



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Grado en Estadística

TRABAJO DE FIN DE GRADO

**OPTIMIZACIÓN DINÁMICA DE
CARTERAS DE INVERSIÓN EN TIEMPO
CONTINUO**

Autor:

Enrique Carpintero Gutiérrez

Tutor:

Ricardo Josa Fombellida

Dedicado a mi familia y amigos

-Agradecimientos-

Quisiera expresar mi gratitud a Ricardo Josa Fombellida (mi tutor del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Valladolid) por ayudarme a realizar este trabajo y agradecer a mi familia y todos mis compañeros por su apoyo y confianza en mí a lo largo de estos años de carrera.

Resumen

En este trabajo se plantea el problema de optimización dinámica de carteras de inversión como un problema de control óptimo estocástico. El problema consiste en repartir un capital entre uno o varios activos financieros con el fin de maximizar una función de utilidad de la riqueza final o una utilidad del consumo, a lo largo de un intervalo de planificación. El problema se resuelve con el enfoque de la programación dinámica. Se analizan dos modelos diferentes: el modelo clásico de inversión-consumo de Merton y un modelo de un plan de pensiones donde los activos con riesgo son procesos estocásticos con elasticidad de la varianza constante. En ambos se incluye una ilustración numérica de los resultados, realizada con ayuda del software Julia. En el segundo modelo se utilizan datos reales del IBEX 35 y se comparan dos periodos inversores.

Abstract

In this paper, the problem of dynamic optimization of investment portfolios is presented as a stochastic control problem. The problem is to distribute a capital between one or more financial assets in order to maximize a utility function of final wealth or a utility of consumption, throughout a planning interval. The problem is solved with the dynamic programming approach. Two different models are analyzed: the classic Merton investment-consumption model and a pension plan model where the risky assets are stochastic processes with constant elasticity of variance. The second model uses real data from the IBEX 35 and compares two investment periods.

Índice general

1. Introducción	6
2. El mercado financiero	9
2.1. La Bolsa de Valores	9
2.2. Algunos conceptos en Bolsa	11
3. El problema de control óptimo estocástico	15
3.1. Planteamiento del problema	17
3.2. Método de la Programación Dinámica	19
4. El modelo de inversión y consumo de Merton	21
4.1. Planteamiento general	22
4.2. El mercado financiero	22
4.3. El problema de optimización	23
4.4. Ilustración numérica	26
5. El modelo CEV de plan de pensiones	35
5.1. El plan de pensiones	35
5.2. El mercado financiero	38
5.3. El problema de optimización	40
5.4. Ilustración numérica	41
5.4.1. Análisis en periodo alcista	43
5.4.2. Análisis en periodo bajista	47
6. Conclusiones	52

7. Bibliografía	54
8. Apéndice	57
8.1. Código para el modelo de Merton	58
8.2. Datos del modelo CEV	65
8.2.1. Escenario alcista	65
8.2.2. Escenario bajista	68
8.3. Código para el modelo CEV	71

Capítulo 1

Introducción

Un problema de control óptimo en tiempo continuo pretende optimizar (maximizar o bien minimizar) una función objetivo en presencia de la variable temporal y de un grupo de variables de estado y de control. Estas variables de estado son dependientes de las variables de control y evolucionan en el tiempo siguiendo unas ecuaciones de estado. En un problema de control óptimo estocástico estas ecuaciones de estado son ecuaciones diferenciales estocásticas y para su resolución uno de los métodos que puede usarse es el de la Programación Dinámica, que viene dado por la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB).

La Programación Dinámica fue iniciada por Richard Bellman en 1953. Consiste en la división de un problema en sub-problemas más pequeños de los que se obtiene una solución óptima. Acumulando las soluciones óptimas de los sub-problemas se construye la solución óptima del problema. La Programación Dinámica ha sido utilizada en multitud de disciplinas, entre ellas en la teoría económica y matemática financiera.

Una de las aplicaciones del control óptimo estocástico es la optimización de carteras de inversión. El principal objetivo es la construcción de una cartera de inversión, es decir, distribuir de forma óptima la inversión entre distintos activos, minimizando su riesgo y/o maximizando su rentabilidad. A diferencia de los problemas de optimización de carteras desde el punto de vista estático (véase por ejemplo González-Andrés (2015) y López -Casado

(2015)), en los de optimización dinámica interviene la variable temporal. A partir de la publicación del célebre modelo de inversión y consumo de Merton (1971), donde el objetivo del problema es encontrar la estrategia de consumo y seleccionar la cartera de inversiones que maximice una determinada función de utilidad, han surgido numerosos trabajos en la literatura sobre el tema de optimización dinámica de carteras, como son Duffie y otros (1997), Koo (1998) y Zhao y Rong (2017). Más adelante, basándose en el modelo de Merton, se han planteado y resuelto problemas en otros contextos, como en seguros y en planes de pensiones. En un plan de pensiones interesa encontrar la cartera óptima de inversiones del fondo de manera que se maximice una utilidad o se minimicen determinados riesgos financieros. Consultar la referencia Devolder y otros (2012). Algunos trabajos sobre optimización dinámica de un plan de pensiones son: Cairns (2000), Haberman y otros (2000), Taylor (2002), Gao (2009) y Josa-Fombellida y otros (2018).

El objetivo principal del trabajo es mostrar cómo se puede analizar un modelo de optimización de carteras de inversión en tiempo continuo mediante el método de la programación dinámica estocástica. Una parte importante del trabajo es estudiar la evolución temporal de las soluciones óptimas mediante una ilustración numérica con el uso del software Julia. Se consideran dos modelos. En primer lugar, el clásico de inversión-consumo de Merton, donde los activos con riesgo son movimientos Brownianos geométricos y, en segundo lugar, un modelo dinámico de un plan de pensiones, donde los activos con riesgo son procesos estocásticos con elasticidad de la varianza constante (CEV) y donde también se ilustra el uso de datos reales del IBEX 35.

El trabajo se desarrolla de la siguiente forma. Después de la introducción en el Capítulo 2 se dan a conocer algunos conceptos necesarios del mercado financiero y de inversión en Bolsa para la buena comprensión del contexto del trabajo. En el Capítulo 3 se presenta el problema de control óptimo estocástico y su resolución mediante la ecuación de HJB. En el Capítulo 4 se analiza el modelo de selección carteras de inversión y consumo de Merton. En este modelo se incluye una ilustración numérica de la evolución temporal óptima de la inversión, el consumo y la riqueza. En el Capítulo 5 se analiza

un modelo de optimización de carteras en un plan de pensiones donde los activos con riesgo son de tipo CEV, incluyendo una ilustración de resultados con datos reales. En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones. El Capítulo 7 contiene la bibliografía. El código Julia para cada modelo y los datos se incluyen en el Capítulo 8 como Apéndice.

Capítulo 2

El mercado financiero

Tanto en optimización estática como dinámica, el propósito del inversor es obtener carteras de inversión razonables. Para ello se utiliza el capital de partida para invertirlo en el denominado mercado financiero. Éste está formado por activos financieros o empresas que cotizan en Bolsa, cuyo valor de cotización cambia con el tiempo, y por activos sin riesgo como las letras del Tesoro. Una cartera es el reparto de ese capital en los activos del mercado y en las letras del Tesoro. En el caso de optimización dinámica, ese reparto cambia con el tiempo.

2.1. La Bolsa de Valores

La Bolsa de Valores se puede definir como el mercado secundario de valores públicos o privados en el que se negocian acciones, obligaciones, deuda pública y, en menor medida, otros títulos mobiliarios. Es punto de encuentro entre dos figuras muy importantes en una Economía: empresas y ahorradores.

Todo participante que realice actividades en Bolsa busca obtener una rentabilidad y ésta se puede obtener de dos maneras: mediante el cobro de dividendos o con diferencia entre el precio de venta y el de compra de los títulos, es decir, la plusvalía o minusvalía obtenida.

Los diferentes participantes pueden ser intermediarios, inversores, empresas y Estados. Entre los inversores se encuentran los inversores a largo

plazo, que pretenden obtener sus rentabilidades principalmente mediante dividendos y ampliaciones de capital, y los inversores a corto plazo, que asumen mayores riesgos comprando y vendiendo acciones en intervalos muy pequeños de tiempo.

La Bolsa cumple con múltiples funciones en una Economía, entre las que podemos mencionar:

Función de inversión. La Bolsa de Valores cumple un propósito económico fundamental al dirigir el ahorro de la sociedad hacia la financiación de actividades empresariales y la inversión. De esta forma, se puede minimizar e incluso, en algunos casos, eliminar el uso ocioso de recursos financieros. En la Bolsa, las empresas pueden acudir para obtener financiación y a los ahorradores se les da la oportunidad de emplear sus ahorros, conectándolos sin intermediarios y permitiendo al público una participación más activa en la generación de riqueza.

Función de liquidez. La Bolsa de Valores ofrece a los poseedores de valores mobiliarios la posibilidad de transformarlos en dinero en cualquier momento. Esto quiere decir, que los valores mobiliarios que no se cotizan en la Bolsa sean completamente líquidos, pues siempre existe la posibilidad de buscar un comprador cuando se necesiten vender. Pero tal posibilidad resulta complicada, en muchos casos inviable y sin que el vendedor tenga la seguridad de haber vendido al valor real o de mercado.

Función de participación. La Bolsa permite a los ahorradores participar del desarrollo económico a través de la participación en la gestión de las empresas, pues al comprar acciones se convierten en socios de ellas. La Bolsa hace posible que los trabajadores y el público en general participen en la función empresarial.

Función de valoración. El valor bursátil de una empresa se define como el producto del valor de su acción en Bolsa por el número de acciones en circulación. Este valor objetivo o de mercado sirve de base o punto de partida a la hora de vender o comprar una compañía.

Función informativa. La Bolsa sirve como indicador de la situación económico y social reflejando el impacto de los acontecimientos que suce-

den en la realidad, es la caja de resonancia del quehacer político nacional e internacional dada la estrecha relación entre lo político y económico.

La Bolsa española ha experimentado un sustancial crecimiento al igual que intensos cambios en las últimas décadas. Los sistemas técnicos, operativos y de organización que sustentan hoy al mercado permiten la gestión de volúmenes de inversión cada vez mayores y proporcionar a los mercados una mayor transparencia, liquidez y eficacia.

En España hay cuatro Bolsas de Valores oficiales: Barcelona (1915), Bilbao (1890), Madrid (1831) y Valencia (1970). Cabe destacar que la Bolsa de Madrid es la quinta Bolsa de Europa y la décima del mundo por su volumen de contratación.

El índice IBEX 35 (Índice Bursátil Español) es el principal índice bursátil de referencia de la Bolsa española elaborado por Bolsas y Mercados Españoles (BME). Está formado por las 35 empresas con más liquidez que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Electrónico (SIBE) en las cuatro Bolsas Españolas (Madrid, Barcelona, Bilbao y Valencia).

2.2. Algunos conceptos en Bolsa

A continuación se muestran instrumentos que indican cómo realizar una inversión en Bolsa, o bien obtener rentabilidad derivada de ésta. Se manejarán a lo largo del trabajo.

Acciones

Las empresas muchas veces necesitan ampliar su capital, para poder crecer. Una forma de hacerlo, es emitir nuevas acciones y ofrecerlas a inversores en la Bolsa. Una acción es una parte representativa del capital de una empresa: una pequeñísima porción de la misma.

Una vez que la empresa colocó sus acciones en Bolsa, es decir, los inversores adquirieron esas acciones que les vendió la empresa, ésta utiliza el dinero para financiar sus proyectos productivos. Ahora bien, los inversores que compraron acciones no se las tienen que quedar. En cualquier momento pueden venderlas a otros a través de la Bolsa de Valores. Ya en esto no participa

la empresa, ni le afecta; son transacciones entre compradores y vendedores directamente.

Como cualquier precio en una Economía de libre mercado, los precios de las acciones están sujetos a la ley de la oferta y demanda. Es decir, suben o bajan de precio de acuerdo de acuerdo con esta ley. Una acción es una parte representativa del capital de una empresa. Quien las compra, entonces, se convierte en dueño de esa porción. Las acciones suben o bajan de precio porque siempre hay compradores y siempre hay vendedores: el precio se determina según qué tanto están dispuestos los compradores a pagar por una acción.

Letras del Tesoro

Para poder financiar los gastos, la Sanidad, los funcionarios, etc., el Gobierno de España emite deuda pública, es decir, pide a los ciudadanos que le presten dinero para que pueda seguir pagando. Es una de las formas que tiene el Gobierno de asegurar los pagos aunque no tenga el dinero.

Esta deuda pública se materializa en forma de letras del Tesoro, bonos del estado y obligaciones, que son los títulos que se compran, al igual que si se compraran acciones de una o varias empresas en Bolsa. La única diferencia entre estos tres títulos es el plazo en el que se emiten, siendo las letras del Tesoro a 3, 6 y 12 meses, los bonos de 3 a 5 años y las obligaciones a más de 10 años.

En este trabajo nos centraremos sólo en las letras del Tesoro, aunque los desarrollos son válidos para el resto de productos, si bien necesitaríamos plazos amplios en estudios posteriores para hacer predicciones a futuro. Las letras del Tesoro se compran mediante subasta pública que organiza el Estado, la cual se lleva a cabo cada mes.

Renta fija

Los instrumentos de inversión de renta fija son emisiones de deuda que realizan los Estados y las empresas dirigidos a un amplio mercado. Generalmente son emitidos por los gobiernos y entes corporativos de gran capacidad financiera en cantidades definidas que conllevan una fecha de expiración.

Los activos financieros o títulos de valores como los bonos, las obligaciones, las letras y pagarés son ejemplos de renta fija.

Renta variable

Los instrumentos de renta variable son especialmente aquéllos que son parte de un capital, como las acciones de las compañías anónimas. Las acciones son representativas del capital de una empresa. Los accionistas son copropietarios y por lo tanto solidarios con la responsabilidad de la compañía, ejerciendo su papel en las asambleas generales ordinarias y extraordinarias, que eligen a las autoridades y deciden sobre los cambios y expansión de actividades que les propone la junta directiva.

Las acciones, las participaciones en fondos de inversión, los bonos y obligaciones convertibles son ejemplos de renta variable.

La combinación de renta fija y renta variable es la renta mixta. En este caso el inversor reparte su capital entre acciones, o activos con riesgo, y letras, o activos sin riesgo.

Dividendo

Es la parte del beneficio de una empresa que se reparte entre los accionistas de una sociedad. El dividendo constituye la principal vía de remuneración de los accionistas como propietarios de una sociedad. Su importe debe ser aprobado por la Junta General de Accionistas de la sociedad, a propuesta del consejo de administración.

Se puede distinguir entre dividendo activo y dividendo pasivo. Por un lado, el dividendo activo es la parte del beneficio obtenido por las sociedades mercantiles cuyos órganos sociales acuerdan que sea repartido entre los socios de las mismas. Por otro lado, el dividendo pasivo es el crédito que ostenta la sociedad mercantil frente al socio, por la parte del capital social que suscribió y que se comprometió a desembolsar.

Cartera de inversiones

También denominada cartera de valores o portafolio de inversiones. Es una determinada combinación de activos financieros o empresas que cotizan en Bolsa, en los cuales se invierte un capital. Puede estar compuesta por una combinación de algunos instrumentos de renta fija y renta variable.

Los instrumentos de renta fija aseguran un retorno fijo al momento de invertir, pero normalmente con una rentabilidad menor a la de uno de renta variable, que no asegura un retorno inicial pero puede ofrecer retornos más altos. En cambio, la renta fija no tiene riesgo, pero sí la variable.

El principal objetivo en la construcción de una cartera de inversiones consiste en distribuir óptimamente la inversión entre distintos activos, minimizando el riesgo y maximizando su rentabilidad. En optimización dinámica estos objetivos se plantean en cada instante de tiempo mediante la optimización de funciones de utilidad.

Capítulo 3

El problema de control óptimo estocástico

Un problema de control óptimo en tiempo continuo consiste en optimizar (maximizar o minimizar) un funcional objetivo que depende de la variable temporal, de un grupo de variables denominadas de estado y de otro grupo de variables de control. Las variables de estado dependen de las de control y su evolución temporal está dada por las ecuaciones de estado, en función de las variables de control. Así, conocidos los controles y unas condiciones iniciales se supone que se determinan las variables de estado.

Si en el problema no se contempla ningún tipo de incertidumbre, el problema es de control óptimo determinista o simplemente de control óptimo. En cambio, si hay incertidumbre, se denomina de control óptimo estocástico. Esta incertidumbre se modeliza mediante procesos estocásticos de difusión, que dependen de movimientos Brownianos, o de difusión con saltos, que dependen adicionalmente de otros procesos de Poisson o de saltos.

En un problema de control óptimo determinista las ecuaciones de estado son ecuaciones diferenciales mientras que en uno de control estocástico son ecuaciones diferenciales estocásticas. Dadas unas condiciones iniciales (instante inicial y valores de las variables de estado en este instante inicial) y conocidos los controles, quedan determinadas las variables de estado, que son funciones (en el caso determinista) o procesos estocásticos de difusión (en el

estocástico).

Conocidas unas condiciones iniciales, el objetivo es hallar las variables de control que optimizan un funcional. Éste depende de las condiciones iniciales y de las variables de control. Hallar los controles se reduce a hallar la relación funcional entre éstos y las variables de estado (si esto se consigue, con las ecuaciones de estado se tienen las evoluciones óptimas de todos: estados y controles).

En el caso determinista, el funcional objetivo viene dado en forma integral, mientras que en el estocástico viene expresado en forma de una esperanza condicionada por las condiciones iniciales de una forma integral.

Al igual que en el caso determinista, en el estocástico hay dos métodos de resolución de un problema de control: el principio del máximo y el principio de la programación dinámica. El principio del máximo utiliza las denominadas variables adjuntas, junto con unas condiciones necesarias y suficientes que pueden ser difíciles de comprobar. En este trabajo sólo usaremos el método de la programación dinámica. El uso habitual de este método de resolución hace que los problemas de control óptimo también se denominen de programación dinámica en tiempo continuo.

En la formulación de este método, se considera una familia de problemas de control óptimo, uno para cada condición inicial. Se define la función valor óptimo, que sólo depende de las condiciones iniciales (tiempo y estados), como el mínimo o máximo valor del funcional objetivo en las variables de control. Se utiliza el denominado Principio de la Programación Dinámica para obtener condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir la función valor. Este principio dice esencialmente que la misma función valor óptimo me sirve para toda la familia de problemas. El resultado principal dice que la función valor se caracteriza por ser la solución de la ecuación de la Programación Dinámica o de HJB, siempre que se cumplan ciertas condiciones de regularidad. De esta forma, un problema de optimización funcional se transforma en uno de optimización de variables. En el caso determinista esta ecuación es de orden uno (aparecen sólo derivadas de primer orden) y en el caso estocástico de orden dos (también de segundo). En la resolución aparecen ecuaciones diferenciales, en el primer caso, y ecuaciones en deriva-

das parciales, en el segundo, para la función valor óptimo, en las que ya no aparecen las variables de control.

