Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Geometría Semi- Riemanniana, el marco de la Teoría de la Relatividad.

Autora: Sandra Espina Pardo

Tutora: Carolina Ana Núñez Jiménez

Índice general

Capítulos **Página**

Introducción **5**

1. Conceptos Básicos **7**
- 1.1. Variedades y Aplicaciones Diferenciables 7
- 1.2. Espacio Tangente y Diferencial de una Aplicación 9
  - 1.2.1. Diferencial de una aplicación diferenciable 11
- 1.3. Ejemplos de variedades diferenciables 13
  - 1.3.1. Abiertos de variedades diferenciables 13
  - 1.3.2. Curvas diferenciables en variedades diferenciables 13
  - 1.3.3. Espacios Vectoriales 14
  - 1.3.4. Variedades Producto 15
- 1.4. Espacio Cotangente 16
- 1.5. Fibrados Tangente y Cotangente 17
  - 1.5.1. Campos vectoriales 18
  - 1.5.2. 1-formas 20
- 1.6. Análisis tensorial en variedades 21
  - 1.6.1. Tensores 21
  - 1.6.2. Contracciones 24
  - 1.6.3. Pullback 24
- 1.7. Campos Tensoriales 25

2. Variedades semi-riemannianas **29**
- 2.1. Introducción 29
- 2.2. Isometrías 33
- 2.3. Derivaciones Tensoriales. Derivada de Lie 34
  - 2.3.1. Contracciones 34
  - 2.3.2. Derivaciones tensoriales 35
- 2.4. La conexión de Levi-Civita 40
- 2.5. Transporte paralelo 49
- 2.6. Curvas geodésicas 53

2.7. Aplicación exponencial 56

3. Curvatura de una variedad semi-riemanniana 61

3.1. Curvatura 61
3.2. Curvatura Seccional 69
3.3. Superficies semi-riemannianas 73
3.4. Contracciones métricas 74
3.5. Campos de referencias 77
3.6. Operadores diferenciales 78
3.7. Curvatura de Ricci y Curvatura Escalar 82

4. Introducción a la relatividad especial 87

4.1. Geometría lorentziana 87
4.1.1. Carácter causal lorentziano en espacios vectoriales 88
4.1.2. Conos temporales y orientación temporal en espacios vectoriales . . 89
4.1.3. Conos temporales y orientación temporal en una variedad lorentziana 90
4.2. Espacio-tiempo de Minkowski 91
4.3. Geometría de Minkowski 93
4.4. Observación de partículas 95
4.5. Energía y momento 97

Introducción

Como alumna del doble Grado en Matemáticas y Física, durante el estudio de la carrera he estado verdaderamente atraída por las relaciones entre estas dos áreas de conocimiento. En realidad, se podría elegir cualquier campo científico y comprobar la implicación de las Matemáticas en casi cualquier modelo o fenómeno estudiado. Estas proporcionan una sólida base sobre la cual trabajar y conseguir explicaciones más comprensibles y rigurosas. Por su parte, la Física también ha influido en gran manera en el desarrollo de las Matemáticas. Las motivación de este desarrollo ha sido la necesidad de dar una descripción de ciertos fenómenos físicos tangibles. Un ejemplo clásico de lo anterior es el desarrollo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton para dar una descripción de los fenómenos gravitatorios. En este sentido, se puede decir que ciertas especialidades de las Matemáticas se han creado y desarrollado motivadas por la Física. En otros casos, en vez de desarrollarse teorías matemáticas que se ajusten a la descripción de una realidad física observable, una teoría matemática previa es utilizada a posteriori para la descripción de fenómenos físicos. Esta compenetración ha beneficiado el desarrollo científico en numerosas ocasiones.

Einstein ya dijo en su libro “Mi credo humanista” lo siguiente: *“ Hasta el momento actual nuestra experiencia nos lleva a creer que la naturaleza es la realización de las ideas matemáticas más simples que es posible concebir. Estoy convencido de que mediante contrucciones puramente matemáticas se pueden descubrir los conceptos y las leyes que los conecten entre sí, que son los elementos que nos ofrecen la clave para la comprensión de los fenómenos naturales. La experiencia es capaz de sugerir los conceptos matemáticos adecuados, pero éstos, sin duda, no logran ser deducidos de ella. Desde luego que la experiencia conserva su cualidad de criterio último de utilidad física de una construcción matemática. Mas el principio creador reside en la matemática.”*

En este trabajo de fin de grado se va estudiar un ejemplo del último caso enunciado, en el que un modelo matemático, en este caso la Geometría Diferencial de Riemann, es utilizado por Einstein para explicar y describir correctamente un área de la Física, la Relatividad.

Para ello, el objeto principal de estudio de este trabajo será la geometría semi-riemanniana. Una variedad semi-riemanniana, como veremos, es una variedad diferenciable dotada con un tensor métrico de signatura arbitraria. El libro que se ha tomado como referencia es [5].

El trabajo se organizará de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se definirán los conceptos básicos para el desarrollo de la geometría semi-riemanniana, centrándonos primero en las variedades diferenciables y en el análisis tensorial después. En cuanto a la primera parte cabe mencionar la importancia del espacio tangente, la diferencial de una aplicación diferenciable, los campos vectoriales y las 1-formas. En la segunda parte, se darán las ideas básicas del análisis tensorial, y se definirán los campos tensoriales, que son aplicaciones entre la variedad diferenciable y los fibrados tangentes sobre esta variedad. Con la noción de campos tensoriales se generalizarán los conceptos de función real, campo vectorial y 1-forma sobre una variedad.

En el segundo capítulo, se hará un estudio exhaustivo de las variedades semi-riemannianas, para lo cual se comenzará explicando las propiedades de estas y estudiando ciertos conceptos como el de isometría. Posteriormente, se volverá a las variedades diferenciables para explicar los conceptos de contracción y de derivación tensorial generales que se aplicarán sobre variedades semi-riemannianas para definir los conceptos de conexión de Levi-Civita, derivada covariante y diferencial covariante de un campo tensorial, transporte paralelo y curvas geodésicas. El capítulo se termina con el estudio de la aplicación exponencial, lo cual nos permite definir los entornos normales cuyas funciones coordenadas van a ser de gran uso en el capítulo tres.

En el capítulo tres, se hace uso de los conceptos del segundo capítulo para definir la curvatura de una variedad semi-riemanniana. Definiendo los operadores de subida y bajada de índice, las contracciones métricas y los campos de referencias, se desarrollan los conceptos de curvatura seccional, curvatura de Ricci y curvatura escalar. Además, se añade el estudio de ciertos operadores en variedades semi-riemannianas que generalizan algunos de los operadores diferenciables más importantes en el cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$.

Finalmente, en el capítulo cuatro, se hará un breve estudio de la relatividad especial desde el punto de vista de la geometría lorentziana. Las variedades lorentzianas no son más que variedades semi-riemannianas con índice uno y dimensión mayor o igual que dos. Se partirá del estudio de este tipo de variedades y sus características. Tras ello, se planteará cómo es el espacio-tiempo de Newton, para poder compararlo con el espacio-tiempo de Minkowsi. Se compararán también las definiciones de energía y momento correspondientes, y se incluirá un apartado referente a la observación de las partículas.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

En términos generales, una variedad es un espacio topológico que se parece localmente al espacio euclídeo, es decir, en el cual existe un entorno de cada punto que admite un sistema coordenado, consistente en funciones reales que determinan la posición de los puntos en ese entorno. A su vez, una variedad diferenciable puede entenderse como una variedad en la cual este parecido es tal que nos permite establecer el concepto de diferenciabilidad de funciones que a su vez nos permite decir que M es localmente difeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$. De hecho, van a constituir una generalización del cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$, y de conceptos como plano cartesiano, recta, superficie,etcétera.

En este capítulo explicaremos algunas nociones básicas sobre las variedades diferenciables y los tensores sobre variables diferenciables, que serán la base para el posterior desarrollo del trabajo. Nos centraremos principalmente en definir los conceptos necesarios y en explicar ciertas propiedades y proposiciones o teoremas relacionados con estos conceptos, que aparecerán sin demostración. También se incluirá una introducción al análisis tensorial, necesaria para el desarrollo del trabajo.

1.1. Variedades y Aplicaciones Diferenciables

Durante este trabajo denotaremos por u^i a las coordenadas estándar de $\mathbb{R}^n$, es decir, a las funciones $u^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, que mandan cada punto $p = (p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{R}^n$ en su coordenada i-ésima p_i. Además, para referirnos a una función diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$ diremos simplemente que es diferenciable.

Definición 1.1. Una *carta local* en un espacio topológico X es una terna (U, V, ξ), donde U es un abierto de X, V un abierto de $\mathbb{R}^n$ y ξ es un homeomorfismo entre U y V . Se dice que la dimensión de la carta es n.

Las funciones $x^i = u^i \circ \xi$ reciben el nombre de *funciones coordenadas* de ξ. Obviamente, $\xi = (x^1, \dots, x^n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Con frecuencia simplificaremos la notación anterior llamando carta a la función ξ, sobreentendiendo la existencia de U y V.

Definición 1.2. Decimos que dos cartas locales $\xi : U_1 \longrightarrow V_1$ y $\mu : U_2 \longrightarrow V_2$ están $\mathcal{C}^\infty$- *relacionadas* si $n = e$ y, o bien $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, o bien los *cambios de carta* $\xi \circ \mu^{-1} : \mu(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \xi(U_1 \cap U_2)$ y $\mu \circ \xi^{-1} : \xi(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \mu(U_1 \cap U_2)$ son aplicaciones diferenciables, es decir, son difeomorfismos.

Definición 1.3. Un *atlas* $\mathcal{A}$ de dimensión n en un espacio X es una colección de cartas locales n-dimensionales en X , $\{(U_i, V_i, \xi_i)\}_{i \in I}$, tales que:

1. Cada punto de X está contenido en el dominio de al menos una de las cartas, es decir, $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$.
2. Las cartas están $\mathcal{C}^\infty$- relacionadas dos a dos, es decir, todos los cambios de carta son difeomorfismos.

Definición 1.4. Una *variedad diferenciable de dimensión* n es un espacio de Hausdorff, M, que cumple el segundo axioma de numerabilidad junto con un atlas de dimensión n.

Observación 1.5. A un atlas se le pueden añadir todas las cartas de M tales que los cambios de carta sean difeomorfismos, obteniendo de esta manera un atlas maximal, que es único. Este atlas maximal es considerado como la *estructura diferenciable* de M.

Pasamos ahora a definir el concepto de aplicación diferenciable entre variedades.

Definición 1.6. Sean M y N variedades diferenciables y sea $F : M \longrightarrow N$ una aplicación. Se dice que F es *diferenciable* en $p \in M$ si existen cartas locales (U_1, V_1, ξ_1) de M en p y (U_2, V_2, ξ_2) de N en $F(p)$ tales que $F(U_1) \subset U_2$ y la *expresión local* de F en estas cartas, $\xi_2 \circ F \circ \xi_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$, es diferenciable en $\xi_1(p)$.

La condición que aparece en la definición anterior no depende de las cartas elegidas.

Proposición 1.7. *Si $F : M \longrightarrow N$ es diferenciable en $p \in M$, entonces para cualquier carta local de M en p, (U_1, V_1, ξ_1), y cualquier carta local de N en $F(p)$, (U_2, V_2, ξ_2), tales que $F(U_1) \subset U_2$, $\xi_2 \circ F \circ \xi_1^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$ es diferenciable en $\xi_1(p)$.*

Propiedades 1.8.

1. *La aplicación identidad es diferenciable.*
2. *La composición de aplicaciones diferenciables entre variedades es diferenciable.*
3. *Las funciones ξ de las cartas locales y las funciones coordenadas x^i son diferenciables en el dominio de ξ.*
4. *Si $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces $f+g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y $fg : M \longrightarrow \mathbb{R}$ también lo son.*

Llamaremos $\mathcal{F}(M)$ al conjunto de aplicaciones reales en M que son diferenciables. Es fácil comprobar que la suma y el producto dotan a $\mathcal{F}(M)$ de estructura de anillo conmutativo.

Definición 1.9. Un *difeomorfismo* entre variedades diferenciables es una aplicación diferenciable entre variedades, biyectiva y cuya inversa es también diferenciable.

1.2. Espacio Tangente y Diferencial de una Aplicación

Sea M una variedad diferenciable, y $p \in M$. Se considera el conjunto de todos los pares (U, f), donde U es un abierto de M tal que $p \in U$, y $f \in \mathcal{F}(U)$. En este conjunto se define la siguiente relación:

$$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow \exists \text{ un abierto } W \subset U \cap V \text{ tal que } p \in W \text{ y } g\big|_W = f\big|_W .$$

Se puede probar que la relación anterior es de equivalencia.

Definición 1.10. Un *germen de función diferenciable en p* es la clase de equivalencia por la relación anterior de un par (U, f), donde U es un abierto de M tal que $p \in U$ y $f \in \mathcal{F}(U)$.

Denotaremos por el momento a la clase de (U, f) por $[(U, f)]$. En el conjunto cociente dado por esta relación definimos las siguientes operaciones:

$$[(U, f)] + [(V, g)] = [(U \cap V, f + g)]$$
$$[(U, f)] \cdot [(V, g)] = [(U \cap V, fg)] .$$

Estas operaciones no dependen de los representantes elegidos, y dotan al conjunto cociente de estructura de anillo conmutativo y unitario, donde el neutro para la suma es el germen de p de la función constante igual a 0, el neutro para el producto es el germen de p de la función constante igual a 1 y el opuesto de $[(U, f)]$ es $[(U, -f)]$.

Definición 1.11. El anillo anterior recibe el nombre de *anillo de gérmenes de funciones diferenciables en* p, y se denota como $\mathcal{O}_{M,p}$, o simplemente como $\mathcal{O}_p$ si no hay confusión.

De hecho, tiene estructura de $\mathbb{R}$-álgebra conmutativa y unitaria.

Es fácil comprobar que el conjunto de unidades del anillo de gérmenes de funciones en p es $\{[(U,h)] : h(p) \neq 0\}$. Puesto que el conjunto de no unidades $m_p = \{[(U,h)] : h(p) = 0\}$ forma un ideal del anillo $\mathcal{O}_p$, entonces es el único ideal maximal del anillo.

Simplificaremos la notación de la siguiente manera: un germen en p se denota como f_p, o f si no hay confusión, entendiendo que representa la clase de un par (U, f).

Definición 1.12. Sea p un punto de la variedad M. Se llama *vector tangente a* M *en* p a toda derivación de $\mathcal{O}_p$ centrada en p, es decir, a toda función real $v : \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que es:

1. $\mathbb{R}$-lineal: $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$
2. Leibniziana: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(f)$

para todo $a, b, \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{O}_p$.

Es una comprobación sencilla el hecho de que el conjunto de todos los vectores tangentes a M en p con la suma y el producto por escalares es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Definición 1.13. El espacio vectorial de todos los vectores tangentes de M en p se llama se llama *espacio tangente a* M *en* p, y se denota por $T_p(M)$.

Obsérvese que si $v \in T_p(M)$, y $f, g \in m_p$, entonces $v(fg) = 0$, ya que $f(p) = g(p) = 0$.

Definición 1.14. Sea $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ una carta de M en p, y $f_p \in \mathcal{O}_p$. Definimos, $\forall i, 1 \leq i \leq n$:

$$\frac{\partial f_p}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f \circ \xi^{-1}}{\partial u^i}(\xi(p)).$$

Entonces, la aplicación $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(p) : \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathbb{R}$ es un elemento de $T_p(M)$.

Para denotar $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(p)$ se utilizará indistintamente $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$.

Utilizando el polinomio de Taylor de orden dos de una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.15. *Sea* $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ *una carta de* M *en* p*. Entonces:*

1. $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ *es una base del espacio tangente* $T_p(M)$*. En particular, la dimensión del espacio vectorial* $T_p(M)$ *coincide con la dimensión de* M*.*

2. $\forall v \in T_p(M)$, se cumple que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

El siguiente resultado va a ser muy útil para encontrar representantes de gérmenes de funciones diferenciables definidos en todo M .

Proposición 1.16. *Existe una función diferenciable y no negativa en $\mathbb{R}^n$, φ, con valor 1 en el cubo cerrado $\overline{C(1)}$ y 0 en el complementario del cubo abierto $C(2)$.*

De la proposición se deduce que esto se puede adaptar a los cubos $\overline{C(\varepsilon)}$ y $C(2\varepsilon)$, sin más que tomar $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$.

Corolario 1.17. *Sea M una variedad diferenciable, y U un abierto de M con $p \in U$. Sea $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable. Entonces, existe una aplicación $\widetilde{F} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\widetilde{F}_p = F_p$.*

Observación 1.18. Utilizando lo anterior, se puede considerar que un vector tangente es una derivación centrada en p del anillo $\mathcal{F}(M)$, $v : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Veamos que todo vector tangente viene de una derivación de este tipo y viceversa.

- Si partimos de $v : \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos definir $\widetilde{v} : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera: si $f \in \mathcal{F}(M)$, se define $\widetilde{v}(f) = v(f_p)$. Se comprueba que $\widetilde{v}$ es una derivación centrada en p.
- Recíprocamente, si partimos de $\widetilde{v} : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, veamos cómo definir $v : \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathbb{R}$. Para ello, basta con dar la imagen por $\widetilde{v}$ de cualquier $f_p \in \mathcal{O}_p$. Por el corolario 1.17, $\exists\ \widetilde{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\widetilde{f}_p = f_p$. Entonces, definimos $v(f_p) = \widetilde{v}(\widetilde{f})$, que resulta estar bien definida (no depende de la elección de $\widetilde{f}$) y es un vector tangente a M en p.

Hemos visto que hay una equivalencia entre vectores tangentes y derivaciones centradas en p del anillo $\mathcal{F}(M)$, por lo que en la práctica usaremos ambos puntos de vista indistintamente y utilizaremos la misma notación para v que para $\widetilde{v}$. A cual de las dos versiones nos estemos refiriendo se deducirá del contexto.

1.2.1. Diferencial de una aplicación diferenciable

Sean M y N dos variedades diferenciables, y sea $\phi : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable. Para cada $p \in M$, la aplicación anterior induce una aplicación $d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}(N)$.

Para definirla basta con decir, para cada $v \in T_p(M)$, cómo actúa $d\phi_p(v)$ sobre el germen en p de una aplicación diferenciable f definida en un entorno de $\phi(p)$ en N. La siguiente definición tiene sentido, ya que $f \circ \phi$ es una aplicación diferenciable definida en un entorno de p, por la observación 1.18 podemos entender el vector tangente v como una derivación centrada en p del anillo $\mathcal{F}(M)$:

$$d\phi_p(v)(f_p) = v(f \circ \phi).$$

Se comprueba sin dificultad el siguiente resultado:

Proposición 1.19.

1. *$\forall v \in T_p(M)$, $d\phi_p(v) \in T_{\phi(p)}(N)$.*
2. *La aplicación $d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}(N)$ es lineal.*

Definición 1.20. La aplicación $d\phi_p$ recibe el nombre de *aplicación diferencial de ϕ en p.*

Proposición 1.21. *Sea $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ una carta de M en p, y $\eta = (y^1, .., y^n)$ una carta de N en $\phi(p)$, entonces $\forall j$, con $1 \leq j \leq m$:*

$$d\phi_p(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j}(p)\frac{\partial}{\partial y^i}\big|_{\phi(p)}.$$

Observación 1.22. La matriz $\left(\frac{\partial(y^i\circ\phi)}{\partial x^j}\right)$ es la matriz Jacobiana de la expresión local de $d\phi_p$ en las cartas ξ y η.

Observación 1.23. En el caso particular de las funciones diferenciables $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se tiene $df_p : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R}^n)$ para $p \in M$, y es habitual hacer la identificación $T_{f(p)}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^n$. Para ello se identifican la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y la base de las parciales $\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}\big|_{f(p)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^n}\big|_{f(p)}\right\}$ de $T_{f(p)}(\mathbb{R}^n)$.
De esta forma, si U es un entorno coordenado de p con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$,

$$df_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_p \in \mathbb{R}^n$$

y $df_p = (df_{1\,p}, \ldots, df_{n\,p})$ donde f_i son las componentes de f, $1 \leq i \leq n$.

