Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Estudio Abstracto de Ecuaciones en Derivadas Parciales Parabólicas Lineales No Autónomas

Autor: *Jesús Dueñas Pamplona*

Tutor: *Cesáreo Jesús González Fernández*

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Valladolid

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones diferenciales son, hasta el día de hoy, el lenguaje más natural para expresar los fenómenos y procesos físicos del mundo que nos rodea. Expresan variación, relación entre fenómenos, suavidad o falta de ella, evolución, transporte, etc: los ingredientes necesarios para crear modelos que describan adecuadamente el mundo visible y poder así predecir el comportamiento de la naturaleza.

Es por ello que su estudio, tanto desde el punto de vista continuo como desde el punto de vista numérico, es un campo de gran relevancia dentro de las matemáticas actuales, presentando gran cantidad de tipos de ecuaciones distintos, enfoques que relacionan distintas áreas de las Matemáticas y multitud de peculiaridades que hacen que se trate de una materia de estudio realmente amplia. Este trabajo se centrará en el estudio desde el punto de vista abstracto del problema continuo de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's) lineales que surgen de forma natural asociadas a procesos físicos de evolución, es decir, que corresponden a caracterización del estado de un sistema determinado al transcurrir un lapso de tiempo bajo la actuación de un cierto conjunto de leyes físicas. En concreto, se estudiarán problemas parabólicos.

Las EDP's lineales suelen clasificarse en tres grandes grupos: *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*. Como ya se ha dicho, los resultados de este trabajo se aplican a EDP's parabólicas lineales. Un vistazo a la estructura de la ecuación del calor, que es el prototipo por excelencia de ecuación parabólica lineal, va a ser de gran ayuda a la hora de definir los problemas que se van a poder tratar con los resultados de este trabajo. Dado un dominio Ω suficientemente regular, por ejemplo, se buscan funciones $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que para todo $x \in \Omega$ y $t > 0$ verifiquen la ecuación

$$u_t - \Delta u = f. \tag{1.1}$$

Esta se trata de una ecuación de evolución temporal ligada al operador laplaciano Δ, en la que u_t es la única derivada respecto de la variable t que aparece. La función $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es habitualmente denominada dato no homogéneo. Dicha expresión rige el cambio de la temperatura en los puntos de un dominio determinado a lo largo de un lapso temporal, donde f representa a las fuentes dentro del dominio.

Además, como el problema es la evolución térmica desde un estado conocido, se necesitará añadir a (1.1) una condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ para todo $x \in \Omega$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, que aquí se ha tomado en el 0 pero mediante un desplazamiento podría ser en cualquier otro punto, y, dependiendo de la naturaleza de Ω, pueden ser necesarias también condiciones frontera.

El laplaciano es el representante más común de los llamados *operadores diferenciales lineales elípticos*, que son la familia de operadores que permitirá definir lo que es un problema parabólico lineal. A continuación, se procederá a definir adecuadamente dichos operadores.

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase $\mathcal{C}^m$ (Definición A.4.5) y $\mathcal{A}(x, D)$ un operador diferencial lineal de orden m definido en Ω dado por

$$\mathcal{A}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \qquad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

donde es usual exigir que los coeficientes que acompañan a las derivadas, $a_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$, pertenezcan a $L^\infty(\Omega)$. Se está utilizando la notación usual de multíndices para α (Definición A.4.1), denotando de esta forma las derivadas parciales por D^α. Se llama *parte principal* del operador $\mathcal{A}$, y se denota como $\mathcal{A}^o(x, D)$ a los términos del operador $\mathcal{A}$ que incluyen únicamente a las derivadas de orden máximo m,

$$\mathcal{A}^o(x, D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D^\alpha, \qquad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Es la parte principal la que va a servir para definir la elipticidad del operador. Se dirá que un operador diferencial lineal como (1.2) es *elíptico* si verifica una condición de positividad sobre los coeficientes de su parte principal, en concreto, que para todo $x \in \Omega$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ no nulo se verifique

$$\mathcal{A}^o(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n} > 0. \tag{1.4}$$

Para operadores con coeficientes complejos se suele definir la elipticidad fuerte pidiendo que una condición similar a la antes expuesta se verifique para la parte real, como se puede encontrar en la Definición A.4.4. Se comprueba de forma inmediata que operadores como el laplaciano m-dimensional

$$\Delta = \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{1.5}$$

o un laplaciano m-dimensional pesado con coeficientes positivos $a_n : \Omega \to \mathbb{R}^+$, con $n \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$$\Delta_w = \sum_{n=1}^{m} a_n(x) \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{1.6}$$

son operadores elípticos, ya que verifican (1.4). En el Apéndice A.4 se pueden encontrar otras definiciones de condiciones de elipticidad semejantes a la presentada, que son necesarias en ciertos teoremas.

Se dirá entonces, por paralelismo con la ecuación del calor (1.1), que un problema lineal es parabólico si está regido por una ecuación diferencial de evolución del tipo

$$u_t - \mathcal{A}(x, D) u = f, \tag{1.7}$$

donde $\mathcal{A}$ es un operador diferencial lineal elíptico. Después, una vez se haya llegado al problema abstracto, se desgranarán las posibles dependencias del operador y el término no homogéneo, clasificando los problemas en función de ellas. El paso siguiente es transformar este problema de EDP's en el problema abstracto que se va a estudiar en este trabajo. Este proceso no es sencillo y no es el objetivo de este trabajo, que ya está enfocado directamente sobre el problema abstracto, por lo que se presentarán únicamente las ideas principales a título informativo. Un poco más adelante se referenciará donde pueden encontrarse los resultados concernientes.

Para formular un problema abstracto a partir de la EDP (1.7), se necesita lo que se denomina una *realización diferencial* o, simplemente, una *realización*, que consiste en elegir unos espacios de funciones adecuados donde pasar a representar la EDP. Una vez elegido un espacio de Banach X correspondiendo a un espacio de funciones adecuado de $\overline{\Omega}$ en $\mathbb{R}$, las soluciones, que antes se buscaban entre las funciones $\overline{\Omega} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ con regularidad suficiente se pasarán a buscar como funciones $u : [0,\infty) \to X$, es decir, que para cada $t \in [0,\infty)$, $u(t) \in X$ representa a la función en ese instante de tiempo. Además, será necesario identificar un subespacio lineal de X, $D(A)$ que será el que contiene a los elementos de X que tienen regularidad (espacial, no puede haber otra en los elementos de X) suficiente como para que se pueda aplicar el operador diferencial sobre ellos. De esta forma, el problema pasa a estar formulado por un *operador lineal, cerrado y no acotado* $A : D(A) \subset X \to X$ (Sección 2.1). Además, por la necesidad de aplicarles el operador, las soluciones deberán buscarse de forma que verifiquen $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$. El dato no homogéneo también se convierte de la misma manera en una función $f : [0,\infty) \to X$. Utilizando esta metodología el problema abstracto lineal autónomo (con operador independiente del tiempo) queda escrito como

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t), & \text{para } 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X. \end{cases} \tag{1.8}$$

Como una de las propiedades que debe presentar el espacio $D(A)$ es que sus elementos tienen que tener derivadas aunque sea en un sentido generalizado, esto lleva a introducir los *espacios de Sobolev* (Sección 2.5), que precisamente están construidos de esa manera. Es habitual entonces que $D(A)$ sea un espacio de Sobolev del tipo $W^{m,p}(\Omega)$ mientras que X sea $L^p(\Omega)$. De hecho, los Teoremas de generación A.4.1 y A.4.2 que se presentan en el Apéndice A.4 se refieren en concreto a ese caso. Aunque puede parecer a primera vista que el problema abstracto lineal autónomo (1.8) sólo sirve para tratar Problemas Puros de Valores Iniciales (sin condiciones frontera), esto no es así. Las condiciones frontera Dirichlet homogéneas de la EDP original pueden introducirse en este problema abstracto dentro del dominio $D(A)$. En ese caso

$$D(A) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : \ u(x) = 0, \ \ \forall x \in \partial\Omega\}. \tag{1.9}$$

Aquí el operador $A : D(A) \subset X \to X$ es lo que se denomina una *realización diferencial* de un operador como el de la ecuación (1.2), en el que los coeficientes no dependen ni del tiempo ni de la propia solución. Este trabajo se centrará en los resultados de existencia y unicidad de soluciones de problemas abstractos de este tipo y de los que se mostrará a continuación, asumiendo las hipótesis sobre A que se derivan de las distintas realizaciones en espacios de funciones concretos, pero sin profundizar en ellas más allá de un primer nivel. Cuestiones sobre cotas a priori para operadores elípticos, inclusiones continuas de espacios de Sobolev o toda la familia de resultados de generación de semigrupos a partir de realizaciones de operadores quedan pues al margen de este trabajo, centrado en resultados de existencia y unicidad para el problema abstracto. Estos y otros temas relacionados dan lugar a otro amplísimo estudio que podría ser una de las continuaciones naturales para el estudiante. No ha de perderse de vista que los citados resultados forman la base que otorga sentido al presente estudio abstracto.

Como se ha mencionado ya, los problemas abstractos que se tratarán en este trabajo serán construidos a partir de operadores diferenciales lineales elípticos. Esta particularidad va a dotar al operador lineal abstracto de unas propiedades que van a permitir resolver la existencia, unicidad y dependencia con los datos de las soluciones. Los trabajos y resultados de matemáticos como Shmuel Agmon [3, 4], Avron Douglis [4], Louis Nirenberg [4], H. Bruce Stewart [22], Felix E. Browder [9], Brunello Terreni [2], Paolo Acquistapace [2] y otros, garantizan, en distintas condiciones, que los operadores lineales abstractos que provienen de operadores diferenciales lineales elípticos son generadores de *semigrupos de operadores lineales y continuos* (se estudiarán en la Sección 3.6). Este hecho es el que dota de sentido al presente trabajo, ya que justifica que el estudio de ecuaciones diferenciales con operadores entre espacios de Banach que generan semigrupos analíticos es aplicable a EDP's parabólicas en dominios reales. Esta será la hipótesis clave bajo la que se tratará el problema (1.8), que $-A : D(A) \to X$ genere un semigrupo analítico de operadores lineales y continuos.

El siguiente paso en la secuencia de problemas a tratar es, naturalmente, el caso no autónomo, es decir, en el que el operador lineal abstracto A depende del tiempo, que se correspondería con un operador diferencial lineal elíptico cuyos coeficientes dependen del tiempo, o con la introducción de condiciones frontera homogéneas que provoquen que el dominio del operador abstracto varíe con el tiempo. El problema abstracto pasa a ser del tipo siguiente, que será tratado en el Capítulo 5,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X, \end{cases} \tag{1.10}$$

donde $-A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$ es generador de un semigrupo analítico de operadores lineales y continuos para cada $t \in [0,T]$, y el dato no homogéneo sigue siendo del tipo $f : [0,T] \to X$. Las hipótesis que se requieren para resolver este problema imponen buscar soluciones en $[0,T]$ en vez de en $[0,\infty)$. El estudio de soluciones asintóticas, es decir, para $t \in [0,\infty)$ no ha sido tratado en este trabajo. En concreto, el problema de EDP's del que proviene (1.10) se puede escribir como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \mathcal{A}(x,t,D)u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ B_j(x,t,D)u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad j = 1,2,\ldots,m/2, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.11}$$

donde

$$B_j(x,t,D) = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x,t) D^\beta \tag{1.12}$$

son los operadores que representan las condiciones frontera, y a los cuales se les exige una condición de normalidad y otra complementaria (en vista a que la realización verifique la propiedad de generar semigrupos analíticos), que pueden encontrarse en la Definición A.4.6 y el Teorema A.4.1. $\mathcal{A}(x,t,D)$ es ahora un operador como (1.2), pero en el que los coeficientes dependen del tiempo y es elíptico para cada $t \in [0,T]$,

$$\mathcal{A}(x,t,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x,t) D^\alpha, \qquad x \in \Omega. \tag{1.13}$$

La condición inicial y el dato no homogéneo tienen el mismo sentido que en (1.1). Entonces, para cada $t \in [0,T]$, se considera el operador lineal abstracto $(A(t)u)(x) = \mathcal{A}(x,t,D)u(x)$ con dominio

$$D(A(t)) = \{u \in W^{m,p}(\Omega): \ B_j(x,t,D)u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, \ j = 1,2,...,k\}. \tag{1.14}$$

Resultados de generación de semigrupos analíticos como los que se pueden encontrar en el Capítulo 3 de [17], y que son debidos a los trabajos antes mentados, aseguran que el operador así construido (con alguna imposición complementaria que no concretaremos por ahora) es generador de un semigrupo analítico. Por tanto, dicho problema se puede reducir al problema no autónomo abstracto antes descrito. De esta forma, el tratamiento del problema abstracto proporciona herramientas para demostrar existencia y unicidad de problemas de EDP's con condiciones frontera homogéneas. En la Sección 4.4 se hará un inciso sobre cómo incorporar condiciones frontera no homogéneas.

Pese a que el presente trabajo sólo llega hasta aquí, hasta el caso lineal no autónomo, se puede notar que la mayoría de problemas que proporcionan la física y la biología son problemas no lineales. Aunque el estudio detallado del problema abstracto en este trabajo se limite al caso lineal, en el último capítulo se comentarán algunas ideas necesarias para aproximarse a los casos semilineal y casilineal. El problema semilineal abstracto es aquel en el que el dato incluye dependencia con la solución de forma $f(t,u)$,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t,u), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X, \end{cases} \tag{1.15}$$

es decir, en el que ahora se define el término no homogéneo como $f : [0,T] \times X \to X$. El problema casilineal abstracto es aquel en el que el operador también depende de la solución $A(t,u)$,

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(t,u)u(t) = f(t,u), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X, \end{cases} \tag{1.16}$$

es decir, en el que el operador lineal abstracto es de la forma $A(t,x) : D(A(t,x)) \subset X \to X$ para cada $t \in [0,T]$ y cada $x \in X$. El último estadio son las ecuaciones completamente no lineales, cuya no linealidad se sale de las posibilidades antes descritas.

A continuación, se presenta un breve resumen del contenido que desarrollan los distintos capítulos del trabajo. El Capítulo 2 está destinado a presentar los resultados necesarios de análisis real y funcional que son requeridos para el desarrollo de la teoría posterior. Estos resultados sirven de base para lo siguiente y establecen el nexo imprescindible con los contenidos del Grado en Matemáticas. El Capítulo 3 del presente trabajo está dedicado a desarrollar los fundamentos de la teoría de semigrupos que antes han sido mencionados. Estos son, en cierta forma, una generalización de la idea de exponencial a operadores diferenciales, de forma que permiten resolver EDP's mediante un tratamiento análogo, en cierta manera, al de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's). En primer lugar, se estudiarán los semigrupos de clase C_0, que en general corresponden a problemas hiperbólicos, y después se estudiarán aquellos que, además, son semigrupos analíticos, los cuales corresponden a los problemas parabólicos que se van a tratar, como ya se ha explicado.

El Capítulo 4 se dedica a la demostración de existencia, unicidad de soluciones y continuidad respecto de los datos del problema lineal autónomo abstracto. Además, al final del capítulo se presenta una construcción que permite incorporar contribución de las condiciones frontera no homogéneas. El Capítulo 5 presenta el caso lineal no autónomo abstracto, en el que los operadores y sus dominios de definición dependen de la variable temporal. Se demuestra la existencia, unicidad de soluciones y continuidad respecto de los datos en términos de soluciones débiles y clásicas. Para acabar, el Capítulo 6 recoge orientaciones, referencias y comentarios para diversos temas que no han podido ser tratados en profundidad en el presente trabajo, con especial interés puesto en el tratamiento de ecuaciones parabólicas semilineales y casilineales.

Para acabar esta introducción se pasa a enumerar una serie de problemas provenientes de distintas ramas de la física que hacen que el estudio de ecuaciones parabólicas siga siendo de gran relevancia y que se pueden encontrar desarrollados en mayor profundidad en [17, 24]. Los problemas que se van a presentar son problemas semilineales, casilineales y totalmente no lineales; que son los que más habitualmente rigen los fenómenos físicos y biológicos. Como ya se ha mencionado antes, no hay espacio suficiente en este trabajo para desarrollar las herramientas específicas necesarias para atacar este tipo de problemas, sin embargo, se presentan aquí porque el estudio de los problemas parabólicos lineales ha de tener la vista puesta en el objetivo final, que es, en la gran mayoría de los casos resolver problemas no lineales.

Modelos de separación de fases: ecuación de Cahn-Hilliard

La ecuación de Cahn-Hilliard es una ecuación semilineal parabólica que describe el proceso de separación de dos fases de un componente binario que se separa de forma espontánea. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^3$ con frontera C^4. La función $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to (a, b)$ indica la concentración de ambos compuestos, indicando $u \to a$ la presencia únicamente del componente 1, y $u \to b$ la del componente 2. La concentración viene regida por la ecuación

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta\big(- \Delta u + \varphi(u)\big), & t > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t) = \dfrac{\partial \Delta u}{\partial n}(x,t) = 0, & t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x), & \qquad\quad\; x \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ indica la derivada normal en la frontera. En ella $\varphi(\cdot) : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función suave que está relacionada con el potencial químico de la mezcla involucrada. En otras formulaciones pueden aparecer más constantes, que desaparecen al adimensionalizar la ecuación.

Modelos de reacción-difusión en materiales semiconductores

En 1950, William B. Schockley, quien cinco años más tarde obtendría el Premio Nobel de Física por sus investigaciones sobre materiales semiconductores y el descubrimiento del transistor, presentó un modelo de *reacción-difusión* que describía el comportamiento de electrones y huecos (cuasipartículas correspondientes a la ausencia de electrones en una banda de energía de un sólido).

Dado Ω un abierto $\mathbb{R}^n$ con frontera suficientemente regular, que corresponde al semiconductor, son desconocidas las funciones que describen la densidad de electrones, $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, y la densidad de huecos, $v : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to [0, \infty)$, para cada punto de $\overline{\Omega}$ y para cada instante de tiempo $t \in [0, \infty)$. A la evolución temporal de estas cantidades contribuyen la *difusión* de ambos tipos de partículas, que viene regida por coeficientes $a > 0$ y $b > 0$ respectivamente (positivos porque ambos se difunden de donde hay más densidad a donde hay menor densidad de sus respectivas especies); el arrastre por el potencial electrostático $\phi(x, t)$, que habrá que resolver mediante la ecuación de Poisson, y cuya acción está condicionada por las movilidades μ y ν de ambas partículas, también constantes; las tasas de generación y recombinación, dadas por una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; y otras contribuciones externas determinadas por funciones $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ y $h : \Omega \to \mathbb{R}$. El conjunto de ecuaciones viene dado por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u - \nabla \cdot (\mu u \nabla \phi) + f(uv) + g(x), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = b\Delta v + \nabla \cdot (\nu v \nabla \phi) + f(uv) + g(x), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ 0 = c\Delta\phi - u + v + h(x), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \end{cases}$$

donde las dos primeras ecuaciones pueden entenderse como ecuaciones parabólicas semilineales a cada potencial fijo. A estas ecuaciones habría que añadir las condiciones frontera e iniciales que correspondiesen al problema físico. A priori, globalmente este no se puede considerar un sistema parabólico, ya que el potencial electrostático depende de las distribuciones de electrones y huecos, y este se relaciona por la ecuación de Poisson, que es de naturaleza elíptica. Sin embargo, las técnicas que se utilizan para su tratamiento son las de las ecuaciones parabólicas semilineales, como se puede ver en [24].

Modelos de ondas de choque en aerodinámica

Aunque la propagación de ondas suele ser un fenómeno intrínsecamente hiperbólico, hay casos en los que no es así, como en la siguiente ecuación propuesta por H. Bateman en 1915 (ver el artículo de Cole [11]) que describe la propagación de una onda de choque unidimensional en un fluido viscoso, $u : [0, L] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Se trata de una ecuación parabólica casilineal. Es de especial interés observar esta ecuación ya que tiene una apariencia extraordinariamente sencilla: se diferencia de la ecuación del calor en un término uu_x no lineal y en la dependencia con la solución del coeficiente de u_{xx}. Se escribe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \qquad 0 < x < L,$$

donde $\nu(u)$ es una función relacionada con la viscosidad del fluido. De hecho, al hacer $\nu \equiv 0$ desparece el término realmente parabólico y queda en evidencia el mecanismo de propagación de naturaleza hiperbólica. Habría que añadirle también unas condiciones frontera e iniciales.

Modelos de teoría de explosiones

En la teoría de ecuaciones completamente no lineales resulta más complicado etiquetar ecuaciones diferenciales conforme a la clasificación habitual, porque, de hecho, los operadores dejan de ser lineales y pasan a tomar formas arbitrarias. De esta forma, cada ecuación es completamente diferente. Se aporta un ejemplo de una ecuación de evolución tratada por Brauner, Buckmaster, Dold y Schmidt-Lainé, que se puede encontrar en [17], y que describe la propagación de un frente de ondas en una explosión, $g : [0, L] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Al tratarse de una ecuación de evolución, esta puede tratarse con técnicas fundamentadas en las técnicas de ecuaciones parabólicas.

$$\begin{cases} g_t(t,x) = \log\left(\dfrac{\exp(cgg_{xx})-1}{cg_{xx}}\right) - \dfrac{1}{2}(g_x)^2, & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ g_x(t,0) = g_x(t,L) = 0, & t \geq 0, \\ g(0,x) = g_0(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

El frente de ondas de detonación buscado viene descrito por $g \equiv 1$.

Los modelos y ecuaciones que se han mostrado aquí son tan sólo un puñado de todos los que se pueden encontrar recorriendo las distintas áreas de la ciencia y de la técnica. En el abanico mostrado se ha pretendido poner encima de la mesa problemas con distintos grados de dificultad y de no linealidad, que marcan simbólicamente una meta en el aprendizaje de teoría de ecuaciones diferenciales parabólicas.

Capítulo 2

Resultados preliminares

En este capítulo se presentan un conjunto de resultados de análisis real y funcional que serán necesarios para el desarrollo de la teoría posterior. Uno de los objetivos más importantes será presentar resultados que generalizan resultados de cálculo y análisis en $\mathbb{R}^n$ a espacios de Banach, ya que es en ellos donde se resolverán los ya propuestos problemas abstractos (1.8) y (1.10). Merece la pena destacar antes de comenzar que a lo largo del trabajo se denotará habitualmente C una constante positiva, que no tiene por qué ser la misma de unas ecuaciones a otras. Esta aparecerá especialmente en los Capítulos 3, 4 y 5.

En algunas de las secciones siguientes se presentarán los resultados con su demostración y en otras se referirá a bibliografía para encontrarla. El criterio elegido para esta distinción es presentar las demostraciones de resultados que sean más ilustrativos para el desarrollo posterior del trabajo o enlacen muy directamente con contenidos del Grado. Por ejemplo, en la primera línea se enmarcarían las demostraciones de la Sección 2.4, y en la segunda, las de las Secciones 2.1 y 2.5.

2.1. Espacios de Banach y operadores

Un espacio de Banach X es un espacio vectorial normado que es completo en la topología inducida por su norma. Estos serán los espacios en los que tendrán lugar los teoremas referentes a los problemas abstractos de EDP's parabólicas que se presentan en este trabajo. Se denota por X^* al dual topológico de X, es decir, al conjunto de funcionales lineales y continuos de X en $\mathbb{K}$, siendo $\mathbb{K}$ el cuerpo de escalares del espacio X. Se denotará por $\langle u, v\rangle$, a la evaluación del funcional $u \in X^*$ en $v \in X$. A partir de ahora, a no ser que se indique lo contrario, X será siempre un espacio de Banach.

El propósito de esta sección es describir brevemente las distintas formas de convergencia en espacios de Banach, y, en especial, en espacios de operadores lineales que aparecerán a lo largo del trabajo. Se dan por conocidos teoremas fundamentales de espacios de Banach como el Teorema de Hahn-Banach, el Teorema de Banach-Steinhaus, el Teorema del Grafo Cerrado... los cuales se pueden encontrar en textos como [33, 37, 40, 44].

Definición 2.1.1. Dado $x \in X$, se dirá que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X, **converge fuertemente** a x, y se denotará por $x_n \to x$, cuando lo hace en norma, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0.$$

Definición 2.1.2. Dado $x \in X$, se dirá que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X, **converge débilmente** a x cuando se verifica que para todo $f \in X^*$ se tiene

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle .$$

Proposición 2.1.1. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X, entonces

(I) si x_n converge fuertemente a x, entonces converge a x también débilmente.

(II) si x_n converge débilmente a x, entonces $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ está acotado y $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(III) si x_n converge débilmente a x y $f_n \to f$ fuertemente en X^*, entonces $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demostración. (I) Como $|\langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| = |\langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f\| \, \|x_n - x\| \to 0$, ya se tiene.

(II) Por el Teorema de Banach-Steinhaus se tiene que $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ está acotado, pues por la convergencia débil para todo $f \in X^*$ el conjunto $\{\langle f, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado, que es la hipótesis necesitada para aplicar el teorema. Pasando al límite inferior la desigualdad de la definición de la norma de f se tiene (la convergencia del lado izquierdo la asegura la hipótesis de convergencia débil)

$$|\langle f, x_n \rangle| \leq \|f\| \, \|x_n\| , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

Por la caracterización de la norma en base al espacio dual se tiene ahora que

$$\|x\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

(III) Se sigue de la aplicación siguiente de la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| &= |\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x_n \rangle + \langle f, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \\ &= |\langle f_n - f, x_n \rangle + \langle f, x_n - x \rangle| \\ &\leq |\langle f_n - f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n - x \rangle| \\ &\leq \|f_n - f\| \, \|x_n\| + |\langle f, x_n - x \rangle| , \end{aligned}$$

donde los dos términos de la última desigualdad tienden hacia cero porque por el apartado anterior $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ está acotado, luego la convergencia fuerte $f_n \to f$ hace que $\|f_n - f\| \, \|x_n\| \to 0$ y $|\langle f, x_n - x \rangle| \to 0$ por la definición de convergencia débil.

□

Definición 2.1.3. Dados X e Y dos espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ se representará por $\mathcal{L}(X, Y)$ al conjunto de operadores lineales y continuos de X en Y. Se define la norma del operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ por

$$\|A\| = \inf \{M \geq 0 \ : \ \|Ax\| \leq M \|x\| , \quad \forall x \in X\} ,$$

y esta es, de hecho, una norma en $\mathcal{L}(X, Y)$. Cuando el espacio de llegada sea el mismo que el espacio de partida, X, simplemente se denotará $\mathcal{L}(X)$.

Definición 2.1.4. Dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y, se dice que esta **converge uniformemente** o **en norma** a $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0.$$

Definición 2.1.5. Dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y, se dice que esta **converge fuertemente** a $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ si para todo $x \in X$ se tiene que $A_n x$ converge fuertemente a Ax.

Definición 2.1.6. Dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y, se dice que esta **converge débilmente** a $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ si para todo $x \in X$ se tiene que $A_n x$ converge débilmente a Ax.

Proposición 2.1.2. Dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y se tiene que

(I) si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en norma hacia A, entonces también converge fuertemente,

(II) si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge fuertemente hacia A, entonces también lo hace débilmente.

Demostración. (I) Es inmediato que, dado $x \in X$,

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \, \|x\| \to 0,$$

donde $\|A_n - A\| \to 0$ por la convergencia en norma.

(II) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge fuertemente hacia A entonces $A_n x \to Ax$ fuertemente y, por la Proposición 2.1.1, se tiene que $A_n x$ converge débilmente a Ax, luego $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge también débilmente hacia A.

□

Los operadores lineales que aparecen en el problema abstracto de EDP's con los que se va a trabajar tienen como dominios de definición espacios de funciones suficientemente diferenciables. Es natural, por tanto, trabajar en espacios de Banach en los que estos espacios de funciones suficientemente diferenciables estén embebidos y considerar la posibilidad de definir operadores en los que los dominios de definición no sean el espacio total. Esta necesidad justifica la introducción de unos nuevos operadores ligeramente distintos a los operadores lineales definidos hasta ahora, que serán llamados simplemente *operadores* u *operadores no acotados*. Hay que tener cuidado con esta forma de denominarlos y las definiciones, ya que estos operadores no acotados pueden ser de hecho acotados, debido a que los operadores lineales hasta ahora estudiados están englobados dentro de la definición que ahora se va a aportar.

Definición 2.1.7. Dados X e Y espacios de Banach, se dice que un par $(A, D(A))$ es un **operador lineal** u **operador lineal no acotado** de X en Y, si A es una aplicación lineal $D(A) \to Y$ y $D(A)$ es un subespacio lineal de X.

Ha de tenerse en cuenta que no se requiere en la definición que $D(A)$ sea un espacio de Banach. En la mayoría de los casos que aparecerán en el subsiguiente trabajo se tratará de un subespacio denso en X. Por simplicidad, se podrá llamar operador u operador no acotado a la aplicación A en vez de al par $(A, D(A))$, indicando debidamente el dominio. A veces se denotará $A : D(A) \subset X \to Y$.

Los conceptos de convergencia fuerte y débil que se han dado en las Definiciones 2.1.6 y 2.1.5 para operadores lineales y continuos se extienden de forma natural a operadores lineales no acotados, simplemente considerando ahora que se tiene que cumplir la propiedad para todos los $x \in D(A)$ en vez de para $x \in X$.

La importancia que tenía la continuidad de los operadores lineales acotados va a descansar en el caso de operadores lineales no acotados sobre la propiedad de ser cerrados, que se enuncia a continuación.

Definición 2.1.8. Se dirá que un operador lineal A de X en Y con dominio $D(A)$ es **cerrado** si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $D(A)$ con límite $x \in X$ tal que existe $y \in Y$ de forma que $Ax_n \to y$ se sigue que $x \in D(A)$ y además $Ax = y$.

Esta definición que se ha aportado es la que resulta más práctica en muchos casos, pero se puede comprobar que es, en efecto, equivalente a que el grafo de A sea cerrado en $X \times Y$. Esta propiedad extiende la continuidad de forma natural, ya que el Teorema del Grafo Cerrado asegura que esta propiedad es equivalente a la continuidad en el caso de operadores lineales definidos entre espacios de Banach.

Proposición 2.1.3. Dados X, Y espacios de Banach, $B \in \mathcal{L}(X)$ un operador lineal y continuo y $A : D(A) \to Y$ un operador lineal cerrado, con $R(B) \subset D(A) \subset X$, entonces el operador $AB : X \to Y$ es lineal y continuo.

Demostración. Dados $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X con límite $x \in X$ y dado $y \in Y$ tal que $ABx_n \to y$, basta con ver que $ABx = y$ para comprobar que AB es cerrado. Ahora bien, como B es lineal y continuo se tiene $Bx_n \to Bx$, y como A es cerrado y se tiene $A(Bx_n) \to y$ entonces $A(Bx) = ABx = y$ como se pretendía. Por el Teorema del Grafo Cerrado se tiene que AB es lineal y continuo ya que está definido en todo X y es cerrado. $\square$

Cabe preguntarse la razón para denominar a estos operadores 'no acotados'. Para ello, se ha de pensar en espacios de funciones habituales que toman valores en $\mathbb{R}$, por ejemplo $L_2([0,1], \mathbb{R})$, y un operador tal que $\frac{d}{dx}$ como operador diferencial. Si se toma la sucesión de funciones $g_n(x) = x^n$, es claro que $g_n \to 0$ en $L_2([0,1])$ y, sin embargo, $g_n'(x) = nx^{n-1}$ tiende hacia infinito en norma $L_2([0,1])$. Las imágenes de una sucesión acotada por este operador son no acotadas. Esa es precisamente la idea de operador no acotado que motiva la definición anterior, aunque los tradicionales operadores lineales y continuos también queden englobados dentro de la definición de operador no acotado.

En el Capítulo 5 se va a necesitar introducir el concepto de operador adjunto de un operador no acotado para tratar con las soluciones débiles del problema lineal no autónomo. Ha de tenerse en cuenta que la siguiente definición es general y no se restringe a espacios de Hilbert.

Definición 2.1.9. Dado $A : D(A) \subset X \to Y$ un operador lineal no acotado con dominio $D(A)$, denso en X, se define el dominio de su **operador adjunto** como

$$D(A^*) = \{v \in Y^* : \quad \exists c \geq 0 \text{ tal que } |\langle v, Au\rangle| \leq c\,\|u\|\,, \quad \forall u \in D(A)\}\,.$$

Es claro que $D(A^*)$ es un subespacio lineal de Y^*, ya que si $v_1,\ v_2 \in D(A^*)$ con respectivas constantes $c_1, c_2 \geq 0$, entonces dados $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{K}$ se tiene que para todo $u \in D(A)$

$$|\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, Au\rangle| \leq |\lambda_1|\,|\langle v_1, Au\rangle| + |\lambda_2|\,|\langle v_2, Au\rangle| \leq \big(|\lambda_1|\,c_1 + |\lambda_2|\,c_2\big)\,\|u\|\,.$$

Ahora, se define la acción de A^* sobre un elemento $v \in D(A^*)$. Para ello, se considera la aplicación $g_v : D(A) \to \mathbb{K}$ por $g_v(u) = \langle v, Au\rangle$ para todo $u \in D(A)$, y por tanto $|g_v(u)| \leq c\,\|u\|$ para todo $u \in D(A)$. Por el Teorema de Hahn-Banach se puede extender g a un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ tal que tal que $|f(u)| \leq c\,\|u\|$ para todo $u \in X$. Esta extensión es única y se define $A^*v = f$. Esto da lugar a la relación fundamental del operador adjunto dados $u \in D(A)$ y $v \in D(A^*)$,

$$\langle v, Au \rangle_{Y^*,Y} = \langle A^*v, u \rangle_{X^*,X} ,$$

donde con $\langle u, v \rangle_{Y^*,Y}$ se ha denotado la evaluación del funcional $u \in Y^*$ en $v \in Y$. El subíndice indicando Y^* y Y podrá omitirse de ahora en adelante si los espacios están claros.

De esta definición se desprende automáticamente que si el operador A es lineal y continuo, el dominio de A^* es Y^*. Además en este caso A^* es también un operador lineal y continuo, ya que

$$\|A^*v\| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle A^*v, u\rangle| = \sup_{\|u\|\leq 1} |\langle v, Au\rangle| \leq \|v\| \sup_{\|u\|\leq 1} \|Au\| = \|v\| \, \|A\| \, .$$

Además $\|A^*\| \leq \|A\|$.

2.2. La derivada

Al querer trasladar las nociones de derivabilidad y diferenciabilidad a espacios vectoriales normados (Banach, en este caso) hay dos defınciones que cobran especial importancia: la de la derivada de Fréchet y la de la derivada de Gateaux; que serían las generalizaciones respectivas de diferenciabilidad y derivabilidad direccional. Sin embargo, estas no van a ser necesarias en este trabajo, ya que están construidas para aplicaciones que van de un espacio vectorial normado arbitrario Y en otro X, mientras que las derivadas que aparecerán de los capítulos siguientes se acogerán siempre al caso más sencillo en el que Y es un subintervalo de la recta real (que será habitualmente el espacio donde viva el parámetro de los semigrupos de operadores lineales que se introducirán en el Capítulo 3). Por tanto, es posible limitarse a unas definiciones más sencillas. Se podrá encontrar un desarrollo más extenso en el Capítulo VIII de [36] y en Capítulo XIII de [39].

Como se ha indicado, el caso específico que se va a necesitar va a ser aquel en el que el espacio de partida de las aplicaciones sea un abierto del cuerpo de escalares del espacio de Banach de llegada. En este caso va a ocurrir lo mismo que ocurría con la diferenciabilidad y la derivabilidad en las funciones reales definidas en $\mathbb{R}$: que van a ser equivalentes. La siguiente definición será suficiente para abordar la derivabilidad respecto de un parámetro real.

Definición 2.2.1. Dados I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y X un espacio de Banach, se dirá que $f : I \to X$ es **derivable** en $x_0 \in I$ si existe $f'(x_0) \in X$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right\| = 0.$$

Con esta definición se verifican las propiedades clásicas de la derivada, con pruebas análogas a las que se han llevado a cabo a lo largo del Grado (se pueden encontrar en la bibliografía indicada al principio de la sección).

Proposición 2.2.1. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y sean X, Y y G espacios de Banach. Entonces

(I) Si $f : I \to X$ y $g : I \to X$ son derivables en $x_0 \in I$ entonces $f + g$ es derivable en x_0 y $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(II) Dado $c \in \mathbb{C}$ y $f : I \to X$, para todo punto de I donde f sea derivable se tiene $(cf)' = cf'$.

(III) **(Regla de derivación del producto)**. Dados una forma bilineal continua $X \times Y \to G$ (que hace las veces de producto), y dos funciones $f : I \to X$, $g : I \to Y$, ambas derivables en $x_0 \in I$, entonces la aplicación producto fg es derivable en x_0 y además se verifica la regla de derivación del producto

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(IV) **(Regla de la cadena para operadores lineales y continuos)**. Dados $f : I \to X$ y $A : X \to Y$ un operador lineal y continuo, entonces si f es derivable en $x_0 \in I$ se tiene que Af es derivable en x_0 y además

$$(Af)'(x) = A(f'(x)).$$

(V) Dado $f : I \to X$ derivable en I y con derivada 0 en todo punto del intervalo, entonces f es una constante en I.

Holomorfía

Debido a las necesidades de la teoría concerniente al espectro y a la aplicación resolvente, que se formulará poco más adelante, hace falta también adaptar las herramientas de variable compleja hasta ahora utilizadas para poder trabajar con funciones que toman valores en espacios de Banach. Todos los resultados que se expondrán aquí se pueden encontrar junto con una descripción completa del tema en el Capítulo IX del libro [36] de J. Dieudonné. También se puede encontrar un buen resumen de resultados de holomorfía de funciones que toman valores en espacios de Banach en el Apéndice A del libro [31].

Definición 2.2.2. Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y X un espacio de Banach. Se dice que $f : U \to X$ es **analítica** en un punto $a \in U$ si existe un entorno abierto de a contenido en U tal que en él $f(z)$ sea igual a la suma de una serie absolutamente convergente en la variable $(z - a)$. Se dirá que una función es entera si es analítica en todo $\mathbb{C}$.

La definición de la derivada en el sentido complejo presenta la misma analogía con la derivada respecto de un parámetro real que presentaba en el caso de funciones con valores reales: se cambia el espacio por el que h tiende hacia 0 por un trozo del plano complejo.

Definición 2.2.3. Dados $U \subset \mathbb{C}$ abierto y X un espacio de Banach se dirá que $f : U \to X$ es **derivable** u **holomorfa** en $z_0 \in U$ si existe $f'(z_0) \in X$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right\| = 0.$$

Se dice que una función es holomorfa (respectivamente analítica) en un conjunto abierto si lo es en cada punto del abierto.

Proposición 2.2.2. Una función analítica en un conjunto abierto es infinitamente diferenciable y todas sus derivadas son analíticas en dicho abierto.

Proposición 2.2.3. Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto, X un espacio de Banach y $f : U \to X$ analítica en U. Si en un entorno de $a \in U$ toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \qquad a_n \in X,$$

entonces su derivada respecto de z se puede escribir como

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-a)^n,$$

en dicho entorno de a.

Entre los muchos resultados idénticos a los de funciones que toman valores complejos que se obtienen destaca la fórmula de Cauchy, que será utilizada en algunas ocasiones.

Definición 2.2.4. Sean una curva γ continua, diferenciable a trozos y parametrizada en $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, un espacio de Banach X y una función $f : U \to X$, con $U \subset \mathbb{C}$ abierto que continene a $\gamma(I)$. Se define la **integral** de f a lo largo de γ como

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Teorema 2.2.1. (Fórmula de Cauchy). Sean $U \in \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f : U \to X$ analítica, con X un espacio de Banach. Entonces para cualquier curva cerrada γ diferenciable a trozos, parametrizada en $I \subset \mathbb{R}$, con $\gamma(I) \subset U$, y para todo $z \in U \setminus \gamma(I)$ se tiene

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z}\, d\omega,$$

donde $n(\gamma, z)$ es el índice de la curva γ respecto del punto z.

La equivalencia entre los conceptos de *función analítica* y *función holomorfa* queda completado con el siguiente resultado, que requiere, como en el caso de funciones que toman valores complejos, de la Fórmula de Cauchy 2.2.1 para su demostración.

Proposición 2.2.4. Dado $D \subset \mathbb{C}$ abierto, X espacio de Banach, y $f : D \to X$ continuamente derivable, entonces f es analítica.

Teoremas del valor medio

En la Sección 8.5. del libro de Dieudonné [36] se pueden encontrar las dos versiones siguientes de teoremas del valor medio para funciones que toman valores en espacios de Banach, análogos a los ya conocidos con funciones de variable real, los cuales serán usados en el desarrollo posterior.

Teorema 2.2.2. Sean $I = [\alpha, \beta]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $f : I \to X$, con X un espacio de Banach, y $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Si existe un conjunto numerable D tal que para cada $\xi \in I \setminus D$, f y φ son derivables en ξ y verifican $\|f'(\xi)\| \leq \varphi'(\xi)$ entonces

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Teorema 2.2.3. Dado X un espacio de Banach, I un intervalo de $\mathbb{R}$ que contiene a los puntos x_0 y $x_0 + t$. Si $f : I \to X$ es diferenciable en cada punto de I entonces

$$\|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \leq |t| \sup_{0 \leq \xi \leq 1} \left\| f'(x_0 + \xi t) \right\|.$$

2.3. La integral

Integral de Bochner

Para poder desarrollar una teoría de cierto tipo de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach arbitrarios se necesita, en primer lugar, disponer de herramientas de análisis capaces de abordar estos problemas, o más bien, comprobar que las generalizaciones naturales de las herramientas de las que ya se dispone son aptas para lo que se requiere.

Esto es lo que se pretende hacer en esta sección con la integral. A lo largo del Grado se ha estudiado el concepto de integral desde distintas perspectivas para funciones que toman valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, como se puede encontrar en [42]. Debido a que este trabajo se desarrolla en espacios de Banach arbitrarios, se necesita integrar funciones que toman valores en dichos espacios, y, por tanto, se requiere introducir una nueva integral: la integral de Bochner o integral generalizada.

Los resultados de esta sección se presentan aquí sin demostración debido al parecido que estas presentan con las pruebas realizadas a lo largo del Grado para la integral que toma valores en $\mathbb{K}$. Las referencias principales han sido el libro [35] de J. Diestel y J.J. Uhl, así como el Capítulo VI del libro [39] de S. Lang. Estas ideas también se pueden encontrar adecuadamente sintetizadas (y tratadas con una orientación muy similar a la de este trabajo) en el primer capítulo del libro [31]. No se presentan todos los resultados y definiciones necesarios para demostrar los resultados objetivo de esta sección, sino únicamente los necesarios para comprender los enunciados. Las integrales que aparecerán a lo largo del trabajo deberán ser entendidas en el sentido de Bochner salvo en la Sección 4.4 o cuando se indique lo contrario.

Definición 2.3.1. Dados (Z, μ) un espacio medible y X un espacio de Banach, se dirá que una aplicación $f : Z \to X$ es una **aplicación escalonada** si existe un conjunto $E \subset Z$ de medida finita y una partición $\{E_i\}_{i=1}^r$ de E en conjuntos medibles tal que f es constante en cada uno de los conjuntos E_i de la partición y se anula fuera de E. Se denomina $St(\mu)$ al conjunto de todas las aplicaciones escalonadas en (Z, μ).

Definición 2.3.2. Dada $f : Z \to X$ una aplicación escalonada respecto de la partición $\{A_i\}_{i=1}^r$ se define su **integral** como

$$\int_Z f\, d\mu = \sum_{i=1}^r \mu(A_i) f(A_i).$$

Proposición 2.3.1. La siguiente expresión define una seminorma (ver Definición 2.5.7) en el conjunto $St(\mu)$ de aplicaciones escalonadas,

$$\|f\|_1 = \int_Z \|f\|\, d\mu = \sum_{i=1}^r \mu(A_i) \|f(A_i)\|.$$

De la misma manera que se definía la complección de los números racionales como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, dando lugar a los números reales; se define ahora el espacio $L^1(\mu)$ de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en norma 1 de aplicaciones escalonadas, y se define $\mathcal{L}^1(\mu)$ como el conjunto de funciones f de Z en X tales que existe una sucesión de Cauchy de aplicaciones escalonadas que converge en casi todo punto a f.

Lema 2.3.1. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de Cauchy de aplicaciones escalonadas de Z en X, que convergen en casi todo punto a la misma función. Entonces los siguientes límites existen y son iguales,

$$\lim_{n\to\infty} \int_Z f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_Z g_n \, d\mu.$$

Además, las sucesiones de Cauchy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenecen a la misma clase de equivalencia de $L^1(\mu)$.

Definición 2.3.3. Para todo $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ se define su **integral** como

$$\int_Z f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_Z f_n \, d\mu,$$

donde f_n es cualquier sucesión de aplicaciones escalonadas que convergen en casi todo punto a f. La integral es lineal. Se denominará, por tanto, a los elementos de $\mathcal{L}^1(\mu)$ **funciones integrables** o **Bochner integrables**. En los casos en que no haya lugar a confusión se podrá denotar $\mathcal{L}^1(Z, X)$, $\mathcal{L}^1(\mu, X)$ o $\mathcal{L}^1(Z)$.

Lema 2.3.2. Si f es integrable y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de aplicaciones escalonadas que convergen a f en casi todo punto, entonces $\|f\|$ es integrable y $\|f_n\|$ converge en casi todo punto a $\|f\|$. En particular

$$\int_Z \|f\| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_Z \|f_n\| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 .$$

Teorema 2.3.1. El espacio $\mathcal{L}^1(\mu)$ es completo bajo la seminorma $\| \; \|_1$ de la Proposición 2.3.1.

Proposición 2.3.2. Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y dados E y F conjuntos medibles disjuntos (y se define $\int_E f \, d\mu = \int_Z f \kappa_E \, d\mu$, con κ_E la función característica del conjunto E, es decir, que toma valor 1 en E y 0 en su complementario) entonces

$$\int_{E\cup F} f \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_F f \, d\mu.$$

Teorema 2.3.2. (de Bochner). Una función $f : I \to X$ es Bochner integrable si y solo si f es medible y $\|f\|$ es integrable. Si f es Bochner integrable, para todo conjunto medible $E \subset I$ se satisface

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| \, d\mu \leq \|f\|_\infty \, \mu(E).$$

Teorema 2.3.3. Dados $\lambda : X \to Y$ una aplicación lineal y continua entre espacios de Banach y $f \in \mathcal{L}^1(Z, X)$, entonces la aplicación $f \to \lambda \circ f$ es lineal y continua de $\mathcal{L}^1(Z, X)$ en $\mathcal{L}^1(Z, Y)$ y, además,

$$\lambda \int_Z f \, d\mu = \int_Z \lambda \circ f \, d\mu.$$

Teorema 2.3.4. (de Hille). Sea $A : D(A) \subset X \to Y$ un operador lineal cerrado, con X, Y espacios de Banach. Si $f : Z \to D(A)$ y Af son integrables Bochner respecto de una medida (Z, μ) entonces para todo conjunto μ-medible E se tiene

$$A \left(\int_E f \, d\mu \right) = \int_E Af \, d\mu.$$

Teorema 2.3.5. (de la Convergencia Dominada). Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{L}^1(\mu)$. Supóngase que existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ tal que $g \geq 0$ y $\|f_n\| \leq g$ para todo n. Supóngase que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en casi todo punto a una función f. Entonces $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y además $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge L^1 a f.

Teorema 2.3.6. (de Fubini). Sean (Z_1, μ), (Z_2, ν) espacios medibles y X un espacio de Banach. Dada $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu, X)$ entonces para casi todo x la aplicación $f_x(y) = f(x, y)$ está en $\mathcal{L}^1(\nu)$. También para casi todo x la aplicación

$$x \to \int_{Z_2} f_x \, d\nu$$

está en $\mathcal{L}^1(\mu)$ y además se tiene que

$$\int_{Z_1 \times Z_2} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_{Z_1} \int_{Z_2} f_x \, d\nu \, d\mu(x).$$

Integral de Riemann-Stieljes

Ahora bien, en la mayoría de los casos en este trabajo no se necesitará trabajar con Z siendo un espacio de medida arbitrario, sino que será $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue usual, ya que la integración se corresponderá casi siempre con el parámetro de los semigrupos de operadores lineales y continuos que se introducirán en el Capítulo 3. Para ese caso, se presentará a continuación una construcción alternativa de integral.

