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p} h^{s+1} \left( \psi_{i,s+1}(-hA) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - \psi_{i,s+1}(0) \right) f^{(s)}(t_{n-p}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} & -h \sum_{i=1}^s (b_i(-hA) - b_i(0)) \sum_{p=0}^n \left( e^{-phA} J_{n-p} h^{s+1} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \psi_{i,s+1}(0) f^{(s)}(t_{n-p}) \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$+h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p} \tilde{\Delta}_{n-p,i}. \quad (2.53)$$

Dado que el método Runge-Kutta fundamental es de orden al menos  $s+2$ , concluimos que

$$\sum_{i=1}^s b_i(0) \psi_{i,s+1}(0) = 0,$$

y, por lo tanto, el término (2.50) se puede escribir de la siguiente forma

$$h^{s+2} \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p} \left( \sum_{i=1}^s b_i(0) \psi_{i,s+1}(0) \right) f^{(s)}(t_{n-p}) = 0.$$

Por otro lado, existen funciones holomorfas  $(\psi_{i,s+1})_{i \in \{1, \dots, s\}}$  acotadas en el eje complejo tales que para  $i \in \{1, \dots, s\}$  y  $z \in \mathbb{C}$  tenemos que

$$\psi_{i,s+1}(z) - \psi_{i,s+1}(0) = z \Psi_{i,s+1}(z).$$

Obsérvese que las funciones  $(\Psi_{i,s+1})_{i \in \{1, \dots, s\}}$  están acotadas en  $i\mathbb{R}$ . Sea  $M > 0$  una cota para dichas funciones. Para cualquier  $i \in \{1, \dots, s\}$ , de la

suma de Abel resulta la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p} \Psi_{i,s+1}(-hA)(-hA) f^{(s)}(t_{n-p}) \\
&= \left( \sum_{p=0}^n e^{-phA} \right) J_0 \Psi_{i,s+1}(-hA)(-hA) f^{(s)}(0) \\
&\quad + \sum_{p=0}^{n-1} \left( \sum_{q=0}^p e^{-qhA} \right) \\
&\quad \int_{t_{n-p-1}}^{t_{n-p}} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(t, u(t)) \Psi_{i,s+1}(-hA)(-hA) f^{(s)}(t) \right] dt.
\end{aligned}$$

Por un lado tenemos

$$\left\| \left( \sum_{p=0}^n e^{-phA} \right) J_0 \psi_{i,s+1}(-hA)(-hA) f^{(s)}(0) \right\|_{H^r} \leq TL_1 M \|f^{(s)}(0)\|_{H^{r+2}}.$$

Por otra parte, después de derivar y usar las Hipótesis 5 y 7, llegamos a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(t, u(t)) \Psi_{i,s+1}(-hA)(-hA) f^{(s)}(t) \right] \right\|_{H^r} \\
& \leq hL_3 M \|f^{(s)}(t)\|_{H^{r+2}} \\
& \quad + hL_3 M \tilde{R} \|f^{(s)}(t)\|_{H^{r+2}} \\
& \quad + hL_1 M \|f^{(s+1)}(t)\|_{H^{r+2}},
\end{aligned}$$

donde  $\tilde{R}$  denota el máximo de  $\|u'(t)\|_{H^r}$  en  $[0, T]$  (ver Hipótesis 3). Concluimos entonces de forma inmediata que existe una constante positiva  $C_4$  tal que para cualquier valor de  $h$  y  $n$ , el término (2.51) está acotado por  $C_4 h^{s+2}$ .

Un razonamiento análogo nos permite encontrar funciones holomorfas  $(\theta_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$  acotadas en el eje complejo tales que para  $i \in \{1, \dots, s\}$  y  $z \in \mathbb{C}$  tenemos que

$$b_i(z) - b_i(0) = z\theta_i(z) = \theta_i(z)z,$$

y

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^s (b_i(-hA) - b_i(0)) \sum_{p=0}^n e^{-phA} J_{n-p} \psi_{i,s+1}(0) f^{(s)}(t_{n-p}) \\
&= \psi_{i,s+1}(0) \left( \sum_{p=0}^n e^{-phA} \right) \theta_i(-hA)(-hA) J_0 f^{(s)}(0) \\
&\quad + \psi_{i,s+1}(0) \sum_{p=0}^{n-1} \left( \sum_{q=0}^p e^{-qhA} \right) \theta_i(-hA)(-hA) \\
&\quad \int_{t_{n-p-1}}^{t_{n-p}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial u}(t, u(t)) f^{(s)}(t) \right) dt.
\end{aligned}$$

De nuevo, denotamos por  $M$  la constante que acota a las funciones  $(\theta_i)_{i \in \{1, \dots, s\}}$ . Aplicándolo al último término de la igualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
& \left\| e^{-qhA} \theta_i(-hA)(-hA) \int_{t_{n-p-1}}^{t_{n-p}} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(t, u(t)) f^{(s)}(t) \right] dt \right\|_{H^r} \\
& \leq Mh \int_{t_{n-p-1}}^{t_{n-p}} \left\| A \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(t, u(t)) f^{(s)}(t) \right] \right\|_{H^r} dt \\
& \leq Mh \int_{t_{n-p-1}}^{t_{n-p}} \left\| \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(t, u(t)) f^{(s)}(t) \right] \right\|_{H^{r+2}} dt.
\end{aligned}$$

Aplicando las Hipótesis 5 y 7 deducimos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(t, u(t)) f^{(s)}(t) \right] \right\|_{H^{r+2}} & \leq \tilde{L}_3(1 + \tilde{R}) \|f^{(s)}(t)\|_{H^{r+2}} dt \\
& \quad + \tilde{L}_1 \|f^{(s+1)}(t)\|_{H^{r+2}} dt,
\end{aligned}$$

si  $\tilde{R}$  denota el máximo de  $\|u'(x)\|_{H^{r+2}}$  en  $[0, T]$  (ver Hipótesis 7).