En el desarrollo que haremos a continuación nos centraremos en mostrar el método de la programación dinámica en problemas de control estocástico con horizonte finito, que son los únicos que incluiremos en este trabajo. Comenzamos mostrando la formulación del problema de control y posteriormente el método de la programación dinámica. Seguimos las referencias de Arnold (1974), Fleming y Soner (1993), Hernández-Lerma (1994), Josa-Fombellida (2001) y Martínez-Palacios y Venegas-Martínez (2011).

3.1. Planteamiento del problema

A continuación mostramos los elementos que intervienen en un problema de control óptimo estocástico. Para modelizar la incertidumbre, consideramos un movimiento Browniano d dimensional W definido en un espacio probabilístico completo $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$, donde $\{\mathcal{F}_t\}_t$ es creciente, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\forall t \in [0, T]$. Suponemos que hay m variables o funciones de control $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \dots \times \mathcal{U}_m$, $u : [0, T] \rightarrow U \subseteq R^m$, y hay n variables de estado $X = (X_1, \dots, X_n) : [0, T] \rightarrow R^n$ que satisfacen las ecuaciones de estado:

$$dX(t) = f(t, X(t), u(t)) dt + \sigma(t, X(t), u(t)) dW(t), \quad (3.1)$$

para $t \geq 0$, con $X(0) = x_0$. La función f es el parámetro de deriva o drift del proceso de difusión X y σ es el parámetro de difusión.

Dada una función de utilidad (beneficio o lucro) instantánea L y una función de utilidad final S , el problema consiste en maximizar

$$E \left\{ \int_0^T L(t, X(t), u(t)) dt + S(X(T)) \right\},$$

dado que X satisface (3.1), es decir, encontrar la función u^* que maximiza esa expresión entre todas las funciones de control. Se supone que las funciones f , σ , L y S están bien definidas en los dominios correspondientes. En el caso de de funciones de coste L , S el problema es de minimizar. Para resolver

el problema con el método de la programación dinámica consideramos para cada condición inicial $(t, x) \in [0, T] \times R^n$ el funcional objetivo

$$J(t, x; u) = E_{tx} \left\{ \int_t^T L(s, X(s), u(s)) ds + S(X(T)) \right\},$$

donde $E_{tx}(\cdot)$ denota la esperanza condicionada $E(\cdot/X(t) = x)$. El problema consiste en encontrar un control u^* óptimo, es decir, tal que $J(t, x; u^*) = \max_u J(t, x; u)$, para todo (t, x) .

Es necesario añadir algunas hipótesis a las funciones que intervienen en el problema:

- El vector de controles u es *feedback*: $u(t) = \phi(t, X(t))$, donde $\phi : [0, T] \times R^n \rightarrow \mathcal{U}$ con $\phi = (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^m)$.
- u es *admissible*:
 - Para una condición inicial (t, x) , $u(s) \in \mathcal{U}$ y es \mathcal{F}_s -medible, para todo $t \leq s \leq T$.
 - $E_{tx}|X(t)|^k$ está acotado en $[t, T]$ y $E_{tx} \int_t^T |u(s)|^k ds < \infty$, para todo $k > 0$.
 - Para toda condición inicial $(t, x) \in [0, T] \times R^n$, el sistema de ecuaciones de estado (3.1) tiene una única solución.

Denotaremos por \mathcal{A}_t al conjunto de los controles admisibles, dada la condición inicial t o bien $t, X(t) = (t, x)$.

- L y S son continuas y satisfacen ciertas condiciones de crecimiento polinómico.

Siguiendo Arnold (1974) o Fleming y Soner (1993), se pueden proporcionar condiciones generales de acotación sobre f, σ, u para la admisibilidad de los controles. No las incluimos porque excede de los objetivos de este trabajo.

En los modelos económicos es habitual encontrarnos problemas con funcional objetivo

$$J(t, x; u) = E_{tx} \left\{ \int_t^T e^{-\rho(s-t)} L(s, X(s), u(s)) ds + e^{-\rho(T-t)} S(X(T)) \right\}, \quad (3.2)$$

donde $\rho > 0$ es la tasa o el tanto de descuento.

3.2. Método de la Programación Dinámica

Dado el problema

$$\max_{\phi \in \mathcal{A}_t} J(t, x; u) = \max_{\phi \in \mathcal{A}_t} E_{tx} \left\{ \int_t^T L(s, X(s), u(s)) ds + S(X(T)) \right\},$$

se define la función valor óptimo como: $\widehat{V}(t, x) = \max_{u \in \mathcal{A}_t} J(t, x; u)$.

Así, se dice que un control admisible $u^* \in \mathcal{A}_t$ es óptimo si $J(t, x; u^*) = \widehat{V}(t, x)$, para toda condición inicial (t, x)

El principio de la Programación Dinámica (debido a Bellman) afirma que una trayectoria óptima tiene la propiedad de que, cualesquiera que sean el estado y decisiones iniciales (controles), las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión:

$$\widehat{V}(t, x) = \max_{\phi} E_{tx} \left\{ \int_t^{t+h} L(s, X(s), u(s)) ds + \widehat{V}(t+h, X(t+h)) \right\}$$

A partir de este principio se obtiene la ecuación de la programación dinámica para la función valor. Si \widehat{V} es suficientemente regular o de clase $\mathcal{C}^{1,2}$, al tomar límites cuando $h \rightarrow 0$ en la expresión resultante al dividir por h y usando la fórmula de Dynkin para \widehat{V} , se llega a que \widehat{V} es solución de esta ecuación:

$$V_t(t, x) + \max_u \left\{ L(t, x, u) + V_x(t, x) f(t, x, u) + \frac{1}{2} Tr (V_{xx}(t, x) a(t, x, u)) \right\} = 0, \quad (3.3)$$

donde $a(t, x, u) = \sigma(t, x, u)\sigma(t, x, u)^\top$, para todo $(t, x) \in [0, T] \times R^n$, y donde Tr denota la traza de la matriz y $^\top$ denota trasposición. Debe añadirse la condición final

$$V(T, x) = S(x), \quad (3.4)$$

para todo $x \in R^n$.

La ecuación (3.3), (3.4) se conoce ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Esta ecuación realmente caracteriza a la función valor. Es decir, se tiene el siguiente resultado: si $W \in \mathcal{C}^{1,2}$ es una solución de (3.3), (3.4),

entonces W es la función valor, $W = \widehat{V}$ y si

$$u^*(t, x) = \operatorname{argmax}_u \left\{ L(t, x, u) + \widehat{V}_x(t, x) f(t, x, u) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left(\widehat{V}_{xx}(t, x) a(t, x, u) \right) \right\}$$

es admisible, entonces u^* es un control óptimo del problema de control estocástico, es decir, $J(t, x; u^*) = \widehat{V}(t, x)$.

Indicamos brevemente los pasos a seguir para resolver el problema de control estocástico.

1. Escribir en forma abreviada la ecuación de HJB con las funciones del problema:

$$V_t + \max_{u \in \mathcal{U}} \left\{ L + fV_x + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} (\sigma \sigma^\top V_{xx}) \right\} = 0,$$

con $V(T, x) = S(x)$.

2. Encontrar $u^* = \phi^*(t, x)$ que minimice la expresión entre llaves, $\{ \}$, en términos de las derivadas de V , que será la candidata a función valor.
3. Hallar la solución $V(t, x)$ (función valor) de la ecuación en EDP que resulta al sustituir $\phi^*(t, x)$.
4. Hallar u^* en función de (t, x) o $\phi^*(t, x)$.
5. Encontrar la EDE de X^* , sustituyendo las expresiones de u^* en (t, x)
6. Realizar una ilustración numérica de las estrategias óptimas de control y de estado, con datos verdaderos o estimados de los parámetros.

En el caso de problemas con descuento, es decir, con funcional objetivo del tipo (3.2), puede probarse que la ecuación de HJB es

$$-\rho V + V_t + \max_{u \in \mathcal{U}} \left\{ L + fV_x + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} (\sigma \sigma^\top V_{xx}) \right\} = 0, \quad (3.5)$$

con $V(T, x) = S(x)$.

En general la ecuación de HJB es una ecuación no lineal, lo cual motiva que su estudio analítico y numérico pueda ser complicado. A pesar de ello, hay un gran número de situaciones económicas en las que es posible dar soluciones de forma explícita, como las de los modelos que analizaremos a lo largo del trabajo.

Capítulo 4

El modelo de inversión y consumo de Merton

El primer modelo que analizamos en el trabajo es el célebre problema clásico de inversión y consumo de Merton, muy bien conocido en la matemática financiera y que ha generado ingente investigación en distintos campos. Fue formulado por Robert C. Merton en 1969 tanto para un horizonte temporal finito como infinito. Consiste en escoger la mejor inversión sobre un número n de activos bajo un contexto de incertidumbre, de tal manera que esta inversión permita maximizar la utilidad del consumo de un agente en un horizonte finito o infinito de tiempo. Para simplificar, en este capítulo vamos a considerar el caso donde sólo hay un activo con riesgo y el horizonte temporal es acotado.

El modelo de Merton aparece en numerosas referencias bibliográficas a partir de los trabajos de Merton (1969, 1971), también recogidos en el libro Merton (1990). A continuación, analizamos el modelo de Merton con una leve modificación del mismo incluyendo una tasa de herencia o legado, tal y como se plantea en Rao (2020).

4.1. Planteamiento general

Se considera un agente que posee una cierta cantidad de riqueza X dividida en acciones S que compra o vende en la Bolsa y en un activo sin riesgo B , como por ejemplo una letra del Tesoro o un depósito de dinero a plazo fijo que guarda en el banco. El agente utiliza una porción de esta riqueza (su consumo C) para vivir durante un intervalo de tiempo $[0, T]$, donde T es finito.

Evidentemente el agente está interesado en determinar la mejor combinación de acciones y dinero en el banco de tal manera que le permita maximizar una utilidad de su consumo C en el intervalo de tiempo $[0, T]$ considerado. Para ello deberá definir controles sobre su riqueza X . Los controles son las cantidades que modifican el valor de la riqueza: la proporción de riqueza invertida en acciones (activo con riesgo), π , y en un depósito a plazo fijo (activo sin riesgo), $1 - \pi$, es decir, su cartera o portafolio y el consumo mismo C . El agente estudiará la evolución en el tiempo de tales controles y de su riqueza óptimos.

4.2. El mercado financiero

Consideraremos para el modelo de mercado un único activo con riesgo S y un único activo sin riesgo B cuya evolución temporal viene determinada por

$$dB(t) = rB(t)dt, \quad (4.1)$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (4.2)$$

donde $r > 0$ es el tipo de interés sin riesgo (constante) y μ y $\sigma > 0$ son el tanto de retorno instantáneo y la volatilidad del activo de riesgo, con $\mu > r$, y W un movimiento Browniano definido en un espacio probabilístico completo. Se denota por $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ al precio de riesgo de mercado o ratio de Sharpe de la cartera.

Denotamos por $\pi(t)$ a la proporción de riqueza invertida en el activo con riesgo $S(t)$ en el momento t , es decir, $\pi(t)X(t)$ es la cantidad de riqueza

invertida en $S(t)$ en el momento t . Por tanto, $1 - \pi(t)$ es la proporción invertida en el activo sin riesgo $B(t)$ y $(1 - \pi(t))X(t) = X(t) - \pi(t)X(t)$ es la cantidad total invertida en $B(t)$, en el momento t . Ya hemos comentado antes que $C(t)$ denota al tanto de consumo en el instante t .

Teniendo en cuenta que la riqueza X no consumida al tanto C se invierte en la cartera $(1 - \pi, \pi)$, puede demostrarse que ésta evoluciona en el tiempo según la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \frac{dB(t)}{B(t)}(1 - \pi(t))X(t) + \frac{dS(t)}{S(t)}\pi(t)X(t) - C(t)dt. \quad (4.3)$$

Sustituyendo (4.1) y (4.2) en (4.3), la riqueza satisface

$$dX(t) = ((\pi(t)(\mu - r) + r)X(t) - C(t))dt + \pi(t)\sigma X(t)dW(t), \quad (4.4)$$

con $X(0) = x_0 > 0$ la riqueza inicial.

4.3. El problema de optimización

Dado el nivel de riqueza inicial x_0 del agente o inversor, el problema consiste en la maximización de la utilidad esperada del consumo en $[0, T]$,

$$\begin{aligned} & \text{máx } J(0, x_0; \pi, C) \\ & := \text{máx}_{\pi, C} E \left\{ \int_0^T e^{-\rho s} U(C(s)) ds + e^{-\rho T} L(X(T)) \mid \text{sujeto a (4.4)} \right\}, \end{aligned}$$

donde $\rho \geq 0$ es un factor de descuento, $U(C)$ es la utilidad de consumir C unidades por unidad de riqueza y $L(X)$ es una función de herencia o legado que determina el nivel de riqueza deseado al final del periodo de tiempo T .

Una vez considerados el problema para cada condición inicial $(t, X(t)) = (t, x)$, se define la función valor óptimo como

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \text{máx}_{\pi, C} J(t, x; \pi, C) \\ &:= \text{máx}_{\pi, C} E_{tx} \left\{ \int_t^T e^{-\rho(s-t)} U(C(s)) ds + e^{-\rho(T-t)} L(X(T)) \mid \text{sujeto a (4.4)} \right\}. \end{aligned}$$

Existen multitud de funciones de utilidad que pueden utilizarse. En este documento utilizaremos la utilidad isoelástica

$$U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (4.5)$$

donde γ es una medida de la aversión al riesgo. Se asume $0 < \gamma \neq 1$, así U es estrictamente creciente y estrictamente cóncava. Como función de legado utilizaremos $L(x) = \epsilon^\gamma U(x)$, con $\epsilon > 0$.

Para resolver el problema usamos el método de la programación dinámica. La ecuación de HJB (3.5) es

$$\max_{\pi, C} \left\{ -\rho V + V_t + V_x ((\pi(\mu - r) + r)x - C) + V_{xx} \frac{\pi^2 \sigma^2 x^2}{2} + U(C) \right\} = 0,$$

con la condición final $V(T, x) = L(x)$.

Derivando parcialmente respecto de π y C y sustituyendo (4.5), obtenemos las relaciones entre las estrategias óptimas de inversión y consumo y la función valor

$$\pi^* = -\frac{\mu - r}{\sigma^2 x} \frac{V_x}{V_{xx}} = -\frac{\theta}{\sigma x} \frac{V_x}{V_{xx}}, \quad (4.6)$$

$$C^* = V_x \frac{-1}{\gamma}. \quad (4.7)$$

Sustituyendo en la ecuación de HJB obtenemos la ecuación en derivadas parciales (EDP)

$$-\rho V + V_t - \frac{1}{2} \theta^2 \frac{V_x^2}{V_{xx}} + rxV_x + \frac{\gamma}{1-\gamma} V_x^{1-1/\gamma} = 0, \quad (4.8)$$

con la condición final $V(T, x) = \epsilon^\gamma U(x) = \epsilon^\gamma \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

Ensayando una solución

$$V(t, x) = g(t)^\gamma \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (4.9)$$

obtenemos

$$V_t = \gamma g(t)^{\gamma-1} g'(t) \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$V_x = g(t)^\gamma x^{-\gamma}$$

$$V_{xx} = g(t)^\gamma (-\gamma) x^{-1-\gamma}.$$

Sustituyendo en la EDP (4.8) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$f'(t) = vg(t) - 1$$

con condición final $g(T) = \epsilon$, donde

$$v = \frac{1}{\gamma} \left(\rho - (1 - \gamma) \left(\frac{\theta^2}{2\gamma} + r \right) \right).$$

La solución para esta ecuación es

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1+(v\epsilon-1)e^{-v(T-t)}}{v} & \text{si } v \neq 0 \\ T - t + \epsilon & \text{si } v = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.9) en (4.6) y (4.7), obtenemos las estrategias óptimas de inversión y consumo

$$\pi^*(t, x) = \frac{\mu - r}{\sigma^2 \gamma} = \frac{\theta}{\sigma \gamma} \quad (4.11)$$

$$C^*(t, x) = \frac{x}{g(t)}, \quad (4.12)$$

donde $g(t)$ está dado por (4.10). Observamos que la proporción de riqueza invertida en el activo con riesgo π^* es constante (no depende ni de la variable temporal ni de la riqueza). Obviamente, la proporción invertida en el activo sin riesgo $1 - \pi^*$ también es constante. No es necesario la venta a corto, $\pi^* > 0$, pero necesario pedir prestado para al tipo de interés r para invertir, $\pi^* > 1$ cuando $\mu - r > \sigma^2 \gamma$. El consumo óptimo C^* es lineal y proporcional a la riqueza óptima, con factor de proporcionalidad que depende de v .

Sustituyendo (4.11) y (4.12), en (4.4), obtenemos la ecuación diferencial estocástica (EDE) de evolución de la riqueza óptima X^* :

$$dX(t) = \left(r + \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2 \gamma} - \frac{1}{g(t)} \right) X(t)dt + \frac{\mu - r}{\sigma \gamma} X(t)dW(t),$$

o bien

$$dX(t) = \left(r + \frac{\theta^2}{\gamma} - \frac{1}{g(t)} \right) X(t)dt + \frac{\theta}{\gamma} X(t)dW(t), \quad (4.13)$$

con $X(0) = x_0$, donde $g(t)$ está dado por (4.10). Observamos que la EDE es lineal, pero con coeficiente drift dependiente del tiempo a través de g . Por

ello, es posible obtener la evolución de la riqueza óptima esperada según la EDO

$$\frac{dEX(t)}{dt} = \left(r + \frac{\theta^2}{\gamma} - \frac{1}{g(t)} \right) EX(t),$$

con $EX(0) = x_0$. En la siguiente sección no usaremos esta expresión y realizaremos el análisis mediante simulaciones con Julia. Usaremos este mismo procedimiento en el modelo de pensiones debido a que no se podrán obtener resultados esperados de forma explícita.

La evolución del consumo óptimo en el tiempo se obtiene usando (4.12), $C^*(s) = \frac{X^*(s)}{g(s)}$, para todo $s \in [0, T]$. La proporción de riqueza óptima invertida con riesgo no depende del tiempo por (4.11), pero sí la cantidad total invertida con riesgo $\pi^*(t)X^*(T) = \frac{\theta}{\sigma\gamma}X^*(t)$.

4.4. Ilustración numérica

En esta sección analizamos la evolución temporal de la riqueza, la inversión y el consumo óptimos, así como el efecto de algunos parámetros del modelo en ellos. Realizaremos simulaciones junto con un análisis de sensibilidad para los parámetros principales con el objetivo de identificar las características más influyentes. Estableceremos un modelo base, fijando los valores de los parámetros, y modificaremos los parámetros en un intervalo alrededor de este modelo base. Se representará gráficamente la información utilizando figuras en las cuales el modelo base estará marcado en color rojo.