En el caso de realizar la construcción de la integral directamente sobre la recta real como integral de Riemann-Stieljes se dispondrá además de un teorema análogo al Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Esta construcción, que de nuevo se mostrará tan sólo esbozada, se puede encontrar en el Capítulo X de [39]. Las funciones fundamentales que permiten este tipo de construcción de la integral son las funciones de variación acotada.

Definición 2.3.4. Dados un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, una partición del mismo

$$\Delta = [a = x_0, \, x_1, \, \dots, x_n = b],$$

un espacio de Banach X y una función $f : [a, b] \to X$ se define la **variación** de f respecto de la partición Δ, $V_\Delta(f)$, como

$$V_\Delta(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\|,$$

y se define la **variación total** de f en el intervalo $[a, b]$ como

$$V(f) = \sup_{\Delta} V_\Delta(f).$$

Se dice que f es de **variación acotada** en $[a, b]$ si $V(f)$ es finito. Se denota por $BV([a, b])$ al conjunto de todas las funciones de variación acotada en $[a, b]$. Cuando sea conveniente, se denotará $BV([a, b], X)$ para indicar el espacio de llegada de las funciones.

Proposición 2.3.3. $BV([a,b])$ es un espacio vectorial y, de hecho, V es una seminorma en $BV([a,b])$, es decir, que si $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene

$$V(f+g) \leq V(f) + V(g), \qquad V(\alpha f) = |\alpha|\, V(f).$$

Además, si $f \in BV([a,b],X)$, $g \in BV([a,b],Y)$ y se toma como producto una aplicación bilineal $X \times Y \to G$, con X, Y, G espacios de Banach, y que satisfaga $\|uv\|_G \leq \|u\|_X \|v\|_Y$, entonces su producto $fg \in BV([a,b],G)$. De hecho, se tiene la siguiente cota

$$V(fg) \leq \|f\|_\infty V(g) + \|g\|_\infty V(f),$$

donde $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$.

Definición 2.3.5. Sean $f : [a,b] \to X$, $g : [a,b] \to Y$ funciones acotadas, con X e Y espacios de Banach, y sea un producto bilineal $X \times Y \to G$, con G espacio de Banach, que verifique que $\|uv\|_G \leq \|u\|_X \|v\|_Y$. Sea

$$\Delta = [a = x_0, x_1, ..., x_n = b]$$

una partición del intervalo $[a,b]$ de tamaño $\sigma(\Delta) = \text{máx}_k \{x_{k+1} - x_k\}$ y sean c_k números que verifican $x_k \leq c_k \leq x_{k+1}$. Se define la **suma de Riemann-Stieljes** como

$$S(P,c,f,g) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big).$$

Se dirá que f es **Riemann-Stieljes g-integrable** si existe $L \in G$ tal que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier partición Δ que verifique $\sigma(\Delta) < \delta$ se tiene que $\|S(P,c,f,g) - L\|_G < \epsilon$. El límite L se denomina la integral de Riemann-Stieljes y se denota por

$$\int_a^b f\, dg.$$

Se denomina $RS(g)$ al conjunto de aplicaciones Riemann-Stieljes g-integrables.

En particular, si $g = x$ se obtiene la integral de Riemann para funciones que toman valores en espacios de Banach y en ese caso será llamada, como es natural, integrable Riemann.

Proposición 2.3.4. Si $f \in RS(g)$ y g es de variación acotada en $[a,b]$ entonces

$$\left\| \int_a^b f\, dg \right\| \leq \|f\|\, V(g).$$

Proposición 2.3.5. (Integración por partes). Se tiene que $f \in RS(g)$ si y solo si $g \in RS(f)$ y, además, se tiene la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f\, dg + \int_a^b g\, df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Proposición 2.3.6. Si f es continua y g es de variación acotada en $[a,b]$ entonces $f \in RS(g)$.

Proposición 2.3.7. Sean f continua y g diferenciable respecto de su parámetro real en $[a,b]$ con derivada g' Riemann-integrable. Entonces $f \in RS(g)$ y

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f(x) g'(x)\, dx,$$

donde la integral de la derecha es en el sentido de Riemann.

Proposición 2.3.8. Dada f de variación acotada, entonces su conjunto de puntos de discontinuidad es a lo sumo numerable.

Teorema 2.3.7. (Fundamental del Cálculo Integral). Dada f continua en a y b con $a \leq b$ entonces

$$f(b) - f(a) = \int_a^b df.$$

En particular, si f es diferenciable y tiene derivada integrable en el sentido de Riemann se tiene

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx.$$

La proposición que se presenta a continuación relaciona ambos tipos de integral que se han presentado. Además, permite transportar el Teorema Fundamental del Cálculo a la integral de Bochner sobre la recta real en el caso en el que f sea continuamente diferenciable y con derivada integrable.

Proposición 2.3.9. Sean X un espacio de Banach, $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $F : [a, b] \to X$. Si F es una primitiva de una función Bochner integrable f, y g es continua, entonces $\int_a^b g(s)\, dF(s)$ existe y es igual a la integral de Bochner $\int_a^b g(s)f(s)\, ds$. Si F es continua y g es absolutamente continua, entonces $\int_a^b F(s)\, dg(s)$ es igual a la integral de Bochner $\int_a^b F(s)g'(s)\, ds$.

2.4. Espectro y resolvente

A continuación, se presentarán algunos resultados concernientes al espectro de un elemento de un álgebra de Banach (que en el caso de este trabajo será siempre el álgebra de operadores sobre un espacio de Banach, en los cuales se centrarán directamente los resultados), es decir, resultados concernientes a la invertibilidad de dichos operadores al desplazarlos por un número complejo λ. Los resultados presentados en esta sección han sido extraídos principalmente de [34, 40, 44]. Como en el resto del trabajo, X e Y continuarán siendo espacios de Banach.

El objetivo de esta sección no es desarrollar ampliamente este tema, sino sintetizar en unos pocos resultados los conceptos fundamentales que conciernen a espectro y resolvente para poder desarrollar sin impedimentos los objetivos de este trabajo, haciéndolo accesible a un estudiante de últimos cursos de grado.

Definición 2.4.1. Dado un operador lineal A con dominio $D(A) \subset X$ y rango $\mathrm{Im}(A) \subset X$, se dirá que λ_0 está en el **conjunto resolvente** del operador A, $\rho(A)$, si el rango de $\lambda_0 I - A$ es denso en X y $\lambda_0 I - A$ tiene inversa continua $(\lambda_0 I - A)^{-1}$, la cual se denotará por $R(\lambda_0 : A)$ y se llamará **aplicación resolvente**.

Definición 2.4.2. Dado un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$, el conjunto complementario del conjunto resolvente $\rho(A)$ es llamado **espectro** de A, y se denota por $\sigma(A)$.

Teorema 2.4.1. Dado A un operador lineal cerrado con dominio y rango contenidos en X, entonces para cualquier $\lambda \in \rho(A)$ la resolvente $R(\lambda : A)$ es un operador lineal y continuo definido en todo X.

Demostración. Como $\lambda \in \rho(A)$, y lo que se está definiendo es el inverso del operador $\lambda I - A$, se tiene que $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = D((\lambda I - A)^{-1})$, y este es un conjunto denso en X por la propia definición del conjunto resolvente. Además, por definición, se tiene que $R(\lambda : A) : \operatorname{Im}(\lambda I - A) \to X$ es lineal y continuo bajo la norma heredada de X, de forma que existe $c > 0$ tal que se puede escribir

$$\|R(\lambda : A)y\| \leq \frac{1}{c} \|y\|, \qquad \forall y \in \operatorname{Im}(\lambda I - A).$$

Para todo $x \in D(A) = D(\lambda I - A)$ se tiene que existe $y \in \operatorname{Im}(\lambda I - A)$ tal que $y = (\lambda I - A)x$, luego se puede reescribir

$$c \|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|, \qquad \forall x \in D(A).$$

Se quiere ver que $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$. Ahora bien, como $\operatorname{Im}(\lambda I - A)$ es denso en X, dado $z \in X$ cualquiera, existe una sucesión de elementos $x_n \in D(A)$ tales que $(\lambda I - A)x_n \to z$. Como X es de Banach, $\{(\lambda I - A)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Utilizando la desigualdad anterior se tiene

$$c \|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda I - A)x_n - (\lambda I - A)x_m\|, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es también de Cauchy, luego es convergente, y, por tanto, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Como A es un operador cerrado, también lo es $\lambda I - A$, luego se tiene que $x \in D(A)$ y $(\lambda I - A)x = z$. Al ser z un elemento arbitrario de X se tiene que $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$. □

Teorema 2.4.2. Dado A un operador lineal cerrado con dominio y rango contenidos en X, entonces el conjunto resolvente $\rho(A)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$. Además, $R(\lambda : A)$ es una función holomorfa en cada componente conexa de $\rho(A)$.

Demostración. Por el Teorema 2.4.1 se tiene que $R(\lambda : A)$ es para cada $\lambda \in \rho(A)$ un operador lineal y continuo definido en todo X, permitiendo esto considerar potencias de la aplicación resolvente $R(\lambda : A)$. Se considera entonces para $\lambda_0 \in \rho(A)$ la siguiente serie de operadores (donde se usa como notación que la potencia 0-ésima de un operador es la identidad)

$$S(\lambda) = R(\lambda_0 : A) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0 : A)^n,$$

la cual se quiere probar que representa a $R(\lambda : A)$ en un entorno de λ_0. Para ello, se tiene en cuenta que $|\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0 : A)\| < 1$ para todo λ en el disco de $\mathbb{C}$ de centro λ_0 y radio $1/\|R(\lambda_0 : A)\|$. Esto garantiza la convergencia de la serie en dicho disco, pudiéndose acotar la serie en la forma siguiente

$$\|S(\lambda)\| \leq \|R(\lambda_0 : A)\| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_0 - \lambda|^n \|R(\lambda_0 : A)\|^n = \frac{\|R(\lambda_0 : A)\|}{1 - |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0 : A)\|} < \infty.$$

Además, por la propia definición de $S(\lambda)$ esta es una función holomorfa en dicho entorno de λ_0. Se comprueba también que $S(\lambda_0) = R(\lambda_0 : A)$, y, finalmente, se compone con $(\lambda I - A)$ por la derecha y por la izquierda para comprobar, al obtener el operador identidad, que lo que se ha obtenido es el desarrollo en serie de potencias de $R(\lambda : A)$ en un entorno de λ_0.

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)S(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0)S(\lambda) + (\lambda_0 I - A)S(\lambda) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^{n+1} R(\lambda_0 : A)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0 : A)^n \\ &= I.\end{aligned}$$

Análogamente, se tiene que $S(\lambda)(\lambda I - A) = I$. Por tanto, $S(\lambda)$ representa a la resolvente $R(\lambda : A)$ en un entorno de λ_0, conllevando que $\rho(A)$ es abierto, pues la resolvente es holomorfa en un entorno de cada punto de $\rho(A)$, y, en consecuencia, existe un entorno de cada punto de $\rho(A)$ que también está en $\rho(A)$, teniéndose, además, la holomorfía pedida por el enunciado. □

Corolario 2.4.1. Dados un operador lineal cerrado $A : D(A) \subset X \to X$ y $\lambda \in \rho(A)$, se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda : A) = -R(\lambda : A)^2.$$

Demostración. Por el Teorema 2.4.2 se tiene la holomorfía de $R(\lambda : A)$ y se puede derivar bajo la serie que se presenta en la demostración,

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda : A) = -\sum_{n=1}^{\infty} n(\lambda_0 - \lambda)^{n-1} R(\lambda_0 : A)^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0 : A)^{n+2}.$$

Para comprobar que efectivamente es $-R(\lambda : A)^2$ basta con comprobar que es el inverso de $-(\lambda I - A)^2$. Para ello, se multiplica por ambos lados, teniendo en cuenta la siguiente relación, que se obtiene gracias a que el operador identidad conmuta con cualquier otro,

$$\begin{aligned} -(\lambda I - A)^2 &= -\big((\lambda_0 I - A) - (\lambda_0 - \lambda) I\big)^2 \\ &= -(\lambda_0 I - A)^2 - (\lambda_0 - \lambda)^2 I + 2(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - A). \end{aligned}$$

A partir de la igualdad anterior, aplicándola en la derivada de la resolvente, se tiene

$$\begin{aligned} &-(\lambda I - A)^2 \frac{d}{d\lambda} R(\lambda : A) \\ &= \Big(- (\lambda_0 I - A)^2 - (\lambda_0 - \lambda)^2 I + 2(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - A) \Big) \frac{d}{d\lambda} R(\lambda : A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(\lambda_0 - \lambda)^{n-1} R(\lambda_0 : A)^{n-1} \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty} n(\lambda_0 - \lambda)^{n+1} R(\lambda_0 : A)^{n+1} \\ &\qquad\qquad - 2\sum_{n=1}^{\infty} n(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0 : A)^n. \end{aligned}$$

Continuando la manipulación de la expresión anterior se puede escribir

$$\begin{aligned} &-(\lambda I - A)^2 \frac{d}{d\lambda} R(\lambda : A) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0 : A)^n \\ &\qquad + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0 : A)^n \\ &\qquad\qquad - 2\sum_{n=1}^{\infty} n(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0 : A)^n \\ &= I + 2(\lambda_0 - \lambda) R(\lambda_0 : A) - 2(\lambda_0 - \lambda) R(\lambda_0 : A) \\ &= I. \end{aligned}$$

Se procede análogamente para $-\frac{d}{d\lambda}R(\lambda : A)(\lambda I - A)^2$, obteniéndose lo que se pretendía. También se podría haber obtenido evaluando la serie de $\frac{d}{d\lambda}R(\lambda : A)$ en λ_0. □

Corolario 2.4.2. Dados un operador lineal cerrado $A : D(A) \subset X \to X$ y $\lambda \in \rho(A)$, se verifica

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda : A) = (-1)^n\, n!\, R(\lambda : A)^{n+1}.$$

Demostración. Se procede por inducción a partir del Corolario 2.4.1 como caso base. El paso inductivo tiene en cuenta necesariamente que $R(\lambda : A)$ conmuta con su derivada debido a la expresión para la derivada que aporta el Corolario 2.4.1. De ahí que

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}}R(\lambda : A) &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda : A)\right)\\ &= \frac{d}{d\lambda}\Big((-1)^n\, n!\, R(\lambda : A)^{n+1}\Big)\\ &= (-1)^n\, n!\, (n+1)R(\lambda : A)^n\frac{d}{d\lambda}R(\lambda : A)\\ &= (-1)^{n+1}(n+1)!\, R(\lambda : A)^{n+2},\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. □

Proposición 2.4.1. Dado un operador lineal $A : D(A) \subset X \to Y$, si el conjunto resolvente $\rho(A)$ es no vacío, entonces el operador A es cerrado.

Demostración. Si $\rho(A)$ es no vacío, entonces existe $z \in \rho(A)$, luego $(zI - A)^{-1}$ es lineal y continuo. Dados $x_n \in D(A)$ y $x \in X$ tales que $x_n \to x$, e $y \in Y$ tal que $Ax_n \to y$, para ver que A es cerrado basta con comprobar que $Ax = y$ y que $x \in D(A)$. Si se define $h_n = (zI - A)x_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} (zx_n - Ax_n) = zx - y.$$

A continuación, se quiere ver que $(zI - A)^{-1}(zx - y)$ está bien definido y qué valor toma. Por lo tanto, como $(zI - A)^{-1} : \mathrm{Im}\,(zI - A) \to D(A)$ es continuo se tiene que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(zI - A)^{-1}h_n = (zI - A)^{-1}\lim_{n\to\infty} h_n = (zI - A)^{-1}(zx - y).$$

En consecuencia, $zx - y \in \mathrm{Im}\,(zI - A)$, $x \in D(A)$ y $(zI - A)x = zx - y$, es decir, $Ax = y$, luego el operador lineal A es cerrado. □

Teorema 2.4.3. (Ecuaciones de la resolvente). Dados $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal y λ, $\mu \in \rho(A)$, se verifica la primera ecuación de la resolvente,

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A).$$

Dados, además, $B : D(B) \subset X \to X$ otro operador lineal y $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$, se verifica la segunda ecuación de la resolvente,

$$R(\lambda : B) - R(\lambda : A) = R(\lambda : A)(B - A)R(\lambda : B).$$

Demostración. La primera ecuación de la resolvente se obtiene al considerar que $(\mu I - A)$ es el inverso de la resolvente y utilizando una forma de escribir $(\mu I - A)$ similar a la que se utiliza en la demostración del teorema anterior: $(\mu I - A) = (\mu - \lambda)I + (\lambda I - A)$;

$$\begin{aligned} R(\lambda : A) &= R(\lambda : A)(\mu I - A)R(\mu : A) \\ &= R(\lambda : A)\big((\mu - \lambda)I + (\lambda I - A)\big)R(\mu : A) \\ &= (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A) + R(\mu : A). \end{aligned}$$

Para demostrar la segunda se opera de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R(\lambda : A)(B - A)R(\lambda : B) &= R(\lambda : A)\big((B - \lambda I) - (A - \lambda I)\big)R(\lambda : B) \\ &= R(\lambda : A)(B - \lambda I)R(\lambda : B) - R(\lambda : A)(A - \lambda I)R(\lambda : B) \\ &= R(\lambda : B) - R(\lambda : A). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.4.3. Dados un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ y $z, w \in \rho(A)$, se tiene que

$$R(w : A)R(z : A) = R(z : A)R(w : A).$$

Demostración. Aplicando la primera identidad del Teorema 2.4.3 a z, w y luego a w, z se tiene

$$\begin{aligned} R(\lambda : A) - R(\mu : A) &= (\mu - \lambda)R(\lambda : A)R(\mu : A) \\ &= -\big(R(\mu : A) - R(\lambda : A)\big) \\ &= -(\lambda - \mu)R(\mu : A)R(\lambda : A). \end{aligned}$$

En conclusión, $R(w : A)R(z : A) = R(z : A)R(w : A)$, como se quería comprobar. □

Se presentan a continuación una pareja de lemas que serán utilizados durante el desarrollo de la teoría y ejemplos posteriores, aunque no están discursivamente enmarcados en la teoría de espectro y resolvente que se ha presentado hasta ahora.

Lema 2.4.1. Dado $A \in \mathcal{L}(X)$, entonces si $\|A^p\| < 1$ para algún entero positivo p se tiene que $I - A$ es invertible, y, además,

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n, \qquad \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^p\|} \sum_{j=0}^{p-1} \|A^j\|.$$

Demostración. En primer lugar, se procede a probar la convergencia de la serie. Como X es un espacio de Banach, la convergencia en norma es equivalente a la convergencia absoluta de la misma. Se recurre a una descomposición ingeniosa en función del entero positivo p, valiéndose de que se trata de una serie de términos positivos, pudiendo así reordenarlos,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| &= \sum_{n=0}^{\infty} \|A^{pn}\| + \sum_{n=0}^{\infty} \|A^{pn+1}\| + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \|A^{pn+p-1}\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^p\|^n + \sum_{n=0}^{\infty} \|A^p\|^n \|A\| + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} \|A^p\|^n \|A\|^{p-1} \\ &= \big(1 + \|A\| + \cdots + \|A^{p-1}\|\big) \sum_{n=0}^{\infty} \|A^p\|^n \\ &= \frac{1}{1 - \|A^p\|} \sum_{j=0}^{p-1} \|A^j\| < \infty, \end{aligned}$$

donde, de nuevo, se ha utilizado la notación de que la potencia 0-ésima de A es la identidad. De esta forma, $B = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \in \mathcal{L}(X)$, y, si se define $B_m = \sum_{n=0}^{m} A^n$, se tiene que B_m converge a B en la norma de X. Ahora bien, se comprueba al sumar telescópicamente que

$$B_m(I - A) = \sum_{n=0}^{m} A^n - \sum_{n=0}^{m} A^{n+1} = I - A^{m+1} = (I - A)B_m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Por lo tanto, al hacer tender $m \to \infty$ (en norma) en la expresión anterior se obtiene, ya que $\|A^p\| < 1$,

$$(I - A)B = I = B(I - A),$$

de donde se concluye que $B = (I - A)^{-1}$ y que, además, se tiene la cota para la norma que aparece en el enunciado, en virtud de la primera acotación que se llevó a cabo antes. □

Lema 2.4.2. Dados un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que si existe una sucesión de elementos de $D(A)$, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, tales que $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, además, $\lambda u_n - Au_n$ tiende hacia 0 cuando n tiende a ∞, entonces $\lambda \in \sigma(A)$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supóngase que $\lambda \in \rho(A)$, luego $R(\lambda : A)$ existe y es lineal y continuo. Además, en ese caso, al tener conjunto resolvente no vacío, la Proposición 2.4.1 garantiza que el operador A es cerrado. Si se denota $b_n = (\lambda I - A)u_n$ entonces se puede escribir

$$u_n = R(\lambda : A)(\lambda I - A)u_n = R(\lambda : A)b_n.$$

Teniendo en cuenta que el Teorema 2.4.1 garantiza que $R(\lambda : A)$ es un operador lineal y continuo definido en todo X, tomando normas en la expresión anterior se tiene que, ya que por el enunciado $\|b_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

$$1 = \|u_n\| = \|R(\lambda : A)b_n\| \leq \|R(\lambda : A)\| \, \|b_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

lo cual es absurdo, luego $\lambda \in \sigma(A)$. □

2.5. Algunos espacios de funciones

A lo largo del estudio de ecuaciones diferenciales en el Grado, se estudió la imposición de diferentes condiciones a las fuentes y datos que aparecían en ecuaciones diferenciales ordinarias para exigir existencia y unicidad de soluciones. Surgieron en ese contexto como muy importantes los espacios de funciones Lipschitzianas.

Bajo el mismo pretexto, en el desarrollo de la teoría de EDP's parabólicas desde un punto de vista abstracto, surgen necesidades diferentes de regularidad en datos y fuentes, que hacen necesaria la introducción de nuevos espacios de funciones: espacios de funciones Hölder continuas. En esta sección se aportará su definición y algunas de sus propiedades que serán necesarias en el trabajo posterior. Además, también se aportarán normas usuales para espacios de funciones continuamente diferenciables. Las referencias bibliográficas utilizadas en esta sección son, principalmente, [17, 43].

Espacios de funciones continuas

Definición 2.5.1. Sea $f : I \to X$, con X un espacio de Banach, e I un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Se dirá que f pertenece a

(i) $B(I;X)$ cuando $\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} \|f(t)\| < \infty$.

(ii) $C(I;X)$ cuando sea continua.

(iii) $C^k(I;X)$ cuando sea k veces continuamente diferenciable.

(iv) $C^\infty(I;X)$ cuando sea infinitamente diferenciable.

De los resultados estudiados en la asignatura *Introduccción al análisis funcional* se conocen los siguientes resultados [40], siendo I el espacio topológico de partida.

Proposición 2.5.1. Dado X un espacio de Banach, se tiene que

(i) $B(I;X)$ es de Banach dotado de la norma $\| \ \|_\infty$.

(ii) $B(I;X) \cap C(I;X)$ es un espacio de Banach dotado de la norma $\| \ \|_\infty$.

(iii) cuando I es un intervalo acotado $B(I;X) \cap C(I;X) = C(I;X)$ y, por tanto, $C(I;X)$ es de Banach dotado de la norma $\| \ \|_\infty$.

(iv) cuando I es un intervalo acotado $C^k(I;X)$ es un espacio de Banach dotado de la norma

$$\|f\|_{C^k(I;X)} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + ... + \|f^{(k)}\|_\infty.$$

(v) $B(I;X) \cap C^k(I;X)$ es un espacio de Banach dotado de la norma $\|f\|_{C^k(I;X)}$.

Espacios de funciones Hölder continuas y Lipschitzianas

Definición 2.5.2. Sea $f : I \to X$, con X un espacio de Banach, e I un intervalo de $\mathbb{R}$. Se dirá que f es **Lipschitziana** si

$$[f]_{Lip(I;X)} = \sup_{t,s\in I,\, s<t} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{(t-s)} < \infty.$$

Se denominará $Lip(I;X)$ al espacio de todas las funciones Lipschitzianas definidas de I en X.

Definición 2.5.3. Sea $f : I \to X$, con X un espacio de Banach, e I un intervalo de $\mathbb{R}$. Dado $\alpha \in (0,1)$ se dirá que f es **Hölder continua** de índice α si

$$[f]_{C^\alpha(I;X)} = \sup_{t,s\in I,\, s<t} \frac{\|f(t) - f(s)\|}{(t-s)^\alpha} < \infty.$$

Se denominará $C^\alpha(I;X)$ al espacio de todas las funciones Hölder continuas de índice α definidas de I en X.

También se pueden definir espacios de funciones Hölder continuas con mayor regularidad, se trata, en definitiva, de funciones en las que se aplica la condición Hölder sobre la derivada k-ésima. A partir de las definiciones se observa que si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ y $C^\beta(I;X) \subset C^\alpha(I;X)$. En particular las funciones Lipschtizianas son Hölder continuas para cualquier índice entre 0 y 1.

Definición 2.5.4. Sea $f : I \to X$, con X un espacio de Banach e I un intervalo de $\mathbb{R}$. Dado $\alpha \in (0,1)$ se dirá que f es **Hölder continua** de índice $k+\alpha$ con $k \in \mathbb{N}$ si f es k veces continuamente diferenciable, con derivada k-ésima acotada y además $[f^{(k)}]_{C^\alpha(I;X)} < \infty$. Se denominará $C^{k+\alpha}(I;X)$ al espacio de todas las funciones Hölder continuas de índice $k+\alpha$ definidas de I en X.

Cuando no haya peligro de confusión posible se suprimirán I o ambos I y X en la notación de los espacios previamente definidos. Análogamente a como se ha definido el espacio de funciones k veces continuamente derivables y de derivada k-ésima Hölder continua se podría definir el de funciones k veces continuamente derivables y de derivada k-ésima Lipschtziana.

Teorema 2.5.1. Las funciones Hölder continuas y las funciones Lipschitzianas son funciones uniformemente continuas. Si I es un intervalo cerrado y acotado entonces el espacio $Lip(I;X)$ dotado con la norma

$$\|f\|_{Lip(I;X)} = \|f\|_\infty + [f]_{Lip(I;X)}$$

es un espacio de Banach, el espacio $C^\alpha(I;X)$ dotado con la norma

$$\|f\|_{C^\alpha(I;X)} = \|f\|_\infty + [f]_{C^\alpha(I;X)}$$

es un espacio de Banach y el espacio $C^{k+\alpha}(I;X)$ dotado con la norma

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(I;X)} = \|f\|_{C^k(I;X)} + [f^{(k)}]_{C^\alpha(I;X)}$$

es un espacio de Banach.

Demostración. En primer lugar, nótese que dados $t, s \in I$, $s < t$

$$\|f(t) - f(s)\| \leq [f]_{C^\alpha(I;X)}(t-s)^\alpha, \qquad \|f(t) - f(s)\| \leq [f]_{Lip(I;X)}(t-s),$$

y, por tanto, las funciones Hölder continuas y las Lipschitzianas son, de hecho, uniformemente continuas. A continuación, se verá que las aplicaciones definidas son normas. Para ello,

$$\begin{aligned}
[f+g]_{C^\alpha(I;X)} &= \sup_{t,s\in I,\, s<t} \frac{\|f(t)-f(s)+g(t)-g(s)\|}{(t-s)^\alpha} \\
&\leq \sup_{t,s\in I,\, s<t} \frac{\|f(t)-f(s)\|}{(t-s)^\alpha} + \sup_{t,s\in I,\, s<t} \frac{\|g(t)-g(s)\|}{(t-s)^\alpha} \\
&= [f]_{C^\alpha(I;X)} + [g]_{C^\alpha(I;X)}.
\end{aligned}$$

Además, dado $\beta \in \mathbb{C}$ se tiene

$$[\beta f]_{C^\alpha(I;X)} = \sup_{t,s\in I,\, s<t} \frac{\|\beta f(t) - \beta f(s)\|}{(t-s)^\alpha} = |\beta| \sup_{t,s\in I,\, s<t} \frac{\|f(t)-f(s)\|}{(t-s)^\alpha} = |\beta|\, [f]_{C^\alpha(I;X)}.$$

Se sabe que $\|\ \|_\infty$ y $\|\ \|_{C^k(I;X)}$ son normas en los espacios adecuados. Por tanto, se acaba de ver que $\|\ \|_{C^\alpha(I;X)}$ y $\|\ \|_{C^{k+\alpha}(I;X)}$ cumplen la desigualdad triangular y la regla de multiplicación por escalares. Además, si $\|f\|_{C^\alpha(I;X)} = 0$ ó $\|f\|_{C^{k+\alpha}(I;X)} = 0$, entonces $\|f\|_\infty = 0$ ó $\|f\|_{C^k(I;X)} = 0$ (respectivamente) y, por tanto, $f \equiv 0$. En consecuencia, $\|\ \|_{C^\alpha(I;X)}$ y $\|\ \|_{C^{k+\alpha}(I;X)}$ son normas.

Con el mismo razonamiento haciendo $\alpha = 1$ se tiene para las funciones Lipschitzianas.

Se verá ahora que bajo estas normas los espacios son completos. Basta hacerlo para el espacio $C^{k+\alpha}(I;X)$, pues $C^{\alpha}(I;X)$ es el mismo con $k = 0$ y $Lip(I;X)$ con $\alpha = 1$, y la separación de casos no afecta a la demostración.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $C^{k+\alpha}(I;X)$. Se quiere ver que esta sucesión converge hacia un elemento del mismo espacio en su norma. Por la Proposición 2.5.1, teniendo en cuenta la completitud de $C^k(I;X)$ existe un $f \in C^k(I;X)$ tal que $f_n \to f$ en norma $\| \ \|_{C^k(I;X)}$. Se va a ver que $f_n \to f$ en norma de $C^{k+\alpha}(I;X)$. Basta comprobar la convergencia $[f_n^{(k)} - f^{(k)}]_{C^{\alpha}(I;X)} \to 0$, ya que la convergencia del resto de términos que componen la norma Hölder ya se tiene.

$$\frac{\left\|(f_n^{(k)} - f^{(k)})(t) - (f_n^{(k)} - f^{(k)})(s)\right\|}{(t-s)^{\alpha}}$$

$$= \frac{\left\|(f_n^{(k)} - f_m^{(k)})(t) + (f_m^{(k)} - f^{(k)})(t) - (f_m^{(k)} - f^{(k)})(s) - (f_n^{(k)} - f_m^{(k)})(s)\right\|}{(t-s)^{\alpha}}$$

$$\leq [f_n^{(k)} - f_m^{(k)}]_{C^{\alpha}(I;X)} + 2\frac{\left\|f_m^{(k)} - f^{(k)}\right\|_{\infty}}{(t-s)^{\alpha}}.$$

Por tanto, se puede tomar el límite en $m \to \infty$ en la expresión anterior. Como $\left\|f_m^{(k)} - f^{(k)}\right\|_{\infty} \to 0$ se tiene que para cualesquiera $t, s \in I$ con $t > s$

$$\frac{\left\|(f_n^{(k)} - f^{(k)})(t) - (f_n^{(k)} - f^{(k)})(s)\right\|}{(t-s)^{\alpha}} \leq \lim_{m\to\infty} [f_n^{(k)} - f_m^{(k)}]_{C^{\alpha}(I;X)}.$$

Al ser f_n de Cauchy en norma Hölder se tiene que dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ se tiene que $[f_n^{(k)} - f_m^{(k)}]_{C^{\alpha}(I;X)} < \epsilon$. Por tanto, para $n \geq N$ se tiene que

$$\frac{\left\|(f_n^{(k)} - f^{(k)})(t) - (f_n^{(k)} - f^{(k)})(s)\right\|}{(t-s)^{\alpha}} \leq \epsilon.$$

Luego $[f_n^{(k)} - f^{(k)}]_{C^{\alpha}(I;X)} \to 0$ y por tanto lo hace también en norma Hölder. Queda ver ahora que efectivamente se tiene $f \in C^{k+\alpha}(I;X)$. Para ello se usa lo que se acaba de probar. Tomando $\epsilon = 1$, para $n \geq N$ se tiene, aplicando la desigualdad triangular inversa,

$$\frac{\left\|f^{(k)}(t) - f^{(k)}(s)\right\|}{(t-s)^{\alpha}} - \frac{\left\|f_n^{(k)}(t) - f_n^{(k)}(s)\right\|}{(t-s)^{\alpha}} \leq \frac{\left\|(f_n^{(k)} - f^{(k)})(t) - (f_n^{(k)} - f^{(k)})(s)\right\|}{(t-s)^{\alpha}} \leq 1.$$

Por tanto

$$[f^{(k)}]_{C^{\alpha}(I;X)} = \frac{\left\|f^{(k)}(t) - f^{(k)}(s)\right\|}{(t-s)^{\alpha}} \leq 1 + \frac{\left\|f_n^{(k)}(t) - f_n^{(k)}(s)\right\|}{(t-s)^{\alpha}} = 1 + [f_n^{(k)}]_{C^{\alpha}(I;X)} < \infty,$$

luego $f \in C^{k+\alpha}(I;X)$, ya que por definición ya pertenecía a $C^k(I;X)$. En conclusión, los espacios de Hölder y los espacios de funciones Lipschitzianas son espacios de Banach cuando I es un intervalo cerrado y acotado. $\square$

Espacios de Sobolev

Los contenidos de esta sección se han extraído esencialmente del capítulo de resultados preliminares de [38], ya que el resumen que aporta sobre espacios de Sobolev se ha considerado adecuado para las necesidades de este trabajo. Otras referencias utilizadas en la elaboración de esta sección y en la adquisición de conocimientos relativos a espacios de Sobolev han sido [30, 33]. Se denota por $C_c^\infty(\Omega)$ al conjunto de funciones con soporte, $\overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$, compacto contenido en Ω e infinitamente diferenciables.

Definición 2.5.5. Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una función localmente integrable $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, si existe una función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ que verifica que para toda función test $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ se verifica que

$$\int_\Omega f \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega g\phi\, d\mathbf{x},$$

entonces se dice que g es una **derivada generalizada** o **derivada débil** de f en Ω con respecto a x_j. Se denotará como $g = D_j f$.

Más en general, dado un multíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ entonces si para cada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega f D^\alpha \phi\, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega h\phi\, d\mathbf{x},$$

se dirá que h es una **derivada generalizada** o **débil** α-ésima de f en Ω. Se denotará como $h = D^\alpha f$. (Se está utilizando la notación de multíndices de la Definición A.4.1).

Además, dadas dos funciones g_1, $g_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ que sean derivadas generalizadas α-ésimas de $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, entones $g_1 = g_2$ en casi todo punto. Para comprobarlo basta tomar una función test $\phi \in C_c^\infty$ y escribir

$$\int_\Omega (g_1 - g_2)\phi\, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (f - f) D^\alpha \phi\, d\mathbf{x} = 0,$$

por lo que $g_1 = g_2$ en casi todo punto. Para más detalle [41]. Esto garantiza que se puede hacer la siguiente definición sin ambigüedad.

Definición 2.5.6. Dados $m \in [1, \infty]$ y un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se definirá el **espacio de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$ como el espacio vectorial siguiente

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) :\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ con } |\alpha| \leq m\ ,\ D^\alpha u \in L_p(\Omega)\right\}.$$

Proposición 2.5.2. El espacio de Sobolev es un espacio normado al ser dotado de la norma siguiente,

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

De hecho, se trata de un espacio de Banach, y es reflexivo para $1 < p < \infty$. Además si $p = 2$ se trata de un espacio de Hilbert dotado del producto interno

$$\langle u, v \rangle_{m,2} = \int \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u)(\overline{D^\alpha v})\, d\mathbf{x}.$$

A continuación, se presenta un resultado típico de inclusiones continuas y compactas entre espacios de Sobolev y espacios L^p. Este resultado no va a ser utilizado en el desarrollo posterior, pero se presenta aquí para contextualizar que es el trabajo a partir de este tipo de resultados el que permite establecer las cotas a priori sobre las soluciones que garantizan que los operadores elípticos generan semigrupos analíticos.

Teorema 2.5.2. Dado Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera Lipschitz, y supóngase $p \in [1, \infty)$ y $k \in \mathbb{N}$.

(i) Si $kp < n$ y $s \in [p, np/(n-kp)]$ entonces

$$W^{p,k}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega),$$

donde $\hookrightarrow$ indica inclusión continua y, además, la inclusión es compacta en el caso de que $s \in [p, np/(n-kp))$.

(ii) Dado $k \in \mathbb{N}$ y $p \in (1, \infty)$, entonces para cualquier $q \in [1, p)$ se tiene que $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,q}(\Omega)$ con inclusión compacta.

Espacios de funciones variación acotada

A la hora de definir la integral de Riemann-Stieljes, ha surgido la necesidad de introducir un espacio de funciones que reuniera las mínimas propiedades para poder definir una integral lineal y continua. Estos espacios son los espacios de funciones de variación acotada. Esta sección se limitará a hacer algún comentario al respecto, a título informativo.

En la Sección 2.3 se han introducido espacios de funciones de variación acotada, y su introducción quedará especialmente justificada en virtud de la Sección 4.4.1. Se puede comprobar que estos espacios son, de hecho, espacios de Banach cuando se definen sobre dominios acotados y son dotados de la norma consistente en la suma del valor en el extremo izquierdo del intervalo y la variación total en él. Sin embargo, en la sección antes mencionada es necesario introducirlos sobre el intervalo no acotado $[0, \infty)$. Esto los desprovee de estructura de espacio de Banach y se hace necesario introducir una nueva estructura algo más débil que permita trabajar con ellos cómodamente. Se trata de los espacios de Fréchet o F-espacios. Las pruebas de los resultados que se enuncian a continuación se pueden encontrar en [37, 44]. Se hace necesario introducir el concepto de seminorma, que ya ha sido mencionado antes, en la Sección 2.3.

Definición 2.5.7. Dado un espacio vectorial X, una aplicación $p : X \to [0, \infty)$ se denomina **seminorma** cuando verifica, con α perteneciendo al cuerpo de escalares de X,

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \qquad p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x).$$

Proposición 2.5.3. Sea $\{p_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una familia de seminormas que verifica que para todo $x \in X \setminus \{0\}$ existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $p_{\gamma_0}(x) \neq 0$. Dados cualquier subconjunto finito de seminormas $p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2}, \ldots, p_{\gamma_n}$, con $\gamma_i \in \Gamma$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$; y cualquier conjunto de números positivos $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ se define el conjunto

$$U = \left\{ x \in X \,:\, p_{\gamma_j}(x) \leq \epsilon_j \text{ para todo } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \right\},$$

y sus desplazados

$$x_0 + U = \{ y \in X \,:\, y = x_0 + u \text{ con } u \in U \}.$$

Si se consideran los conjuntos anteriores como familias de entornos de cada punto de X, estos dan lugar a una topología en X, que, además, hace que la suma vectorial, el producto por escalares y cada una de las seminormas sea continua.

Definición 2.5.8. Un espacio vectorial dotado de una familia de seminormas es denominado **espacio de Fréchet** o **F-espacio** si la topología asociada a la familia de seminormas es metrizable y, además, hace completo a dicho espacio, es decir, en ella toda sucesión de Cauchy es convergente.

En [37] se presenta que en este tipo de espacios siguen siendo válidos resultados como el Teorema de Banach-Steinhaus o el Teorema de la aplicación abierta. Esto proporciona herramientas para que se puedan manejar con comodidad.

2.6. Espacios de interpolación

Aunque los espacios de interpolación no se utilizan en los capítulos del presente trabajo, se aprovecha aquí para introducirlos debido a la importancia que revisten en el posterior desarrollo de la teoría para ecuaciones abstractas parabólicas semilineales y casilineales. En esos problemas, las condiciones de regularidad que han de pedirse al dato no homogéneo vienen expresadas en función de estos espacios. También se utilizan para plantear resultados análogos a los que se obtienen en este trabajo, pero en el caso en el que se prescinde de la hipótesis de que el dominio del operador sea denso.

Siguiendo las líneas de [17, 43] se tiene que, dados X, Y, D espacios de Banach, con $D \hookrightarrow X$ (se denota $\hookrightarrow$ a la inclusión continua), se dice que Y es un **espacio intermedio** entre D y X si

$$D \hookrightarrow Y \hookrightarrow X.$$

Además, si para cada $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $T|_D \in \mathcal{L}(D)$ se tiene $T|_Y \in \mathcal{L}(Y)$, se dice que Y es un **espacio de interpolación** entre D y X. Este mismo concepto se puede definir también para operadores entre parejas de espacios de Banach distintos si fuera necesario. De entre todos estos espacios es de especial importancia la clase J_α, con $0 \leq \alpha \leq 1$, de espacios entre X y D, que son los espacios intermedios Y para los que existe $c > 0$ tal que para todo $x \in D$ se verifica

$$\|x\|_Y \leq c \|x\|_D^\alpha \|x\|_X^{1-\alpha}.$$

Estos podrán ser llamados, en ciertas ocasiones, espacios de interpolación de índice α. La construcción de estos espacios puede llevarse a cabo de diversas formas, que se pueden encontrar en la bibliografía citada al principio de la sección. Los espacios así construidos son habitualmente espacios de Banach (ver [17] para el K-método).

En [43] pueden encontrarse un gran abanico de propiedades de interpolación entre distintos espacios de funciones. A continuación, se destacan algunos de estos enunciados de forma informal y no rigurosa, a título informativo. Por ejemplo, se indica sin concretar para todos los ejemplos posteriores, salvo en el teorema de Riesz-Thorin, que si el dominio de los espacios de funciones presentados no es todo $\mathbb{R}^n$ hace falta además pedir regularidad a la frontera, del mismo orden que el espacio más pequeño.

(i) El teorema de Riesz-Thorin fue el primer teorema de interpolación que fue publicado, y establece que dados $1 \leq p_0 \leq p_\theta \leq p_1 \leq \infty$ el espacio $L^{p_\theta}(\Omega)$ es un espacio de interpolación entre $L^{p_0}(\Omega)$ y $L^{p_1}(\Omega)$. Además, es de clase J_θ con índice $\theta = (p_0/p_\theta - 1)/(p_0/p_1 - 1)$.

(ii) Los espacios de funciones k veces continuamente diferenciables con $k \leq m$ son espacios de interpolación entre el espacio de funciones m veces continuamente diferenciables y el espacio de funciones continuas. (Y se mantiene si se restringe a espacios de funciones acotadas).

(iii) Los espacios de funciones Hölder continuas de índice θ son espacios de interpolación entre el espacio de funciones Hölder continuas de índice α con $0 < \theta < \alpha \leq 1$ y el espacio de funciones continuas.

(iv) Existen diversidad de relaciones concernientes a espacios de Sobolev (destáquese aquí que se pueden construir espacios de Sobolev en el que el segundo índice toma valores fraccionarios, y esto tiene especial interés al considerar las trazas de funciones en la frontera de dominios) que estipulan relaciones de interpolación entre ellos.

Capítulo 3

Semigrupos de operadores lineales

En este capítulo se enunciarán todos los resultados concernientes a teoría de semigrupos de operadores lineales que serán necesarios en el desarrollo de la teoría posterior. La fuente bibliográfica principal para este tema son los Capítulos 1 y 2 del libro [19] de A. Pazy. En [10] se puede encontrar una exposición más avanzada del tema.

3.1. Motivación

Para acabar resolviendo el problema abstracto lineal no autónomo, y después los semilineales y casilineales que se propusieron en la introducción, hay que seguir el orden lógico, es decir, atacar sucesivamente problemas de dificultad creciente. Por ello, en primer lugar, lo razonable es encarar el caso lineal autónomo, es decir, siendo el operador lineal independiente del tiempo, y homogéneo, esto es, sin término f en lado derecho de la ecuación diferencial.

Sean $T > 0$ una constante, X un espacio de Banach, $A : D(A) \to X$, con $D(A)$ denso en X, un operador lineal cerrado, y $u_0 \in X$. El problema a resolver se va a poder escribir como

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0, & \text{para } 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde se ha tomado la condición inicial en el 0, pero esto es indiferente por una traslación temporal. Para intuir las líneas de resolución de este problema, hay que ir al caso más sencillo que se pueda pensar, el cual ya ha sido resuelto en la asignatura de *Ecuaciones Diferenciales* del Grado en Matemáticas. Se trata del caso en el que $D(A) = X = \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. En este caso, el operador A es una matriz de dimensión $n \times n$, estando, por tanto, ante un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La solución en este supuesto es bien conocida, y es de la forma $u(t) = e^{-tA}u_0$, donde e^{-tA} es la exponencial de la matriz A, definida por la habitual serie exponencial

$$e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-tA)^k}{k!},$$

que es convergente para todo $t \in \mathbb{R}$. De igual manera, es razonable pensar que la solución al problema abstracto que se ha presentado antes conservará algunas de las características fundamentales de la exponencial. Esto es lo que motiva el desarrollo del concepto de semigrupos de operadores: la Definición 3.2.1 trata de transportar algunas de las propiedades de la exponencial al problema más general.

3.2. Definiciones generales

En la línea dada por la motivación anterior, si se quiere construir $T(t) : X \to X$ como el operador que manda la condición inicial en la solución a tiempo $t > 0$ del problema abstracto (3.1), a este se le van a requerir de forma natural las dos propiedades que va a proponer la siguiente definición: que la solución a tiempo 0 sea la condición inicial y que si se evoluciona la condición inicial durante un tiempo t y después se evolucione un tiempo s, con condición inicial la solución a tiempo t del problema anterior, se obtenga la misma solución que evolucionando la condición inicial x durante un tiempo $t + s$.

Definición 3.2.1. Dado X un espacio de Banach, se dirá que una familia paramétrica $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ con $t \in [0, \infty)$ de operadores lineales y continuos forma un **semigrupo de operadores lineales y continuos** si verifican las dos condiciones siguientes:

(I) $T(0) = I$.

(II) $T(t + s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

El nombre de semigrupo de operadores lineales y continuos proviene precisamente de la definición de semigrupo como estructura algebraica dotada de una operación binaria asociativa, que en este caso es la operación propia del álgebra de Banach de operadores: la composición de operadores, y cuya asociatividad viene precisamente de la propiedad $T(t + s) = T(t)T(s)$ (que se denominará de ahora en adelante *propiedad de semigrupo*) para todo $t, s, r \geq 0$: $T(t + s)T(r) = T(t)T(s + r)$. Puede llamar la atención que sean denominados semigrupos de operadores lineales y continuos cuando, de hecho, gozan de la propiedad de tener elemento unidad $T(0) = I$, propiedad con la cual están dotados de una estructura algebraica de mayor entidad, un monoide. Cabe pensar entonces que la literatura ha querido denominarlos así en lugar de *monoides de operadores lineales y continuos* para enfatizar la segunda propiedad en detrimento de la primera, quedando el interés sobre el valor de $T(t)$ en $t = 0$ relegado a las propiedades de continuidad que se estudiarán un poco más adelante. También se puede deber a que la nomenclatura no es homogénea en todos los textos y se den los nombres de otra manera a estas mismas estructuras.

Definición 3.2.2. Dado un semigrupo de operadores lineales y continuos $T(t)$, el operador lineal A definido en el dominio

$$D(A) = \left\{ x \in X \ : \ \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

por la expresión

$$A = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0},$$

se llama **generador infinitesimal** del semigrupo $T(t)$.

Obsérvese que en los límites que aparecerán en las próximas páginas será muy importante el subespacio a través del cual se hace el límite. Téngase en cuenta que en el 0 sólo existe la posibilidad de tomar límites por la derecha. Por otra parte, de ahora en adelante se abreviará en numerosas ocasiones semigrupo de operadores lineales y continuos por semigrupo.

3.3. Semigrupos uniformemente continuos

Definición 3.3.1. Se dirá que un semigrupo de operadores lineales y continuos $T(t)$ es **uniformemente continuo** si

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

El interés en los semigrupos uniformemente continuos en este trabajo es limitado, ya que los semigrupos que dan forma a los operadores diferenciales correspondientes a ecuaciones parabólicas son los llamados semigrupos analíticos, los cuales no son uniformemente continuos. Sin embargo, la caracterización de los uniformemente continuos, así como de los fuertemente continuos, que se presentarán a continuación, arrojarán luz sobre los semigrupos analíticos.