Concluimos entonces de forma inmediata que existe una constante positiva  $C_5$  tal que para cualquier valor de  $h$  y  $n$ , conseguimos la acotación de (2.52) siguiente:  $C_5 h^{s+2}$ .

Existe también una constante positiva  $C_6$  tal que para cualquier valor de  $h$  y  $n$ , tenemos que (2.53) está acotado por  $C_6 h^{s+2}$  con tan solo aplicar la Hipótesis 5. En consecuencia, obtenemos la siguiente estimación para (2.47):  $(C_4 + C_5 + C_6) h^{s+2}$ .

Finalmente, podemos estimar (2.48) usando la Hipótesis 6. Así, para  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $h \in (0, h_0)$ ,  $n \in \{0, \dots, N-1\}$  y  $p \in \{0, \dots, n\}$ , podemos probar que

$$\begin{aligned} \|\tilde{d}_{n-p,i}\|_{H^r} &\leq L_2 \left( \|u(t_{n-p}) - u_{n-p,i}\|_{H^r} \right. \\ &\quad \left. + \|u(t_{n-p}) - u(t_{n-p} + c_i h)\|_{H^r} \right) \|e_{n-p,i}\|_{H^r}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\left\| h \sum_{i=1}^s b_i(-hA) \sum_{p=0}^n e^{-phA} \tilde{d}_{n-p,i} \right\|_{H^r} \\ &\leq CL_2 h \sum_{p=0}^n \sum_{i=1}^s (\|e_{n-p,i}\|_{H^r}^2 + \tilde{R}h \|e_{n-p,i}\|_{H^r}). \end{aligned}$$

Ahora usando (2.39), (2.42) y (2.43) conseguimos:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^s \|e_{n-p,i}\|_{H^r}^2 \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^s \|e_{n-p,i}\|_{H^r} \right)^2 \\ &\leq (s+1) \left( 4s^2 \|e_{n-p}\|_{H^r}^2 + 4 \sum_{i=1}^s \|\Delta_{n-p,i}\|_{H^r}^2 \right) \\ &\leq (s+1) \left( 4s^2 \|e_{n-p}\|_{H^r}^2 + 4s\kappa_s^2 h^{2s+1} \int_{t_{n-p}}^{t_{n-p+1}} \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r}^2 d\tau \right) \\ &\leq (s+1) \left( 4s^2 R \|e_{n-p}\|_{H^r} + 4s\kappa_s^2 h^{2s+1} \int_{t_{n-p}}^{t_{n-p+1}} \|f^{(s)}(\tau)\|_{H^r}^2 d\tau \right). \end{aligned}$$

Deducimos entonces la existencia de una constante positiva  $C_7$  tal que para todo  $h$  y  $n$ , tenemos la siguiente acotación para el término (2.48)

$$C_7 h \sum_{p=0}^n \|e_p\|_{H^r} + C_7 h^{s+2}$$

Concluimos la demostración del teorema aplicando el Lema de Gronwall (Lema 2.9).  $\square$

**Observación 2.13.** Como es lógico pensar la constante  $C$  que aparece en el anterior teorema depende tanto del valor de la coordenada espacial  $T$  final como de las integrales de las normas de las derivadas de  $f$  sobre  $(0, T]$ . Esto diferencia los casos lineal y semilineal (ver Teorema 2.4)



# Capítulo 3

## Discretización del problema no lineal

Lo que vamos a llevar a cabo en este capítulo es proponer una discretización total, tanto en tiempo como en espacio, de la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger. Dicha discretización lleva involucrados muchos pasos que nosotros exponaremos. La programación de estos procesos, o bien variaciones de los mismos, es la que nos permitiría sacar conclusiones para su aplicación en las fibras ópticas analizando el comportamiento de los solitones que se envían por la fibra óptica.

### 3.1. Discretización

En esta section vamos a presentar la discretización numérica de la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger siguiente:

$$u_t = i\Delta u + i|u|^2u \quad (3.1)$$

Para ello, vamos a tener en cuenta las distintas etapas que hemos visto en los dos capítulos anteriores a la hora de realizar la discretización.

- En primer lugar, vamos a discretizar el laplaciano ( $i\Delta u$ ) con los métodos espectrales de Fourier.
- El siguiente paso será la discretización de la parte no lineal en el espacio ( $i|u|^2u$ ). Dado que estamos en el espacio, seguiremos utilizando los métodos de Fourier.
- Una vez completados estos dos pasos, hallamos la discretización en tiempo de (3.1) con los métodos Runge-Kutta exponenciales que se

han propuesto en el Capítulo 2.

Antes de continuar desarrollando cada una de estas etapas y describiendo el proceso que se lleva a cabo cada una de ellas, vamos a precisar más detalladamente el problema a discretizar, es decir, el problema de la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger. Sea  $T > 0$ , vamos a buscar una aproximación numérica a la solución real  $u(t, x)$  de

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= i\Delta u + i|u|^2 u, & (t, x) &\in (0, T] \times [0, 2\pi], \\ u(0, x) &= u_0(x), & x &\in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para nosotros, la condición frontera de la ecuación es la periodicidad en espacio de la solución (periodo  $2\pi$ ).

Sea  $h > 0$  el paso fijo que tenemos en la aproximación en tiempo. Vamos a denotar por  $u_{m,n}(t, x)$  la aproximación en espacio considerando  $m + 1$  coeficientes espectrales de Fourier y en tiempo tomamos  $t_n = nh$ , aplicando el método Runge-Kutta exponencial descrito en el capítulo anterior, esto es:

$$u_{m,n}(t, x) = \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}_k(t_n) \varphi_k(x), \quad (3.3)$$

con  $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ .

Teniendo en cuenta las derivadas espaciales de (3.3) tenemos que las derivadas de primer orden en la aproximación anterior serían

$$\frac{\partial u_{m,n}(t, x)}{\partial x} = \sum_{k=-m/2}^{m/2} (ik) \hat{u}_k(t_n) \varphi_k(x)$$

y la de segundo orden (unidimensionalmente, coincide con el laplaciano) serían

$$\Delta u_{m,n}(t, x) = \frac{\partial^2 u_{m,n}(t, x)}{\partial x^2} = \sum_{k=-m/2}^{m/2} (-k^2) \hat{u}_k(t_n) \varphi_k(x)$$

Análogamente con respecto de la derivada temporal de (3.3), tenemos

$$\frac{\partial u_{m,n}(t, x)}{\partial t} = \sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}'_k(t_n) \varphi_k(x).$$

Para la discretización del término no lineal tomamos la aproximación de Galerkin para que no se produzca el efecto denominado aliasing y la discretización sea estable en el sentido de que se conserve la energía acotada por una constante, posiblemente dependiente del tiempo, y la energía inicial del proceso. Pensamos ahora en el producto de la solución al cuadrado. El producto con la función  $u$  que tenemos posteriormente se realiza de manera análoga. Comenzamos entonces calculando el índice  $k$ -ésimo para dicho producto

$$\begin{aligned}
\widehat{(u \cdot u)}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \cdot u e^{-ikx} dx \\
&\approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{q=-m/2}^{m/2} \hat{u}_q e^{iqx} \right) \left( \sum_{p=-m/2}^{m/2} \hat{u}_p e^{ipx} \right) e^{-ikx} dx \\
&= \sum_{q=-m/2}^{m/2} \sum_{p=-m/2}^{m/2} \hat{u}_q \hat{u}_p \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(q+p-k)x} dx \right) \\
&= \sum_{q=-m/2}^{m/2} \sum_{p=-m/2}^{m/2} \hat{u}_q \hat{u}_p \delta_{p+q,k}.
\end{aligned}$$

Consideramos en lo sucesivo  $\hat{u}_p = 0$  para  $|p| > \frac{m}{2}$ . Entonces

$$\widehat{(u \cdot u)}_k = \sum_{p=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{k-p} \hat{u}_p.$$

Así para la ecuación que queremos

$$\begin{aligned}
\widehat{(u \cdot u \cdot u)}_k &= \sum_{p=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{k-p} \widehat{(u \cdot u)}_p \\
&= \sum_{p=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{k-p} \left( \sum_{q=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{p-q} \hat{u}_q \right).
\end{aligned}$$

**Observación 3.1.**  $|u_{m,n}|$  coincide la norma del vector  $u_{m,n}$ , gracias a la ortogonalidad de las funciones base  $\{\varphi_k(x)\}_k$ .

En consecuencia, nuestra discretización de la ecuación cúbica no lineal de

Schrödinger es la siguiente

$$\sum_{k=-m/2}^{m/2} \hat{u}'_k \varphi_k - i \sum_{k=-m/2}^{m/2} (-k^2) \hat{u}_k \varphi_k - i \sum_{k=-m/2}^{m/2} \sum_{p=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{k-p} \left( \sum_{q=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{p-q} \hat{u}_q \right) \varphi_k = 0$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones base, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que tendríamos que resolver es el siguiente

$$\hat{u}'_k(t) + i k^2 \hat{u}_k(t) - i \sum_{p=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{k-p}(t) \left( \sum_{q=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{p-q}(t) \hat{u}_q(t) \right) = 0, \\ k = -m/2, \dots, m/2.$$

Una vez finalizado este proceso, ya hemos completado los dos primeros pasos que habíamos propuesto. A continuación, realizamos el tercer paso, que no es otro que discretizar las ecuaciones anteriores aplicando el método Runge-Kutta exponencial descrito en el Capítulo 2.

Para ello, procedemos de la siguiente forma. En nuestra ecuación a discretizar, la función no lineal es la siguiente

$$g(\hat{u}_k(t)) = i \sum_{p=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{k-p}(t) \left( \sum_{q=-m/2}^{m/2} \hat{u}_{p-q}(t) \hat{u}_q(t) \right).$$

Recordemos que  $\hat{u}_p = 0$  para  $|p| > \frac{m}{2}$ .

Dados los coeficientes del método  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , necesitamos además calcular los polinomios de interpolación de Lagrange

$$l_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^s \frac{\tau/h - c_j}{c_i - c_j}$$

para definir los valores de  $b_i(-hA)$  y  $a_{i,j}(-hA)$ ,  $i, j = 1, \dots, s$ , siendo  $A = i \text{diag}((-m/2)^2, \dots, (m/2)^2)$ , siendo esta matriz la asociada a la discretización del laplaciano. Estos polinomios los podemos calcular aplicando diferencias divididas para alcanzar el polinomio interpolador de Newton. De hecho, acorde con lo establecido en (2.9), dichos polinomios interpolan los nodos

$(c_j h)_{j \in \{1, \dots, s\}}$ . Con este polinomio interpolador deducimos por tanto que los coeficientes del mismo son los coeficientes para escribir tanto  $b_i$  como  $a_{i,j}$  como combinación lineal de  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{s-1}$ .

Por último, para llevar a cabo la implementación, el único paso restante es aproximar la solución del problema no lineal (2.26) mediante, por ejemplo, el método de Newton y aplicar posteriormente el paso principal del método Runge-Kutta (2.27) con los valores que obtenemos para los coeficientes  $b_i(-hA)$  y  $a_{i,j}(-hA)$ , calculando entonces los valores  $g(u_{n,j})$  utilizados para obtener las etapas intermedias  $u_{n,i}$ .

Otro procedimiento alternativo para calcular los coeficientes espectrales del término no lineal se basa en calcular el interpolante de dicho término no lineal: reordenamos los coeficientes espectrales de nuestra aproximación; aplicamos la inversa de la Transformada de Fourier (iFFT) para obtener los coeficientes espaciales, de forma que podemos aplicar entonces el producto cúbico de esos coeficientes dado que estamos en el espacio; acto seguido, aplicamos la Transformada de Fourier (FFT) para obtener los coeficientes espectrales respectivos; y por último, reordenamos de nuevo.



# Capítulo 4

## Aplicaciones

En este capítulo describimos el uso de solitones en comunicaciones ópticas de alta velocidad. Los solitones son un tipo de ondas que se caracterizan fundamentalmente por la compensación de la dispersión lineal del pulso con la compresión lineal del mismo. Los solitones son muy apropiados para comunicaciones digitales a gran velocidad o con un considerable ancho de banda.