El valor de los parámetros del modelo base son:

- El horizonte de tiempo planteado es $T = 20$ años.
- El retorno esperado de activo sin riesgo es $r = 0.02$.
- El retorno esperado del activo de riesgo es $\mu = 0.04$ y su volatilidad es $\sigma = 0.1$. De esta forma el ratio de Sharpe en el modelo base es $\theta = (\mu - r)/\sigma = 0.2$.
- La medida de aversión al riesgo es $\gamma = 2$.

- La medida de la herencia o legado es $\epsilon = 1$.
- El valor inicial de la riqueza es $x_0 = 100$ u.m.

Para realizar las simulaciones se ha utilizado el software libre Julia. Julia es un lenguaje de programación multiplataforma y multiparadigma de tipado dinámico de alto nivel y alto desempeño para la computación genérica, técnica y científica, con una sintaxis similar a la de otros entornos de computación. Dispone de mecanismos para la ejecución en paralelo y distribuida, además de una extensa biblioteca de funciones matemáticas, principalmente se ha utilizado la librería **DifferentialEquations.jl** para la simulación de las ecuaciones diferenciales estocásticas asociadas a los problemas de control óptimo. Se puede acceder al programa desde <https://docs.julialang.org/en/v1/manual/documentation/index.html>

En la Figura 4.1 se representa una trayectoria del activo con riesgo, cuya evolución viene dada por la EDE (4.2), para un valor inicial de $S(0) = 50$. Dado que su retorno μ es positivo se observa una tendencia creciente. La representación gráfica de cualquier otra trayectoria es diferente, pero con la misma tendencia. Puede comprobarse que el valor esperado del activo es la función exponencial $ES(t) = 50e^{0.04t}$, con $t \in [0, 20]$. Estamos considerando un periodo moderado de la Economía.

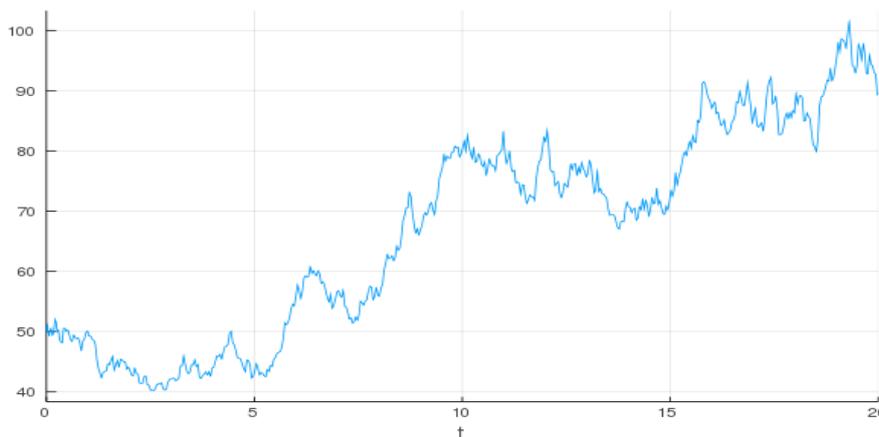


Figura 4.1: Evolución de una trayectoria del activo con riesgo

Para implementar en Julia la representación de la evolución de las estrategias de inversión, consumo y riqueza óptimas, utilizamos las EDEs (4.11), (4.12) y (4.13), respectivamente. Comenzamos analizando el efecto del tipo de interés sin riesgo r sobre las soluciones óptimas. En la Figura 4.2 se representa la evolución temporal esperada de la riqueza para varios valores de r . La Figura 4.3 representa el consumo esperado óptimo relativo a la riqueza y la proporción esperada óptima invertida en el activo con riesgo, para varios valores de r .

Al ser el objetivo maximizar la utilidad del consumo y ya que hemos seleccionado un ϵ bajo, cuyo significado es un nivel de herencia al final del intervalo de tiempo bajo, la evolución de la riqueza en el tiempo es decreciente. Si no se requiere guardar una cantidad de dinero al final o muy poca para maximizar la utilidad, el consumo se incrementará paulatinamente.

A medida que disminuimos el ratio de retorno r el ritmo de decrecimiento en la evolución de la riqueza disminuye. Una de las condiciones del modelo de inversión y consumo es una rentabilidad esperada mayor para el activo de riesgo que para el activo sin riesgo. De esta forma, al disminuir la rentabilidad del activo sin riesgo se hace más atractiva la inversión en el activo con riesgo, por lo que la fracción de riqueza invertida aumenta y la riqueza esperada a lo largo el tiempo es mayor. Si el atractivo de la inversión es lo suficientemente grande se podría contemplar el endeudamiento para aumentar la inversión, como se ve en los casos $r = 0.01, 0.015$. El efecto de r sobre el consumo es poco significativo.

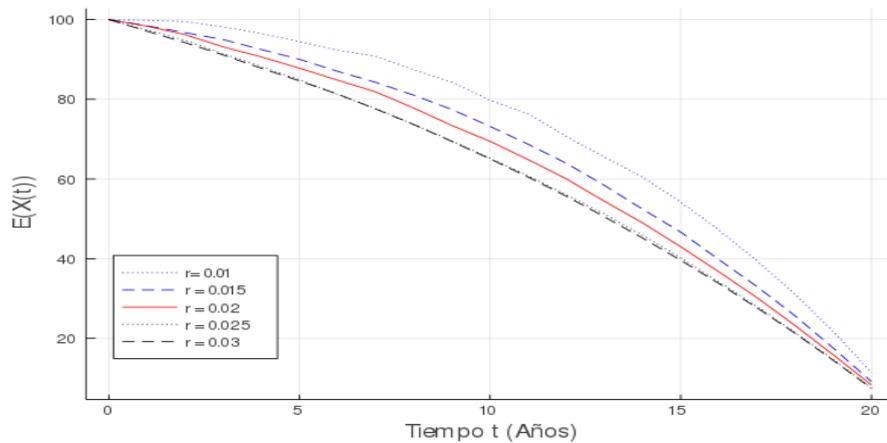


Figura 4.2: Evolución de la riqueza esperada para diferentes valores de r

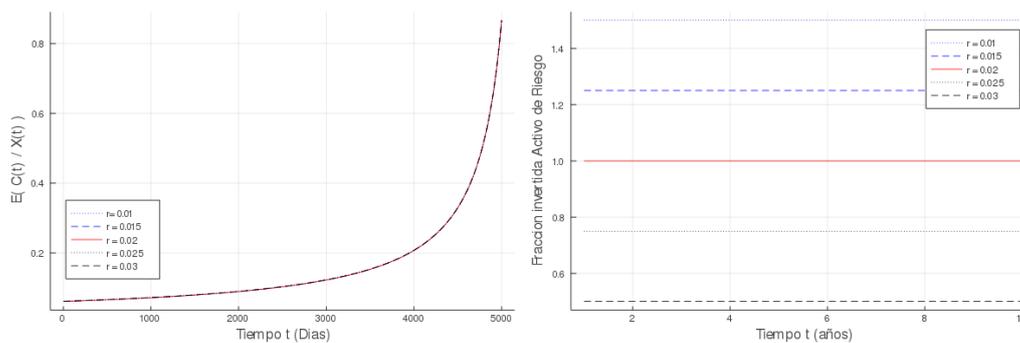


Figura 4.3: Evolución del consumo e inversión esperados para diferentes valores de r

En la Figura 4.4 se representa la evolución temporal esperada de la riqueza para varios valores del tanto de retorno μ del activo con riesgo S . La Figura 4.5 representa el consumo esperado óptimo relativo a la riqueza y la proporción esperada óptima invertida en el activo con riesgo, para varios valores de μ .

Aumentar la tasa de retorno del activo de riesgo tiene el mismo efecto que reducir la tasa de retorno del activo sin riesgo, aumentar el atractivo de la inversión en el activo de riesgo. Sin embargo en este caso el incremento de la riqueza esperada al aumentar la tasa de retorno es más pronunciado, llegando a crear tramos donde la evolución de la riqueza es creciente.

Fijándonos en la curva del consumo relativo a la riqueza, se consume levemente más con mayor retorno. En el modelo de Merton la inversión en el activo de riesgo es constante a lo largo del tiempo y el consumo es una función del tiempo, pero el ratio entre el consumo esperado y la riqueza esperada para cada instante de t se mantiene muy similar.

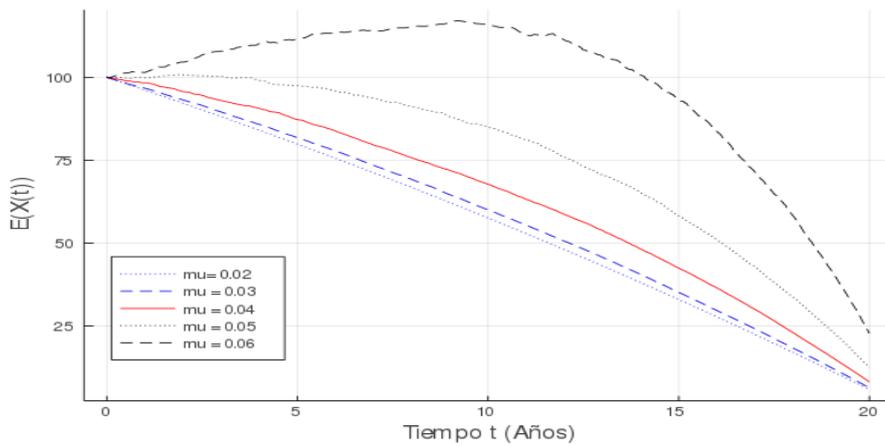


Figura 4.4: Evolución de la riqueza esperada para diferentes valores de μ

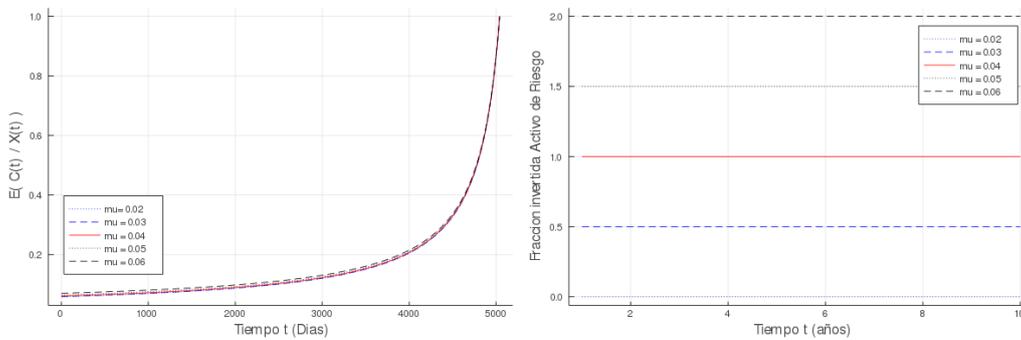


Figura 4.5: Evolución del consumo e inversión esperados para diferentes valores de μ

En la Figura 4.6 se representa la evolución temporal esperada de la riqueza para varios valores de la volatilidad σ del activo con riesgo S . La Figura 4.7 representa el consumo esperado óptimo relativo a la riqueza y la proporción esperada óptima invertida en el activo con riesgo, para varios valores de σ .

Si disminuimos la volatilidad del activo de riesgo su atractivo aumenta ya que siempre ofrece una rentabilidad mayor que el activo sin riesgo pero de esta forma el riesgo de invertir en él disminuye. El aumento de la riqueza esperada a lo largo del tiempo al disminuir la volatilidad es similar a aumentar la tasa de retorno del activo en el sentido de que ambos logran conseguir tramos crecientes. El consumo relativo a la riqueza esperado es ligeramente menor con mayor volatilidad.

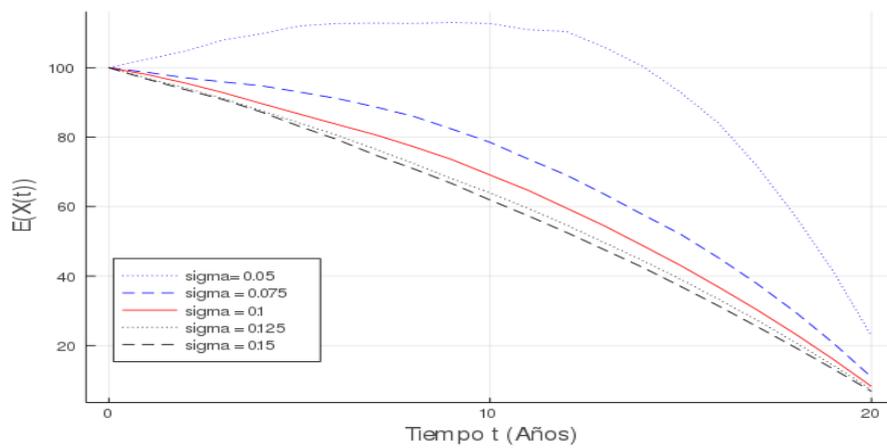


Figura 4.6: Evolución de la riqueza esperada para diferentes valores de σ

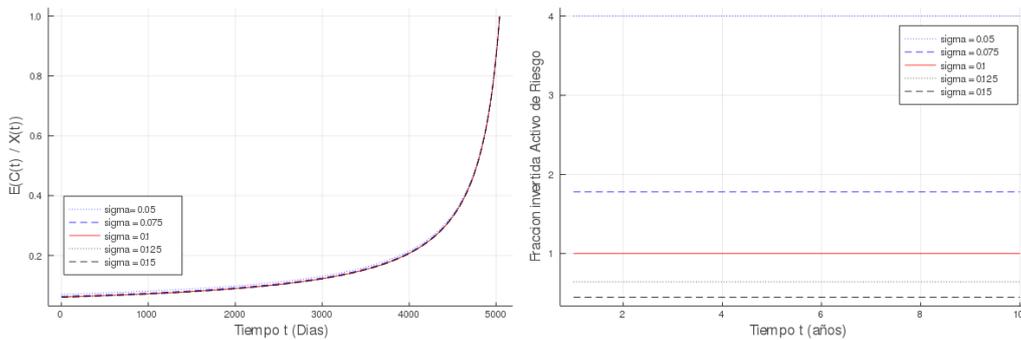


Figura 4.7: Evolución del consumo e inversión esperados para diferentes valores de σ

En la Figura 4.8 se representa la evolución temporal esperada de la riqueza para distintos valores del parámetro de aversión al riesgo γ . La Figura 4.9

representa el consumo esperado óptimo relativo a la riqueza y la proporción esperada óptima invertida en el activo con riesgo, para los distintos valores de γ .

Disminuyendo γ indicamos que la aversión al riesgo del inversor es menor por lo que la inversión realizada en el activo de riesgo aumentará y en este caso la riqueza esperada será mayor. También se consume un poco más con menor aversión al riesgo. Si bien el rendimiento esperado es mayor, también lo es el riesgo de la inversión, por lo que no siempre se obtendrá la mejor estrategia arriesgando más.

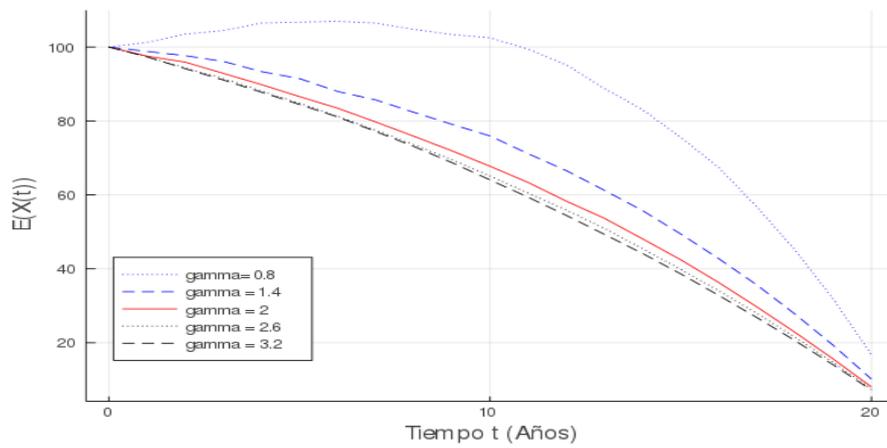


Figura 4.8: Evolución de la riqueza esperada para diferentes valores de γ

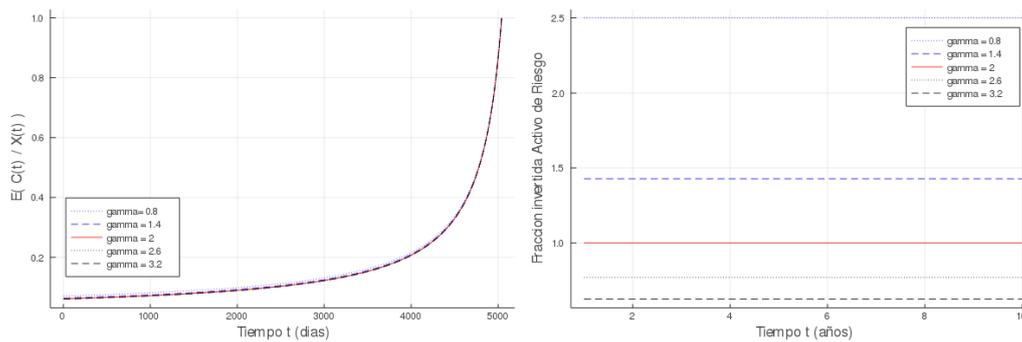


Figura 4.9: Evolución del consumo e inversión esperados para diferentes valores de γ

En la Figura 4.10 se representa la evolución temporal esperada de la

riqueza para distintos valores del parámetro de herencia ϵ . La Figura 4.11 representa el consumo esperado óptimo relativo a la riqueza para los distintos valores de ϵ . La proporción invertida óptima no depende de ϵ , por lo que no se representa.

El parámetro que regula la función de legado o herencia ϵ es la principal influencia en el nivel de consumo de la estrategia óptima y por consiguiente también en la riqueza esperada al final del periodo. En el funcional objetivo se tiene en cuenta la utilidad de la riqueza final multiplicada por ϵ por lo que cuanto mayor sea, más útil será guardar riqueza en el instante de tiempo final y menor tendrá que ser el consumo.

Se observa claramente como a medida que aumenta ϵ el consumo aumenta a menor ritmo y la trayectoria de la riqueza esperada se parece cada vez más a la trayectoria esperada en un movimiento Browniano geométrico. Mientras $\epsilon < \frac{1}{\nu}$ el consumo aumentará con el tiempo.