De la definición anterior, se desprende inmediatamente que $T(t)$ es continuo en $\mathcal{L}(X)$:

$$\lim_{s\to t^+} \|T(s) - T(t)\| = \lim_{s\to t^+} \|T(s-t)T(t) - T(t)\| \leq \|T(t)\| \lim_{s\to t^+} \|T(s-t) - I\| = 0,$$

$$\lim_{s\to t^-} \|T(s) - T(t)\| = \lim_{s\to t^-} \|T(s) - T(s)T(t-s)\| \leq \|T(t)\| \lim_{s\to t^-} \|T(t-s) - I\| = 0.$$

De esta forma

$$\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\| = 0. \tag{3.2}$$

Dada la definición del semigrupo, es reseñable el procedimiento de separar el límite por uno y otro lado, que sólo está definido para argumentos positivos. Esto aparecerá en algunas de las demostraciones que aparecerán a continuación, y será abreviado notablemente. Cabe destacar que también existe el concepto de grupo de operadores lineales y continuos, cuyas propiedades se pueden encontrar en la Sección 1.6. de [19], el cual está definido por ambos lados del 0 (y en los cuales por tanto esta separación es innecesaria), pero que no será tratado porque no se aplica en el desarrollo posterior de este trabajo.

Teorema 3.3.1. Un operador lineal A es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo si y solo si A es un operador lineal y continuo.

Demostración. Sea A un operador lineal y continuo en X, un espacio de Banach. Se probará en primer lugar que A es generador de un semigrupo uniformemente continuo. Se considera la serie

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

la cual es una serie convergente porque

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^n}{n!} = e^{t\|A\|} < \infty, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dados x, $y \in X$, la linealidad $e^{tA}(x+y) = e^{tA}x + e^{tA}y$ es evidente. Por tanto, se tiene que $T(t)$ es un operador lineal y continuo para todo $t \in [0, \infty)$. Además $T(0) = I$. Con la siguiente cadena de igualdades se va a comprobar la propiedad de semigrupo.

$$T(t+s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big((t+s)A\big)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k s^{n-k} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} t^j \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} s^l = T(t)T(s),$$

donde la penúltima igualdad es de naturaleza combinatoria, al recontar las formas de obtener cada uno de los términos en el producto de las series del término derecho. Finalmente, se va a comprobar que el semigrupo es uniformemente continuo, y que A es su generador infinitesimal. Para ello se considera

$$\|T(t)-I\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t\,\|A\|)^n}{n!} \leq t\,\|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t\,\|A\|)^{n-1}}{(n-1)!} = t\,\|A\|\, e^{t\|A\|},$$

luego el semigrupo es uniformemente continuo. Además,

$$\left\| \frac{T(t)-I}{t} - A \right\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}A^n}{n!} \right\| \leq \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t\,\|A\|)^n}{(n+1)!} \leq t\,\|A\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t\,\|A\|)^{n-1}}{(n-1)!} = t\,\|A\|^2\, e^{t\|A\|},$$

luego $\left\| \frac{T(t)-I}{t} - A \right\| \xrightarrow{t\to 0^+} 0$. Por tanto, está probada la primera de las implicaciones.

Para la segunda, se quiere probar que el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo es lineal y continuo. Para ello se hace uso del Lema 2.4.1. En particular, como en (3.2) se ha visto la continuidad en norma de $T(t)$, se tiene que

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} T(s)\,ds = T(0) = I,$$

y, por tanto, existe $\rho > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $\left\| I - \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} T(s)ds \right\| < 1$. Haciendo uso del ya mencionado Lema 2.4.1 se tiene que $\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} T(s)\,ds$ es un operador invertible, y, por tanto, $\int_0^{\rho} T(s)\,ds$ es invertible. De aquí que

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h} \int_0^{\rho} T(s)\,ds &= \frac{1}{h}\left(\int_0^{\rho} T(s+h)\,ds - \int_0^{\rho} T(s)\,ds \right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{\rho}^{\rho+h} T(s)\,ds - \int_0^{h} T(s)\,ds \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{T(h)-I}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\rho}^{\rho+h} T(s)\,ds - \int_0^{h} T(s)\,ds \right) \left(\int_0^{\rho} T(s)\,ds \right)^{-1}.$$

Haciendo tender $h \to 0^+$ en la expresión anterior se obtiene que $\frac{T(h)-I}{h}$ converge en norma, y, por tanto, lo hace también fuertemente al operador $(T(\rho)-I)(\int_0^{\rho} T(s)ds)^{-1}$, que es evidentemente lineal por construcción y continuo por ser composición de dos operadores continuos. Se ha obtenido el generador infinitesimal, y es lineal y continuo. □

El siguiente resultado muestra que si dos semigrupos uniformemente continuos tienen el mismo generador infinitesimal son, de hecho, el mismo semigrupo. Esta propiedad de unicidad será suficiente para la caracterización de los semigrupos uniformemente continuos en el Corolario 3.3.1.

Teorema 3.3.2. Sean $T(t)$ y $S(t)$ dos semigrupos uniformemente continuos de operadores lineales. Si

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)-I}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)-I}{t},$$

entonces $T(t) = S(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demostración. Se probará que dado $T > 0$, se tiene que $S(t) = T(t)$ para $0 \leq t \leq T$. Como para $T > 0$ fijo las aplicaciones $t \to \|T(t)\|$ y $s \to \|S(s)\|$ son continuas en $[0, T]$, existe una constante $C > 0$ tal que $\|T(t)\| \, \|S(s)\| \leq C$ para $0 \leq s, t \leq T$. Además, por la condición del enunciado, al pasar restando el lado derecho y juntar los límites, dado $\epsilon > 0$ se tiene que existe $\delta > 0$ tal que $h^{-1} \|T(h) - S(h)\| < \epsilon / TC$ para $h \in [0, \delta]$.

Dado entonces $0 \leq t \leq T$, se escoge $n \in \mathbb{N}$ tal que $t/n \leq T/n < \delta$. Utilizando las propiedades de semigrupo se puede escribir la siguiente cadena telescópica de desigualdades que prueban el enunciado,

$$\begin{aligned}
&\|T(t) - S(t)\| \\
&\quad = \left\| T\left(n\frac{t}{n}\right) S(0) - T\left((n-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) \right. \\
&\qquad\qquad + T\left((n-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) - T\left((n-2)\frac{t}{n}\right) S\left(2\frac{t}{n}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \left. + T\left((n-2)\frac{t}{n}\right) S\left(2\frac{t}{n}\right) + \cdots - T(0) S\left(n\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\quad \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left((k+1)\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right) S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\quad \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \left\| S\left(k\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&\quad \leq nC \frac{\epsilon}{TC} \frac{t}{n} \\
&\quad \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene $S(t) = T(t)$ para $0 \leq t \leq T$. □

La demostración de estos dos teoremas nos proporciona la caracterización del generador infinitesimal de los operadores lineales y continuos como la exponencial e^{tA}, la cual queda reflejada en el siguiente corolario.

Corolario 3.3.1. Sea $T(t)$ un semigrupo uniformemente continuo de operadores lineales y continuos, entonces

(I) existe una constante $\omega \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$,

(II) existe un único operador lineal y continuo A tal que $T(t) = e^{tA}$,

(III) el operador A anterior es, de hecho, el generador infinitesimal de $T(t)$,

(IV) $t \to T(t)$ es diferenciable en norma y

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Demostración. Se comienza por probar (II), ya que los otros apartados se deducen inmediatamente de él. Dado $T(t)$, por el Teorema 3.3.1 se tiene que A, su generador infinitesimal, es un operador lineal y continuo, pero, por la demostración del mismo teorema, es también generador infinitesimal del semigrupo e^{tA} y, por tanto, por el Teorema 3.3.2 se tiene que $T(t) = e^{tA}$. Esto prueba también (III).

Para probar (I), tomando $\omega = \|A\| > 0$ se tiene

$$\|T(t)\| = \left\|e^{tA}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\,\|A\|)^n}{n!} = e^{t\|A\|} = e^{\omega t}.$$

Procediendo como previamente (se usan las cotas ya obtenidas en la demostración del Teorema 3.3.1) se obtiene (IV),

$$\left\|\frac{T(t+h)-T(t)}{h} - T(t)A\right\| \leq \|T(t)\| \left\|\frac{T(h)-I}{h} - A\right\| \leq h\,\|T(t)\|\,\|A\|^2\, e^{h\|A\|} \xrightarrow{h\to 0^+} 0.$$

La segunda igualdad de (IV) se obtiene al observar que A y $T(t)$ han de conmutar debido a la expresión de $T(t)$ como exponencial en potencias de A. □

3.4. Semigrupos fuertemente continuos

Definición 3.4.1. Dado X un espacio de Banach y $T(t)$ un semigrupo de operadores de $\mathcal{L}(X)$, se dice que $T(t)$ es un **semigrupo fuertemente continuo** de operadores lineales y continuos si

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \qquad \forall x \in X.$$

Se denominará C_0 a la clase de semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales y continuos.

Esta condición es más débil que la de semigrupo uniformemente continuo dado que se tiene $\|T(t)x - x\| = \|(T(t)-I)x\| \leq \|T(t)-I\|\,\|x\|$. Así como para los semigrupos uniformemente continuos se había obtenido una cota para su norma por $e^{\omega t}$, aquí se obtendrá una cota más débil, la exponencial multiplicada por una constante positiva $M \geq 1$.

Teorema 3.4.1. Dado $T(t)$ un semigrupo C_0 existen constantes $\omega \geq 0$ y $M \geq 1$ tales que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ para $t \in [0,\infty)$.

Demostración. Para efectuar la demostración se busca, en primer lugar, una cota para un intervalo finito y, después, se reduce el problema entero a la cota hallada inicialmente. Para ello, se demostrará que existe una constante $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ esté acotado para $t \in [0,\eta]$. Se procede por reducción al absurdo: si eso no es cierto existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de reales positivos tales que $t_n \to 0$ pero, sin embargo, $\|T(t_n)\| \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Banach-Steinhaus, se tiene que existe $x \in X$ tal que se verifica que $\|T(t_n)x\|$ es no acotado, lo cual contradice la pertenencia a la clase C_0 del semigrupo.

Por lo tanto, se tiene que $\|T(t)\| \leq M$ para $t \in [0,\eta]$. Además, como $\|T(0)\| = 1$ se verifica que $M \geq 1$. Finalmente, se relaciona el problema global con la acotación que se ha obtenido en el intervalo $[0,\eta]$. Con ese fin, se considera, dado $t \geq 0$ arbitrario, que se puede escribir

$t = n\eta + \delta$, efectuando una división, siendo $n \in \mathbb{N}$ y $\delta \in [0, \eta)$. De aquí que al aplicar la propiedad de semigrupo se tenga

$$\|T(t)\| = \|T(n\eta + \delta)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq \|T(\delta)\| \, \|T(\eta)\|^n \leq M^{n+1} = MM^{(t-\delta)/\eta}.$$

Ahora bien, como $M \geq 1$, entonces $M^{(t-\delta)/\eta} \leq M^{t/\eta}$. Por tanto, basta escoger adecuadamente $\omega = \eta^{-1} \log M \geq 0$ para obtener la cota $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, como se pretendía. □

Corolario 3.4.1. Dado un semigrupo de clase C_0, $T(t)$, para cada $x \in X$ se tiene que $t \to T(t)x$ es función continua de $[0, \infty)$ en X.

Demostración. En este caso, de forma análoga a cuando se presentó la continuidad de los semigrupos uniformemente continuos, es necesario trabajar por ambos lados del punto de continuidad debido a que el argumento del semigrupo nunca puede ser negativo. Por ello, dados $0 < h \leq t$, se tiene

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\| \, \|T(h)x - x\| \leq Me^{\omega t} \, \|T(h)x - x\| \xrightarrow{h \to 0^+} 0,$$

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \|T(t-h)\| \, \|x - T(h)x\| \leq Me^{\omega(t-h)} \, \|x - T(h)x\| \xrightarrow{h \to 0^+} 0.$$

Por lo tanto, queda probada la continuidad por ambos lados. □

Teorema 3.4.2. Sea $T(t)$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal. Entonces

(i) dado $x \in X$,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x,$$

(ii) para $x \in X$, se tiene

$$\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A), \qquad A\left(\int_0^t T(s)x \, ds\right) = T(t)x - x,$$

(iii) para $x \in D(A)$, se tiene

$$T(t)x \in D(A), \qquad \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

(iv) para $x \in D(A)$, se tiene

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax \, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x \, d\tau.$$

Demostración. (i) Se tiene por la continuidad de $T(s)x$ dada por el Corolario 3.4.1.

(ii) Dados $x \in X$ y $h > 0$, se escribe la expresión del generador infinitesimal antes de tomar el límite y se opera con las propiedades de los semigrupos para luego tomar el límite.

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x \, ds &= \frac{1}{h} \int_0^t \big(T(s+h)x - T(s)x\big) \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x \, ds. \end{aligned}$$

De nuevo, por la continuidad de $T(s)x$, se tiene que al hacer $h \to 0^+$ el lado derecho de la ecuación tiende hacia $T(t)x - x$, luego $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ y $A \int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x$.

(III) Se procede de forma análoga, dados $x \in D(A)$ y $h > 0$,

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x,$$

donde al hacer $h \to 0^+$ se tiene que el lado derecho tiende hacia $T(t)Ax$ y el izquierdo hacia $AT(t)x$. De esta forma, $T(t)x \in D(A)$ y, además, $AT(t)x = T(t)Ax$. Para probar la igualdad con la derivada se necesita comprobarla para las derivadas por la derecha y por la izquierda (en el caso de $t \neq 0$ únicamente).

$$\frac{d^+T(t)x}{dt} = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = AT(t)x.$$

Para $t \neq 0$ se comprueba la derivada lateral por la izquierda, teniendo en cuenta que dado $h > 0$ suficientemente pequeño, $t - h > 0$, para poder aplicar la propiedad de semigrupo.

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right\| \\ &\qquad = \left\|T(t-h)\left(\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right) + \big(T(t-h)Ax - T(t)Ax\big)\right\| \\ &\qquad \leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| + \left\|\big(T(t-h) - T(t)\big)Ax\right\|. \end{aligned}$$

Como los dos sumandos de la última desigualdad tienden a 0 cuando $h \to 0^+$, se tiene lo que se pretendía.

(IV) Se tiene por aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo al apartado anterior, siendo $T(\tau)Ax$ función continua de τ.

□

Corolario 3.4.2. Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo $T(t)$ de clase C_0, entonces $D(A)$ es denso en X y A es un operador lineal cerrado.

Demostración. Se probará en primer lugar la aserción sobre densidad. Dado $x \in X$, si para $t > 0$ se define $x_t = t^{-1}\int_0^t T(s)x\,ds$, se tiene que por la parte (II) del Teorema 3.4.2, $x_t \in D(A)$ para todo $t > 0$ y, además, por la parte (I), $x_t \to x$ cuando $t \to 0^+$. De aquí que $D(A)$ sea denso en X, ya que se ha encontrado una sucesión de elementos de $D(A)$ que converge a un $x \in X$ arbitrario. La linealidad de A es manifiesta por su definición.

Para probar entonces que es un operador cerrado se considera una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $D(A)$ tales que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$. Por la parte (IV) del Teorema 3.4.2 se tiene

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\,ds.$$

Ahora bien, como $T(s)Ax_n$ es función continua del parámetro s y, además, $Ax_n \to y$ en norma, se tiene que $T(s)Ax_n$ converge uniformemente a $T(s)y$ en los compactos. Esto permite tomar límites en la expresión anterior e intercambiar el límite y la integral obteniendo

$$T(t)x - x = \lim_{n\to\infty}\big(T(t)x_n - x_n\big) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\,ds = \int_0^t T(s)y\,ds.$$

Dividiendo esta expresión entre $t > 0$, y haciendo $t \to 0^+$ se tiene

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y\, ds = y,$$

donde en la última igualdad se ha vuelto a aplicar la parte (I) del Teorema 3.4.2. Por tanto, se tiene que $x \in D(A)$ y que A es cerrado, como se quería ver. □

En particular, por el Teorema 2.4.2 se tiene que cuando A es generador infinitesimal de un semigrupo C_0, $\rho(A)$ es un conjunto abierto del plano complejo y que $R(\lambda : A)$ es una función holomorfa en λ.

Teorema 3.4.3. Dados $T(t)$ y $S(t)$ semigrupos C_0 de operadores lineales y continuos con generadores infinitesimales respectivos A y B, entonces si $A = B$ se tiene que $T(t) = S(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$.

Demostración. Dado $x \in D(A) = D(B)$, de la parte (III) del Teorema 3.4.2 se sigue que la función $s \to T(t-s)S(s)x$ es diferenciable, y se puede obtener su derivada aplicando la regla de la derivada del producto (composición). Aprovechando que cada semigrupo conmuta con su generador diferencial se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s) + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $s \to T(t-s)S(s)x$ es una función constante para cada $x \in D(A) = D(B)$, y, en particular, toma los mismos valores en $s = 0$ y $s = t$. De aquí que $T(t)x = S(t)x$ para cada $x \in D(A)$. Por la densidad de $D(A)$ en X dada por el Corolario 3.4.2, y dado que $T(t)$ y $S(t)$ son operadores lineales y continuos, se obtiene para todo $x \in X$. □

El siguiente paso que se da en el estudio de estos semigrupos es dar una caracterización unívoca en función de su resolvente, la cual va a ir cobrando mayor importancia a partir de ahora. El proceso, que está completamente descrito en [19], no se va a incluir en el trabajo ya que requiere de algunos resultados técnicos previos que no añaden ideas relevantes para el desarrollo posterior.

En concreto, el teorema se demuestra a partir del *Teorema de Hille-Yoshida*, el Teorema 3.5.1, que se presentará en la próxima sección, un teorema que presenta la caracterización de los semigrupos contractivos o semigrupos de contracciones de operadores lineales y continuos, que son aquellos semigrupos de clase C_0 que presentan $M = 1$ y $\omega = 0$ en la representación propia del Teorema 3.4.1.

El procedimiento para demostrar el siguiente Teorema 3.4.4 pasa por considerar una renormalización en el espacio de Banach que depende de la expresión de la resolvente, y que requiere de la hipótesis (II) del Teorema 3.4.4. Esta renormalización permite trabajar con semigrupos contractivos y aplicar el Teorema de Hille-Yoshida. A partir de ahí, se obtiene la caracterización para los uniformemente continuos y en base a ella la de los de clase C_0. Como ya se ha mencionado, este se puede encontrar en [19].

Teorema 3.4.4. Un operador lineal A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de operadores lineales y continuos satisfaciendo $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ si y solo si

(I) A es cerrado y $D(A)$ es denso en X.

(II) $M \geq 0$, el conjunto resolvente $\rho(A)$ contiene al rayo (ω, ∞) y

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \qquad \text{para } \lambda > \omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De la condición (II) se tiene además que para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ que verifique $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ y además

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}, \qquad \text{para } \mathrm{Re}\,\lambda > \omega, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.5. Resolvente y transformada de Laplace

El objetivo de esta sección es obtener una expresión para $R(\lambda : A)$, la resolvente del generador de cualquier semigrupo C_0, que se parezca a la transformada de Laplace e involucre a únicamente los operadores del semigrupo. Esta representación será fundamental para la posterior resolución de los problemas abstractos, por lo que ha de ponerse gran interés en ella.

Proposición 3.5.1. Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal, que es generador de un semigrupo $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ de clase C_0, y sea $x \in X$. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ verificando que $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$, siendo $\omega \geq 0$ la constante tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, se tiene que existe $R(\lambda : A)$ y viene dado por la expresión

$$R(\lambda : A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt.$$

Demostración. Se define el operador

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt,$$

el cual todavía no se sabe si se corresponde con la resolvente. Habrá que comprobarlo. En primer lugar, se verifica que está bien definido probando la convergencia de la integral que aparece en la expresión. Se tiene en cuenta que, por ser de clase C_0 el semigrupo, existen $M \geq 1$ y $\omega > 0$ tales que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, luego

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \right\| \leq \int_0^\infty e^{-t\mathrm{Re}\,\lambda} \|T(t)x\|\, dt \leq M\|x\| \int_0^\infty e^{(\omega - \mathrm{Re}\,\lambda)\, t}\, dt.$$

Por tanto, la expresión está definida siempre que $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$. En ese caso $R(\lambda)$ es un operador lineal y continuo.

Queda ahora comprobar que efectivamente se trata de un inverso de $(\lambda I - A)$. Para ello se opera como se ha hecho en las demostraciones anteriores: se multiplica por la definición del generador infinitesimal sin el límite, se opera y después se toma el límite. Dado $h > 0$, se tiene

$$\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x = \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \big(T(t+h)x - T(t)x\big)\, dt.$$

A continuación, en el primer sumando de la integral de la ecuación anterior, se hace el cambio de variable preceptivo, es decir, el desplazamiento por h, resultando en la expresión

$$\frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$$
$$= e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt.$$

Reagrupando ahora las integrales previas, separando la parte desde 0 a h y desde h a ∞, se puede escribir

$$\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)x\,dt.$$

Al hacer $h \to 0^+$ el primero de los sumandos tiende hacia $\lambda R(\lambda)x$ y el segundo sumando, por la continuidad de $-e^{-\lambda t}T(t)x$, tiende hacia el valor del integrando evaluado en 0, que es $-x$. De esta forma se tiene que, para todo $x \in X$, $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$, que se traduce en lo que se buscaba: $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$. A diferencia de la mayoría de demostraciones que se han presentado hasta ahora, la composición por la derecha no se sigue de un razonamiento estrictamente análogo. Para $x \in D(A)$ se tiene que, ya que $T(t)$ y A conmutan, por ser su generador infinitesimal,

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)x\,dt.$$

Para sacar el operador A fuera de la integral se necesita que A sea cerrado por el Teorema 2.3.4, pero eso es justamente lo que aporta el Corolario 3.4.2, ya que $T(t)$ es de clase C_0. Por tanto, se tiene $R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x$ para $x \in D(A)$, por lo que $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$ a partir de lo obtenido para la composición por la izquierda. Como $D(A)$ es denso en X, se tiene que efectivamente $R(\lambda)$ es el inverso de $(\lambda I - A)$, luego $R(\lambda) = R(\lambda : A)$, como se quería ver. □

La demostración que se acaba de presentar es el núcleo de la demostración del ya antes mencionado *Teorema de Hille-Yosida*, que presenta una caracterización de un tipo concreto de semigrupos de clase C_0, que son los semigrupos de contracciones, que se caracterizan por tener $M = 1$ y $\omega = 0$ según la caracterización que se había dado de los semigrupos C_0 en la Proposición 3.4.1.

Teorema 3.5.1. (Hille-Yosida). Un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ es generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $T(t)$, es decir, de clase C_0 y que presenta $M = 1$ y $\omega = 0$ según la caracterización del Teorema 3.4.1, $t \geq 0$ si y sólo si

(I) A es cerrado y $D(A)$ es denso en X,

(II) el conjunto resolvente $\rho(A)$ es cerrado, contiene a la semirrecta real positiva, y para cada $\lambda > 0$ se verifica

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Este tipo de semigrupos tienen gran relevancia en ciertas partes de la teoría abstracta de ecuaciones diferenciales, de hecho, este teorema sostiene algún otro teorema que se presentará sin demostración. Es de notar que los semigrupos uniformemente continuos son también semigrupos contractivos.

La Proposición 3.5.1 y el Corolario 3.4.2 prueban inmediatamente la necesidad de las condiciones en el Teorema 3.5.1. Para probar la suficiencia hacen falta algunos lemas técnicos, que se presentan a continuación.

Lema 3.5.1. Dado $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal que verifica las condiciones (I) y (II) del Teorema 3.5.1, entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\, R(\lambda : A)x = x, \qquad x \in X.$$

Demostración. Por la definición de $R(\lambda : A)$ se tiene que

$$R(\lambda : A)(\lambda I - A) = I, \quad \Rightarrow \quad \lambda R(\lambda : A) - I = R(\lambda : A)A.$$

Para todo $x \in X$ se considera una sucesión $x_n \in D(A)$, con $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \to x$. Por la condición (II), que se puede traducir en la acotación uniforme del operador $\|\lambda R(\lambda : A)\| \leq 1$, se puede escribir

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &= \|\lambda R(\lambda : A)(x - x_n) + \lambda R(\lambda : A)x_n - x_n + x_n - x\| \\ &\leq \big(\|\lambda R(\lambda : A)\| + 1\big) \|x - x_n\| + \|R(\lambda : A)Ax_n\| \\ &\leq 2\,\|x - x_n\| + \frac{\|Ax_n\|}{\lambda},\end{aligned}$$

que se puede hacer tan pequeño como se quiera haciendo tender $\lambda \to \infty$ y $n \to \infty$. □

Definición 3.5.1. Dado $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal que verifica las condiciones (I) y (II) del Teorema 3.5.1, para cada $\lambda > 0$ se define el **aproximante de Yosida**, A_λ, como

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I.$$

Lema 3.5.2. Dados $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal que verifica las condiciones (I) y (II) del Teorema 3.5.1 y, para $\lambda > 0$, A_λ sus aproximantes de Yosida, entonces

(I) para cada $x \in D(A)$
$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax,$$

(II) A_λ es generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo de contracciones, e^{tA_λ}. Además, para todo $x \in X$, y λ, $\mu > 0$ se verifica
$$\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| \leq t\,\|A_\lambda x - A_\mu x\|\,.$$

Demostración. (I) Se deduce inmediatamente del Lema 3.5.1 y la Definición 3.5.1.

(II) De la Definición 3.5.1 se sigue que A_λ es, para cada $\lambda > 0$, un operador lineal y continuo, luego por el Teorema 3.3.1 se tiene que es generador de un semigrupo uniformemente continuo. Además, para $\lambda > 0$, por las cotas de la demostración del Teorema 3.3.1 y la propiedad (II) del Teorema 3.5.1, se puede escribir
$$\left\|e^{tA_\lambda}\right\| = e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)}\right\| \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda:A)\|} \leq 1.$$

Por tanto, el semigrupo es de contracciones. Además, el Corolario 2.4.3 asegura que A_λ y A_μ conmutan, y, en consecuencia, lo hacen también e^{tA_λ} y e^{tA_μ}, entre ellos y también con los anteriores. En virtud de ello se puede escribir

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right)ds\right\| \\ &\leq \int_0^1 t\left\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\right\| ds \\ &\leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\|.\end{aligned}$$

□

Demostración. (del Teorema 3.5.1). Como se indicó antes, la Proposición 3.5.1 y el Corolario 3.4.2 prueban la necesidad de las hipótesis. A continuación, se procede a probar la necesidad. Se quiere comprobar que, bajo las hipótesis (i) y (ii), A es generador de un semigrupo de contracciones. Para ello, por la parte (ii) del Lema 3.5.2, dado $x \in D(A)$, se tiene

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| \leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\| \leq t\left\|A_\lambda x - Ax\right\| + t\left\|A_\mu x - Ax\right\|.$$

Esto, por la parte (i) del Lema 3.5.2, implica que para cada $x \in D(A)$ se tiene que $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformemente en los compactos cuando $\lambda \to \infty$, por la condición de Cauchy para la convergencia uniforme. De esta forma, si se denomina $S(t)$ al límite fuerte, con $x \in D(A)$, de e^{tA_λ} cuando $\lambda \to \infty$, como la convergencia es uniforme en los compactos, se tiene la continuidad de $t \to S(t)x$ para $x \in D(A)$, y se verifican trivialmente las propiedades de semigrupo. Además, como $D(A)$ es denso en X, se puede extender la definición de $S(t)$ a todo X de forma única. De esta forma,

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x,$$

para todo $x \in X$. Además, el límite sigue siendo uniforme en los compactos, ya que

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| \leq \left\|e^{tA_\lambda}(x - x_n)\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\right\| + \left\|S(t)(x - x_n)\right\|,$$

y se tenía que $\left\|e^{tA_\lambda}\right\| \leq 1$, con $x_n \in D(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_n \to x$. En consecuencia $t \to S(t)x$ es continua para todo $x \in X$, luego $S(t)$ es un semigrupo de clase C_0. Además, de $\left\|e^{tA_\lambda}\right\| \leq 1$ y la definición de $S(t)$ se desprende que $\|S(t)\| \leq 1$, es decir, se trata de un semigrupo de contracciones. Bastará, entonces, probar que A es su generador infinitesimal para haber acabado. Dado $x \in D(A)$ se puede escribir

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}\left(e^{tA_\lambda}x - x\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{\tau A_\lambda}A_\lambda x\,d\tau = \int_0^t S(\tau)Ax\,d\tau,$$

donde en la última igualdad se puede intercambiar el límite y la integral por la convergencia uniforme en los compactos. Entonces, por la continuidad del integrando de la última igualdad se tiene que el generador infinitesimal B de $S(t)$ viene dado por

$$Bx = \lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0+}\int_0^t S(\tau)Ax\,d\tau = Ax,$$

al menos para $x \in D(A)$. Falta ver que $D(A) = D(B)$, de lo que ya se tiene $D(A) \subset D(B)$. Para ello, se tiene en cuenta que, por hipótesis, $1 \in \rho(A)$ y, al ser $S(t)$ un semigrupo de contracciones, por la necesidad de las hipótesis ya probada, $1 \in \rho(B)$. Entonces, $\operatorname{Im}(I-A) = \operatorname{Im}(I-B) = X$, por lo que, dado $x \in D(B)$, existe $y \in X$ tal que $x = (I-B)^{-1}y$, pero como $(I-A)^{-1}y \in D(A)$, y en $D(A)$ los operadores lineales A y B coinciden, se tiene que $(I-A)^{-1}y = (I-B)^{-1}y$, luego $x \in D(A)$. En consecuencia, el Teorema 3.4.3 garantiza que A es el generador infinitesimal de $S(t)$, y, por tanto, está probado que A es generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones. □

Se ha visto en la Proposición 3.5.1 que los semigrupos de clase C_0 tienen generador infinitesimal con espectro contenido en un semiplano del tipo $\operatorname{Re}\lambda \leq \omega$. Los problemas con esta propiedad son habitualmente llamados *de tipo hiperbólico*, y la forma de resolverlos es razonablemente diferente a la de los problemas de tipo parabólico cuya solución se está buscado. Los semigrupos que dan lugar a problemas parabólicos cuentan con mayor regularidad y por tanto se dispone de resultados adicionales a la hora de trabajar.

La razón de este tipo de denominaciones es que los problemas que se busca estudiar bajo la denominación de parabólicos son problemas de evolución (es decir, en los que en principio el tiempo sólo aparece involucrado como derivada primera) con operadores que de alguna manera generalizan al laplaciano (elípticos). Precisamente, es conocido que el espectro del laplaciano está contenido en el eje real negativo del plano complejo, estando contenido de forma evidente en semiplanos como los descritos antes; pero pudiendo estar contenido en conos de la forma $\Delta(\varphi) = \{z : \ \pi - \varphi < \arg z < \pi + \varphi\}$, los cuales dan mucha más información sobre la disposición geométrica del espectro.

La siguiente proposición proporciona una herramienta necesaria para abordar el teorema fundamental de esta sección, que se presenta a continuación. La proposición es presentada sin prueba, ya que requeriría de unos cuantos resultados previos, a los cuales se ha juzgado que por la orientación del trabajo no se les puede dedicar un espacio adecuado. Se pueden encontrar en [19]. Sin embargo, sí que cabe destacar que la demostración se hace a través de los ya introducidos *aproximantes de Yosida*, Definición 3.5.1, que aproximan a A en varios sentidos ya introducidos:

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax, \qquad \text{si } x \in D(A) \qquad \text{y} \qquad T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x, \qquad \text{si } x \in X. \tag{3.3}$$

La Proposición 3.5.2 presenta, en definitiva, una inversión de la transformada de Laplace que se ha presentado en la Proposición 3.5.1, de forma que proporciona una expresión cerrada para el semigrupo en términos del resolvente.

Proposición 3.5.2. Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0, $T(t)$, que satisface $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Sea $\gamma > \max\{0, \omega\}$. Si $x \in D(A^2)$ entonces

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x\, d\lambda.$$

Además, para cada $\delta > 0$ la integral converge uniformemente en t para $t \in [\delta, 1/\delta]$.

Teorema 3.5.2. (Integral de Dunford). Sea $A : D(A) \to X$ un operador lineal con dominio denso en X que satisface las condiciones siguientes:

(i) Para algún $0 < \delta < \pi/2$ se verifica que

$$\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \left\{\lambda : |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}.$$

(II) Existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \qquad \text{para } \lambda \in \Sigma_\delta,\ \lambda \neq 0.$$

Entonces, A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de operadores lineales y continuos $T(t)$ que satisface $\|T(t)\| \leq C$ para alguna constante $C > 0$. Además,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda : A)\, d\lambda, \tag{3.4}$$

donde Γ es una curva diferenciable a trozos contenida en Σ_δ que va desde $\infty e^{-i\theta}$ hasta $\infty e^{i\theta}$ con $\pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta$, como se puede ver en la Figura 3.1. Asimismo, la integral (3.4) converge para $t > 0$ en la topología uniforme de operadores. La ecuación (3.4) recibe habitualmente el nombre de **integral de Dunford**.

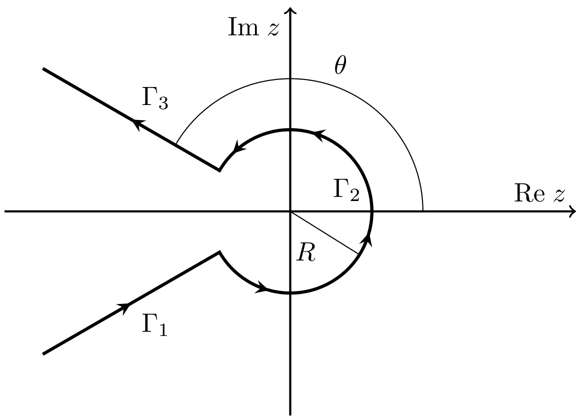

Figura 3.1: Dibujo de la curva de integración Γ.

Demostración. Se procede considerando una integral como la de Dunford, (3.4), y comprobando que efectivamente se trata del semigrupo de operadores lineales y continuos. Se define

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda : A)\, d\lambda.$$

Por la cota del Apéndice A.1 se tiene que $\|U(t)\| \leq C$ para $0 < t < \infty$. A continuación, se pretende probar que

$$R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)\, dt. \tag{3.5}$$

Para ello, se toma la definición de $U(t)$, se multiplica por $e^{-\lambda t}$ y se integra entre 0 y T. Se utiliza el teorema de Fubini y la fórmula de Cauchy para obtener la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-\lambda t} U(t)\, dt &= \int_0^T e^{-\lambda t} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\mu t} R(\mu : A)\, d\mu\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_0^T e^{(\mu-\lambda)t} R(\mu : A)\, dt\, d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\mu - \lambda} \left(e^{(\mu-\lambda)T} - 1 \right) R(\mu : A)\, d\mu \\
&= R(\lambda : A) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{(\mu-\lambda)T} \frac{R(\mu : A)}{\mu - \lambda}\, d\mu.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

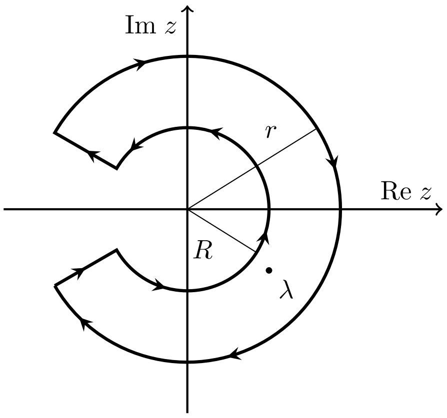

Figura 3.2: Camino para aplicar la fórmula de Cauchy.

Para aplicar la fórmula de Cauchy adecuadamente en la expresión anterior simplemente se ha tenido en cuenta que la integral

$$\int_\Gamma \frac{R(\mu : A)}{\mu - \lambda}\, d\mu$$

es el límite de integrales sobre curvas como las que se muestra en el dibujo de la izquierda, con $R < |\lambda| < r$, cuya integral vale $-R(\lambda : A)$ por el Teorema 2.2.1 de Cauchy (porque la curva está orientada negativamente), y, por tanto, la curva límite toma también ese valor bajo la condición de que la integral en el arco mayor $\hat{\Gamma}$ tienda hacia 0 cuando $r \to \infty$. Se parametriza $\mu(\varphi) = re^{i\varphi}$, con $\varphi \in (-\theta, \theta)$.

$$\left\| \int_{\hat{\Gamma}} \frac{R(\mu : A)}{\mu - \lambda}\, d\mu \right\| \leq \int_{-\theta}^{\theta} \frac{M}{|re^{i\varphi} - \lambda|}\, d\varphi \leq \frac{2M\theta}{r - |\lambda|} \to 0, \quad \text{cuando } r \to \infty.$$

Pero, en la expresión (3.6) obtenida antes para $\int_0^T e^{-\lambda t} U(t) dt$, se tiene que sobra un término para obtener la expresión que se buscaba, (3.5). Hay que conseguir una cota del término sobrante que desaparezca al hacer $T \to \infty$. Se separa la integral por partes según la Figura 3.1. En Γ_1, $\mu(\rho) = \rho e^{-i\theta}$, con $\rho \in (R, \infty)$,

$$\left\| \frac{e^{-\lambda T}}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{\mu T} \frac{R(\mu : A)}{\mu - \lambda}\, d\mu \right\| \leq \frac{e^{-T \operatorname{Re} \lambda}}{2\pi} \int_R^\infty \frac{M e^{\rho T \cos\theta}}{\rho\, |\rho e^{-i\theta} - \lambda|}\, d\rho \xrightarrow{T \to \infty} 0, \text{ si } \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

ya que $\cos\theta < 0$. Se obtiene análogamente para Γ_2 y Γ_3, de forma que en el semiplano real positivo se tiene al hacer $T \to \infty$ en (3.6),

$$R(\lambda : A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)\, dt.$$

Además, dado que $\|U(t)\| \leq C$, se puede derivar $n - 1$ veces bajo el signo integral, obteniendo, al aplicar el Corolario 2.4.2,

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda : A) = (-1)^{n-1} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} U(t)\, dt = (-1)^{n-1} (n-1)!\, R(\lambda : A)^n.$$

Por tanto, si se toma $\lambda > 0$ real se tiene

$$\|R(\lambda : A)^n\| = \left\| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} U(t)\, dt \right\| \leq \frac{C}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{C}{\lambda^n},$$

donde la última igualdad es consecuencia del cambio de variable $s = \lambda t$ y de la convergencia de $\int_0^\infty s^{n-1} e^{-s} ds$, renombrando la constante C. Ahora, aplicando el Teorema 3.5.2 de caracterización de los semigrupos C_0, se tiene que A es el generador infinitesimal de un semigrupo $T(t)$ uniformemente acotado por $\|T(t)\| \leq C$. Falta ver que este semigrupo se corresponde con la expresión de la integral de Dunford. Para ello, se toma $x \in D(A^2)$, y de la Proposición 3.5.2 se sigue que

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda : A)x\, d\lambda.$$

Finalmente, teniendo la holomorfía $R(\lambda : A)$ en Σ_δ que dada por el Teorema 2.4.2; el cual, a su vez, se puede aplicar por ser $T(t)$ de clase C_0, y, por tanto, ser A cerrado; se tiene la expresión de la integral de Dunford para todo $x \in D(A^2)$. Entonces, $T(t)x = \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda : A)x\, d\lambda$ para $x \in D(A^2)$, con lo que si se comprueba que $D(A^2)$ es denso en X, se tiene la expresión buscada para todo $x \in X$.

Para demostrar que $D(A^2)$ es denso en X se denomina $\mathcal{D}$ al conjunto de funciones que toman valores en $\mathbb{C}$ y soporte compacto en $(0, \infty)$. Para cualquier $x \in X$ y $\varphi \in \mathcal{D}$ se define

$$y(x, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(s) T(s)x\, ds.$$

Para $h > 0$ se puede comprobar inmediatamente que

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} y(x, \varphi) &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(s) \big(T(s+h)x - T(s)x \big)\, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty \varphi(s-h) T(s)x\, ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(s) T(s)x\, ds \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{h} \big(\varphi(s-h) - \varphi(s) \big) T(s)x\, ds - \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(s-h) T(s)x\, ds.
\end{aligned}$$

Como el integrando del primer sumando del lado derecho converge uniformemente en $[0, \infty)$ por ser φ de soporte compacto, al hacer $h \to 0$, y el segundo tiende a 0 porque $\varphi(0) = 0$, se tiene que $y(x, \varphi) \in D(A)$ para todo $x \in X$, $\varphi \in \mathcal{D}$, y, además,

$$Ay(x, \varphi) = -\int_0^\infty \varphi'(s) T(s)x\, ds.$$

Aplicando este procedimiento de nuevo se tiene que $y(x, \varphi) \in D(A^2)$, y

$$A^2 y(x, \varphi) = \int_0^\infty \varphi''(s) T(s)x\, ds.$$

Si se denomina Y al subespacio lineal generado por $\{y(x, \varphi) : \ x \in X, \ \varphi \in D\}$, bastará con ver que Y es denso en X para tener que lo es $D(A^2)$. Para ello, se procede por reducción al absurdo, se supone que no es así. Entonces, el Teorema de Hahn-Banach garantiza que existe un funcional $f \in X^*$ no nulo tal que $f(y) = 0$ para todo $y \in Y$. De aquí se tiene que, aplicando el Teorema 2.3.3,

$$\int_0^\infty \varphi(s) f\big(T(s)x\big)\, ds = f\left(\int_0^\infty \varphi(s) T(s) x \, ds\right) = 0,$$

para todo $x \in X$ y $\varphi \in \mathcal{D}$. Por el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones, se tiene que $f\big(T(s)x\big) \equiv 0$ en $[0, \infty)$. En particular lo es en $s = 0$, luego $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Esto contradice que $f \in X^*$ no sea idénticamente nulo, y, por tanto, Y es denso en X. En consecuencia $D(A^2)$ es denso en X y queda probado el resultado. Para acabar, nótese que este argumento es realmente suficiente para probar algo más fuerte, y es que $\cap_{k=1}^\infty D(A^k)$ es denso en X, siendo A el generador de un semigrupo de clase C_0. □

3.6. Semigrupos analíticos

Para seguir profundizando en los semigrupos tales que el espectro de su generador infinitesimal es de la forma expuesta en la parte (i) del Teorema 3.5.2, ya que esta forma viene asociada a operadores elípticos, como se comprobará para el laplaciano en la Sección 3.6.1, se buscan semigrupos cuyo dominio no se restrinja únicamente al semieje real positivo, pudiéndose extender a regiones del plano complejo que contengan a dicho semieje y que tengan forma de cono. Se denominará semigrupo analítico precisamente si es analítico en dicha región del plano complejo.

Definición 3.6.1. Sea $\Delta = \{z : \ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \quad \varphi_1 < 0 < \varphi_2\} \cup \{0\}$ y, para cada $z \in \Delta$, sea $T(z) : X \to X$ un operador lineal y continuo. La familia $\{T(z)\}_{z \in \Delta}$ es un **semigrupo analítico** si

(i) $z \to T(z)$ es analítico en Δ,

(ii) $T(0) = I$ y además $\lim_{z \to 0,\ z \in \Delta} T(z)x = x$ para todo $x \in X$,

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para todo $z_1, z_2 \in \Delta$.

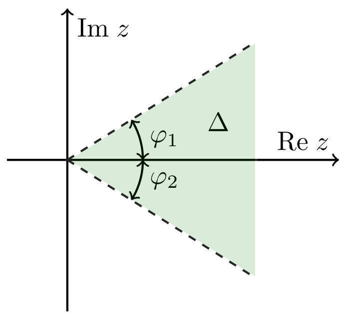

Figura 3.3: Dominio de analiticidad de un semigrupo analítico.

Dada la propiedad (ii) de la Definición 3.6.1, es inmediato comprobar que los que se han definido como semigrupos analíticos son, de hecho, semigrupos de clase C_0. Esta definición es muy habitual en la literatura, [10, 19, 23], pero, sin embargo, impone la restricción de que el dominio del generador infinitesimal A del semigrupo sea denso, por el Corolario 3.4.2. Esta hipótesis es con la que se va a trabajar en esta exposición, por contra, no siempre es estrictamente necesaria, como se puede ver en [17]. En la Sección 5.3.1 se hará un breve comentario al respecto.

Definición 3.6.2. Se dirá que un semigrupo $T(t)$ de clase C_0 es **diferenciable** si $T(t)x$ es derivable para todo $x \in X$ y para todo $t > 0$.

Nótese que la Proposición 3.4.2 garantiza que todo semigrupo C_0 verifica lo que se pide en la definición anterior para $x \in D(A)$, con A su generador infinitesimal, pero no la verifica para $x \in X \backslash D(A)$ necesariamente. Es por esto que no basta con ser de clase C_0 para ser diferenciable.

Se presenta a continuación un sencillo lema previo sobre derivadas de semigrupos que se utilizará como herramienta más adelante.

Lema 3.6.1. Sea $T(t)$ un semigrupo de clase C_0 diferenciable y A su generador infinitesimal. Entonces, dados $t > 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$

(I) $T(t) : X \to D(A^n)$ es un operador lineal y continuo. Además, es infinitamente diferenciable para $t > 0$, con derivada $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$.

(II) $T^{(n)}(t)$ es continuo en norma para $t > 0$ y se puede escribir como

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.$$

Demostración. (I) Se procede por inducción. El caso base lo dan las hipótesis del enunciado. Se parte de que, al ser $T(t)$ de clase C_0, se tiene que $T(t)x \in D(A)$ y $T'(t)x = AT(t)x$ para todo $x \in D(A)$ y $t > 0$. Además, como A es cerrado y $T(t)$ es lineal y continuo, por la Proposición 2.1.3 se deduce que $AT(t)$ es lineal y continuo. De esta forma, al ser $T(t)$ diferenciable, se tiene que la única extensión posible es $T(t)x \in D(A)$ y $T'(t)x = AT(t)x$ para todo $x \in X$.

Se supone ahora que es cierto para $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que para todo $x \in X$ y $t > s > 0$ se verifica, aplicando que $T(t)$ conmuta con su generador infinitesimal A y la propiedad de semigrupo, $T^{(n)}(t)x = A^n T(t)x = T(t-s)A^n T(s)x$. El lado derecho de la expresión es claramente derivable respecto de t, y, por tanto, $T(t)$ es $n+1$ veces derivable. Al derivar ambos lados de esta expresión y reagrupar se tiene

$$T^{(n+1)}(t)x = T(t-s)A^{n+1}T(s)x = A^{n+1}T(t)x,$$

y este es, de nuevo, lineal y continuo por la Proposición 2.1.3. Por un razonamiento como el del caso base se tiene que $T(t)x \in D(A^{n+1})$.