La propagación de la envolvente de los solitones en fibras exentas de pérdidas puede ser descrita por la ya bien conocida Ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS). Para obtener una solución aproximada podemos emplear los anteriores métodos, espectrales para obtener una aproximación en espacio, y los Runge-Kutta exponenciales para la aproximación en tiempo.

### 4.1. Introducción

Vamos a considerar básicamente como problema la difusión de los conocimientos existentes sobre solitones aplicados en comunicaciones ópticas de alta velocidad [5].

Actualmente, los investigadores buscan mejorar la velocidad y las distancias a las cuales es posible la transmisión de información sin necesidad de regenerar la señal, y por este motivo, han escogido el uso de solitones en fibras ópticas. La principal dificultad para ellos ha sido conocer la física del solitón con el fin de obtener su máximo provecho en aplicaciones prácticas.

Hoy en día la información encontrada es dispersa y confusa; cada investigador realiza pruebas y sus publicaciones son específicas, aunque existen algunos desarrollos en el ámbito práctico.

Los sistemas de comunicaciones tienen un ancho de banda (BW) cada vez más limitado desde el punto de vista de la cantidad de información que se requiere transportar, es entonces cuando se ve la necesidad de desarrollar diferentes métodos para incrementar dicha capacidad.

Uno de estos métodos es la implementación de solitones en las comunicaciones ópticas; dado que el ancho de banda es un parámetro fijo en sistemas de transmisión, los solitones, teniendo características peculiares, resultan ser una buena alternativa; dichas características incluyen aspectos tales como: poca dispersión, baja atenuación e interferencia nula. Lo que les da una gran ventaja con respecto a los fotones.

## 4.2. Historia

Las ondas usadas en comunicaciones ópticas presentan una atenuación y una deformación mientras se desplazan en algún medio y a lo largo del tiempo. Sin embargo, existen ondas que se caracterizan por mantener su forma mientras viajan, a éstas se les llama solitones. Su origen se remota al siglo pasado [1], sin embargo, su aplicación en comunicaciones no fue propuesta sino hasta 1973, cuando Hasegawa y Tappert vislumbraron el potencial del solitón. De hecho, demostraron que el comportamiento de una onda solitaria sobre el nivel del agua era de la forma

$$\operatorname{asech} \left( \frac{x - vt}{\sqrt{\frac{4h^2(h+a)}{3a}}} \right)$$

para una amplitud positiva  $a$  ( $x$  es la posición,  $v$  es la velocidad de la onda y lógicamente  $t$  es el tiempo). No obstante, habría que esperar hasta 1980, cuando Mollenauer y Gordon demostraron experimentalmente el desplazamiento de solitones en la fibra óptica.

En 1988, se demostró la posibilidad de la amplificación de solitones mediante el amplificador de fibra dopada con erbio, con el cual, se compensan las pérdidas producidas por la fibra. Con este avance tecnológico, se abrió la posibilidad de enviar solitones a grandes distancias sin necesidad de usar repetidores regenerativos (elementos electro-ópticos encargados de amplificar y dar forma a la señal).

Los solitones son considerados los pulsos luminosos ideales para las comunicaciones ópticas. Son muy apropiados para comunicaciones digitales a gran velocidad o con un considerable ancho de banda, gracias a su estabilidad en largas distancias y permiten la multiplexación por división de longitud de onda (transmisión simultánea de dos o más longitudes de onda), con lo cual, el ancho de banda disponible crece de manera considerable.

En la actualidad, muchos investigadores han reportado avances considerables en el alcance y en la velocidad de transmisión de solitones. Por ejemplo, el equipo de Aubin [2] montó un sistema de solitones con un alcance superior a 30.000 Km, a una velocidad de 20 Gb/s y repetidores cada 200 Km.

### 4.3. Solitones

Un solitón es un tipo especial de onda que se caracteriza por compensar la dispersión que sufre en su recorrido mediante una compresión no lineal provocada por la alta intensidad del pulso. El origen físico del solitón es el efecto Kerr, el cual se manifiesta mediante una constante dieléctrica no lineal, que puede compensar la dispersión de grupo en el medio óptico de propagación.

El fenómeno del solitón puede ser usado para generar un láser solitón con el fin de tener un dispositivo capaz de funcionar para compresión de señales y propósitos de conmutación (switching). La naturaleza del solitón es muy parecida a la del fotón, con lo cual, se intuye que comparten algunas propiedades.

Más que asignar una definición al solitón, los investigadores han centrado sus esfuerzos en comprender las características que lo hacen especial. Estas características se presentan a continuación.

#### Física del solitón

Como hemos dicho anteriormente, la característica fundamental del solitón, es la compensación de la dispersión lineal del pulso mediante la compresión no lineal del mismo, lo cual puede ser explicado en términos físicos. Para describirlos, es necesario comprender dos fenómenos presentes:

- **Dispersión**

Hace referencia al fenómeno por el cual la señal se deforma por ensanchamiento a medida que se desplaza, debido a que sus componentes de frecuencia no se mantienen constantes.

- **Modulación de autofase (efecto Kerr)**

Se refiere a la deformación del pulso por compresión (aplastamiento) ocasionado por un exceso de potencia en la fuente.

## 4.4. Análisis

En fibras ópticas, la transmisión de solitones se estudia, generalmente, mediante la envolvente de los mismos ( $E(z, t)$ ). Su propagación en fibras exentas de pérdidas puede ser descrita por la ENLS. Las pérdidas en la fibra y la dispersión cromática son los principales obstáculos que afectan a la propagación de los pulsos de los solitones.

### Ecuación no lineal de Schrödinger

Vamos a estudiar ahora cómo se deduce la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger a partir de las ecuaciones de Maxwell, aplicando las aproximaciones oportunas a las fibras ópticas. Así tendremos el modelo del medio de transmisión.