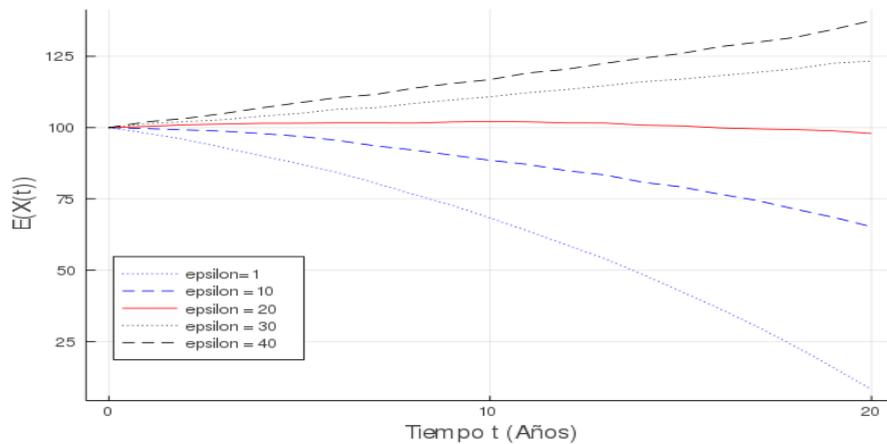


Figura 4.10: Evolución de la riqueza esperada para diferentes valores de ϵ

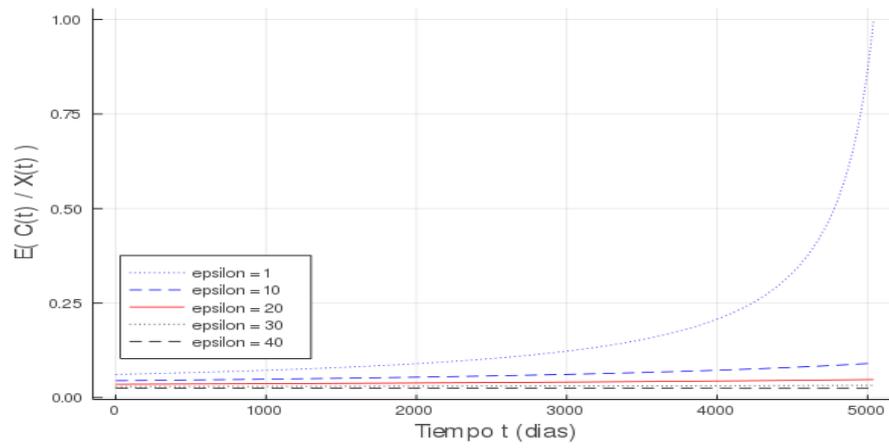


Figura 4.11: Evolución del consumo esperado para diferentes valores de ϵ

Capítulo 5

El modelo CEV de plan de pensiones

El segundo modelo que analizamos en el trabajo es un modelo dinámico de gestión óptima de un plan de pensiones de prestaciones definidas, donde los activos con riesgo en el mercado financiero son procesos estocásticos de tipo CEV. El modelo está extraído del artículo Josa-Fombellida y otros (2018). Se resuelve con técnicas de programación dinámica, siendo necesario utilizar dos variables de estado, el fondo y el activo con riesgo, con EDEs acopladas, lo que hace necesario realizar el análisis numérico mediante simulaciones. La novedad de este trabajo respecto del artículo es el uso de datos reales y la comparación de estrategias en periodos alcista y bajista.

El modelo plantea la minimización del riesgo de solvencia en la fecha final del plan de pensiones, sujeto a la evolución del fondo, que puede ser invertido en una cartera formada por un activo sin riesgo y varios activos con riesgo de tipo CEV. Para simplificar, suponemos que sólo hay un activo con riesgo.

5.1. El plan de pensiones

Consideramos un plan de pensiones de tipo agregado donde los partícipes activos coexisten con los partícipes retirados. Las prestaciones prometidas a los partícipes a la hora de la jubilación las establece de antemano el gestor

del plan y son deterministas. El horizonte de planificación o fecha final del plan T es finito. El gestor del plan invierte el fondo en el mercado financiero y también cuenta con las contribuciones de los partícipes para mantener el fondo en cierto nivel que le permita cumplir con el pago de prestaciones a los partícipes que se jubilen. Por ello, el riesgo en este tipo de planes lo asume principalmente el gestor del plan. De ahí la importancia de elegir una buena estrategia inversora.

En modelos dinámicos de inversión, lo habitual es suponer que la dinámica del precio del activo de riesgo está guiada por un movimiento Browniano geométrico. Esto implica que la volatilidad del activo con riesgo es una constante, de manera que no tiene en cuenta sus fluctuaciones temporales en el mercado. Por ello, en este trabajo se considera una extensión al modelo de elasticidad de la varianza constante (CEV), de manera que se tenga en cuenta esta variabilidad. El modelo de Merton guiado por un movimiento Browniano geométrico es un caso especial del modelo CEV. Esto se tendrá en cuenta en la ilustración numérica de los resultados del proceso de optimización.

Los principales elementos que intervienen en la evolución temporal del plan de pensiones son:

- $F(t)$: Valor del fondo de pensiones en el instante t .
- $P(t)$: Prestaciones comprometidas con los partícipes en el instante de tiempo t .
- $C(t)$: Tanto de contribución del gestor del plan en el instante de tiempo t .
- $AL(t)$: Responsabilidad actuarial en el instante de tiempo t . Es un valor ideal para el fondo.
- $NC(t)$: Coste normal en el instante de tiempo t . Es el valor ideal de la contribución.
- $X(t)$: Surplus (exceso o déficit) de fondo respecto a la responsabilidad actuarial en el instante de tiempo t . Es igual a $F(t) - AL(t)$.

- UAL : Responsabilidad actuarial no financiada en el instante de tiempo t . Es igual a $AL(t) - F(t) = -X(t)$.
- $SC(t)$: Coste suplementario en el instante de tiempo t . Es $C(t) - NC(t)$.
- $M(u)$: Función de distribución de los partícipes en la edad u , $u \in [a, d]$.
- δ : Tipo de interés técnico de valoración de los elementos actuariales del plan de pensiones.

Si la riqueza del fondo equivale a la responsabilidad actuarial AL y no existe incertidumbre en algunos elementos del plan, el coste normal NC es el valor de las contribuciones. Suponemos que todos los partícipes del fondo entran a la misma edad a y abandonan el fondo a la edad d .

La responsabilidad actuarial AL y el coste normal NC se definen como:

$$AL(t) = \int_a^d e^{-\delta(d-u)} P(t+d-u) M(u) du,$$

$$NC(t) = \int_a^d e^{-\delta(d-u)} P(t+d-u) M'(u) du,$$

donde $'$ indica derivada de primer orden. Se puede probar que ambas funciones están relacionadas por la EDO

$$AL'(t) = \delta AL(t) + NC(t) - P(t), \quad (5.1)$$

para $t \in [0, T]$.

En este trabajo suponemos que las prestaciones son de tipo exponencial, es decir,

$$P(t) = P_0 e^{\int_0^t \mu(s) ds},$$

donde P_0 son las prestaciones iniciales y μ es una función del tiempo conocida. Bajo esta hipótesis no es difícil comprobar que las funciones actuariales vienen dadas por:

$$AL(t) = h(t) P(t),$$

$$NC(t) = (1 + h'(t)) P(t) + (\mu(t) - \delta) AL(t),$$

donde $h(t) = \int_a^d e^{\int_t^{t+d-u} (\mu(v) - \delta) dv} M(u) du$. Así, a partir de P , podemos obtener AL y NC .

Para poder abordar el problema de optimización es necesario utilizar un método de amortización conocido en la literatura como *spread method* en el cual el coste suplementario es proporcional a la responsabilidad actuarial no financiada:

$$C(t) = NC(t) + k(AL(t) - F(t)), \quad (5.2)$$

donde $k > 0$ es una constante que representa el ratio por el cual el superávit o déficit es amortizado. Un valor positivo de k significa que, en el caso de falta de fondos ($F < AL$, underfunded case), la contribución debe superar el coste normal y, en el caso de exceso de fondos ($F > AL$, overfunded case), la contribución es menor. En términos de SC y UAL esta condición para la amortización es $SC = kUAL$.

En el caso underfunded, entre los objetivos del gestor del plan está la minimización de los riesgos cuadráticos denominados de solvencia y contribución, que están relacionados con propiedades de estabilidad y de seguridad del fondo. El riesgo de solvencia se define como la desviación cuadrática esperada del fondo respecto a su valor ideal, la responsabilidad actuarial, $EUAL^2 = EX^2$, y el riesgo de contribución como la desviación del tanto de contribución respecto al coste normal, ESC^2 .

5.2. El mercado financiero

Consideramos dos tipos de activos, uno con riesgo y otro sin riesgo. Denotamos al activo sin riesgo en un instante de tiempo t como $B(t)$ y evoluciona de acuerdo a la EDO:

$$dB(t) = rB(t)dt, \quad (5.3)$$

donde $r > 0$ es el tipo de interés sin riesgo (constante). Denotamos al activo con riesgo en un instante de tiempo t como $S(t)$ y evoluciona de acuerdo a la EDE:

$$dS(t) = \alpha S(t) + \sigma S(t)^{\beta+1} dw(t), \quad (5.4)$$

donde α es el tanto instantáneo de retorno esperado de la acción y satisface la condición $\alpha > r$. $\sigma S(t)^\beta$ es la volatilidad instantánea y β es el parámetro de elasticidad. W es un movimiento Browniano definido en un espacio de probabilidad completo.

Si el parámetro de elasticidad $\beta = 0$, el activo con riesgo queda reducido a un movimiento Browniano geométrico y los activos estarían formulados de la misma manera que en el modelo de inversión-consumo de Merton.

La cantidad del fondo invertida en el activo con riesgo en un instante de tiempo t se denota como $\lambda(t)$ y la cantidad invertida en el activo sin riesgo como $F(t) - \lambda(t)$. Un valor negativo de λ significa que el gestor del plan vende parte de sus participaciones en el activo de riesgo y si $\lambda(t)$ es mayor que $F(t)$ significa un endeudamiento, pidiendo prestado al tipo de interés r en el momento t .

Teniendo en consideración lo descrito anteriormente podemos formular la EDE de evolución de la riqueza del fondo, de forma análoga a la de la riqueza en el modelo de Merton:

$$dF(t) = \frac{dB(t)}{B(t)}(1 - \lambda(t)) + \frac{dS(t)}{S(t)}\lambda(t) + (C(t) - P(t))dt. \quad (5.5)$$

Sustituyendo (5.3) y (5.4) en (5.5), el fondo satisface

$$dF(t) = (rF(t) + \lambda(t)(\alpha - r) + C(t) - P(t))dt + \lambda(t)\sigma S(t)^\beta dW(t), \quad (5.6)$$

con condición inicial $F_0 > 0$.

Una vez obtenidas las ecuaciones diferenciales para la evolución de AL , (5.1), y F , (5.6), podemos obtener la EDE de evolución del surplus del fondo de pensiones X . Sustituyendo (5.2) in (5.6), la evolución de $X = F - AL$ viene dada por

$$dX(t) = ((r - k)X(t) + \lambda(t)(\alpha - r))dt + \lambda(t)\sigma S(t)^\beta dW(t), \quad (5.7)$$

donde S satisface (5.4) y con condición inicial (x_0, s_0) , donde $x_0 = F_0 - AL_0$ y $s_0 = S(0)$.

Para llegar a esta ecuación hemos utilizado como tipo de interés técnico el tipo de interés sin riesgo, es decir, $\delta = r$. Es habitual esta hipótesis, puesto que la única fuente de incertidumbre del modelo viene del mercado financiero y no del plan de pensiones.

5.3. El problema de optimización

El objetivo del gestor depende en gran medida de si el plan dispone de suficientes fondos (caso overfunded), $F > AL$, o no (caso underfunded), $F < AL$. La situación en la que comienza el fondo dictaminará la estrategia a seguir. Bajo una estrategia óptima de inversión el fondo que empieza en una situación sin fondos, en términos esperados, nunca llegará a un exceso de fondos y viceversa. En este trabajo analizaremos sólo el caso con falta de fondos o underfunded.

En este caso underfunded, el objetivo del gestor es seleccionar una estrategia de inversión que minimice el riesgo de solvencia en la fecha de terminación del plan de pensiones, es decir, $EUAL(T)^2 = EX(T)^2$. Por lo tanto, dada una condición inicial cualquiera $X(t) = x, S(t) = s$, el funcional objetivo puede expresarse como:

$$J(t, x, s; \lambda) = E_{txs}X(T)^2.$$

Así, estamos considerando un problema de control estocástico con dos variables de estado, X y S , y una variable de control λ . La función valor óptimo se define como:

$$\hat{V}(t, x, s) = \min_{\lambda} J(t, x, s; \lambda)$$

La estrategia óptima de inversión, que se puede obtener con el método de la programación dinámica (véase Josa-Fombellida y otros (2018)), es:

$$\lambda^*(t, x, s) = - \left(\frac{\theta}{\sigma} + 2\beta A(t) \right) s^{-2\beta}, \quad (5.8)$$

donde $\theta = \frac{\alpha - r}{\sigma}$ es el ratio de Sharpe y

$$A(t) = -\frac{\alpha - 2r}{2\beta\sigma^2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 2r^2}}{2\beta\sigma^2} \tan \left(\beta\sqrt{\alpha^2 - 2r^2}(T - t) + \arctan \left(\frac{\alpha - 2r}{\sqrt{\alpha^2 - 2r^2}} \right) \right),$$

si $\alpha > \sqrt{2r}$,

$$A(t) = \frac{(2 - \sqrt{2})^2 r^2 (T - t)}{2\sigma^2 (\beta (2 - \sqrt{2}) r (T - t) + 1)},$$

si $\alpha = \sqrt{2r}$,

$$A(t) = \frac{m^- m^+ \left(1 - e^{2\beta\sqrt{2r^2 - \alpha^2}(T-t)}\right)}{m^- - m^+ e^{2\beta\sqrt{2r^2 - \alpha^2}(T-t)}}$$

$$m_-^+ = \frac{-(\alpha - 2r)_-^+ \sqrt{2r^2 - \alpha^2}}{2\beta\sigma^2},$$

si $\alpha < \sqrt{2r}$. Observamos que λ^* no depende de x , depende de t a través de A y, cuando $\beta \neq 0$, depende del activo con riesgo.

Sustituyendo (5.8) en (5.7), obtenemos que la evolución óptima del surplus $X = F - AL$ viene dada por la EDE:

$$dX(t) = \left(r - k - \left(\frac{\theta}{\sigma} + 2\beta A(t) \right) S(t)^{-2\beta} (\alpha - r) \right) X(t) dt \quad (5.9)$$

$$- \sigma \left(\frac{\theta}{\sigma} + 2\beta A(t) \right) S(t)^{-\beta} X(t) dW(t),$$

donde S satisface (5.4) y con condición inicial (x_0, s_0) .

Con las ecuaciones ya formuladas contamos con las herramientas necesarias para analizar la influencia de determinados parámetros en el modelo y su comportamiento y desempeño.

5.4. Ilustración numérica

En esta sección realizaremos simulaciones para examinar el comportamiento de la estrategia de inversión óptima y el surplus entre F y AL , y obtener un análisis de sensibilidad de la solución óptima respecto a diferentes parámetros en dos escenarios, un periodo de Bolsa alcista, donde el precio de las acciones va creciendo significativamente, y un periodo bajista.

Para la estimación de la variabilidad y del tanto de retorno esperado del activo de riesgo vamos a utilizar cotizaciones reales de Bolsa del IBEX 35, obtenidas de Yahoo Finanzas “<https://es.finance.yahoo.com>”, donde pueden encontrarse con facilidad los datos históricos en formato csv.

Contamos con los precios al cierre diario del IBEX de un periodo alcista comprendido entre el 12-08-2013 y el 10-08-2015 y un periodo bajista que

comprende fechas 14-12-2015 y 22-04-2017. Aparecen representados gráficamente en la Figura 5.1.

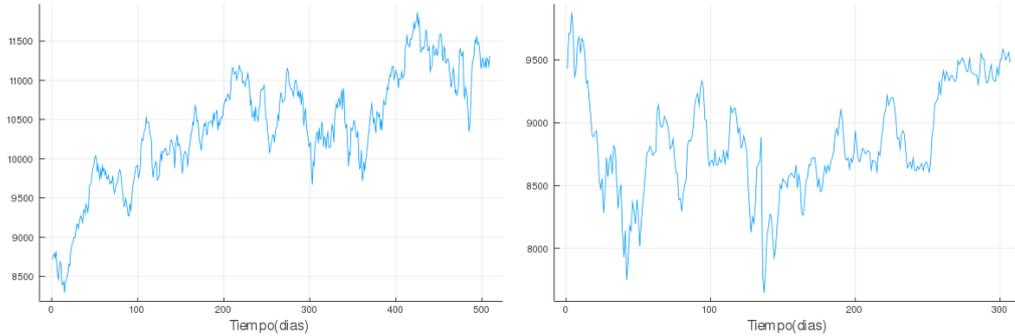


Figura 5.1: Precios al cierre para segmento alcista y bajista

Para la estimación de los parámetros del modelo base, donde $\beta = 0$ y S es un movimiento Browniano geométrico, seguimos Mosiño y otros (2019). Utilizamos rendimientos logarítmicos

$$Y(t) = \ln \left(\frac{S(t+1)}{S(t)} \right)$$

siendo $S(t)$ el valor al cierre del IBEX 35 en el instante de tiempo t . Los estimadores son: $\hat{\sigma} = var$ y $\hat{\alpha} = med + var/2$, siendo med y var la media y la varianza muestrales de los logaritmos de los retornos.

Con los datos indicados, obtenemos una variabilidad estimada de $\sigma_{alc} = 0.182$ y un tanto medio de retorno estimado de $\alpha_{alc} = 0.145$, para el periodo alcista, y de $\sigma_{baj} = 0.246$ y $\alpha_{baj} = 0.03$, para el periodo bajista.

Suponemos para el modelo base:

- Un precio inicial del activo con riesgo de $s_0 = 50$.
- El horizonte de tiempo planteado es $T = 10$ años.
- Las edades de entrada y salida al plan son $a = 25$ y $d = 65$, respectivamente.
- Las prestaciones son deterministas, con $\mu(t) = 0.015$ (constante) y la prestación inicial es $P_0 = 10$.

- La tasa de amortización es $k = 0.018$.
- La distribución M es uniforme, es decir, $M(u) = \frac{u-a}{d-a}$, para $u \in [a, d]$, $M(u) = 0$, para $u \leq a$ y $M(u) = 1$, para $u \geq d$. Como consecuencia, los valores iniciales para las funciones actuariales son $AL_0 = 214.028$ y $NC_0 = 11.070$.
- El tipo de interés sin riesgo es $r = 0.01$. Esto implica que los precios de riesgo de mercado o ratios de Sharpe son $\theta_{alc} = 0.74$ y $\theta_{baj} = 0.08$. Observamos que en ambos casos se cumple $\alpha > \sqrt{2r}$.