(II) Se procede también por inducción, comenzando por probar el caso base. Dados $M > 0$ tal que $\|T(t)\| < M$ en $0 \leq t \leq 1$, $x \in X$ y t_1, t_2 tales que $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$, entonces

$$T(t_2)x - T(t_1)x = \int_{t_1}^{t_2} AT(s)x\, ds = \int_{t_1}^{t_2} T(s-t_1)AT(t_1)x\, ds.$$

Como el integrando es un operador lineal y continuo evaluado en x, el Teorema 2.3.3 garantiza que, en efecto, se puede sacar la evaluación en x fuera de la integral, y, como además la expresión anterior es cierta para todo $x \in X$

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} T(s - t_1)AT(t_1)\, ds.$$

Acotando conforme a $\|T(t)\| < M$ se puede escribir entonces

$$\|T(t_2) - T(t_1)\| \leq (t_2 - t_1)M \|AT(t_1)\|,$$

lo cual implica la continuidad de $T(t)$ para $t > 0$ en la topología uniforme de operadores. Ahora se asume que es cierto para $n \in \mathbb{N}$ y se da el paso de inducción de forma análoga. Se toma $M > 0$ tal que $\|T^{(n)}(t)\| < M$ en $0 \leq t \leq 1$, $x \in X$ y $0 < t_1 \leq t_2 \leq t_1 + 1$. Entonces

$$T^{(n)}(t_2)x - T^{(n)}(t_1)x = \int_{t_1}^{t_2} A^{n+1}T(s)x\, ds = \int_{t_1}^{t_2} T(s - t_1)A^{n+1}T(t_1)x\, ds,$$

y razonando de la misma manera que en el caso base

$$\|T^{(n)}(t_2) - T^{(n)}(t_1)\| = (t_2 - t_1)M\|A^{n+1}T(t_1)\|,$$

con lo cual queda probado que $T^{(n)}$ es continuo en norma para $t > 0$. La expresión cerrada que aporta el enunciado se prueba también por inducción sonbre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ ya se tiene. Se supone cierta para n, pudiendo escribir, para $0 < s < t$,

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T\left(\frac{t-s}{n}\right)\right)^n \left(AT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = T(t-s)\left(AT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n.$$

Derivando otra vez se obtiene

$$T^{(n+1)}(t) = AT(t-s)\left(AT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n,$$

y evaluando ahora $s = nt/(n+1)$ se obtiene la expresión

$$T^{(n+1)}(t) = AT\left(\frac{t}{n+1}\right)\left(AT\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^n = \left(AT\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^{n+1},$$

como se quería probar. □

Es evidente que la restricción de un semigrupo analítico al semieje real positivo es un semigrupo de clase C_0. De ahora en adelante se supondrá que $0 \in \rho(A)$ siendo A el generador infinitesimal del semigrupo analítico. Esto se puede conseguir multiplicando el semigrupo por $e^{-\epsilon t}$ con $\epsilon > 0$, y no consiste más que en conseguir $\omega = 0$ en la caracterización del semigrupo, lo cual es habitualmente llamado un *semigrupo uniformemente acotado*. El siguiente teorema proporciona la caracterización fundamental de los semigrupos analíticos que se necesitará frecuentemente de aquí en adelante. Respecto a la formulación del mismo, no se tenga como restrictiva la hipótesis de que $T(t)$ sea un semigrupo uniformemente acotado, debido a que la multiplicación del semigrupo por una función del tipo $e^{\omega t}$ no afecta a la posibilidad de extender un semigrupo de clase C_0 a un semigrupo analítico, y esta, como se verá más adelante, se traduce en un mero desplazamiento por la identidad del operador en el problema diferencial.

Teorema 3.6.1. Sea $T(t)$ un semigrupo uniformemente acotado C_0 de operadores lineales y continuos. Dado A el generador infinitesimal de $T(t)$ supóngase que $0 \in \rho(A)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $T(t)$ puede extenderse a un semigrupo analítico en el sector $\Delta_\delta = \{z : \ |\arg z| < \delta\}$ y $\|T(t)\|$ es uniformemente acotado en cada subsector cerrado $\overline{\Delta}_{\delta'}$ con $\delta' < \delta$, de Δ_δ.

(b) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$,

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(c) Existen $0 < \delta < \pi/2$ y $M > 0$ tales que

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda : \ |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\},$$

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \qquad \text{para } \lambda \in \Sigma, \ \lambda \neq 0.$$

(d) $T(t)$ es diferenciable, con $T'(t)x = AT(t)x$ para $x \in X$, y existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t}, \qquad \text{para } t > 0.$$

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Sea $0 < \delta' < \delta$ tal que $\|T(z)\| \leq C_1$ para $z \in \overline{\Delta}_{\delta'} = \{z : \ |\arg z| \leq \delta'\} \cup \{0\}$. Para $x \in X$ y $\sigma > 0$, por la Proposición 3.5.1, se tiene que

$$R(\sigma + i\tau : A) = \int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t}\, T(t)x \, dt.$$

A continuación, se utiliza el teorema integral de Cauchy para cambiar el camino de integración al rayo $\rho e^{-i\delta'}$ con $0 < \rho < \infty$ para el caso de $\tau > 0$. Para ello, se tiene en cuenta que la función $f(z) = e^{-\lambda z} T(z)x$ es holomorfa en un abierto que contiene al camino de integración de la Figura 3.4, de forma que su integral en ese camino es nula. Se utiliza la hipótesis de acotación uniforme de $T(z)$ en $\overline{\Delta}_{\delta'}$ para acotar las integrales en los segmentos circulares Γ, parametrizado por $z(\theta) = re^{i\theta}$, con $\theta \in (-\delta', 0)$,

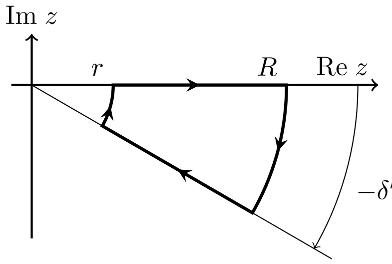

Figura 3.4: Camino de integración para el cambio de la recta real al rayo $\rho e^{-i\delta'}$.

$$\begin{aligned}\left\|\int_\Gamma e^{-\lambda z} T(z)x \, dz\right\| &= \left\|\int_{-\delta'}^0 rie^{i\theta} e^{-\lambda r e^{i\theta}} T(re^{i\theta})x \, dz\right\| \\ &\leq \int_{-\delta'}^0 re^{-\sigma r\cos\theta} C_1 \|x\| \, d\theta \\ &\leq re^{-\sigma r \cos\delta'} C_1 \delta' \|x\|,\end{aligned}$$

lo cual tiende hacia 0 tanto si $r \to 0$, como si $R \to \infty$, lo que permite hacer ese límite en los caminos de integración, obteniendo que, para el caso de $\tau > 0$,

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t}\, T(t)x\, dt = \int_0^\infty e^{-i\delta'} e^{-(\sigma+i\tau)\rho e^{-i\delta'}} T(\rho e^{-i\delta'})x\, d\rho,$$

y, en consecuencia, se puede acotar

$$\begin{aligned} \|R(\sigma+i\tau : A)x\| &\le \left\| \int_0^\infty e^{-i\delta'} e^{-(\sigma+i\tau)\rho e^{-i\delta'}} T(\rho e^{-i\delta'})x\ d\rho \right\| \\ &\le \int_0^\infty e^{-\rho(\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta')} C_1 \|x\|\, d\rho, \end{aligned}$$

e integrando y siguiendo la acotación, aprovechando que $\sigma > 0$, se tiene

$$\|R(\sigma+i\tau : A)x\| \le \frac{C_1\|x\|}{\sigma\cos\delta' + \tau\sin\delta'} \le \frac{C_1\|x\|}{\tau\sin\delta'} = \frac{C}{\tau}\|x\|,$$

donde se ha renombrado la constante incluyendo dentro de ella el valor de $\sin\delta'$. Siguiendo el procedimiento análogo en el caso $\tau < 0$ con el rayo $\rho e^{i\delta'}$ y $0 < \rho < \infty$, se obtiene $\|R(\sigma+i\tau : A)x\| \le -C/\tau$, y, por tanto, se deduce la cota con el valor absoluto.

(b)⇒(c). Al tratarse A del generador de un semigrupo C_0, por el Teorema 3.4.4 y siendo $\omega = 0$ por hipótesis de uniformidad, se tiene que $\|R(\lambda : A)\| \le M_1/\mathrm{Re}\,\lambda$ para todo λ con $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. De (b) se tiene que $\|R(\lambda : A)\| \le C/|\mathrm{Im}\,\lambda|$ para $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, y, por tanto, se consigue

$$|\lambda| = \sqrt{|\mathrm{Re}\,\lambda|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2} \le \frac{\sqrt{M_1^2 + C^2}}{\|R(\lambda : A)\|}.$$

Si se denota $C_1 = \sqrt{M_1^2 + C^2}$ entonces $\|R(\lambda : A)\| \le C_1/|\lambda|$. En virtud de lo anterior, se tiene la cota buscada para todo $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, pero falta verlo para el Σ que propone el enunciado. Para ello, dado $\sigma > 0$ se considera la expansión en serie de Taylor del resolvente que proporciona el Teorema 2.4.2 en torno a $\lambda_0 = \sigma + i\tau$:

$$R(\lambda : A) = \sum_{n=0}^\infty (\sigma + i\tau - \lambda)^n R(\sigma+i\tau : A)^{n+1},$$

la cual es convergente en norma de $\mathcal{L}(X)$ si $|\sigma + i\tau - \lambda|\,\|R(\sigma+i\tau : A)\| < 1$.

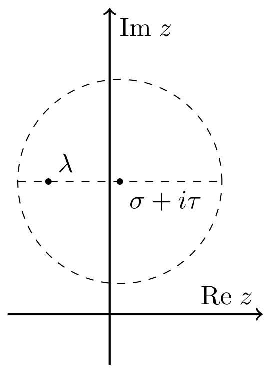

Figura 3.5: Disco de convergencia del desarrollo de $R(\lambda : A)$.

Se toma entonces $\lambda = \mathrm{Re}\,\lambda + i\tau$, y usando la hipótesis (b) se comprueba inmediatamente que cuando $|\sigma - \mathrm{Re}\,\lambda| < |\tau|/C$ entonces la serie converge. En particular, para todo elemento de $\mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0$ que verifique $|\mathrm{Re}\,\lambda|/|\mathrm{Im}\,\lambda| < 1/C$ se tiene que existe $\sigma > 0$ verificando

$0 < \sigma < 1/C - |\mathrm{Re}\,\lambda| \,/\, |\mathrm{Im}\,\lambda|$, y, por tanto, para algún $\sigma > 0$, estará en el abierto de convergencia de la serie antes planteada, y, por tanto, estará en $\rho(A)$. Esto ocurre para

$$\left\{\lambda : \ |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{C}\right\},$$

luego este conjunto está contenido en $\rho(A)$. Además, si para un subconjunto de $\mathbb{C}$ se verifica que existe un $0 < k < 1$ tal que, para cada $\lambda = \mathrm{Re}\,\lambda + i\tau$ perteneciente a dicho conjunto, existe algún $\sigma > 0$ tal que $|\sigma + i\tau - \lambda| \, \|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq k$, se tendrá que la serie converge uniformemente en dicho subconjunto de $\mathbb{C}$. En particular, al utilizar la hipótesis (b) de nuevo, esto ocurre cuando $|\sigma - \mathrm{Re}\,\lambda| \leq k\,|\tau|\,/C$. El siguiente conjunto verifica dicha propiedad,

$$\left\{\lambda : \ |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \subset \rho(A)$$

donde $\delta = \arctan k/C$, con $0 < k < 1$, porque se cumple que $|\mathrm{Re}\,\lambda| \,/\, |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq k/C$, luego razonando igual que antes, para cada elemento del conjunto existe $\sigma > 0$ tal que se cumple $|\sigma - \mathrm{Re}\,\lambda| \leq k\,|\tau|\,/C$. De esta forma, en toda esta región, al acotar la norma de $R(\lambda : A)$ y sumar la serie geométrica se tiene

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \|R(\sigma + i\tau : A)\| \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma + i\tau - \lambda|^n \, \|R(\sigma + i\tau : A)\|^n = \frac{\|R(\sigma + i\tau : A)\|}{1 - k}.$$

Teniendo en cuenta la hipótesis (b) y que $|\mathrm{Re}\,\lambda| \,/\, |\mathrm{Im}\,\lambda| < 1/C$ implica $|\lambda|^2 = |\mathrm{Re}\,\lambda|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 \leq (1 + 1/C^2)\,|\mathrm{Im}\,\lambda|^2$ se puede escribir a partir de la expresión anterior

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|\,(1-k)} \leq \frac{\sqrt{C^2+1}}{|\lambda|\,(1-k)} = \frac{M}{|\lambda|}.$$

Además, por hipótesis se tenía que $0 \in \rho(A)$, luego se obtiene (c).

(c)$\Rightarrow$(d) Si A satisface (c), entonces por el Teorema 3.5.2 se tiene que

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda : A)\, d\lambda,$$

donde Γ es una curva diferenciable en Σ_δ que va desde $\infty e^{-i\theta}$ hasta $\infty e^{i\theta}$ con $\pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta$. La integral converge en norma $\mathcal{L}(X)$ para $t > 0$. Como se quiere garantizar que dicha expresión es derivable, en primer lugar, se deriva formalmente para obtener cuál sería su derivada, y, después, al probar que en efecto es convergente también en norma de $\mathcal{L}(X)$ para $t > 0$ se tendrá que es efectivamente su derivada. Haciendo lo descrito se tiene

$$T'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda e^{\lambda t} R(\lambda : A)\, d\lambda.$$

En concreto, aprovechando que $0 \in \rho(A)$, y que el conjunto resolvente es abierto, al tomar el camino diferenciable a trozos formado por los dos rayos $\rho e^{i\theta}$ y $\rho e^{-i\theta}$ con ρ variando en $(0, \infty)$ y $\pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta$ fijo, y usando la cota que (c) aporta por hipótesis, que es cierta salvo en el extremo 0 de integración, se puede acotar

$$\begin{aligned}
\left\|T'(t)\right\| &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_\Gamma \lambda e^{\lambda t} R(\lambda : A)\, d\lambda\right\| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_0^\infty \rho e^{i2\theta} e^{\rho e^{i\theta} t} R(\rho e^{i\theta} : A)\, d\rho - \int_0^\infty \rho e^{-i2\theta} e^{\rho e^{-i\theta} t} R(\rho e^{-i\theta} : A)\, d\rho\right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\left\|\int_0^\infty \rho e^{i2\theta} e^{\rho e^{i\theta} t} R(\rho e^{i\theta} : A)\, d\rho\right\| + \left\|\int_0^\infty \rho e^{-i2\theta} e^{\rho e^{-i\theta} t} R(\rho e^{-i\theta} : A)\, d\rho\right\|\right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\infty \rho e^{\rho t\cos\theta}\left\|R(\rho e^{i\theta} : A)\right\| d\rho + \int_0^\infty \rho e^{\rho t\cos\theta}\left\|R(\rho e^{-i\theta} : A)\right\| d\rho\right) \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty M e^{\rho t\cos\theta}\, d\rho \\
&= \frac{M}{-\pi t\cos\theta},
\end{aligned}$$

donde hay que tener en cuenta que $\cos\theta < 0$ debido a que $\pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta$. Por lo tanto, la integral correspondiente a la derivada formal $T'(t)$ converge para todo $t > 0$. Queda, por tanto, justificada la derivada formal, luego $T(t)$ es derivable para $t > 0$. Entonces, el Lema 3.6.1 garantiza que $AT(t) = T'(t)$. Renombrando la constante antes hallada para $t > 0$, se puede escribir

$$\|AT(t)\| = \left\|T'(t)\right\| \leq \frac{C}{t}.$$

(d)$\Rightarrow$(a) Para demostrar que el semigrupo de operadores se puede extender a un cono del plano complejo, se va a escribir el semigrupo en forma de serie, análogamente al procedimiento de construcción de la exponencial compleja a partir de la exponencial real. Para ello, se considera la serie de potencias (se puede denominar ya $T(z)$ porque es inmediato comprobar que para valores de $z \in \mathbb{R}^+$ toma los valores del semigrupo C_0 definido sobre la semirrecta real)

$$T(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n,$$

y se quiere comprobar su dominio de convergencia. Los sumandos están bien definidos gracias a que, como $T(t)$ es diferenciable para $t > 0$, el Lema 3.6.1 lo garantiza, junto con la cota $\left\|T^{(n)}(t)\right\| = \|T'(t/n)^n\| \leq \|T'(t/n)\|^n$. Esto, añadido a la cota que aporta (d), resulta en

$$\frac{1}{n!}\left\|T^{(n)}(t)\right\| \leq \frac{n^n}{n!}\left(\frac{C}{t}\right)^n \leq e^n\left(\frac{C}{t}\right)^n.$$

Procediendo análogamente a la implicación (b)$\Rightarrow$(c), se tiene que dicha serie converge uniformemente en norma de $\mathcal{L}(X)$ en el entorno en $\mathbb{C}$ de $t \in \mathbb{R}$ dado por $|z-t| \leq k(t/eC)$, para cada $0 < k < 1$. De ahí que $T(z)$ es una función holomorfa en

$$\Delta = \left\{z : \ |\arg z| < \arctan\frac{1}{Ce}\right\}.$$

Por la analiticidad de $T(z)$, se puede hallar $T(z_1)T(z_2)$, con $z_1, z_2 \in \Delta$, haciendo el producto de las series, y así comprobar la propiedad de semigrupo. Se utiliza el Lema 3.6.1, y se denota directamente $T^{(0)}(t) = T(t)$ y $0! = 1$, como es habitual.

$$\begin{aligned}
T(z_1)T(z_2) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{(n)}T(s)}{n!}(z_1 - s)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{(n)}T(t)}{n!}(z_2 - t)^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}T(s+t) \sum_{k=0}^{n} \frac{(z_1 - s)^k}{k!}\frac{(z_2 - t)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{(n)}T(s+t)}{n!}\big(z_1 + z_2 - (s+t)\big)^n \\
&= T(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

$T(0) = I$ está garantizado por estar extendiendo un semigrupo previo. Como el semigrupo es fuertemente continuo en 0 a través de en $[0, \infty)$ por ser de clase C_0, y fuertemente continuo en Δ por ser analítico, necesariamente también es fuertemente continuo en 0 a través de Δ.

De la hipótesis de que $\|AT(t)\| \leq C/t$ se deduce la siguiente expresión, que servirá para probar la acotación uniforme en los compactos de la forma $\overline{\Delta}_\epsilon = \{z : \ |\arg z| \leq \arctan(1/Ce) - \epsilon\}$, usando de nuevo el Lema 3.6.1 y tomando $t = \operatorname{Re} z$,

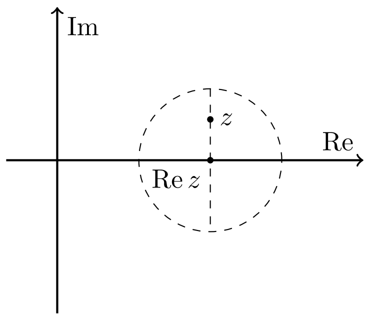

Figura 3.6: Disco de convergencia del desarrollo de $T(z)$.

$$\begin{aligned}
\|T(z)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{(n)}(\operatorname{Re} z)}{n!}(z - \operatorname{Re} z)^n \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(AT\left(\frac{\operatorname{Re} z}{n}\right)\right)^n}{n!}(\operatorname{Im} z)^n \right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n n^n}{n!}\left(\frac{|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Re} z|}\right)^n.
\end{aligned}$$

Dentro del cono en cuestión, $\overline{\Delta}_\epsilon$, se tiene que existe $|\operatorname{Im} z| \,/\, |\operatorname{Re} z| \leq k/Ce$ con $0 \leq k < 1$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^n n^n}{n!}\left(\frac{|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Re} z|}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\left(\frac{k}{e}\right)^n.$$

Aplicando el criterio de la raíz y la identidad de Stirling se tiene la convergencia de la serie de la derecha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nk}{e\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{(2\pi n)^{1/2n}} = k < 1.$$

En consecuencia, se obtiene la acotación uniforme en los subsectores cerrados de la forma $\overline{\Delta}_\epsilon = \{z : \ |\arg z| \leq \arctan(1/Ce) - \epsilon\}$, por lo que la prueba está completa. □

El resultado que se acaba de presentar muestra la equivalencia entre que el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 sea *sectorial* (es decir, que el espectro esté contenido en un cono como el que se indica en el enunciado, y con la pertinente cota para el resolvente) y que el semigrupo que genera sea analítico. Esto es un resultado fundamental en el desarrollo posterior. Se presentan a continuación una serie de resultados y cotas que nos permitirán trabajar con semigrupos analíticos para la resolución de ecuaciones diferenciales.

De ahora en adelante se utilizará según conveniencia e^{tA} y $T(t)$ para nombrar el semigrupo de operadores lineales y continuos cuyo generador infintesimal es A, debido a que las propiedades ya conocidas del semigrupo le hacen comportarse de forma similar a la exponencial común, y pudiendo así escribir de forma explícita el generador infinitesimal del mismo.

Como consecuencia inmediata del resultado anterior, teniendo en cuenta el posible desplazamiento por ω del semigrupo para hacerlo uniformemente continuo se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.6.1. Sea $T(t)$ un semigrupo analítico, $t \in [0,\infty)$, que verifica la desigualdad $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ con constantes $M \geq 1$ y $\omega > 0$, entonces se tiene que

$$\left\| t^k (A-\omega I)^k T(t) \right\| \leq M_k e^{\omega t},$$

donde $M_k > 0$ son constantes positivas para $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Al aplicar el Teorema 3.6.1 a $T(t)e^{-\omega t}$ se tiene que para $t \in [0,\infty)$,

$$\|t(A-\omega I)T(t)\| \leq Ce^{\omega t},$$

y utilizando el Lema 3.6.1 se obtiene para el resto de valores de k posibles, dado que $(A-\omega I)^k T(t) = \big((A-\omega I)T(t/k)\big)^k$. Se puede escribir

$$\left\| (A-\omega I)^k T(t) \right\| \leq (Ck/t)^k e^{\omega t} = \frac{(Ck)^k}{t^k} e^{\omega t},$$

y, por tanto, tomando $M_0 = C$ y $M_k = (Ck)^k$, para $k \neq 0$, se termina la demostración. $\square$

Proposición 3.6.1. Dado un semigrupo analítico $T(t)$, es inyectivo para todo $t \geq 0$.

Demostración. Dado $t_0 \geq 0$, si se comprueba que $T(t_0)x = 0$ para cierto $x \in X$ implica que $x = 0$, entonces se tendrá el resultado. Ahora bien, se tiene que para $t \geq t_0$ se verifica $T(t)x = T(t-t_0)T(t_0)x = 0$, y por ser $T(t)x$ una función analítica y tener un punto de acumulación de ceros, se deduce aplicando el Principio de Identidad que la función es idénticamente nula en su dominio cónico de analiticidad. De ahí que $T(t)x = 0$ para todo $t \geq 0$. Haciendo uso de la Proposición 3.5.1 se consigue entonces que $R(\lambda : A)x = 0$, donde $R(\lambda : A)$ sí que es inyectivo, y, por tanto, necesariamente $x = 0$, luego $T(t)$ es inyectivo. $\square$

3.6.1. El ejemplo del laplaciano: realización en $\mathbb{R}$

Para visualizar adecuadamente la teoría que se acaba de exponer, se va a tratar a continuación el ejemplo del laplaciano unidimensional sobre la recta real completa $\mathbb{R}$, es decir, del operador derivada segunda. Para ello, en primer lugar, se deben de considerar los dominios adecuados para tratar con dicho operador. Se va a trabajar en $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$. El caso de los espacios de funciones continuas, $p = \infty$, no se corresponde con los resultados presentados en este trabajo, como se explicará en la Sección 5.3.1. Los trabajos de A. Lunardi, como [17], hacen especial énfasis en la realización de los operadores en estos espacios, que no serán atendidos en el presente trabajo. Este ejemplo y el siguiente se pueden encontrar más desarrollados en [16].

Como se va a trabajar en $L^p(\mathbb{R})$ con un operador diferencial de orden 2, el dominio del operador A_p será el espacio de Sobolev $W^{2,p}(\mathbb{R})$ de funciones con dos derivadas distribucionales en $L^p(\mathbb{R})$. Se define

$$D(A_p) = W^{2,p}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}), \qquad A_p u = u''. \tag{3.7}$$

Para comprobar que se trata de un operador sectorial y que, por tanto, genera un semigrupo analítico de operadores lineales y continuos, antes que nada, ha de localizarse su espectro.

En primer lugar, se quiere comprobar que $(-\infty, 0] \subset \sigma(A_p)$. Una forma habitual de proceder para demostrar que ciertos puntos están en el espectro se basa en que los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los que existe $u \in D(A_p)$ no idénticamente nula tal que $u'' = \lambda u$, es decir, autovalores, hacen que $(\lambda I - A_p)u = 0$, y, por tanto, que $\lambda I - A_p$ no sea inyectivo, luego $\lambda \in \sigma(A_p)$. Sin embargo, en este caso, si se buscan autovalores que correspondan a $\lambda \in (-\infty, 0] \subset \sigma(A_p)$, se obtienen $u(x) = C_1 \exp(ix\sqrt{-\lambda}) + C_2 \exp(-ix\sqrt{-\lambda})$, pero estas funciones no pertenecen a $L^p(\mathbb{R})$. Para la comprobación que se va a realizar bastará quedarse con una autofunción concreta, por ejemplo, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $u(x) = \exp(ix\sqrt{-\lambda})$. Se ha de hacer uso, entonces, del Lema 2.4.2.

Se considera una función test $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tenga su soporte contenido en $(-2, 2)$, que valga ≤ 1 en todo su dominio de definición y que sea idénticamente igual a 1 en $[-1, 1]$, y se define $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obteniendo funciones test definidas en $(-2n, 2n)$ y que valen 1 en $[-n, n]$. Entonces, se denomina $u_n = \varphi_n u$, teniendo así que $u_n \in D(A_p)$, y que u_n se aproxima a u en algún sentido a concretar al ir aumentando n. Se pueden acotar las normas de dichos elementos por

$$(2n)^{\frac{1}{p}} \leq \|u_n\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p \, |\varphi(x/n)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq (4n)^{1/p}.$$

Se define entonces $v_n = u_n / \|u_n\|_p$ para tener elementos normalizados, buscando satisfacer las hipótesis del Lema 2.4.2, y de ahí que

$$\|(\lambda I - A)v_n\|_p = \frac{\|(\lambda I - A)(\varphi_n u)\|_p}{\|u_n\|_p} = \frac{\|\varphi_n'' u + 2\varphi_n' u'\|_p}{\|u_n\|_p} = \frac{1}{n} \frac{\left\|\varphi''(x/n)/n + 2i\sqrt{-\lambda}\, \varphi'(x/n)\right\|_p}{\|u_n\|_p}.$$

Si se toma $M > 0$ tal que $\|\varphi'\|_\infty, \|\varphi''\|_\infty < M$ entonces, utilizando la cota anterior para $\|u_n\|_p$, se obtiene

$$\|(\lambda I - A)v_n\|_p \leq \frac{1}{n} \frac{(4n)^{1/p} M \big(1/n + 2\sqrt{-\lambda}\big)}{\|u_n\|_p} \leq \frac{1}{n} 2^{1/p} M \big(1/n + 2\sqrt{-\lambda}\big) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Por lo tanto, en virtud del ya citado Lema 2.4.2, $(-\infty, 0] \subset \sigma(A_p)$. En segundo lugar, se quiere comprobar que dado $\lambda \notin (-\infty, 0]$ se verifica que $\lambda \in \rho(A_p)$. Para ello, se consideran las soluciones en $W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R})$ de $\lambda u - u'' = 0$, donde, si se denominan ξ_1 y ξ_2 las dos raíces cuadradas complejas de λ, son de la forma $u(x) = A \exp(\xi_1 x) + B \exp(\xi_2 x)$; que son $C^\infty(\mathbb{R})$, por lo que son soluciones en un sentido clásico, pero no pertenecen a $L^p(\mathbb{R})$; de forma que $\lambda I - A_p$ es inyectivo, porque si $(\lambda I - A_p)u = 0$ con $u \in W^{2,p}(\mathbb{R})$ entonces $u = 0$.

Se comprueba, a continuación, que $\lambda I - A_p$ es sobreyectivo. Dado $\arg \lambda = \theta \in (-\pi, \pi]$, se escribirán las raíces cuadradas de λ como $\xi_1 = |\lambda|^{1/2} e^{i\theta/2}$ y $\xi_2 = -\xi_1$. Dado $f \in L^p(\mathbb{R})$, el candidato natural a resolver la ecuación $\lambda u - u'' = f$ será el dado por la fórmula de variación de las constantes como

$$u(x) = \frac{1}{2\xi_1}\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-\xi_1(x-y)} f(y)\,dy + \int_{x}^{\infty} e^{\xi_1(x-y)} f(y)\,dy\right), \tag{3.8}$$

el cual puede escribirse en forma de convolución con $h_{\xi_1}(x) = e^{-\xi_1|x|}/2\xi_1$ como $u(x) = (f * h_{\xi_1})(x)$. Se le aplica la desigualdad de Young, que se puede encontrar en la página 205 de [32], y que enuncia que, dados $1 \leq p \leq q \leq \infty$ y $q = (\frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1)^{-1}$, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, entonces su convolución está definida en todo $\mathbb{R}^n$, pertenece a $L^q(\mathbb{R}^n)$ y, además, se verifica que $\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_r$. La demostración de esta desigualdad se basa en una aplicación reiterada de la desigualdad de Hölder. En este caso, aplicándola con $q = p$ y $r = 1$ se tiene que $u \in L^p(\mathbb{R})$ y, además,

$$\|u\|_p \leq \|f\|_p \|h_{\xi_1}\|_1 .$$

Acotando $\|h_{\xi_1}\|_1$, teniendo en cuenta su definición, se obtiene

$$\|h_{\xi_1}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x|\operatorname{Re}\xi_1}}{2\,|\xi_1|}\,dx = \frac{1}{|\xi_1|\operatorname{Re}\xi_1} = \frac{1}{|\lambda|\cos(\theta/2)}.$$

Por tanto, $\|u\|_p \leq \|f\|_p / |\lambda|\cos(\theta/2)$, de donde se tiene, a la par, que $\lambda I - A_p$ es sobreyectivo y que su inversa es continua si se consigue garantizar que $u \in D(A_p)$. Que su inversa es lineal se tiene por la forma de $u(x)$ en la fórmula de variación de las constantes. Para acabar, entonces, sólo falta demostrar que efectivamente $u \in D(A_p) = W^{2,p}(\mathbb{R})$. Se aprovechará para ello resultados de densidad de funciones test.

Dado $f \in L^p(\mathbb{R})$, se considerará una sucesión de funciones test $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ que aproximen a f. Las correspondientes soluciones u_n a los problemas $\lambda u_n - u_n'' = f_n$ son dadas por la fórmula de variación de las constantes antes presentada, y dada su expresión son suaves (la convolución toma la mayor de las regularidades), y, por tanto, por la desigualdad de Young aplicada de forma similar a la anterior

$$\|u - u_n\|_p \leq \|f - f_n\|_p \|h_{\xi_1}\|_1 .$$

Es claro, entonces, que u_n converge a u en norma $L^p(\mathbb{R})$. Aplicando el mismo argumento con la desigualdad de Young para sus derivadas débiles se tiene que

$$u_n'(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\xi_1(x-y)} f_n(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{x}^{\infty} e^{\xi_1(x-y)} f_n(y)\,dy$$

converge en norma $L^p(\mathbb{R})$ a la función

$$g(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-\xi_1(x-y)} f(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{x}^{\infty} e^{\xi_1(x-y)} f(y)\,dy.$$

De esta forma, $g = u' \in L^p(\mathbb{R})$ y $u_n'' = \lambda u_n - f_n$ converge a $\lambda u - f$, por lo que $\lambda u - f = u'' \in L^p(\mathbb{R})$. Así se tiene que, efectivamente, $u \in D(A_p) = W^{2,p}(\mathbb{R})$, y, por tanto, se ha comprobado que la realización del laplaciano unidimensional en cualquier espacio $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$ sobre la recta real completa es un operador sectorial, ya que su espectro es el semieje real negativo y se dispone de cota $\|R(\lambda : A_p)f\|_p \leq \|f\|_p / |\lambda|\cos(\theta/2)$.

Se observa que no se verifica exactamente la propiedad pedida en el Teorema 3.6.1, debido a que 0 pertenece al espectro y no al conjunto resolvente. Basta, sin embargo, con desplazar un $\epsilon > 0$ arbitrario el origen del operador para estar dentro del conjunto resolvente, y, además, se puede tomar cualquier $0 < \delta < \pi/2$ de forma que exista $M > 0$ tal que $M^{-1} < \cos((\pi/2 + \delta)/2)$ y, por tanto, se tenga la cota pedida en el apartado (b) del Teorema 3.6.1, siendo pues generador de un semigrupo analítico. Cabe destacar que, en literatura relacionada, se pide a veces una hipótesis diferente a la que aparece en dicho teorema: que dados $0 < \delta < \pi/2$ y $M > 0$ en un cono

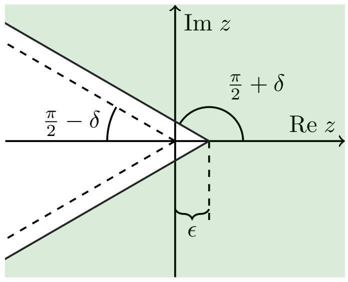

Figura 3.7: Representación del desplazamiento en el conjunto resolvente.

$$\Sigma_\delta = \left\{ \lambda : \ |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}$$

se verifique

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda| + 1}, \qquad \text{para } \lambda \in \Sigma_\delta, \tag{3.9}$$

en lugar de exigir el habitual

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \qquad \text{para } \lambda \in \Sigma_\delta, \ \lambda \neq 0. \tag{3.10}$$

La cuestión es que estas dos formulaciones son equivalentes (no con la misma contante ni el mismo cono) cuando $0 \in \rho(A)$. Es inmediato que $\frac{M}{|\lambda|+1} \leq \frac{M}{|\lambda|}$, por lo que la primera implica la segunda con la misma constante y mismo cono. Ahora bien, dada la segunda forma y $0 \in \rho(A)$, sea α verificando $0 < \alpha < \delta$, y $r > 0$ arbitrario. Entonces, se puede tomar un sector circular cerrado

$$\Lambda = \left\{ \lambda : \ |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad |\lambda| \leq r \right\} \cup \{0\},$$

que es compacto y está contenido dentro del conjunto resolvente. Por tanto, existe $M_1 > 0$ tal que $\|R(\lambda : A)\| \leq M_1$ para $\lambda \in \Lambda$. Operando con $C > M$ se puede escribir

$$\frac{M}{|\lambda|} \leq \frac{C}{|\lambda| + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M}{C - M} \leq |\lambda|.$$

Haciendo $r = \frac{M}{C-M}$ se obtiene el valor de $C = M(1 + 1/r)$, lo que quiere decir que si se toma $C = \sup\{M_1, M(1 + 1/r)\}$ se tendrá la cota requerida en Σ_α. Por eso, siempre que el 0 esté contenido en $\rho(A)$ no importa cuál de las dos caracterizaciones se utilice.

Esta realización que se ha descrito es la adecuada para resolver el Problema Puro de Valores Iniciales para el Laplaciano. A continuación, se presenta también el análisis de la realización correspondiente al problema Dirichlet en un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ para el laplaciano. Es reseñable que el espectro de un mismo operador diferencial cambia de una realización a otra, aunque compartan siempre propiedades similares. Los espectros de las distintas realizaciones del Laplaciano, por ejemplo, comparten siempre estar contenidos en el semieje real negativo del plano complejo.

3.6.2. El ejemplo del laplaciano: realización Dirichlet

Se considera el intervalo unidad $I = (0,1)$, dado que cualquier otro intervalo abierto de $\mathbb{R}$ se puede reescalar a este, y, por tanto, construir un problema equivalente. Sobre este intervalo se va a considerar la realización del laplaciano correspondiente al problema Dirichlet homogéneo, es decir, aquel en el que el valor de las funciones en los extremos de I está fijado a 0. Dado $1 \le p < \infty$, se considera la correspondiente realización del operador diferencial laplaciano

$$D(A_p) = \left\{u \in W^{2,p}(0,1) \mid u(0) = u(1) = 0\right\} \subset L^p(0,1), \qquad A_p u = u''. \tag{3.11}$$

Se quiere ver, entonces, que el operador $A_p : D(A_p) \to L^p(0,1)$ así definido es un operador sectorial. En la asignatura de *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, se obtuvieron los autovalores de este problema, lo cuales se demostró que eran únicamente $-n^2\pi^2$, con $n \in \mathbb{N}$. Por esta razón la exposición siguiente se centrará en demostrar que el conjunto resolvente contiene a $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ y que A_p es un operador sectorial.

Dado $\lambda \notin (-\infty,0]$, se define de nuevo $\mu = \sqrt{\lambda}$ de forma que $\operatorname{Re}\mu > 0$. Para todo $f \in L^p(0,1)$, se puede extender f a una función $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$ de forma que se verifique $\|f\|_{L^p(0,1)} = \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})}$, simplemente tomando $\tilde{f}(x) = 0$ para $x \notin (0,1)$.

Considérese ahora, análogamente a (3.8), $\hat{u}$ definida por

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{2\xi_1}\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi_1|x-y|}\tilde{f}(y)\,dy,$$

y se sabe, por la sección anterior, que $\tilde{u}|_{[0,1]}$ es solución de la ecuación $\lambda u - u'' = f$, satisfaciendo

$$\left\|\hat{u}|_{[0,1]}\right\|_{L^p([0,1])} \le \|\hat{u}\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \frac{\|\hat{f}\|_{L^p(\mathbb{R})}}{|\lambda|\cos(\theta/2)} = \frac{\|f\|_{L^p([0,1])}}{|\lambda|\cos(\theta/2)}, \tag{3.12}$$

donde $\theta = \arg\lambda$. Sin embargo, de ninguna manera está garantizado que $\tilde{u}|_{[0,1]}$ verifique las condiciones frontera Dirichlet homogéneas en 0 y 1. Para encontrar soluciones que cumplan las condiciones frontera se definen constantes que tomen los valores $\tilde{u}(0)$ y $\tilde{u}(1)$,

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\mu}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mu|s|}\tilde{f}(s)\,ds = \tilde{u}(0), \qquad \gamma_1 = \frac{1}{2\mu}\int_{\mathbb{R}} e^{-\mu|1-s|}\tilde{f}(s)\,ds = \tilde{u}(1). \tag{3.13}$$

De esta forma, como todas las soluciones de la ecuación $\lambda u - u'' = f$ que pertenezcan a $W^{2,p}(0,1)$ están dadas por

$$u(x) = \tilde{u}(x) + c_1u_1(x) + c_2u_2(x), \tag{3.14}$$

donde $u_1(x) = e^{-\mu x}$ y $u_2(x) = e^{\mu x}$, dos soluciones independientes de la ecuación diferencial homogénea. Se busca, por tanto, tratar de determinar c_1 y c_2 en (3.14) de forma que $u(0) = u(1) = 0$. Esto resulta en resolver el sistema

$$\begin{pmatrix}-\gamma_0\\-\gamma_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ e^{-\mu} & e^{\mu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix},$$

que tiene solución única porque el determinante es distinto de 0 (recordemos que $\operatorname{Re}\mu > 0$), y, por tanto,

$$c_1 = \frac{1}{e^{\mu}-e^{-\mu}}\left(\gamma_1 - e^{\mu}\gamma_0\right), \qquad c_2 = \frac{1}{e^{\mu}-e^{-\mu}}\left(-\gamma_1 + e^{-\mu}\gamma_0\right). \tag{3.15}$$

Se consideran ahora las normas de los elementos involucrados restringidos a $(0,1)$, para conseguir la acotación buscada.

$$\left\|u_1|_{[0,1]}\right\|_{L^p([0,1])} = \left(\int_0^1 e^{-xp\operatorname{Re}\mu}dx\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{p\operatorname{Re}\mu}\left(1-e^{-p\operatorname{Re}\mu}\right)\right)^{1/p} \leq \frac{1}{(p\operatorname{Re}\mu)^{1/p}},$$

$$\left\|u_2|_{[0,1]}\right\|_{L^p([0,1])} = \left(\int_0^1 e^{xp\operatorname{Re}\mu}dx\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{p\operatorname{Re}\mu}\left(e^{p\operatorname{Re}\mu}-1\right)\right)^{1/p} \leq \frac{e^{\operatorname{Re}\mu}}{(p\operatorname{Re}\mu)^{1/p}}.$$

Por otro lado, para γ_0 y γ_1, se aplica la desigualdad de Hölder en (3.13), obteniendo (teniendo en cuenta que $\tilde{f}$ se anula fuera de $(0,1)$, se puede considerar el dominio de integración $(0,1)$)

$$|\gamma_0| \leq \frac{1}{2|\mu|}\|f\|_{L^p(0,1)}\frac{1}{(q\operatorname{Re}\mu)^{1/q}}, \qquad |\gamma_1| \leq \frac{1}{2|\mu|}\|f\|_{L^p(0,1)}\frac{1}{(q\operatorname{Re}\mu)^{1/q}},$$

donde p y q son exponentes conjugados, $1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Téngase cuidado con la expresión anterior en el caso $p=1$, en el cual lo que aparece es la norma infinito de $u_1|_{[0,1]}$, que vale 1, y por lo cual se obtendría $|\gamma_j| \leq \|f\|_{L^1(0,1)}/(2|\mu|)$, $j=0,1$, en vez de la expresión anterior. Para acabar la acotación, se tiene que

$$e^{\operatorname{Re}\mu} - e^{-\operatorname{Re}\mu} < \left|e^{\mu}-e^{-\mu}\right|,$$

luego de (3.15),

$$|c_1| \leq \frac{1+e^{\operatorname{Re}\mu}}{e^{\operatorname{Re}\mu}-e^{-\operatorname{Re}\mu}}\frac{1}{2|\mu|}\|f\|_{L^p(0,1)}\frac{1}{(q\operatorname{Re}\mu)^{1/q}},$$

$$|c_2| \leq e^{-\operatorname{Re}\mu}\frac{1+e^{\operatorname{Re}\mu}}{e^{\operatorname{Re}\mu}-e^{-\operatorname{Re}\mu}}\frac{1}{2|\mu|}\|f\|_{L^p(0,1)}\frac{1}{(q\operatorname{Re}\mu)^{1/q}}.$$

Como $(1+e^{\operatorname{Re}\mu})/(e^{\operatorname{Re}\mu}-e^{-\operatorname{Re}\mu}) \to 1$ cuando $\operatorname{Re}\mu \to \infty$, existe $R>0$ y $C>0$ tal que si $|\lambda|>R$ entonces $(1+e^{\operatorname{Re}\mu})/(e^{\operatorname{Re}\mu}-e^{-\operatorname{Re}\mu}) < C$. De esta forma, para $|\lambda|>R$, teniendo en cuenta que en el cono alrededor del eje real positivo de ángulo $\pi/2<\theta_0<\pi$ se puede escribir $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$, con $|\theta|<\theta_0$, y $\operatorname{Re}\mu \geq |\mu|\cos(\theta_0/2)$ y $|\mu|^2 = |\lambda|$,

$$\|c_1u_1\|_{L^p([0,1])} \leq \frac{1}{(p\operatorname{Re}\mu)^{1/p}}C\frac{1}{2|\mu|}\|f\|_{L^p(0,1)}\frac{1}{(q\operatorname{Re}\mu)^{1/q}} \leq \frac{C'}{|\lambda|}\|f\|_{L^p(0,1)},$$

donde se han juntado todas las contantes en una sola, C'. Análogamente se obtiene lo mismo para $\|c_2u_2\|_{L^p([0,1])}$. De esta forma, por (3.12) y (3.14), se tiene que para $|\lambda|>R$ en el cono de $\arg\lambda<\theta_0$ se verifica

$$\|u\|_{L^p([0,1])} \leq \frac{C'}{|\lambda|}\|f\|_{L^p(0,1)}, \tag{3.16}$$

donde C' es una constante posiblemente distinta. Para acabar, falta razonar para $|\lambda|\leq R$. Como $\lambda \to R(\lambda, A_p)$ es una función holomorfa en el conjunto resolvente, es, de hecho, continua. Por tanto, como el conjunto $\{|\lambda|\leq R,\ |\arg\lambda|\leq\theta_0\}$ está contenido en el resolvente, bajo cualquier desplazamiento del 0 un $\epsilon>0$ se tendrá que $\{|\lambda|\leq R,\ |\arg\lambda|\leq\theta_0\}\cup\{0\}$ es un conjunto compacto contenido dentro del conjunto resolvente. De esta forma, la resolvente se puede acotar por una constante en ese conjunto, y, por tanto, se ha acabado de ver lo que se quería, que A_p es un operador sectorial, al desplazarlo cualquier $\epsilon>0$, para $1\leq p<\infty$.

3.6.3. Potencias fraccionarias de generadores de semigrupos analíticos

Se presenta a continuación un breve resumen de una de las formas típicas de construir espacios de interpolación en problemas parabólicos como los que se va a estudiar. Esta construcción es de interés en los casos semilineal y casilineal. El objetivo de esta sección es, dado un operador lineal cerrado $-A : D(A) \subset X \to X$, generador de un semigrupo analítico, dar de forma 'natural' una familia de espacios de Banach parametrizados entre $D(A)$ y X de forma que tengan las propiedades expuestas de los espacios de interpolación en la Sección 2.6. Utilizar $-A$ como generador del semigrupo analítico en vez de A, poniéndolo con el signo contrario en la ecuación diferencial, es una notación usual en problemas parabólicos, y precisamente el propósito es el de simplificar la notación al utilizar potencias fraccionarias de operadores.

Debido a que estos no aparecen explícitamente en la construcción que se presenta en este trabajo de la solución del problema lineal no autónomo, no se presentará la construcción entera sino únicamente las ideas principales, cuya explicación más completa se puede encontrar en la Sección 2.6. de [19] o en la Sección 2.2. de [17]. Aunque no se utilicen en este trabajo, estos espacios son fundamentales a la hora de resolver los mismos problemas que se tratan aquí, si se prescinde de la hipótesis de dominio denso, y también en la teoría posterior.

Dado un operador lineal A verificando lo previamente expuesto, se define, para $\alpha > 0$, la *potencia fraccionaria* de A generalizando de forma intuitiva la integral de Dunford, (3.4),

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma z^{-\alpha}(A - zI)^{-1}\, dz, \tag{3.17}$$

donde Γ es una curva en el plano complejo contenida dentro de $\rho(A)$ que va desde $\infty e^{-i\theta}$ hasta $\infty e^{i\theta}$ (con $\omega < \theta < \pi$) y que evita el origen de coordenadas (como en ocasiones anteriores, no hace falta explicitar más la forma de la curva por la holomorfía del integrando, que permite cambiar el camino de integración).

Se puede comprobar que los operadores antes definidos son invertibles, y se define A^α, con $\alpha > 0$, como $(A^{-\alpha})^{-1}$. Se verifica que, para $n \in \mathbb{N}$, los operadores así definidos coinciden con las potencias 'clásicas' de A y, además, para toda esta familia de operadores se consigue la natural asociatividad en los exponentes $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$. Las propiedades principales de estos operadores quedan recogidas en el siguiente teorema, y generalizan en cierta forma el Lema 3.6.1 y el Corolario 3.6.1.

Teorema 3.6.2. Dado $-A$, generador de un semigrupo analítico $T(t)$, si $0 \in \rho(A)$ entonces

(I) $T(t) : X \to D(A^\alpha)$ para todo $t > 0$ y $\alpha \geq 0$.

(II) para todo $x \in D(A^\alpha)$ se tiene $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$.

(III) existe $\delta > 0$ tal que para todo $t > 0$ el operador $A^\alpha T(t)$ es lineal y continuo y, además,

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

(IV) dado $0 < \alpha \leq 1$ y $x \in D(A^\alpha)$ entonces

$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Proposición 3.6.2. Para $0 < k < n$, el espacio $D(A^k)$ dotado de la norma

$$\|x\|_{D(A^k)} = \|A^k x\|_X$$

es un espacio de interpolación de índice k/n (o lo que es lo mismo, de clase $J_{k/n}$) entre X y $D(A^n)$, es decir, se verifica que

$$\|x\|_{D(A^k)} \leq C \, \|x\|_X^{1-\frac{k}{n}} \, \|x\|_{D(A)}^{\frac{k}{n}} .$$

Capítulo 4

El problema lineal autónomo

4.1. El caso lineal homogéneo

El primer problema a resolver en el camino hacia el caso lineal no autónomo es aquel en el que el operador sectorial que aparece en el problema es independiente del tiempo, es decir, el caso autónomo. Para comenzar, dados X un espacio de Banach y $-A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal que genera un semigrupo analítico, se pretende abordar un problema homogéneo como el que se muestra a continuación:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X. \end{cases} \tag{4.1}$$

Se entenderá que $u : [0, \infty) \to X$ es una solución si esta es continua para $t \geq 0$, continuamente diferenciable para $t > 0$, se verifica que $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ y que tanto la ecuación diferencial como la condición inicial dadas por (4.1) se cumplen. En resumidas cuentas, las soluciones deben pertenecer a $C^0([0, \infty), X) \cap C^1((0, \infty), X)$ y verificar las ecuaciones (4.1).