Proposición 1.24 (Regla de la Cadena)**.** *Sean M, N y P variedades diferenciables, y sean $\phi : M \longrightarrow N$ y $\psi : M \longrightarrow N$ aplicaciones diferenciables. Entonces, $\forall p \in M$,*

$$d(\psi \circ \phi)_p = d\psi_{\phi(p)} \circ d\phi_p.$$

Proposición 1.25. *Sean M y N variedades diferenciables, y $\phi : M \longrightarrow N$ un isomorfismo diferenciable. Entonces, $\forall p \in M$,*

$$(d\phi_p)^{-1} = d\phi^{-1}_{\phi(p)}.$$

Teorema 1.26 (Teorema de la Función Inversa)**.** *Sean M y N variedades diferenciables, $F : M \longrightarrow N$ una función diferenciable, y $p \in M$. Si $dF_p : T_p(M) \longrightarrow T_{F(p)}N$ es isomorfismo lineal, existe un abierto U de M, con $p \in U$, de forma que $V = F(U)$ es abierto de N, y $F : U \longrightarrow V$ es difeomorfismo.*

1.3. Ejemplos de variedades diferenciables

En esta sección explicaremos algunos ejemplos básicos de variedades diferenciables.

1.3.1. Abiertos de variedades diferenciables

Sea M una variedad diferenciable y U un abierto de M. U hereda la estructura de variedad diferenciable de M, porque si $\mathcal{A} = \{(U_i, V_i, \xi_i)\}_{i\in I}$ es un atlas de M, entonces el conjunto $\mathcal{A}_U = \left\{(U_i \cap U, V_i, \xi_i|_{(U_i\cap U)})\right\}_{i\in I}$ es un atlas de U.

Si llamamos i a la inclusión $i : U \longrightarrow M$, entonces para $p \in M$, $di_p : T_p(U) \longrightarrow T_p(M)$ es isomorfismo, por lo que podemos identificar $T_p(U)$ con $T_p(M)$.

1.3.2. Curvas diferenciables en variedades diferenciables

Definición 1.27. Una *curva diferenciable* en una variedad diferenciable M es una aplicación diferenciable $\alpha : I \longrightarrow M$, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Como I es un abierto de $\mathbb{R}$, se puede tomar como carta de I la identidad, por lo que el plano tangente a I en $t \in I$ tiene como base $\frac{d}{du}\big|_t$. Además, este plano tangente se puede identificar con $\mathbb{R}$ como en la observación 1.23.

Definición 1.28. Se conoce como *vector tangente* o *vector velocidad* de la curva en $t \in I$ a

$$\alpha'(t) = d\alpha(\frac{d}{du}\big|_t) \in T_{\alpha(t)}(M).$$

Propiedades 1.29.

1. *El vector tangente $\alpha'(t)$ aplicado a una función f diferenciable en $\alpha(t)$ o a un germen $f \in \mathcal{O}_{\alpha(t)}$ está definido por:*
$$\alpha'(t)(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{du}(t).$$
2. *Si $(x^1, \ldots, x^n)$ es una carta, entonces podemos escribir:*
$$\alpha'(t) = \sum_i \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(t)}.$$
3. *Si $h : J \longrightarrow I$ es una función diferenciable en un intervalo J, y $\beta = \alpha \circ h : J \longrightarrow M$, entonces*
$$\beta'(s) = \frac{dh}{du}(s)\ \alpha'(h(s)).$$
4. *Si $\phi : M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable, entonces, $\forall t \in I$:*
$$d\phi_p(\alpha(t)) = (\phi \circ \alpha)'(t).$$

1.3.3. Espacios Vectoriales

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n. Para cada base $\mathcal{B}$ de V, se toma como carta la terna $(V, \mathbb{R}^n, \xi)$, donde $\xi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ manda cada $v \in V$ en las coordenadas de v en la base $\mathcal{B}$. Si tomamos otra base de V, el cambio de carta va a ser el cambio de base, y como toda aplicación lineal es difeomorfismo, los cambios de carta lo serán. Hemos construido un atlas para V, luego V es una variedad diferenciable de dimensión n.

Definición 1.30. Dados $p, v \in V$, consideramos la curva $\alpha_{p,v} : \mathbb{R} \longrightarrow V$ definida de la siguiente manera:
$$\alpha_{p,v}(t) = p + tv.$$
Definimos la aplicación $\phi_p : V \longrightarrow T_p(V)$ de la siguiente manera:
Si $v \in V$, $\phi_p(v) = \alpha'_{p,v}(0) = d\alpha_{p,v}(\frac{d}{du}\big|_0) \in T_{\alpha(0)}(V) = T_p(V)$.

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.31.

1. *ϕ_p es un isomorfismo y depende únicamente de V y de p.*
2. *$\phi_q \circ \phi_p^{-1} : T_p(V) \longrightarrow T_q(V)$ es un isomorfismo.*

En particular, para $V = \mathbb{R}^n$, $\phi_p(e_i) = \frac{\partial}{\partial u^i}\big|_p$, que es la identificación considerada en la observación 1.23.

1.3.4. Variedades Producto

Sean M y N variedades diferenciables. El espacio topológico producto $M \times N$ es de Hausdorff y cumple el primer axioma de numerabilidad. Si $\mathcal{A}_1 = \{(U_i, V_i, \xi_i)\}_{i \in I}$ es un atlas de M, y $\mathcal{A}_2 = \{(W_j, T_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$ es un atlas de N, entonces el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(U_i \times W_j, V_i \times T_j, \xi_i \times \varphi_j : U_i \times W_j \longrightarrow V_i \times T_j)\}_{(i,j) \in I \times J}.$$

es un atlas de $M \times N$, por lo que $M \times N$ es una variedad diferenciable, llamada *variedad producto de M y N*. Si n_1 es la dimensión de M y n_2 la de N, la dimensión de $M \times N$ es $n_1 + n_2$.

Denotaremos π y σ a las proyecciones de $M \times N$ sobre M y N, respectivamente. Es decir, si $(p, q) \in M \times N$, entonces $\pi(p, q) = p$, $\sigma(p, q) = q$.

Estas aplicaciones son diferenciables, y sus diferenciales son, para $(p, q) \in M \times N$:

$$d\pi_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \longrightarrow T_p(M)$$

$$d\sigma_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \longrightarrow T_q(N).$$

Sea U_1 un entorno coordenado de p en M con coordenadas $\xi_1 = (x^1, \ldots, x^{n_1})$ y U_2 un entorno coordenado de q en N con coordenadas $\xi_2 = (y^1, \ldots, y^{n_2})$. Si tomamos $\widehat{x}^i = x^i \circ \pi$ y $\widehat{y}^j = y^j \circ \sigma$, entonces $U_1 \times U_2$ es entorno coordenado de (p, q) en $M \times N$, con coordenadas $\widetilde{\xi} = (\widehat{x}^1, \ldots, \widehat{x}^{n_1}, \widehat{y}^1, \ldots, \widehat{y}^{n_2})$.

Entonces,

1. $d\pi_{(p,q)}(\frac{\partial}{\partial \widehat{x}^i}\big|_{(p,q)}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$.
2. $d\pi_{(p,q)}(\frac{\partial}{\partial \widehat{y}^j}\big|_{(p,q)}) = 0$.
3. $d\sigma_{(p,q)}(\frac{\partial}{\partial \widehat{x}^i}\big|_{(p,q)}) = 0$.
4. $d\sigma_{(p,q)}(\frac{\partial}{\partial \widehat{y}^j}\big|_{(p,q)}) = \frac{\partial}{\partial y^j}\big|_q$.

Se puede construir la aplicación $\phi : T_{(p,q)}(M \times N) \longrightarrow T_p(M) \times T_q(N)$ de componentes $(d\pi_{(p,q)}, d\sigma_{(p,q)})$. Si tomamos la base anterior de $T_{(p,q)}(M \times N)$, se tiene que:

1. $\phi(\frac{\partial}{\partial \widehat{x}^i}\big|_{(p,q)}) = (\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p, 0)$
2. $\phi(\frac{\partial}{\partial \widehat{y}^j}\big|_{(p,q)}) = (0, \frac{\partial}{\partial y^j}\big|_q)$.

Como ϕ transforma una base de $T_{(p,q)}(M \times N)$ en una base de $T_p(M) \times T_q(N)$, se tiene lo siguiente:

Proposición 1.32. *ϕ es un isomorfismo que nos permite identificar $T_{(p,q)}(M \times N)$ con $T_p(M) \times T_q(N)$.*

1.4. Espacio Cotangente

Como es habitual, el dual de $T_p(M)$ se define como $T_p^*(M) = Hom_{\mathbb{R}}(T_p(M), \mathbb{R})$.

Observación 1.33. Se puede probar que $T_p^*(M)$ es isomorfo de forma natural a $\dfrac{m_p}{m_p^2}$.

Definición 1.34. $T_p^*(M)$ se llama *espacio cotangente* de M en p. Sus elementos reciben el nombre de *covectores*, y son aplicaciones lineales de $T_p(M)$ en $\mathbb{R}$.

Sea U un abierto de M, $p \in U$ y $f \in \mathcal{F}(U)$ o $f \in \mathcal{O}_p$. Como hemos visto en la observación 1.23, podemos entender df_p como una aplicación $df_p : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir, $df_p \in T_p^*(M)$.

Dada una carta $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$, se tiene que $dx_p^1, \ldots, dx_p^n \in T_p^*(M)$. Esta es la base dual de la base $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$, ya que

$$dx_p^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) = \delta_{ij}.$$

Por tanto, si $\theta \in T_p^*(M)$,

$$\theta = \sum_i \theta(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p) dx^i\big|_p.$$

En particular, se tiene:

$$df_p = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_p dx_p^i,$$

ya que $df_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_p$, como vimos en la observación 1.23.

1.5. Fibrados Tangente y Cotangente

Veremos ahora como el conjunto de vectores tangentes de una variedad diferenciable puede entenderse a su vez como una variedad diferenciable, a la que llamaremos *fibrado tangente*. A su vez, el conjunto de covectores se puede entender como una variedad diferenciable llamada *fibrado cotangente*.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n equipada con un atlas $\mathcal{A}$, y sean:

$$T(M) = \coprod_{p\in M} T_p(M) = \{(p,v) : p \in M, v \in T_p(M)\}$$
$$T^*(M) = \coprod_{p\in M} T_p^*(M) = \{(p,\tau) : p \in M, \tau \in T_p^*(M)\}.$$

Hay dos proyecciones naturales:

$\pi : T(M) \longrightarrow M$, tal que $\pi(v) = p$ si $v \in T_p(M)$

$\pi^* : T^*(M) \longrightarrow M$, tal que $\pi^*(\tau) = p$ si $\tau \in T_p^*(M)$.

Sea $(U, V, \xi) \in \mathcal{A}$, con $\xi = (x^1, \dots, x^n)$. Definimos las aplicaciones $\widehat{\xi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ y $\widehat{\xi}^* : (\pi^*)^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de la siguiente manera: para todo $v \in \pi^{-1}(U)$ y $\tau \in (\pi^*)^{-1}(U)$, con $p = \pi(v) = \pi^*(\tau)$:

$$\widehat{\xi}(v) = \big(x^1(p), \dots, x^n(p), dx^1_p(v), \dots, dx^n_p(v)\big)$$
$$\widehat{\xi}^*(\tau) = \left(x^1(p), \dots, x^n(p), \tau(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p), \dots, \tau(\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p)\right).$$

Las primeras n coordenadas de ambas son por tanto las coordenadas del punto p en la carta. Las segundas n coordenadas de $\widehat{\xi}$ son las coordenadas de v en la base del espacio tangente asociada a la carta, y las segundas n coordenadas de $\widehat{\xi}^*$ son las coordenadas de τ en la base del espacio cotangente asociada a la carta. Ambas aplicaciones son biyectivas en $V \times \mathbb{R}^n$.

Los siguientes pasos muestran la construcción de una topología y de una estructura diferenciable en $T(M)$. Para el caso de $T^*(M)$, los pasos son equivalentes.

1. Si $(U_1, V_1, \xi_1), (U_2, V_2, \xi_2) \in \mathcal{A}$, entonces $\widehat{\xi_2} \circ \widehat{\xi_1}^{-1}$ es diferenciable.
2. El conjunto $\left\{\widehat{\xi}^{-1}(W) : W \text{ es abierto de } V \times \mathbb{R}^n \text{ y } (U, V, \xi) \in \mathcal{A}\right\}$ es base de una topología en $T(M)$ con la cual $T(M)$ es de Hausdorff, cumple el segundo axioma de numerabilidad, y cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un entorno de $\mathbb{R}^{2n}$, ya que $\widehat{\xi} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es homeomorfismo.
3. El conjunto $\left\{(\pi^{-1}(U), V \times \mathbb{R}^n, \widehat{\xi}) : (U, V, \xi) \in \mathcal{A}\right\}$ forma un atlas que dota a $T(M)$ de una estructura de variedad diferenciable.

1.5.1. Campos vectoriales

Definición 1.35. Un *campo vectorial* X en un abierto U de una variedad M es una aplicación $X : U \longrightarrow T(M)$ tal que $\pi \circ X$ es la función identidad en U. Es decir, $\forall p \in U$, $X(p) \in T_p(M)$.

El conjunto de campos vectoriales diferenciables en U se denota como $\mathcal{X}(U)$. Con las operaciones obvias es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y un $\mathcal{F}(U)$-módulo.

Nota 1.36. *Si $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ es un sistema coordenado en $U \subset M$, entonces para cada i, $1 \leq i \leq n$, llamamos* campo vectorial coordenado i-ésimo *al campo vectorial $\frac{\partial}{\partial x^i}$ en U que lleva cada p en $\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$. Como veremos en breves, resulta ser un campo vectorial diferenciable en U.*

Si $p \in U$, como los vectores $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ forman una base de $T_p(M)$, existen números reales $X^1(p), \ldots, X^n(p)$ tales que $X(p) = \sum_i X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$.

Definición 1.37. Las aplicaciones $X^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ reciben el nombre de *componentes de* X con respecto a las coordenadas x^i.

Definición 1.38. Dados $X \in \mathcal{X}(U)$ y $f \in \mathcal{F}(U)$, se define la aplicación $X(f) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$X(f)(p) = X(p)(f),$$

para todo $p \in U$.

Para definir $X(f)$ se ha utilizado la identificación de los vectores tangentes con las $\mathbb{R}$-derivaciones de $\mathcal{F}(U)$ vista en la observación 1.18. Denotaremos indistintamente a $X(f)$ por Xf. Debido a la siguiente proposición, $X(f)$ es diferenciable.

Proposición 1.39. *Sea X un campo vectorial en un entorno U de M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Las siguientes expresiones son equivalentes:*

1. *X es diferenciable.*
2. *Las componentes de X en U son diferenciables.*
3. *$\forall f \in \mathcal{F}(U)$, $X(f) \in \mathcal{F}(U)$.*

Definición 1.40. Una $\mathbb{R}$-*derivación en* $\mathcal{F}(M)$ es una aplicación $\mathcal{D} : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ que cumple que, $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$ es:

1. $\mathbb{R}$-lineal: $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$
2. Leibniziana: $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g)$.

Observación 1.41. Los campos vectoriales en U se pueden definir alternativamente como $\mathbb{R}$-derivaciones en $\mathcal{F}(U)$, es decir, como aplicaciones entre los conjuntos de aplicaciones diferenciables en U.

- Dados $X \in \mathcal{X}(U)$ y $f \in \mathcal{F}(U)$, ya hemos definido la aplicación de $\mathcal{F}(U)$ en $\mathcal{F}(U)$ que lleva f en $X(f)$. Por la proposición 1.39 sabemos que $X(f)$ es diferenciable, y es sencillo comprobar que es una $\mathbb{R}$-derivación.
- Recíprocamente, si tenemos una $\mathbb{R}$-derivación $\widetilde{X} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$, definiremos un campo vectorial X. Para ello, hay que precisar $X(p) \in T_p(M)$ para todo $p \in U$. Utilizando la identificación de los vectores tangentes y las $\mathbb{R}$-derivaciones de $\mathcal{F}(U)$ de la observación 1.18, si $f \in \mathcal{F}(U)$, definimos:

$$X(p)(f) = \widetilde{X}(f)(p) \in \mathbb{R}.$$

  Se comprueba que X es un campo vectorial. Como $\widetilde{X}$ es una $\mathbb{R}$-derivación en $\mathcal{F}(U)$, $X(f) \in \mathcal{F}(U)$ para todo $f \in \mathcal{F}(U)$, y por la proposición 1.39, X es diferenciable.

En la práctica, denotaremos ambas interpretaciones de la misma manera, por X, quedando claro por el contexto a cuál nos referimos. Por ejemplo, en la definición siguiente utilizamos la segunda interpretación:

Proposición 1.42. *Si X e Y son $\mathbb{R}$-derivaciones en $\mathcal{F}(U)$, entonces $X \circ Y - Y \circ X$ es también una $\mathbb{R}$-derivación en $\mathcal{F}(U)$*

Denotaremos $X \circ Y - Y \circ X$ por $XY - YX$.

Definición 1.43. Sean X e Y campos vectoriales en U. Se llama *corchete de Lie* de X e Y, y se denota por $[X, Y]$, al campo vectorial diferenciable $XY - YX$.

Propiedades 1.44.

1. *$\mathbb{R}$-bilinealidad: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ y $[Z, aX + bY,] = a[Z, X] + b[Z, Y]$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(U)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.*
2. *Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$.*
3. *Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.*
4. *$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$, $\forall f, g \in \mathcal{F}(U)$.*

De la parte (4) anterior se deduce que la función corchete de Lie no es bilineal en $\mathcal{F}(U)$.

Observación 1.45. Si U es un entorno de M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$, entonces $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

1.5.2. 1-formas

Definición 1.46. Una *1-forma* θ en un abierto U de una variedad diferenciable M es una aplicación $\theta : U \longrightarrow T^*(M)$ tal que $\pi^* \circ \theta$ es la función identidad en U. Es decir, si $p \in U$, entonces $\theta(p)$ es un elemento de $T_p^*(M)$, por lo que será una aplicación del siguiente tipo $\theta(p) : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$.

El conjunto de 1-formas diferenciables en U se denota como $\mathcal{X}^*(U)$ y tiene estructura de $\mathcal{F}(U)$-módulo.

Ejemplo 1.47. *Sea $f \in \mathcal{F}(U)$. Se denota por df a la 1-forma $df : U \longrightarrow T^*(M)$ tal que para $p \in U$, $df(p) = df_p$. Ya habíamos definido $df_p \in T_p^*(M)$ en la observación 1.23.*
En particular, si $x^1, \ldots, x^n$ son coordenadas de $U \subset M$, llamamos 1-formas coordenadas *a las 1-formas $dx^1, \ldots, dx^n$.*

Toda 1-forma θ se puede escribir en U como:

$$\theta = \sum_i \theta(\frac{\partial}{\partial x^i})dx^i.$$

Definición 1.48. Las aplicaciones $\theta^i \equiv \theta(\frac{\partial}{\partial x^i}) : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, se llaman componentes de θ con respecto a las coordenadas $x^1, \ldots, x^n$.

En particular, si $f \in \mathcal{F}(U)$, como $df(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ por la observación 1.23, entonces:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i.$$

Proposición 1.49. *Una 1-forma θ en un abierto coordenado U de M es diferenciable si y solo si lo son sus componentes en U.*

Observación 1.50. Por otra parte, las 1-formas se pueden definir como aplicaciones $\mathcal{F}(U)$-lineales entre $\mathcal{X}(U)$ y $\mathcal{F}(U)$:

- Sea θ una 1-forma. Vamos a definir una aplicación $\widetilde{\theta} : \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$. Si $X \in \mathcal{X}(U)$, definimos $\widetilde{\theta}(X)$ como la aplicación real $\widetilde{\theta}(X) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

  $$\widetilde{\theta}(X)(p) = \theta(p)(X(p)).$$

  Se comprueba que $\widetilde{\theta}$ es una aplicación $\mathcal{F}(U)$-lineal.

- Recíprocamente, partimos de una aplicación $\mathcal{F}(U)$-lineal $\widetilde{\theta} : \mathcal{X}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$, definiremos una 1-forma $\theta : U \longrightarrow T^*(M)$. Basta con decir cuál es $\theta(p)$ para todo $p \in U$, y para ello hay que decir cómo $\theta(p)$ actúa sobre cualquier $v \in T_p(M)$. Usando el corolario 1.17, se puede ver que para cada $v \in T_p(M)$ existe un campo vectorial X definido en todo U tal que $X(p) = v$. Definimos:

  $$\theta(p)(v) = \widetilde{\theta}(X)(p) \in \mathbb{R}.$$

  Se comprueba que la definición no depende de la elección de X y es una 1-forma diferenciable.

En la práctica, denotaremos ambas interpretaciones por θ, y utilizaremos una interpretación u otra según el contexto.

Observación 1.51. Utilizando que en un espacio vectorial V de dimensión finita $(V^*)^* \cong V$, se deduce una tercera interpretación para los campos vectoriales diferenciables en un abierto U de M:

$$\mathcal{X}(U) = Hom_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}^*(U), \mathcal{F}(U)).$$

Es decir, podemos identificar $\mathcal{X}(U) \cong (\mathcal{X}^*(U))^*$. Por tanto, podremos identificar a su vez $(\mathcal{X}(U))^*$ con el conjunto de 1-formas diferenciables en U, $\mathcal{X}^*(U)$.