La elasticidad de la varianza β es uno de los parámetros que influirán en mayor medida en la estrategia de inversión, ya que afecta directamente al precio del activo de riesgo en el modelo CEV. Tanto para el periodo alcista como para el bajista estudiaremos el efecto de este parámetro sobre la evolución del fondo y de la estrategia de inversión óptimas. Utilizaremos valores de β en el intervalo $[-1, 1]$.

Ya que estamos analizando el caso underfunded, la riqueza inicial del fondo debe ser inferior a las obligaciones actuariales. Estableceremos la riqueza inicial del fondo $F_0 = 200$ por lo que $x_0 = -14.028$.

El objetivo en ambos periodos es mantener el nivel de riqueza del fondo lo más cercano posible a la responsabilidad actuarial (su valor ideal), o bien el surplus cercano a 0, para así poder cumplir con los compromisos de pago de prestaciones.

Para implementar en Julia la representación de la evolución del activo con riesgo, y las estrategias óptimas de inversión y surplus, utilizamos las EDEs (5.4), (5.8) y (5.9), respectivamente.

5.4.1. Análisis en periodo alcista

En la Figura 5.2 se representa una trayectoria del activo con riesgo para un valor inicial de $s_0 = 50$ para varios valores de β considerados. Dado que su retorno α es positivo se observa una tendencia creciente. La representación gráfica de cualquier otra trayectoria con otra simulación es diferente, pero con la misma tendencia.

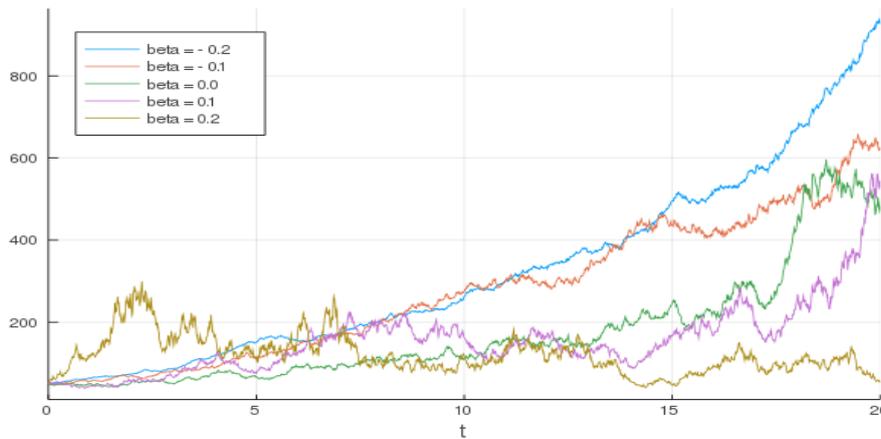


Figura 5.2: Evolución de una trayectoria del activo con riesgo en periodo alcista para distintos valores de β

En la Figura 5.3 podemos observar la evolución temporal del surplus X para una única trayectoria, por cada valor considerado del parámetro de elasticidad β , y en la Figura 5.4 podemos observar la evolución temporal esperada del surplus EX para los mismos valores de la elasticidad. La esperanza ha sido obtenida a partir de 1000 simulaciones y se muestran los cuantiles entre el 0.05 y 0.95. Se observa, tal como mencionamos anteriormente, que el surplus está acotado superiormente por el valor 0. Para valores más bajos de β el crecimiento hacia este valor límite es considerablemente más rápido.

Para comprender mejor esta situación vamos a ver la evolución temporal de la riqueza del fondo invertida en el activo de riesgo. Ver Figuras 5.5 y 5.6. Observamos que la inversión en el activo de riesgo es decreciente en el tiempo para todos los valores de β , sin embargo observamos que las inversiones iniciales varían significativamente.

Para β negativos la inversión supera los fondos actuales lo que significa un endeudamiento por parte del gestor, este endeudamiento es considerable y parece incrementar a medida que β disminuye y el decrecimiento a lo largo del tiempo también se acentúa.

Observamos que para $\beta = -0.2$ y $\beta = -0.1$ la tendencia es invertir una

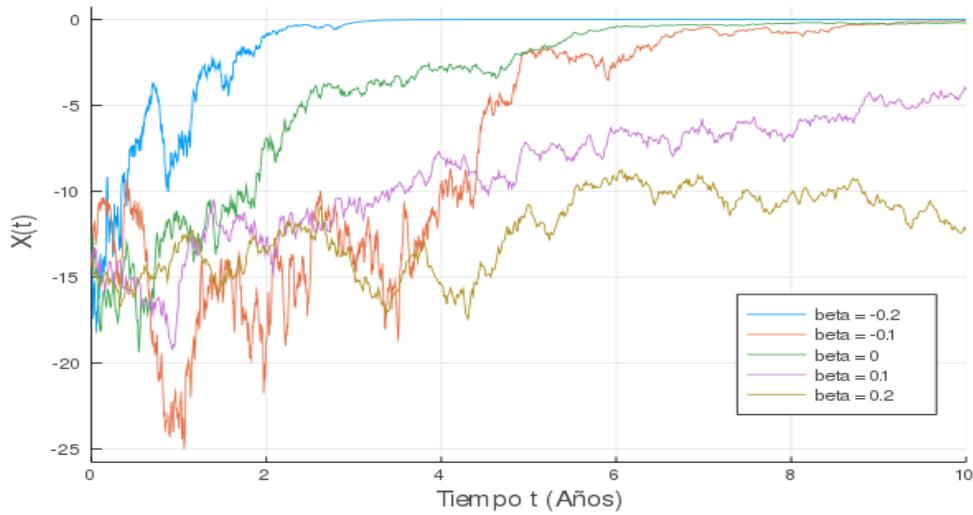


Figura 5.3: Evolución del surplus en el periodo alcista para varios valores de β

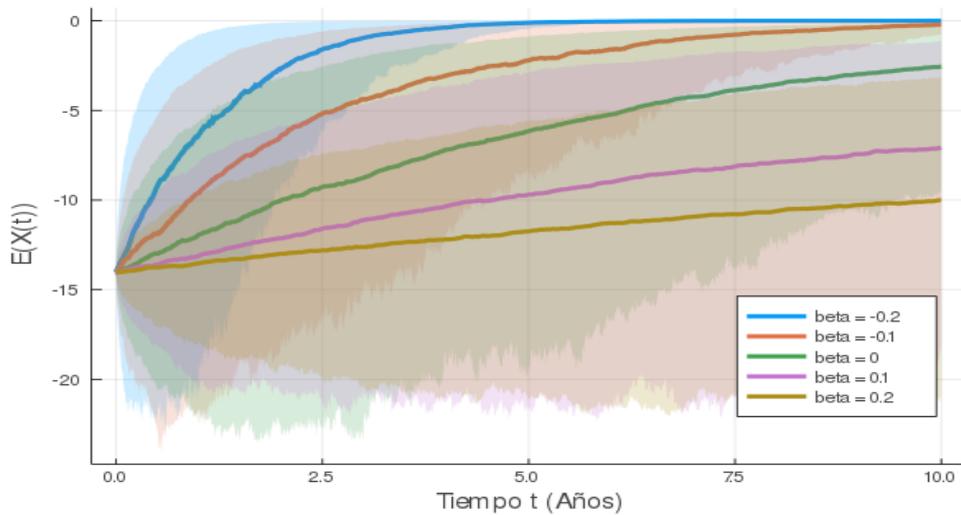


Figura 5.4: Evolución del surplus esperado en el periodo alcista para varios valores de β

mayor cantidad en el activo de riesgo en etapas iniciales para que luego esta disminuya hasta ser prácticamente inexistente. Sin embargo para β positivo, aunque también es decreciente la inversión, se mantiene en un porcentaje bajo y más constante en el tiempo. La inversión en el activo de riesgo para

$\beta \leq 0$ tiende a 0 más rápidamente que para $\beta \geq 0$ al final del periodo.

$\beta < 0$ indica que la volatilidad del activo aumenta a medida que su precio es menor. Esto hace atractiva la inversión en las etapas iniciales, que es cuando se necesita de una mayor rentabilidad, ya que los fondos de los que disponemos al principio no cumplen con las obligaciones actuariales. A medida que el fondo se acerca a la responsabilidad actuarial, no es necesario asumir tanto riesgo por lo que la inversión en el activo de riesgo decrece.

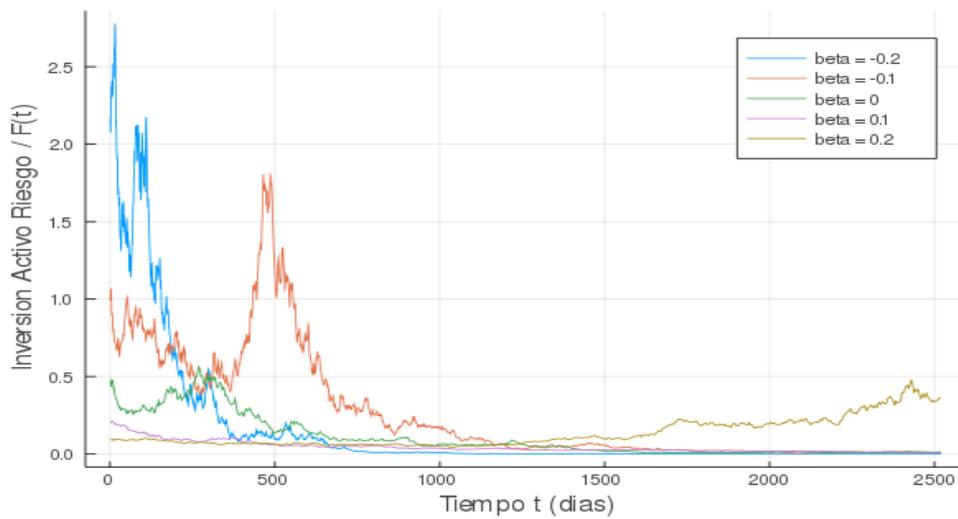


Figura 5.5: Evolución de la inversión en el periodo alcista para varios valores de β

En el Cuadro 5.1 se muestra el valor esperado del surplus en la fecha final del plan de pensiones, para diferentes intervalos de tiempo y para diferentes niveles de elasticidad para el escenario alcista. Se observa con claridad que a mayor intervalo de tiempo más se aproxima el surplus a 0 y cuanto más negativa es la elasticidad más rápidamente se acerca a 0.

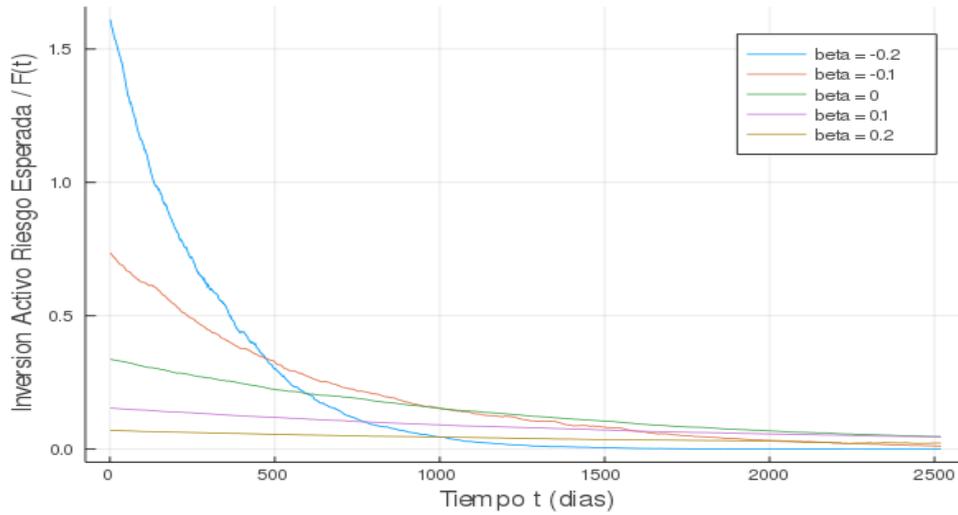


Figura 5.6: Evolución de la inversión esperada en el periodo alcista para varios valores de β

Cuadro 5.1: Valores de $E(X(T))$ en el escenario alcista

T	$\beta = -0.2$	$\beta = -0.1$	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$
10	-2.567×10^{-4}	-0.192	-2.312	-7.204	-10.18
15	-4.146×10^{-8}	-0.007	-1.035	-5.390	-8.682
20	-5.837×10^{-13}	-0.001	-0.526	-3.986	-7.667
25	-2.327×10^{-20}	-7.646×10^{-6}	-0.167	-3.001	-6.714
30	-2.542×10^{-29}	-3.152×10^{-7}	-0.071	-2.373	-5.772

5.4.2. Análisis en periodo bajista

En este periodo la inversión no es tan atractiva como en el periodo estudiado anteriormente, la dificultad que supone alcanzar el equilibrio presupuestario se incrementa en gran medida.

En la Figura 5.7 se representa una trayectoria del activo con riesgo para un valor inicial de $s_0 = 50$ para varios valores de β considerados. En este caso se observan tendencias crecientes, pero levemente, y decrecientes para

los mayores valores de β .

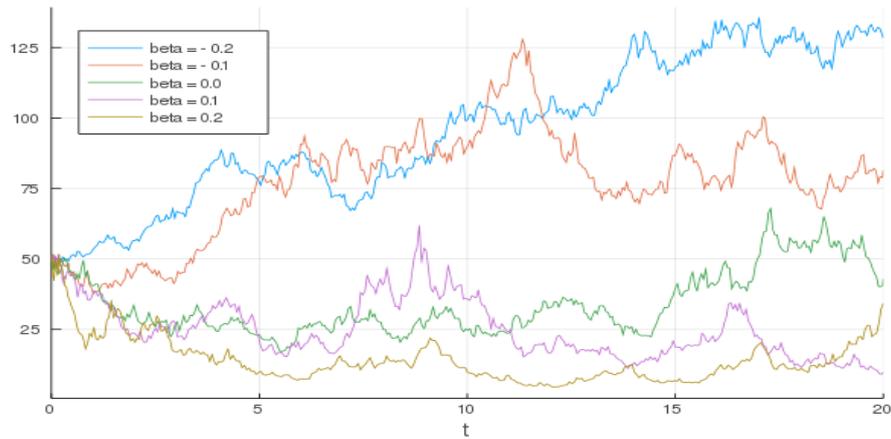


Figura 5.7: Evolución de una trayectoria del activo con riesgo en periodo bajista para distintos valores de β

En la Figura 5.8 podemos observar la evolución temporal del surplus óptimo X para una única trayectoria, por cada valor considerado del parámetro de elasticidad β , y en la Figura 5.9 podemos observar la evolución temporal esperada del surplus EX para los mismos valores de la elasticidad.

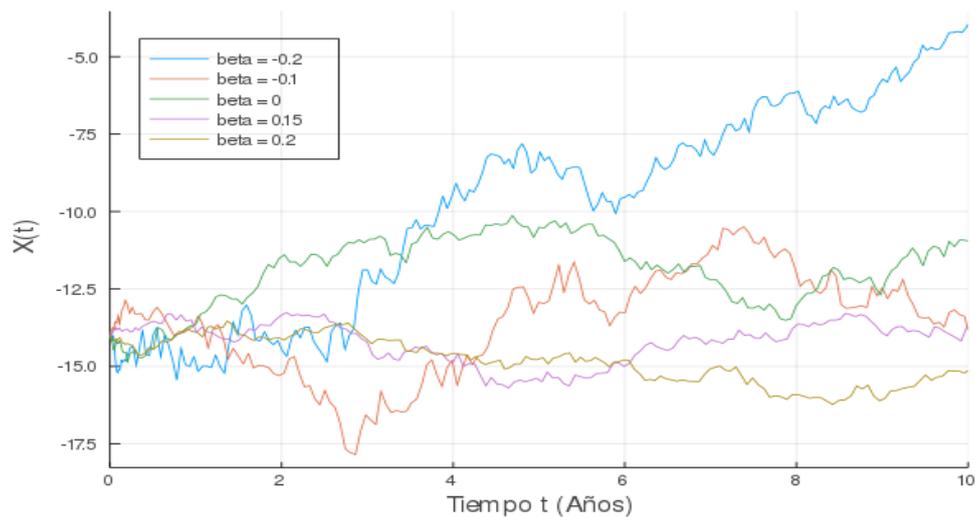


Figura 5.8: Evolución del surplus en el periodo bajista para varios valores de β

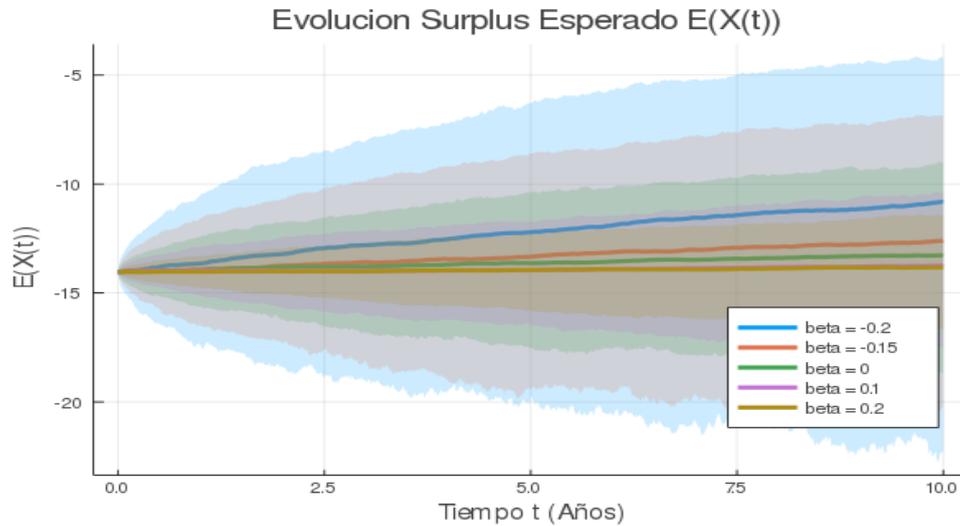


Figura 5.9: Evolución del surplus esperado en el periodo bajista para varios valores de β

Como cabía esperar, el crecimiento del surplus es bastante más reducido en el escenario bajista que en el alcista ya que el ratio de Sharpe o precio de riesgo de mercado es mucho menor ($\theta_{baj} = 0.08 < 0.74 = \theta_{alc}$).

Se sigue observando un mayor crecimiento para $\beta < 0$ aunque ninguno consigue acercarse al equilibrio presupuestario (surplus igual a 0) a medida que el tiempo está cerca de la fecha final del plan $T = 10$ años.