Teorema 4.1.1. Si $-A$ es generador infinitesimal de un semigrupo analítico de operadores lineales y continuos, $T(t)$, entonces para todo $u_0 \in X$ el problema (4.1) tiene solución.

Demostración. Utilizando la parte (d) del Teorema 3.6.1 se tiene que $T(t)$ es diferenciable por ser $-A$ analítico, luego si se toma $u(t) = T(t)u_0$ se tiene que $u'(t) = -AT(t)u_0$ para $t > 0$, es decir, que se verifica la primera ecuación del problema (4.1), y, además, por el Corolario 3.4.1, $T(t)u_0$ es función continua de t para $t \geq 0$, por lo que es $C^0([0, \infty), X)$.

La continuidad de $AT(t)u_0$ para $t > 0$ se tiene por el apartado (ii) del Lema 3.6.1, ya que la continuidad en norma implica la continuidad fuerte. En definitiva, $u(t)$ es continuamente diferenciable para $t > 0$, es decir, es lo que se entiende por una función de clase $C^1((0, \infty), X)$. Además, dado que $T(0) = I$ se tiene también la condición inicial. En consecuencia, existe solución al problema planteado. □

Este resultado es cierto, de hecho, exigiendo menos de lo que hemos pedido. Bastaría con pedir que el semigrupo generado por $-A$ fuera diferenciable, lo cual es menos exigente. Sin embargo, como nuestro interés viene condicionado por los operadores sectoriales, que generan semigrupos analíticos, no dedicaremos más atención a esa condición menos exigente.

Por otro lado, cabe destacar que si se hubiera pedido tan sólo regularidad C_0 al semigrupo se podría obtener existencia y unicidad para dato inicial $u_0 \in D(A)$ en vez de para $u_0 \in X$. Este es un reflejo del conocido hecho de que las ecuaciones parabólicas consiguen reparar la falta de regularidad del dato inicial en cualquier $\epsilon > 0$, mientras que en las ecuaciones de tipo hiperbólico un problema en la regularidad del dato inicial ($u_0 \in X \setminus D(A)$) no puede ser reparado y generaría un shock o rotura cuya propagación habría que estudiar.

Para ver que la solución es, de hecho, única se requiere pedir mucho menos que la analiticidad, como se enunciará en el Teorema 4.1.2, que viene tras el siguiente lema.

Lema 4.1.1. Dado $T > 0$, sea $u : [0,T] \to X$ una función continua. Si existe $M > 0$ tal que

$$\left\| \int_0^T e^{ns} u(s)\, ds \right\| \leq M, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces $u(t) \equiv 0$ en $[0,T]$.

Demostración. La clave está en considerar la siguiente serie de potencias,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn\tau} = 1 - \exp(-e^{n\tau}),$$

y aplicar de dos formas distintas el Teorema 2.3.5 de la Convergencia Dominada a la expresión siguiente, donde se toma $t \in [0,T]$, la integral existe porque el integrando es función continua de s,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} u(s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Big(1 - \exp\big(-e^{n(t-T+s)}\big)\Big) u(s)\, ds. \tag{4.2}$$

El primer lugar donde se aplica el Teorema 2.3.5 es en el término de la izquierda de (4.2), para intercambiar la integral y la suma, y la segunda vez es en el término de la derecha de (4.2) para intercambiar el límite y la integral. Para la aplicación en el término de la izquierda se tiene que efectivamente la serie converge para todo $s \in [0,T]$ y, además,

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} u(s) \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kn(t-T+s)}}{k!} \|u(s)\| = \|u(s)\| \Big(\exp\big(e^{n(t-T+s)}\big) - 1\Big),$$

donde la cota que se ha conseguido es una función continua de s (ya que u es continua por hipótesis), por tanto, integrable en $[0,T]$, y no depende de N. Con esto tenemos permitido intercambiar la suma y la integral, obteniendo para la norma del primer miembro

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} u(s)\, ds \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+s)} u(s)\, ds \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kn(t-T)} \left\| \int_0^T e^{kns} u(s)\, ds \right\| \\
&\leq M \Big(\exp\big(e^{n(t-T)}\big) - 1\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

donde para acotar $\left\|\int_0^T e^{kns}u(s)\,ds\right\|$ se ha utilizado la hipótesis del enunciado. En consecuencia, la expresión (4.2) se puede reescribir como

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T \Big(1-\exp\big(-e^{n(t-T+s)}\big)\Big)\,u(s)\,ds = 0. \tag{4.3}$$

Se aplica ahora, de nuevo, el Teorema 2.3.5 de la Convergencia Dominada para intercambiar el límite en n y la integral. Para ello, se tiene en cuenta que, para casi todo punto $s \in [0,T]$ (todos menos $s = T-t$), se verifica

$$\Big(1-\exp(-e^{n(t-T+s)})\Big)\,u(s) \xrightarrow{n\to\infty} \kappa_{(T-t,T]}(s)u(s),$$

donde κ_A es la función que vale 1 en A y 0 fuera de A. Además, se tiene que

$$\left\|\Big(1-\exp(-e^{n(t-T+s)})\Big)\,u(s)\right\| \le \|u(s)\|\,,$$

que es integrable por ser continua, luego se aplica el Teorema 2.3.5 de la Convergencia Dominada en (4.3) y se obtiene

$$\int_{T-t}^{T} u(s)\,ds = 0, \qquad \text{para todo } t\in[0,T].$$

Ahora, tomando un funcional lineal y continuo $f \in X^*$ se tiene que, por el Teorema 2.3.3, se puede escribir:

$$\left\langle f, \int_{T-t}^{T} u(s)\,ds\right\rangle = \int_{T-t}^{T}\langle f, u(s)\rangle\,ds = 0, \qquad \text{para todo } t\in[0,T].$$

Por reducción al absurdo, si existe $t_0 \in [0,T]$ tal que $\langle f, u(t_0)\rangle \neq 0$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\langle f, u(t)\rangle \neq 0$ y tiene signo constante en $t \in [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$. En ese caso,

$$0 = \int_{t_0-\epsilon}^{T}\langle f, u(s)\rangle\,ds - \int_{t_0+\epsilon}^{T}\langle f, u(s)\rangle\,ds = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}\langle f, u(s)\rangle\,ds,$$

donde la última integral no puede ser 0 por el razonamiento anterior. Por tanto, se tiene que $\langle f, u\rangle \equiv 0$ para todo $f \in X^*$, luego $u \equiv 0$, como se quería probar. □

Obsérvese la gran utilidad que ha tenido la aplicación de un funcional lineal y continuo $f \in X^*$ en la demostración anterior para probar un resultado análogo al Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones para funciones que toman valores en un espacio de Banach. Se ha conseguido sortear esta dificultad. Esto ha de tenerse siempre en cuenta en situaciones similares.

Teorema 4.1.2. Sea $A : D(A) \to X$ un operador lineal con $D(A)$ denso en X. Si $R(\lambda : -A)$ existe para todos los reales $\lambda \ge \lambda_0$ y

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \lambda^{-1}\log\|R(\lambda : -A)\| \le 0,$$

entonces el problema de valor inicial (4.1) tiene a lo sumo una solución.

Demostración. En primer lugar, se traslada el semigrupo para poder trabajar más cómodamente. Análogamente a cuando se enunciaron las propiedades de los semigrupos analíticos, hay que ver, siendo $u(t)$ solución del problema (4.1), de qué problema es solución $e^{-\lambda_0 t}u(t)$. Es inmediato que $u(t)$ es continua en $[0,T]$ y continuamente diferenciable en $(0,T]$ si y sólo si $e^{-\lambda_0 t}u(t)$ es continua en $[0,T]$ y continuamente diferenciable en $(0,T]$. Se tiene que $u(t)$ será solución de (4.1) si y solo si $v(t) = e^{-\lambda_0 t}u(t)$ lo es de

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) + (A + \lambda_0 I)v(t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ v(0) = u_0, & u_0 \in X, \end{cases} \tag{4.4}$$

ya que se tiene

$$\frac{dv}{dt}(t) + \lambda_0 v(t) = e^{-\lambda_0 t}\frac{du}{dt}(t).$$

Se tiene, por tanto, si se denota $B = A + \lambda_0 I$, que $R(\lambda : -B) = R(\lambda + \lambda_0 : -A)$ existe para todos los $\lambda \geq 0$, y, además, verifica la condición propuesta en el enunciado, ya que al desplazar por λ_0 la expresión no se altera el límite. Si existieran dos soluciones $v_1(t)$ y $v_2(t)$ al problema desplazado (4.4), entonces $v_1(t) - v_2(t)$ sería solución del mismo problema, pero sustituyendo la condición incial $v(0) = u_0$ por $v(0) = 0$. Es por esto que, si se prueba que la solución al problema (4.4) con $u_0 = 0$ es idénticamente nula, se habrá conseguido la unicidad de soluciones, porque implicaría $v_1(t) = v_2(t)$ para todo $t \in [0,\infty)$, y, por tanto $u_1(t) = u_2(t)$ en $t \in [0,\infty)$.

Considérese entonces $v(t)$ solución del problema (4.4) con $u_0 = 0$. Si se toma la función $t \to R(\lambda : -B)v(t)$ con $\lambda > 0$, esta es derivable para $t > 0$ por ser composición de un operador lineal y continuo con una función derivable, luego se puede derivar y después aplicar la definición de resolvente, $R(\lambda : -B)(\lambda I + B) = I$, para manipular la expresión, $R(\lambda : -B)B = I - \lambda R(\lambda : -B)$,

$$\frac{d}{dt}R(\lambda : -B)v(t) = -R(\lambda : -B)Bv(t) = \lambda R(\lambda : -B)v(t) - v(t). \tag{4.5}$$

Juntando (4.5) con la condición inicial $R(\lambda : -B)v(0) = 0$, se tiene un problema de valor inicial para una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO). Por tanto, su solución es única y conocida (ver [27] o el Teorema 7.3. de [33] para la prueba de existencia y unicidad de soluciones para EDO's en espacios de Banach, resultados análogos a los ya obtenidos para $\mathbb{R}^n$ durante el Grado), buscamos soluciones para $g(t) = R(\lambda : -B)v(t)$. En primer lugar, se resuelve la ecuación homogénea (se quita el término $v(t)$ de (4.5))

$$\frac{dg}{dt}(t) = \lambda g(t) \quad \Rightarrow \quad g(t) = C\exp(\lambda t), \qquad C \in X,$$

y, a continuación, por variación de las constantes se obtiene la solución particular. Se buscan soluciones de la forma

$$g(t) = C(t)\exp(\lambda t), \qquad C : [0,T] \to X,$$

con $C(t)$ suficientemente regular. Introduciendo esto en (4.5) se tiene

$$C'(t)\exp(\lambda t) = -v(t) \quad \Rightarrow \quad C(t) = -\int_0^t \exp(-\lambda\tau)v(\tau)\,d\tau.$$

La solución particular así obtenida ya cumple la condición inicial $g(0) = 0$ pedida, por lo que no hace falta sumar de nuevo la solución general del homogéneo. En definitiva, se tiene que la solución de (4.5) es

$$R(\lambda : -B)v(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} v(\tau)\, d\tau. \tag{4.6}$$

La hipótesis del enunciado, que recuerda a la defininción del tipo de una función entera de orden 1, no es más que una hipótesis sobre el crecimiento de $R(\lambda : -B)$ cuando $\lambda \to \infty$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Se quiere ver que esta hipótesis implica que, para todo $\sigma > 0$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{-\sigma\lambda} \|R(\lambda : -B)\| = 0.$$

Se comprueba por reducción al absurdo. Si no fuera así existirían $\sigma > 0$, $\epsilon > 0$ y $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ reales tales que $\lambda_n \to \infty$, de forma que $e^{-\sigma\lambda_n} \|R(\lambda_n : -B)\| > \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\log \|R(\lambda : -B)\|}{\lambda_n} > \frac{\log \epsilon}{\lambda_n} + \sigma.$$

Tomando límites en la expresión anterior cuando n tiende a infinito vemos que la expresión de la derecha tiende a $\sigma > 0$, y esto contradice la hipótesis del límite superior del enunciado, por lo que se tiene que para todo $\sigma > 0$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{-\sigma\lambda} \|R(\lambda : -B)\| = 0.$$

Multiplicando la solución (4.6) por $e^{-\sigma\lambda}$ y tomando el límite cuando λ tiende a infinito se tiene, utilizando la expresión anterior, que

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{-\sigma\lambda} R(\lambda : -B)v(t) = -\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t e^{\lambda(t-\sigma-\tau)} v(\tau)\, d\tau = 0.$$

De esta forma, al aplicar el Lema 4.1.1 se tiene que $v(\tau) \equiv 0$ para $0 \le \tau \le t$, y como t es arbitrario, se tiene lo que se pretendía: $v(t) \equiv 0$ para $t \ge 0$. □

Juntando los resultados de los dos teoremas anteriores en uno sólo se obtiene el resultado de existencia (Teorema 4.1.1) y unicidad (Teorema 4.1.2) para el problema lineal homogéneo (4.1).

Corolario 4.1.1. Si $-A$ es generador infinitesimal de un semigrupo analítico de operadores lineales y continuos, entonces para todo $u_0 \in X$ el problema (4.1) tiene solución única.

Demostración. Basta probar que los semigrupos analíticos verifican la propiedad del enunciado del Teorema 4.1.2. Por la parte (c) del Teorema 3.6.1 se puede escribir para $\lambda \in [0, \infty)$:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1} \|R(\lambda : -A)\| \le \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \log \frac{C}{\lambda} = 0.$$

En consecuencia, se tiene la unicidad. La existencia es directa por el Teorema 4.1.1. □

Es importante recalcar la diferencia entre el problema que se acaba de analizar y una ODE como las que se pueden encontrar en el ya citado [27]. La diferencia fundamental es que en el caso analizado el operador lineal A que da lugar al problema a resolver no es un operador lineal y continuo mientras que en el caso de las ODE's sí que lo es. En este caso A se trata de un operador no acotado, es decir, cuyo dominio no es el espacio de Banach X completo sino un subespacio vectorial suyo $D(A) \subset X$. Esta diferencia, que a primera vista puede parecer pequeña es la que introduce las diferencias fundamentales que permiten tratar ecuaciones en derivadas parciales mediante este procedimiento en el que parece que se está tratando con ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.2. El caso lineal no homogéneo

El siguiente paso natural es considerar el problema que se ha planteado en la sección anterior conjuntamente con un término fuente del tipo $f : [0, T) \to X$, con X el espacio de Banach donde toma valores u y en cuyo subespacio $D(A)$ está definido A.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t), & \text{para } t > 0, \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X. \end{cases} \tag{4.7}$$

Para resolverlo se buscará una 'solución débil' construida al estilo de variación de las constantes o principio de Duhamel, y, después, se dará con las hipótesis de regularidad necesarias para que dicha 'solución débil' sea solución en el sentido clásico.

Definición 4.2.1. Una función $u : [0, T) \to X$ es denominada una **solución clásica** del problema lineal no homogéneo (4.7) si es continua en $[0, T)$, continuamente diferenciable en $(0, T)$, verifica $u(t) \in D(A)$ en $(0, T)$ y, además, se satisface (4.7).

Definición 4.2.2. Dada $f \in L^1([0, T), X)$, y siendo $T(t)$ el semigrupo de operadores lineales y continuos de clase C_0 que tiene a $-A$ como generador infinitesimal, entonces se dice que $u : [0, T) \to X$ es una **solución débil** del problema lineal no homogéneo (4.7) si viene dada por la expresión

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds. \tag{4.8}$$

Efectuando una derivación formal se comprueba que esta construcción es un candidato adecuado para resolver el problema (4.7), ya que

$$\frac{du}{dt}(t) = -AT(t)u_0 + f(t) - \int_0^t AT(t-s)f(s)\,ds = -Au(t) + f(t).$$

Además, trivialmente verifica la condición inicial. Como se anticipaba en la Sección 2.5, va a surgir una diferencia entre los problemas generados por semigrupos de clase C_0 frente a los generados por semigrupos analíticos, aunque en esta sección se explorarán únicamente estos últimos. Los primeros, al igual que las ODE's, exigirán que el término fuente sea Lipschitziano para que la solución sea regular, mientras que los problemas provenientes de operadores sectoriales requerirán una condición más débil: que sea Hölder continua. Este es el motivo que llevó a la introducción de estos espacios de funciones en la Sección 2.5.

Proposición 4.2.1. Dada $f \in L^1([0, T), X)$, si $-A$ es generador de un semigrupo de clase C_0, entonces para todo $u_0 \in X$ el problema lineal no homogéneo (4.7) tiene a lo sumo una única solución clásica. Si tiene solución clásica, su expresión viene dada por la de la solución débil (4.8).

Demostración. Si u es solución clásica del problema (4.7) y $T(t)$ el semigrupo de clase C_0 generado por $-A$, dado $t \in [0, T)$, entonces $T(t-s)u(s)$ está bien definida para todo $s \in [0, t]$, y es diferenciable para todo $s \in (0, t)$. Además, su derivada es conocida utilizando la regla de la cadena, la ecuación diferencial (4.7) y la conmutatividad del semigrupo con su generador.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)u(s)\big) &= AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= AT(t-s)u(s) - T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Como $f \in L^1([0,T),X)$, se quiere ver que $T(t-s)f(s)$ es integrable en $s \in [0,t)$ para todo $t \in [0,T)$. Basta ver que $\|T(t-s)f(s)\|$ es integrable en $s \in [0,t)$, y, para ello, se tiene la cota

$$\|T(t-s)f(s)\| \leq Me^{\omega(t-s)} \|f(s)\| \leq Me^{\omega T} \|f(s)\|,$$

que es integrable en virtud del Teorema 2.3.2 de Bochner, ya que f es integrable. La cota para el semigrupo se tiene porque es de clase C_0. En consecuencia, $T(t-s)f(s)$ es integrable en $s \in [0,t)$ para todo $t \in [0,T)$.

Integrando, entonces, entre 0 y t la expresión (4.9), se obtiene que u debe verificar la expresión de la solución débil, y, por tanto, de existir solución clásica al problema es única porque viene dada, precisamente, por la solución débil (4.8). □

La cuestión relevante a estudiar a continuación es en qué casos el problema tiene de hecho solución clásica, es decir, cuándo la solución débil verifica las condiciones de regularidad suficientes como para ser solución clásica. Este aspecto será estudiado considerando ya que $-A$ es generador de un semigrupo analítico de operadores.

Teorema 4.2.1. Sea $-A$ un generador de un semigrupo analítico $T(t)$. Dada $f \in L^1([0,T],X)$ localmente Hölder continua en $(0,T]$ se tiene que, para todo $u_0 \in X$, el problema lineal no homogéneo (4.7) tiene solución única.

Demostración. La Proposición 4.2.1 garantiza que la solución del problema (4.7), de existir, es única y tiene la forma de la solución débil. Basta entonces tomar la solución débil (4.8) y comprobar que bajo las hipótesis del enunciado posee la regularidad que requiere para ser solución clásica. Se probará, en primer lugar, que $v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$, que es el segundo sumando de (4.8), pertenece a $D(A)$ y que $Av(t)$ es continua para $t \in (0,T)$. Para este fin, se trata de aprovechar la Hölder continuidad separando la integral, haciendo aparecer un término relacionado con la misma,

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,ds + \int_0^t T(t-s)f(t)\,ds = v_1(t) + v_2(t). \tag{4.10}$$

El Teorema 3.4.2 proporciona que $v_2(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0,T]$, y, además,

$$Av_2(t) = A\left(\int_0^t T(t-s)f(t)\,ds\right) = A\left(\int_0^t T(s)f(t)\,ds\right) = \big(I - T(t)\big)f(t).$$

Como por hipótesis $f(t)$ es localmente Hölder continua, por el Teorema 2.5.1 se tiene que es, de hecho, continua y, por tanto, $Av_2(t)$ es una función continua de t. Se procede a continuación a trabajar con v_1. Para ello, se trata de definir una sucesión de funciones que converja hacia $v_1(t)$ y que permita construir convergencias uniformes de las que se deduzcan los resultados pretendidos. Se define

$$\begin{cases} v_{1,\epsilon}(t) = \displaystyle\int_0^{t-\epsilon} T(t-s)\big(f(s)-f(t)\big)\,ds, & \text{para } t \geq \epsilon, \\ v_{1,\epsilon}(t) = 0, & \text{para } t < \epsilon. \end{cases}$$

De la definición está clara la convergencia puntual $v_{1,\epsilon}(t) \to v_1(t)$ cuando $\epsilon \to 0$, ya que el argumento es integrable en $[0,t]$ (en la demostración de la Proposición 4.2.1 se demostró que $T(t-s)f(s)$ lo es, y $T(t-s)f(t)$ lo es por ser función continua de s). Dado $s \neq t$ se tiene que

$AT(t-s)$, en virtud del Lema 3.6.1, es un operador lineal y continuo, y, además es continuo como función de s en $s < t$, por ser $T(t)$ diferenciable. Teniendo esas dos condiciones, se puede razonar como se hizo en la demostración de la Proposición 4.2.1, aplicando el Teorema 2.3.2 para demostrar que $AT(t-s)f(s)$ es integrable en $s \in [0, t-\epsilon]$. Además, es inmediato que $AT(t-s)f(t)$ también es integrable en $s \in [0, t-\epsilon]$, como se requerirá, ya que es función continua en $s \in [0, t-\epsilon]$.

Aquí se pone de manifiesto la importancia de haber quitado el ϵ al dominio de integración. La posible falta de continuidad de $T(t-s)$ en $t = s$ (lo que se tiene asegurado ahí es continuidad fuerte) hace que no se tenga garantizado que $T(t-s)(f(s) - f(t))$ sea integrable directamente en $s \in [0, t]$, y eso hace que no se pueda aplicar el Teorema 2.3.4 de Hille a la integral en $[0, t]$ como se va a aplicar a continuación en $[0, t-\epsilon]$. Recortar ese $\epsilon > 0$ subsana el problema y permite seguir trabajando.

Dada la integrabilidad de $AT(t-s)(f(s) - f(t))$ en $s \in [0, t-\epsilon]$, aplicando el Teorema 2.3.4 de Hille se tiene que $v_{1,\epsilon} \in D(A)$ y, además, para $t \geq \epsilon$ se puede introducir A dentro de la integral, obteniendo

$$Av_{1,\epsilon}(t) = \int_0^{t-\epsilon} AT(t-s)\big(f(s) - f(t)\big)\, ds.$$

Gracias a la Hölder continuidad y al Teorema 3.6.1 se tiene una cota para el integrando que es válida para todo $s \in (0, t)$,

$$\|AT(t-s)(f(s) - f(t))\| \leq \|AT(t-s)\| \, \|f(s) - f(t)\| \leq \frac{C}{t-s} L \, |t-s|^{\alpha} = CL \, |t-s|^{\alpha-1}, \tag{4.11}$$

la cual es una función integrable en $s \in [0, t]$. Por tanto, se puede aplicar el Teorema 2.3.5 de la Convergencia Dominada para concluir que cuando $\epsilon \to 0$ se verifica que $Av_{1,\epsilon}$ converge hacia

$$\lim_{\epsilon \to 0} Av_{1,\epsilon}(t) = \int_0^t AT(t-s)\big(f(s) - f(t)\big)\, ds,$$

donde la integral de la derecha es convergente. Además, al ser A un operador cerrado se tiene que $v_1(t) \in D(A)$ para $t > 0$ y

$$Av_1(t) = \int_0^t AT(t-s)\big(f(s) - f(t)\big)\, ds.$$

Queda probar que $Av_1(t)$ es función continua de t. Para ello, basta considerar en primer lugar la continuidad por la derecha,

$$\begin{aligned} \int_0^{t+h} AT(t+h-s)\big(f(s) - f(t+h)\big)\, ds &- \int_0^t AT(t-s)\big(f(s) - f(t)\big)\, ds \\ &= (T(h) - 1) \int_0^t AT(t-s)\big(f(s) - f(t)\big)\, ds \\ &\quad + \int_0^t AT(t+h-s)\big(f(t) - f(t+h)\big)\, ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} AT(t+h-s)\big(f(s) - f(t+h)\big)\, ds, \end{aligned}$$

donde el primer y el tercer sumando convergen gracias a (4.11), y se ve entonces que desaparecen cuando $h \to 0$. En consecuencia, el segundo sumando ha de converger también. Utilizando la Hölder continuidad y la cota para $AT(t)$, el segundo sumando se puede acotar por

$$\left\| \int_0^t AT(t+h-s)\big(f(t)-f(t+h)\big)\, ds \right\| \leq \int_0^t \frac{CLh^\alpha}{t+h-s}\, ds = CLh^\alpha \log\left(1+\frac{t}{h}\right) \xrightarrow{h\to 0} 0,$$

por lo que se tiene la continuidad por la derecha. Análogamente se obtiene la continuidad por la izquierda. En definitiva, se tiene que $v(t) \in D(A)$ y que $Av(t)$ es continua para $t \in (0,T)$.

Para concluir, dado $h > 0$, falta comprobar que se cumple la ecuación diferencial del problema. Se considera, recordando la definición de $v(t)$, (4.10),

$$\frac{T(h)-I}{h} v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)\, ds. \tag{4.12}$$

Como $v(t) \in D(A)$, al tomar el límite cuando $h \to 0$ en la expresión anterior, se obtiene que $v(t)$ es derivable por la derecha en t, y se satisface $D^+v(t) + Av(t) = f(t)$. Además, por la expresión obtenida $D^+v(t)$ es continua en $(0,T)$, por lo que $v(t)$ es continuamente diferenciable en $(0,T)$ y $v'(t) + Av(t) = f(t)$. Como $v(0) = 0$ se tiene que $u(t) = T(t)u_0 + v(t)$ es solución del problema (4.7) para todo $u_0 \in X$ y, por tanto, queda demostrado el teorema. □

4.3. Dependencia con los datos del problema

A partir de los resultados que se han presentado hasta ahora, el estudio de la continuidad de las soluciones con respecto al dato inicial y a la condición no homogénea es inmediato.

Para expresar dichos resultados se utilizará la norma infinito, definida de forma natural: dada una función $u : I \to X$, con I un intervalo en $\mathbb{R}$ y X un espacio de Banach, se definirá la norma infinito de u en I como

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in I} \|u(t)\|.$$

Teorema 4.3.1. Sea $u(t)$ la solución del problema (4.7) dada por el Teorema 4.2.1, con $u_0 \in X$ y dato no homogéneo f Hölder continua en $[0,T]$. Se tiene que $(u_0, f) \to u$ es Lipschitziana respecto del dato inicial y respecto del dato no homogéneo, cuando se toma norma infinito en $[0,T]$ tanto para u como para f.

Demostración. Dadas condiciones iniciales $u_0, \tilde{u}_0 \in X$ y f Hölder continua en $[0,T]$, sea $u_1(t)$ la solución dada por el Teorema 4.2.1 para el par (u_0, f), y $u_2(t)$ la solución para el par $(\tilde{u}_0, f)$. Se toma (4.8), y se escribe

$$u_2(t) - u_1(t) = T(t)(\tilde{u}_0 - u_0).$$

Como el semigrupo $T(t)$ tiene una cota uniforme en $0 \leq t \leq T$, en ese dominio se puede escribir

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \leq C \|\tilde{u}_0 - u_0\|,$$

y, por tanto, tomando el superior en $[0,T]$,

$$\|u_2 - u_1\|_\infty \leq C \|\tilde{u}_0 - u_0\|.$$

Ahora, para el dato no homogéneo, sea $u_1(t)$ la solución del Teorema 4.2.1 para los datos (u_0, f_1) y $u_2(t)$ para (u_0, f_2), donde $u_0 \in X$ y f_1, f_2 Hölder continuas en $[0, T]$. De nuevo, por (4.8) se tiene

$$u_2(t) - u_1(t) = \int_0^t T(t-s)\big(f_2(s) - f_1(s)\big)\, ds.$$

Acotando de la misma manera que antes, se puede escribir

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \leq \int_0^t C \|f_2 - f_1\|_\infty \, ds \leq C' \|f_2 - f_1\|_\infty .$$

En conclusión, tomando el superior en $0 \leq t \leq T$ se tiene, renombrando la constante C' por C,

$$\|u_2 - u_1\|_\infty \leq C \|f_2 - f_1\|_\infty .$$

□

4.4. Una construcción con condiciones frontera

El objetivo de esta sección es únicamente aportar las líneas generales de actuación cuando se quiere trabajar con condiciones frontera no homogéneas. En secciones anteriores se ha comentado cómo se pueden introducir condiciones frontera homogéneas en el dominio del operador a tratar, considerando distintas realizaciones del operador en cuestión. El objetivo ahora es construir una fórmula de representación integral que incorpore la contribución de la condición frontera no homogénea. En esta sección se requieren más resultados previos que los que se comentaron en el Capítulo 2, especialmente concernientes a los espacios de funciones en los que se trabaja. Estos se comentarán de forma sucinta, sin detenerse en los detalles, ya que lo que se pretende meramente es llegar a ilustrar la forma de construir la representación integral como una línea de trabajo que continúa los resultados hasta ahora presentados.

La presentación, a modo de visión global, se ceñirá a resultados probados en los artículos de C. Palencia e I. Alonso-Mallo, [5, 18], en su mayoría del segundo de los documentos. El estudio realizado en dichos artículos trabaja con semigrupos C_0 en vez de analíticos, de forma que aunque los resultados son ciertos para semigrupos analíticos es de esperar que se pudieran conseguir resultados más fuertes teniendo en cuenta las hipótesis adicionales que supone la analiticidad del semigrupo. En estos artículos pueden encontrarse todos los resultados de los enunciados que se dejarán sin probar, así como más explicaciones y precisiones al respecto.

El procedimiento en esta sección es distinto al de las anteriores, aquí se busca caracterizar problemas en los que la dependencia de la solución con el dato inicial y frontera son lineales: se parte de las propiedades de la solución y se construye una representación integral explícita. Para ello, se considera X el espacio de Banach donde actúa el operador diferencial del problema e Y el espacio de Banach donde actúa el operador frontera (piénsese, por ejemplo, de forma natural en el espacio de trazas de funciones en la frontera del dominio que se está tratando). Se consideran, entonces, problemas cuya solución venga dada por

$$u(t) = T(t)u_0 + V(t)g, \qquad \text{para } t \geq 0, \tag{4.13}$$

donde $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ es un semigrupo C_0 de operadores lineales y continuos, y $V(t) : F \to X$ para cada $t \geq 0$ es un operador lineal, donde F es un espacio de funciones definidas $[0, \infty) \to Y$

que representa el espacio de posibles datos frontera, el cual será descrito con precisión más adelante. g es el dato frontera no homogéneo y u_0 el dato inicial. Al ser $u(t)$ continua por ser solución de un problema, se tiene que $V(t)$ es fuertemente continua. Lo que se busca en esta sección es construir una expresión integral para $V(t)$ que permita incluir la contribución a la solución de las condiciones frontera no homogéneas como si se tratara de un término fuente adicional g.

Como $V(t)$ es el operador que refleja la contribución del dato frontera a la solución final, ha de exigírsele que cumpla relación de causalidad, es decir, que $V(t)g$, la parte de la solución que proviene de la frontera, dependa únicamente de los valores $g(s)$ con $s \in [0,t]$. Por otro lado, se puede deducir una útil relación funcional del hecho de que la solución $u(t+s)$ se tiene que corresponder con la solución resultante de evolucionar el dato inicial primero s y luego t. Para ello, se denomina g_s al retardo temporal positivo de magnitud s de la función g, es decir, $g_s(t) = g(t+s)$ para todo $t \geq 0$.

$$u(t+s) = T(t+s)u_0 + V(t+s)g = T(t)u(s) + V(t)g_s = T(t)T(s)u_0 + T(t)V(s)g + V(t)g_s,$$

de donde se obtiene, al aplicar la propiedad de semigrupo,

$$V(t+s)g = V(t)g_s + T(t)V(s)g, \qquad t,s \geq 0. \tag{4.14}$$

Además, como $u(0) = u_0$ se tiene que $V(0)g = 0$.

4.4.1. El espacio de funciones frontera $SW([0,\infty), Y)$

Como se ha mencionado anteriormente, la forma natural de introducir en el problema el dato frontera es mediante una función $g : [0,\infty) \to Y$, que para cada instante de tiempo aporta el elemento Y que corresponde al valor que debe tomar en ese instante el operador frontera. Las diversas características del problema en tratamiento hacen que haya que limitarse a tomar las posibles g en un espacio de funciones determinado que reúna las propiedades necesarias.

Esta sección se limitará a dar una breve explicación de la elección de este espacio, sin entrar en mayor profundidad, ya que se escapa de los objetivos del trabajo. Se puede encontrar la explicación original, en el artículo [18], que refiere a [35] para este tipo de propiedades. Las propiedades que se requieren son

- Debido a la estructura de la forma integral que se va a obtener, parecida en cierto modo a la presentada en el apartado anterior, se va a requerir que se pueda tomar la convolución de estas funciones con algún tipo de núcleo, es decir, que se pueda integrar respecto de ellas. En la expresión integral buscada va a aparecer un término de la forma

$$\int_0^t T(t-s)M(z_0)\, d\mu_g(s), \tag{4.15}$$

  donde $M(z_0)$ es un operador que ya se determinará. Como se presentó en la Sección 2.3, lo que se va a necesitar para integrar respecto de g es que se trate de funciones localmente de variación acotada (es decir que sean de variación acotada en los subintervalos compactos de $\mathbb{R}$, Sección 1.9. de [31]). Se denomina $BV([0,\infty), Y)$ al espacio de funciones $g : [0,\infty) \to Y$ localmente de variación acotada. Este espacio es, de hecho, un espacio de Fréchet (ver Sección 2.5) dotado de la familia de seminormas definidas a partir de la variación total de g

$$m_t(g) = \|g(0)\| + V_{[0,t]}(g). \tag{4.16}$$

- Además, se requiere que la convolución sea continua como función de t, y con ello no basta con que sea localmente de variación acotada. En el Capítulo III de [35] se describe las propiedades de los espacios que tengan la propiedad de Radon-Nikodym. Esta propiedad, en el caso concreto en que se está trabajando, consiste en que si se denota μ_f a la medida asociada a cada una de las funciones localmente de variación acotada del espacio (ver Sección 2.3), entonces para toda f exista una función medible $f' : [0, \infty) \to Y$ que verifique para todo conjunto A μ_f-medible

$$\mu_f(A) = \int_A f'(x)\, dx. \tag{4.17}$$

  Esto conduce a que un buen candidato sea $W^{1,1}_{loc}([0, \infty), Y)$, que es el espacio de las funciones localmente de variación acotada $g : [0, \infty) \to Y$ que admiten una derivada de Radon-Nikodym que es localmente integrable. Esta es una idea de espacio de Sobolev que de alguna manera generaliza la idea de espacio de Sobolev en $\mathbb{R}^n$ que se ha presentado en la Sección 2.5.

- En el posterior tratamiento de la fórmula de variación de las constantes se requerirá expresar la acción del operador frontera como superposición de retardos temporales del dato frontera. Por esta razón, será necesario que el espacio elegido para trabajar sea invariante tanto por retardos temporales positivos como por negativos. El espacio de Sobolev que se acaba de introducir lo verifica para retardos positivos pero no para negativos. Esta es la razón para construir $SW([0, \infty), Y)$ como el mínimo subespacio de Fréchet de $BV([0, \infty), Y)$ que es invariante por retardos temporales y que contiene a $W^{1,1}_{loc}([0, \infty), Y)$.

Como se comenta en la Sección 2.5, las funciones localmente de variación acotada sobre un intervalo acotado son un espacio de Banach dotadas de la norma consistente en la suma del valor en el extremo izquierdo más la variación total. A continuación, se conjuga esto con el hecho de que se están buscando condiciones en las que los problemas verifiquen continuidad respecto del dato frontera y que el operador $V(t)$ sea causal. Para ello, dado $T > 0$, se considera el espacio de Banach $BV([0, T])$ y se considera la familia de operadores $V(t)$, con $t \in [0, T]$. Como se están considerando operadores que provengan de un problema concreto, se tiene que, para cualquier $g \in BV([0, T])$, su evolución $V(t)g$ está acotada, por lo que por el Teorema de Banach-Steinhaus se obtiene que existe una constante $C(T) > 0$ tal que

$$\|V(t)g\| \leq C(T)m_t(g), \quad g \in SW([0, \infty), Y), \text{ con } t \in [0, T]. \tag{4.18}$$

Por tanto, se puede definir una norma para los operadores de contribución frontera como

$$\|V(T)\| = \sup\left\{\|V(T)g\| : g \in SW([0, \infty), Y),\, m_T(g) \leq 1\right\}. \tag{4.19}$$

4.4.2. La transformada de Laplace

La transformada de Laplace es de especial interés en ecuaciones diferenciales debido a que transforma las operaciones de diferenciación, integración y convolución en operaciones de multiplicación algebraica. Esta utilidad se puede vislumbrar en el siguiente ejemplo y en los resultados que se presentan a continuación. Considérese el problema de Cauchy para la ecuación $\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = 0$ con condición inicial $u(0) = u_0$, y se considera la transformada de Laplace de la solución

$$v(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t)\, dt. \tag{4.20}$$

Formalmente se puede escribir, gracias a la expresión de la transformada de Laplace de la derivada,

$$\lambda v(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u'(t)\, dt + u(0) = A \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t)\, dt + u_0.$$

Por tanto, se tiene que $(\lambda I - A)v(\lambda) = u_0$, llevando a que $v(\lambda) = R(\lambda : A)u_0$. Esta relación dota de gran importancia a la transformada de Laplace, ya que a través de ella se intuye cómo construir las soluciones del problema homogéneo si se dispone de conocimiento suficiente sobre $R(\lambda : A)$. Esto es, en definitiva, un resumen no riguroso de lo que se ha hecho a lo largo de este capítulo y el anterior, pero merece la pena enfatizar el hecho intuitivo.

Esta idea es la que subyace a tratar de utilizar esta transformada para la resolución del problema en cuestión. El objetivo de los resultados que se proponen a continuación es construir por medio de la transformada de Laplace los operadores que recojan la contribución del dato frontera a la solución del problema. En primer lugar se pretende construir la transformada de Laplace

$$W(z)g = \int_0^\infty e^{-zs} V(s)g\, ds. \tag{4.21}$$

El siguiente lema recoge la información necesaria para trabajar con ello y encontrar condiciones necesarias para que la integral de la expresión anterior converja.

Lema 4.4.1. Dado $V(t)$ verificando las condiciones antes descritas se tiene que existen $L > 0$ y $\alpha > 0$ tales que para todo $g \in SW([0,\infty), Y)$ y $t \geq 0$ se verifica

$$\|V(t)g\| \leq Le^{\alpha t} m_t(g).$$

Demostración. Si se define $B_t = \sup\{\|V(s)\| : 0 \leq s \leq t\}$, donde $\|V(s)\|$ es la norma construida mediante el Teorema de Banach-Steinhaus en el apartado anterior, entonces tomando normas, $s \geq 0$ fijo y el superior de $t \in [0,1]$ en la expresión (4.14) se tiene

$$\sup\{\|V(t+s)\| : t \in [0,1]\} \leq \sup\{\|V(t)\| + \|T(t)\|\,\|V(s)\| : t \in [0,1]\},$$

ya que $m_{t+s}(g) \leq 1$ implica $m_t(g_s) \leq 1$. Con un cambio de variable $r = t + s$ en el primer miembro y acotando (teniendo en cuenta los parámetros ω y M de las cotas habituales para semigrupos C_0) utilizando la definición de B_t

$$\sup\{\|V(r)\| : r \in [s, s+1]\} \leq \sup\{\|V(t)\| + \|T(t)\|\,\|V(s)\| : t \in [0,1]\} \leq B_1 + Me^{\omega} B_s.$$

Tomando una constante C que verifique $C > \text{máx}\{1, M\exp(\omega)\}$ y utilizando la expresión anterior se tiene

$$B_{s+1} \leq \sup\{B_s, B_1 + CB_s\} = B_1 + CB_s \quad \text{para } s \geq 0. \tag{4.22}$$

Por inducción se procede a probar que $B_k \leq (1 + C + C^2 + \cdots + C^k)B_1$. El caso base $k = 1$ es trivial, y para el paso inductivo, utilizando (4.22), se tiene

$$B_{k+1} \leq B_1 + CB_k \leq B_1 + C(1 + C + C^2 + \cdots + C^k)B_1 = (1 + C + C^2 + \cdots + C^{k+1})B_1.$$

Si se denota $L = CB_1(C-1)^{-1}$ entonces se tiene que, dado $t \geq 0$ y siendo k la parte entera de t,

$$\|V(t)\| \leq B_{k+1} \leq (1 + C + C^2 + \cdots + C^{k+1})B_1 = \frac{C^{k+1} - 1}{C - 1} B_1,$$

donde, como $C > 1$, se puede acotar el -1 del numerador por 0 y se sigue que

$$\|V(t)\| \leq \frac{C}{C-1} B_1 C^k = LC^k \leq LC^t = Le^{\alpha t},$$

donde se ha tomado $\alpha = \log C$, y esta desigualdad es equivalente a la que se quería probar. □

Dado el contenido del Lema 4.4.1, se dispone de herramientas para definir la transformada de Laplace de $V(s)g$ si $g \in SW([0,\infty), Y)$ y, además, $t \to m_t(g)$ se pueda acotar por una exponencial de la forma $m_t(g) \leq e^{\beta t}$ con $\beta > 0$. Como

$$W(z)g = \int_0^\infty e^{-zs} V(s)g \, ds, \tag{4.23}$$

se comprueba la convergencia de la integral en las condiciones estipuladas

$$\|W(z)g\| \leq \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} zs} \|V(s)\| \, m_s(g) \, ds \leq \int_0^\infty e^{(\alpha+\beta-\operatorname{Re} z)s} \, ds. \tag{4.24}$$

Por tanto, $W(z)g$ está definido para $\operatorname{Re} z > \alpha+\beta$, lo cual contiene un semiplano de $\mathbb{C}$. Motivado por la idea de que la transformada de Laplace de la derivada es la que ayudó a construir la solución en el caso sin dato frontera, se intenta construir un expresión análoga a

$$f(0) = s\mathcal{L}\big(f(t)\big)(s) - \mathcal{L}\big(f'(t)\big)(s).$$

Esta expresión, que es bien conocida en el caso real, es también válida para funciones que toman valores en espacios de Banach, como se puede encontrar en el Corolario 1.6.6. de [31], bajo hipótesis para f de continuidad absoluta y diferenciabilidad en casi todo punto. Estas hipótesis no se van a cumplir en general en el caso siguiente, y eso es lo que hace que el operador que construye el siguiente teorema no sea idénticamente nulo, siendo así la pieza fundamental de la construcción buscada.

Teorema 4.4.1. Sea $g \in SW([0,\infty), Y)$ que tenga derivada segunda en el sentido de Radon-Nikodym y tal que g' y g'' tengan crecimiento acotado por una exponencial. Entonces, la función $\Delta(\cdot)g : U \subset \mathbb{C} \to X$ definida por

$$\Delta(z) = zW(z)g - W(z)g'$$

admite extensión analítica $\Delta(z)g$ al semiplano $\operatorname{Re} z > \omega$, y esta extensión satisface la identidad

$$\Delta(z)g = (z_0 - A_0)R(z : A_0)\Delta(z_0)g,$$

donde A_0 es el generador infinitesimal del semigrupo $T(t)$ del problema que se está tratando.

Demostración. Partiendo de la definición de derivada de Radon-Nikodym (4.17) y aplicando un cambio de variable se tiene

$$g(t+s) - g(s) = \int_t^{t+s} g'(\sigma) \, d\sigma = \int_0^s g'(t+\sigma) \, d\sigma,$$

lo cual se puede reescribir utilizando los retardos temporales antes introducidos como

$$g_s = g + \int_0^s g'_\sigma \, d\sigma.$$

Combinándolo con (4.14) se obtiene que, para $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned} V(t+s)g - T(t)V(s)g &= V(t)g_s \\ &= V(t)g + \int_0^s V(t)g'_\sigma \, d\sigma \\ &= V(t)g + \int_0^s \big(V(t+\sigma)g' - T(t)V(\sigma)g'\big) d\sigma. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Sea α es la constante del exponente dada para la cota de $\|V(t)g\|$ del Lema 4.4.1, $\beta > 0$ la cota para el crecimiento exponencial de g y ν es la abscisa a partir de la cual la transformada $W(z)g'$ de g' converge (este número es habitualmente denominado *abscisa de convergencia*, ver Sección 1.4. de [31]).

Considérese ahora $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > \text{máx}\{\alpha+\beta, \nu\}$. En esa región convergen las transformadas de Laplace de g y g'. Se multiplica la ecuación (4.25) por $e^{-z(t+s)}$ y se integran t y s entre 0 e ∞. A continuación, se analiza cada uno de los términos por separado. Además, cabe destacar que como $V(s)g$ es función continua del parámetro s es, de hecho, localmente integrable, el Teorema 1.5.1 de [31] garantiza que su transformada de Laplace es analítica para $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z$ mayores que la abscisa de convergencia, y sabemos que sus derivadas vienen dadas por la expresión habitual. Se procede con el primer término, aplicando un cambio de variable $\tau = t + s$ y $r = s$ e integrando,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z(t+s)} V(t+s)g \, dt \, ds &= \int_0^\infty \int_0^\tau e^{-z\tau} V(\tau)g \, dr \, d\tau \\ &= \int_0^\infty \tau e^{-z\tau} V(\tau) g \, d\tau \\ &= -\frac{d}{dz} W(z)g. \end{aligned}$$

Se procede de forma análoga con el resto de términos, teniendo ahora en cuenta la representación del resolvente dada por el Teorema 3.5.1 como trasformada del semigrupo. Para el segundo término de (4.25),

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zt} T(t) e^{-zs} V(s)g \, dt \, ds = R(A_0 : z)W(z)g,$$

donde A_0 es el generador infinitesimal del semigrupo $T(t)$. Para el tercer término de (4.25),

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z(t+s)} V(t)g \, dt \, ds = \left(\int_0^\infty e^{-zs} \, ds\right) \left(\int_0^\infty e^{-zt} V(t)g \, dt\right) = \frac{1}{z} W(z)g.$$

Para el cuarto término de (4.25) se procede integrando por partes considerando $u(s) = \int_0^s V(t+\sigma)g' \, d\sigma$ y $v(s) = -(1/z)\exp(-z(t+s))$, donde $u(s)$ es derivable porque, por hipótesis,

$V(t)$ es fuertemente continuo, obteniendo de esta forma

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z(t+s)} \int_0^s V(t+\sigma)g'\,d\sigma\,dt\,ds \\
&\quad = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{z}e^{-z(t+s)} \int_0^s V(t+\sigma)g'\,d\sigma \Big|_{s=0}^{\infty} + \int_0^\infty \frac{1}{z}e^{-z(t+s)}V(t+s)g'\,ds \right) dt \\
&\quad = \frac{1}{z}\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z(t+s)}V(t+s)g'\,dt\,ds \\
&\quad = \frac{1}{z}\int_0^\infty \int_0^\tau e^{-z\tau}V(\tau)g'\,dr\,d\tau \\
&\quad = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}W(z)g',
\end{aligned}$$

donde se tiene que $\lim_{s\to\infty} -\frac{1}{z}e^{-z(t+s)}\int_0^s V(t+\sigma)g'\,d\sigma = 0$ debido a que se ha elegido z con parte real mayor que la abscisa de convergencia de g'. Se ha utilizado el mismo cambio de variable que antes. Para el último de los sumandos de (4.25), la integración por partes toma con $u(s) = \int_0^s T(t)V(\sigma)g'\,d\sigma$ y $v(s) = -(1/z)\exp(-z(t+s))$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z(t+s)} \int_0^s T(t)V(\sigma)g'\,d\sigma\,dt\,ds \\
&\quad = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{z}e^{-z(t+s)} \int_0^s T(t)V(\sigma)g'\,d\sigma \Big|_{s=0}^{\infty} + \int_0^\infty \frac{1}{z}e^{-z(t+s)}T(t)V(s)g'ds \right) dt \\
&\quad = \frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-zt}T(t)\,dt \int_0^\infty e^{-zs}V(s)g'\,ds \\
&\quad = \frac{1}{z}R(A_0 : z)W(z)g'.
\end{aligned}$$

De esta forma, la ecuación (4.18) se convierte en

$$-\frac{d}{dz}W(z)g - R(A_0 : z)W(z)g = \frac{1}{z}W(z)g - \frac{1}{z}\frac{d}{dz}W(z)g' - \frac{1}{z}R(A_0 : z)W(z)g'.$$

Conforme a la definición de $\Delta(z)$ del enunciado se puede reescribir lo anterior como

$$\frac{d}{dz}\Delta(z)g = -R(A_0 : z)\Delta(z)g,$$

y dado que $R(A_0 : z)$ es un operador lineal y continuo, esto es una Ecuación Diferencial Ordinaria, y, en consecuencia, tiene solución garantizada por [27]. Se comprueba inmediatamente que la solución viene dada, en virtud del Corolario 2.4.1, por:

$$\Delta(z)g = (z_0 - A_0)R(A_0 : z)\Delta(z_0)g.$$

A priori, esta solución es válida en un semiplano con Re $z > \text{máx}\,\{\alpha+\beta, \nu\}$. Por la analiticidad del conjunto resolvente es inmediato que esta expresión se puede extender a todo el semiplano $\operatorname{Re} z > \omega$, siempre que $\operatorname{Re} z_0 > \omega$ para que $\Delta(z_0)$ esté adecuadamente definido. □

4.4.3. Representación integral

Con las herramientas proporcionadas por la subsección anterior se procede a construir la representación integral del operador $V(t)$ en función de otros dos operadores relacionados con la transformada de Laplace, a partir del operador definido en el Teorema 4.4.1,

$$K(z)v = \Delta(z)h_0, \tag{4.26}$$
$$M(z)v = \Delta(z)h_1, \tag{4.27}$$

donde h_0, h_1 son elementos de $SW([0,\infty),Y)$ construidos a partir de v como $h_0(t) = v$ y $h_1(t) = tv$ con $t \geq 0$.