1.6. Análisis tensorial en variedades

1.6.1. Tensores

Vamos a utilizar esta sección para hacer un breve repaso sobre tensores.

Definición 1.52. Sean $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales sobre un cuerpo K.

1. Llamaremos *producto tensorial de* $V_1, \ldots, V_n$ al K-espacio vectorial $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n = Mult_K(V_1^* \times \ldots \times V_n^*, K)$.

2. Si $(v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$, se define $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ de la siguiente manera:

   $$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \varphi_1(v_1) \ldots \varphi_n(v_n),$$

   para $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in V_1^* \times \ldots \times V_n^*$.

Proposición 1.53.

1. *La aplicación* $\otimes : V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ *que lleva* $(v_1, \ldots, v_n)$ *en* $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ *es* K*-multilineal.*

2. *Sean* W *un* K*-espacio vectorial y* $G : V_1 \times \ldots \times V_n \longrightarrow W$ *una aplicación* K*-multilineal. Entonces, existe una única aplicación* K*-lineal* $\widetilde{G} : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \longrightarrow W$ *tal que* $\widetilde{G} \circ \otimes = G$.

   Esta propiedad recibe el nombre de propiedad universal del producto tensorial.

   En particular, para $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ *se cumple que* $\widetilde{G}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = G(v_1, \ldots, v_n)$.

3. *El conjunto* $\{v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \,/\, v_i \in V_i,\, 1 \leq i \leq n\}$ *es un sistema de generadores de* $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$*. De hecho, todo elemento de* $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ *se puede expresar como suma de elementos de ese conjunto.*

4. *Si* $\mathcal{B}_i$ *es base de* V_i*, para todo* i *con* $1 \leq i \leq n$*, entonces* $\{e^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{i_n} \,/\, e^j_{i_j} \in \mathcal{B}_j,\, 1 \leq j \leq n\}$ *es base de* $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$.

La propiedad universal del producto tensorial nos permite reducir el estudio de las aplicaciones multilineales al estudio de aplicaciones lineales.

En lo que sigue se utilizará la siguiente notación: $\otimes^r V = V \overbrace{\otimes \ldots \otimes}^{r} V$.

Definición 1.54. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y sean $r \geq 0$ y $s \geq 0$, con $(r, s) \neq (0, 0)$. Un *tensor de tipo* (r, s) *sobre* V es una aplicación multilineal $A : (V^*)^r \times (V)^s \longrightarrow K$. Un tensor de tipo $(0, 0)$ sobre V es simplemente un elemento de K. El *grado contravariante* de un tensor de tipo (r, s) es r, y el *grado covariante* es s. Por último, si el tensor es de tipo $(r, 0)$ se llama *tensor contravariante* y si es del tipo $(0, s)$ se llama *tensor covariante*.

Denotaremos por $T^r_s(V)$ al conjunto de tensores de tipo (r, s) sobre V. Este es un espacio vectorial sobre K con las definiciones usuales de suma de funciones y multiplicación de funciones por elementos de K.

Teniendo en cuenta que en un espacio vectorial V de dimensión finita $(V^*)^*$ y V son isomorfos de forma canónica, podemos hacer la siguiente identificación:

$$T^r_s(V) = (\otimes^r V) \otimes (\otimes^s V^*).$$

Además, el producto tensorial se puede aplicar sobre tensores de distinto tipo.

Observación 1.55. Sea A un tensor de tipo (r,s) en V y B un tensor de tipo (t,u) en V. Entonces, $A \otimes B$ es la aplicación:

$$A\otimes B(\tau^1,\ldots,\tau^{r+t},v_1,\ldots,v_{s+u}) = A(\tau^1,\ldots,\tau^r,v_1,\ldots,v_s)B(\tau^{r+1},\ldots,\tau^{r+t},v_{s+1},\ldots,v_{s+u}),$$

donde $\tau^i \in V^*$ para todo $1 \leq i \leq r+t$ y $v_j \in V$ para todo $1 \leq j \leq s+u$.

$A \otimes B$ es obviamente un tensor sobre V de tipo $(r+t, s+u)$, y se llama *producto tensorial de A y B.*

Además, si se tiene que $A = v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes \varphi^1 \otimes \ldots \otimes \varphi^s$ y $B = w_1 \otimes \ldots \otimes w_t \otimes \psi^1 \otimes \ldots \otimes \psi^u$, entonces $A \otimes B = v_1 \otimes \ldots v_r \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_t \otimes \varphi^1 \otimes \ldots \otimes \varphi^s \otimes \psi^1 \otimes \ldots \otimes \psi^u$.

Consideramos la suma directa de todos los espacios vectoriales de tensores de tipo (r,s) sobre V, para todo $r \geq 0$ y $s \geq 0$, que será un espacio vectorial al que llamamos $T(V)$:

$$T(V) = \bigoplus_{r,s\geq 0} T^r_s(V).$$

$T(V)$ con el producto definido en la definición anterior es una K-álgebra.

Debido a la parte (4) de la proposición 1.53, se tiene lo siguiente.

Corolario 1.56. *Sean $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de V y $\{\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^n\}$ su base dual.. El conjunto de todos los tensores de tipo $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_s}$ forman una base de $T^r_s(V)$.*

Si $A \in T^r_s(V)$, denotando $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} = A(\varepsilon^{i_1},\ldots,\varepsilon^{i_r},e_{j_1},\ldots,e_{j_s})$, se tiene que

$$A = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s} A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_s}.$$

Proposición 1.57. *Sea A un tensor de tipo (r,s) en V y B un tensor de tipo (t,u) en V. Las componentes del producto tensorial $A \otimes B$ son:*

$$(A \otimes B)^{j_1,\ldots,j_{s+u}}_{i_1,\ldots,i_{r+t}} = A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \cdot B^{i_{r+1},\ldots,i_{r+t}}_{j_{s+1},\ldots,j_{s+u}}.$$

Definición 1.58. Sea A un tensor de tipo (r,s) y sean p y q índices de tipo contravariante. Se dice que un tensor es *simétrico contravariante en las variables p y q* si $\forall \tau^1,\ldots,\tau^r \in V^*$, $\forall v_1,\ldots,v_s \in V$, se cumple que:

$$A(\tau^1,\ldots,\tau^p,\ldots,\tau^q,\ldots,\tau^r,v_1,\ldots,v_s) = A(\tau^1,\ldots,\tau^q,\ldots,\tau^p,\ldots,\tau^r,v_1,\ldots,v_s).$$

De forma análoga se define un *tensor simétrico covariante en variables p y q.*

Se dice que un tensor es *simétrico contravariante* si lo es para cada par de índices contravariantes. Un tensor será *simétrico covariante* si lo es para cada par de índices covariantes.

1.6.2. Contracciones

Sea V un espacio K-vectorial.

Como la aplicación $V \times V^* \longrightarrow K$ que lleva (v, φ) en $\varphi(v)$ es K-bilineal, por la parte (2) de la proposición 1.53, esta induce una aplicación K-lineal $C_1^1 : V \otimes V^* \longrightarrow K$, que se llama *contracción de tipo* $(1,1)$. Obsérvese que $C_1^1(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$, para todo $\varphi \in V^*$ y $v \in V$.

En general, utilizando la identificación $(V^*)^* \cong V$, si se tienen enteros positivos r y s y se fijan un índice covariante i, $1 \leq i \leq r$, y un índice contravariante j, $1 \leq j \leq s$, podemos definir una función K-multilineal $G : V \overbrace{\times \ldots \times}^{r} V \times V^* \overbrace{\times \ldots \times}^{s} V^* \longrightarrow T_{s-1}^{r-1}(V)$ de la siguiente manera:

$$G(v_1, \ldots, v_r, \varphi_1, \ldots, \varphi_s) = \varphi_j(v_i) v_1 \otimes \ldots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_r \otimes \varphi_1 \ldots \otimes \varphi_{j-1} \otimes \varphi_{j+1} \otimes \ldots \otimes \varphi_s,$$

para $v_1, \ldots, v_r \in V$ y $\varphi_1, .., \varphi_s \in V^*$.

Como G es K-multilineal, por la propiedad universal del producto tensorial (proposición 1.53), induce una aplicación K-lineal $C_j^i : T_s^r(V) \longrightarrow T_{s-1}^{r-1}(V)$ tal que

$$C_j^i(v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_s) = \varphi_j(v_i) v_1 \otimes \ldots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_r \otimes \varphi_1 \ldots \otimes \varphi_{j-1} \otimes \varphi_{j+1} \otimes \ldots \otimes \varphi_s.$$

C_j^i se llama *contracción de tipo* (r, s) *en* (i, j).

Proposición 1.59. *Sean* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base de* V, $\{\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n\}$ *su base dual de* V^* *y* $A \in T_s^r(V)$. *Si denotamos por* $A_{j_1,\ldots,j_s}^{i_1,\ldots,i_r}$ *a las coordenadas de* A *en la base* $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_s}\}$, *entonces las coordenadas de* $C_j^i(A)$ *en la base* $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_{r-1}} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_{s-1}}\}$ *son:*

$$C_j^i(A)_{j_1,\ldots,j_{s-1}}^{i_1,\ldots,i_{r-1}} = \sum_m A_{j_1,\ldots,m,\ldots,j_{s-1}}^{i_1,\ldots,m,\ldots,i_{r-1}},$$

donde m *está en la posición* i *covariante y la posición* j *contravariante.*

1.6.3. Pullback

Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre K. La aplicación f induce una aplicación lineal entre los espacios duales $f^* : W^* \longrightarrow V^*$. Sea $A \in T_0^r(V)$. Como $A : V^* \times \ldots \times V^* \longrightarrow K$ es multilineal y $f^* \times \ldots \times f^* : W^* \times \ldots \times W^* \longrightarrow V^* \times \ldots \times V^*$ es lineal, entonces:

$$\widehat{A} = A \circ (f^* \times .. \times f^*)$$

es multilineal, y por tanto $\widehat{A} \in T_0^r(W)$.

La aplicación entre $T_0^r(V)$ y $T_0^r(W)$ que lleva A en $\widehat{A}$ es K-lineal.

Por otra parte, si $A \in T_s^0(W)$, como $A : W \times \ldots \times W \longrightarrow K$ es multilineal y la aplicación $f \times \ldots \times f : V \times \ldots \times V \longrightarrow W \times \ldots \times W$ es lineal, se tiene que:

$$A^* = A \circ (f \times .. \times f)$$

es multilineal, y por tanto $A^* \in T_s^0(V)$.

La aplicación entre $T_s^0(W)$ y $T_s^0(V)$ que lleva A en A^* es K-lineal.

En particular, si M y N son dos variedades diferenciables, $\phi : M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable y $p \in M$, tenemos $d\phi_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\phi(p)}(N)$. Esta aplicación induce como antes la aplicación $\mathbb{R}$-lineal entre $T_s^0(T_{\phi(p)}(N))$ y $T_s^0(T_p(M))$ que lleva A en $A^* = A \circ (d\phi_p \times \ldots \times d\phi_p)$.

Definición 1.60. Dado un tensor $A \in T_s^0(T_{\phi(p)}(N))$, el tensor A^* se denota por $\phi^*(A)$ y conoce como *pullback de A*.

1.7. Campos Tensoriales

Definición 1.61. Sea M una variedad diferenciable. Se define el *fibrado tensorial de tipo (r, s) sobre M* como $T_s^r(M) = \coprod_{p \in M} T_s^r(T_p(M))$.

De forma similar a lo que se hizo para los fibrados tangente y cotangente, se puede ver que el fibrado tensorial tiene una estructura de variedad diferenciable.

Definición 1.62. Un *campo tensorial A de tipo* (r, s) sobre un abierto U de una variedad diferenciable M es un aplicación de U en $T_s^r(M)$, cuya composición con la proyección canónica es la identidad.

Denotaremos por $\mathcal{T}_s^r(U)$ al conjunto de campos tensoriales diferenciables sobre U.

Si A es un campo tensorial sobre M, entonces para cada abierto U de M y cada sistema de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ de U se tiene que:

$$A = \sum_{i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s} A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}, \tag{1.1}$$

donde $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$ es la función real definida en U por:

$$A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}(p) = A(p)(dx^{i_1}\big|_p, \ldots, dx^{i_r}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\big|_p).$$

Proposición 1.63. *Un campo tensorial A es diferenciable si y solo si lo son las funciones reales $A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$.*

Definición 1.64. Dados campos tensoriales $A \in \mathcal{T}^r_s(U)$ y $B \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(U)$ se define el campo tensorial $A \otimes B \in \mathcal{T}^{r+r'}_{s+s'}(U)$ de la siguiente manera:

$$(A \otimes B)(p) = A(p) \otimes B(p)$$

para $p \in U$.

Sean $A \in \mathcal{T}^r_s(U)$ y $B \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(U)$. De las proposiciones 1.57 y 1.63 se deduce la diferenciabilidad de $A \otimes B$.

Proposición 1.65. *El conjunto $\mathcal{T}^r_s(U)$ de todos los campos tensoriales sobre el abierto U de M de tipo (r,s) es un $\mathcal{F}(U)$-módulo.*

Observación 1.66. De forma similar a cómo se ha hecho para campos vectoriales y 1-formas, los campos tensoriales diferenciables sobre U se pueden interpretar como tensores sobre $\mathcal{X}(U)$, el cual es módulo sobre $\mathcal{F}(U)$. Por tanto, si A es un campo tensorial diferenciable de tipo (r,s), entonces se puede interpretar como una función $\mathcal{F}(U)$-multilineal $\widetilde{A} : \mathcal{X}^*(U)^r \times \mathcal{X}(U)^s \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ y viceversa, de la siguiente manera:

- Sea A un campo tensorial diferenciable de tipo (r,s) sobre un abierto U de M. Vamos a definir una aplicación $\mathcal{F}(U)$-multilineal $\widetilde{A} : \mathcal{X}^*(U)^r \times \mathcal{X}(U)^s \longrightarrow \mathcal{F}(U)$. Si $\theta_1, \dots, \theta_r \in \mathcal{X}^*(U)$, $X^1, \dots, X^s \in \mathcal{X}(U)$ y $p \in U$, se define:

  $$\widetilde{A}(\theta_1, \dots, \theta_r, X^1, \dots, X^s)(p) = A(p)(\theta_1(p), \dots, \theta_r(p), X^1(p), \dots, X^s(p)) \in \mathbb{R}.$$

  Se comprueba que $\widetilde{A}$ es $\mathcal{F}(U)$-multilineal.

- Recíprocamente, si $\widetilde{A} : \mathcal{X}^*(U)^r \times \mathcal{X}(U)^s \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ es una aplicación $\mathcal{F}(U)$-multilineal, vamos a definir un campo tensorial diferenciable $A \in \mathcal{T}^r_s(U)$. Dados $p \in U$, $\omega_1, \dots, \omega_r \in T^*_p(M)$ y $v_1, \dots, v_s \in T_p(M)$, sabemos que existen $\theta_i \in \mathcal{X}^*(U)$ tales que $\theta_i(p) = \omega_i$, para $1 \leq i \leq r$, y $X^j \in \mathcal{X}(U)$ tales que $X^j(p) = v_j$, para $1 \leq j \leq s$. Definimos

  $$A(p)(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s) = \widetilde{A}(\theta_1, \dots, \theta_r, X^1, \dots, X^s)(p).$$

  Se prueba que A es campo tensorial diferenciable, y que está bien definido, es decir, que no depende de los campos vectoriales ni las 1-formas elegidas.

Observación 1.67. Entenderemos los campos tensoriales de tipo $(0,0)$ como funciones $f \in \mathcal{F}(U)$, es decir, $\mathcal{T}_0^0(U) = \mathcal{F}(U)$.

Observación 1.68. Los campos tensoriales de tipo (r,s) en U se pueden escribir como suma de elementos de tipo $X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^s$, donde $X_i \in \mathcal{X}(U)$, $1 \leq i \leq r$ y $\theta^j \in \mathcal{X}(U)$, $1 \leq j \leq s$, como consecuencia de la proposición 1.53.

Observación 1.69. Existe un isomorfismo de $\mathcal{F}(U)$-módulos:

$$Mult_{\mathcal{F}(U)}\left(\mathcal{X}(U)^s, \mathcal{X}(U)\right) \cong Mult_{\mathcal{F}(U)}(\mathcal{X}^*(U) \times \mathcal{X}(U)^s, \mathcal{F}(U)),$$

debido a que existe un isomorfismo de $\mathcal{F}(U)$-módulos $\mathcal{X}(U) \cong (\mathcal{X}^*(U))^*$.

Si $A : \mathcal{X}(U)^s \longrightarrow \mathcal{X}(U)$ es multilineal en $\mathcal{F}(U)$, se define $\widetilde{A} : \mathcal{X}^*(U) \times \mathcal{X}(U)^s \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta\left(A(X_1, \ldots, X_s)\right).$$

Para $\theta \in \mathcal{X}^*(U)$ y $X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{X}(U)$. Se comprueba que $\widetilde{A}$ es multilineal en $\mathcal{F}(U)$, por lo que es un campo tensorial en U de tipo $(1,s)$. Finalmente, utilizando $\mathcal{X}(U) \cong (\mathcal{X}^*(U))^*$ se comprueba que es isomorfismo.

Capítulo 2

Variedades semi-riemannianas

La geometría natural del espacio eucídeo $\mathbb{R}^n$ se basa en su producto escalar usual. Gracias al isomorfismo existente entre $T_p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbb{R}^n$, este producto escalar se puede implementar en cada espacio tangente. Por tanto, se pueden llevar a cabo operaciones geométricas básicas tales como medir la longitud de un vector tangente o el ángulo entre dos vectores tangentes.

Análogamente, para generalizar lo anterior e introducir una geometría en una variedad n-dimensional cualquiera, se necesita establecer una métrica (forma bilineal simétrica no degenerada) en cada espacio tangente.
En este capítulo introduciremos las variedades semi-riemannianas, que son variedades diferenciables dotadas con un tensor métrico de signatura constante arbitraria. Explicaremos sus propiedades, teniendo en cuenta que nuestra finalidad es llegar a introducir ciertos conceptos relacionados con la geometría de este tipo de variedades.

2.1. Introducción

Definición 2.1. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y b una forma bilineal simétrica sobre V. Se llama *índice de* b al mayor entero ν tal que existe un subespacio $W \subset V$ de dimensión ν de forma que $b\,|_W$ es definida negativa.

Es conocido que toda forma bilineal simétrica se puede diagonalizar. Se llama signatura de la forma bilineal al par (p, ν), donde p es el número de elementos estrictamente positivos que aparecen en una matriz diagonal de la forma bilineal y ν el número de elementos estrictamente negativos, que no dependen de la base elegida. El índice es entonces ν.

El índice $\nu = 0$ se corresponde al caso en el que b es definida positiva, es decir, es un producto escalar.

Definición 2.2. Sea b una forma bilineal simétrica sobre V. Se dice que $v, w \in V$ son *ortogonales* si $b(v,w) = 0$, y que un vector v es *unitario* si su norma, $|b(v,v)|^{1/2}$, es 1, es decir, si $b(v,v) = \pm 1$. Diremos que una base es *ortonormal* si está formada por vectores unitarios que son ortogonales dos a dos.

Por tanto, la matriz de b relativa a una base ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ de V es diagonal, y además $b(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j$, donde $\varepsilon_j = b(e_j, e_j) = \pm 1$.

Tomaremos el convenio de ordenar los vectores de la base de tal manera que los signos negativos aparezcan primero en la n-upla $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

Definición 2.3. Un *tensor métrico* g sobre una variedad diferenciable M es un campo tensorial diferenciable de tipo $(0,2)$ sobre M, simétrico, no degenerado y de índice constante. Llamaremos *índice de* M al índice de g_p para cualquier $p \in M$, que no depende de p.

Es decir, $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$, por lo que asigna a cada punto p de M una forma bilineal simétrica g_p en el espacio tangente $T_p(M)$. Además, el índice de g_p es el mismo para todo $p \in M$.

Definición 2.4. Una *variedad semi-riemanniana* o *variedad pseudo-riemanniana* es una variedad diferenciable M dotada de un tensor métrico g.

Por tanto, se puede entender que una variedad semi-riemanniana es un par ordenado (M, g). Aunque dos tensores métricos en la misma variedad diferenciable dan lugar a dos variedades semi-riemannianas diferentes, si no hay confusión denotaremos por M a la variedad semi-riemanniana, sobreentendiendo el tensor métrico, que denotaremos generalmente por g o por $\langle \, , \rangle$.