En primer lugar, introducimos las ecuaciones de Maxwell (obtenidas a partir de varias leyes físicas como son las de Lorentz, Gauss, Ampère-Maxwell y Faraday [18]) que son aquellas que relacionan las fuentes de los campos con los campos generados. Además, estas ecuaciones caracterizan los campos electromagnéticos.

Para ello, diferenciamos según el medio en el que nos encontremos. En nuestro caso, consideramos un medio que sea isótropo, homogéneo y lineal, en el que las ecuaciones de Maxwell son:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0, \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

mientras que en el vacío el resultado de tales ecuaciones es:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (4.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla(\mu_0 \mathbf{H}) = 0, \quad (4.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \epsilon_0 \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mu_0 \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (4.8)$$

donde los nombres y unidades de los elementos involucrados en ella son:

- $\mathbf{E}(V/m) \equiv$  **Intensidad de campo eléctrico.**
- $\mathbf{H}(A/m) \equiv$  **Intensidad de campo magnético.**
- $\rho(Cb/m^3) \equiv$  **Densidad de carga eléctrica.**
- $\mathbf{J}(A/m^2) \equiv$  **Densidad de corriente eléctrica.** En general  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c$  (la libre y la que viene del campo y las cargas en movimiento).
- $\mathbf{D}(Cb/m^2) \equiv$  **Desplazamiento eléctrico o densidad de flujo eléctrico.**
- $\mathbf{B}(T = V.s/m^2) \equiv$  **Densidad de flujo magnético.**
- $\epsilon(F/m) \equiv$  **permitividad eléctrica del medio.**  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F/m$  es la del vacío.
- $\mu(H/m) \equiv$  **permeabilidad magnética del medio.**  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$  es la del vacío.

Además, según sea el medio con el que trabajamos tenemos

- **Polarización dieléctrica**  $\mathbf{P}$  ( $Cb/m^2$ ) tal que

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Si estamos en el vacío  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ .

- **Polarización magnética o imanación**  $\mathbf{M}$  ( $A/m$ ) tal que

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}.$$

Si estamos en el vacío  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ .

Observamos que existe una relación entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{P}$  que se podemos describir explícitamente introduciendo la **susceptibilidad**. Es decir, existe una función  $\chi(t)$  tal que

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (4.9)$$

En los medios isótropos y lineales, como es nuestro caso en las fibras ópticas,  $\mathbf{P}$  es proporcional a  $\mathbf{E}$  y están en la misma dirección.

Queremos ahora construir un *modelo cuantitativo* de la óptica electromagnética, lo que lleva a hacer un estudio analítico y hallar la ecuación de propagación.

Así, utilizando las ecuaciones de Maxwell (4.3) y (4.4), y teniendo en cuenta que el medio dieléctrico en el que trabajamos no tiene imanación ( $\mathbf{M} = 0$ ), deducimos que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (4.10)$$

donde  $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$  y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío ( $c \cong 3 \times 10^{10}$  cm/seg).

Es bien conocida la igualdad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}.$$

Si ahora pensamos que tenemos cierta densidad de carga y aplicamos (4.1) en la igualdad previa, obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} \right) - \Delta \mathbf{E} \\ &= \nabla \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \left( \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \right) \right) - \Delta \mathbf{E}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia inmediata de (4.9).

Uno de los primeros aspectos que podemos resaltar es que la susceptibilidad en el material de las fibras ópticas tiene un comportamiento local muy restringido, de hecho, más adelante lo podremos aproximar por deltas de Dirac. La ecuación (4.10) es lineal en  $\mathbf{E}$ , de manera que podemos traspasarla al dominio de frecuencias mediante la transformada de Fourier, siendo esta

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt,$$

donde  $j^2 = -1$ .

Si hacemos únicamente la transformada de las derivadas con respecto del tiempo, introduciendo la relación entre la polarización y el campo eléctrico, que no es otra cosa que una convolución, tenemos la expresión

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \mathcal{F} \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \right) = \tilde{\epsilon}(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (4.11)$$

donde  $\tilde{\epsilon}(\omega)$  es la constante dieléctrica dependiendo de la frecuencia que ahora pasamos a describir. Ésta viene definida por  $\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega)$  siendo  $\tilde{\chi}(\omega)$  la transformada de Fourier de  $\chi(t)$  que, en general, es compleja.

Además, podemos relacionar  $\tilde{\epsilon}$  con el **índice de refracción**  $n(\omega)$  y el **coeficiente de absorción**  $\alpha(\omega)$  mediante la relación

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = \left( n(\omega) + \frac{j\alpha(\omega)}{2\omega} \right)^2.$$

Los parámetros introducidos pueden ser relacionados con la susceptibilidad por medio de las expresiones

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \Re(\tilde{\chi}(\omega)) \quad (4.12)$$

y

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{n(\omega)c} \Im(\tilde{\chi}(\omega)). \quad (4.13)$$

La solución de la ecuación (4.11), por tanto, es una onda viajera de la forma  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(j(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}))$  donde  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  siendo  $\lambda$  la **longitud de onda** y  $k$  el **vector de onda**. Normalmente se suele utilizar la notación fasorial que consiste en escribir la solución anterior de la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_c e^{j\omega t},$$

siendo  $\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k}\mathbf{r})$  la **amplitud compleja**, pero teniendo siempre presente que la señal es real de modo que una vez evaluado analíticamente el campo debemos estimar la  $\Re(\mathbf{E})$ , para obtener el campo que existe en realidad.