Antes de presentar el siguiente teorema, se requiere aclarar que dada $g \in SW([0,\infty),Y)$, se denota por μ_g^c a la medida Y-valuada asociada a la parte continua de g. Esto tiene sentido gracias al Teorema de Descomposición de Lebesgue ([35], Capítulo 1, Sección 5, Teorema 9), el cual garantiza que se puede descomponer una medida de variación acotada en la suma de una que proviene de una función continua de variación acotada y una atómica, es decir, para la que existe una partición numerable de $\mathbb{R}$ en puntos y conjuntos de medida nula.

Teorema 4.4.2. La representación integral para el operador $V(t)$

$$V(t)g = (z_0 - A_0)\int_0^t T(t-s)K(z_0)g(s)\,ds + (z_0 - A_0)\int_0^t T(t-s)M(z_0)\,d\mu_g^c(s) \tag{4.28}$$

es válida para cada $g \in SW([0,\infty),Y)$, $t \geq 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ verificando $\operatorname{Re} z_0 > \omega$.

Demostración. Se procederá, en primer lugar, a demostrarlo para ciertas funciones del espacio $SW([0,\infty),Y)$ y, después, se completará con argumentos de densidad. Dada $g \in SW([0,\infty),Y)$ tres veces derivable en el sentido de Radon-Nikodym y de forma que g', g'' y g''' sean continuas y tales que g y g' crezcan de forma acotada por una exponencial, se comienza tratando de probar que

$$\Delta(z)g = K(z)g(0) + M(z)g'(0), \qquad \text{para } \operatorname{Re} z > \omega,$$

donde ω es la abscisa de convergencia utilizada en el Teorema 4.4.1. Para comenzar, supóngase que $g(0) = g'(0) = 0$. Al ser g' continua es, de hecho, derivable en el sentido usual y, por tanto, se van a poder utilizar los Teoremas del valor medio presentados en la última parte de la Sección 2.2. Aplicando la ecuación (4.18) se tiene que, en un semientorno por la derecha de 0 existe $C > 0$ tal que (teniendo en cuenta que $g(0) = 0$ para poder escribir de esa manera $m_t(g)$),

$$\|V(t)g\| \leq Cm_t(g) = C\sup_{\Delta}\sum_{k=0}^{n-1}\|g(x_{k+1}) - g(x_k)\|,$$

donde aplicando el Teorema 2.2.3 del Valor Medio a g se tiene la cota

$$\|V(t)g\| \leq C\sup_{\Delta}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)\sup_{0\leq\xi\leq 1}\left\|g'(x_k + \xi(x_{k+1} - x_k))\right\|.$$

Como $\|g'(0)\| = 0$ se puede trabajar en $[0,a]$, en el que $\|g'(0)\|$ sea monótona (se interseca $[0,a]$ con el semientorno necesario para la cota anterior), y de esta forma se puede acotar aplicando, de nuevo, el Teorema 2.2.3, ahora a g' y utilizando que $g'(0) = 0$,

$$\sup_{0\leq\xi\leq 1}\left\|g'(x_k + \xi(x_{k+1} - x_k))\right\| \leq \left\|g'(t)\right\| \leq t\sup_{0\leq\xi\leq 1}\left\|g''(\xi t)\right\| \leq 2Mt,$$

donde se recuerda que t es el extremo derecho de la partición y $M > 0$ es una cota para g'' (que es continua por hipótesis) en $[0, a]$. De esta forma, se tiene

$$\|V(t)g\| \leq C \sup_{\Delta} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) 2Mt = 2MCt^2.$$

Usando las acotaciones anteriores en $[0, a]$,

$$\left\|V(t)g'\right\| \leq C \sup_{\Delta} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \sup_{0 \leq \xi \leq 1} \left\|g''(x_k + \xi(x_{k+1} - x_k))\right\| \leq CMt,$$

y, por tanto, se tiene que $\|V(t)g\| = O(t^2)$ y que $\|V(t)g'\| = O(t)$ cuando $t \to 0^+$, y esto es suficiente para que cuando, dado $z_0 \in \mathbb{C}$, se toma el límite cuando $\operatorname{Re} z_0 \to \infty$ en un cono entonces (se puede encontrar el cálculo detallado en la sección A.2 del Apéndice A)

$$z_0 \Delta(z_0) g = z_0^2 W(z_0) g - z_0 W(z_0) g' \xrightarrow{\operatorname{Re} z_0 \to \infty} 0.$$

Utilizando el Teorema 4.4.1 se puede escribir para $\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Re} z > \omega$

$$\begin{aligned} \Delta(z) g &= (z_0 - A_0) R(z : A_0) \Delta(z_0) g \\ &= \big(z_0 - z + (zI - A_0)\big) R(z : A_0) \Delta(z_0) g \\ &= (z_0 - z) R(z : A_0) \Delta(z_0) g + \Delta(z_0) g. \end{aligned}$$

Por tanto, basta hacer tender $\operatorname{Re} z_0$ hacia infinito para obtener en la expresión anterior que $\Delta(z)g = 0$ para $\operatorname{Re} z > \omega$. Esto responde a la pregunta natural sobre la definición de Δ, ya que como se motivó previamente al Teorema 4.4.1, su definición estaba íntimamente relacionada con la fórmula de la transformada de la derivada. Sabiendo que entre las hipótesis del problema está que $V(0)g = 0$ queda visto que la analogía es completa en el caso que g tenga las hipótesis de regularidad y acotación del crecimiento que se han exigido en esta parte.

Finalmente dada $g \in SW([0, \infty), Y)$ con la regularidad exigida antes, pero que no necesariamente verifique $g(0) = g'(0) = 0$, entonces se considera la función $h(t) = g(t) - g(0) - tg'(0)$ para $t \geq 0$, la cual sí que las verifica, y se le aplica lo anterior, luego $\Delta(z)h = 0$, y, por tanto,

$$\Delta(z) g = K(z) g(0) + M(z) g'(0), \tag{4.29}$$

como se quería probar.

A continuación, se pasa a probar que la expresión integral del enunciado efectivamente representa $V(t)g$. Para ello, se considera $z_0 \in \mathbb{C}$ de forma que $\operatorname{Re} z_0 > \omega$ y a partir de ello se define para cada $t \geq 0$

$$\tilde{V}(t) g = (z_0 - A_0) \int_0^t T(t-s) K(z_0) g(s)\, ds + (z_0 - A_0) \int_0^t T(t-s) M(z_0)\, d\mu_g^c(s). \tag{4.30}$$

La definición anterior es correcta gracias a que procediendo de forma similar a la parte (II) del Teorema 3.4.2 se tiene que las integrales de (4.30) están en $D(A_0)$. Ahora, siendo $\nu > 0$ la abscisa de convergencia de g', se considera la transformada de Laplace $\tilde{W}(z)g$ de la expresión anterior, intentando que la expresión que se ha obtenido antes para $\Delta(z)g$ garantice que la representación es correcta. Para $\operatorname{Re} z > \omega + \nu$ se considera

$$\tilde{W}(z)g = \int_0^\infty e^{-zs}\tilde{V}(s)g\, ds,$$

y se procede a operar a partir de la expresión anterior. Teniendo en cuenta la regularidad de g que se ha asumido al principio se puede escribir $d\mu_g^c = g'(s)\, ds$ y $d\mu_{g'}^c = g''(s)\, ds$ y eligiendo $z = z_0$ se tiene, utilizando (4.30), que

$$\begin{aligned} &z\tilde{W}(z)g - \tilde{W}(z)g' \\ &= (z - A_0)\int_0^\infty \int_0^r e^{-zr}T(r-s)\Big(K_0(z)\big(zg(s) - g'(s)\big) + M(z)\big(zg'(s) - g''(s)\big)\Big)ds\, dr. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable bidimensional $r - s = l$ manteniendo igual la variable s y utilizando el Teorema de Fubini 2.3.6 se obtiene que la expresión anterior es igual a

$$(z - A_0)\int_0^\infty e^{-zl}T(l)\, dl \int_0^\infty e^{-zs}\Big(K(z)\big(zg(s) - g'(s)\big) + M(z)\big(zg'(s) - g''(s)\big)\Big)ds.$$

Usando ahora el Teorema 3.5.1, la primera integral se convierte en la resolvente y se anula con el primer factor que incluye a A_0 obteniendo que la expresión anterior se iguala a

$$\int_0^\infty e^{-zs}\Big(K(z)\big(zg(s) - g'(s)\big) + M(z)\big(zg'(s) - g''(s)\big)\Big)ds.$$

Finalmente, la regularidad (continuidad absoluta y derivabilidad en casi todo punto garantizadas por las hipótesis de regularidad sobre g) que se ha asumido sobre g permite utilizar el Corolario 1.6.6. de [31] (la fórmula de la transformada de Laplace de la derivada) para concluir que

$$z\tilde{W}(z)g - \tilde{W}(z)g' = K(z)g(0) + M(z)g'(0).$$

Por lo tanto, por la fórmula (4.29), obtenida en la primera parte de la demostración, y la definición de Δ, en el enunciado del Teorema 4.4.1, se tiene que

$$z\tilde{W}(z)g - \tilde{W}(z)g' = zW(z)g - W(z)g'.$$

Reagrupando se expresa como

$$z\Big(W(z)g - \tilde{W}(z)g\Big) = W(z)g' - \tilde{W}(z)g'.$$

Dada la expresión anterior, por inducción sobre el grado, se tiene que para aplicaciones $g : [0,\infty) \to Y$ polinomiales

$$W(z)g = \tilde{W}(z)g,$$

siempre que $\operatorname{Re} z > \omega + \nu$, por lo que invirtiendo la transformada de Laplace (por ejemplo utilizando el Teorema 1.7.7 de [31]) se obtiene que la siguiente fórmula es válida para polinomios:

$$V(t)g = \tilde{V}(t)g, \qquad \text{para } t \geq 0.$$

Dado que no se han construido explícitamente los espacios de funciones g y sus propiedades debido a que esto supondría extender notablemente la longitud de este trabajo en una dirección distinta al tema original, se presenta el final de la prueba de forma menos detallada, dando únicamente las ideas principales. A partir del resultado que se tiene para los g polinomiales, esto se extiende mediante un argumento de densidad, que no concretaremos más aquí, al espacio $W^{1,1}_{loc}([0,\infty),Y)$. Para acabar hay que tener en cuenta que $SW([0,\infty),Y)$ es el mínimo subespacio de Fréchet de $BV([0,\infty),Y)$ que contiene los retardos temporales. Esencialmente, las funciones que se añaden son las que tienen un número finito de discontinuidades de salto, producidas por el efecto del origen al ejecutar un retardo temporal. Basta con probar el resultado para funciones que tengan un único salto.

Sea $v \in Y$ y $g : [0,\infty) \to Y$ la aplicación que vale 0 en $[0,T)$ y v en $[T,\infty)$. Por la acotación $\|V(t)g\| \leq C(T)m_t(g)$ y la continuidad de $t \to V(t)g$ se deduce que $V(t)g = 0$ para $t \in [0,T]$, de forma que la representación integral es válida en el intervalo $[0,T]$. Por la relación (4.14) se tiene además que para $t \in [T,\infty)$

$$V(t)g = V(t-T)g_T + T(t-T)V(T)g = V(t-T)g_T.$$

Dado que $g_T \in W^{1,1}_{loc}([0,\infty),Y)$, se puede aplicar la representación integral (en la que la segunda integral se anula por ser g constante en casi todo punto), la cual proporciona, junto con la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} V(t)g &= V(t-T)g_T \\ &= (z_0 - A_0)\int_0^{t-T} T(t-T-s)K(z_0)g_T(s)\,ds \\ &= (z_0 - A_0)\int_0^{t} T(t-s)K(z_0)g(s)\,ds, \end{aligned}$$

que es la representación integral en el intervalo que faltaba, $[T,\infty)$. □

La representación integral que se acaba de obtener es válida en realidad para una clase de problemas mucho más general que los problemas de valor inicial que se está tratando de analizar. Por tanto, aplicando la restricción a los problemas que se quiere tratar, se obtiene una notable simplificación en la expresión integral, que va a resultar muy conveniente. Esta consiste en que si los operadores $T(t)$ y $V(t)$ provienen de la solución de un problema abstracto de valores iniciales:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ x(0) = u_0, \\ \partial x(t) = g(t), \end{cases} \tag{4.31}$$

donde $A : D(A) \subset X \to X$ es un operador cerrado que genera un semigrupo C_0 y $\partial : D(A) \to Y$ un operador frontera. $g \in SW([0,\infty),Y)$, $u_0 \in D(A)$ son los datos del problema. Obsérvese que en (4.31) no se ha considerado término no homogéneo $f(t)$. Esto no supondría ningún problema añadido ya que añadiría un sumando a la expresión de la solución cuya forma ya se ha estudiado en la Sección 4.2. En ese caso, como se puede encontrar en [18], el operador $M(z_0)$ de la fórmula (4.28) es idénticamente nulo. De esta forma, la contribución de la condición frontera no homogénea a la solución se puede representar únicamente por

$$V(t)g = (z_0 - A_0)\int_0^t T(t-s)K(z_0)g(s)\,ds. \tag{4.32}$$

Debido a que el resultado fundamental que se quería mostrar era la representación integral, los resultados que se presentan a continuación están reflejados sin prueba, las cuales pueden encontrarse en el artículo antes indicado [18]; y trabajan en la misma línea que las que ya se han mostrado. La intención al presentarlos es mostrar la caracterización final de este tipo de problemas a la que se llega, que clarifica la aplicación de la representación integral.

A continuación, se seleccionan los pares de operadores $T(t)$ y $V(t)$ que efectivamente forman una combinación adecuada para tratar problemas abstractos de valores iniciales. Para ello, se exige, además, que se cumpla la condición siguiente (u otras que se demuestran equivalentes):

(i) Si $g \in SW([0,\infty),Y)$ es derivable y existe $V'(t)g$ para $t \geq 0$, entonces $g(0) = 0$.

De esta forma, para estos pares se puede construir los operadores del problema (4.31). Para ello, se definirá $D(A)$ como el conjunto de los $x \in X$ tales que existe algún elemento $g \in SW([0,\infty),Y)$ derivable que verifica

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)x + V(h)g - x}{h}. \tag{4.33}$$

En ese caso se dirá que $x \in D(A)$ y $g \in SW([0,\infty),Y)$ son compatibles. Ese límite se denominará Ax, de forma que se tiene $A : D(A) \subset X \to X$, y se definirá $\partial x = g(0)$, de forma que se tiene $\partial : D(A) \subset X \to Y$. Se puede comprobar que el par (A, ∂) así definido es, de hecho, un operador cerrado. La propiedad (i) exigida antes hace que sea indiferente que g compatible se escoja, ya que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{V(h)(g_1 - g_2)}{h} = 0.$$

Los pares de operadores fuertemente continuos cuya descomposición integral cumple $M(z_0) \equiv 0$ y que verifican la propiedad (i) antes nombrada se denominan de clase $E_b(X,Y)$.

Teorema 4.4.3. Dados un par $(T(t), V(t))$ de la clase $E_b(X,Y)$, $u_0 \in D(A)$ y $g \in SW([0,\infty),Y)$ compatibles, es decir, tales que $\partial u_0 = g(0)$, entonces si $g' \in SW([0,\infty),Y)$ se tiene

(1) $T(t)u_0 + V(t)g \in D(A)$ para todo $t \geq 0$.

(2) La función avanzada g_t es compatible con $T(t)u_0 + V(t)g$, es decir, para todo $t \geq 0$,

$$\partial\big(T(t)u_0 + V(t)g\big) = g_t(0) = g(t).$$

(3) La aplicación $t \to T(t)u_0 + V(t)g$ es derivable y

$$\frac{d}{dt}\big(T(t)u_0 + V(t)g\big) = A(T(t)u_0 + V(t)g) = T(t)Au_0 + V(t)g'.$$

Se recuerda que se denomina A_0 al generador infinitesimal de $T(t)$, se tiene la relación $D(A_0) = \{x \in D(A) : \partial x = 0\}$, que en definitiva es la forma del dominio que se hubiera esperado; y A_0 es una restricción de A. El teorema anterior revela en qué sentido las soluciones que provienen de pares $(T(t), V(t))$ de clase $E_b(X,Y)$ son solución del problema (4.31).

El siguiente resultado importante aporta información sobre quién es el operador $K(z_0)$ que aparece en la expresión de la solución, el cual resulta estar en estrecha relación con el operador $R(\lambda : A)$ que previamente se ha tratado.

Teorema 4.4.4. Sean $(T(t), V(t))$ un par de la clase $E_b(X,Y)$, $v \in Y$, y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Entonces $x = K(\lambda)v$ pertenece a $D(A)$ y es la única solución del problema de autovalores:

$$\begin{cases} Ax = \lambda x, \\ \partial x = v. \end{cases}$$

Por otro lado, se dirá que un problema (4.31) está bien puesto si

(I) $D(A)$ es denso en X y $R(\partial)$ es denso en Y.

(II) Dado $u_0 \in D(A)$ y una aplicación diferenciable $g : [0, \infty) \to Y$ que toma valores en $R(\partial)$ y tal que $\partial u_0 = g(0)$ entonces existe una única solución del problema (4.31).

(III) Para cada $T > 0$ existe una constante $C(T) > 0$ tal que si $u_0 \in X$, $g \in SW([0, \infty), Y)$ y $u : [0, \infty) \to X$ es una solución continuamente diferenciable del problema entonces

$$\|u(t)\| \leq C(T)\big(m_T(g) + \|u_0\|\big), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Con esta construcción se logra una estrecha relación entre los problemas (4.31) y los pares de operadores fuertemente continuos cuya descomposición integral cumple $M(z_0) \equiv 0$ y que verifican la propiedad (I) antes nombrada, es decir, de clase $E_b(X,Y)$.

Teorema 4.4.5. Dado un par $(T(t), V(t))$ de la clase $E_b(X,Y)$ con generador infinitesimal $A : D(A) \subset X \to X$ y operador frontera $\partial : D(A) \subset X \to Y$, el problema (4.31) está bien puesto.

Teorema 4.4.6. Dados $A : D(A) \subset X \to X$ y $\partial : D(A) \subset X \to Y$ un par de operadores lineales tales que $\operatorname{Ker}(\partial)$ es denso en X, $\operatorname{Im}(\partial)$ es denso en Y y tal que el operador $(A, \partial) : D(A) \subset X \to X \times Y$ es cerrable (existe una extensión cerrada). Si se supone que el problema (4.31) está bien puesto, entonces existe un único par $(T(t), V(t))$ en la clase $E_b(X,Y)$ tal que su generador infinitesimal $\hat{A} : D(\hat{A}) \subset X \to X$ y operador frontera $\hat{\partial} : D(\hat{A}) \subset X \to Y$ son extensiones de A y ∂ respectivamente.

Capítulo 5

El problema lineal no autónomo

5.1. El caso lineal no autónomo con dominio dependiente del tiempo

La fuente bibliográfica principal de esta sección es el Capítulo 5 del libro *"Equations of Evolution"* [23], de H. Tanabe. Se tratará el problema parabólico lineal abstracto cuando el operador $A(t)$ depende tiempo, y también su dominio, es decir, dado un espacio de Banach X y un $T > 0$, se consideran los operadores lineales no acotados $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$ para cada $t \in [0, T]$. El método que se va a abordar es denominado *método de Levi*. Parecería preceptivo tratar previamente el caso de dominio independiente del tiempo, sin embargo, en el caso parabólico, el tratamiento de uno y otro caso no difieren demasiado, por lo que se ha pensado que con presentar el caso en el que los dominios dependen del tiempo, que es obviamente el más general, es suficiente y ayuda a no alargar en demasía la longitud del trabajo. La referencia donde se podrá encontrar el caso independiente del tiempo será la Sección 5.6. del libro *"Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations"* [19], de A. Pazy. Dado el dato $f : [0, T] \to X$, el problema del que se va a estudiar existencia y unicidad de soluciones será

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(t)u(t) = f(t), & t \in (0, T], \\ \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X. \end{cases} \tag{5.1}$$

Como se ha venido haciendo, sin pérdida de generalidad, se asumirá que $0 \in \rho(A(t))$ para todo $t \in [0, T]$. Las hipótesis sobre el problema que se utilizarán a lo largo de este capítulo serán:

- (I). Se tratará un problema parabólico, lo cual se traducirá en que $-A(t)$ genera para cada $t \in [0, T]$ un semigrupo analítico.

- (II). El conjunto resolvente $\rho(A(t))$ contiene, para $t \in [0, t]$, un sector cerrado de la forma

  $$\Sigma = \{\lambda : |\arg \lambda| > \theta\} \cup \{0\},$$

  con $0 < \theta < \pi/2$, el mismo para todos los instantes temporales, y, además, se tiene que $(1 + |\lambda|) \left\| (A(t) - \lambda)^{-1} \right\| \le M(t)$ en Σ para cada $t \in [0, T]$, con $M(t) > 0$. Se añadirá, además, que esa constante $M(t)$ se puede tomar la misma para todo $t \in [0, T]$, es decir que existe $M > 0$ tal que $(1 + |\lambda|) \left\| (A(t) - \lambda)^{-1} \right\| \le M$ con $\lambda \in \Sigma$ y $t \in [0, T]$.

En particular, el Teorema 3.6.1 garantiza que de esta forma el semigrupo generado por $-A(t)$ está uniformemente acotado en ciertos subsectores cerrados. Como la cota que obtiene la demostración de dicho teorema depende únicamente de la constante M, la cual es la misma para todos los generadores $-A(t)$ con $t \in [0,T]$, la cota uniforme será, de hecho, la misma para todos los semigrupos, y, por tanto, existe $C > 0$ tal que para todo $t \in [0,T]$, $s \in [0,\infty)$,

$$\left\|\exp\big(sA(t)\big)\right\| \leq C. \tag{5.2}$$

- (III). Para cada $t \in [0,T]$ el operador $A(t)$ es un operador lineal cerrado con dominio $D(A(t))$, denso en el espacio de Banach X. (Esta hipótesis se deriva directamente de la Hipótesis (I), por el Corolario 3.4.2, pero se indica explícitamente para poner en ella el énfasis que merece.)

- (IV). $A(t)^{-1}$ es continuamente diferenciable respecto del parámetro $t \in [0,T]$ en norma de $\mathcal{L}(X)$. A continuación, se va a ver que esto, junto con la Hipótesis (II), implica que $(A(t)-\lambda)^{-1}$ es también continuamente diferenciable en $t \in [0,T]$. Para ello se comienza probando su continuidad escribiendo

$$\begin{aligned}\big(A(t+h)-\lambda\big)^{-1} &- \big(A(t)-\lambda\big)^{-1}\\ &= \big(A(t+h)-\lambda\big)^{-1}\big(A(t)-A(t+h)\big)\big(A(t)-\lambda\big)^{-1}\\ &= A(t+h)\big(A(t+h)-\lambda\big)^{-1}\big(A(t+h)^{-1}-A(t)^{-1}\big)A(t)\big(A(t)-\lambda\big)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Por la Hipótesis (II) se tiene que $I + \lambda(A(t)-\lambda)^{-1} = A(t)(A(t)-\lambda)^{-1}$ es un operador uniformemente acotado en Σ para $t \in [0,T]$, luego se tiene que $(A(t)-\lambda)^{-1}$ es continua para $t \in [0,T]$, por serlo $A(t)^{-1}$. Utilizando la misma expresión se puede escribir

$$\begin{aligned}&\frac{\big(A(t+h)-\lambda\big)^{-1}-\big(A(t)-\lambda\big)^{-1}}{h}\\ &\qquad = A(t+h)\big(A(t+h)-\lambda\big)^{-1}\frac{A(t+h)^{-1}-A(t)^{-1}}{h}A(t)\big(A(t)-\lambda\big)^{-1},\end{aligned} \tag{5.4}$$

que revela, gracias a ser $A(t)^{-1}$ continuamente diferenciable y tener ya garantizada la continuidad de $(A(t)-\lambda)^{-1}$ y, por tanto, la de $A(t)(A(t)-\lambda)^{-1} = I + \lambda(A(t)-\lambda)^{-1}$, que es, de hecho, diferenciable para $t \in [0,T]$, y su derivada viene expresada por

$$\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1} = A(t)(A(t)-\lambda)^{-1}\frac{dA(t)^{-1}}{dt}A(t)(A(t)-\lambda)^{-1}. \tag{5.5}$$

De hecho, como $A(t)(A(t)-\lambda)^{-1} = I + \lambda(A(t)-\lambda)^{-1}$, se tiene que $(A(t)-\lambda)^{-1}$ es continuamente diferenciable en $t \in [0,T]$ porque su derivada es producto de tres funciones continuas.

- (V). $dA(t)^{-1}/dt$ es Hölder continua respecto de t en la norma de $\mathcal{L}(X)$, es decir, existe $K > 0$ y $\alpha \leq 1$ tales que para todo $t, s \in [0,T]$ se verifica

$$\left\|\frac{dA(t)^{-1}}{dt} - \frac{dA(s)^{-1}}{ds}\right\| \leq K\left|t-s\right|^{\alpha}. \tag{5.6}$$

- (VI). Existen dos números $N > 0$ y $0 < \rho \leq 1$ tales que se verifica la desigualdad

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{|\lambda|^{\rho}}, \tag{5.7}$$

para todo $\lambda \in \Sigma$ y todo $t \in [0, T]$. De hecho, a partir de la Hipótesis (IV) se puede lograr otra cota para $\frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda)^{-1}$. Así, por una parte, por la Hipótesis (II) se sabe que $A(t)(A(t) - \lambda)^{-1} = 1 + \lambda(A(t) - \lambda)^{-1}$ está uniformemente acotado para todo $\lambda \in \Sigma$ y $t \in [0, T]$, y, por otra parte, se sabe $\|A(t)^{-1}\|$ está también uniformemente acotado por ser $A(t)^{-1}$ continuamente diferenciable en $[0, T]$. Se puede deducir de forma inmediata que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda)^{-1} \right\| \leq C \tag{5.8}$$

es también un operador uniformemente acotado tanto para $t \in [0, T]$ como para $\lambda \in \Sigma$.

5.1.1. Construcción del operador de evolución

Para obtener la existencia y unicidad, el primer objetivo es construir un sistema de evolución, es decir, un operador $U(t, s)$ función de dos parámetros que, aplicado a un elemento de X, nos dé la solución del problema (5.1) con $f \equiv 0$ a tiempo t, si se considera que el elemento aportado de X es la condición inicial a tiempo s. Para su construcción van a ser necesarias acotaciones de diversa índole, y a esa tarea se encomiendan los siguientes lemas. Por la flexibilidad exigida a la notación, se denotará, como se sugirió en el Capítulo 3, como $\exp(-sA(t))$ al semigrupo generado por el operador $-A(t)$ evaluado en el parámetro s, pudiendo de esta forma indicar explícitamente ambos parámetros. Γ continuará siendo una curva contenida en Σ que conecta $\infty e^{-i\theta}$ y $\infty e^{i\theta}$, con θ dado por la definición de Σ en la Hipótesis (II), $0 < \theta < \pi/2$.

Téngase en cuenta que esta curva no es la curva no es la utilizada en el Teorema 3.5.2 de la integral de Dunford, sino su reflejo especular respecto del eje imaginario. Esto se debe a que el generador infinitesimal aquí es $-A(t)$ en vez de $A(t)$, lo cual no genera ninguna dificultad añadida. De todas formas, para no crear confusión no se utilizará la notación de la aplicación resolvente $R(\lambda : A)$ en este capítulo, sino que se indicará explícitamente el operador inverso del que se está tratando. Esta diferencia de notación es usual en los problemas parabólicos, y su intención es hacer más sencilla la notación de las potencias fraccionarias de operadores, que aparecerían, aunque quedan fuera de este trabajo, en etapas posteriores de estudio de estos problemas.

Lema 5.1.1. Los operadores $\exp(-tA(s))$ y $\exp(-tA(s))A(s)$ son funciones Lipschitzianas del parámetro $s \in [0, T]$ para todo $t \geq 0$. En particular, son función continua del parámetro s para todo $t \geq 0$.

Recuérdese, además, que, dado $s \in [0, T]$, $\exp(-tA(s))$ es diferenciable respecto de t para $t > 0$ por tratarse de un semigrupo analítico, y también es fuertemente continuo en $t \geq 0$.

Demostración. Para el primer operador, se comienza representando por medio del Teorema 3.5.2 de la integral de Dunford y el Teorema Fundamental del Cálculo Integral de la forma siguiente,

$$\exp\big(-tA(s)\big) - \exp\big(-tA(r)\big) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\lambda t} \int_s^r \frac{\partial}{\partial \sigma}(A(\sigma) - \lambda)^{-1} \, d\sigma \, d\lambda.$$

La hipótesis (VI) garantiza además que $\left\| \int_s^r \frac{\partial}{\partial \sigma}(A(\sigma) - \lambda)^{-1} \, d\sigma \right\| \leq \frac{N|r-s|}{|\lambda|^\rho}$, por lo cual, aplicando la integral del Apéndice A.3 se tiene la cota total

$$\left\|\exp\big(-tA(s)\big) - \exp\big(-tA(r)\big)\right\| \leq C\, |r - s|\, t^{\rho - 1},$$

que garantiza que $\exp(-tA(s))$ sea función lipchitziana, y, por ende, continua, para $t \geq 0$. Para el segundo de ellos se tiene en cuenta que $(A(\sigma)-\lambda)^{-1}A(\sigma) = I + \lambda(A(\sigma)-\lambda)^{-1}$, de forma que $\frac{\partial}{\partial\sigma}\big((A(\sigma)-\lambda)^{-1}A(\sigma)\big) = \lambda\frac{\partial}{\partial\sigma}(A(\sigma)-\lambda)^{-1}$. De esta forma, representando análogamente al operador anterior se tiene, para $t \geq 0$,

$$\exp\big(-tA(s)\big)A(s) - \exp\big(-tA(r)\big)A(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda t}\int_s^r \lambda\frac{\partial}{\partial\sigma}(A(\sigma)-\lambda)^{-1}\,d\sigma\,d\lambda.$$

Aquí, al aplicar la hipótesis (VI) y la integral del Apéndice A.3 se tiene que

$$\|\exp(-tA(s)) - \exp(-tA(r))\| \leq C\,|r-s|\,t^{\rho-2},$$

lo cual garantiza que la $\exp(-tA(s))A(s)$ sea función lipchitziana bajo las condiciones de los parámetros que indica el enunciado. $\square$

Lema 5.1.2. El operador $\exp\big(-(t-s)A(t)\big)$ es diferenciable respecto de t y s en $0 \leq s < t \leq T$ y sus derivadas verifican las siguientes cotas

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\exp\big(-(t-s)A(t)\big)\right\| \leq C(t-s)^{-1}, \tag{5.9}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial s}\exp\big(-(t-s)A(t)\big)\right\| \leq C(t-s)^{-1}. \tag{5.10}$$

(Téngase en cuenta que la letra C no es siempre la misma constante.)

Demostración. Se comienza probando (5.10), la segunda de las expresiones, que es inmediata a partir de la diferenciabilidad del semigrupo analítico respecto del parámetro

$$\frac{\partial}{\partial s}\exp\big(-(t-s)A(t)\big) = A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big).$$

Se concluye la desigualdad para la norma buscada a partir expresión del Corolario 3.6.1, teniendo en cuenta que $\omega = 0$ porque se está asumiendo que $0 \in \rho(A(t))$.

Para probar (5.9), la primera expresión, utilizando el Teorema 3.5.2 se efectúa, en primer lugar, una derivación formal

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\big(-(t-s)A(t)\big) = -A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda.$$

Usando la expresión anterior, (5.10), junto con la integral del Apéndice A.3 y la ecuación (5.8) de la Hipótesis (VI) se tiene que para $t > s$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\exp\big(-(t-s)A(t)\big)\right\| \leq \frac{C'}{t-s} + \frac{C''}{2\pi}\frac{1}{t-s} = \frac{C}{t-s}.$$

Además, la derivada formal hallada es, en efecto, su derivada. Esto es, de hecho, lo que se pretendía hallar. $\square$

Como se describió antes de los lemas anteriores, se pretende construir un *operador de evolución* o *solución fundamental* $U(t,s)$ para el problema homogéneo. Como en el caso lineal independiente del tiempo el operador de evolución se correspondería directamente con el semigrupo, es razonable pensar que, en este caso, va a tratarse del semigrupo más una contribución adicional, inspirada en cierta forma en (4.8). La forma que se propone a continuación está también basada en la forma de construirlo cuando el dominio es fijo, la cual se puede encontrar en [19], pero no es exactamente igual. Sea, para $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$U(t,s) = \exp\big(-(t-s)A(t)\big) + W(t,s), \tag{5.11}$$

donde el operador $W(t,s)$ resulta de la convolución del semigrupo con otro operador por determinar

$$W(t,s) = \int_s^t \exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)R(\tau,s)\,d\tau. \tag{5.12}$$

A continuación, se procede a realizar un cálculo formal que permita identificar la ecuación integral que hay que resolver para hallar dichos operadores y el operador $R(\tau,s)$ desconocido. En primer lugar, se obtendrá el operador de evolución para el problema homogéneo, y, después, se construirá la solución para el caso no homogéneo mediante una convolución con el primero. Por tanto, se busca introducir la definición de $U(t,s)$ y $W(t,s)$ en la ecuación $\frac{du}{dt}(t)+A(t)u(t) = 0$. Así, dicha ecuación se convierte en $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)u_0 + A(t)U(t,s)u_0 = 0$, que es equivalente a $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s) + A(t)U(t,s) = 0$. Se tiene entonces la siguiente igualdad formal para el operador de evolución,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)&+A(t)U(t,s)\\
&= -A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big)\\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda\\
&\quad + R(t,s) - \int_s^t A(t)\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)R(\tau,s)\,d\tau\\
&\quad + \int_s^t \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda\,R(\tau,s)\,d\tau\\
&\quad + A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big)\\
&\quad + \int_s^t A(t)\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)R(\tau,s)\,d\tau\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda + R(t,s)\\
&\quad + \int_s^t \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda\,R(\tau,s)\,d\tau,
\end{aligned}$$

y esta expresión es, en principio, la que, según el cálculo formal, debe anularse. Si se da nombre al opuesto del primer sumando

$$R_1(t,s) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda = -\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)\exp\big(-(t-s)A(t)\big),$$

entonces la ecuación integral queda reescrita como

$$R(t,s) = R_1(t,s) + \int_s^t R_1(t,\tau)R(\tau,s)\,d\tau. \tag{5.13}$$

Además, aplicando la desigualdad integral calculada en el Apéndice A.3, gracias a la ecuación (5.7) de la Hipótesis (VI), resulta en que $R_1(t,s)$ es un operador lineal acotado y se tiene la cota dada por

$$\|R_1(t,s)\| \leq C(t-s)^{\rho-1}, \tag{5.14}$$

para $0 \leq s < t \leq T$. Esto permite resolver la ecuación integral por iteraciones sucesivas, al estilo de los iterantes de Picard,

$$R(t,s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s), \tag{5.15}$$

donde los pasos intermedios se obtienen mediante convoluciones sucesivas

$$R_m(t,s) = \int_s^t R_1(t,\tau) R_{m-1}(\tau,s)\, d\tau. \tag{5.16}$$

A continuación, se va a probar por inducción que, efectivamente, la serie que da $R(t,s)$ es convergente en norma y, por tanto, convergente, gracias a las hipótesis del problema. Además, la linealidad de los operadores involucrados se obtiene por construcción.

Se procede a probar por inducción que

$$\|R_m(t,s)\| \leq \frac{\big(C\Gamma(\rho)\big)^m (t-s)^{m\rho-1}}{\Gamma(m\rho)}, \tag{5.17}$$

donde aquí C sí que es la misma constante que en (5.14), y $0 \leq s < t \leq T$. Se denota Γ la función Gamma de Euler, ver, por ejemplo, [45]. El caso base es inmediato por la ecuación (5.14). Se procede al paso inductivo usando (5.14) y (5.17),

$$\|R_{m+1}(t,s)\| = \left\| \int_s^t R_1(t,\tau) R_m(\tau,s)\, d\tau \right\| \leq \frac{C^{m+1}\Gamma(\rho)^m}{\Gamma(m\rho)} \int_s^t (t-\tau)^{\rho-1}(\tau-s)^{m\rho-1}\, d\tau. \tag{5.18}$$

Para manipular la expresión de la derecha se utiliza la función Beta de Euler y sus propiedades, por medio del cambio de variable $x = (\tau-s)/(t-s)$,

$$\begin{aligned}
\int_s^t (t-\tau)^{\rho-1}(\tau-s)^{m\rho-1}\, d\tau &= \int_0^1 \big((t-s)(1-x)\big)^{\rho-1}\big((t-s)x\big)^{m\rho-1}(t-s)\, dx \\
&= (t-s)^{(m+1)\rho-1} B(\rho, m\rho) \\
&= (t-s)^{(m+1)\rho-1} \frac{\Gamma(\rho)\Gamma(m\rho)}{\Gamma\big((m+1)\rho\big)},
\end{aligned}$$

de forma que sustituyendo esa expresión en (5.18) se obtiene inmediatamente lo pretendido, (5.17).

Para acabar con la deducción de la cota de $R(t,s)$, se aplican (5.15) y (5.17) de la forma siguiente,

$$\begin{aligned}
\|R(t,s)\| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \|R_m(t,s)\| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\big(C\Gamma(\rho)\big)^m (t-s)^{m\rho-1}}{\Gamma(m\rho)} \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\big(C\Gamma(\rho)\big)^m T^{\rho(m-1)}}{\Gamma(m\rho)} \right) (t-s)^{\rho-1}.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

El comportamiento asintótico de la función Γ, análogo al del factorial, la hace disponer de una fórmula de Stirling $\Gamma(z+1) \approx \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z$ cuando $z \to \infty$, y, por tanto, aplicando dicha fórmula al criterio del cociente se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \frac{\Gamma(m\rho)}{\Gamma(m\rho+\rho)} &= \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{m\rho-1}{(m+1)\rho-1}} \left(\frac{m\rho-1}{(m+1)\rho-1}\right)^{m\rho-1} \left(\frac{e}{(m+1)\rho-1}\right)^{\rho} \\ &= e^{-\rho} \lim_{m\to\infty} \left(\frac{e}{(m+1)\rho-1}\right)^{\rho} = 0.\end{aligned}$$

En consecuencia, la serie de (5.19) converge y resulta

$$\|R(t,s)\| \leq C(t-s)^{\rho-1}, \tag{5.20}$$

para $0 \leq s < t \leq T$. Ahora bien, véase que esta construcción es, en efecto, solución de la ecuación integral (5.13). Para ello se hace uso de las ecuaciones (5.15) y (5.16).

$$R(t,s) = R_1(t,s) + \sum_{m=1}^{\infty} R_{m+1}(t,s) = R_1(t,s) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_s^t R_1(t,\tau) R_m(\tau,s)\, d\tau.$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada y lo visto anteriormente se tiene que

$$\left\| \sum_{m=1}^{N} R_m(\tau,s) \right\| \leq \sum_{m=1}^{N} \|R_m(\tau,s)\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|R_m(\tau,s)\| \leq C(\tau-s)^{\rho-1},$$

donde la cota es una función integrable como función de τ entre s y t. Entonces, se puede intercambiar la suma y la integral, y, por tanto, $R(t,s)$ es solución de la ecuación integral (5.13), como se quería ver. De esta forma, las ecuaciones (5.11) y (5.12) proporcionan la construcción del operador $U(t,s)$ que se estaba buscando, pero todavía no se ha comprobado que el operador construido tenga las propiedades de regularidad requeridas.

Por otro lado, dado que el semigrupo $\exp\big(-(t-s)A(t)\big)$ tiene una cota uniforme en $0 \leq s \leq t \leq T$ por (5.2), la expresión (5.20), junto con (5.11) y (5.12), muestra que $W(t,s)$ y $U(t,s)$ son, de hecho, operadores lineales y continuos, y se tienen cotas para ellos en $0 \leq s < t \leq T$. Además, como para $t = s$ se tiene que $U(t,s) = I$, $W(t,s) = 0$, la cota se extiende trivialmente a $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|W(t,s)\| \leq C(t-s)^{\rho}, \tag{5.21}$$

$$\|U(t,s)\| \leq C. \tag{5.22}$$

Si nos fijamos, la Hipótesis (V) no se ha utilizado en la construcción de $U(t,s)$. Esta hipótesis será la que garantice que el problema no homogéneo se resuelva por medio de la convolución, que ya se ha visto en el capítulo anterior, (4.8),

$$u(t) = U(t,0)u_0 + \int_0^t U(t,s) f(s)\, ds. \tag{5.23}$$

El proceso para resolver el problema será:

- Definir lo que es una solución en el sentido débil.

- Demostrar que la solución débil, de existir, es única, y que en tal caso, toma una forma dada a partir del recién construido operador de evolución $U(t,s)$.

- Demostrar que, bajo ciertas hipótesis de regularidad del dato no homogéneo, la solución débil es de hecho una solución clásica del problema.

La definición utilizada del operador adjunto A^* se puede encontrar en la Sección 2.1, la Definición 2.1.9.

5.1.2. Soluciones débiles

Definición 5.1.1. Se dirá que una función $u \in C([0,T],X)$ es una **solución débil** del problema (5.1) si satisface

$$\int_0^T \left\langle \varphi'(t) - A^*(t)\varphi(t), u(t) \right\rangle dt + \int_0^T \langle \varphi(t), f(t) \rangle \, dt + \langle \varphi(0), u_0 \rangle = 0, \tag{5.24}$$

para todo φ que verifique

(I) $\varphi(t) \in D(A^*(t))$ para todo $t \in [0,T]$.

(II) φ, φ' y $A^*\varphi$ son todas funciones continuas de $[0,T]$ en X^*.

(III) $\varphi(T) = 0$.

El siguiente lema nos garantiza la continuidad de $R(t,s)$ respecto del primero de sus parámetros, lo cual será de utilidad a posteriori.

Lema 5.1.3. Sean δ y β números arbitrarios que satisfacen que $0 < \delta < \rho$ y $0 < \beta < \alpha$. Entonces, se tiene la siguiente desigualdad para $0 \le s < \tau < t \le T$:

$$\|R(t,s) - R(\tau,s)\| \le C_{\delta\beta} \left((t-\tau)^{\delta} (\tau - s)^{\rho-\delta-1} + (t-\tau)^{\beta} (\tau-s)^{\alpha-\beta-1} \right).$$

Demostración. Se busca probar la desigualdad a través de la ecuación integral (5.13), acotando cada uno de los términos que aparecen. Se comienza por $R_1(t,s)$ considerando la descomposición siguiente, en la que se denominará I_1 al primer sumando e I_2 al segundo,

$$\begin{aligned} R_1(t,s) - R_1(\tau,s) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\lambda(t-s)} \left(\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1} - \frac{\partial}{\partial \tau}(A(\tau)-\lambda)^{-1} \right) d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(e^{-\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(\tau-s)} \right) \frac{\partial}{\partial \tau}(A(\tau)-\lambda)^{-1} d\lambda \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Por la relación (5.5), en la Hipótesis (IV), se puede descomponer el paréntesis dentro de la integral de I_1 de la forma siguiente, con $\lambda \in \Sigma$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda)^{-1} - \frac{\partial}{\partial \tau}(A(\tau) - \lambda)^{-1} \\
&= A(t)(A(t) - \lambda)^{-1} \frac{dA(t)^{-1}}{dt} A(t)(A(t) - \lambda)^{-1} \\
&\quad - A(\tau)(A(\tau) - \lambda)^{-1} \frac{dA(\tau)^{-1}}{d\tau} A(\tau)(A(\tau) - \lambda)^{-1} \\
&= \left(A(t)(A(t) - \lambda)^{-1} - A(\tau)(A(\tau) - \lambda)^{-1}\right) \frac{dA(t)^{-1}}{dt} A(t)(A(t) - \lambda)^{-1} \\
&\quad + A(\tau)(A(\tau) - \lambda)^{-1} \frac{dA(\tau)^{-1}}{d\tau} \left(A(t)(A(t) - \lambda)^{-1} - A(\tau)(A(\tau) - \lambda)^{-1}\right) \\
&\quad + A(\tau)(A(\tau) - \lambda)^{-1} \left(\frac{dA(t)^{-1}}{dt} - \frac{dA(\tau)^{-1}}{d\tau}\right) A(t)(A(t) - \lambda)^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Se va a ir acotando las distintas expresiones.