La Figura 5.10 representa la proporción y la proporción esperada invertidas en el activo con riesgo para los distintos valores de β . Se observa que en este escenario no hay endeudamiento y que se invierte más sin riesgo que con riesgo. Inicialmente es cuando se invierte más en el activo con riesgo y esta inversión va disminuyendo a medida que se acerca la fecha final del plan de pensiones, es decir, aumenta la inversión en el activo sin riesgo. La estrategia de inversión en el activo con riesgo es significativamente menor en este escenario bajista que en el escenario alcista. También se observa que sigue teniendo un tendencia levemente decreciente a lo largo del tiempo y para $\beta > 0$ es prácticamente nula.

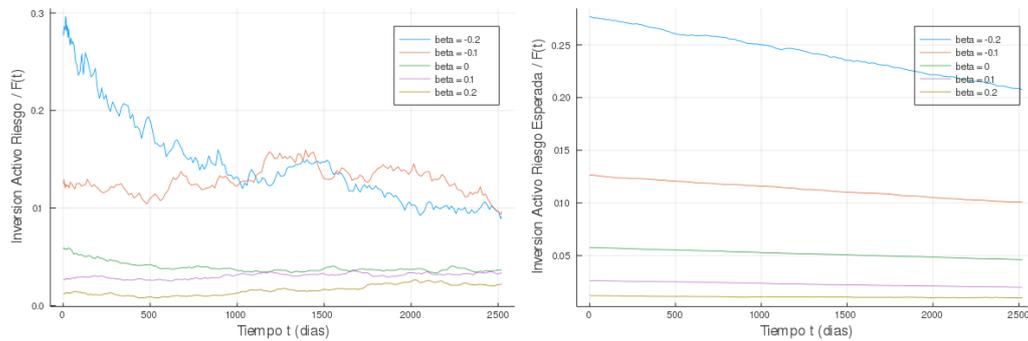


Figura 5.10: Evolución de la inversión y de la inversión esperada en el periodo bajista para varios valores de β

En el Cuadro 5.2 se muestra el surplus esperado en la fecha final del plan T , para diferentes valores de T y para diferentes niveles de elasticidad β , para el escenario bajista. En comparación con el escenario alcista el crecimiento es mucho más lento para todos los niveles de elasticidad y fechas finales del plan, además de quedar F lejos de AL .

Cuadro 5.2: Valores de $E(X(T))$ en el escenario bajista

T	$\beta = -0.2$	$\beta = -0.1$	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$
10	-10.883	-12.560	-13.406	-13.702	-13.774
15	-9.585	-11.803	-13.197	-13.559	-13.620
20	-8.382	-11.0487	-12.820	-13.366	-13.451
25	-7.059	-10.354	-12.417	-13.246	-13.257
30	-5.864	-9.672	-12.131	-13.071	-13.011

La variación de la elasticidad β impacta en gran medida cuando la situación del activo de riesgo es prometedora y se espera un retorno significativo de la inversión. En escenarios en los que invertir en el activo de riesgo ofrece poca rentabilidad la elasticidad tiene menor influencia.

Capítulo 6

Conclusiones

Se han analizado, mediante control óptimo estocástico y técnicas de programación dinámica, el modelo clásico de inversión-consumo de Merton y un modelo de gestión de un plan de pensiones de prestaciones definidas en presencia de activos de riesgo modelizados por procesos CEV. Se ha considerado la maximización de la utilidad del consumo para el modelo de inversión-consumo y la minimización del riesgo de solvencia en el plan de pensiones, ya que éste está planteado para tener una financiación insuficiente en el instante inicial.

Como novedad se ha utilizado el software Julia para representar las soluciones de las EDEs. Las ilustraciones numéricas incluyen análisis de sensibilidad de las soluciones respecto a distintos parámetros del modelo.

La riqueza óptima para el modelo de Merton depende en gran medida del nivel de herencia que el inversor desea al final del periodo, ya que a mayor herencia deseada menor es la tasa de consumo en la etapa final del periodo. El consumo relativo a la riqueza mantiene una trayectoria muy similar para diferentes grados de aversión al riesgo del inversor, además de diferentes volatilidades y retornos esperados de los activos. La peculiaridad del modelo estudiado es que la inversión en el activo de riesgo es constante en el tiempo por lo que no es de extrañar que el consumo, que depende de la riqueza generada mediante la inversión, evolucione de esta forma.

La estrategia óptima de inversión en el plan de pensiones es proporcional

a la diferencia entre la responsabilidad actuarial y los activos del fondo. El factor de proporcionalidad depende de los precios de los activos y de la elasticidad de la varianza, así como de la tasa de amortización elegida por el gestor del plan. Se ha incluido una ilustración numérica estimando los parámetros del activo con riesgo a partir del índice IBEX 35, para dos periodos de tiempo, un periodo alcista y otro bajista. Se ha mostrado gráficamente el efecto del parámetro de elasticidad sobre la inversión y el surplus óptimos. La diferencia entre los activos del fondo y la responsabilidad actuarial se reduce a medida que se acerca la fecha final del plan de pensiones. Esta reducción es más significativa a medida que el parámetro de elasticidad toma valores más bajos. Aunque no se muestra, se da el mismo comportamiento de la contribución respecto al coste normal. En cambio, la inversión en el activo con riesgo es más elevada en los primeros instantes de tiempo, incluso teniendo que pedir prestado, para ir descendiendo a medida que se acerca la fecha final del plan, pero sin ser necesaria la venta a corto. Estas propiedades de acercamiento del surplus e inversión a cero a medida que se acerca la fecha final del plan y de fuerte inversión al inicio del plan, se cumplen con menor intensidad en periodo bajista que en periodo alcista.

Como trabajo futuro sería interesante construir un nuevo modelo de optimización dinámica de carteras para implementarle con Julia o con otros programas como R, Python o Mathematica.

Capítulo 7

Bibliografía

1. Arnold, L., 1974. Stochastic Differential Equations. Theory and Applications. John Wiley and Sons, New York.
2. Cairns, A.J.G., 2000. Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time. *Astin Bulletin* 30, 19-55.
3. Devolder, P., Janssen, J., Manca, R., 2012. Stochastic Methods for Pension Funds. Wiley, London.
4. Duffie, D., Fleming, W., Soner, H.M., Zariphopoulou, T., 1997. Hedging in incomplete markets with HARA utility. *Journal of Economics Dynamics and Control* 21, 753-782.
5. Fleming, W.H., Soner, H.M., 1993. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer Verlag, New York.
6. Gao, J., 2009. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model. *Insurance Mathematics and Economic*. 44, 479–490.
7. González-Andrés, R., 2015. Optimización de carteras de inversión en activos de renta mixta. Trabajo Fin de Grado. Grado en Estadística, Universidad de Valladolid.

8. Haberman, S., Butt, Z., Megaloudi, C., 2000. Contribution and solvency risk in a defined benefit pension scheme. *Insurance: Mathematics and Economics* 27, 237-259.
9. Hernández-Lerma, O., 1994. Lectures on continuous-time Markov control processes. Instituto de Publicaciones de la UNAM. México.
10. Josa-Fombellida, R., 2001. Control optimo estocástico. Aplicaciones a la Economía y a la Matemática Financiera. Dpto. de Estadística e Investigación Operativa. Facultad de Ciencias.
11. Josa-Fombellida, R., López-Casado, P., Rincón-Zapatero, J.P., 2018. Portfolio optimization in a defined benefit pension plan where the risky assets are processes with constant elasticity of variance. *Insurance: Mathematics and Economics* 82, 73-86.
12. Koo, H.K., 1998. Consumption and portfolio selection with labor income: a continuous time approach. *Mathematical Finance* 8, 49-65.
13. López-Casado, 2015. Estrategias eficientes de inversión y gestión del riesgo en mercados bursátiles. Trabajo Fin de Grado. Grado en Estadística, Universidad de Valladolid.
14. Martínez-Palacios, M.T.V., Venegas-Martínez, F., 2011. Control óptimo estocástico en la enseñanza de la economía matemática. *Educación Matemática*, vol.23, n.3, pp. 147-181.
15. Merton, R.C., 1969. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The Review of Economics and Statistics* 51, 247-257.
16. Merton, R.C., 1971. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory* 3, 373-413.
17. Merton, R.C., 1990. *Continuous Time Finance*. Blackwell, MA.

18. Mosiño, A., Salomón-Núñez, L.A., Moreno-Okuno, A.T., 2019. Estudio empírico sobre el tipo de cambio MXNUSD: movimiento browniano geométrico versus proceso varianza-gamma. *EconoQuantum*, vol.16, n.1, pp. 33-56.
19. Rao, A., 2020. HJB Equation and Merton's Portfolio Problem. ICME, Stanford University. http://web.stanford.edu/class/cme241/lecture_slides/MertonPortfolio.pdf
20. Taylor, G., 2002. Stochastic control of funding systems. *Insurance: Mathematics and Economics* 30, 323-350.
21. Zhao, H., Rong, X., 2017. On the constant elasticity of variance model for the utility maximization problem with multiple risky assets. *IMA Journal of Management Mathematics* 28, 299–320.
22. <https://docs.julialang.org/en/v1/manual/documentation/index.html>
23. <https://es.finance.yahoo.com/quote/>

Capítulo 8

Apéndice

8.1. Código para el modelo de Merton

```
using DifferentialEquations
u0=100.0
T=20
μ=0.04
σ=0.1
r=0.02
γ=2
ρ=0.02
ε=1
dt = 1/252
pi = (μ-r)/((σ^2)*γ)
v11=(((μ-r)^2)/(2*(σ^2)*γ))+r)
v1= ρ-(1-γ)*(v11)
v= v1/γ
p =(r, pi, μ, σ, γ, ε, T, v, ρ)
function gl(u,p,t)
r, pi, μ, σ, γ, ε, T, v, ρ = p
u*pi*σ
end
function PI(p)
r, pi, μ, σ, γ, ε, T, v, ρ = p
(μ r)/((σ^2)*γ)
end

function consum(u,p,t)
r, pi, μ, σ, γ, ε, T, v, ρ = p
v=V(u,p,t)
if (v==0)
```

```

u/(T t+ε)
else
(v*u)/(1+(v*ε 1)*exp( v*(T t)))
end
end
function consumSinU(u,p,t)
r,pi,μ,σ,γ,ε,T,v,ρ = p
v=V(u,p,t)
if (v==0)
1/(T t+ε)
else
(v)/(1+(v*ε 1)*exp( v*(T t)))
end
end
function f1(u,p,t)
r,pi,μ,σ,γ,ε,T,v,ρ = p
(r+pi*(μ r))*u consum(u,p,t)
end
function V(u,p,t)
r,pi,μ,σ,γ,ε,T,v,ρ = p
v11=(((μ r)^2)/(2*(σ^2)*γ))+r)
v1= ρ (1 γ)*(v11)
v1/γ
end
function consuMedio(u,p,t)
r,pi,μ,σ,γ,ε,T,v,ρ = p
consumedio=[]
for i in 1:t
consumo=consumSinU(u[i],p,i/252)
push!(consumedio,consumo)
end
consumedio
end

```

```

function analisis(pmod,p,u0,low,upper,sep)
r,pi,mu,sigma,gamma,epsilon,T,v,rho = p
if(pmod==1) # modificador de r
r1=[low:sep:upper;]
solfin=[]
for i in r1
p1 = i,pi,mu,sigma,gamma,epsilon,T,v,rho
p1l = PI(p1)
p11 = i,p1l,mu,sigma,gamma,epsilon,T,v1,rho
prob = SDEProblem(f1,g1,u0,(0.0,T),p11)
ensembleprob = EnsembleProblem(prob)
sol = solve(ensembleprob,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat=1)
push!(solfin,sol)
end
solfin
elseif(pmod==2) # modificador de mu
mu1=[low:sep:upper;]
solfin=[]
for i in mu1
p1 = r,pi,i,sigma,gamma,epsilon,T,v,rho
p1l = PI(p1)
p11 = r,p1l,i,sigma,gamma,epsilon,T,v1,rho
prob = SDEProblem(f1,g1,u0,(0.0,T),p11)
ensembleprob = EnsembleProblem(prob)
sol = solve(ensembleprob,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat=1/252)
push!(solfin,sol)
end
solfin
elseif(pmod==3) # modificador de sigma
sigma1=[low:sep:upper;]
solfin=[]
for i in sigma1
p1 = r,pi,mu,i,gamma,epsilon,T,v,rho
p1l = PI(p1)
p11 = r,p1l,mu,i,gamma,epsilon,T,v,rho
prob = SDEProblem(f1,g1,u0,(0.0,T),p11)
ensembleprob = EnsembleProblem(prob)
sol = solve(ensembleprob,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat=1)
push!(solfin,sol)
end
solfin

```

```

elseif(pmod==4) # modificador de  $\gamma$ 
 $\gamma$ 1=[low:sep:upper;]
solfin=[]
for i in  $\gamma$ 1
p1 = r , pi ,  $\mu$  ,  $\sigma$  , i ,  $\epsilon$  , T , v ,  $\rho$ 
pi1 = PI(p1)
p11 = r , pi1 ,  $\mu$  ,  $\sigma$  , i ,  $\epsilon$  , T , v ,  $\rho$ 
prob = SDEProblem(f1 , g1 , u0 , (0.0 , T) , p11)
ensembleprob = EnsembleProblem(prob)
sol = solve(ensembleprob , EnsembleThreads() , trajectories=1000 , dt=dt , saveat=1)
push!(solfin , sol)
end
solfin

elseif(pmod==5) # modificador de  $\epsilon$ 
 $\epsilon$ 1=[low:sep:upper;]
solfin=[]
for i in  $\epsilon$ 1
p1 = r , pi ,  $\mu$  ,  $\sigma$  ,  $\gamma$  , i , T , v ,  $\rho$ 
pi1 = PI(p1)
p11 = r , pi1 ,  $\mu$  ,  $\sigma$  ,  $\gamma$  , i , T , v ,  $\rho$ 
prob = SDEProblem(f1 , g1 , u0 , (0.0 , T) , p11)
ensembleprob = EnsembleProblem(prob)
sol = solve(ensembleprob , EnsembleThreads() , trajectories=1000 , dt=dt , saveat=1)
push!(solfin , sol)
end
solfin
end
using DifferentialEquations . EnsembleAnalysis
using Plots

solution = analisis(1 , p , u0 , 0.01 , 0.03 , 0.005)

sR = EnsembleSummary(solution[1] , 0:1/252:20)
plot(sR.u , label="r = 0.01" , legend=:bottomleft , linecolor = "blue1" , linestyle = :dot)
sR1 = EnsembleSummary(solution[2] , 0:1/252:20)
plot!(sR1.u , label="r = 0.015" , legend=:bottomleft , linecolor = "blue2" , linestyle = :dash)
sR2 = EnsembleSummary(solution[3] , 0:1/252:20)
plot!(sR2.u , label="r = 0.02" , legend=:bottomleft , linecolor = "red" )
sR3= EnsembleSummary(solution[4] , 0:1/252:20)

```

```

plot!(sR3.u, label="r = 0.025", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dot)
sR4 = EnsembleSummary(solution[5], 0:1/252:20)
plot!(sR4.u, label="r = 0.03", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dash, xlabel="Tiempo t (Agnos)", ylabel="E(X(t))")
p1 = (0.01, (μ 0.01) / ((σ^2)*γ), μ, σ, γ, ε, T, v, ρ)
cons1 = consuMedio(sR.u, p1, 5000)
plot!(cons1, label="r = 0.01", legend=:bottomleft, linecolor = "blue1", linestyle = :dot)
p2 = (0.015, (μ 0.015) / ((σ^2)*γ), μ, σ, γ, ε, T, v, ρ)
cons2 = consuMedio(sR1.u, p2, 5000)
plot!(cons2, label="r = 0.015", legend=:bottomleft, linecolor = "blue2", linestyle = :dash)
p3 = (0.02, (μ 0.02) / ((σ^2)*γ), μ, σ, γ, ε, T, v, ρ)
cons3 = consuMedio(sR2.u, p3, 5000)
plot!(cons3, label="r = 0.02", legend=:bottomleft, linecolor = "red")
p4 = (0.025, (μ 0.025) / ((σ^2)*γ), μ, σ, γ, ε, T, v, ρ)
cons4 = consuMedio(sR3.u, p4, 5000)
plot!(cons4, label="r = 0.025", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dot)
p5 = (0.03, (μ 0.03) / ((σ^2)*γ), μ, σ, γ, ε, T, v, ρ)
cons5 = consuMedio(sR4.u, p5, 5000)
plot!(cons5, label="r = 0.03", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dash, xlabel="Tiempo t (Dias)", ylabel="E( C(t) / X(t) )")
solution2 = analisis(2, p, u0, 0.02, 0.06, 0.01)
sMu = EnsembleSummary(solution2[1], 0:1/252:20)
plot!(sMu.u, label="mu = 0.02", legend=:bottomleft, linecolor = "blue1", linestyle = :dot)
sMu1 = EnsembleSummary(solution2[2], 0:1/252:20)
plot!(sMu1.u, label="mu = 0.03", legend=:bottomleft, linecolor = "blue2", linestyle = :dash)
sMu2 = EnsembleSummary(solution2[3], 0:1/252:20)
plot!(sMu2.u, label="mu = 0.04", legend=:bottomleft, linecolor = "red")
sMu3 = EnsembleSummary(solution2[4], 0:1/252:20)
plot!(sMu3.u, label="mu = 0.05", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dot)
sMu4 = EnsembleSummary(solution2[5], 0:1/252:20)
plot!(sMu4.u, label="mu = 0.06", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dash, xlabel="Tiempo t (Agnos)", ylabel="E(X(t))")
p1 = (r, (0.02 r) / ((σ^2)*γ), 0.02, σ, γ, ε, T, v, ρ)
cons1 = consuMedio(sMu.u, p1, 5040)
plot!(cons1, label="mu = 0.02", legend=:bottomleft, linecolor = "blue1", linestyle = :dot)
p2 = (r, (0.03 r) / ((σ^2)*γ), 0.03, σ, γ, ε, T, v, ρ)
cons2 = consuMedio(sMu1.u, p2, 5040)
plot!(cons2, label="mu = 0.03", legend=:bottomleft, linecolor = "blue2", linestyle = :dash)
p3 = (r, (0.04 r) / ((σ^2)*γ), 0.04, σ, γ, ε, T, v, ρ)
cons3 = consuMedio(sMu2.u, p3, 5040)
plot!(cons3, label="mu = 0.04", legend=:bottomleft, linecolor = "red")