Una vez obtenida esta función de onda, dado que estamos trabajando en fibras ópticas, es decir, no tenemos cargas en la fibra (i.e.  $\rho = 0$ ), llegamos

a que la divergencia del campo eléctrico es nula. Así, podemos simplificar la expresión (4.11), resultando la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{E}. \quad (4.14)$$

Dividimos ahora  $\mathbf{P}$  en una parte lineal más otra no lineal, i.e.  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}$ . De este modo, la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{E}. \quad (4.15)$$

Ahora podemos considerar las siguientes aproximaciones a la hora de tratar nuestra ecuación

1. En las fibras ópticas la parte no lineal  $\mathbf{P}_{NL}$  producida por un campo de luz se tratará de una pequeña variación de la parte lineal  $\mathbf{P}_L$ .
2. Dado que estamos en una fibra óptica con las mismas características en todo punto, es decir, homogénea e isotrópica, el campo óptico mantiene su polarización a lo largo de toda la fibra. Basta con escribirlo como un escalar multiplicado por el mismo vector para todos los casos, es decir, si orientamos el campo y la fibra de tal forma que el vector que nos marca la dirección del campo sea  $\hat{\mathbf{x}}$  tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{x}}E(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{x}}P_L(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{x}}P_{NL}(\mathbf{r}, t).$$

3. Se considera un campo óptico cuasi-cromático, es decir, el espectro del campo está centrado en  $\omega_0 \approx 10^{15} Hz$  y la variación de las frecuencias es tal que

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1.$$

Dado cual es  $\omega_0$  esta última variación es válida para pulsos cuyo ancho sea inferior a  $0.1 \times 10^{-12} seg. = 0.1 pseg.$ .

Nuestro objetivo es estudiar la transmisión de los campos, con lo que, debido a las tres observaciones anteriores, esta transmisión debe ser real y centrada en  $\omega_0$ . Teniendo esto en consideración, junto con la segunda obser-

vación previa, la ecuación (4.15) se escribe de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left( E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t} + \overline{E(\mathbf{r}, t)} e^{-j\omega_0 t} \right) \right) & \quad (4.16) \\ = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left( E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t} + \overline{E(\mathbf{r}, t)} e^{-j\omega_0 t} \right) \right) \\ & + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left( P_L(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t} + \overline{P_L(\mathbf{r}, t)} e^{-j\omega_0 t} \right) \right) \\ & + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left( P_{NL}(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t} + \overline{P_{NL}(\mathbf{r}, t)} e^{-j\omega_0 t} \right) \right) \end{aligned}$$

siendo  $\overline{E(\mathbf{r}, t)}$ ,  $\overline{P_L(\mathbf{r}, t)}$  y  $\overline{P_{NL}(\mathbf{r}, t)}$  los complejos conjugados de  $E(\mathbf{r}, t)$ ,  $P_L(\mathbf{r}, t)$  y  $P_{NL}(\mathbf{r}, t)$  respectivamente.

Ahora bien, físicamente sabemos que la respuesta a la luz de cualquier dieléctrico se convierte en no lineal cuando el campo electromagnético es muy intenso, cosa que sucede en las fibras ópticas. Pensando en esto, la polarización inducida en los dipolos es no lineal con respecto al campo eléctrico  $\mathbf{E}$ . Una forma de expresar esto según sea el orden de linealidad en  $\mathbf{E}$  sería

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right), \quad (4.17)$$

donde  $\chi^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , es la susceptibilidad de orden  $j$  que, obviamente, es un tensor de rango  $j + 1$ .

A partir de la física, sabemos también que en las fibras ópticas los efectos a partir del tercer orden son despreciables, con lo cual, lo que nos interesa es lo que sucede en los tres primeros a la hora de introducirlos en la ecuación de ondas anterior (4.16).

**(A)** Empezamos estudiando lo que sucede para la parte lineal. La relación (4.9) proviene de una relación entre el campo eléctrico y el campo de polarización que éste produce en el medio. Esta relación la tenemos para el dominio del tiempo. Sin embargo, ya observamos antes que dado que estamos trabajando en fibras ópticas, los dos campos llevan la misma dirección y hemos supuesto que es  $\hat{\mathbf{x}}$ . Podemos entonces deducir la siguiente relación para el caso escalar

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - t') E(\mathbf{r}, t') e^{j\omega_0 t'} dt'. \quad (4.18)$$

Aplicando la identidad de Parseval junto con alguna otra propiedad de la transformada de Fourier (ver [17]), (4.18) se puede escribir de la siguiente forma

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\chi^{(1)}}(\omega) e^{-j\omega t} \widetilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) d\omega, \quad (4.19)$$

considerando las transformadas de Fourier de los integrandos anteriores. Así  $\widetilde{\chi^{(1)}}(-\omega)$  es la transformada de Fourier de  $\chi^{(1)}$  respecto de  $t'$  y  $\widetilde{E}$  la transformada de Fourier respecto de la variable  $t'$  del campo eléctrico  $E$ .

(B) En cuanto a la polarización no lineal, por lo comentado anteriormente

$$\mathbf{P}_{NL} \approx \epsilon_0 \left( \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} \right). \quad (4.20)$$

Ahora bien, podemos observar lo siguiente:

- Desde el punto de vista físico  $\chi^{(2)}$  es no nulo sólo para medios de niveles moleculares no simétricos. Como en las fibras ópticas solemos emplear  $SiO_2$ , y este se trata de una molécula simétrica, es claro que en nuestro caso

$$\chi^{(2)} \equiv 0.$$

- Es claro entonces que

$$\mathbf{P}_{NL} \approx \epsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3) dt_1 dt_2 dt_3. \quad (4.21)$$

En cuanto a este  $\chi^{(3)}$ , físicamente sabemos que la respuesta del dieléctrico es instantánea con lo que

$$\chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) = \chi_0^{(3)} \delta(t - t_1) \delta(t - t_2) \delta(t - t_3).$$

Tras hallar la integral de (4.21) teniendo en cuenta lo anterior, consideramos la aproximación como igualdad por los razonamientos anteriormente establecidos, y también asumimos que las expresiones son escalares en lugar de campos en las fibras ópticas. Por tanto, tenemos que

$$P_{NL} = \epsilon_0 \chi_0^{(3)} E(\mathbf{r}, t) E(\mathbf{r}, t) E(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{NL}(\mathbf{r}, t) E(\mathbf{r}, t) \quad (4.22)$$

siendo

$$\epsilon_{NL}(\mathbf{r}, t) = \chi_0^{(3)} \|E(\mathbf{r}, t)\|^2$$

que es la contribución no lineal de la constante dieléctrica.