Se comienza utilizando la Hipótesis (VI) y la expresión $A(t)(A(t)-\lambda)^{-1} = I + \lambda(A(t)-\lambda)^{-1}$ para el primer término de la última igualdad de (5.25),

$$\begin{aligned}
\left\|A(t)(A(t) - \lambda)^{-1} - A(\tau)(A(\tau) - \lambda)^{-1}\right\| &= \left\|\lambda\left((A(t) - \lambda)^{-1} - (A(\tau) - \lambda)^{-1}\right)\right\| \\
&= \left\|\lambda \int_\tau^t \frac{\partial}{\partial \sigma}(A(\sigma) - \lambda)^{-1}\, d\sigma\right\| \\
&\leq |\lambda| \int_\tau^t \frac{C}{|\lambda|^\rho}\, d\sigma = C(t - \tau)\, |\lambda|^{1-\rho}
\end{aligned} \tag{5.26}$$

A continuación, se necesita la siguiente relación de acotación uniforme, que se deriva de la Hipótesis (II), con $\lambda \in \Sigma$, y que ya se ha utilizado en algunas ocasiones,

$$\left\|A(t)(A(t) - \lambda)^{-1}\right\| = \left\|I + \lambda(A(t) - \lambda)^{-1}\right\| \leq 1 + |\lambda| \frac{M}{|\lambda|} \leq C.$$

Utilizando esta relación que se acaba de escribir, junto con la ecuación (5.26), una cota uniforme en $t \in [0, T]$ para $dA(t)^{-1}/dt$ por la Hipótesis (IV), y la relación (5.6) de la Hipótesis (V), en la ecuación (5.25) se obtiene

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(A(t) - \lambda)^{-1} - \frac{\partial}{\partial \tau}(A(\tau) - \lambda)^{-1}\right\| \leq C\left((t - \tau)\, |\lambda|^{1-\rho} + (t - \tau)^\alpha\right).$$

Por tanto, utilizando las integrales del Apéndice A.3, se tiene inmediatamente la cota siguiente

$$\|I_1\| \leq C\left((t - \tau)(t - s)^{\rho-2} + (t - \tau)^\alpha (t - s)^{-1}\right). \tag{5.27}$$

Dado que, por un lado, $(t-s)^{\rho-1} \leq (\tau-s)^{\rho-1}$ y, por otro, que de $(t-\tau)/(t-s) \leq 1$ se deduce que $(t-\tau)(t-s)^{-1} \leq (t-\tau)^\delta (t-s)^{-\delta}$ y que $(t-\tau)^\alpha \leq (t-\tau)^\beta (t-s)^{\alpha-\beta}$, entonces, para I_1 se puede escribir

$$\|I_1\| \leq C\left((t - \tau)^\delta (t - s)^{-\delta} (\tau - s)^{\rho-1} + (t - \tau)^\beta (t - s)^{\alpha-\beta-1}\right). \tag{5.28}$$

Se pasa, a continuación, a tratar la integral I_2. Procediendo de forma similar se escribe,

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \int_{\tau-s}^{t-s} \frac{\partial}{\partial\sigma} e^{-\lambda\sigma}\, d\sigma\, \frac{\partial}{\partial\tau}(A(\tau)-\lambda)^{-1}\, d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-s}^{t-s}\left(\int_\Gamma \lambda e^{-\lambda\sigma}\frac{\partial}{\partial\tau}(A(\tau)-\lambda)^{-1}\, d\lambda\right) d\sigma. \end{aligned}$$

Utilizando la integral del Apéndice A.3, gracias a la relación (5.7) de la Hipótesis (VI), se obtiene $\left\|\int_\Gamma \lambda e^{-\lambda\sigma}\frac{\partial}{\partial\tau}(A(\tau)-\lambda)^{-1}\, d\lambda\right\| \leq C'\sigma^{\rho-2}$, y de aquí la desigualdad

$$\|I_2\| \leq C'\int_{\tau-s}^{t-s}\sigma^{\rho-2}\, d\sigma = C\left((\tau-s)^{\rho-1}-(t-s)^{\rho-1}\right) = C(\tau-s)^{\rho-1}\left(1-\frac{(\tau-s)^{1-\rho}}{(t-s)^{1-\rho}}\right).$$

Teniendo en cuenta que $\tau - s \leq t-s$, que $t-\tau \leq t-s$ y operando se llega a la cota

$$\begin{aligned} \|I_2\| &\leq C(\tau-s)^{\rho-1}\left(1-\frac{\tau-s}{t-s}\right) \\ &= C(t-\tau)(t-s)^{-1}(\tau-s)^{\rho-1} \\ &\leq C(t-\tau)^{\delta}(t-s)^{-\delta}(\tau-s)^{\rho-1}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Juntando (5.28) y (5.29) se tiene que

$$\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\| \leq C\left((t-\tau)^{\delta}(t-s)^{-\delta}(\tau-s)^{\rho-1}+(t-\tau)^{\beta}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right). \tag{5.30}$$

Para acabar, se utiliza la ecuación integral (5.13) que relaciona $R(t,s)$ y $R_1(t,s)$, para obtener

$$\|R(t,s)-R(\tau,s)\| \leq \|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\| + \int_s^t \|R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma)\|\,\|R(\sigma,s)\|\, d\sigma,$$

donde utilizando las cotas (5.20), (5.27) y la segunda expresión del lado derecho de (5.29), al hacer el cambio de variable pertinente $x = (\sigma-s)/(t-s)$, que hace aparecer la función Beta de Euler (ver [45]), se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_s^t \|R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma)\|\,\|R(\sigma,s)\|\, d\sigma \\ &\qquad \leq \int_s^t C\left((t-\tau)(t-\sigma)^{\rho-2}+(t-\tau)^{\alpha}(t-\sigma)^{-1}\right)(\sigma-s)^{\rho-1}\, d\sigma \\ &\qquad \leq C\,\text{máx}\,\{B(\rho-1,\rho),B(0,\rho)\}\left((t-\tau)(t-s)^{2\rho-2}+(t-\tau)^{\alpha}(t-s)^{\rho-1}\right) \\ &\qquad \leq CT^{\rho}\,\text{máx}\,\{B(\rho-1,\rho),B(0,\rho)\}\left((t-\tau)(t-s)^{\rho-2}+(t-\tau)^{\alpha}(t-s)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, tomando la nueva constante C como $CT^{\rho}\,\text{máx}\,\{B(\rho-1,\rho),B(0,\rho)\}$, y siguiendo los mismos pasos que llevaron de la ecuación (5.27) a (5.28) se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_s^t \|R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma)\|\,\|R(\sigma,s)\|\, d\sigma \\ &\qquad\qquad \leq C\left((t-\tau)^{\delta}(t-s)^{-\delta}(\tau-s)^{\rho-1}+(t-\tau)^{\beta}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right), \end{aligned}$$

que demuestra lo que se pretendía. □

Este lema garantiza que $U(t,s)$, (5.11), y $W(t,s)$, (5.12), son funciones fuertemente continuas del parámetro t en $[0,T]$.

Teorema 5.1.1. (Existencia de soluciones débiles para el problema lineal no autónomo). La función $u(t)$ dada por la ecuación (5.23), con $u_0 \in X$ y $f \in C([0,T],X)$, es una solución débil del problema (5.1) en $[0,T]$.

Demostración. La principal dificultad a salvar en la demostración será la falta de regularidad en el extremo del integrando de $W(t,s)$. Este problema se soluciona haciendo un 'corte' al sistema de evolución (ya que se no tiene garantizada su diferenciabilidad en el punto $t=s$) de forma que se define

$$U_\epsilon(t,s) = \exp\big(-(t-s)A(t)\big) + \int_s^{t-\epsilon} \exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)R(\tau,s)\,d\tau.$$

Dado que el integrando es diferenciable como función de t, se dispone de cota integrable para su derivada por el Lema 5.1.2, y es continuo como función del parámetro de integración τ gracias al Lema 5.1.3, se tiene que el operador $U_\epsilon(t,s)$, definido para $t > s+\epsilon$, es diferenciable en t, y que su rango está contenido en el dominio $D(A(t))$ por el Teorema 2.3.4 de Hille, en virtud de que $A(t)\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)R(\tau,s)$ es integrable en $(s,t-\epsilon)$ gracias al Corolario 3.6.1 y a (5.20). Si ahora se define un operador

$$Y_\epsilon(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}U_\epsilon(t,s) + A(t)U_\epsilon(t,s). \tag{5.31}$$

A continuación, se efectúa la derivada y se acotan las integrales involucradas, buscando conseguir una cota para $Y_\epsilon(t,s)$,

$$\begin{aligned}
Y_\epsilon(t,s) =& -A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda \\
&+ \exp\big(-\epsilon A(t)\big)R(t-\epsilon,s) - \int_s^{t-\epsilon} A(t)\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)R(\tau,s)\,d\tau \\
&+ \int_s^{t-\epsilon}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda\,R(\tau,s)\,d\tau \\
&+ A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big) + \int_s^{t-\epsilon} A(t)\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)R(\tau,s)\,d\tau \\
=& \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda + \exp\big(-\epsilon A(t)\big)R(t-\epsilon,s) \\
&+ \int_s^{t-\epsilon}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial t}(A(t)-\lambda)^{-1}\,d\lambda\,R(\tau,s)\,d\tau \\
=& \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)\exp\big(-(t-s)A(t)\big) + \exp(-\epsilon A(t))R(t-\epsilon,s) \\
&+ \int_s^{t-\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)R(\tau,s)\,d\tau \\
=& -R_1(t,s) + \exp\big(-\epsilon A(t)\big)R(t-\epsilon,s) - \int_s^{t-\epsilon} R_1(t,\tau)R(\tau,s)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

De esta forma, por (5.14) el primer sumando de (5.32) está acotado por algo proporcional a $(t-s)^{\rho-1} < (t-s-\epsilon)^{\rho-1}$. Por (5.20), el segundo sumando de (5.32) está acotado por algo proporcional a $(t-s-\epsilon)^{\rho-1}$, ya que el semigrupo está acotado por una constante en virtud de (5.2). Para el tercer sumando de (5.32) se puede operar a partir de las cotas anteriores, en busca de agrupar una función Beta por cambio de variable $x=(\tau-s)/(t-\epsilon-s)$, escribiendo

$$\begin{aligned}\left\|\int_s^{t-\epsilon} R_1(\tau,s)R(\tau,s)\,d\tau\right\| &\leq \int_s^{t-\epsilon}(t-\epsilon-\tau)^{\rho-1}(\tau-s)^{\rho-1}\,d\tau\\ &=(t-s-\epsilon)^{2\rho-1}B(\rho,\rho)\\ &< B(\rho,\rho)T^{\rho}(t-s-\epsilon)^{\rho-1},\end{aligned}$$

de forma que se tiene que

$$\|Y_\epsilon(t,s)\|\leq C(t-s-\epsilon)^{\rho-1}. \tag{5.33}$$

A continuación, se quiere probar que $Y_\epsilon(t,s)$ converge fuertemente hacia 0 cuando $\epsilon\to 0$. Para ello se comprueba, en primer lugar, que, dado $u\in D(A(t))$, entonces $\exp(-\epsilon A(t))u\to u$ para todo $t\in[0,T]$ cuando $\epsilon\to 0$. Se tiene

$$\exp\big(-\epsilon A(t)\big)u-u=\int_0^\epsilon\frac{\partial}{\partial\sigma}\exp\big(-\sigma A(t)\big)u\,d\sigma=-\int_0^\epsilon\exp\big(-\sigma A(t)\big)A(t)u\,d\sigma. \tag{5.34}$$

Sabiendo que el semigrupo está acotado por una constante, se acota la expresión por

$$\big\|\exp\big(-\epsilon A(t)\big)u-u\big\|\leq\epsilon C\,\|A(t)u\|\xrightarrow{\epsilon\to 0}0 \tag{5.35}$$

Dados entonces s y t tales que $0<\epsilon\leq s+\epsilon<t\leq T$, $u\in X$, y una sucesión $u_n\in D(A(t))$ tal que $u_n\to R(t,s)u$, a partir de (5.32) y teniendo en cuenta la ecuación integral (5.13) se puede escribir

$$\begin{aligned}Y_\epsilon(t,s)u&=-R_1(t,s)u+\exp\big(-\epsilon A(t)\big)R(t-\epsilon,s)u-\int_s^{t-\epsilon}R_1(t,\tau)R(\tau,s)u\,d\tau\\ &=\exp\big(-\epsilon A(t)\big)\big(R(t-\epsilon,s)u-R(t,s)u\big)+\big(\exp\big(-\epsilon A(t)\big)-I\big)\big(R(t,s)u-u_n\big)\\ &\qquad+\big(\exp\big(-\epsilon A(t)\big)-I\big)u_n+\int_{t-\epsilon}^t R_1(t,\tau)R(\tau,s)u\,d\tau.\end{aligned}$$

Se comprueba que el primer sumando tiende hacia 0 cuando $\epsilon\to 0$ al tomar una cota uniforme para el semigrupo por (5.2) y usar la continuidad de $R(t,s)$ en el primer parámetro que da el Lema 5.1.3. Para el segundo sumando se tiene lo mismo al tomar una cota uniforme y considerar que $u_n\to R(t,s)u$. Para el tercer sumando, por la ecuación (5.35), y para el cuarto, utilizando las cotas (5.14) y (5.20) se puede escribir

$$\left\|\int_{t-\epsilon}^t R_1(t,\tau)R(\tau,s)u\,d\tau\right\|\leq\int_{t-\epsilon}^t(t-\tau)^{\rho-1}(\tau-s)^{\rho-1}\,\|u\|\,d\tau\leq C\epsilon^\rho(t-s-\epsilon)^{\rho-1}\,\|u\|\,,$$

donde se ha acotado $(\tau-s)^{\rho-1}\leq(t-s-\epsilon)^{\rho-1}$ antes de integrar. Esto quiere decir que $Y_\epsilon(t,s)\to 0$ fuertemente cuando $\epsilon\to 0$.

Sea φ una función que verifica las hipótesis de la Definición 5.1.1 de solución débil. Entonces, por el Teorema de la Convergencia Dominada podemos intercambiar el límite en ϵ con la integral en la expresión siguiente

$$\int_0^T\big\langle\varphi'(t),U(t,0)u_0\big\rangle\,dt=\lim_{\eta\to 0^+}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\eta^T\big\langle\varphi'(t),U_\epsilon(t,0)u_0\big\rangle\,dt. \tag{5.36}$$

Esto se puede llevar a cabo porque para cada $\eta > 0$ se tiene que $\varphi'(t)$ es continua en $[\eta, T]$ también y $U_\epsilon(t,0)$ converge uniformemente a $U(t,0)$ en $[\eta, T]$, luego $\langle \varphi'(t), U_\epsilon(t,0)u_0\rangle$ converge uniformemente a $\langle \varphi'(t), U(t,0)u_0\rangle$ en $[\eta, T]$. La convergencia uniforme de $U_\epsilon(t,0)$ a $U(t,0)$ en $[\eta, T]$ se tiene porque

$$\|U(t,0) - U_\epsilon(t,0)\| = \left\| \int_{t-\epsilon}^{t} \exp\big(-(t-\tau)A(t)\big) R(\tau,0)\, d\tau \right\| \le C' \int_{t-\epsilon}^{t} \tau^{\rho-1}\, d\tau < C\eta^{\rho-1}\epsilon,$$

donde se ha acotado uniformemente el semigrupo por (5.2) y se ha utilizado la cota para $R(t,s)$, (5.20). A continuación, se aplica integración por partes sobre la expresión que hay dentro de los límites del lado derecho de (5.36) para obtener

$$\int_\eta^T \big\langle \varphi'(t), U_\epsilon(t,0)u_0\big\rangle\, dt = \langle \varphi(t), U_\epsilon(t,0)u_0\rangle \Big|_\eta^T - \int_\eta^T \left\langle \varphi(t), \frac{\partial}{\partial t} U_\epsilon(t,0)u_0 \right\rangle dt.$$

Ahora, se introduce la definición de $Y_\epsilon(t,s)$, (5.31), se tiene en cuenta que $\langle \varphi(t), A(t)U_\epsilon(t,0)u_0\rangle = \langle A^*(t)\varphi(t), U_\epsilon(t,0)u_0\rangle$, que $\varphi(T) = 0$, y se llega a que

$$\begin{aligned}\int_\eta^T \big\langle \varphi'(t), U_\epsilon(t,0)u_0\big\rangle\, dt = &-\langle \varphi(\eta), U_\epsilon(\eta,0)u_0\rangle - \int_\eta^T \langle \varphi(t), Y_\epsilon(t,0)u_0\rangle\, dt \\ &+ \int_\eta^T \langle A^*(t)\varphi(t), U_\epsilon(t,0)u_0\rangle\, dt.\end{aligned}$$

A continuación, haciendo tender $\epsilon \to 0^+$, teniendo en cuenta la cota para dominar la convergencia (5.33), la convergencia uniforme $U_\epsilon(t,0) \to U(t,0)$ en $[\eta, T]$, la continuidad por hipótesis de $A^*(t)\varphi(t)$ y la convergencia fuerte hallada antes para $Y_\epsilon(t,s)$, se tiene

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\eta^T \big\langle \varphi'(t), U_\epsilon(t,0)u_0\big\rangle\, dt = -\langle \varphi(\eta), U(\eta,0)u_0\rangle + \int_\eta^T \langle A^*(t)\varphi(t), U(t,0)u_0\rangle\, dt.$$

Haciendo tender ahora $\eta \to 0^+$ se obtiene

$$\lim_{\eta\to 0^+} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\eta^T \big\langle \varphi'(t), U_\epsilon(t,0)u_0\big\rangle\, dt = -\langle \varphi(0), u_0\rangle + \int_0^T \langle A^*(t)\varphi(t), U(t,0)u_0\rangle\, dt,$$

lo cual, a través de (5.36), conduce a la expresión

$$\int_0^T \big\langle \varphi'(t) - A^*(t)\varphi(t), U(t,0)u_0\big\rangle\, dt + \langle \varphi(0), u_0\rangle = 0, \tag{5.37}$$

en la cual falta todavía por introducir la contribución del dato no homogéneo.

Para ello, se trata de hacer una representación similar de la otra parte de la solución dada por la ecuación (5.23). Se aplican en primer lugar los Teoremas 2.3.3 y de Fubini 2.3.6. De nuevo, argumentos similares a los del caso anterior permiten intercambiar límites e integrales.

$$\begin{aligned}\int_0^T \left\langle \varphi'(t), \int_0^t U(t,\sigma)f(\sigma)\, d\sigma \right\rangle dt &= \int_0^T \int_\sigma^T \big\langle \varphi'(t), U(t,\sigma)f(\sigma)\big\rangle\, dt\, d\sigma \\ &= \lim_{\eta\to 0^+} \lim_{\delta\to 0^+} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{T-\eta} \int_{\sigma+\delta}^T \big\langle \varphi'(t), U_\epsilon(t,\sigma)f(\sigma)\big\rangle\, dt\, d\sigma.\end{aligned} \tag{5.38}$$

Para $0 < \epsilon < \delta < \eta$ la integral dentro de los límites puede reescribirse de forma análoga a como se ha hecho antes, aplicando integración por partes y la definición de $Y_\epsilon(t,s)$, obteniendo para el argumento de los límites de la expresión anterior

$$\begin{aligned}
\int_0^{T-\eta} \int_{\sigma+\delta}^{T} \big\langle \varphi'(t), U_\epsilon(t,\sigma) f(\sigma) \big\rangle \, dt \, d\sigma \\
&= - \int_0^{T-\eta} \langle \varphi(\sigma+\delta), U_\epsilon(\sigma+\delta,\sigma) f(\sigma) \rangle \, d\sigma \\
&\quad - \int_0^{T-\eta} \int_{\sigma+\delta}^{T} \langle \varphi(t), Y_\epsilon(t,\sigma) f(\sigma) \rangle \, dt \, d\sigma \\
&\quad + \int_0^{T-\eta} \int_{\sigma+\delta}^{T} \langle A^*(t)\varphi(t), U_\epsilon(t,\sigma) f(\sigma) \rangle \, dt \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Gracias a la cota (5.33), a la convergencia uniforme de $U_\epsilon(t,s)$ en $[s+\eta, T]$, a la continuidad de $\varphi(t)$, $A^*(t)\varphi(t)$ y $f(t)$ en $[0,T]$ y a la convergencia fuerte de $Y_\epsilon(t,s)$, cuando se hace $\epsilon \to 0$ se tiene que el lado derecho de la expresión anterior tiende hacia

$$- \int_0^{T-\eta} \langle \varphi(\sigma+\delta), U(\sigma+\delta,\sigma) f(\sigma) \rangle \, d\sigma + \int_0^{T-\eta} \int_{\sigma+\delta}^{T} \langle A^*(t)\varphi(t), U(t,\sigma) f(\sigma) \rangle \, dt \, d\sigma.$$

Se hace ahora tender $\delta \to 0$, obteniendo

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0^+} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{T-\eta} \int_{\sigma+\delta}^{T} \big\langle \varphi'(t), U_\epsilon(t,\sigma) f(\sigma) \big\rangle \, dt \, d\sigma \\
&= - \int_0^{T-\eta} \langle \varphi(\sigma, f(\sigma)) \rangle \, d\sigma + \int_0^{T-\eta} \int_{\sigma}^{T} \langle A^*(t)\varphi(t), U(t,\sigma) f(\sigma) \rangle \, dt \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Para acabar, se hace tender $\eta \to 0$, pudiendo escribir definitivamente, usando (5.38),

$$\begin{aligned}
\int_0^{T} \left\langle \varphi'(t), \int_0^{t} U(t,\sigma) f(\sigma) \, d\sigma \right\rangle dt \\
&= - \int_0^{T} \langle \varphi(\sigma), f(\sigma) \rangle \, d\sigma + \int_0^{T} \int_{\sigma}^{T} \langle A^*(t)\varphi(t), U(t,\sigma) f(\sigma) \rangle \, dt \, d\sigma.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Basta sumar las ecuaciones (5.37) y (5.39) para obtener que en efecto $u(t)$ construida como se hizo anteriormente es solución débil del problema (5.1). $\square$

Teorema 5.1.2. (Unicidad de soluciones débiles del problema lineal no autónomo). La solución débil del problema (5.1) es única.

Demostración. Por reducción al absurdo, supóngase que existen dos soluciones débiles distintas al problema (5.1). Entonces su resta será solución débil del problema con dato $f(t) \equiv 0$. Basta pues demostrar que este problema tiene solución débil única. La demostración se efectuará construyendo para $0 \le s \le t \le T$ un nuevo operador $V(t,s)$, del cual se probará que $V(t,0)u_0$ coincide con cualquier solución débil del problema (5.1) homogéneo. Procede fijarse bien en los detalles de la construcción de este operador, ya que aunque es muy similar a la solución débil antes construida, es algo diferente. Se considera

$$V(t,s) = \exp\big(-(t-s)A(s)\big) + Z(t,s), \qquad Z(t,s) = \int_s^t Q(t,\tau) \exp\big(-(\tau-s)A(s)\big) \, d\tau,$$

$$Q(t,s)=\sum_{m=1}^{\infty}Q_m(t,s),\qquad\qquad Q_1(t,s)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)\exp\big(-(t-s)A(s)\big),$$

$$Q_m(t,s)=\int_s^t Q_{m-1}(t,\tau)Q_1(\tau,s)\,d\tau.$$

Por la misma definición, se pueden deducir algunas propiedades del mismo, como por ejemplo $V(t,t)=I$. Del mismo modo que se obtuvieron las desigualdades (5.14) y (5.20) se obtienen sus análogas

$$\|Q_1(t,s)\|\leq C(t-s)^{\rho-1},\qquad\qquad \|Q(t,s)\|\leq C(t-s)^{\rho-1}. \tag{5.40}$$

Gracias a estas cotas se puede hacer uso del Teorema de la Convergencia Dominada para intercambiar integral y suma en la siguiente expresión, obteniendo una ecuación integral análoga a (5.13),

$$\begin{aligned}Q(t,s)&=Q_1(t,s)+\sum_{m=1}^{\infty}Q_{m+1}(t,s)\\&=Q_1(t,s)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_s^t Q_m(t,\tau)Q_1(\tau,s)\,d\tau\\&=Q_1(t,s)+\int_s^t Q(t,\tau)Q_1(\tau,s)\,d\tau.\end{aligned}\tag{5.41}$$

$V(t,s)$ es un operador fuertemente continuo en $0\leq s\leq t\leq T$ dado que es la suma de dos operadores fuertemente continuos. El primero, $\exp(-(t-s)A(s))$, es fuertemente continuo porque es un semigrupo analítico y el segundo, $\int_s^t Q(t,\tau)\exp(-(\tau-s)A(s))d\tau$, dado que el Lema 5.1.3 se puede formular análogamente en $Q(t,s)$ (resultando la continuidad de $Q(t,s)$ respecto del parámetro t), es fuertemente continuo porque $Q(t,\tau)$ es continuo en t, $\exp(-(\tau-s)A(s))$ es fuertemente continuo en s y se tiene una cota integrable por (5.40) y la cota uniforme para el semigrupo (5.2).

Además, a partir del Lema 5.1.2 y de la continuidad fuerte del integrando $Q(t,\tau)\exp(-(\tau-s)A(s))$, se tiene que, para $0\leq s<t\leq T$ y $u\in D(A(s))$, $V(t,s)$ es fuertemente derivable respecto del segundo parámetro y tiene derivada $V(t,s)A(s)u$ (no se puede garantizar a priori derivabilidad en norma porque para derivar respecto del límite de integración se requiere la continuidad del integrando en el extremo, y sólo se dispone de continuidad fuerte, no de continuidad en norma). La derivada se obtiene de forma explícita al utilizar la ecuación integral (5.41),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}V(t,s)u&=Q_1(t,s)u+\exp\big(-(t-s)A(s)\big)A(s)u-Q(t,s)u\\&\qquad+\int_s^t Q(t,\tau)\Big(Q_1(\tau,s)+\exp\big(-(\tau-s)A(s)\big)A(s)\Big)u\,d\tau\\&=V(t,s)A(s)u.\end{aligned}$$

Para tratar de salvar el problema que se tiene en el extremo inferior de la integral (de que no se dispone de continuidad del integrando en ese punto) se asume ahora $\epsilon>0$ y $s+\epsilon<t$, y se

considera (con las cotas de las que se dispone es inmediato comprobar que la integral converge y por tanto $V_\epsilon(t,s)$ es un operador lineal y continuo)

$$V_\epsilon(t,s) = \exp\big(-(t-s)A(s)\big) + \int_{s+\epsilon}^{t} Q(t,\tau)\exp\big(-(\tau-s)A(s)\big)\,d\tau.$$

Ahora bien, esto dice que $\frac{\partial}{\partial s}V_\epsilon(t,s)$ es derivable en norma y se puede escribir como (de nuevo, es inmediato comprobar que las cotas disponibles lo permiten)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}V_\epsilon(t,s) &= Q_1(t,s) + \exp\big(-(t-s)A(s)\big)A(s) - Q(t,s+\epsilon)\exp\big(-\epsilon A(s)\big)\\ &\qquad + \int_{s+\epsilon}^{t} Q(t,\tau)\Big(Q_1(\tau,s) + \exp\big(-(\tau-s)A(s)\big)A(s)\Big)\,d\tau\\ &= Q_1(t,s) - Q(t,s+\epsilon)\exp\big(-\epsilon A(s)\big) + \int_{s+\epsilon}^{t} Q(t,\tau)Q_1(\tau,s)\,d\tau + V_\epsilon(t,s)A(s),\end{aligned} \tag{5.42}$$

y para $V_\epsilon(t,s)A(s)$ se tiene

$$V_\epsilon(t,s)A(s) = \exp\big(-(t-s)A(s)\big)A(s) + \int_{s+\epsilon}^{t} Q(t,\tau)\exp\big(-(\tau-s)A(s)\big)A(s)\,d\tau. \tag{5.43}$$

Gracias al Corolario 3.6.1 y a la cota (5.40), se verifica que la integral es convergente en norma, lo que garantiza que $V_\epsilon(t,s)A(s)$ es lineal y continuo. Finalmente, gracias al Lema 5.1.1 se comprueba que ambos $\frac{\partial}{\partial s}V_\epsilon(t,s)$ y $V_\epsilon(t,s)A(s)$ son continuos como función de s en $0 \le s < t-\epsilon$.

Por otro lado, se tiene que $A^*(s)V_\epsilon^*(t,s)$ coincide con $(V_\epsilon(t,s)A(s))^*$ en todo punto donde está definido, es decir, en todo $u \in X^*$ tal que $V_\epsilon^*(t,s)u \in D(A^*(s))$, pero además, $(V_\epsilon(t,s)A(s))^*$ es el adjunto de un operador lineal y continuo luego es lineal y continuo. Por tanto, $A^*(s)V_\epsilon^*(t,s)$ se puede extender a un operador lineal y continuo, y también continuo en s. Sea

$$P_\epsilon(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}V_\epsilon(t,s) - V_\epsilon(t,s)A(s). \tag{5.44}$$

Teniendo en cuenta (5.42) y (5.43), este operador se puede acotar en norma como

$$\|P_\epsilon(t,s)\| = \left\| Q(t,s) - Q(t,s+\epsilon)\exp\big(-\epsilon A(s)\big) - \int_{s+\epsilon}^{t} Q(t,\tau)Q_1(\tau,s)\,d\tau \right\|,$$

donde el término $Q(t,s)$ está acotado por $C(t-s)^{\rho-1} \le C(t-s-\epsilon)^{\rho-1}$, el término $Q(t,s+\epsilon)\exp(\epsilon A(s))$ está acotado por $C(t-s-\epsilon)^{\rho-1}$ por parte de $Q(t,s+\epsilon)$ y por una constante por parte del semigrupo y para el término integral se tiene

$$\begin{aligned}\left\|\int_{s+\epsilon}^{t} Q(t,\tau)Q_1(\tau,s)d\tau\right\| &\le C\int_{s+\epsilon}^{t}(t-\tau)^{\rho-1}(\tau-s)^{\rho-1}d\tau\\ &\le C\int_{s+\epsilon}^{t}(t-\tau)^{\rho-1}(\tau-s-\epsilon)^{\rho-1}d\tau\\ &= C(t-s-\epsilon)^{2\rho-1}B(\rho,\rho)\\ &\le CB(\rho,\rho)T^{\rho}(t-s-\epsilon)^{\rho-1}.\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene la cota

$$\|P_\epsilon(t,s)\| \leq C(t-s-\epsilon)^{\rho-1}. \tag{5.45}$$

A continuación, se procede a probar que $P_\epsilon(t,s)$ converge fuertemente a 0 cuando $\epsilon \to 0$. Dado $u \in D(A(t))$, como se vio en la ecuación (5.34), entonces $\exp(-\epsilon A(t))u \to u$ y, por lo tanto, al ser $\exp(-\epsilon A(t))$ lineal y continuo es así para todo $u \in X$, ya que $D(A(t))$ es denso en X. Por la continuidad de $Q(t,s)$ en el segundo parámetro es inmediato que, dado $u \in X$,

$$P_\epsilon(t,s)u = Q(t,s)u - Q(t,s+\epsilon)\exp\big(\epsilon A(s)\big)u - \int_{s+\epsilon}^{t} Q(t,\tau)Q_1(\tau,s)u\,d\tau \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Ahora se dispone definitivamente de las herramientas para abordar la prueba. Sea $u(t)$ una solución débil del problema (5.1) con dato $f(t) \equiv 0$. Por definición

$$\int_0^T \big\langle \psi'(t) - A^*(t)\psi(t), u(t)\big\rangle\,dt + \langle \psi(0), u_0\rangle = 0,$$

para cualquier función ψ que verifique las condiciones de la Definición 5.1.1 de solución débil. Sean t_0 un elemento fijo en $0 < t_0 \leq T$ y φ una función continuamente diferenciable con soporte contenido en $(0,t_0)$ que toma valores en X^*. Sea $\epsilon > 0$ un número positivo más pequeño que la distancia entre el soporte de φ y t_0, y defínase $\psi_\epsilon(t)$ como $\psi_\epsilon(t) = V_\epsilon^*(t_0,t)\varphi(t)$ si t pertenece al soporte de φ y $\psi_\epsilon(t) = 0$ en otro caso. De esta forma $\psi_\epsilon(t)$ satisface las condiciones de la Definición 5.1.1, y se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_0} \Big\langle \varphi'(t), V(t_0,t)u(t)\Big\rangle\,dt \\
&\qquad = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{t_0} \Big\langle \varphi'(t), V_\epsilon(t_0,t)u(t)\Big\rangle\,dt \\
&\qquad = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{t_0} \Big\langle V_\epsilon^*(t_0,t)\varphi'(t), u(t)\Big\rangle\,dt \\
&\qquad = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^{t_0} \Big\langle \psi_\epsilon'(t) - \frac{\partial}{\partial t}V_\epsilon^*(t_0,t)\cdot\varphi(t), u(t)\Big\rangle\,dt \\
&\qquad = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\int_0^{T} \Big\langle \psi_\epsilon'(t) - A^*(t)\psi_\epsilon(t), u(t)\Big\rangle\,dt - \int_0^{t_0} \Big\langle \varphi(t), P_\epsilon(t_0,t)u(t)\Big\rangle\,dt \right),
\end{aligned} \tag{5.46}$$

donde la última igualdad se ha obtenido a partir de conjugar la definición de $P_\epsilon(t,s)$, (5.44). La primera integral de la última igualdad se anula porque $u(t)$ es solución débil, y la segunda integral también se anula, por la convergencia fuerte de $P_\epsilon(t,s)$ hacia 0, gracias a que la cota (5.45) y la continuidad de $\varphi(t)$ y de $u(t)$ permiten dominar la convergencia. Esto demuestra que un análogo a la derivada débil o generalizada de $V(t_0,t)u(t)$ se anula en $(0,t_0)$.

A continuación, se procede a probar que eso implica que $V(t_0,t)u(t)$ no depende de t en dicho intervalo. Para ello, se toma $\psi_0 \in C_0^\infty([0,T],\mathbb{R})$, una función test que toma valores reales, con soporte contenido en $[0,t_0]$ y cuya integral en dicho intervalo vale 1, y sea ϕ una función continua en $[0,T]$ que toma valores en X^*. Sea $x \in X^*$ definido por

$$x = \int_0^{t_0} \phi(t)\,dt.$$

Considérese a continuación

$$\varphi(t) = \int_0^t \big(x\psi_0(s) - \phi(s)\big)\, ds,$$

que es continuamente diferenciable y, además, $\varphi'(t) = x\psi_0(t) - \phi(t)$, por lo que, aplicando que ya se había obtenido que el lado izquierdo de (5.46) se anula idénticamente para φ continuamente diferenciable y con soporte compacto contenido en $(0, t_0)$,

$$\int_0^{t_0} \Big\langle x\psi_0(t) - \phi(t), V(t_0, t)u(t) \Big\rangle\, dt = 0.$$

De aquí que, utilizando el Teorema 2.3.3, y sabiendo que ψ_0 es una función real se obtiene

$$\int_0^{t_0} \Big\langle \phi(t), V(t_0, t)u(t) \Big\rangle\, dt = \int_0^{t_0} \Big\langle x\psi_0(t), V(t_0, t)u(t) \Big\rangle\, dt = \Big\langle x, \int_0^{t_0} \psi_0(t)V(t_0, t)u(t)\, dt \Big\rangle.$$

Renombrando $c = \int_0^{t_0} \psi_0(t)V(t_0, t)u(t)\, dt$, introduciendo la definición de x y utilizando de nuevo el Teorema 2.3.3 se sigue que

$$\int_0^{t_0} \big\langle \phi(t), V(t_0, t)u(t) \big\rangle\, dt = \int_0^{t_0} \big\langle \phi(t), c \big\rangle\, dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t_0} \big\langle \phi(t), V(t_0, t)u(t) - c \big\rangle\, dt = 0.$$

Para acabar se procede por reducción al absurdo, y se supone que existe $s \in [0, t_0]$ tal que $|\langle \phi(s), V(t_0, s)u(s) - c\rangle| \neq 0$. Existe entonces un entorno U de s contenido en $[0, t_0]$ tal que dicha función no cambia de signo en U. Como ϕ es una función continua arbitraria se puede tomar con soporte contenido en U y tal que dado $x \in X^*$ se tenga $\phi(s) = x$, llegando a un absurdo pues

$$0 = \left| \int_0^{t_0} \Big\langle \phi(t), V(t_0, t)u(t) - c \Big\rangle\, dt \right| \le \int_0^{t_0} \left| \Big\langle \phi(t), V(t_0, t)u(t) - c \Big\rangle \right| dt,$$

donde el término de la derecha es estrictamente positivo. Esto implica que para todo $x \in X^*$ se verifica que $\langle x, V(t_0, s)u(s) - c\rangle = 0$, por lo que se tiene $V(t_0, s)u(s) = c$ para todo $s \in [0, t_0]$. En consecuencia, $u(t_0) = V(t_0, 0)u_0$ se obtiene haciendo tender $t \to 0$ y $t \to t_0$. Dado que t_0 era arbitrario en $(0, T]$, esto completa la prueba. □

Esta demostración proporciona, además, información adicional porque, como ya se había construido previamente una solución débil a este problema, $U(t, s)u_0$, ambas deben coincidir. Por lo tanto,

$$V(t, s) = U(t, s),$$

y, además,

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t, s)x = U(t, s)A(s)x,$$

para todo $x \in D(A(s))$.

5.1.3. Soluciones clásicas

Definición 5.1.2. Se dirá que una función $u(t)$ es **solución** o **solución clásica** del problema (5.1) si $u \in C([0, T], X) \cap C^1((0, T], X)$, $u \in D(A(t))$ para todo $t \in (0, T]$, $Au \in C((0, T], X)$ y además se verifican las ecuaciones del problema.

Teniendo en cuenta que si la función $u(t)$ es derivable entonces, dada $\varphi(t)$ cumpliendo las hipótesis de la Definición 5.1.1, se tiene que $\langle\varphi(t), u(t)\rangle$ es continuamente derivable, luego se le puede aplicar integración por partes,

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \big\langle \varphi(t), u'(t)\big\rangle\, dt &= -\big\langle \varphi(t), u(t)\big\rangle\Big|_0^T + \int_0^T \big\langle \varphi'(t), u(t)\big\rangle\, dt \\
&= \big\langle \varphi(0), u_0\big\rangle + \int_0^T \big\langle \varphi'(t), u(t)\big\rangle\, dt,
\end{aligned}$$

por lo que, utilizando lo anterior y la ecuación diferencial del problema (5.1),

$$\begin{aligned}
\int_0^T \Big\langle \varphi'(t) - A^*(t)\varphi(t), u(t)\Big\rangle dt + \int_0^T \big\langle \varphi(t), f(t)\big\rangle\, dt + \langle\varphi(0), u_0\rangle& \\
= \int_0^T \big\langle \varphi(t), -u'(t) - A(t)u(t) + f(t)\big\rangle\, dt& \\
= 0,&
\end{aligned}$$

es decir, que toda solución clásica es, de hecho, solución débil. Entonces, el Teorema 5.1.2 implica la unicidad de las soluciones en el sentido clásico también.

A continuación, se pretende encontrar cotas para las derivadas parciales del operador $U(t,s)$ del tipo de las que se han venido tratando. Con este fin, para salvar la posible falta de continuidad del integrando en el extremo, y, por tanto, la imposibilidad de derivar respecto del extremo, dado $0 < \epsilon < t - s$, se hace la siguiente definición,

$$W_\epsilon(t,s) = \int_s^{t-\epsilon} \exp\big(-(t-\tau)A(t)\big) R(\tau, s)\, d\tau.$$

Recordando la expresión $R_1(t,s) = -\big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\big)\exp\big(-(t-s)A(t)\big)$ y manipulando se obtiene, teniendo en cuenta que el integrando es continuo hasta el extremo y que es derivable en el interior con una cota integrable,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} W_\epsilon(t,s) &= \exp\big(-\epsilon A(t)\big) R(t-\epsilon, s) + \int_s^{t-\epsilon} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)\Big) R(\tau,s)\, d\tau \\
&= \exp\big(-\epsilon A(t)\big) R(t-\epsilon, s) + \int_s^{t-\epsilon} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)\Big)\big(R(\tau,s) - R(t,s)\big)\, d\tau \\
&\quad + \int_s^{t-\epsilon} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)\Big)\, d\tau\, R(t,s) \\
&= \exp\big(-\epsilon A(t)\big) R(t-\epsilon, s) + \int_s^{t-\epsilon} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)\Big)\big(R(\tau,s) - R(t,s)\big)\, d\tau \\
&\quad - \int_s^{t-\epsilon} R_1(t,\tau)\, d\tau\, R(t,s) - \int_s^{t-\epsilon} \frac{\partial}{\partial \tau} \exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)\, d\tau\, R(t,s) \\
&= \exp\big(-\epsilon A(t)\big) R(t-\epsilon, s) + \int_s^{t-\epsilon} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)\Big)\big(R(\tau,s) - R(t,s)\big)\, d\tau \\
&\quad - \int_s^{t-\epsilon} R_1(t,\tau)\, d\tau\, R(t,s) - \exp\big(-\epsilon A(t)\big) R(t,s) + \exp\big(-(t-s)A(t)\big) R(t,s).
\end{aligned}$$

Los Lemas 5.1.2 y 5.1.3, así como las cotas (5.20) y (5.14) para R y R_1 respectivamente garantizarán que al hacer $\epsilon \to 0$ en la expresión anterior se obtenga la derivada de $W(t,s)$

respecto del parámetro t. Para ello, se tendrán en cuenta las siguientes cotas en los compactos K de $(s, T]$, en los que se moverá la variable t. Sea $\gamma_K > 0$ tal que $\gamma_K < t - s$ para todo $t \in K$. Por un lado, el Lema 5.1.3 garantiza

$$\big\|\exp\big(-\epsilon A(t)\big)\big(R(t-\epsilon, s) - R(t,s)\big)\big\| \leq C\big(\epsilon^\delta \gamma_K^{\rho-\delta-1} + \epsilon^\beta \gamma_K^{\alpha-\beta-1}\big) \leq C' \epsilon^{\text{máx}\{\delta,\beta\}}.$$

Por otro lado, las cotas (5.20) y (5.14) implican que

$$\left\|\int_s^t R_1(t,\tau)\, d\tau\, R(t,s) - \int_s^{t-\epsilon} R_1(t,\tau)\, d\tau\, R(t,s)\right\| = \left\|\int_{t-\epsilon}^t R_1(t,\tau)\, d\tau\, R(t,s)\right\| \leq C\epsilon^\rho \gamma_K^{\rho-1}.$$

Finalmente, en atención al Lema 5.1.2 y al Lema 5.1.3,

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t-\epsilon}^t \frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)\Big)\big(R(\tau,s) - R(t,s)\big)\, d\tau\right\| \\ \leq C\gamma_K^{-1}\big(\epsilon^\delta \gamma_K^{\rho-\delta-1} + \epsilon^\beta \gamma_K^{\alpha-\beta-1}\big) \\ \leq C' \text{máx}\left\{e^\delta, e^\beta\right\}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\frac{\partial}{\partial t} W_\epsilon(t,s)$ converge uniformemente en los compactos hacia la función

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} W_\epsilon(t,s) \xrightarrow{\epsilon \to 0} \int_s^t \frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)\Big)\big(R(\tau,s) - R(t,s)\big)\, d\tau \\ - \int_s^t R_1(t,\tau)\, d\tau\, R(t,s) + \exp\big(-(t-s)A(t)\big)R(t,s)\end{aligned}$$

Como, además, para $t \neq s$ se tiene convergencia puntual $W_\epsilon(t,s) \to W(t,s)$, dado que

$$\left\|\int_{t-\epsilon}^t \exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)R(\tau,s)\, d\tau\right\| \leq \int_{t-\epsilon}^t C(\tau - s)^{\rho-1}\, d\tau = C'\Big((t-s)^\rho - (t-s-\epsilon)^\rho\Big),$$

tiende hacia 0 cuando $\epsilon \to 0^+$. Por lo tanto, se tiene que $W(t,s)$ es derivable respecto del parámetro t para $0 \leq s < t \leq T$ y, además,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} W(t,s) = \int_s^t \frac{\partial}{\partial t}\Big(\exp\big(-(t-\tau)A(t)\big)\Big)\big(R(\tau,s) - R(t,s)\big)\, d\tau \\ - \int_s^t R_1(t,\tau)\, d\tau\, R(t,s) + \exp\big(-(t-s)A(t)\big)R(t,s).\end{aligned} \tag{5.47}$$

Gracias a esto es ahora evidente que $U(t,s)$ es derivable respecto del primer parámetro en $0 \leq s < t \leq T$. Además, utilizando de nuevo las cotas (5.14) y (5.20), y los Lemas 5.1.2 y 5.1.3 se obtiene

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial t} W(t,s)\right\| \leq \int_s^t C(t-\tau)^{\delta-1}(\tau-s)^{\rho-\delta-1}\, d\tau \\ + \int_s^t C(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-s)^{\alpha-\beta-1}\, d\tau \\ + \int_s^t C(t-\tau)^{\rho-1}\, d\tau\, (t-s)^{\rho-1} + C(t-s)^{\rho-1}.\end{aligned}$$

Utilizando la función Beta de Euler como se ha hecho en ocasiones anteriores, teniendo en cuenta que $(t-s)^\rho \leq T^\rho$ para el tercer sumando y tomando una constante global que sea el máximo de las constantes de cada término se obtiene

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}W(t,s)\right\| \leq C\Big((t-s)^{\rho-1} + (t-s)^{\alpha-1}\Big). \tag{5.48}$$

Teniendo en cuenta, además, que

$$C\Big((t-s)^{\rho-1} + (t-s)^{\alpha-1}\Big) \leq C(t-s)^{-1}\Big((t-s)^{\rho} + (t-s)^{\alpha}\Big) \leq \frac{C \text{ máx}\{T^\alpha, T^\rho\}}{t-s}$$

se consigue la cota para la derivada respecto del primer parámetro del operador de evolución,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\right\| \leq C(t-s)^{-1}. \tag{5.49}$$

Teniendo en cuenta ahora que en la demostración del Teorema 5.1.1, de existencia de soluciones débiles, se obtuvo que dado

$$Y_\epsilon(t,s) = \frac{\partial}{\partial t}U_\epsilon(t,s) + A(t)U_\epsilon(t,s),$$

se tiene que $Y_\epsilon(t,s)$ converge fuertemente a cero, entonces se tiene que $R(U(t,s)) \subset D(A(t))$ y

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}U(t,s) + A(t)U(t,s).$$

Además, se obtiene inmediatamente la cota

$$\|A(t)U(t,s)\| \leq C(t-s)^{-1}. \tag{5.50}$$

Procediendo análogamente para el operador $V(t,s)$, como se tiene que $V(t,s) = U(t,s)$, se demuestra además que $\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)$ es una extensión continua de $U(t,s)A(s)$ para $0 \leq s < t \leq T$ y

$$\left\|\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)\right\| \leq C(t-s)^{-1} \tag{5.51}$$

Por tanto, se tiene que, efectivamente, $U(t,s)u_0$ es solución en el sentido clásico del problema con dato $f(t) \equiv 0$. A partir de esto se establece el resultado de existencia y unicidad final.

Teorema 5.1.3. (Existencia y unicidad de soluciones clásicas para el problema lineal no autónomo). El problema (5.1), siendo $u_0 \in X$ un elemento arbitrario y f una función Hölder continua en $[0,T]$, tiene solución única, y esta viene dada por la ecuación

$$u(t) = U(t,0)u_0 + \int_0^t U(t,s)f(s)\,ds. \tag{5.52}$$

Demostración. Para probar el teorema es, de hecho, suficiente ver que

$$v(t) = \int_0^t U(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

es solución del problema

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + A(t)v(t) = f(t), \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Para salvar el problema que entraña la derivabilidad del operador de evolución cuando sus parámetros son iguales se construyen expresiones truncando el dominio de integración. Se considerarán separadamente las diferentes partes. En primer lugar, se puede derivar bajo la integral, por ser el integrando continuamente diferenciable,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{t-\epsilon} W(t,s)f(s)\,ds = W(t,t-\epsilon)f(t-\epsilon) + \int_0^{t-\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}W(t,s)f(s)\,ds,$$

donde el límite final $\epsilon \to 0^+$ se puede tomar gracias a que la cota (5.48) hace integrable el argumento entre 0 y t,

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{t-\epsilon} W(t,s)f(s)\,ds = \int_0^{t}\frac{\partial}{\partial t}W(t,s)f(s)\,ds. \tag{5.53}$$

Además, esta convergencia es uniforme en los compactos. En segundo lugar, siendo también el argumento de la integral continuamente diferenciable

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&\int_0^{t-\epsilon}\exp\big(-(t-s)A(t)\big)f(s)\,ds\\ &= \exp\big(-\epsilon A(t)\big)f(t-\epsilon) - \int_0^{t-\epsilon}R_1(t,s)f(s)\,ds\\ &\qquad - \int_0^{t-\epsilon}A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big)f(s)\,ds\\ &= \exp\big(-\epsilon A(t)\big)\big(f(t-\epsilon)-f(t)\big) + \exp\big(-tA(t)\big)f(t) - \int_0^{t-\epsilon}R_1(t,s)f(s)\,ds\\ &\qquad - \int_0^{t-\epsilon}A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big)\big(f(s)-f(t)\big)\,ds.\end{aligned}$$

En esta expresión, en la igualdad final se puede tomar el límite cuando $\epsilon \to 0^+$ en el primer sumando por la acotación uniforme del semigrupo y la Hölder continuidad de f, en el tercer sumando por estar la convergencia dominada gracias a la cota (5.14) y en el cuarto sumando por estar $A(t)\exp(-(t-s)A(t))$ dominado por $(t-s)^{-1}$ gracias al Corolario 3.6.1 y por la Hölder continuidad de f. Esta convergencia también es uniforme en los compactos. De esta forma se obtiene que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\partial}{\partial t}&\int_0^{t-\epsilon}\exp\big(-(t-s)A(t)\big)f(s)\,ds\\ &= \exp\big(-tA(t)\big)f(t) - \int_0^{t}R_1(t,s)f(s)\,ds\\ &\qquad - \int_0^{t}A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big)\big(f(s)-f(t)\big)\,ds.\end{aligned} \tag{5.54}$$

Para acabar, se utiliza un procedimiento análogo al anterior, teniendo ahora en cuenta, además, el Teorema 2.3.4 de Hille y que $A(t)U(t,s) = -\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)$, para escribir las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}A(t)&\int_0^{t-\epsilon}U(t,s)f(s)\,ds\\ &= -\int_0^{t-\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}W(t,s)f(s)\,ds + \int_0^{t-\epsilon}R_1(t,s)f(s)\,ds\\ &\qquad + \int_0^{t-\epsilon}A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big)\big(f(s)-f(t)\big)\,ds\\ &\qquad\qquad - \exp\big(-tA(t)\big)f(t) + \exp\big(-\epsilon A(t)\big)f(t).\end{aligned}$$

Aquí también se puede hacer tender $\epsilon \to 0$ de forma uniforme gracias a los mismos criterios que en los dos casos anteriores, y añadiendo la conocida continuidad fuerte en el 0 del semigrupo para el último término se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0^+} A(t)\int_0^{t-\epsilon} & U(t,s)f(s)\,ds \\ &= -\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}W(t,s)f(s)\,ds + \int_0^t R_1(t,s)f(s)\,ds \\ &\quad + \int_0^t A(t)\exp\big(-(t-s)A(t)\big)\big(f(s)-f(t)\big)\,ds \\ &\quad - \exp\big(-tA(t)\big)f(t) + f(t).\end{aligned} \tag{5.55}$$

Ahora, por ser uniforme en los compactos la convergencia en los dos primeros desarrollos (5.53) y (5.54) se puede intercambiar el límite y la derivada. En el último, (5.55), aprovechando que $A(t)$ es un operador cerrado, se puede usar el Teorema 2.3.4 de Hille para introducir el operador cerrado $A(t)$ dentro de la integral, aplicar el límite y luego volverlo a sacar. Sumando las tres expresiones que resultan de las mencionadas manipulaciones se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t W(t,s)f(s)\,ds + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \exp\big(-(t-s)A(t)\big)f(s)\,ds + A(t)\int_0^t U(t,s)f(s)\,ds = f(t).$$

Precisamente esto se puede reescribir como

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(t,s)f(s)\,ds + A(t)\int_0^t U(t,s)f(s)\,ds = f(t),$$

que es lo que se quería probar. La función dada por (5.52) es, por tanto, solución clásica del problema en cuestión y, de hecho, es única gracias al Teorema 5.1.2. □

5.2. Dependencia con los datos del problema

Gracias a los resultados obtenidos, el estudio de la continuidad de las soluciones con respecto al dato inicial y a la condición no homogénea se obtienen de forma sencilla. Se procederá como en la Sección 4.3, pero utilizando los resultados de este capítulo.