En lo que sigue, M será una variedad semi-riemanniana de dimensión n y denotaremos por ν, con $0 \leq \nu \leq n$, al índice de M.

Definición 2.5. Si $\nu = 0$, entonces M recibe el nombre de *variedad riemanniana* y cada g_p es un producto escalar definido positivo de $T_p(M)$. Se dice que g induce una *métrica riemanniana* en M.

Si $\nu = 1$ y $n \geq 2$, diremos que M es una *variedad lorentziana*, y que g induce una *métrica lorentziana* en M.

Si $p \in M$, escribiremos $\langle v, w \rangle = g_p(v, w) \in \mathbb{R}$ para vectores tangentes $v, w \in T_p(M)$ y $\langle V, W \rangle = g(V, W) \in \mathcal{F}(M)$ para campos vectoriales, en cuyo caso interpretamos g como un tensor de tipo $(0,2)$ sobre $\mathcal{X}(M)$ como se explicó en la observación 1.66. Recordamos que:

$$\langle V, W \rangle(p) = \langle V(p), W(p) \rangle = g_p(V(p), W(p)).$$

Sea U un abierto de M con coordenadas $x^1, \dots, x^n$. Las componentes del tensor métrico g en U son

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Como g es no degenerado, en cada punto $p \in U$ la matriz $(g_{ij}(p))$ es inversible, y su inversa se denota por $(g^{ij}(p))$. Del cálculo de los términos de la matriz inversa podemos deducir que las funciones g^{ij} son diferenciables en U. Además, dado que g es simétrico, $g_{ij} = g_{ji}$, por lo que a su vez $g^{ij} = g^{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Además, debido a la expresión 1.1, podemos escribir el tensor métrico en U como:

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Para campos vectoriales definidos en U, $V = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $W = \sum W^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, se tendrá entonces

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle = \sum g_{ij} V^i W^j.$$

Denotemos para cada $p \in M$ por q_p a la forma cuadrática asociada a g_p. De forma análoga a la interpretación de g, por la observación 1.66, q se puede entender como la aplicación $\mathcal{F}(M)$-lineal $q : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ donde $q(V) = g(V, V)$, para $V \in \mathfrak{X}(M)$. Esta aplicación recibe el nombre de *elemento de línea de M*, y se denota por ds^2.

En términos de las coodenadas anteriores, si $V \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene que en U:

$$g(V, V) = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j (V, V) = \sum g_{ij} dx^i(V) dx^j(V) = \sum g_{ij} dx^i dx^j (V).$$

Por tanto:

$$q = ds^2 = \sum g_{ij} dx^i dx^j,$$

donde $dx^i dx^j$ denota la multiplicación de funciones ordinaria sobre los espacios tangentes.

Ejemplo 2.6.

1. *En la observación 1.23 definimos un isomorfismo entre $T_p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathbb{R}^n$ para cada $p \in \mathbb{R}$ que llevaba $v_p = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$ en $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, en este caso, el producto escalar de $\mathbb{R}^n$ da lugar a un tensor métrico en $\mathbb{R}^n$ de la manera siguiente:*

   $$\langle v_p, w_p \rangle = v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i.$$

   Se denota por $\mathbb{R}^n$ a la variedad riemanniana resultante, que recibe el nombre de espacio euclídeo de dimensión n.

2. *Para cada entero ν, $1 \leq \nu \leq n$, cambiando en el ejemplo anterior las primeras ν sumas por restas nos da un tensor métrico de índice ν:*

$$\langle v_p, w_p \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{i=\nu+1}^{n} v^i w^i.$$

Llamaremos espacio semi-euclídeo $\mathbb{R}^n_\nu$ *a la variedad semi-riemanniana resultante.*

Fijando la siguiente notación:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & si \quad 1 \leq i \leq \nu \\ 1 & si \quad \nu+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

el tensor anterior se puede escribir como:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i du^i \otimes du^i.$$

3. *Si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ se llama espacio de Minkowski de dimensión n.*

Veamos ahora que podemos considerar el producto de variedades semi-riemannianas, y obtener una métrica a partir de las métricas individuales.

Proposición 2.7. *Sean M y N variedades semi-riemannianas con tensores métricos g_M y g_N. Si π y σ son las proyecciones de $M \times N$ en M y N, respectivamente, entonces definimos:*

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N).$$

g es un tensor métrico de $M \times N$, que dota a la variedad producto del carácter de variedad semi-riemanniana.

Demostración. Vamos a demostrarlo punto a punto. Debido a la definición de pullback, si $(p,q) \in M \times N$ y $v, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$, entonces:

$$g_{(p,q)}(v,w) = g_{Mp}(d\pi_{(p,q)}(v), d\pi_{(p,q)}(w)) + g_{Nq}(d\sigma_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)}(w)).$$

La aplicación $g_{(p,q)}$ es bilineal y simétrica, pues tanto g_{Mp} como g_{Nq} lo son, y las diferenciales son lineales.

Como vimos en la proposición 1.32, $\phi = (d\pi_{(p,q)}, d\sigma_{(p,q)})$ es un isomorfismo entre los espacios $\mathbb{R}$-vectoriales $T_{(p,q)}(M \times N)$ y $T_p(M) \times T_q(N)$.

Sean m y n las dimensiones de M y N, respectivamente, y sean $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base de $T_p(M)$ y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de $T_q(N)$ cualesquiera. Se tiene entonces que el conjunto $\{(e_1, 0), \ldots, (e_m, 0), (0, u_1), \ldots, (0, u_n)\}$ es una base de $T_p(M) \times T_q(N)$. Como ϕ es isomorfismo, se pueden tomar $\widehat{e_i} = \phi^{-1}((e_i, 0))$, $1 \leq i \leq m$, y $\widehat{u_j} = \phi^{-1}((0, u_j))$, $1 \leq j \leq n$, y $\{\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_m}, \widehat{u_1}, \ldots, \widehat{u_n}\}$ es base de $T_{(p,q)}(M \times N)$.

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de M en la base $\{e_1, \ldots, e_m\}$ y $B = (b_{ij})$ la matriz de N en la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Vamos a ver cuál es la matriz de $g_{(p,q)}$ en la base $\{\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_m}, \widehat{u_1}, \ldots, \widehat{u_n}\}$, teniendo en cuenta que g_{Mp} y g_{Nq} son formas bilineales simétricas:

- $g_{(p,q)}(\widehat{e_i}, \widehat{e_j}) = g_{Mp}(d\pi_{(p,q)}(\widehat{e_i}), d\pi_{(p,q)}(\widehat{e_j})) + g_{Nq}(d\sigma_{(p,q)}(\widehat{e_i}), d\sigma_{(p,q)}(\widehat{e_j})) = g_{Mp}(e_i, e_j) + g_{Nq}(0, 0) = a_{ij}$, para todo i, j, $1 \leq i, j \leq m$.

- $g_{(p,q)}(\widehat{u_i}, \widehat{u_j}) = g_{Mp}(d\pi_{(p,q)}(\widehat{u_i}), d\pi_{(p,q)}(\widehat{u_j})) + g_{Nq}(d\sigma_{(p,q)}(\widehat{u_i}), d\sigma_{(p,q)}(\widehat{u_j})) = g_{Mp}(0, 0) + g_{Nq}(u_i, u_j) = b_{ij}$, para todo i, j, $1 \leq i, j \leq n$.

- $g_{(p,q)}(\widehat{e_i}, \widehat{u_j}) = g_{Mp}(d\pi_{(p,q)}(\widehat{e_i}), d\pi_{(p,q)}(\widehat{u_j})) + g_{Nq}(d\sigma_{(p,q)}(\widehat{e_i}), d\sigma_{(p,q)}(\widehat{u_j})) = g_{Mp}(e_i, 0) + g_{Nq}(0, u_j) = 0$, para todo i, j, $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

- $g_{(p,q)}(\widehat{u_i}, \widehat{e_j}) = g_{Mp}(d\pi_{(p,q)}(\widehat{u_i}), d\pi_{(p,q)}(\widehat{e_j})) + g_{Nq}(d\sigma_{(p,q)}(\widehat{u_i}), d\sigma_{(p,q)}(\widehat{e_j})) = g_{Mp}(0, e_j) + g_{Nq}(u_i, 0) = 0$, para todo i, j, $1 \leq j \leq m$ y $1 \leq i \leq n$.

Debido a los cálculos anteriores, la matriz de $g_{(p,q)}$ en la base anterior tiene la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$

por lo que $g_{(p,q)}$ es una forma bilineal simétrica y no degenerada.

Además, si $\{e_1, \ldots, e_m\}$ y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ son bases ortonormales, la matriz anterior será diagonal, por lo que su índice será la suma de los índices de g_{Mp} y g_{Nq}, y en consecuencia este será constante para todo $(p, q) \in M \times N$.

□

Lo mismo se puede extender para cualquier producto finito de variedades semi-riemannianas.

2.2. Isometrías

Para definir una variedad semi-riemanniana solo se precisa de una variedad M junto con una métrica g sobre M. Por tanto dos variedades M y N serán indistinguibles desde el punto de vista de la geometría semi-riemanniana si hay un difeomorfismo entre ellas que preserve la métrica.

Definición 2.8. Sean M y N variedades semi-riemannianas con tensores métricos g_M y g_N respectivamente. Una *isometría* de M a N es un difeomorfismo $\phi : M \longrightarrow N$ que preserva la métrica tensorial, es decir, $\phi^*(g_N) = g_M$. Diremos entonces que M y N son *variedades isométricas.*

Explícitamente, esto significa que $\forall p \in M$ y $\forall v, w \in T_p(M)$,

$$g_{N_{\phi(p)}}(d\phi_p(v), d\phi_p(w)) = g_{M_p}(v, w).$$

Es decir, ϕ es isometría de M a N si y solo si es un difeomorfismo y $d\phi_p$ es isometría entre los espacios vectoriales $T_p(M)$ y $T_{\phi(p)}(N)$ para todo $p \in M$.

Proposición 2.9.

1. *La aplicación identidad en una variedad semi-riemanniana es una isometría.*
2. *La composición de isometrías es isometría.*
3. *La aplicaciones inversa de una isometría es isometría.*

Demostración.

1. La identidad es un difeomorfismo, y la diferencial de la identidad en cualquier punto es la identidad, que está claro que es isometría entre espacios vectoriales.
2. La composición de difeomorfismos es difeomorfismo. Además, por la regla de la cadena (1.24), la diferencial de la composición es la composición de las diferenciales. Como la composición de isometrías entre espacios vectoriales es isometría, entonces también lo será la diferencial de la composición.
3. Debido a la proposición 1.25, la diferencial de la inversa es la inversa de la diferencial. Como la inversa de una isometría entre espacios vectoriales es isometría, y además la inversa de un difeomorfismo es difeomorfismo, se cumple que la inversa de una isometría entre variedades semi-riemannianas es isometría.

□

2.3. Derivaciones Tensoriales. Derivada de Lie

En esta sección vamos a suponer simplemente que M es una variedad diferenciable.

2.3.1. Contracciones

En apartado 1.6.2 estudiamos las contracciones de tensores sobre espacios vectoriales. En esta sección se van a definir las contracciones sobre campos tensoriales sobre M, siendo M una variedad diferenciable. Para ello, interpretaremos los campos tensoriales como tensores sobre $\mathcal{X}(U)$, como vimos en la observación 1.66.

Por tanto, si r y s son enteros positivos, y se toma un índice convariante i, $1 \leq i \leq r$, y un índice contravariante j , $1 \leq j \leq s$, como vimos en el apartado 1.6.2, se llama *contracción en* (i, j) a la aplicación $\mathcal{F}(M)$-lineal $C^i_j : \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(M)$ que cumple que:

$$C^i_j(X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^s) =$$
$$= \theta^j(X_i) X_1 \otimes \ldots \otimes X_{i-1} \otimes X_{i+1} \otimes \ldots \otimes X_r \otimes \theta^1 \otimes \ldots \theta^{j-1} \otimes \theta^{j+1} \otimes \ldots \otimes \theta^s.$$

Sean $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$, y sea A un campo tensorial en M de tipo (r, s) cuyas componentes respecto a un sistema de coordenadas son $A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$. Entonces, para ese mismo sistema de coordenadas, $C^i_j A$ tiene como componentes:

$$\sum_m A^{i_1,\ldots,m,\ldots,i_{r-1}}_{j_1,\ldots,m,\ldots,j_{s-1}}, \tag{2.1}$$

donde m está en la posición contravariante i y la posición covariante j.

Proposición 2.10. *Sea A un campo tensorial diferenciable en M de tipo (r, s), y sean $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$. Entonces, $C^i_j(A)$ es un tensor diferenciable en M de tipo $(r-1, s-1)$.*

Demostración. Como las componentes de $C^i_j(A)$ en una base dada son diferenciables (ecuación 2.1), debido a la proposición 1.63, $C^i_j(A)$ es diferenciable. □

2.3.2. Derivaciones tensoriales

Definición 2.11. Una *derivación tensorial* en una variedad diferenciable M es un conjunto de funciones $\mathbb{R}$ -lineales

$$\mathcal{D} = \{\mathcal{D}^r_s : \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^r_s(M), r \geq 0, s \geq 0\},$$

tal que para cualesquiera campos tensoriales A y B y cualquier contracción C:

1. $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}(A) \otimes B + A \otimes \mathcal{D}(B)$.
2. $\mathcal{D}(C(A)) = C(\mathcal{D}(A))$.

Utilizaremos indistintamente las notaciones $\mathcal{D}(A)$ y $\mathcal{D}A$, y $C(A)$ y CA.

Por la definición, se tiene que $\mathcal{D}$ es $\mathbb{R}$-lineal, preserva el tipo del tensor al que se aplica, obecede la regla del producto leibniziana y conmuta con todas las contracciones. Merece la pena mencionar que para $f \in \mathcal{F}(M)$, $fA = f \otimes A$, luego $\mathcal{D}(fA) = (\mathcal{D}f)A + f(\mathcal{D}A)$.

Proposición 2.12 (La Regla del Producto)**.** *Sea M una variedad diferenciable y $\mathcal{D}$ una derivación tensorial en M. Si $A \in \mathcal{T}^r_S(M)$, $\theta^i \in \mathcal{X}^*(M)$ para todo $1 \leq i \leq r$ y $X_j \in \mathcal{X}(M)$ para todo $1 \leq j \leq s$, se cumple:*

$$\mathcal{D}\left[A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)\right] = \\ = \mathcal{D}A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s) + \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\dots,\mathcal{D}\theta^i,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s) \\ + \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,\mathcal{D}X_j,\dots,X_s)$$

Demostración. Por simplicidad, vamos a probar lo anterior solo en el caso en el que $A \in \mathcal{T}_1^1(M)$.

Consideramos las contracciones $C_2^2 : \mathcal{T}_2^2(M) \longrightarrow \mathcal{T}_1^1(M)$ y $C_1^1 : \mathcal{T}_1^1(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$. Sea $\overline{C} = C_1^1 \circ C_2^2$. Veamos que $A(\theta, X) = \overline{C}(A \otimes X \otimes \theta)$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$, $\theta \in \mathcal{X}^*(M)$ y $A \in \mathcal{T}_1^1(M)$.

Como consecuencia de la linealidad de $\overline{C}$ y la bilinealidad del producto vectorial, se puede suponer que $A = Y \otimes \omega$, con $Y \in \mathcal{X}(M)$ y $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$, ya que todos los campos tensoriales de tipo $(1,1)$ se pueden expresar como suma de campos de este tipo:

$\overline{C}(A \otimes X \otimes \theta) = \overline{C}((Y \otimes \omega) \otimes (X \otimes \theta)) = \overline{C}(Y \otimes X \otimes \omega \otimes \theta) = C_1^1(\omega(X)Y \otimes \theta) =$
$= \omega(X)\theta(Y) = (Y \otimes \omega)(\theta, X)$.

Utilizando la igualdad anterior y las propiedades (1) y (2) de las derivaciones tensoriales se tiene que:

$\mathcal{D}(A(\theta, X)) = \mathcal{D}\overline{C}(A \otimes X \otimes \theta) = \overline{C}\mathcal{D}(A \otimes X \otimes \theta) = \overline{C}(\mathcal{D}A \otimes X \otimes \theta) + \overline{C}(A \otimes \mathcal{D}X \otimes \theta) + \overline{C}(A \otimes X \otimes \mathcal{D}\theta) = DA(\theta, X) + A(\theta, \mathcal{D}X) + A(\mathcal{D}\theta, X)$.

Con ello queda probada la regla del producto para derivaciones de tensores de tipo $(1,1)$.

Para el caso general, se toma $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ y se procede de forma análoga, probando que $A(\theta^1,\dots,\theta^s,X_1,\dots,X_r) = \overline{C}(A \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_r \otimes \theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^s)$ para todo $\theta^1,\dots,\theta^s \in \mathcal{X}^*(M)$ y $X_1,\dots,X_r \in \mathcal{X}(M)$, donde $\overline{C} : \mathcal{T}_{r+s}^{r+s}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ se obtiene aplicando primero s veces la contracción C_1^{r+1} y luego r veces la contracción C_1^1.

$\square$

Corolario 2.13.

1. *Si $\mathcal{D}$ es una derivación y θ una 1-forma, entonces:*

$$\mathcal{D}\theta(X) = \mathcal{D}(\theta(X)) - \theta(\mathcal{D}X),$$

para todo campo vectorial X.

2. *Si* $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$, *y* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$*:*

$$\mathcal{D}g(X,Y) = \mathcal{D}(g(X,Y)) - g(\mathcal{D}X, Y) - g(X, \mathcal{D}Y).$$

Demostración. La primera parte se obtiene aplicando la proposición anterior al caso en el que $r = 0$, $s = 1$ y $A = \theta$, y la segunda al caso en el que $r = 0$, $s = 2$ y $A = g$.

□

Corolario 2.14. *Si dos derivaciones* $\mathcal{D}_1$ *y* $\mathcal{D}_2$ *coinciden sobre funciones, campos vectoriales y 1-formas, entonces* $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$*.*

Teorema 2.15. *Dados un campo vectorial* V *y una función* $\mathbb{R}$*-lineal* $\delta : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ *tal que:*

$$\delta(fX) = (V(f))X + f\delta(X), \quad \forall f \in \mathcal{F}(M), X \in \mathcal{X}(M),$$

existe una única derivación tensorial $\mathcal{D}$ *en* M *tal que* $\mathcal{D}_0^0 = V : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ *y* $\mathcal{D}_0^1 = \delta$*.*

Demostración. Si $\mathcal{D}$ existiera, $\mathcal{D}_0^0$ y $\mathcal{D}_0^1$ ya estarían especificados. Por el corolario 2.13, $\mathcal{D}_1^0$ debería ser la siguiente:

$$\mathcal{D}\theta(X) = V(\theta(X)) - \theta(\delta(X)) \quad \forall X \in \mathcal{X}(M), \tag{2.2}$$

donde $\theta \in \mathcal{X}^*(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$, y $\theta(X) \in \mathcal{F}(M)$. Esto da la unicidad de $\mathcal{D}_1^0$.

Veamos cuál sería $\mathcal{D}_s^r$. Si A es un tensor de tipo (r, s), con $r + s \geq 2$, por la regla del producto se tendría que cumplir que:

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = V\left[A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)\right]\\ &- \sum_{i=1}^{r} A(\theta^1, \dots, \mathcal{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) - \sum_{j=1}^{s} A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \delta X_j, \dots, X_s),\end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\theta^i \in \mathcal{X}^*(M)$ para todo $1 \leq i \leq s$ y $X_i \in \mathcal{X}(M)$ para todo $1 \leq j \leq s$, con lo que queda probada la unicidad de $\mathcal{D}_s^r$.

Para probar la existencia, definimos $\mathcal{D}_1^0$ como en la ecuación 2.2. Hay que comprobar que $\mathcal{D}_1^0(\theta)$ es una 1-forma, es decir, las dos condiciones siguientes:

1. $\mathcal{D}\theta$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal.

   Sean $f, g \in \mathcal{F}(M)$ y $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Como θ es $\mathcal{F}(M)$-lineal y los campos V, X e Y y la aplicación δ son $\mathbb{R}$-lineales, entonces:

   $\mathcal{D}\theta(fX + gY) = V(\theta(fX + gY)) - \theta(\delta(fX + gY)) =$

   $= V(f\theta(X)) + V(g\theta(Y)) - \theta(\delta(fX) + \delta(gY)) =$

$= V(f)\theta(X) + fV(\theta(X)) + V(g)\theta(Y) + gV(\theta(Y)) - \theta(\delta(fX)) - \theta(\delta(gY)) =$

$= V(f)\theta(X)+fV(\theta(X))+V(g)\theta(Y)+gV(\theta(Y))-\theta[(V(f))X+f\delta(X)]-\theta[(V(g))Y+ g\delta(Y)] =$

$= V(f)\theta(X)+fV(\theta(X))+V(g)\theta(Y)+gV(\theta(Y))-V(f)\theta(X)-f\theta(\delta(X))-V(g)\theta(Y)- g\theta(\delta(Y)) =$

$= f[V(\theta(X)) - \theta(\delta(X))] + g[V(\theta(Y)) - \theta(\delta(Y))] = f\mathcal{D}\theta(X) + g\mathcal{D}\theta(Y).$

2. $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1^0 : \mathcal{X}^*(M) \longrightarrow \mathcal{X}^*(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.

   Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $\theta, \eta \in \mathcal{X}^*(M)$, entonces:

   $\mathcal{D}(a\theta + b\eta)(X) = V((a\theta + b\eta)(X)) - (a\theta + b\eta)(\delta(X)) = aV(\theta(X)) + bV(\eta(X)) - a\theta(\delta(X)) - b\eta(\delta(X)) = a\mathcal{D}\theta(X) + b\mathcal{D}\eta(X).$

Si definimos $\mathcal{D}_s^r$ como en la ecuación 2.3, se puede verificar de forma análoga que $\mathcal{D}A$ es $\mathcal{F}(M)$-multilineal, y por tanto es un tensor de tipo (r, s), y que $\mathcal{D} : T_s^r(M) \longrightarrow T_s^r(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.

Falta por ver que $\mathcal{D}$ cumple las dos propiedades de las derivaciones:

1. Veamos que $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$, donde $A \in T_s^r(M)$, $B \in T_u^t(M)$. Para ello, tomamos $\theta^1, \ldots, \theta^r, \eta^1, \ldots, \eta^t \in \mathcal{X}^*(M)$ y $X_1, \ldots, X_s, Y_1, \ldots, Y_u \in \mathcal{X}(M)$. Entonces:

   $\mathcal{D}(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \eta^1, \ldots, \eta^t, X_1, \ldots, X_s, Y_1, \ldots, Y_u) =$

   $= V\left[(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \eta^1, \ldots, \eta^t, X_1, \ldots, X_s, Y_1, \ldots, Y_u)\right] -$

   $- \sum_{i=1}^{r}(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \mathcal{D}\theta^i, \ldots, \theta^r, \eta^1, \ldots, \eta^t, X_1, \ldots, X_s, Y_1, \ldots, Y_u) -$

   $- \sum_{i=1}^{t}(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \eta^1, \ldots, \mathcal{D}\eta^i, \ldots, \eta^t, X_1, \ldots, X_s, Y_1, \ldots, Y_u) -$

   $- \sum_{j=1}^{s}(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \eta^1, \ldots, \eta^t, X_1, \ldots, \delta X_j, \ldots, X_s, Y_1, \ldots, Y_u) -$

   $- \sum_{j=1}^{u}(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \eta^1, \ldots, \eta^t, X_1, \ldots, X_s, Y_1, \ldots, \delta Y_j, \ldots, Y_u).$

   Como $V \in \mathcal{X}(M)$, V es Leibnitziana, por lo que:

   $V\left[(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, \eta^1, \ldots, \eta^t, X_1, \ldots, X_s, Y_1, \ldots, Y_u)\right] =$

   $= V\left[A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \cdot B(\eta^1, \ldots, \eta^t, Y_1, \ldots, Y_u)\right] =$

   $= V\left[A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)\right] \cdot B(\eta^1, \ldots, \eta^t, Y_1, \ldots, Y_u) +$

   $+ A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \cdot V\left[B(\eta^1, \ldots, \eta^t, Y_1, \ldots, Y_u)\right].$

   Sustituyendo este valor en la igualdad anterior es inmediato comprobar que se cumple la igualdad buscada.

2. Falta probar que $\mathcal{D}$ conmuta con cualquier contracción.

   Para ello, si $r, s > 0$, hay que probar que $\mathcal{D}$ conmuta con una contracción cualquiera de tipo $C^i_j : \mathcal{T}^r_s(M) \longrightarrow \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(M)$. Basta comprobar que conmutan aplicados sobre un campo tensorial de la forma $A = X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^s \in \mathcal{T}^r_s$, con $X_1 \ldots X_r \in \mathcal{X}(M)$ y $\theta^1 \ldots \theta^s \in \mathcal{X}^*(M)$, ya que todos los campos tensoriales de tipo (r, s) se pueden expresar como suma de campos de este tipo, como vimos en la observación 1.68, y las derivaciones y las contracciones conmutan con la suma.

   Por comodidad, lo probaremos para C^r_s:

$$C^r_s(A) = \theta^s(X_r)X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1} \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1}.$$

   Debido a la propiedad 2 de las derivaciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(C^r_s(A)) = \theta^s(X_r)\mathcal{D}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1} \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1}) \\ + \mathcal{D}(\theta^s(X_r))X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1} \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

   Por otra parte:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A) &= \mathcal{D}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1}) \otimes X_r \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^s \\ &+ X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \otimes \mathcal{D}(\theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1}) \otimes \theta^s \\ &+ X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1} \otimes \mathcal{D}(X_r) \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^s \\ &+ X_1 \otimes \ldots \otimes X_r \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1} \otimes \mathcal{D}(\theta^s).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C^r_s(\mathcal{D}(A)) &= \theta^s(X_r)(\mathcal{D}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1}) \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1}) \\ &+ \theta^s(X_r)(X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1} \otimes \mathcal{D}(\theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1})) \\ &+ \theta^s(\mathcal{D}(X_r))(X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1} \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^s) \\ &+ (\mathcal{D}\theta^s)(X_r)(X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1} \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1} \otimes \theta^{s-1}) = \\ &= \theta^s(X_r)(\mathcal{D}(X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1} \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1})) \\ &+ (\theta^s(\mathcal{D}(X_r)) + (\mathcal{D}\theta^s)(X_r))(X_1 \otimes \ldots \otimes X_{r-1} \otimes \theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^{s-1}).\end{aligned} \tag{2.5}$$

   Para que se cumpla la igualdad de las expresiones 2.4 y 2.5, es suficiente que:

$$\mathcal{D}(\theta^s(X_r)) = \theta^s(\mathcal{D}(X_r)) + (\mathcal{D}\theta^s)(X_r),$$

   y esto es cierto porque por definición:

$$\theta^s(\mathcal{D}(X_r)) = V(\theta^s(X_r)) - \theta^s(\delta(X_r)) = \mathcal{D}(\theta^s(X_r)) - \theta^s(\mathcal{D}(X_r)).$$

□

Corolario 2.16. *Dado un campo tensorial $V \in \mathcal{X}(M)$, existe una única derivación tensorial L_V tal que:*

- $L_V(f) = V(f)$ *para todo* $f \in \mathcal{F}(M)$
- $L_V(X) = [V, X]$ *para todo* $X \in \mathcal{X}(M)$.

Demostración. Como $L_V(fX) = [V, fX] = V(f)X + f[V, X] = V(f)X + fL_V(X)$, basta con aplicar el teorema anterior.

□

Definición 2.17. L_V se llama *derivada de Lie respecto de* V.

2.4. La conexión de Levi-Civita

Sean V y W campos vectoriales en una variedad semi-riemanniana M. En esta sección se pretende definir un nuevo campo vectorial sobre M, al que llamaremos $D_V(W)$, cuyo valor en cada punto mide el cambio de W en la dirección de $V_p = V(p)$. Hay una forma natural de hacer esto sobre cualquier $\mathbb{R}^n_\nu$.

Definición 2.18. Sean $u^1, \ldots, u^n$ las coordenadas naturales en $\mathbb{R}^n$. Si V y $W = \sum W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ son campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^n$, entonces el campo vectorial:

$$\nabla_V(W) = \sum V(W^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

se llama la *derivada covariante natural* de W con respecto a V.

Propiedades 2.19. *Sean X, Y, Z y W campos vectoriales diferenciables en $\mathbb{R}^n_\nu$ y sea f una función diferenciable real, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Z)$.
2. $\nabla_{X+W}(Y) = \nabla_X(Y) + \nabla_W(Z)$.
3. $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X(Y)$.
4. $\nabla_X(fY) = (X(f))Y + f\nabla_X(Y)$.

Estas propiedades se obtienen directamente de la definición anterior.

Como esta definición depende de las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^n$, la forma de extender este concepto a una variedad semi-riemanniana cualquiera no es inmediata. Para ello, lo que se hará es definir un operador D que asigna a cada pareja de campos vectoriales (V, W) un campo vectorial $D_V(W)$, que satisfaga las cuatro propiedades precedentes, las cuales agruparemos en tres.

Definición 2.20. Una *conexión* D sobre una variedad diferenciable M es una función $D : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ tal que, denotando $D_V W = D(V, W)$,

(D1) $D_V W$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal respecto a V.

(D2) $D_V W$ es $\mathbb{R}$-lineal respecto a W.

(D3) $D_V(fW) = V(f)W + fD_V W \ \forall f \in \mathcal{F}(M)$.

$D_V(W)$ se llama la *derivada covariante de* W *con respecto a* V *para la conexión* D.

Proposición 2.21. *Sean* M *una variedad semi-Riemanianna y* D *una conexión sobre* M*. Si dos campos vectoriales* $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ *cumplen que* $X_1(p) = X_2(p)$*, con* $p \in M$*, entonces*

$$D_{X_1} W(p) = D_{X_2} W(p),$$

con $W \in \mathcal{X}(M)$*.*

Demostración. Sea U un entorno de p con coordenadas $x^1, \dots, x^n$. En U podemos escribir los campos de la siguiente manera: $X_1 = \sum X_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $X_2 = \sum X_2^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Que se cumpla $X_1(p) = X_2(p)$ implica que $X_1^i(p) = X_2^i(p)$, $1 \le i \le n$.

Debido a la propiedad (D1) de las conexiones, en U podemos escribir :

$$D_{X_1} W = \sum X_1^i D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(W)$$
$$D_{X_2} W = \sum X_2^i D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(W).$$

Particularizando en p se tiene que:

$$D_{X_1}(W)(p) = \sum X_1^i(p) D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} W(p)$$
$$D_{X_2}(W)(p) = \sum X_2^i(p) D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} W(p).$$

Como $X_1^i(p) = X_2^i(p)$, se da la igualdad. □

Definición 2.22. Sean $v \in T_p(M)$ y $W \in \mathcal{X}(M)$. Se define

$$D_v W = D_V W(p),$$

donde V es cualquier campo vectorial diferenciable en M tal que $V(p) = v$.

Proposición 2.23. *Sean* $v \in T_p(M)$*,* $W_1, W_2 \in \mathcal{X}(M)$ *y* $f \in \mathcal{F}(M)$*. Entonces:*

1. $D_v(W_1 + W_2) = D_v W_1 + D_v W_2$.
2. $D_v(fW) = v(f)W(p) + f(p)D_v W$.

Demostración.

1. Utilizando (D2) y la definición anterior, si $V \in \mathcal{X}(M)$ tal que $V(p) = v$,
$$D_v(W_1 + W_2) = D_V(W_1 + W_2)(p) = D_V W_1(p) + D_V W_2(p) = D_v W_1 + D_v W_2.$$
2. Utilizando (D3):
$$\begin{aligned} D_v(fW) &= D_V(fW)(p) = (V(f)W)(p) + (fD_V W)(p) = \\ &= V(f)(p)W(p) + f(p)D_V W(p) = v(f)W(p) + f(p)D_v W. \end{aligned}$$

□

Veamos algunos ejemplos de conexiones:

Ejemplos 2.24.

1. *La conexión natural ∇ en $\mathbb{R}^n$.*
2. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sean $x^1, \ldots, x^n$ coordenadas de un abierto U de M. Entonces $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ son campos vectoriales en U tales que para todo $p \in U$, $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ es base de $T_p(M)$. Todo campo vectorial Y en U se puede escribir como $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Si definimos:*
$$D_X(Y) = \sum_{i=1}^{n} X(Y^i)\frac{\partial}{\partial x^i},$$
D es una conexión lineal en U.
3. *Si en una variedad diferenciable M de dimensión n existen campos vectoriales diferenciables $X_1, \ldots, X_n$ linealmente independientes, es decir, campos tales que $\forall p \in M$, $X_1(p), \ldots, X_n(p) \in T_p(M)$ son linealmente independientes, podremos definir en M una conexión lineal, ya que podemos escribir de forma única cada campo vectorial Y en M como $Y = \sum Y^i X_i$, y para $X \in \mathcal{X}(M)$ podemos definir:*
$$D_X(Y) = \sum_{i=1}^{n} X(Y^i)X_i,$$
resultando que D es una conexión lineal en M.

Por lo tanto, en una variedad diferenciable M puede existir más de una conexión lineal. Pero vamos a comprobar que si M es semi-riemanniana y se añade alguna condición relacionada con la métrica, la conexión es única.

A partir de aquí se supone que M es una variedad semi-riemanniana.

Proposición 2.25. *Sea M una variedad semi-riemanniana. Si $V \in \mathcal{X}(M)$, sea V^* la 1-forma en M tal que:*
$$V^*(X) = \langle V, X \rangle \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$
Entonces, la función $V \longrightarrow V^*$ es un isomorfismo $\mathcal{F}(M)$-lineal de $\mathcal{X}(M)$ en $\mathcal{X}^*(M)$.

Demostración.
Debido a las $\mathcal{F}(M)$-bilinealidad de los tensores métricos, V^* es $\mathcal{F}(M)$-lineal, y $V \longrightarrow V^*$ también lo es. Buscando la expresión de V^* en un entorno coordenado se comprueba que es diferenciable y por tanto una 1-forma.

Para ver que es isomorfismo, probaremos lo siguiente:

1. Ya sabemos que la aplicación es lineal, por lo que es inyectiva si y solo si el núcleo es cero.

   Hay que demostrar que si $\langle V(p), X(p)\rangle = 0\ \forall X \in \mathcal{X}(M)$ y $\forall p \in M$, entonces $V = 0$. Dado que para todo elemento v de $T_p(M)$ existe $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que $X(p) = v$, se da la implicación anterior porque el tensor métrico es no degenerado.

2. Dada cualquier 1-forma $\theta \in \mathcal{X}^*(M)$, existe un campo vectorial $V \in \mathcal{X}(M)$ que cumple que $\theta(X) = \langle V, X\rangle\ \forall X \in \mathcal{X}(M)$.

   Basta con encontrar V en cada entorno coordenado, ya que si se tienen V y V' en entornos coordenados U y U' con intersección no nula que cumplen los requisitos de la proposición, entonces $\langle V, X\rangle = \theta(X) = \langle V', X\rangle$ en $U \cap U'$. Por la parte (1), $V = V'$ en la intersección, por lo que el campo se definiría de forma consistente en todo M.

   Falta encontrar la expresión de V en un entorno coordenado U. Si $\theta = \sum \theta^i dx^i$ en U, definimos $V = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i \frac{\partial}{\partial x^j}$. Como (g_{ij}) y (g^{ij}) son matrices inversas, entonces:

   $$\langle V, \frac{\partial}{\partial x^k}\rangle = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\rangle = \sum_{i,j} \theta_i g^{ij} g_{jk} = \sum_i \theta_i \delta_{ik} = \theta_k = \theta(\frac{\partial}{\partial x^k}).$$

   Dado $X \in \mathcal{X}(M)$, en U podemos escribir $X = \sum X^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, y entonces:

   $$\langle V, X\rangle = \langle V, \sum_k X^k \frac{\partial}{\partial x^k}\rangle = \sum_k X^k \theta(\frac{\partial}{\partial x^k}) = \theta(\sum_k X^k \frac{\partial}{\partial x^k}) = \theta(X).$$

□

Por tanto, en la geometría semi-riemanniana podemos transformar un campo vectorial en 1-forma y viceversa mediante el isomorfismo $V \longleftrightarrow V^*$. Se dice que V y V^* son *métricamente equivalentes.*

Teorema 2.26. *En una variedad semi-riemanniana M existe una única conexión que cumple las siguientes propiedades:*

(D4) $[V, W] = D_V W - D_W V$

(D5) $X\langle V, W\rangle = \langle D_X V, W\rangle + \langle V, D_X W\rangle$

$\forall X, V, W \in \mathcal{X}(M)$.

D se llama conexión de Levi-Civita de *M, y está caracterizada por* la fórmula de Koszul*:*
$2\langle D_V W, X\rangle = V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle$.

Demostración. Dividiremos la demostración en las siguientes partes:

- Si D es una conexión en M que satisface los axiomas (D4) y (D5), para probar la fórmula de Koszul basta con aplicar (D5) a los tres primeros sumandos de la derecha de la igualdad y (D4) a los tres últimos. Cancelando los sumandos de signo contrario que resultan, se obtiene $2\langle D_V W, X\rangle$, que es la parte izquierda de la igualdad.
- Por tanto, D satisface la fórmula de Koszul, y debido a la inyectividad de la aplicación que lleva V en V^* de la proposición 2.25, $D_V W$ está definida de forma única.
- Para probar la existencia de D denotaremos por $F(V, W, X)$ al lado derecho de la fórmula de Koszul. Para $V, W \in \mathcal{X}(M)$ fijos, la aplicación $X \longrightarrow F(V, W, X)$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal, ya que el tensor métrico y el corchete de Lie son bilineales, por lo que es una 1-forma, y se puede aplicar la proposición anterior. Por tanto, existe un único campo vectorial, al que denotamos por $D_V W$, tal que $2\langle D_V W, X\rangle = F(V, W, X)$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Falta ver que para $D_V W$ se pueden deducir (D1)-(D5).
- (D1): Sean $f, g \in \mathcal{F}(M)$, y $V, U, W \in \mathcal{X}(M)$. Por las propiedades del corchete de Lie, de los campos vectoriales y del tensor métrico:

  $2\langle D_{fV+gU} W, X\rangle =$

  $= (fV + gU)\langle W, X\rangle + W\langle X, (fV + gU)\rangle - X\langle (fV + gU), W\rangle - \langle (fV + gU), [W, X]\rangle + \langle W, [X, (fV + gU)]\rangle + \langle X, [(fV + gU), W]\rangle =$

  $= fV\langle W, X\rangle + (Wf)\langle X, V\rangle + fW\langle X, V\rangle - fX\langle V, W\rangle - (Xf)\langle V, W\rangle - f\langle V, [W, X]\rangle + (Xf)\langle W, V\rangle - f\langle W, [V, X]\rangle - (Wf)\langle X, V\rangle + f\langle X, [V, W]\rangle + gU\langle W, X\rangle + (Wg)\langle X, U\rangle + gW\langle X, U\rangle - gX\langle U, W\rangle - (Xg)\langle U, W\rangle - g\langle U, [W, X]\rangle + (Xg)\langle W, U\rangle - g\langle W, [U, X]\rangle - (Wg)\langle X, U\rangle + g\langle X, [U, W]\rangle =$

  $= fV\langle W, X\rangle + fW\langle X, V\rangle - fX\langle V, W\rangle - f\langle V, [W, X]\rangle - f\langle W, [V, X]\rangle + f\langle X, [V, W]\rangle + gU\langle W, X\rangle + gW\langle X, U\rangle - gX\langle U, W\rangle - g\langle U, [W, X]\rangle - g\langle W, [U, X]\rangle + g\langle X, [U, W]\rangle =$

  $= 2f\langle D_V W, X\rangle + 2g\langle D_U W, X\rangle = 2\langle fD_V W + gD_U W, X\rangle$

  $\forall X \in \mathcal{X}(M)$. Por la proposición 2.25, $\langle D_{fV+gU} W, X\rangle = \langle fD_V W + gD_U W, X\rangle$.
- (D2): Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y $V, U, W \in \mathcal{X}(M)$. Como tanto el corchete de Lie como el tensor métrico son bilineales, se cumple que, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$:

  $2\langle D_V(aW + bU), X\rangle = V\langle (aW + bU), X\rangle + (aW + bU)\langle X, V\rangle - X\langle V, (aW + bU)\rangle - \langle V, [(aW + bU), X]\rangle + \langle (aW + bU), [X, V]\rangle + \langle X, [V, (aW + bU)]\rangle =$
  $= 2\langle aD_V W, X\rangle + 2\langle bD_V U, X\rangle = 2\langle aD_V W + bD_V U, X\rangle$.

  Al igual que antes, se deduce (D2).

- (D3): Para campos vectoriales cualesquiera W, X y $f \in \mathcal{F}(M)$, como vimos en 1.44, se cumple:

$$[fW, X] = -X(f)W + f[W, X].$$

Por tanto, si $V \in \mathcal{X}(M)$, entonces:

$2\langle D_V(fW), X\rangle = V\langle fW, X\rangle + fW\langle X, V\rangle - X\langle V, fW\rangle - \langle V, [fW, X]\rangle + \langle fW, [X, V]\rangle + \langle X, [V, fW]\rangle = Vf\langle W, X\rangle + Vf\langle X, W\rangle + Xf\langle V, W\rangle - Xf\langle V, W\rangle + fF(V, W, X) = 2\langle (Vf)W + fD_V W, X\rangle$.