Para estudiar ahora la ecuación (4.16) observamos que todos los campos están en la misma dirección, es decir, todos son proporcionales a  $\hat{\mathbf{x}}$ , y además, en la suma tenemos un escalar y su conjugado con lo que la ecuación (4.16) se puede pasar a una más simple considerando todas las partes con exponenciales positivas de la ecuación iguales (con las negativas también se podría hacer, igual que si consideramos parte real y parte imaginaria)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}) + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P_L(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}) \\ + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P_{NL}(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}) = \Delta (E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Aplicando esta, (4.18) y (4.22) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') E(\mathbf{r}, t') e^{j\omega_0 t'} dt' \right) \\ + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{NL} E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}) = \Delta (E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ahora bien, si empleamos (4.19) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\chi^{(1)}}(\omega) \widetilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) e^{-j\omega t} d\omega \right) \\ + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_{NL} E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}) = \Delta (E(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_0 t}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Hacemos ahora la Transformada de Fourier respecto a  $t$  de expresión superior teniendo en cuenta que, gracias a las propiedades de la Transformada de Fourier (ver [17]), la transformada de  $f(t) e^{j\omega_0 t}$  no es otra que  $\widetilde{f}(\omega - \omega_0)$ , esto es, la propiedad de traslación en la transformada. Eliminamos también la integral del producto escalar por ser muy pequeño el rango de frecuencias con el que trabajamos. Tras estas aproximaciones, (4.25) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \omega^2 \widetilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) + \frac{1}{c^2} \omega^2 \widetilde{\chi^{(1)}}(\omega) \widetilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) \\ + \frac{1}{c^2} \omega^2 \epsilon_{NL}(\mathbf{r}, \omega) \widetilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) + \Delta \widetilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Consideramos ahora, simplemente a efectos de notación, que

$$K_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

y también denotamos

$$\tilde{\epsilon}(\omega) = 1 + \widetilde{\chi^{(1)}}(\omega) + \widetilde{\epsilon_{NL}}(\mathbf{r}, \omega).$$

Introduciendo esta notación en (4.26), obtenemos la siguiente expresión

$$K_0^2 \tilde{\epsilon}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) + \Delta \tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = 0. \quad (4.27)$$

Nos disponemos a continuación a realizar separación de variables en esta ecuación. Para ello, consideramos

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z} \quad (4.28)$$

donde  $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$  es una función de variación lenta en  $z$ , ya que la parte principal del peso del movimiento en  $z$  viene dado por la exponencial compleja, dado que  $\beta_0$  se considera el número de onda.

Previamente a introducir esta igualdad en la ecuación, realizamos el desarrollo siguiente

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right) e^{j\beta_0 z} \\ & \quad + 2j\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right) e^{j\beta_0 z} \\ & \quad - \beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z}. \end{aligned}$$

Como  $\tilde{A}$  es una función de variación lenta de  $z$  entonces  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{A} \approx 0$ , con lo que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z} \right) \approx 2j\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right) e^{j\beta_0 z} - \beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z}. \quad (4.29)$$

Sustituyendo (4.28) en (4.27) y teniendo en cuenta (4.29) tenemos

$$\begin{aligned} & \tilde{\epsilon}(\omega) K_0^2 F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z} + (\Delta_{xy} F(x, y)) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z} \\ & + F(x, y) \left( 2j\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right) e^{j\beta_0 z} - \beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dividimos la expresión anterior por  $\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0)$  y obtenemos

$$\begin{aligned} & \tilde{\epsilon}(\omega) K_0^2 + \frac{(\Delta_{xy} F(x, y)) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z}}{F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z}} \\ & + \frac{F(x, y) \left( 2j\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \right) e^{j\beta_0 z} - \beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z} \right)}{F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{j\beta_0 z}} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\tilde{\epsilon}(\omega)K_0^2 + \frac{\Delta_{xy}F(x, y)}{F(x, y)} + \frac{2j\beta_0 \frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) - \beta_0^2 \tilde{A}(z, \omega - \omega_0)}{\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)} = 0.$$

Dado que los dos sumandos son de variables distintas, los igualamos a la misma función  $-\tilde{\beta}^2$  que sólo depende de  $\omega$ , de donde deducimos las siguientes dos ecuaciones

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + (\tilde{\epsilon}(\omega)K_0^2 + \beta^2(\omega))F(x, y) = 0, \quad (4.30)$$

y

$$2j\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\beta^2(\omega) - \beta_0^2)\tilde{A} = 0. \quad (4.31)$$

Despejando en esta última,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} &= \frac{j}{2\beta_0}(\beta^2(\omega) - \beta_0^2)\tilde{A} \\ &= \frac{j}{2\beta_0}((\beta(\omega) + \beta_0)(\beta(\omega) - \beta_0))\tilde{A} \\ &\approx \frac{j}{2\beta_0}((2\beta_0 + \Delta\beta)(\beta(\omega) - \beta_0))\tilde{A}. \end{aligned}$$

La aproximación es posible gracias a considerar  $\Delta\beta$  fijo, sin depender de  $\omega$ , dado que su valor tendrá realmente muy poca variación, y además, podemos relacionarlo con los efectos de las pérdidas y las no linealidades de la fibra. Aún así, hallamos el desarrollo de Taylor de  $\beta(\omega)$  en  $\omega_0$  y obtenemos

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \dots$$

donde

$$\beta_n = \left. \frac{d^n \beta}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Dado que  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , podemos deducir que el término cúbico y los de mayor orden son despreciables.