Teorema 5.2.1. Dada $u(t)$ la solución del problema (5.1) aportada por el Teorema 5.1.3, con $u_0 \in X$, y un dato no homogéneo f, Hölder continua en $[0,T]$, entonces $(u_0, f) \to u$ es Lipschitziana respecto del dato inicial y respecto del dato no homogéneo, cuando se toma norma infinito en $[0,T]$ tanto para u como para f.

Demostración. Dadas condiciones iniciales $u_0, \tilde{u}_0 \in X$ y f Hölder continua en $[0,T]$, sea $u_1(t)$ la solución dada por el Teorema 5.1.3 para el par (u_0, f), y $u_2(t)$ la solución para el par $(\tilde{u}_0, f)$. Basta tomar entonces (5.52), y escribir

$$u_2(t) - u_1(t) = U(t,0)(\tilde{u}_0 - u_0).$$

Utilizando (5.22), se tiene que para $0 \le t \le T$ se verifica

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \le C\,\|\tilde{u}_0 - u_0\|,$$

y, por tanto, tomando el superior en $[0,T]$,

$$\|u_2 - u_1\|_\infty \leq C\,\|\tilde{u}_0 - u_0\|\,.$$

Se comprueba ahora la condición de lipschitzianeidad para el dato no homogéneo, sea $u_1(t)$ la solución del Teorema 5.1.3 para los datos (u_0, f_1) y $u_2(t)$ para (u_0, f_2), donde $u_0 \in X$ y f_1, f_2 son funciones Hölder continuas en $[0,T]$. De nuevo, por (5.52) se tiene

$$u_2(t) - u_1(t) = \int_0^t U(t,s)\big(f_2(s) - f_1(s)\big)\,ds.$$

Acotando, utilizando (5.22), se puede escribir

$$\|u_2(t) - u_1(t)\| \leq \int_0^t C\,\|f_2 - f_1\|_\infty\,ds \leq C'\,\|f_2 - f_1\|_\infty\,.$$

De nuevo, tomando el superior en $0 \leq t \leq T$ se tiene, renombrando la constante C' por C,

$$\|u_2 - u_1\|_\infty \leq C\,\|f_2 - f_1\|_\infty\,.$$

□

5.3. Complementos, aplicaciones y comentarios

En [25], A. Yagi, construye un operador de evolución para el problema anterior bajo unas hipótesis ligeramente menos restrictivas que las utilizadas por H. Tanabe, que son las que han sido expuestas en este capítulo. El operador de evolución construido por Yagi será el que Amann utilizará para resolver el caso semilineal, [6, 7].

5.3.1. Dominio no denso

Cabe destacar que existen aplicaciones en las que la hipótesis de que $D(A(t))$ sea denso en X no se verifica. Esta situación aparece normalmente cuando se trata de hacer realizaciones de operadores en espacios L^∞, dado que el espacio de funciones test C_0^∞ es denso en L^p para $p \in [1,\infty)$, pero no en L^∞. Eliminar esa hipótesis supone privar al semigrupo de continuidad fuerte en el 0, la cual como se puede comprobar, ha sido imprescindible en ciertos puntos del trabajo anterior. Este supuesto suele suponer una mayor dificultad a la hora de resolver el problema abstracto (que impone la introducción de espacios de interpolación desde el principio, que hasta ahora no han aparecido) y mayor exigencia en las hipótesis que conciernen al dato $f(t)$ para que se obtengan soluciones clásicas.

Este tipo de semigrupos no encajan exactamente con los que se han descrito en el Capítulo 3, pero pequeñas modificaciones permiten adaptar la teoría ya que son ‘semigrupos analíticos’ (en un sentido ligeramente menos restrictivo que el que se ha formulado, se elimina la hipótesis de que sean fuertemente continuos en el 0) pero no son de clase C_0. La idea de trabajo, al menos en el caso parabólico, es definir los semigrupos por medio de la integral de Dunford, y comprobar que muchas de las propiedades de estos se siguen cumpliendo a pesar de carecer de continuidad fuerte en el 0 al haber perdido el dominio denso. Se puede encontrar la introducción de esta forma de trabajar en [20], incluyendo también las líneas para problemas hiperbólicos; se pueden encontrar los resultados concernientes al problema que se ha tratado en este capítulo en [1], de Paolo Acquistapace y Brunello Terreni; y un enfoque muy amplio de este tipo de problemas en [17], de Alessandra Lunardi. Los resultados que estos obtienen son, evidentemente, más fuertes que los que se obtendrían que si se aplican los aquí mostrados a la clausura de C_0^∞ en L^∞.

5.3.2. Aplicación

Aunque el objetivo principal de este trabajo es la presentación de la teoría abstracta que permite la resolución de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, conviene recalcar que esta teoría cobra su importancia en la medida en que permite dar respuesta problemas parabólicos en $\mathbb{R}^n$ a través de realizaciones en distintos espacios de los operadores diferenciales lineales. Se presenta a continuación el problema lineal al que se aplica la teoría anterior en $L_p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Sea $\Omega \subset R^n$ un dominio acotado con frontera de clase $\mathcal{C}^m$. Se busca $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \mathcal{A}(x,t,D)u(x,t) = f(x,t), & x \in \Omega, \qquad 0 < t \le T, \\[2ex] u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\[2ex] B_j(x,t,D)u(x,t) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., m/2, & x \in \partial\Omega, \qquad 0 < t \le T. \end{cases} \tag{5.56}$$

$$\mathcal{A}(x,t,D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x,t) D^\alpha, \qquad B_j(x,t,D) = \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(x,t) D^\beta, \qquad f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}. \tag{5.57}$$

El operador en cuestión es un operador fuertemente elíptico (Definición A.4.4), uniformemente en $t \in [0,T]$, es decir, que se puede elegir el mismo θ_0 del Teorema A.4.2 para todo $t \in [0,T]$. Se utiliza la notación habitual de multíndices para α. Además, se asume que los coeficientes de las derivadas de orden más alto son continuas en $\overline{\Omega}$ y que el resto de los coeficientes son acotados y medibles en Ω. Para cada t se asume que los coeficientes satisfacen condiciones Hölder continuas de orden h uniformemente, es decir,

$$\max_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \Omega} |a_\alpha(x,t) - a_\alpha(x,s)| \le L \, |t-s|^h .$$

Los operadores frontera $B_j(x,t,D)$ son de orden m_j independientemente de t (es decir, que sus coeficientes de los términos de orden máximo no se anulan simultáneamente para ningún instante temporal), y con coeficientes en $C^{m-m_j}(\partial\Omega)$. Supóngase que existe $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ tal que $\arg \mathcal{A}^o(x,t,\xi) \ne \theta$ (recordar definición de la parte principal en (1.3)) para todo t, x y todo $\xi \ne 0$. Además para cada $t \in [0,T]$ y para cada $\theta \in [\theta_0, 2\pi - \theta_0]$ se verifican las condiciones del Teorema A.4.1. Entonces el Teorema A.4.2 garantiza que el operador $-A(t)$ definido a continuación genera un semigrupo analítico en $L^p(\Omega)$ para cada t. $A(t)$ viene dado por

$$D(A(t)) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : \ B_j(x,t,D)u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, \ j = 1, 2, \dots, m/s\}, \tag{5.58}$$

$$(A(t)u)(x) = \mathcal{A}(x,t,D)u(x) \quad \text{para } x \in D(A(t)). \tag{5.59}$$

En [23] se puede encontrar los lemas que garantizan que el resto de hipótesis se cumplen también, y, por tanto, los resultados de este capítulo son aplicables al problema en cuestión.

5.3.3. El caso con condiciones frontera

De forma análoga a como se presentó en los resultados de Alonso-Mallo y Palencia en la Sección 4.4, en la cual se construyó explícitamente una forma integral que recogía de forma separada la contribución del término inicial y la frontera; se puede intentar hacer algo parecido en el caso no autónomo. Desgraciadamente en este caso se pierde uno de los factores que resultaban más ventajosos en el caso anterior: la práctica total independencia entre los términos provenientes de la condición inicial y de la frontera. Sin embargo, se puede construir dicha expresión, que es presentada aquí sin prueba y sin indicar rigurosamente la naturaleza y restricciones de los distintos elementos que intervienen, siendo tomada de [12], el cual no asume la hipótesis de dominio denso, y, por lo cual, trabaja definiendo los semigrupos como se ha indicado en la Sección 5.3.1. El propósito al presentarla aquí es meramente ilustrativo de la línea a seguir.

Para $s \in [s, T]$, se considera una familia de operadores dependientes del parámetro temporal $\mathfrak{A}(t) : D \to X$, donde D está incluido de forma continua en X. Se asume, por tanto, que todos los operadores $\mathfrak{A}(t)$ tienen el mismo dominio. Dados unos operadores frontera $B_j(t) : X \to Y$, $j \in 1, 2, \dots, r$, donde Y es el espacio de condiciones frontera, y unos datos $f : [s, T] \to X$, $g_j : [s, T] \to Y$, $j \in 1, 2, \dots, r$, se intenta encontrar $u : [s, T] \to X$ que verifique

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + \mathfrak{A}(t)u(t) = f(t), & & t \in (s, T], \\ B_j(t)u(t) = g_j(t), & j = 1, 2, \dots, r, & t \in (s, T], \\ u(s) = u_0, & & u_0 \in X. \end{cases} \tag{5.60}$$

A estos operadores se les exigen condiciones de regularidad y acotación en espacios de interpolación adecuados. A partir de $\mathfrak{A}(t)$ se define en la forma usual el operador $A(t)$ como aquel que absorbe la parte homogénea de las condiciones frontera:

$$D(A(t)) = \{u \in D \mid B_j(t)u = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, r\}, \qquad A(t)u = \mathfrak{A}(t)u. \tag{5.61}$$

De esta forma, los dominios $D(A(t))$ ya no son idénticos. Se buscan soluciones de la forma siguiente (que se puede entender como una generalización natural de la forma presentada en la Sección 4.4)

$$u(t) = \exp\big(-(t-s)A(s)\big)u_0 + \int_s^t \exp\big((t-\sigma)A(\sigma)\big)R(\sigma)\,d\sigma + \sum_{j=1}^r \int_s^t K_j(\sigma, t-\sigma)S_j(\sigma)\,d\sigma, \tag{5.62}$$

donde K_j es un operador construido como una integral similar a la de Dunford. Para ello, sea

$$\begin{cases} (\mathfrak{A}(t) - \lambda I)u = f, & \\ B_j(t)u = g_j, & j = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \tag{5.63}$$

el cual, por hipótesis, se asume que tiene solución en todo $\mathbb{C}$ salvo en una cuña alrededor del semieje real positivo. Se llamará $N_j(\lambda, t)g$ a la solución de dicho problema con λ en la región de $\mathbb{C}$ donde hay solución garantizada con $f \equiv 0$, $g_k \equiv 0$ si $k \neq j$ y $g_j = g$. Se construye

$$K_j(t, s)g = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda s} N_j(\lambda, t)g\,d\lambda. \tag{5.64}$$

Las funciones $R(\sigma)$ y $S_j(\sigma)$ (que ahora no son operadores sino funciones en un espacio de Banach) son las que hay que determinar por medio de ecuaciones integrales. Hay elementos que aparecen en la construcción de u que no tienen el mismo significado que habían tenido en secciones anteriores. Por ejemplo, ahora la ecuación integral de $R(\sigma)$ ya no es el mismo operador que aparecía en secciones anteriores, de hecho, ni si quiera es un operador, es tan sólo una función en un espacio de Banach. La derivación formal de las ecuaciones da lugar a las ecuaciones integrales que han de resolverse. Se obtienen

$$\begin{aligned} R(t) =& f(t) + \big(A(t) - A(s)\big) \exp\big(-(t-s)A(s)\big)u_0 \\ &+ \int_s^t \big(A(t) - A(s)\big) \exp\big(-(t-\sigma)A(\sigma)\big)R(\sigma)\, d\sigma \\ &\sum_{j=1}^{r} \int_s^t \big(A(\sigma) - A(t)\big)K_j(\sigma, t-\sigma)S_j(\sigma)\, d\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_j(t) =& g_j(t) + \big(B_j(s) - B_j(t)\big) \exp\big(-(t-s)A(s)\big)u_0 \\ &+ \int_s^t \big(B_j(\sigma) - B_j(t)\big) \exp\big(-(t-\sigma)A(\sigma)\big)R(\sigma)\, d\sigma \\ &+ \sum_{j=1}^{r} \int_s^t \big(B_j(\sigma) - B_j(t)\big)K_j(\sigma, t-\sigma)S_j(\sigma)\, d\sigma, \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \ldots, r$. Se puede observar que las dependencias cruzadas en las ecuaciones integrales han roto la limpia separación que se tenía entre la parte proveniente de la frontera y la otra parte que se tenía en el caso lineal autónomo. Bajo ciertas hipótesis de estilo similar a las manejadas en apartados anteriores se puede demostrar que la solución así construida es una solución en un sentido débil análogo al de la sección principal de este capítulo, que la solución débil es única y que bajo ciertas hipótesis es de hecho solución clásica. No se ha prestado en la breve exposición de esta sección demasiada atención a los dominios de los diversos operadores, que no son otra cosa que espacios de interpolación entre los diversos espacios involucrados de forma natural. Esto es así debido a que las hipótesis (ver [12]) que se aportan aparecen dadas también sobre espacios de interpolación, a diferencia de los casos antes descritos.

Capítulo 6

No linealidad, comentarios y conclusiones

A continuación, se pasa a hacer una breve descripción, a modo de pincelada, de cómo se abordan los problemas en el caso semilineal [6, 7, 13] y casilineal [8]. Los artículos de Amann trabajan para el caso de condiciones frontera homogéneas, es decir, que se introducen en el dominio del operador al efectuar la realización pertinente; mientras que el artículo de Greiner hace una construcción integral para tratar el caso de condiciones frontera no homogéneas.

6.1. Los casos semilineal y casilineal

La siguiente proposición (que se puede encontrar en [7]) es la piedra angular de la demostración de existencia y unicidad locales para el caso semilineal. Se define

$$\dot{\Delta}_T = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq s < t \leq T\right\}.$$

Proposición 6.1.1. Sea $s \in [0,T)$ y supóngase que

(I) dados $K : \dot{\Delta}_T \to \mathcal{L}(X,Y)$ y $\hat{\alpha} : (0,T) \to \mathbb{R}^+$ integrable y decreciente, se verifica que $\|K(t,s)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \hat{\alpha}(t-s)$ para $(t,s) \in \dot{\Delta}_T$ y, además, $K(t,\cdot) : [0,t) \to \mathcal{L}(X,Y)$ es fuertemente medible para cada $t \in (0,T]$,

(II) D es un abierto de Y y $f \in C^{0,1-}([s,T] \times D, X)$,

(III) $a \in C([s,T],Y)$ y $a(s) \in D$.

Entonces existe $\delta > 0$ y un único $u \in C([s,s+\delta],D)$ tal que

$$u(t) = a(t) + \int_s^t K(t,\tau) f(\tau,u(\tau))\, d\tau, \qquad \text{para } s \leq t \leq s+\delta.$$

La demostración de esta proposición utiliza como herramienta fundamental el Teorema de de punto fijo de Banach, el cual es el que garantiza la existencia de la solución buscada a la ecuación integral. Para ello, si se define

$$g(u) = a(t) + \int_s^t K(t,\tau) f(\tau,u(\tau))\, d\tau, \qquad \text{para } s \leq t \leq s+\delta,$$

hay que utilizar las hipótesis antes expuestas de la forma adecuada (junto con otros lemas y proposiciones previos que aparecen en el artículo) para demostrar que g es una aplicación contractiva en el espacio de Banach adecuado. Esta es la idea que está detrás de la existencia de soluciones débiles en un entorno de cada punto, utilizando como operador K el operador de evolución $U(t,s)$ y consiguiendo garantizar que se verifican las hipótesis del teorema a través de las cotas que se disponen para $\|U(t,s)\|$.

Teorema 6.1.1. (del punto fijo de Banach). Sean X un espacio métrico completo no vacío y $S : X \to X$ una contracción, es decir, que

$$d(Sv_1, Sv_2) \leq k\, d(v_1, v_2),$$

para todo v_1, $v_2 \in X$ y $k < 1$, donde $d(\cdot,\cdot)$ es la distancia de X. Entonces S tiene un único punto fijo, $Su = u$.

En vista de la Proposición 6.1.1 puede entenderse, además, que surja un nuevo tema a estudiar en las ecuaciones semilineales y casilineales, que es la de intervalos maximales de existencia; ya que la proposición tan sólo demuestra existencia en 'semientornos' de cada uno de los puntos, no en el intervalo global $[0,T]$ donde se tienen las cotas. Trabajando en los espacios de interpolación adecuados se consiguen probar los resultados buscados de existencia y unicidad de soluciones clásicas en intervalos maximales de definición [6]. De nuevo, la condición a exigir para conseguir soluciones clásicas será la Hölder continuidad del dato f.

El caso semilineal es extremadamente ilustrativo a la hora de cómo se procede a encontrar las soluciones mediante iteración de punto fijo. En el caso casilineal [8] el procedimiento es, naturalmente, más complicado; pero el punto fundamental vuelve a ser una iteración de punto fijo.

6.2. Otras líneas

Como es indicado en el libro de Yagi, [24], existen tres enfoques usuales a la teoría abstracta de ecuaciones en derivadas parciales parabólicas: los métodos basados en teoría de semigrupos, los métodos variacionales y los métodos que hacen uso de ecuaciones operacionales. Este trabajo, al igual que el libro de Yagi, ha estado centrado únicamente en el enfoque aportado por la teoría de semigrupos, dejando de lado los otros enfoques. Para tener una visión más global de las técnicas disponibles para tratar problemas parabólicos sería interesante explorar estas otras líneas mencionadas.

Otro trabajo que sería interesante explorar sería, en un primer lugar, profundizar más en el tema de las condiciones frontera no homogéneas. El estudio pormenorizado de los detalles de [12, 18] conduciría a una mejor comprensión del tema, que sólo se ha podido tratar superficialmente en este trabajo. Por otro lado, sería interesante tratar de replicar resultados como los que se han mostrado para el caso lineal autónomo y lineal no autónomo de contribución de las condiciones frontera no homogéneas para los casos semilineal y casilineal. De hecho, Guidetti indica en [12] que su propósito al desarrollar la formulación integral del problema no autónomo con condiciones frontera no homogéneas es utilizarla para atacar el caso casilineal. Esto da idea de por dónde continuar este estudio, aunque por motivos de profundidad, extensión y tiempo no ha sido posible hacerlo en el presente trabajo.

6.3. Conclusiones

Se ha presentado de forma sintética, ya que no era el centro del presente trabajo, la relación entre problemas de EDP's parabólicos y los correspondientes problemas abstractos. Esta es la justificación fundamental del interés que presenta el estudio de problemas abstractos de ecuaciones diferenciales.

La teoría de semigrupos, que es la herramienta fundamental de la que se ha valido este trabajo, forma parte de la continuación natural del estudio en EDP's parabólicas para un estudiante de grado y se ha mostrado muy efectiva a la hora de abordar problemas abstractos de ecuaciones diferenciales. El trabajo con la integral de Dunford y la aplicación resolvente han dado cuenta de la relevancia que cobra saber resolver el problema de autovalores de un operador a la hora de tratar ecuaciones de evolución ligadas a ese mismo operador. Esto ya se había puesto de relevancia en la asignatura *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Ahora, la integral de Dunford da una forma cerrada para el semigrupo analítico y, por tanto, aporta la forma de construir la solución a los distintos problemas.

A lo largo de los diferentes capítulos, se ha presentado cómo condición indicial, dato no homogéneo y condiciones frontera no homogéneas contribuyen en sumandos diferentes a la solución final en problemas abstractos lineales, y cómo su regularidad pone en compromiso la posibilidad de encontrar soluciones clásicas o no.

Por otro lado, ha quedado claro que los espacios de funciones continuas crean muchos más problemas a la hora de resolver problemas parabólicos que los espacios L^p, ya que la no densidad de las funciones test provoca la pérdida de la continuidad fuerte en el 0 del semigrupo, no sirviendo la mayoría de las pruebas aportadas en este trabajo. Esto, entre otras cosas, hace poner el interés siempre sobre las realizaciones concretas para las que se está buscando resolver el problema abstracto, ya que proporcionarán las hipótesis de regularidad necesarias.

Finalmente, cabe destacar que las expresiones que se han aportado a lo largo del trabajo son expresiones cerradas y, por tanto, son susceptibles de ser discretizadas numéricamente, dando lugar a un posible siguiente paso que podría corresponder a la solución numérica de las mismas. Como en otro tipo de problemas clásicos, sería necesario discretizar separadamente en tiempo y en espacio. La forma del resolvente del tipo de problemas que se han tratado da la idea de cómo ha de ser la región de estabilidad de los métodos elegidos para la integración temporal.

Apéndice A

Integrales y otros

A.1. Cota para una integral compleja

Dado $\pi/2 < \theta < \pi$, sea Γ una curva que recorre el plano complejo desde $\infty e^{-i\theta}$ hasta $\infty e^{i\theta}$ de la forma requerida en la demostración del Teorema de la integral de Dunford 3.5.2. Sea U un abierto como se describe en el enunciado del teorema, y $f : U \to Y$ una función holomorfa, que toma valores en un espacio de Banach Y y para la que se conoce una cota $\|f(\lambda)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$.

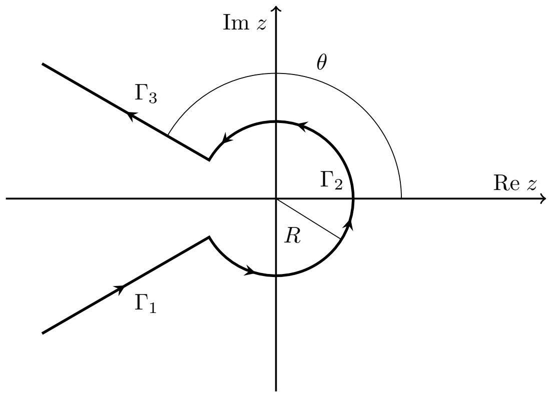

Figura A.1: Dibujo del camino de integración.

Se quiere conseguir una cota uniforme en $t > 0$ para la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda : A)\, d\lambda.$$

De esta forma, para Γ_3, se tiene la parametrización $\lambda(r) = re^{i\theta}$, con $r \in (R, \infty)$, se acota y se utiliza el cambio de variable $-rt\cos\theta = s$ (y se procede de forma análoga para Γ_1):

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} e^{\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_R^\infty e^{rt\cos\theta} \frac{M}{r}\, dr = \frac{M}{2\pi} \int_{-Rt\cos\theta}^\infty \frac{e^{-s}}{s}\, ds \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{s}\, ds = C_1.$$

En vista de la holomorfía de $f(\lambda)$, para Γ_2, $\lambda(\varphi) = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in (-\theta, \theta)$, para cada $t > 0$ puede tomarse un $R > 0$ suficientemente pequeño, de forma que $Rt \leq 1$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} e^{\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^\theta e^{Rt\cos\varphi} M\, d\varphi \leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\theta}^\theta e^{\cos\varphi}\, d\varphi \leq C_2.$$

Juntando las cotas se tiene, como se pretendía, que para todo $t > 0$,

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda : A)\, d\lambda \right\| \leq C.$$

A.2. Comportamiento asintótico de algunas transformadas

En el desarrollo de una representación integral para el problema lineal con condiciones frontera no homogéneas que se lleva a cabo en la Sección 4.4.3 se requiere el cómputo del comportamiento cuando $\operatorname{Re} z_0 \to \infty$ de ciertas transformadas de Laplace. Se quiere comprobar que

$$z_0^2 \int_0^\infty e^{-z_0 s} V(s) g\, ds - z_0 \int_0^\infty e^{-z_0 s} V(s) g'\, ds \xrightarrow{\operatorname{Re} z_0 \to \infty} 0,$$

bajo las hipótesis de que g y g' tienen comportamiento en norma dominado por una exponencial y de que en el 0^+ sus comportamientos vienen dados por $\|V(t)g\| = O(t^2)$, $\|V(t)g'\| = O(t)$. Se procede al cómputo de la primera integral, separando el comportamiento en el 0 y en el ∞. Sean $\eta, M > 0$ de forma que $\|V(s)g\| \leq M s^2$ para $s \leq \eta$.

$$\begin{aligned}
\left\| z_0^2 \int_0^\eta e^{-z_0 s} V(s) g\, ds \right\| &\leq |z_0|^2 \int_0^\eta e^{-\operatorname{Re} z_0 s} M s^2\, ds \\
&= -|z_0|^2 M \left. \frac{e^{-s\operatorname{Re} z_0} \left(s^2 (\operatorname{Re} z_0)^2 + 2s\operatorname{Re} z_0 + 2\right)}{(\operatorname{Re} z_0)^3} \right|_0^\eta \\
&= -|z_0|^2 M \frac{e^{-\eta\operatorname{Re} z_0} \left(\eta^2 (\operatorname{Re} z_0)^2 + 2\eta\operatorname{Re} z_0 + 2\right) - 2}{(\operatorname{Re} z_0)^3} \xrightarrow{\operatorname{Re} z_0 \to \infty} 0
\end{aligned}$$

Se procede a continuación a acotar el entorno de ∞. Se tiene en cuenta el Lema 4.4.1 para acotar $V(t)g$ con constantes $\alpha, L > 0$. $\beta > 0$ es la constante que rige el comportamiento exponencial de g. Se supone $\alpha + \beta < \operatorname{Re} z_0$ ya que luego se va a tomar el límite de $\operatorname{Re} z_0$ a ∞.

$$\begin{aligned}
\left\| z_0^2 \int_\eta^\infty e^{-z_0 s} V(s) g\, ds \right\| &\leq |z_0|^2 \int_\eta^\infty e^{-\operatorname{Re} z_0 s} L e^{(\alpha+\beta)s}\, ds \\
&= L |z_0|^2 \left. \frac{e^{(\alpha+\beta-\operatorname{Re} z_0)s}}{\alpha+\beta-\operatorname{Re} z_0} \right|_\eta^\infty \\
&= -L |z_0|^2 \frac{e^{(\alpha+\beta-\operatorname{Re} z_0)\eta}}{\alpha+\beta-\operatorname{Re} z_0} \xrightarrow{\operatorname{Re} z_0 \to \infty} 0.
\end{aligned}$$

Se procede de forma análoga con la otra integral. Sean $M', \eta' > 0$ tal que $\|V(s)g'\| \leq M' s$ para $s \leq \eta'$.

$$\left\| z_0 \int_0^{\eta'} e^{-z_0 s} V(s) g'\, ds \right\| \leq |z_0| \int_0^{\eta'} e^{-s\operatorname{Re} z_0} M' s\, ds = -|z_0| M' \left. \frac{e^{-\operatorname{Re} z_0 s} (s\operatorname{Re} z_0 + 1)}{(\operatorname{Re} z_0)^2} \right|_0^{\eta'} \to 0.$$

Sea β' la constante que controla el crecimiento exponencial de g'. Entonces

$$\left\| z_0 \int_{\eta'}^\infty e^{-z_0 s} V(s) g'\, ds \right\| \leq |z_0| \int_{\eta'}^\infty e^{-\operatorname{Re} z_0 s} L e^{(\alpha+\beta')s}\, ds = -L |z_0| \frac{e^{(\alpha+\beta'-\operatorname{Re} z_0)\eta}}{\alpha+\beta'-\operatorname{Re} z_0} \to 0.$$

De esta forma se tiene lo que se quería probar.

A.3. Más cotas para integrales

Dado $T > 0$, sea $f : U \times [0,T] \to Y$ una función holomorfa de su primera variable, que toma valores en un espacio de Banach Y y para la que se conoce una cota uniforme $\|f(\lambda,t)\| \leq C$ para $(\lambda,t) \in U \times [0,T]$. U es un abierto que abarca todo $\mathbb{C}$ salvo un sector de ángulo menor que un $0 < \theta < \pi/2$ que rodea al semieje real positivo, quitando un entorno de 0, $0 \in U$. Se trata de la disposición usual en el plano complejo que ha aparecido en repetidas ocasiones a lo largo del trabajo. Sea Γ una curva que recorre el plano complejo desde $\infty e^{-i\theta}$ hasta $\infty e^{i\theta}$ por dentro de U. No se requiere una descripción más precisa de la curva por la holomorfía del argumento. Se busca encontrar cotas para la norma de las siguientes integrales:

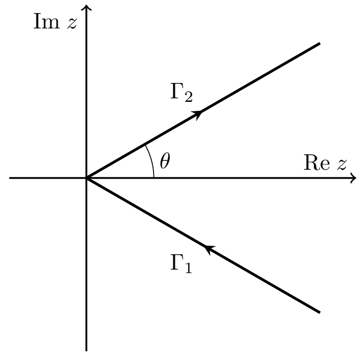

Figura A.2: Dibujo del camino de integración.

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-s\lambda} f(\lambda,t)\, d\lambda \right\| \leq& \frac{1}{2\pi} \left(\left\| \int_{\Gamma_1} e^{-s\lambda} f(\lambda,t)\, d\lambda \right\| + \left\| \int_{\Gamma_2} e^{-s\lambda} f(\lambda,t)\, d\lambda \right\| \right) \\
\leq& \frac{C}{2\pi} \left(- \int_\infty^0 e^{-s\rho\cos\theta}\, d\rho + \int_0^\infty e^{-s\rho\cos\theta}\, d\rho \right) \\
=& \frac{C}{2\pi} \left(\left. \frac{e^{-s\rho\cos\theta}}{s\cos\theta} \right|_\infty^0 - \left. \frac{e^{-s\rho\cos\theta}}{s\cos\theta} \right|_0^\infty \right) \\
=& \frac{C}{\pi s \cos\theta},
\end{aligned}$$

donde si se toma $C' = C/(\pi\cos\theta)$ se tiene la cota C'/s. La integral anterior sólo es finita para $s > 0$. Otra integral que aparecerá será la integral sobre una curva Γ con los mismos extremos pero con un problema en el 0 proveniente de la cota de $f(\lambda,t)$, que esta vez será, dada $0 < \rho < 1$ una constante, $\|f(\lambda,t)\| \leq C/\left|\lambda\right|^\rho$. Ahora f no será necesariamente holomorfa en 0. Habrá que rodear el origen para integrar. El camino de integración se encuentra en la Figura A.3,

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{-s\lambda} f(\lambda,t)\, d\lambda \right\| \\
&\qquad \leq \frac{1}{2\pi} \left(\left\| \int_{\Gamma_1} e^{-s\lambda} f(\lambda,t)\, d\lambda \right\| + \left\| \int_{\Gamma_2} e^{-s\lambda} f(\lambda,t)\, d\lambda \right\| + \left\| \int_{\Gamma_3} e^{-s\lambda} f(\lambda,t)\, d\lambda \right\| \right).
\end{aligned}$$

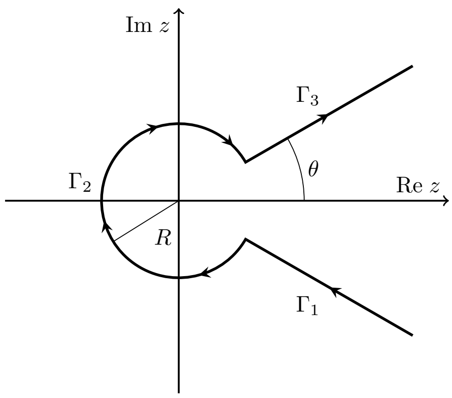

Figura A.3: Dibujo del camino de integración.

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\Gamma_1} e^{-s\lambda} f(\lambda, t)\, d\lambda \right\| + \left\| \int_{\Gamma_3} e^{-s\lambda} f(\lambda, t)\, d\lambda \right\| \\
&\quad = \left\| \int_{\infty}^{R} e^{-i\theta} e^{-sre^{-i\theta}} f(re^{-i\theta}, t)\, dr \right\| + \left\| \int_{R}^{\infty} e^{i\theta} e^{-sre^{i\theta}} f(re^{i\theta}, t)\, dr \right\| \leq 2C \int_{R}^{\infty} \frac{e^{-sr\cos\theta}}{r^{\rho}}\, dr,
\end{aligned}$$

donde realizando el cambio de variable $sr\cos\theta = x$ en la integral y acotando por ampliación del intervalo de integración, teniendo en cuenta que el integrando es positivo, se tiene que la expresión anterior es igual a

$$2Cs^{\rho-1}(\cos\theta)^{\rho-1} \int_{sR\cos\theta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\rho}}\, dx \leq 2Cs^{\rho-1}(\cos\theta)^{\rho-1} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{\rho}}\, dx.$$

Dado que la integral que queda es convergente, se puede agrupar todas las constantes salvo el parámetro s en una única constante C', escribiendo

$$\left\| \int_{\Gamma_1} e^{-s\lambda} f(\lambda, t)\, d\lambda \right\| + \left\| \int_{\Gamma_3} e^{-s\lambda} f(\lambda, t)\, d\lambda \right\| \leq C' s^{\rho-1}.$$

Análogamente a la anterior, esta cota sólo es válida si $s > 0$ dado que $\cos\theta > 0$, ya que si no la integral no convergería.

Falta analizar qué pasa con Γ_2,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Gamma_2} e^{-s\lambda} f(\lambda, t)\, d\lambda \right\| &= \left\| \int_{2\pi-\theta}^{\theta} iRe^{i\phi} e^{-sRe^{i\phi}} f(Re^{i\phi}, t)\, d\phi \right\| \\
&\leq \int_{\theta}^{2\pi-\theta} Re^{-sR\cos\phi} \frac{C}{R^{\rho}}\, d\phi \\
&\leq R^{1-\rho} C 2\pi.
\end{aligned}$$

Como la curva Γ se puede deformar dentro del dominio del holomorfía del integrando se tiene que la desigualdad hallada,

$$\left\| \int_\Gamma e^{-s\lambda} f(\lambda, t)\, d\lambda \right\| \le C' s^{\rho-1} + R^{1-\rho} C 2\pi,$$

es válida para cualquier valor de $R > 0$, y, por tanto, haciendo tender $R \to 0$ se tiene la desigualdad buscada, de la cual la hallada en primer lugar no es más que un caso particular,

$$\left\| \int_\Gamma e^{-s\lambda} f(\lambda, t)\, d\lambda \right\| \le C' s^{\rho-1}.$$

A.4. Operadores diferenciales

Definición A.4.1. Un **multíndice n-dimensional** se define como una n-upla $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, siendo $\mathbb{N}_0^n$ el conjunto de los naturales incluyendo el 0,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Se define su "**valor absoluto**" como la suma de sus componentes: $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, y su "**factorial**" como el producto del factorial de sus componentes: $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n!$. De esta forma, se denota

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

En ciertos casos, la condición de elipticidad que se ha expuesto, (1.4), sobre el operador en el Capítulo 1, (1.2), es insuficiente para llegar a las conclusiones que se pretenden y se requiere alguna otra condición más fuerte o añadida. A continuación, se presentan varias definiciones de uso común que se usan para extender la definición dada de elipticidad.

Definición A.4.2. Se dice que un operador diferencial lineal, como (1.2), de orden $m = 2k$, es **uniformemente elíptico**, o que verifica la *condición uniforme de elipticidad*, si existe $\alpha > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$, y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$(-1)^k \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) \xi^\alpha = (-1)^k \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n} \ge \alpha \left\| \xi \right\|^{2k}.$$

Definición A.4.3. Se dice que un operador diferencial lineal, como (1.2), de orden $m = 2k$, es **propiamente elíptico** si el polinomio en τ dado por $A^o(x, \xi + \tau\eta)$ para cada $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, tiene exactamente k raíces con parte real positiva y k raíces con parte real negativa.

Por ser A elíptico, $A^o(x, \xi + \tau\eta)$, es evidente que dicho polinomio no tiene nunca raíces reales, por lo que la definición de operador diferencial propiamente elíptico extiende a la de operador diferencial elíptico. Por otra parte, la condición no es mucho más fuerte, ya que todo operador elíptico es propiamente elíptico si $n \ge 3$, [4], pero no así en $n = 2$, donde el operador de Cauchy-Riemann lo contradice. En el caso de operadores con coeficientes complejos, en la definición de operador uniformemente elíptico debe tomarse la parte real de los coeficientes.

Definición A.4.4. Se dice que un operador diferencial, (1.2), es **fuertemente elíptico** si $\text{Re}\, A^o(x, \xi) > 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ y para todo vector real no nulo ξ.

Definición A.4.5. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado se dice que es de clase C^m o *localmente regular de clase* C^m si para cada punto $x \in \partial\Omega$ (la frontera de Ω) existe un entorno U y un homeomorfismo

$$\varphi : U \to \{y \in \mathbb{R}^n : \ \|y\| < 1\}$$

tal que $\varphi(U \cap \Omega) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \|y\| < 1, \ y_1 > 0\}$, $\varphi(U \cap \partial\Omega) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \|y\| < 1, \ y_1 = 0\}$ y tal que cada componente tanto de φ como de φ^{-1} sea m veces continuamente diferenciable.

Definición A.4.6. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con región de clase C^m y una familia de operadores frontera $B_j(x, D) = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x) D^\beta$ con coeficientes definidos en $\partial\Omega$ y de clase $C^{m-m_j}(\partial\Omega)$ se dirá que $\{B_j(x, D)\}_{j=1}^{m/2}$ es una *familia normal de operadores frontera* si satisface las condiciones siguientes:

(I) $j \neq k$ implica $m_j \neq m_k$, es decir, que los órdenes de cada uno de los operadores diferenciales de la familia son diferentes.

(II) Para cada $j = 1, 2, \ldots, m/2$ la frontera $\partial\Omega$ no es característica respecto a $B_j(x, D)$, esto quiere decir que $B_j(x, \nu(x)) \neq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, donde $\nu(x)$ es la normal a exterior a $\partial\Omega$ en el punto x.

Los siguientes resultados sobre realización de operadores elípticos en espacios $L^p(\Omega)$ son debidos a S. Agmon, y han sido extraídos de [23].

Teorema A.4.1. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado, sea A un operador diferencial lineal propiamente elíptico $\mathcal{A}(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ con coeficientes de orden máximo continuos y sean $\{B_j(x, D)\}_{j=1}^{m/2}$ unas condiciones frontera normales. Entonces se define $A : D(A) \to L^p(\Omega)$ como

$$D(A) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : \ B_j(x, D)u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, \ j = 1, 2, \ldots, m/s\},$$
$$(Au)(x) = A(x, D)u(x) \quad \text{para } x \in D(A).$$

Las dos condiciones siguientes son suficientes para que

$$\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg \lambda| < \pi - \theta\} \cup \{0\}$$

sea el máximo sector que está contenido en el conjunto resolvente del operador A. Y la condición además es necesaria si $p = 2$.

(I) $\arg A^o(x, \xi) = 0$ para todo $x \in \overline{\Omega}$ y para todo $\xi \neq 0$ real.

(II) Dado x un punto arbitrario de $\partial\Omega$, ξ cualquier vector real tangente a $\partial\Omega$ en x, y $\arg \lambda = \theta$. El polinomio $\mathcal{A}^o(x, \xi + \tau\nu) - \lambda$ de una variable τ tiene exactamente $m/2$ raíces, $\tau_1^+(\xi, \lambda), \tau_2^+(\xi, \lambda), \ldots, \tau_{m/2}^+(\xi, \lambda)$, con parte imaginaria positiva y las otras $m/2$ raíces tienen parte imaginaria negativa. Además los $m/2$ polinomios $B_j(x, \xi + \tau\nu)$, con $j = 1, 2, \ldots, m/2$, son linealmente independientes módulo $\prod_{k=1}^{m/2} \left(\tau - \tau_k^+(\xi, \lambda)\right)$.

La condición (II) del teorema anterior es de tal importancia que ha cobrado entidad propia, pasándose a denominar genéricamente *condición de complemento*.

Teorema A.4.2. Sea $A(x, D)$ un operador fuertemente elíptico de orden m y $\{B_j(x, D)\}_{j=1}^{m/2}$ una familia de condiciones frontera normales. De la condición de elipticidad fuerte se deduce que existe un ángulo $\theta_0 \in [0, \pi/2)$ tal que $A^o(x, \xi) \neq e^{i\theta}$ para todo $x \in \Omega$, vector real $\xi \neq 0$ y $\theta \in [\theta_0, 2\pi - \theta_0]$. Si se verifican las hipótesis del Teorema A.4.1 para cada ángulo $\theta \in [\theta_0, 2\pi - \theta_0]$, el operador $-A$ definido como en el Teorema A.4.1 genera un semigrupo analítico en $L^p(\Omega)$.

Bibliografía

Ecuaciones de evolución y teoría de semigrupos

[1] Acquistapace P., Terreni B., *A Unified Approach to Abstract Linear Nonautonomous Parabolic Equations*, Rend. Semin. Mat. U. Pad. **78** (1987), 47-107.

[2] Acquistapace P., Terreni B., *Hölder clases with boundary conditions as interpolation spaces*, Math. Z. **195** (1987), 451-471.

[3] Agmon S., *On the eigenfunctions and the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962), 119-147.

[4] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623-727.

[5] Alonso-Mallo I., Palencia C., *On the Convolution Operators arising in the study of Abstract Initial Boundary Value Problems*, P. Roy. Soc. Edinb. A **126** (1996), 515-539.

[6] Amann H., *Global Existence for Semilinear Parabolic Systems*, J. Reine Angew. Math. **360** (1985), 47-83.

[7] Amann H., *Existence and Regularity for Semilinear Parabolic Evolution Equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 4, Volume 11 (1984), 593-676.

[8] Amann H., *Quasilinear Evolution Equations and Parabolic Systems*, T. Am. Math. Soc. **293** (1986), 191-227.

[9] Browder F.E., *On the Spectral theory of elliptic differential operators*, I, Math. Annalen **142** (1961), 22-130.

[10] Clément P., *One-Parameter Semigroups*, Elsevier, Amsterdam, 1991.

[11] Cole J.D., *On a Quasi-linear Parabolic Equation Occurring In Aerodynamics*, Q. Appl. Math., Vol. IX (1951).

[12] Guidetti D., *Abstract Linear Parabolic Problems with Nonhomogeneous Boundary Conditions*, in Clement P., Mitidieri E., and De Pagter B. (Eds.), *Semigroup Theory and Applications*, Dekker Lect. Notes Pure Appl. Math., pp. 227-242, 1991.

[13] Greiner G., Kuhn K.G., *Linear and Semilinear Boundary Conditions: the Analytic Case*, Lect. Notes in Pure and Appl. Math. **135** (1991), 193–211.

[14] Greiner G., *Semilinear Boundary Conditions for Evolution Equations of Hyperbolic Type*, Proceedings of the Conference *Trends in Semigroup Theory and Applications*, Trieste, 1987.

[15] Henry D., *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer, Berlin Heidelberg, 1981.

[16] Lorenzi L., Lunardi A., Metafune G. y Pallara D., *Analytic Semigroups and Reaction-Diffusion Problems*, Internet Seminar, 2005.

[17] Lunardi A., *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Switzerland, 1995.

[18] Palencia C., Alonso-Mallo I., *Abstract Initial Boundary Value Problems*, P. Roy. Soc. Edinb. A **124** (1994), 879-908.

[19] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983.

[20] Da Prato G., Sinestrari E., *Differential Operators with Non Dense Domain*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 4, Volume 14 (1987), 285-344.

[21] Sobolevskii P.E., *Equations of Parabolic Type in a Banach Space*, Tr. Mosk. Mat. Obs. **10** (1961), 297–350.

[22] Stewart H.B., *Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **199** (1974), 141-162.

[23] Tanabe H., *Equations of Evolution*, Pitman, London, 1979.

[24] Yagi A., *Abstract Parabolic Evolution Equations and their Applications*, Springer, Berlin Heidelberg, 2010.

[25] Yagi A., *On the Abstract Linear Evolution Equations in Banach Spaces*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976).

Fundamentos de ecuaciones diferenciales

[26] Alonso-Mallo I., *Apuntes de Ecuaciones Diferenciales*, Universidad de Valladolid, 2016.

[27] Deimling K., *Ordinary Differential Equations in a Banach Space*, Springer, Berlin Heidelberg, 1977.

[28] John F., *Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1978.

[29] Peral I., *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Universidad Autónoma de Madrid.

[30] Salsa S., *Partial Differential Equations in Action. From modelling to theory*, Springer, Italia, 2008.

Análisis funcional y análisis real

[31] Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F., *Vector-valued Lapace Transforms and Cauchy Problems*, second ed., Springer, Berlin, 2011.

[32] Bogachev V., *Measure theory*, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.

[33] Brezis H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, Universitext, 2011.

[34] Davies E.B., *Spectral theory and differential operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[35] Diestel J., Uhl J.J., *Vector Measures*, American Mathematical Society, USA, 1977.

[36] Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, London, 1969.

[37] Dunford N., Schwatz J.T., *Linear Operators, Part I: General Theory*, Wiley & Sons, New York, 1957.

[38] Edmunds D.E., Evans W.D., *Elliptic Differential Operators and Spectral Analysis.* Springer, Switzerland, 2018.

[39] Lang S., *Real and Functional Analysis*, third ed., Springer, New York, 1993.

[40] Limaye B.V., *Functional Analysis*, revised third ed., New Age International, New Delhi, 2017.

[41] Mitrea D., *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis*, Springer, New York, 2013.

[42] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, third ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

[43] Triebel H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[44] Yoshida K., *Functional Analysis*, Springer, Berlin Heidelberg, 1995.

Otros

[45] Spiegel M.S., Lipschutz S., Liu J., *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*, cuarta ed., McGraw-Hill, México DF, 2014.

Índice alfabético