```

```

p4 =(r,(0.05 r)/((σ^2)*γ),0.05,σ,γ,ε,T,v,ρ)
cons4 = consuMedio(sMu3.u,p4,5040)
plot!(cons4,label="mu = 0.05",legend=:bottomleft,linecolor = "black" ,linestyle = :dot)

solution3 = analisis(3,p,u0,0.05,0.15,0.025)

sSigM = EnsembleSummary(solution3[1],0:1/252:20)
plot(sSigM.u,xaxis=(0:10:90),label="sigma = 0.05",legend=:bottomleft,linecolor = "blue1" ,linestyle = :dot)

sSigM1 = EnsembleSummary(solution3[2],0:1/252:20)
plot!(sSigM1.u,label="sigma = 0.075",legend=:bottomleft,linecolor = "blue1" ,linestyle = :dash)

sSigM2 = EnsembleSummary(solution3[3],0:1/252:20)
plot!(sSigM2.u,label="sigma = 0.1",legend=:bottomleft,linecolor = "red")

sSigM3= EnsembleSummary(solution3[4],0:1/252:20)
plot!(sSigM3.u,label="sigma = 0.125",legend=:bottomleft,linecolor = "black" ,linestyle = :dot)

sSigM4 = EnsembleSummary(solution3[5],0:1/252:20)
plot!(sSigM4.u,label="sigma = 0.15",legend=:bottomleft,linecolor = "black" ,linestyle = :dash , xlabel=" Tiempo t (Agnos)",ylabel=" E(X(t))")
p1 =(r,(μ r)/((0.05^2)*γ),μ,0.05,γ,ε,T,v,ρ)
cons1 = consuMedio(sSigM.u,p1,5040)
plot(cons1,label="sigma = 0.05",legend=:bottomleft,linecolor = "blue1" ,linestyle = :dot)

p2 =(r,(μ r)/((0.075^2)*γ),μ,0.075,γ,ε,T,v,ρ)
cons2 = consuMedio(sSigM1.u,p2,5040)
plot!(cons2,label="sigma = 0.075",legend=:bottomleft,linecolor = "blue1" ,linestyle = :dash)

p3 =(r,(μ r)/((0.1^2)*γ),μ,0.1,γ,ε,T,v,ρ)
cons3 = consuMedio(sSigM2.u,p3,5040)
plot!(cons3,label="sigma = 0.1",legend=:bottomleft,linecolor = "red")

p4 =(r,(μ r)/((0.125^2)*γ),μ,0.125,γ,ε,T,v,ρ)
cons4 = consuMedio(sSigM3.u,p4,5040)
plot!(cons4,label="sigma = 0.125",legend=:bottomleft,linecolor = "black" ,linestyle = :dot)

solution4= analisis(4,p,u0,0.8,3.2,0.6)

sGamm = EnsembleSummary(solution4[1],0:1/252:20)
plot(sGamm.u,xaxis=(0:10:90),label="gamma = 0.8 ",legend=:bottomleft,linecolor = "blue1" ,linestyle = :dot)

```

```

sGamm1 = EnsembleSummary(solution4[2],0:1/252:20)
plot!(sGamm1.u, label="gamma = 1.4", legend=:bottomleft, linecolor = "blue1", linestyle = :dash)

sGamm2 = EnsembleSummary(solution4[3],0:1/252:20)
plot!(sGamm2.u, label="gamma = 2", legend=:bottomleft, linecolor = "red")

sGamm3= EnsembleSummary(solution4[4],0:1/252:20)
plot!(sGamm3.u, label="gamma = 2.6", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dot)
sGamm4 = EnsembleSummary(solution4[5],0:1/252:20)
plot!(sGamm4.u, label="gamma = 3.2", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dash, xlabel="Tiempo t (Agnos)", ylabel="E(X(t))")
solution5= analisis(5,p,u0,1,41,10)
sEps = EnsembleSummary(solution5[1],0:1/252:20)
plot(sEps.u, xaxis=(0:10:90), label="epsilon = 1", legend=:bottomleft, linecolor = "red", linestyle = :dot)
sEps1 = EnsembleSummary(solution5[2],0:1/252:20)
plot!(sEps1.u, label="epsilon = 10", legend=:bottomleft, linecolor = "blue1", linestyle = :dot)
sEps2 = EnsembleSummary(solution5[3],0:1/252:20)
plot!(sEps2.u, label="epsilon = 20", legend=:bottomleft, linecolor = "blue1", linestyle = :dash)
sEps3= EnsembleSummary(solution5[4],0:1/252:20)
plot!(sEps3.u, label="epsilon = 30", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dot)
sEps4 = EnsembleSummary(solution5[5],0:1/252:20)
plot!(sEps4.u, label="epsilon = 40", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dash, xlabel="Tiempo t (Agnos)", ylabel="E(X(t))")
p1 =(r, (mu r)/((sigma^2)*gamma), mu, sigma, gamma, 1, T, v, rho)
cons1 = consuMedio(sEps.u, p1, 5040)
plot(cons1, label="epsilon = 1", legend=:bottomleft, linecolor = "red")
p2 =(r, (mu r)/((sigma^2)*gamma), mu, sigma, gamma, 11, T, v, rho)
cons2 = consuMedio(sEps1.u, p2, 5040)
plot!(cons2, label="epsilon = 10", legend=:bottomleft, linecolor = "blue1", linestyle = :dot)
p3 =(r, (mu r)/((sigma^2)*gamma), mu, sigma, gamma, 21, T, v, rho)
cons3 = consuMedio(sEps2.u, p3, 5040)
plot!(cons3, label="epsilon = 20", legend=:bottomleft, linecolor = "blue1", linestyle = :dash)
p4 =(r, (mu r)/((sigma^2)*gamma), mu, sigma, gamma, 31, T, v, rho)
cons4 = consuMedio(sEps3.u, p4, 5040)
plot!(cons4, label="epsilon = 30", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dot)
p5 =(r, (mu r)/((sigma^2)*gamma), mu, sigma, gamma, 41, T, v, rho)
cons5 = consuMedio(sEps4.u, p5, 5040)
plot!(cons5, label="epsilon = 40", legend=:bottomleft, linecolor = "black", linestyle = :dash, xlabel="Tiempo t (dias)", ylabel="E( C(t) / X(t) )")

```

8.2. Datos del modelo CEV

8.2.1. Escenario alcista

Date	Open	High	Low	Close	Adj Close	Volume
2013-08-12	8733.500000	8770.200195	8692.799805	8717.700195	8717.691406	156533300
2013-08-13	8737.599609	8778.799805	8695.500000	8758.500000	8758.491211	136741700
2013-08-14	8763.400391	8789.299805	8706.799805	8789.299805	8789.291016	143327600
2013-08-15	8777.099609	8796.700195	8633.900391	8737.599609	8737.590820	138968900
2013-08-16	8739.299805	8828.099609	8710.400391	8821.299805	8821.291016	206850900
2013-08-19	8807.799805	8818.799805	8641.099609	8657.099609	8657.090820	170388200
2013-08-20	8613.200195	8613.200195	8422.599609	8502.400391	8502.391602	214205800
2013-08-21	8526.299805	8558.000000	8427.000000	8461.799805	8461.791016	120911500
2013-08-22	8485.200195	8671.099609	8476.200195	8629.700195	8629.691406	171806500
2013-08-23	8655.400391	8712.400391	8575.000000	8686.799805	8686.791016	128811400
2013-08-26	8669.599609	8717.000000	8590.400391	8649.900391	8649.891602	81286900
2013-08-27	8596.500000	8643.299805	8378.500000	8394.000000	8393.991211	208051600
2013-08-28	8367.599609	8421.900391	8275.900391	8398.099609	8398.090820	192416400
2013-08-29	8433.700195	8458.099609	8354.000000	8432.099609	8432.090820	142640200
2013-08-30	8406.200195	8424.299805	8290.500000	8290.500000	8290.491211	171995200
2013-09-02	8370.200195	8476.200195	8369.799805	8429.599609	8429.590820	155566400
2013-09-03	8438.500000	8513.599609	8331.099609	8445.200195	8445.191406	142579800

Date	Open	High	Low	Close	Adj Close	Volume
2013-09-04	8473.299805	8517.900391	8358.599609	8490.299805	8490.291016	159255300
2013-09-05	8512.799805	8564.099609	8473.000000	8550.000000	8549.991211	213564800
2013-09-06	8534.299805	8678.799805	8524.000000	8655.000000	8654.991211	219660800
2013-09-09	8628.900391	8645.200195	8568.700195	8632.500000	8632.491211	152835800
2013-09-10	8698.099609	8813.900391	8678.299805	8801.599609	8801.590820	273337600
2013-09-11	8789.500000	8882.599609	8761.400391	8875.200195	8875.191406	255352000
2013-09-12	8878.200195	8951.400391	8861.599609	8924.200195	8924.191406	261211500
2013-09-13	8901.099609	8951.599609	8863.700195	8941.599609	8941.590820	188249600
2013-09-16	9017.500000	9056.299805	8960.299805	8999.500000	8999.491211	197762200
2013-09-17	8992.500000	9005.500000	8911.700195	8992.000000	8991.991211	177115400
...
...
...
2015-07-07	10554.900391	10588.500000	10332.099609	10346.000000	10345.989258	325139700
2015-07-08	10364.700195	10478.700195	10324.299805	10430.299805	10430.289063	320299300
2015-07-09	10479.400391	10761.099609	10463.599609	10706.400391	10706.389648	306819800
2015-07-10	10958.200195	11069.799805	10896.900391	11036.099609	11036.088867	358655000
2015-07-13	11178.200195	11253.500000	11121.799805	11224.200195	11224.188477	306039600
2015-07-14	11220.099609	11258.299805	11140.799805	11258.299805	11258.288086	302647200
2015-07-15	11262.000000	11360.400391	11234.299805	11335.700195	11335.688477	208079200

Date	Open	High	Low	Close	Adj Close	Volume
2015-07-16	11405.200195	11536.299805	11398.599609	11510.599609	11510.587891	282712200
2015-07-17	11551.000000	11551.000000	11472.599609	11480.700195	11480.688477	229032100
2015-07-20	11506.900391	11612.599609	11499.400391	11556.099609	11556.087891	178798500
2015-07-21	11571.900391	11579.700195	11432.099609	11458.599609	11458.587891	222068300
2015-07-22	11389.200195	11525.400391	11365.500000	11484.299805	11484.288086	261183800
2015-07-23	11552.000000	11553.599609	11429.400391	11441.900391	11441.888672	229334700
2015-07-24	11415.400391	11460.299805	11300.900391	11309.299805	11309.288086	339313800
2015-07-27	11252.700195	11264.200195	11136.700195	11145.400391	11145.388672	334763800
2015-07-28	11179.500000	11294.000000	11168.099609	11252.400391	11252.388672	224447300
2015-07-29	11310.000000	11325.599609	11185.799805	11282.900391	11282.888672	218993700
2015-07-30	11347.700195	11362.400391	11117.599609	11168.599609	11168.587891	292611300
2015-07-31	11198.400391	11200.900391	11039.500000	11180.700195	11180.688477	278118300
2015-08-03	11180.599609	11288.500000	11141.200195	11265.900391	11265.888672	278421700
2015-08-04	11240.299805	11244.799805	11098.500000	11150.500000	11150.488281	409879000
2015-08-05	11195.000000	11302.900391	11184.700195	11279.500000	11279.488281	255667300
2015-08-06	11263.599609	11327.000000	11239.400391	11253.599609	11253.587891	209266300
2015-08-07	11244.900391	11264.000000	11176.799805	11178.200195	11178.188477	202368800
2015-08-10	11239.500000	11330.000000	11129.299805	11311.700195	11311.688477	174264900

8.2.2. Escenario bajista

Date	Open	High	Low	Close	Adj Close	Volume
2015-12-14	9658.000000	9732.099609	9428.500000	9428.500000	9428.490234	273724800
2015-12-15	9496.299805	9747.500000	9492.500000	9711.599609	9711.589844	302446400
2015-12-16	9762.500000	9817.400391	9635.700195	9711.000000	9710.990234	342148400
2015-12-17	9909.099609	10000.400391	9850.900391	9878.500000	9878.490234	324197600
2015-12-18	9794.099609	9874.200195	9644.900391	9717.099609	9717.089844	408984200
2015-12-21	9520.500000	9558.200195	9365.799805	9365.799805	9365.790039	356508800
2015-12-22	9451.799805	9456.299805	9351.799805	9415.599609	9415.589844	220106900
2015-12-23	9505.599609	9661.900391	9503.900391	9641.000000	9640.990234	236264000
2015-12-24	9663.000000	9706.200195	9653.099609	9682.900391	9682.890625	70619000
2015-12-28	9675.599609	9724.900391	9533.000000	9552.500000	9552.490234	137892200
2015-12-29	9611.700195	9677.700195	9606.400391	9670.400391	9670.390625	147769300
2015-12-30	9650.000000	9696.400391	9607.900391	9641.900391	9641.890625	141292900
2015-12-31	9604.200195	9615.599609	9538.799805	9544.200195	9544.190430	79920900
2016-01-04	9429.799805	9440.900391	9263.700195	9313.200195	9313.190430	279173100
2016-01-05	9431.500000	9446.200195	9260.200195	9335.200195	9335.190430	208637600
2016-01-06	9330.299805	9330.299805	9122.599609	9197.400391	9197.390625	288658500
2016-01-07	8973.799805	9103.000000	8889.700195	9059.299805	9059.291016	395763700
2016-01-08	9093.299805	9138.000000	8909.200195	8909.200195	8909.191406	310720000
2016-01-11	8849.900391	9022.000000	8835.099609	8886.099609	8886.090820	301412900

Date	Open	High	Low	Close	Adj Close	Volume
2016-01-12	8867.900391	9041.500000	8818.900391	8915.400391	8915.391602	297575500
2016-01-13	8998.500000	9074.000000	8877.900391	8934.500000	8934.491211	300798700
2016-01-14	8852.500000	8854.500000	8662.200195	8787.700195	8787.691406	329170700
2016-01-15	8769.400391	8796.400391	8491.900391	8543.599609	8543.590820	458709500
2016-01-18	8525.500000	8627.099609	8427.299805	8469.299805	8469.291016	281055300
2016-01-19	8624.299805	8656.900391	8527.500000	8554.900391	8554.891602	298446300
2016-01-20	8390.200195	8398.400391	8206.000000	8281.400391	8281.391602	371165600
2016-01-21	8311.799805	8502.500000	8277.099609	8444.200195	8444.191406	358233200
...
...
...
2017-01-19	9406.400391	9431.299805	9327.400391	9379.099609	9379.099609	259102800
2017-01-20	9377.500000	9439.000000	9345.200195	9380.099609	9380.099609	238865500
2017-01-23	9337.799805	9362.400391	9279.000000	9304.799805	9304.799805	197619300
2017-01-24	9319.200195	9387.200195	9296.599609	9387.200195	9387.200195	201309700
2017-01-25	9483.500000	9588.799805	9479.400391	9549.299805	9549.299805	404755500
2017-01-26	9601.599609	9623.500000	9495.500000	9512.799805	9512.799805	285947300
2017-01-27	9531.400391	9533.500000	9420.200195	9504.099609	9504.099609	234868100
2017-01-30	9460.599609	9472.799805	9349.099609	9361.299805	9361.299805	220036700
2017-01-31	9365.900391	9430.299805	9315.200195	9315.200195	9315.200195	282766800

Date	Open	High	Low	Close	Adj Close	Volume
2017-02-01	9416.000000	9423.299805	9304.500000	9330.799805	9330.799805	304379900
2017-02-02	9321.200195	9426.400391	9301.500000	9406.400391	9406.400391	293592400
2017-02-03	9435.299805	9482.599609	9396.799805	9462.700195	9462.700195	393825900
2017-02-06	9459.400391	9482.000000	9337.400391	9357.299805	9357.299805	287143900
2017-02-07	9321.900391	9389.200195	9304.500000	9331.500000	9331.500000	284076000
2017-02-08	9362.000000	9378.400391	9236.599609	9329.700195	9329.700195	312727400
2017-02-09	9353.900391	9444.900391	9318.099609	9438.400391	9438.400391	274080900
2017-02-10	9478.200195	9498.299805	9356.000000	9378.099609	9378.099609	231384700
2017-02-13	9421.900391	9501.299805	9387.700195	9484.099609	9484.099609	178862800
2017-02-14	9489.099609	9528.599609	9461.000000	9510.200195	9510.200195	206909700
2017-02-15	9557.099609	9612.799805	9528.200195	9584.099609	9584.099609	235349200
2017-02-16	9582.500000	9614.599609	9526.000000	9554.700195	9554.700195	213987000
2017-02-17	9564.799805	9571.000000	9438.200195	9500.299805	9500.299805	234061700
2017-02-20	9564.400391	9577.700195	9512.000000	9526.599609	9526.599609	178864500
2017-02-21	9523.599609	9591.299805	9467.599609	9561.000000	9561.000000	209805000
2017-02-22	9577.700195	9606.099609	9439.700195	9477.200195	9477.200195	280841300

8.3. Código para el modelo CEV

```
using CSV
using DataFrames
df1 = DataFrame(CSV.File("C:\\Users\\EnriqueCarpintero\\Documents\\TFG JULIA\\IBEX20152017.csv"))
df2 = DataFrame(CSV.File("C:\\Users\\EnriqueCarpintero\\Documents\\TFG JULIA\\IBEX20132015.csv"))
using Plots

xticks = ["i" for i in 1:307] plot(df2.Close, xlabel="Tiempo(dias)", legend=false) xticks = ["i" for i in 1:509]
plot(df1.Close, xlabel="Tiempo(dias)", legend=false)

function logReturns(df)
    s = df.Close
    diff = []
    for i in 1:(size(s,1))
        if (i==1)
            aux = 0.0
            push!(diff, aux)
        else
            a::Float64=s[i]
            b::Float64=s[i-1]
            aux = log(a/b)
            push!(diff, aux)
        end
    end
    df[!, :LogReturns] = diff
end
```

```

using Statistics

#Parametros modelo bajista
logReturns(df1)
u1 = mean(df1[:, :LogReturns])
s1 = std(df1[:, :LogReturns])
σ1 = sqrt(252) * s1 # variance sigma
α1 = 252 * u1 + 0.5 * (σ1^2) # drift b
println(σ1)
println(α1)
sqrt(2)*0.01
(α1-0.01)/σ1

#Parametros modelo alcista
logReturns(df2)
u2 = mean(df2[:, :LogReturns])
s2 = std(df2[:, :LogReturns])
σ2 = sqrt(252) * s2 # variance sigma
α2 = 252 * u2 + 0.5 * (σ2^2) # drift b
println(σ2)
println(α2)
(α2-0.07)/σ2

function B(u,p,t)
    b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ = p;
    elem1 = -(b-2*r)/2*β*(σ^2);
    elem2 = sqrt((b^2)-2*(r^2))/2*β*(σ^2);
    arctan = atan((b-2*r)/sqrt((b^2)-2*(r^2)));
    tang = tan(β*sqrt((b^2)-2*(r^2))*(T-t)+arctan);
    elem1+elem2*tang;