Luego se cumple la igualdad requerida.

- (D4): Operando de la misma manera:

$2\langle D_V W - D_W V, X\rangle = F(V, W, X) - F(W, V, X) = \langle X, [V, W]\rangle - \langle X, [W, V]\rangle = 2\langle [V, W], X\rangle$.

Por lo que se cumple (D4).

- (D5): De forma similar se tiene que $2\langle D_X V, W\rangle + 2\langle V, D_X W\rangle = 2X\langle V, W\rangle$, y por lo tanto se cumple (D5).

$\square$

Definición 2.27. Sean $x^1, \ldots, x^n$ coordenadas en un entorno U de una variedad semi-riemanianna M, y sea D la conexión de Levi-Civita de M. Los *símbolos de Christoffel* o *coeficientes de la conexión de Levi-Civita* para este sistema coordenado son las funciones reales Γ_{ij}^k en U tales que:

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

es decir, $\Gamma_{ij}^k = D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)(x^k)$.

Nota 2.28. *Como $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, debido a (D4) se tiene que $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) = D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\frac{\partial}{\partial x^i})$, por lo que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Se dice por ello que la conexión es simétrica.*

Proposición 2.29. *Para un sistema coordenado $x^1, \ldots, x^n$ en U:*

1. $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\sum_j W^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_k \left(\frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k}$.

2. $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right)$.

Demostración.

1. Utilizando que $D_V W$ es $\mathbb{R}$-lineal respecto a la componente W, y aplicando (D3):
   $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\sum_j W^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_j D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(W^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_j (\frac{\partial}{\partial x^i} W^j) \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_j W^j D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) =$
   $= \sum_k \frac{\partial}{\partial x^i}(W^k) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_j W^j \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j\right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$

2. Para demostrarlo, aplicamos la fórmula de Koszul a los campos vectoriales $V = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $W = \frac{\partial}{\partial x^j}$ y $X = \frac{\partial}{\partial x^m}$. Como habíamos definido $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$ y los corchetes son nulos, se tiene que:

   $$\langle 2D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^m} \rangle = \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jm}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{im}) - \frac{\partial}{\partial x^m}(g_{ij}). \tag{2.6}$$

   Por definición de los símbolos de Christoffel:

   $$2\langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^m} \rangle = 2\langle \sum_a \Gamma_{ij}^a \partial_a, \frac{\partial}{\partial x^m} \rangle = 2 \sum_a \Gamma_{ij}^a g_{am}.$$

   En forma matricial, se tiene que para cada par (i, j) :

   $$(\Gamma_{ij}^1, \dots, \Gamma_{ij}^n) \cdot \begin{pmatrix} g_{1m} \\ \vdots \\ g_{nm} \end{pmatrix} = \langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^m} \rangle.$$

   Es decir,

   $$(\Gamma_{ij}^1, \dots, \Gamma_{ij}^n) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = (\langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^1} \rangle, \dots, \langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^n} \rangle).$$

   Multiplicando a la derecha por la inversa de la matriz (g_{ij}) se tiene que:

   $$(\Gamma_{ij}^1, \dots, \Gamma_{ij}^n) = (\langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^1} \rangle, \dots, \langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^n} \rangle) \cdot \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix},$$

   es decir,

   $$\Gamma_{ij}^k = \sum_m \langle D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^m} \rangle g^{mk}.$$

   Utilizando la igualdad 2.6 se obtiene el resultado buscado.

□

Como sabíamos que $D_V W$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal en la componente V, la parte (1) de la proposición anterior nos da un método para calcular $D_V W$ en cada entorno coordenado. La parte (2) de la proposición determina un modo de encontrar los símbolos de Christoffel a partir del tensor métrico.

Proposición 2.30. *La conexión natural de $\mathbb{R}^n$ dada en la definición 2.18 es la conexión de Levi-Civita para $\mathbb{R}^n_\nu$ para todo $\nu \in \{1, \ldots, n\}$. Además, $\Gamma^k_{ij} = 0$ para todo $1 \le i, j \le n$.*

Demostración. Para ver que es la conexión de Levi-Civita falta probar que se cumplen (D4) y (D5) de la porposición 2.26:

(D4) Por una parte, $\nabla_V W - \nabla_W V = \sum V(W^i)\frac{\partial}{\partial x^i} - \sum W(V^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$.
Por otra, como por definición $[V, W](x^i) = V(W(x^i)) - W(V(x^i)) = V(W^i) - W(V^i)$, entonces $[V, W] = \sum(V(W^i) - W(V^i))\frac{\partial}{\partial x^i}$, luego ambas coinciden.

(D5) Recordemos que en $\mathbb{R}^n_\nu$, $\langle V, W\rangle = \sum \varepsilon_i V^i W^i$, donde $\varepsilon_j = -1$ si $1 \le j \le \nu$ y $\varepsilon_j = 1$ si $\nu + 1 \le j \le n$. Se tiene como consecuencia lo siguiente:

$$X\langle V, W\rangle = \sum \varepsilon_i X(V^i)W^i + \sum \varepsilon_i V^i X(W^i) = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle.$$

La condición $\Gamma^k_{ij} = 0$ se deduce de la segunda parte de la proposición 2.29, y de que los g_{ij} son constantes ($g_{ij} = \delta^j_i \varepsilon_j$). □

Para cada $X \in \mathcal{X}(M)$, la derivada covariante D_X actúa entre $\mathcal{X}(M)$ y $\mathcal{X}(M)$. La condición (D3) de las conexiones permite aplicar la proposición 2.15, haciendo que tenga sentido la siguiente definición:

Definición 2.31. Sea M una variedad semi-riemanniana, y sea V un campo vectorial en M. Llamaremos *derivada covariante* o *derivada covariante Levi-Civita con respecto a V* a la única derivación tensorial, D_V, en M tal que:

1. $D_V f = V(f)$ para todo $f \in \mathcal{F}(M)$.
2. La restricción de D_V a los campos tensoriales es la conexión de Levi-Civita.

Definición 2.32. Si M es una variedad semi-riemanniana y A es un campo tensorial de tipo (r, s) en M, llamaremos *diferencial covariante de A* al tensor DA de tipo $(r, s + 1)$ definido por:

$$(DA)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s, V) = (D_V A)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)$$

para todo $V, X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{X}(M)$ y $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathcal{X}^*(M)$.

Observación 2.33.

1. La definición anterior tiene sentido, ya que $D_V(A)$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal en $V \in \mathcal{X}(M)$.

2. En el caso de los tensores de tipo $(0,0)$, es decir, el caso de las funciones $f \in \mathcal{F}(M)$, su diferencial covariante es la propia diferencial de la función ya que, para todo $V \in \mathcal{X}(M)$,

$$Df(V) = D_V f = V(f) = df(V).$$

Definición 2.34. Se dice que un *campo tensorial* A es *paralelo* si su diferencial covariante es nula, es decir, si $D_V A = 0$ para todo $V \in \mathcal{X}(M)$.

Observación 2.35. Por tanto, un *campo vectorial* V en M es *paralelo* si sus derivadas covariantes para la conexión de Levi-Civita $D_X V$ son cero para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Como la conexión de Levi-Civita es $\mathcal{F}(M)$-lineal respecto a la primera componente, un campo vectorial V será paralelo si y solo si en cada entorno coordenado U, $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} V = 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

En particular, los campos vectoriales coordenados en $\mathbb{R}^n_\nu$ son paralelos si y solo si los símbolos de Christoffel se anulan. Por tanto, los símbolos de Christoffel se pueden entender como una medida de lo no paralelos que son los campos vectoriales coordenados correspondientes.

Proposición 2.36. *El tensor métrico g es paralelo.*

Demostración. Que g sea paralelo equivale a que $\forall X \in \mathcal{X}(M)$, $D_X(g) = 0$. Como D_X es una derivación, $D_X(g)$ es un campo tensorial de tipo $(0,2)$. Utilizando la interpretación de los campos tensoriales de la observación 1.41, podemos afirmar que este será nulo si para cada par de campos vectoriales $Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $D_X(g)(Y,Z) = 0$.

D5 se cumple, por lo que:

$$X(\langle Y, Z\rangle) = \langle D_X(Y), Z\rangle + \langle Y, D_X(Z)\rangle,$$

es decir,

$$Xg(Y,Z) = g(D_X(Y), Z) + g(Y, D_X(Z)).$$

Debido a la segunda parte del corolario 2.13, aplicando D5, y teniendo en cuenta que $g(Y,Z) \in \mathcal{F}(M)$:

$$\begin{aligned} D_X(g)(Y,Z) &= D_X(g(Y,Z)) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z) = \\ &= X(g(Y,Z)) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z) = 0. \end{aligned}$$

□

2.5. Transporte paralelo

En esta sección M será una variedad semi-Riemanniana y $\alpha : I \longrightarrow M$ una curva diferenciable.

Definición 2.37. Un *campo vectorial* X *a lo largo de* $\alpha : I \longrightarrow M$ es una aplicación $X : I \longrightarrow T(M)$ tal que $\pi \circ X = \alpha$, donde π es la proyección canónica $TM \longrightarrow M$.

Es decir, se debe cumplir $X(t) \in T_{\alpha(t)}(M)$ para todo $t \in I$.

Denotaremos por $\mathcal{X}(\alpha)$ al conjunto de los campos vectoriales diferenciables a lo largo de α. Se tiene que $\mathcal{X}(\alpha)$ es un $\mathcal{F}(I)$-módulo.

Ejemplo 2.38. *El campo,* $\alpha' : I \longrightarrow T(M)$ *que lleva* t *en* $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}(M)$ *se puede entender como un campo en* $\mathcal{X}(\alpha)$*.*

Definición 2.39. Dados un campo vectorial $V \in \mathcal{X}(M)$ y una conexión D, se definen los campos V_α y $D_{\alpha'}V$ pertenecientes a $\in \mathcal{X}(\alpha)$ por $V_\alpha(t) = V(\alpha(t))$ y $D_{\alpha'}V(t) = D_{\alpha'(t)}V$.

Lema 2.40. *Sean* U *un entorno de* M *con coordenadas* $x^1, \dots, x^n$ *y* V *un campo vectorial diferenciable en* M *tal que en* U, $V = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$*. Entonces, en* $\alpha^{-1}(U)$ *se tiene:*

$$D_{\alpha'}V = \sum \frac{d(V^i \circ \alpha)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_\alpha + \sum (V^i \circ \alpha) D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^i}).$$

Demostración. Si fijo $t \in \alpha^{-1}(U)$, por la proposición 2.23:

$$\begin{aligned} D_{\alpha'}V(t) = D_{\alpha'(t)}V = \sum_i \alpha'(t)(V^i) \frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha(t)) + \sum_i V^i(\alpha(t)) D_{\alpha'(t)}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \\ = \sum_i \frac{d(V^i \circ \alpha)}{dt}(t) \frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha(t)) + \sum_i V^i(\alpha(t)) D_{\alpha'(t)}(\frac{\partial}{\partial x^i}). \end{aligned}$$

□

Si M es una variedad semi-riemanniana, podremos definir un campo vectorial Z' que mida la variación del campo vectorial $Z \in \mathcal{X}(\alpha)$ a lo largo de la curva α.

Proposición 2.41. *Sea* $\alpha : I \longrightarrow M$ *una curva en una variedad semi-riemanniana* M*. Hay una única aplicación entre* $\mathcal{X}(\alpha)$ *y* $\mathcal{X}(\alpha)$ *tal que, denotando por* Z' *o* $\frac{DZ}{dt}$ *a la imagen de* Z*, se tiene que:*

1. $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$,
2. $(hZ)' = (\frac{dh}{dt})Z + hZ'$,

3. $(V_\alpha)' = D_{\alpha'}V$,

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $Z, Z_1, Z_2 \in \mathcal{X}(\alpha)$, $V \in \mathcal{X}(M)$ *y* $h \in \mathcal{F}(I)$. *Además, se cumple*

4. $(\frac{d}{dt})\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle$.

Esta función se llama derivada covariante inducida sobre α.

Demostración. Empezamos probando la unicidad.

Supongamos que existe una aplicación que satisface las tres primeras propiedades. Podemos suponer que la curva α está en el dominio de un sistema coordenado $x^1, .., x^n$ de M. Como $Z \in \mathcal{X}(\alpha)$, se tiene que:

$$Z = \sum Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_\alpha = \sum Z(x^i \circ \alpha)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_\alpha.$$

Por lo tanto,

$$Z(t) = \sum Z^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\alpha(t)}.$$

Y aplicando a $Z = \sum Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha$ las propiedades (1) y (2):

$$Z' = \sum \frac{dZ^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_\alpha + \sum Z^i(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_\alpha)'.$$

Debido a (3), se tiene que $(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha) = D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^i})$, luego:

$$Z' = \sum \frac{dZ^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_\alpha + \sum Z^i D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^i}). \tag{2.7}$$

En consecuencia, Z' está totalmente determinada por la conexión Levi-Civita D.

Veamos ahora la existencia. Como M se puede recubrir por entornos coordenados, podemos recubrir I a su vez por subintervalos tales que sus imágenes por α estén contenidos en alguno de estos entornos de M. En cada subintervalo J tal que $\alpha(J)$ esté en un entorno de M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$, se define Z' con la expresión 2.7. Debido a la unicidad que ya hemos probado, estas expresiones van a coincidir en las intersecciones de los intervalos que recubren I, por lo que las definiciones locales de Z' se pueden pegar para definir un campo vectorial en $\mathcal{X}(\alpha)$.

Falta comprobar que se cumplen las cuatro propiedades de la proposición. Basta con hacerlo localmente.

Las propiedades (1) y (2) se deducen de forma sencilla. Para probar la propiedad (3), se usa la proposición anterior y la fórmula para $(V_\alpha)'$ teniendo en cuenta que $V_\alpha = \sum(V^i \circ \alpha)\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Probamos ahora la propiedad (4). Si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{X}(\alpha)$, queremos ver que

$$\frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2\rangle = \langle Z_1', Z_2\rangle + \langle Z_1, Z_2'\rangle.$$

Operando en las expresiones del lado derecho de la igualdad:

$$\langle Z_1', Z_2\rangle = \sum_{i,j} \frac{dZ_1^i}{dt} Z_2^j \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle + \sum_{i,j} Z_1^i Z_2^j \langle D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^i}), \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle.$$

$$\langle Z_1, Z_2'\rangle = \sum_{i,j} Z_1^i \frac{dZ_2^j}{dt} \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle + \sum_{i,j} Z_1^i Z_2^j \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^j})\rangle.$$

Operamos ahora en la expresión del lado izquierdo de la igualdad:

$$\frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2\rangle = \frac{d}{dt}\sum_{i,j} Z_1^i Z_2^j \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{dZ_1^i}{dt} Z_2^j \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle + \sum_{i,j} Z_1^i \frac{dZ_2^j}{dt} \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle + \sum_{i,j} Z_1^i Z_2^j \frac{d}{dt}\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle.$$

Por tanto, se dará la igualdad si se cumple:

$$\frac{d}{dt}\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle = \langle D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^i}), \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^j})\rangle.$$

Al ser D la derivada covariante Levi-Civita en α', si $f \in \mathcal{X}(M)$, se tiene que:

$$D_{\alpha'}(f) = \alpha'(f) = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt},$$

por lo que:

$$D_{\alpha'}(\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle) = \alpha'(\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle) = \frac{d}{dt}(\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle \circ \alpha) = \frac{d}{dt}(\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle).$$

Además, como consecuencia de la propiedad (D5):

$$\alpha'(\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle) = \langle D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^i}), \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_\alpha\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha, D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^j})\rangle,$$

por lo que se cumple la igualdad y queda probada la propiedad (4).

□

Definición 2.42. Sea $Z \in \mathcal{X}(\alpha)$. Diremos que Z es *paralelo a lo largo de* α si $Z' = 0$.

Proposición 2.43. *Sean $Z \in \mathcal{X}(\alpha)$, U un entorno de M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Si $Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha$ en $\alpha^{-1}(U)$ en $\alpha^{-1}(U)$, se tiene:*

$$Z' = \sum_k \left[\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j}(\Gamma_{ij}^k \circ \alpha)\frac{d(x^i\circ\alpha)}{dt}Z^j\right]\frac{\partial}{\partial x^k}\big|_\alpha, \tag{2.8}$$

en $\alpha^{-1}(U)$.

Demostración. Por la definición de Z' en un entorno coordenado dada en la ecuación 2.7:

$$Z' = \sum_i \frac{dZ^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_\alpha + \sum_i Z^i D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^i})'.$$

Sea $t \in \alpha^{-1}(U)$. Supongamos que $W = \sum_j W^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathcal{X}(M)$ tal que $W(\alpha(t)) = \alpha'(t)$. Por tanto, se cumple que $W^j(\alpha(t)) = \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt}$. Operamos utilizando (D1) y las expresiones de la proposición 2.29:

$$D_{\alpha'}(\frac{\partial}{\partial x^i})(t) = D_{\alpha'(t)}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = D_W(\frac{\partial}{\partial x^i})(\alpha(t)) = (\sum_j W^j D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}(\frac{\partial}{\partial x^i}))(\alpha(t)) =$$

$$= (\sum_j W^j \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k})(\alpha(t)) = \sum_k (\sum_j \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt}(t)(\Gamma^k_{ij} \circ \alpha)(t)) \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\alpha(t)}.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la expresión de $(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_\alpha)'$ obtenemos la ecuación buscada. □

Con la fórmula anterior se ve que la condición de que Z sea paralelo en un entorno coordenado equivale a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que aplicando el teorema fundamental de existencia y unicidad de estos sistemas se tiene lo siguiente:

Proposición 2.44. *Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ una curva sobre M, $a \in I$ y $z \in T_{\alpha(a)}(M)$. Entonces, existe un único campo vectorial paralelo Z a lo largo de α tal que $Z(a) = z$.*

Definición 2.45. Si $b \in I$, llamaremos *transporte paralelo a lo largo de α de $p = \alpha(a)$ a $q = \alpha(b)$* a la función $P = P^b_a(\alpha) : T_p(M) \longrightarrow T_q(M)$ que lleva $z \in T_p(M)$ en $Z(b) \in T_q(M)$, siendo Z el campo de la proposición anterior.

Proposición 2.46. *El transporte paralelo es una isometría lineal.*

Demostración. Veamos primero que es lineal. Sean $v, w \in T_p(M)$, y sean V y W los campos vectoriales paralelos correspondientes, como en la proposición 2.44. Como $V + W$ es también paralelo por la primera propiedad de la proposición 2.41, es el campo paralelo correspondiente a $v + w \in T_p(M)$, y entonces $P(v + w) = (V + W)(b) = V(b) + W(b) = P(v) + P(w)$. Además, si $c \in \mathbb{R}$, cV será el campo vectorial paralelo correspondiente a $cv \in T_p(M)$, por lo que $P(cv) = (cV)(b) = cV(b) = cP(v)$, luego P es lineal.

Veamos que es isomorfismo. Si $P(v) = 0$, entonces por la unicidad de la proposición 2.44, V solo puede ser el campo vectorial s lo largo de α idénticamente nulo. Por tanto, $v = V(a) = 0$. Luego P es inyectiva, y como los espacios tangentes de M tienen la misma dimensión, P es isomorfismo.

Por último, veamos que se conserva la métrica tensorial. Como V y W son paralelos:

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle V', W\rangle + \langle V, W'\rangle = 0,$$

por lo que $\langle V, W\rangle$ es constante. Entonces:

$$\langle P(v), P(w)\rangle = \langle V(b), W(b)\rangle = \langle V(a), W(a)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

$\square$

Definición 2.47. Llamaremos *aceleración de la curva* α, y la denotaremos por α'', a la derivada covariante inducida del campo vectorial α'.

Proposición 2.48. *Sean U un entorno de M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ y J un subintervalo de I tal que $\alpha(J) \subset U$. En J, podemos escribir:*

$$\alpha'' = \sum_k \left[\frac{d^2(x^k \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \alpha) \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt} \right] \frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_\alpha. \tag{2.9}$$

Demostración. Basta con aplicar la ecuación 2.8 a $\alpha' = \sum \frac{d(x^k \circ \alpha)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \in \mathcal{X}(\alpha)$.

$\square$

2.6. Curvas geodésicas

En esta sección M será una variedad semi-riemanniana. Trataremos de generalizar el concepto de línea recta de los espacios Euclídeos para variedades semi-riemannianas .