Tomando como exactas las aproximaciones tenemos

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = \left( j(\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{j}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 + j\frac{(\Delta\beta)^2}{2\beta_0} \right) \tilde{A}.$$

Hacemos la transformada de Fourier inversa y como resultado obtenemos

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{j}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + j \frac{(\Delta\beta)^2}{2\beta_0} A.$$

Además  $\Delta\beta$  incluye efectos de pérdidas  $\alpha$  y no linealidades de la fibra  $\gamma$  de la forma siguiente

$$j \frac{(\Delta\beta)^2}{2\beta_0} A = -\frac{\alpha}{2} A + j\gamma |A|^2 A.$$

Así, la propagación a lo largo de un pulso óptico sería

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{j}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = j\gamma |A|^2 A, \quad (4.32)$$

donde

- $\gamma$  es el coeficiente que incluye los efectos de las no linealidades en la fibra.
- $\alpha$  incluye los efectos de las pérdidas en la guía.
- la amplitud  $A$  está normalizada de modo que  $|A|^2$  es la potencia óptica.
- $\beta_1$  está relacionado con la velocidad de grupo,  $v_g = \frac{1}{\beta_1}$ . Dicha velocidad es aquella a la que se desplazan los pulsos.
- $\beta_2$  está relacionado con la dispersión de la velocidad de grupo. En el caso de fibras ópticas, se trata de una dispersión anómala dado que se trata de un medio dispersivo, en el cual la velocidad de grupo es mayor que la velocidad de fase (aquella necesaria para mantener la fase constante)

Con ciertos cambios de variable y, ciertas condiciones, la ecuación (4.32) es conocida como la ecuación cúbica no lineal de Schrödinger.

Una vez obtenida dicha ecuación, podemos realizar un análisis de la misma aplicando las discretizaciones en espacio y tiempo obtenidas en los capítulos anteriores, gracias a la FFT y los métodos Runge-Kutta exponenciales, con el objetivo de obtener una aproximación a la solución de (4.32). Notemos que las únicas modificaciones necesarias consistirían en añadir tanto el término de orden 1, como un término lineal en  $A$ , lo cual no supone una gran dificultad, sino un ligero incremento en el coste computacional.

## 4.5. Conclusiones

Observamos en (4.32) que si las pérdidas de la fibra son mínimas y la velocidad a la que se desplazan los pulsos lo suficientemente grande, la ecuación resultante sería la siguiente:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{j}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + j\gamma|A|^2 A, \quad (4.33)$$

la cual se corresponde con la ecuación de Schrödinger cúbica no lineal, anteriormente analizada. Esta ecuación es válida siempre que la fibra óptica convencional verifique las condiciones anteriores ( $\alpha \approx 0$  y  $\beta_1 \approx 0$ ). La ecuación (4.33) muestra que, a través de una adecuada combinación entre formato de pulso, su intensidad máxima y su anchura, las no linealidades tipo Kerr, i.e.  $j\gamma|A|^2 A$ , pueden compensar exactamente la dispersión de la velocidad de grupo,  $-\frac{j}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ , lo cual significa que el pulso se propagará por la fibra sin ningún cambio (distorsión). Esto se da, en parte, gracias a la tecnología actual de construcción de fibras ópticas que ha logrado disminuir considerablemente las pérdidas en la fibra, obteniendo valores muy próximos a 0.

Esto implica, como ya bien hemos dicho, que la solución (aproximación) de la ecuación sea una constante, es decir, en la práctica la onda se propaga sin sufrir deformación alguna.

Finalmente, resaltamos el hecho de que los solitones presentan una velocidad de grupo extremadamente alta, lo que nos permite presentarlos como la mejor alternativa para las comunicaciones ópticas de alta velocidad y de considerable ancho de banda.



# Bibliografía

- [1] J. ARNOLD, *Solitons in communications*, Fournal Electronics and Communication Engineering, pp88-96, 1996.
- [2] AUBIN, T. MONTALANT, ET AL., *Record 20-Gigabit-per-second-200 Km repeater span transoceanic soliton transmission using in-line romte pumping*, IEEE Photonics and Technology Letters, Vol. 8, No.9, pp1267-1269, Septiembre 1996.
- [3] H. BERLAND, A.L. ISLAS Y C.M. SCHOBBER, *Conservation of phase space properties using exponential integrators on the cubic Schrödinger equation*, J. Comput. Phys. 255 (1), (2007) pp. 284-299.
- [4] H. BERLAND, B.SKAFLESTAD, *Solving the nonlinear Schrödinger equation using exponencial integrators*, in: Proceedings SIMS 2005 46th Conference on Simulation and Modeling, Trondheim, Norway.
- [5] DESURVIRE, *Comunicaciones ópticas: la quinta generación*, Investigación y ciencia. pp 74-82, 1992.
- [6] G. DUJARDIN, *Exponencial Runge-Kutta methods for the Schrödinger equation*, Appl. Numer. Math. 59 (2009) 1839-1857
- [7] D. FUNARO, *Polynomial Approximation of Differential Equations*, Springer, Berlin (1992).
- [8] D. GOTTIEB, S.A. ORSZAG, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol.28 SIAM, Philadelphia (1977).
- [9] E. HAIRER, C. LUBICH Y G. WANNER, *Geometric Numerical Integration. Structure-preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, 2<sup>a</sup> Edición, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 31, Springer-Verlag, (2006).

- [10] M. HOCHBRUCK Y CH. LUBICH, *On Magnus integrators for time-dependent Schrödinger equations*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 41, (2003) pp. 945-963.
- [11] M. HOCHBRUCK Y A. OSTERMANN, *Explicit exponential Runge–Kutta methods for semilinear parabolic problems*, SIAM J. on Numer. Anal. 43 (3), (2005) pp. 1069-1090.
- [12] M. HOCHBRUCK Y A. OSTERMANN, *Exponential Runge–Kutta methods for parabolic problems*, Ap. Numer. Math., Vol 53, (2005) pp. 323-339.
- [13] E. ISAACSON, H.B. KELLER (1966), *Analysis of Numerical Methods*, J.Wiley and Sons, New York (1966).
- [14] B. MINCHEV, W.M. WRIGHT, *A review of exponential integrators for semilinear problems*, Tech. rep 2/05, Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.
- [15] S.A. ORSZAG, J.S. PATTERSON, *Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence*, Phys. Rev. Letters 28, 76-79 (1972).
- [16] R. PEYRET, *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, Appl. Math. Sc. Vol. 148, Springer
- [17] A. VRETBLAD, *Fourier Analysis and its Applications*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.
- [18] R. WAGNESS, *Campos electromagnéticos*, Limusa, 2010.