```

```

end
function f(du,u,p,t)
    b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ = p;
    sharp = (θ/σ)+2*β*B(u[1],p,t);
    du[1]=((r-k-sharp)*(u[2]^(-2*β))*(b-r))*u[1];
    du[2]=u[2]*b;
end

function g(du,u,p,t)
    b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ = p;
    du[1]= -(σ*((θ/σ)+2*β*B(u[1],p,t))*(u[2]^(-β))*u[1])
    du[2]= σ*(u[2]^(β))*u[2]
end

function inversion(x,s,p)
    sol=[]
    b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= p;
    ph=(a,d,δ)
    for i in 1:2520
        aux1=θ/σ
        aux2=(s[i]^(-2*β))*x[i]
        aux3= B(x[i],p,i/252)
        aux4=AL(ph,i/252)+x[i]
        fin = -(aux1+2*β*aux3)*aux2
        push!(sol,fin/aux4)
    end
    sol
end

```

```

a=25
d=65
δ=0.01

using QuadGK
function h(p,t)
    a,d,δ=p
    quadgk(u->exp(-((μ-δ)*u)+(μ-δ)*d)*(u-a)/(d-a),a,d)
end
function P(t)
    intg=0.015*t
    P0*exp(intg)
end
function AL(p,t)
    aux1= P(t)
    aux2= h(p,t)
    sol= aux1*aux2[1]
    sol
end

using DifferentialEquations
using Plots

x0= -14.028
dt=1.0/252.0
p = (α2,50.0,σ2,-0.2,0.07,0.07,0.018,1.0,10.0,(α2-0.07)/σ2);
b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= p;
prob = SDEProblem(f,g,[x0,s0],[0.0,10.0],p)
ensembleprob = EnsembleProblem(prob)
sol = solve(ensembleprob,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)

```

```

plot(sMu, label="beta = -0.2", legend=:bottomright, idxs=1)
p1 = ( $\alpha$ 2, 50.0,  $\sigma$ 2, -0.1, 0.07, 0.07, 0.018, 1.0, 10.0, ( $\alpha$ 2-0.07)/ $\sigma$ 2);
b, s0,  $\sigma$ ,  $\beta$ , r,  $\delta$ , k,  $\alpha$ , T,  $\theta$ = p1;
prob1 = SDEProblem(f, g, [x0, s0], (0.0, 10.0), p1)
ensembleprob1 = EnsembleProblem(prob1)
sol1 = solve(ensembleprob1, EnsembleThreads(), trajectories=1000, dt=dt, saveat= 1.0/252.0)
sMu1 = EnsembleSummary(sol1, 0:1.0/252.0:10);
plot!(sMu1, label="beta = -0.1", legend=:bottomright, idxs=1)
p2 = ( $\alpha$ 2, 50.0,  $\sigma$ 2, 0, 0.07, 0.07, 0.018, 1.0, 10.0, ( $\alpha$ 2-0.07)/ $\sigma$ 2);
b, s0,  $\sigma$ ,  $\beta$ , r,  $\delta$ , k,  $\alpha$ , T,  $\theta$ = p2;
prob2 = SDEProblem(f, g, [x0, s0], (0.0, 10.0), p2)
ensembleprob2 = EnsembleProblem(prob2)
sol2 = solve(ensembleprob2, EnsembleThreads(), trajectories=1000, dt=dt, saveat= 1.0/252.0)
sMu2 = EnsembleSummary(sol2, 0:1.0/252.0:10)
plot!(sMu2, label="beta = 0", legend=:bottomright, idxs=1)
p3 = ( $\alpha$ 2, 50.0,  $\sigma$ 2, 0.1, 0.07, 0.07, 0.018, 1.0, 10.0, ( $\alpha$ 2-0.07)/ $\sigma$ 2);
b, s0,  $\sigma$ ,  $\beta$ , r,  $\delta$ , k,  $\alpha$ , T,  $\theta$ = p3;
prob3 = SDEProblem(f, g, [x0, s0], (0.0, 10.0), p3)
ensembleprob3 = EnsembleProblem(prob3)
sol3 = solve(ensembleprob3, EnsembleThreads(), trajectories=1000, dt=dt, saveat= 1.0/252.0)
sMu3 = EnsembleSummary(sol3, 0:1.0/252.0:10)
plot!(sMu3, label="beta = 0.1", legend=:bottomright, idxs=1)
p4 = ( $\alpha$ 2, 50.0,  $\sigma$ 2, 0.2, 0.07, 0.07, 0.018, 1.0, 10.0, ( $\alpha$ 2-0.07)/ $\sigma$ 2);
b, s0,  $\sigma$ ,  $\beta$ , r,  $\delta$ , k,  $\alpha$ , T,  $\theta$ = p4;
prob4 = SDEProblem(f, g, [x0, s0], (0.0, 10.0), p4)
ensembleprob4 = EnsembleProblem(prob4)
sol4 = solve(ensembleprob4, EnsembleThreads(), trajectories=1000, dt=dt, saveat= 1.0/252.0)
sMu4 = EnsembleSummary(sol4, 0:1.0/252.0:10)
plot!(sMu4, label="beta = 0.2", legend=:bottomright, idxs=1, xlabel="Tiempo t (Agnos)", ylabel="E(X(t))")

```

```

#simulacion sin ensemble para alcista
ps = ( $\alpha$ 2,50.0, $\sigma$ 2,-0.2,0.07,0.1,0.018,1.0,10.0, ( $\alpha$ 2-0.07)/ $\sigma$ 2);
b,s0, $\sigma$ , $\beta$ ,r, $\delta$ ,k, $\alpha$ ,T, $\theta$ = ps;
probs = SDEProblem(f,g,[x0,s0],(0.0,10.0),ps)
sols = solve(probs,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
plot(sols,label="beta = -0.2",legend=:bottomright,vars=1)
ps1 = ( $\alpha$ 2,50.0, $\sigma$ 2,-0.1,0.07,0.1,0.018,1.0,10.0, ( $\alpha$ 2-0.07)/ $\sigma$ 2);
b,s0, $\sigma$ , $\beta$ ,r, $\delta$ ,k, $\alpha$ ,T, $\theta$ = ps1;
probs1 = SDEProblem(f,g,[x0,s0],(0.0,10.0),ps1)
sols1 = solve(probs1,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
plot!(sols1,label="beta = -0.1",legend=:bottomright,vars=1)
ps2 = ( $\alpha$ 2,50.0, $\sigma$ 2,0.0,0.07,0.1,0.018,1.0,10.0, ( $\alpha$ 2-0.07)/ $\sigma$ 2);
b,s0, $\sigma$ , $\beta$ ,r, $\delta$ ,k, $\alpha$ ,T, $\theta$ = ps2;
probs2 = SDEProblem(f,g,[x0,s0],(0.0,10.0),ps2)
sols2 = solve(probs2,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
plot!(sols2,label="beta = 0",legend=:bottomright,vars=1)
ps3 = ( $\alpha$ 2,50.0, $\sigma$ 2,0.1,0.07,0.1,0.018,1.0,10.0, ( $\alpha$ 2-0.07)/ $\sigma$ 2);
b,s0, $\sigma$ , $\beta$ ,r, $\delta$ ,k, $\alpha$ ,T, $\theta$ = ps3;
probs3= SDEProblem(f,g,[x0,s0],(0.0,10.0),ps3)
sols3 = solve(probs3,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
plot!(sols3,label="beta = 0.1",legend=:bottomright,vars=1)

#curva inversion
a=25.0
d=65.0
 $\delta$ =0.07
k=0.018
P0=10
 $\mu$ =0.015
ph=(a,d, $\delta$ )

```

```

inv=inversion (sMu.u [1 ,:] ,sMu.u [2 ,:] ,p)
plot (inv ,label="beta = 0.2")
inv1=inversion (sMu1.u [1 ,:] ,sMu1.u [2 ,:] ,p1)
plot!(inv1 ,label="beta = 0.1")
inv2=inversion (sMu2.u [1 ,:] ,sMu2.u [2 ,:] ,p2)
plot!(inv2 ,label="beta = 0")
inv3=inversion (sMu3.u [1 ,:] ,sMu3.u [2 ,:] ,p3)
plot!(inv3 ,label="beta = 0.1")
inv4=inversion (sMu4.u [1 ,:] ,sMu4.u [2 ,:] ,p4)
plot!(inv4 ,label="beta = 0.2" ,xlabel=" Tiempo t (dias)" ,ylabel=" Inversion Activo Riesgo Esperada / F(t)")
invv=inversion (sols [1 ,:] ,sols [2 ,:] ,ps)
plot (invv ,label="beta = 0.2")
invv1=inversion (sols1 [1 ,:] ,sols1 [2 ,:] ,ps1)
plot!(invv1 ,label="beta = 0.1")
invv2=inversion (sols2 [1 ,:] ,sols2 [2 ,:] ,ps2)
plot!(invv2 ,label="beta = 0")
invv3=inversion (sols3 [1 ,:] ,sols3 [2 ,:] ,ps3)
plot!(invv3 ,label="beta = 0.1")
invv4=inversion (sols4 [1 ,:] ,sols4 [2 ,:] ,ps4)
plot!(invv4 ,label="beta = 0.2" ,xlabel=" Tiempo t (dias)" ,ylabel=" Inversion Activo Riesgo / F(t)")
invv=inversion (sols [1 ,:] ,sols [2 ,:] ,ps)
plot (invv ,label="beta = -0.2" ,ylims=(0,1) ,yticks=0:0.1:1)
invv1=inversion (sols1 [1 ,:] ,sols1 [2 ,:] ,ps1)
plot!(invv1 ,label="beta = -0.1" ,ylims=(0,1) ,yticks=0:0.1:1)
invv2=inversion (sols2 [1 ,:] ,sols2 [2 ,:] ,ps2)
plot!(invv2 ,label="beta = 0" ,ylims=(0,1) ,yticks=0:0.1:1)
invv3=inversion (sols3 [1 ,:] ,sols3 [2 ,:] ,ps3)
plot!(invv3 ,label="beta = 0.1" ,ylims=(0,1) ,yticks=0:0.1:1)
invv4=inversion (sols4 [1 ,:] ,sols4 [2 ,:] ,ps4)
plot!(invv4 ,label="beta = 0.2" ,ylims=(0,1) ,yticks=0:0.1:1 ,widen=true ,xlabel=" Tiempo t (dias)" ,ylabel=" Inversion Activo Riesgo / F(t)")

```

```

inv=inversion(sMu.u[1,:],sMu.u[2,:],p)
plot(inv,label="beta = -0.2",ylims=(0,1),yticks=0:0.1:1)
inv1=inversion(sMu1.u[1,:],sMu1.u[2,:],p1)
plot!(inv1,label="beta = -0.1",ylims=(0,1),yticks=0:0.1:1)
inv2=inversion(sMu2.u[1,:],sMu2.u[2,:],p2)
plot!(inv2,label="beta = 0",ylims=(0,1),yticks=0:0.1:1)
inv3=inversion(sMu3.u[1,:],sMu3.u[2,:],p3)
plot!(inv3,label="beta = 0.1",ylims=(0,1),yticks=0:0.1:1)
inv4=inversion(sMu4.u[1,:],sMu4.u[2,:],p4)
plot!(inv4,label="beta = 0.2",ylims=(0,1),yticks=0:0.1:1,xlabel=" Tiempo t (dias)",ylabel=" Inversion Activo Riesgo Esperada / F(t)")
using DifferentialEquations
using Plots

x0= 14.028
dt=1.0/252.0

p01 = (α1,50.0,σ1, 0.2,0.017,0.1,0.018,1.0,10.0,(α1 0.017)/σ1);
b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= p01;
prob01 = SDEProblem(f,g,[x0,s0],(0.0,10.0),p01)
ensembleprob01 = EnsembleProblem(prob01)
sol01 = solve(ensembleprob01,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
sMu01 = EnsembleSummary(sol01,0:1.0/252.0:10)
plot(sMu01,label="beta = 0.2",legend=:bottomright,idxs=1,color = 1)
p11 = (α1,50.0,σ1, 0.1,0.017,0.1,0.018,1.0,10.0,(α1 0.017)/σ1);
b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= p11;
prob11 = SDEProblem(f,g,[x0,s0],(0.0,10.0),p11)
ensembleprob11 = EnsembleProblem(prob11)
sol11 = solve(ensembleprob11,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
sMu11 = EnsembleSummary(sol11,0:1.0/252.0:10;)
plot!(sMu11,label="beta = 0.1",legend=:bottomright,idxs=1,color = 2)

```

```

p21 = (α1,50.0,σ1,0,0.017,0.1,0.018,1.0,10.0,(α1-0.017)/σ1);
b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= p21;
prob21 = SDEProblem(f,g,[x0,s0],[0.0,10.0],p21)
ensembleprob21 = EnsembleProblem(prob21)
sol21 = solve(ensembleprob21,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
sMu21 = EnsembleSummary(sol21,0:1.0/252.0:10)
plot!(sMu21,label="beta = 0",legend=:bottomright,idxs=1,color = 3)
p31 = (α1,50.0,σ1,0.1,0.017,0.1,0.018,1.0,10.0,(α1-0.017)/σ1);
b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= p31;
prob31 = SDEProblem(f,g,[x0,s0],[0.0,10.0],p31)
ensembleprob31 = EnsembleProblem(prob31)
sol31 = solve(ensembleprob31,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
sMu31 = EnsembleSummary(sol31,0:1.0/252.0:10)
plot!(sMu31,label="beta = 0.1",legend=:bottomright,idxs=1,color = 4)
p41 = (α1,50.0,σ1,0.2,0.017,0.1,0.018,1.0,10.0,(α1-0.017)/σ1);
b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= p41;
prob41 = SDEProblem(f,g,[x0,s0],[0.0,10.0],p41)
ensembleprob41 = EnsembleProblem(prob41)
sol41 = solve(ensembleprob41,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
sMu41 = EnsembleSummary(sol41,0:1.0/252.0:10)
plot!(sMu41,label="beta = 0.2",legend=:bottomright,idxs=1,xlabel=" Tiempo t (Agnos)",ylabel=" E(X(t))",color = 5)
#simulacion sin ensemble para alcista
ps01 = (α1,50.0,σ1,-0.2,0.017,0.1,0.018,1.0,10.0,(α1-0.017)/σ1);
b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= ps01;
probs01 = SDEProblem(f,g,[x0,s0],[0.0,10.0],ps01)
sols01 = solve(probs01,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
plot(sols01,label="beta = -0.2",legend=:bottomright,vars=1)
ps11 = (α1,50.0,σ1,-0.1,0.017,0.1,0.018,1.0,10.0,(α1-0.017)/σ1);
b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= ps11;
probs11 = SDEProblem(f,g,[x0,s0],[0.0,10.0],ps11)

```

```

sols11 = solve(probs11, dt=dt, saveat= 1.0/252.0)
plot!(sols11, label="beta = -0.1", legend=:bottomright, vars=1)
ps21 = ( $\alpha$ , 50.0,  $\sigma$ , 1, 0.0, 0.017, 0.1, 0.018, 1.0, 10.0, ( $\alpha - 0.017$ )/ $\sigma$ );
b, s0,  $\sigma$ ,  $\beta$ , r,  $\delta$ , k,  $\alpha$ , T,  $\theta$  = ps21;
probs21 = SDEProblem(f, g, [x0, s0], (0.0, 10.0), ps21)
sols21 = solve(probs21, dt=dt, saveat= 1.0/252.0)
plot!(sols21, label="beta = 0", legend=:bottomright, vars=1)
ps31 = ( $\alpha$ , 50.0,  $\sigma$ , 1, 0.1, 0.017, 0.1, 0.018, 1.0, 10.0, ( $\alpha - 0.017$ )/ $\sigma$ );
b, s0,  $\sigma$ ,  $\beta$ , r,  $\delta$ , k,  $\alpha$ , T,  $\theta$  = ps31;
probs31 = SDEProblem(f, g, [x0, s0], (0.0, 10.0), ps31)
sols31 = solve(probs31, dt=dt, saveat= 1.0/252.0)
plot!(sols31, label="beta = 0.15", legend=:bottomright, vars=1)
ps41 = ( $\alpha$ , 50.0,  $\sigma$ , 1, 0.2, 0.017, 0.1, 0.018, 1.0, 10.0, ( $\alpha - 0.017$ )/ $\sigma$ );
b, s0,  $\sigma$ ,  $\beta$ , r,  $\delta$ , k,  $\alpha$ , T,  $\theta$  = ps41;
probs41 = SDEProblem(f, g, [x0, s0], (0.0, 10.0), ps41)
sols41 = solve(probs41, dt=dt, saveat= 1.0/252.0)
plot!(sols41, label="beta = 0.2", legend=:bottomright, vars=1, xlabel="Tiempo t (Agnos)", ylabel="X(t)")

a=25.0
d=65.0
 $\delta$ =0.017
k=0.018
P0=10
 $\mu$ =0.015
ph=(a, d,  $\delta$ )
#simulacion sin ensemble para alcista
inv01=inversion(sMu01.u[1, :], sMu01.u[2, :], p01)
plot(inv01, label="beta = -0.2")
inv11=inversion(sMu11.u[1, :], sMu11.u[2, :], p11)
plot!(inv11, label="beta = -0.1")

```

```

inv21=inversion(sMu21.u[1,:],sMu21.u[2,:],p21)
plot!(inv21,label="beta = 0")
inv31=inversion(sMu31.u[1,:],sMu31.u[2,:],p31)
plot!(inv31,label="beta = 0.1")
inv41=inversion(sMu41.u[1,:],sMu41.u[2,:],p41)
plot!(inv41,label="beta = 0.2",xlabel="Tiempo t (dias)",ylabel="Inversion Activo Riesgo Esperada / F(t)")
invv01=inversion(sols01[1,:],sols01[2,:],ps01)
plot!(invv01,label="beta = -0.2")
invv11=inversion(sols11[1,:],sols11[2,:],ps11)
plot!(invv11,label="beta = -0.1")
invv21=inversion(sols21[1,:],sols21[2,:],ps21)
plot!(invv21,label="beta = 0")
invv31=inversion(sols31[1,:],sols31[2,:],ps31)
plot!(invv31,label="beta = 0.1")
invv41=inversion(sols41[1,:],sols41[2,:],ps41)
plot!(invv41,label="beta = 0.2",xlabel="Tiempo t (dias)",ylabel="Inversion Activo Riesgo / F(t)")
#Simulacion para varios horizontes temporales 10-30 agnos
p = (α2,50.0,σ2,0.2,0.07,0.07,0.018,1.0,30.0,(α2-0.07)/σ2);
b,s0,σ,β,r,δ,k,α,T,θ= p;
prob = SDEProblem(f,g,[x0,s0],[0.0,30.0],p)
ensembleprob = EnsembleProblem(prob)
sol = solve(ensembleprob,EnsembleThreads(),trajectories=1000,dt=dt,saveat= 1.0/252.0)
sMu = EnsembleSummary(sol,0:1.0/252.0:30)

```