Definición 2.49. Una *geodésica* en una variedad semi-riemanniana M es una curva $\gamma : I \longrightarrow M$ tal que el campo vectorial γ' es paralelo.

Que γ' sea paralelo equivale a que la aceleración de la curva sea cero, es decir, γ es geodésica si y solo si $\gamma'' = 0$.

Observación 2.50. Si $\gamma : I \longrightarrow M$ es geodésica de M, entonces $\| \gamma' \|$ es necesariamente constante, ya que:

$$\frac{d(\| \gamma' \|^2)}{dt} = \frac{d(g(\gamma', \gamma'))}{dt} = g(\gamma'', \gamma') + g(\gamma', \gamma'') = 0.$$

Debido a la fórmula 2.8 del apartado anterior se obtiene lo siguiente:

Corolario 2.51. *Sean $x^1, \dots, x^n$ coordenadas de un entorno U de M. Una curva γ sobre U es una geodésica de M si y solo si sus funciones coordenadas $x^k \circ \gamma$ satisfacen las siguientes ecuaciones:*

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0 \quad 1 \leq k \leq n.$$

Usualmente escribiremos x^i en vez de $\gamma \circ x^i$, y Γ_{ij}^k en vez de $\Gamma_{ij}^k \circ \gamma$, para simplificar la notación. Las ecuaciones anteriores se escribirían entonces como sigue:

$$\frac{d^2(x^k)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad 1 \leq k \leq n.$$

Proposición 2.52. *Sea $\gamma : I \longrightarrow M$ una geodésica no constante. Una reparametrización $\gamma \circ h : J \longrightarrow M$ es una geodésica si y solo si h es de la forma $h(s) = as + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.*

Demostración.

$$\gamma \circ h \text{ es geodésica} \Leftrightarrow (\gamma \circ h)'' = 0.$$

Por el corolario 2.51, $\gamma \circ h$ es geodésica si y solo si $\forall k$, $1 \leq k \leq n$:

$$0 = \frac{d^2(x^k \circ \gamma \circ h)}{dt^2} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma \circ h) \frac{d(x^i \circ \gamma \circ h)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma \circ h)}{dt} =$$
$$= \left(\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} \right) \circ h \cdot (h')^2 + \frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt} \circ h \cdot h''.$$

Como γ es geodésica, por el corolario 2.51 esto es equivalente a decir que $\forall k$, $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt} \circ h \cdot h'' = 0.$$

Como γ no es constante y $\parallel \gamma' \parallel$ lo es, se tiene que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Por tanto, para todo $s \in J$ existe un k tal que $\frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt} \circ h(s) \neq 0$, por lo que la condición necesaria y suficiente para que $\gamma \circ h$ sea geodésica es que $h''(s) = 0$, es decir, que h sea de la forma $h(s) = as + b$.

□

Haciendo uso del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias se obtiene el siguiente resultado local.

Lema 2.53. *Si $v \in T_p(M)$, entonces existe un intervalo I en torno al $0 \in \mathbb{R}$ y una única geodésica $\gamma : I \longrightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.*

Decimos que γ es la geodésica que empieza en p con velocidad inicial v.

Lema 2.54. *Sean $\alpha : I \longrightarrow M$ y $\beta : I \longrightarrow M$ geodésicas. Si existe $a \in I$ tal que $\alpha(a) = \beta(a)$ y $\alpha'(a) = \beta'(a)$, entonces $\alpha = \beta$.*

Demostración. Vamos a razonar por reducción al absurdo. Para ello, suponemos que lo anterior es falso, por lo que existe un $t_0 \in I$ tal que $\alpha(t_0) \neq \beta(t_0)$. Suponemos que $t_0 > a$, por lo que el conjunto $\{t \in I : t > a \text{ y } \alpha(t) \neq \beta(t)\}$ tiene una cota inferior b con $b \geq a$. Si t_0 fuera menor se razonaría de forma análoga.

Veamos que $\alpha'(b) = \beta'(b)$. Si $a = b$, esto se cumple directamente. Si $b > a$, entonces sabemos que α y β conciden en el intervalo (a, b). Las funciones $t \longrightarrow \alpha'(t)$ y $t \longrightarrow \beta'(t)$ que van de (a, b) al fibrado tangente $T(M)$ son continuas, por lo que:

$$\alpha'(b) = \lim_{t \to b} \alpha'(t) = \lim_{t \to b} \beta'(t) = \beta'(b).$$

Además, como sabemos que $t \longrightarrow \alpha(t + b)$ y $t \longrightarrow \beta(t + b)$ son también geodésicas por la proposición 2.52, podemos aplicar el lema anterior, por lo cual $\alpha = \beta$ en un intervalo en torno a b. Pero esto contradice la definición de b, con lo que se llega a un absurdo.

□

Proposición 2.55. *Dado un vector tangente $v \in T_p(M)$, existe una única geodésica en M, γ_v, tal que:*

1. *Empieza en p y su velocidad inicial es v, es decir, $\gamma_v'(0) = v$.*
2. *Su dominio, I_γ, es el mayor posible. Es decir, si $\alpha : J \longrightarrow M$ es una geodésica con velocidad inicial v, entonces $J \subset I$ y $\alpha = \gamma_v|_J$.*

Demostración. Sabemos que por el lema 2.53 que existen geodésicas $\gamma : I_\gamma \longrightarrow M$ con velocidad inicial v. Denotemos por $\mathcal{G}$ al conjunto de estas. Como las velocidades iniciales de todas coinciden, por el lema 2.54, si dos geodésicas $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$, entonces coinciden en $I_\alpha \cap I_\beta$. Por tanto, la colección de $\mathcal{G}$ define de forma consistente una curva γ_v en el intervalo $I = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{G}} I_\alpha$. Es evidente que γ tiene las propiedades requeridas.

□

Definición 2.56. La geodésica γ_v recibe el nombre de *geodésica maximal* o *inextendible.* Además, una variedad semi-riemanniana para la cual cada geodésica maximal está definida en todo $\mathbb{R}$ se dice que es *completa.*

Ejemplo 2.57. *En la proposición 2.30 se vio que los símbolos de Christoffel de las coordenadas naturales de* $\mathbb{R}^n_\nu$ *son nulos, por lo que las ecuaciones geodésicas para ese sistema de coordenadas son:*

$$\frac{d^2(u^k \circ \gamma)}{dt^2} = 0 \quad 1 \leq k \leq n.$$

Por tanto, $u^k(\gamma(t)) = p^k + tv^k$*, donde* p^k *y* v^k *son constantes arbitrarias. En notación vectorial esto es equivalente a escribir* $\gamma(t) = p + tv$*, con* $p, v \in \mathbb{R}^n$*. Como consecuencia, las geodésicas de* $\mathbb{R}^n_\nu$ *son líneas rectas y la variedad* $\mathbb{R}^n_\nu$ *es completa.*

Obsérvese que γ *es la curva* $\alpha_{p,v}$ *definida en la sección 1.3.3, y por tanto* $\gamma'(0) = \phi_p(v)$*, siento* $\phi_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p(\mathbb{R}^n)$ *al isomorfismo allí definido.*

Es conocido que si un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden viene dado por funciones diferenciables, entonces sus soluciones son diferenciables no solamente en el parámetro, si no simultáneamente en el parámetro y en los valores iniciales, incluidos los valores iniciales de las primeras derivadas. De este resultado se deduce lo siguiente:

Proposición 2.58. *Sea* v *un vector tangente a* M *en un punto* $p \in M$*, es decir,* $v \in T(M)$*. Entonces existe un entorno* N *de* v *en* $T(M)$ *y un intervalo* I *en torno al* $0 \in \mathbb{R}$ *tales que la aplicación* $(w, s) \longrightarrow \gamma_w(s)$ *es una función diferenciable bien definida de* $N \times I$ *en* M*.*

Corolario 2.59. *Para todo* $o \in M$ *existe un entorno* $\widetilde{U}$ *de* 0 *en* $T_o(M)$ *tal que* $\forall v \in \widetilde{U}$*,* $\gamma_v(1)$ *está definido.*

Demostración. Definimos N e I como en la proposición anterior. Sean $\widetilde{N}$ un entorno de 0 en $T_o(M)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\widetilde{N} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset N \times I$. La aplicación $\phi : T_o(M) \longrightarrow T_o(M)$ dada por $\phi(v) = \frac{2v}{\varepsilon}$ es homeomorfismo. Sea $\widetilde{U} = \phi^{-1}(\widetilde{N})$. Este es un abierto de $T_o(M)$ con $0 \in \widetilde{U}$.

Si $v \in \widetilde{U}$, entonces $\frac{2v}{\varepsilon} \in \widetilde{N}$, por lo que $\gamma_{\frac{2v}{\varepsilon}}(t)$ está definida para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Sea $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma_{\frac{2v}{\varepsilon}}(\frac{\varepsilon}{2}s)$. Entonces, $\widetilde{\gamma}$ es geogésica y $\widetilde{\gamma}(1) = \gamma_{\frac{2v}{\varepsilon}}(\frac{\varepsilon}{2})$ está bien definida. Además, $\widetilde{\gamma}'(s) = \frac{\varepsilon}{2}\gamma'_{\frac{2v}{\varepsilon}}(\frac{\varepsilon}{2}s)$, luego $\widetilde{\gamma}'(0) = \frac{2v}{\varepsilon} = v$ y $\widetilde{\gamma} = \gamma_v$. En consecuencia, $\forall v \in \widetilde{U}$, γ_v está definida en 1. □

2.7. Aplicación exponencial

En esta sección M va a ser una variedad semi-riemanniana. Veremos cómo agrupar las geodésicas que comienzan en cada punto o de M utilizando una única aplicación, y las características de esta.

Definición 2.60. Si $o \in M$, definimos $\mathcal{D}_o$ como el conjunto de vectores $v \in T_o(M)$ tales que la geodésica inextendible γ_v está definida al menos en $[0,1]$. La *aplicación exponencial* es la aplicación

$$exp_o : \mathcal{D}_o \longrightarrow M$$

tal que $exp_o(v) = \gamma_v(1)\ \forall v \in \mathcal{D}_o$.

Nota 2.61.

1. *Por la definición de $\mathcal{D}_o$, este es el mayor subconjunto de $T_o(M)$ en el cual puede definirse exp_o.*
2. *Si M es completa, entonces $\mathcal{D}_o = T_o(M)\ \forall o \in M$.*

Proposición 2.62. *La aplicación exponencial exp_o lleva rectas que pasan por el origen de $T_o(M)$ en geodésicas de M que pasan por o.*

Demostración. Fijemos $v \in T_o(M)$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces la geodésica $s \longrightarrow \gamma_v(ts)$ tiene como vector tangente inicial $t\gamma_v(0) = tv$. En consecuencia, $\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts)$ para todo s y t tal que uno de los dos miembros, y por tanto los dos, estén bien definidos.

En particular, si $tv \in \mathcal{D}_o$, se tiene que $exp_o(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$, por lo que rectas a través del origen son transformadas en geodésicas en M que pasan por o, ya que $\gamma_v(0) = o$.

□

Proposición 2.63. *Para cada punto $o \in M$ existe un entorno abierto $\widetilde{U}$ de 0 en $T_o(M)$ en el cual la aplicación exponencial exp_o es un difeomorfismo sobre un entorno abierto U de o en M.*

Demostración. La aplicación exp_o lleva rectas que pasan por el origen de $T_o(M)$ en geodésicas de M. Además, debido al corolario 2.59, exp_o está bien definida y es diferenciable en un entorno abierto del 0 en $T_o(M)$.

En la sección 1.3.3 habíamos construido el isomorfismo $\phi_o : T_o(M) \longrightarrow T_0(T_o(M))$ definido por $\phi_o(v_0) = v$, donde $v = \rho'(0)$ siendo $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow T_o(M)$ la curva $\rho(t) = tv_0$.

Como $exp_o \circ \rho(t) = exp_o(tv_0) = \gamma_{v_0}(t)$ para todo t, entonces $exp_o \circ \rho = \gamma v_0$, por lo que:

$$d(exp_o)\big|_0(v) = d(exp_o)\big|_0(\rho'(0)) = (exp_o \circ \rho)'(0)) = \gamma'_{v_0}(0) = v_0 = \phi_o^{-1}(v).$$

Por tanto, $d(exp_o)\big|_0 = \phi_o^{-1} : T_0(T_o(M)) \longrightarrow T_o(M)$, que es isomorfismo. El teorema de la función Inversa permite afirmar que exp_o es un difeomorfismo local, por lo que queda probada la proposición.

□

Definición 2.64. Se dice que un subconjunto S de un espacio vectorial es *estrellado* en torno al 0 si se tiene que $tv \in S$ para todo $t \in [0,1]$ y $v \in S$.

Definición 2.65. Sea U un entorno abierto del $o \in M$. Se dice que U es un entorno normal de o si existe un entorno abierto $\widetilde{U}$ de $T_o(M)$ estrellado en torno al 0 tal que $dexp\big|_o : \widetilde{U} \longrightarrow U$ es difeomorfismo.

Proposición 2.66. *Si U es un entorno normal de $o \in M$, entonces para cada $p \in M$ existe una única geodésica $\sigma : [0,1] \longrightarrow U$ tal que $\sigma(0) = o$ y $\sigma(1) = p$. Además, $\sigma'(0) = exp_o^{-1}(p) \in U$.*

Demostración. Empecemos probando la existencia. Por definición $\widetilde{U}$ es un entorno estrellado del 0 en $T_o(M)$ tal que $exp_o\big|_{\widetilde{U}}$ es difeomorfismo sobre U. Como p está en U, $exp_o^{-1}(p)$ está bien definido. Llamamos $v_0 = exp_o^{-1}(p) \in \widetilde{U}$. Como $\widetilde{U}$ es estrellado, el segmento de recta $\rho(t) = tv_o$, con $0 \leq t \leq 1$, está en $\widetilde{U}$. Por tanto, la geodésica $\sigma = exp_o \circ \rho$ está definida en el intervalo $[0,1]$ y tiene llegada en U. Además, $\sigma(0) = exp_o \circ \rho(0) = exp_o(0) = p$ y $\sigma(1) = exp_o \circ \rho(1) = exp_o(v_0) = p$.

Veamos ahora que se cumple la condición de la proposición. En el origen de $T_o(M)$, $d(exp_o)\big|_0 = \phi_o^{-1}$, conservando las notaciones de la demostración de la proposición 2.63. Como $\rho'(0) = v$ y $\sigma = exp_o \circ \rho$, entonces:

$$\sigma'(0) = d(exp_o)\big|_0(\rho'(0)) = d(exp_o)\big|_0(v) = v_0 = exp_o^{-1}(p).$$

Probamos por último la unicidad. Supongamos que $\tau : [0,1] \longrightarrow U$ es una geodésica cualquiera que va de o a p en U. Sea $\omega = \tau'(0)$. Entonces las geodésicas $t \longrightarrow exp_o(t\omega)$ y τ tienen el mismo vector tangente inicial, ω, y por tanto, son iguales. Utilizando la igualdad que acabamos de probar, $exp_o(\omega) = \tau(1) = p = exp_o(\sigma'(0)) = exp_o(v_0)$, y como exp_o es inyectiva en $\widetilde{U}$, se cumple que $v_0 = \omega$. Por la unicidad de las geodésicas, $\sigma = \tau$.

$\square$

Veamos que en cada entorno normal U de $o \in M$ existe un sistema de coordenadas particularmente sencillo. Para ello, tomamos una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $T_o(M)$, luego $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_i^j \varepsilon_j$, con $\varepsilon_j = \pm 1$. Llamaremos *sistema normal de coordenadas* determinado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$, que asigna a cada punto $p \in U$ el vector de las coordenadas relativas a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $exp_o^{-1}(p) \in \widetilde{U} \subset T_o(M)$. Es decir, $exp_o^{-1}(p) = \sum x^i(p) e_i$.

Proposición 2.67. *Si $x^1, \ldots, x^n$ es un sistema de coordenadas normales en $o \in M$, entonces $\forall i,j,k$, $1 \leq i,j,k \leq n$:*

1. $g_{ij}(o) = \delta_{ij} \varepsilon_j$.
2. $\Gamma_{ij}^k(o) = 0$.

Demostración.

1. Si $v \in T_o(M)$, podemos escribir $v = \sum a^i e_i$. Si $t \in \mathbb{R}$, entonces $tv = \sum (ta^i)e_i$. Por definición, $x^i \circ exp_o(tv)$ nos da la coordenada i-ésima de $exp_o^{-1}(exp_o(tv)) = tv$ en el sistema de coordenadas $e_1, \dots, e_n$, que es ta^i. Por lo tanto, se tiene:

$$x^i(\gamma_v(t)) = x^i \circ exp_o(tv) = ta^i.$$

   Luego las coordenadas de $\gamma_v(t)$ en $\{x^1, \dots, x^n\}$ son $(ta^1, \dots, ta^n)$.

   Además, por definición $v = \gamma_v'(0) = \sum \dfrac{d(x^i \circ \gamma_v)}{dt}(0)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma_v(0)} = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_o$, por lo que $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_o$.

   Como consecuencia, $g_{ij}(o) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_o, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_o \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}\varepsilon_j$.

2. Como $x^i \circ \gamma_v(t) = ta^i$, $\dfrac{d^2(x^i \circ \gamma_v)}{dt^2} = 0$, por lo que las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son:

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t))a^i a^j = 0 \ \ \forall k.$$

   En particular, $\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(o)a^i a^j = 0$ se cumple para todo $(a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$. Esta expresión se puede ver como una forma cuadrática con coeficientes en $\mathbb{R}$. El hecho de que sea nula para todo valor de $\mathbb{R}^n$ indica que la forma cuadrática es idénticamente nula, por lo que su matriz será la matriz 0 en cualquier base, y $\Gamma_{ij}^k(o) = 0$.

$\square$

Ejemplo 2.68. *Sea $\phi_p : \mathbb{R}^n_\nu \longrightarrow T_p(\mathbb{R}^n_\nu)$ el isomorfismo definido en la sección 1.3.3. Comprobamos en el ejemplo 2.57 que dado $v \in T_p(\mathbb{R}^n_\nu)$, la geodésica por p con velocidad inicial v es $\gamma_v(t) = p + tv$, con $\gamma_v'(0) = \phi_p(v)$. Por tanto, $exp_p(\phi_p(v)) = \gamma_v(1) = p + v$, de lo que se deduce que $exp_p : T_p(\mathbb{R}^n_\nu) \longrightarrow \mathbb{R}^n_\nu$ es la composición de ϕ_p^{-1} y de la traslación $x \longrightarrow p + x$ en $\mathbb{R}^n_\nu$, por lo que exp_p es isometría, considerando en $T_p(\mathbb{R}^n_\nu)$ la métrica inducida por la de $\mathbb{R}^n_\nu$.*

Capítulo 3

Curvatura de una variedad semi-riemanniana

En la teoría de las superficies en $\mathbb{R}^3$ desarrollada a finales del siglo $XVIII$, se definió una noción de curvatura que daba una descripción razonable de la forma de las superficies dentro de $\mathbb{R}^3$. Gauss demostró, en el llamado Teorema Egregium, que tal concepto de curvatura es un invariante intrínseco de una superficie, independiente del hecho de que la superficie esté en $\mathbb{R}^3$. Este teorema condujo a Riemann a la invención de la geometría semi-riemanniana, cuyo objetivo principal es la generalización de la curvatura gaussiana a una variedad semi-riemanniana.

En este capítulo introduciremos la noción de curvatura de Riemann en variedades semi-riemannianas, y estudiaremos los distintos invariantes que surgen a partir de esta noción.

También se generalizarán los operadores gradiente, divergencia, hessiana y laplaciano típicos de $\mathbb{R}^3$ a cualquier variedad semi-riemanniana.

3.1. Curvatura

Proposición 3.1. *Si M es una variedad diferenciable y $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son derivaciones tensoriales en M, entonces $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ es una derivación tensorial en M.*

Demostración. Está claro que $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ es $\mathbb{R}$-lineal en cada par de grados. Veamos que cumple las dos propiedades de la definición 2.11.

1. Dados dos campos tensoriales A y B sobre M:

   $$(\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1)(A \otimes B) =$$
   $$= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(A) \otimes B + A \otimes \mathcal{D}_2(B)) - \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(A) \otimes B + A \otimes \mathcal{D}_1(B)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(A)) \otimes B + \mathcal{D}_2(A) \otimes \mathcal{D}_1(B) + \mathcal{D}_1(A) \otimes \mathcal{D}_2(B) + A \otimes \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2(B)) \\
&\quad -\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(A)) \otimes B - \mathcal{D}_1(A) \otimes \mathcal{D}_2(B) - \mathcal{D}_2(A) \otimes \mathcal{D}_1(B) - A \otimes \mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1(B)) = \\
&= (\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1)(A) \otimes B + A \otimes (\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1)(B).
\end{aligned}$$

2. Dada una contracción C:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1) \circ C &= \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 \circ C - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 \circ C = \\
&= C \circ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - C \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 = C \circ (\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1).
\end{aligned}$$

□

Definición 3.2. Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ derivaciones tensoriales en una variedad diferenciable M. Se llama *corchete de Lie de* $\mathcal{D}_1$ *y* $\mathcal{D}_2$, y se denota por $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2]$, a la derivación tensorial $\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$.

Proposición 3.3. *Sean M una variedad diferenciable y $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Las derivadas de Lie cumplen que $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$.*

Demostración. Si $W \in \mathcal{X}(M)$, recordemos (definición 2.16) que la derivada de Lie de W es la derivación tensorial L_W que cumple:

- $L_W(f) = W(f)$ para todo$f \in \mathcal{F}(M)$
- $L_W(V) = [W, V]$ para todo $V \in \mathcal{X}(M)$.

Debido a la regla del producto de las derivaciones (proposición 2.12), basta probar que la relación del enunciado se cumple aplicada a funciones diferenciables, a campos vectoriales diferenciables y a 1-formas:

- Si $f \in \mathcal{F}(M)$,

  $L_{[X,Y]}(f) = [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = X(L_Y(f)) - Y(L_X(f)) =$
  $= L_X(L_Y(f)) - L_Y(L_X(f)) = [L_X, L_Y](f)$.

- Si $V \in \mathcal{X}(M)$,

  $[L_X, L_Y](V) = L_X(L_Y(V)) - L_Y(L_X(V)) = L_X([Y, V]) - L_Y([X, V]) =$
  $= [X, [Y, V]] - [Y, [X, V]] = XYV + VYX - YXV - VXY =$
  $= [XY - YX, V] = L_{[X,Y]}(V)$.

- Si $\theta \in \mathcal{X}^*(M)$, usando lo anterior y el corolario 2.13, para cualquier $V \in \mathcal{X}(M)$ se tiene lo siguiente:

  $L_{[X,Y]}(\theta)(V) = L_{[X,Y]}(\theta(V)) - \theta(L_{[X,Y]}(V)) = [L_X, L_Y](\theta(V)) - \theta([L_X, L_Y](V)) =$
  $= [L_X, L_Y](\theta)(V)$.

  Por tanto, $L_{[X,Y]}(\theta) = [L_X, L_Y](\theta)$.

□

Como consecuencia de la proposición, se tiene que si $[X, Y] = 0$, L_X y L_Y conmutan.

Sin embargo, la propiedad de la proposición 3.3 no se cumple en general para la derivada covariante D_X, y esta diferencia es lo que se va a medir con un campo tensorial que juega un papel importante en la geometría diferencial.

Definición 3.4. Sea M una variedad semi-riemanniana con conexión de Levi-Civita D. Se denomina *tensor curvatura de Riemann* a la aplicación $R : \mathcal{X}(M)^3 \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ definida por:

$$(X, Y, Z) \longrightarrow D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z.$$

Vamos a justificar que R realmente es un tensor.

Proposición 3.5. *R es $\mathcal{F}(M)$-multilineal.*

Demostración. R es $\mathbb{R}$-lineal, ya que lo son las derivaciones y el corchete de Lie. Falta probar que lo siguiente se cumple para $f \in \mathcal{F}(M)$:

1. $R(fX, Y, Z) = fR(X, Y, Z)$.

   Para ello, operamos sobre cada término de $R(fX, Y, Z) = D_{[fX,Y]}(Z) - [D_{fX}, D_Y](Z)$, teniendo en cuenta la propiedad (D1) de las conexiones y que para el corchete de Lie de campos vectoriales se cumple $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$, como se vio en la proposición 1.44:

   - $D_{[fX,Y]}(Z) = D_{f[X,Y]-Y(f)X}(Z) = fD_{[X,Y]}(Z) - Y(f)D_X(Z)$.
   - $[D_{fX}, D_Y](Z) = [fD_X, D_Y](Z) = f[D_X, D_Y](Z) - D_Y(f)D_X(Z)$.

   Restando, y teniendo en cuenta que $D_Y(f) = Y(f)$, se obtiene el resultado.

2. $R(X, fY, Z) = fR(X, Y, Z)$.

   La demostración es análoga a la del apartado (1).

3. $R(X, Y, fZ) = fR(X, Y, Z)$.

   Operamos sobre cada término de $R(X, Y, fZ) = D_{[X,Y]}(fZ) - [D_X, D_Y](fZ)$, utilizando las propiedades (D2) y (D3) de las conexiones:

   - $D_{[X,Y]}(fZ) = [X, Y](f)Z + fD_{[X,Y]}(Z)$.
   - $$\begin{aligned}[D_X, D_Y](fZ) &= D_X(Y(f)Z + fD_Y(Z)) - D_Y(X(f)Z + fD_X(Z)) = \\ &= D_X(Y(f)Z) + D_X(fD_Y(Z)) - D_Y(X(f)Z) - D_Y(fD_X(Z)) = \\ &= X(Y(f)Z) + Y(f)D_X(Z) + X(f)D_Y(Z) + fD_X(D_Y(Z)) \\ &\quad -Y(X(f)Z) - X(f)D_Y(Z) - Y(f)D_X(Z) - fD_Y(D_X(Z)) = \\ &= [X, Y](f)Z + f[D_X, D_Y](Z).\end{aligned}$$

□

Como es $\mathcal{F}(M)$-lineal, R se puede entender como un campo tensorial diferenciable de tipo $(1,3)$, debido a la observación 1.69.

Para campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, denotaremos por $R_{XY} : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ a la aplicación $\mathcal{F}(M)$-lineal dada por $R_{X,Y}(Z) = R(X,Y,Z)$. Usaremos indistintamente la notación $R_{XY}Z$.

La definición de este campo de tensores se puede hacer para una conexión cualquiera, llamándose entonces *tensor de curvatura*.

Proposición 3.6 (Primera Identidad de Bianchi)**.** *Dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, entonces:*

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0.$$

Demostración. Utilizando la definición de tensor de curvatura:

$$R_{XY}(Z) = D_{[X,Y]}Z + D_Y D_X Z - D_X D_Y Z$$

$$R_{YZ}(X) = D_{[Y,Z]}X + D_Z D_Y X - D_Y D_Z X$$

$$R_{ZX}(Y) = D_{[Z,X]}Y + D_X D_Z Y - D_Z D_X Y.$$

Sumando lo anterior y utilizando (D4) del teorema 2.26:

$$\begin{aligned} &R_{XY}(Z) + R_{YZ}(X) + R_{ZX}(Y) = \\ &\quad = D_Y[X,Z] + D_X[Z,Y] + D_Z[Y,X] - D_{[Y,X]}Z - D_{[Z,Y]}X - D_{[X,Z]}Y = \\ &\qquad = [Y,[X,Z]] + [X,[Z,Y]] + [Z,[Y,X]] = 0. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.7. *Si $X, Y, V, W \in \mathcal{X}(M)$, entonces:*

1. $R_{XY} = -R_{YX}$.
2. $\langle R_{XY}V, W\rangle = -\langle R_{XY}W, V\rangle$.
3. $\langle R_{XY}V, W\rangle + \langle R_{YV}X, W\rangle + \langle R_{VX}Y, W\rangle = 0$.
4. $\langle R_{XY}V, W\rangle = \langle R_{VW}X, Y\rangle$.

Demostración.

1. Es consecuencia de que el corchete de Lie sea antisimétrico.

2. Veamos primero que $\langle R_{XY}V, V\rangle = 0$.

   Debido a (D5) del teorema 2.26 se tienen las dos igualdades siguientes:

   i) $Y\langle D_X V, V\rangle = \langle D_Y D_X V, V\rangle + \langle D_X V, D_Y V\rangle \Rightarrow$
   $$\Rightarrow \langle D_Y D_X V, V\rangle = Y\langle D_X V, V\rangle - \langle D_X V, D_Y V\rangle.$$

   ii) $X\langle V, V\rangle = \langle D_X V, V\rangle + \langle V, D_X V\rangle = 2\langle D_X V, V\rangle \Rightarrow \langle D_X V, V\rangle = \dfrac{1}{2}X\langle V, V\rangle$.

   Operamos haciendo uso de las dos igualdades anteriores:

   $$\begin{aligned}
   &\langle R_{XY}V, V\rangle = \langle D_{[X,Y]}V + D_Y D_X V - D_X D_Y V, V\rangle = \\
   &= \langle D_{[X,Y]}V, V\rangle + \langle D_Y D_X V, V\rangle - \langle D_X D_Y V, V\rangle = \\
   &= \frac{1}{2}[X,Y]\langle V, V\rangle + Y\langle D_X V, V\rangle - \langle D_X V, D_Y V\rangle - X\langle D_Y V, V\rangle + \langle D_Y V, D_X V\rangle = \\
   &= \frac{1}{2}[X,Y]\langle V, V\rangle + \frac{1}{2}YX\langle V, V\rangle - \frac{1}{2}XY\langle V, V\rangle = 0.
   \end{aligned}$$

   Puesto que la aplicación $V \longrightarrow \{R_{XY}V, V\}$ es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica $(V, W) \longrightarrow \frac{1}{2}(\{R_{XY}V, W\} + \{R_{XY}W, V\})$, y se ha visto que la forma cuadrática es nula, entonces la forma bilineal también lo es.

   Como consecuencia, $\{R_{XY}V, W\} = -\{R_{XY}W, V\}$.

3. Esta igualdad es consecuencia directa de la proposición 3.6.

4. Del apartado 3 se tienen las siguientes igualdades

   $$\begin{aligned}
   \langle R_{YV}X, W\rangle + \langle R_{VX}Y, W\rangle + \langle R_{XY}V, W\rangle &= 0 \\
   \langle R_{VX}W, Y\rangle + \langle R_{XW}V, Y\rangle + \langle R_{WV}X, Y\rangle &= 0 \\
   \langle R_{XW}Y, V\rangle + \langle R_{WY}X, V\rangle + \langle R_{YX}W, V\rangle &= 0 \\
   \langle R_{WY}V, X\rangle + \langle R_{YV}W, X\rangle + \langle R_{VW}Y, X\rangle &= 0.
   \end{aligned}$$

   Sumando las cuatro ecuaciones anteriores y teniendo en cuenta la propiedad 2 se obtiene $2\langle R_{XY}V, W\rangle - 2\langle R_{VW}X, Y\rangle$, por lo que $\langle R_{XY}V, W\rangle = \langle R_{VW}X, Y\rangle$.

□

Las dos primeras partes muestran que el tensor curvatura tiene propiedades antisimétricas, y la cuarta muestra una simetría por pares.

Veamos que como consecuencia de la siguiente proposición, el tensor R se puede considerar a su vez como una función multilineal en vectores tangentes.

Proposición 3.8. *Si uno de los campos X, Y, Z se anula en un punto $p \in M$, entonces $R_{XY}Z$ también se anula en p.*

Demostración. Sea U un entorno abierto de p en M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Vamos a probar que si X se anula en p, $R_{XY}Z$ también. La demostración para los casos en los que Y o Z se anulan en p se harían de manera análoga, ya que R es $\mathcal{F}(M)$-lineal en las tres componentes.

Supongamos $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en U. Entonces:

$$R_{XY}Z = R_{\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y}Z = \sum_i X^i R_{\frac{\partial}{\partial x^i}Y}Z.$$

Como $X(p) = 0$, se tiene $X^i(p) = 0$, $1 \leq i \leq n$. Como consecuencia, evaluando lo anterior en p:

$$R_{XY}Z(p) = \sum_i X^i(p) R_{\frac{\partial}{\partial x^i}Y}Z(p) = 0.$$

□

Proposición 3.9. *Sean M una variedad semi-riemanniana, $p \in M$ y $u, v, w \in T_p(M)$. Si U, V, W, U', V', $W' \in \mathcal{X}(M)$ tales que $U(p) = U'(p) = u$, $V(p) = V'(p) = v$ y $W(p) = W'(p) = w$, entonces*

$$R_{UV}W(p) = R_{U'V'}W'(p).$$

Demostración. Se tiene que:

$$\begin{aligned} R_{UV}W - R_{U'V'}W' = R_{UV}W - R_{U'V}W + R_{U'V}W - R_{U'V}W' + R_{U'V}W' - R_{U'V'}W' = \\ = R_{U-U',V}W + R_{U'V}(W - W') + R_{U',V-V'}W'. \end{aligned}$$

Como los campos vectoriales diferenciables $U - U'$, $W - W'$ y $V - V'$ se anulan en p, por la proposición anterior, $(R_{UV}W - R_{U'V'}W')(p) = 0$.

□

Esta proposición permite dar la siguiente definición:

Definición 3.10. Dados $p \in M$ y $x, y, z \in T_p(M)$, se define un vector tangente a M en p, $R_{xy}(z)$, de la siguiente manera. Se toman campos vectoriales diferenciables X, Y, Z tales que $X(p) = x$, $Y(p) = y$ y $Z(p) = z$, y se define $R_{xy}(z) = R_{XY}Z(p)$.

Por tanto, dado $p \in M$, y $x, y \in T_p(M)$, el operador lineal $R_{xy} : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$ que envía cada z en $R_{xy}(z)$ está bien definido y se llama *operador curvatura*.

Utilizaremos también la notación $R_{xy}z = R_{xy}(z)$. Además, la primera Identidad de Bianchi se puede enunciar como sigue:

Proposición 3.11 (Primera Identidad de Bianchi). *Dados $p \in M$ y $x, y, z \in T_p(M)$, entonces:*

$$R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0.$$

Las siguientes propiedades, que son consecuencia directa de la proposición 3.7, reciben el nombre de *simetrías de la curvatura*.

Proposición 3.12. *Si $x, y, v, w \in T_p(M)$, entonces:*

1. $R_{xy} = -R_{yx}$.
2. $\langle R_{xy}v, w\rangle = -\langle R_{xy}w, v\rangle$.
3. $\langle R_{xy}v, w\rangle + \langle R_{yv}x, w\rangle + \langle R_{vx}y, w\rangle = 0$.
4. $\langle R_{xy}v, w\rangle = \langle R_{vw}x, y\rangle$.

Si $Z \in \mathcal{X}(M)$, como R es un campo tensorial de tipo $(1,3)$, $D_Z(R)$ también lo será, y por la observación 1.69, al igual que R, se puede entender como una aplicación $\mathcal{F}(M)$-multilineal entre $\mathcal{X}(M)^3$ y $\mathcal{X}(M)$.

Dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, denotaremos por $D_Z(R)_{X,Y} : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ a la aplicación $\mathcal{F}(M)$-lineal dada por $D_Z(R)_{X,Y}(V) = D_Z(R)(X, Y, V)$. Usaremos indistintamente las notaciones $D_Z(R)_{X,Y}V$ y $D_Z R_{X,Y}V$.

Al igual que con el tensor curvatura, si $z \in T_p(M)$, podremos definir las aplicaciones $D_z(R) : T_p(M)^3 \longrightarrow T_p(M)$ y $D_z(R)_{xy} : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$.

Proposición 3.13 (Segunda Identidad de Bianchi). *Si $x, y, z \in T_p(M)$, entonces:*

$$D_z(R)_{x,y} + D_x(R)_{y,z} + D_y(R)_{z,x} = 0.$$

Demostración. Sea U un entorno normal de p con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. Se comprobó en la proposición 2.67 que los símbolos de Christoffel para este sistema coordenado son 0.

Por otra parte, si las coordenadas de un vector $v \in T_p(M)$ son $(v_1, \ldots, v_n)$, se puede definir en U el campo $V = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, con componentes constantes. Sabemos que el campo se puede extender en toda la variedad, es decir, que existe $\widetilde{V} \in \mathcal{X}(M)$ tal que $\widetilde{V}$ y V coinciden en un entorno de p.

Podemos de esta forma elegir $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ tales que $X(p) = x$, $Y(p) = y$, $Z(p) = z$ y tales que en un entorno V de p contenido en U, sus coordenadas sean constantes.

Se deduce lo siguiente:

1. Cada corchete de Lie de dos de los campos X, Y y Z es nulo en V porque será de la forma $\sum \lambda_{i,j}[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}]$, ya que los coeficientes de los campos son constantes y el corchete de Lie es $\mathbb{R}$-lineal.
2. Cada derivada covariante en V aplicada a uno de los vectores X, Y o Z es nula pues se puede calcular mediante la primera fórmula de la proposición 2.29, y tanto los símbolos de Christoffel como las derivadas parciales $\frac{\partial X^i}{\partial x^k}$, $\frac{\partial Y^i}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial Z^i}{\partial x^k}$ son nulos en V.

Aplicamos la regla del producto a $D_Z(R)(X,Y)(V) = D_Z(R)_{X,Y}(V)$:

$$D_Z(R)_{XY}(V) = D_Z(R_{XY}V) - R_{D_Z X,Y}V - R_{X,D_Z Y}V - R_{XY}(D_Z V).$$

En p, los dos términos del medio son cero por (2). Utilizando (1) se tiene:

$$D_Z(R)_{XY} = [D_Z, R_{XY}] = [D_Z, [D_Y, D_X]].$$

Como se cumple la identidad de Jacobi, si sumamos la fórmula anterior en las permutaciones cíclicas de X, Y, Z, se llega a que $D_Z(R)_{X,Y} + D_X(R)_{Y,Z} + D_Y(R)_{Z,X} = 0$.

□

Proposición 3.14. *En un entorno U de M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$, se tiene:*

$$R_{\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_i R^i_{jkl}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

donde

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}.$$

Demostración. Puesto que el corchete de Lie de las parciales es cero, se tiene que:

$$R_{\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) = D_{\frac{\partial}{\partial x^l}}(D_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}) - D_{\frac{\partial}{\partial x^k}}(D_{\frac{\partial}{\partial x^l}}\frac{\partial}{\partial x^j}).$$

Utilizando la proposición 2.29:

$$\begin{aligned}
R_{\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) &= D_{\frac{\partial}{\partial x^l}}(\sum_m \Gamma^m_{kj}\frac{\partial}{\partial x^m}) - D_{\frac{\partial}{\partial x^k}}(\sum_m \Gamma^m_{lj}\frac{\partial}{\partial x^m}) = \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} = \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

□

3.2. Curvatura Seccional

Definición 3.15. Sean M una variedad semi-riemanniana y $p \in M$. Un subespacio de dimensión dos Π del espacio tangente $T_p(M)$ se llama *sección plana de M en p*.

Para vectores tangentes $v, w \in T_p(M)$, definimos:

$$Q(v,w) = \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2.$$

Una sección plana Π es no degenerada si y solo si $Q(v,w) \neq 0$ para cada base v, w de Π.

Proposición 3.16. *Sea Π un plano tangente no degenerado de M en p. El número*

$$K(v,w) = \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v,w)}$$

es independiente de la elección de la base $\{v,w\}$ de Π.

Demostración. Π es subespacio del espacio vectorial $T_p(M)$, por lo que dos bases $\{v,w\}$ y $\{x,y\}$ estarán relacionadas por ecuaciones del tipo:

$$\begin{aligned} v &= ax + by \\ w &= cx + dy, \end{aligned}$$

donde el determinante de la matriz de cambio de base $ad - bc$ es no nulo.

Usando que $\langle\,,\rangle$ es bilineal simétrica y que R es multilineal, una cuenta sencilla permite probar que:

$$\langle R_{vw}v, w\rangle = (ad-bc)^2\langle R_{x,y}x, y\rangle.$$

Además, como las matrices de las métricas en ambas bases se relacionan por semejanza, es conocido que:

$$Q(v,w) = (ad-bc)^2 Q(x,y).$$

Por tanto, $K(v,w) = K(x,y)$.

□

Definición 3.17. Dado un plano tangente Π no degenerado de M en p, se llama *curvatura seccional de* Π, y se denota por $K(\Pi)$, al número

$$K(\Pi) = \frac{\langle R_{vw}v, w\rangle}{Q(v,w)},$$

donde $\{v,w\}$ es una base cualquiera de Π.

Definición 3.18. Se dice que una variedad semi-riemanniana es *plana* si el tensor de curvatura R es nulo en cada punto de M.

Lema 3.19. *Sea g una métrica en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, y sean $x, y \in V$. Entonces, existe $w \in V$ y $\delta > 0$ tal que para todo δ' con $0 < \delta' < \delta$, $\{x, y + \delta' w\}$ es base de una sección plana no degenerada.*

Demostración. Es un ejercicio de álgebra lineal probar que existe un $w \in V$ tal que x y w son linealmente independientes y $Q(x, w) \neq 0$.

Si $\delta > 0$, entonces con una simple cuenta se llega a que:

$$Q(x, y + \delta w) = \delta^2 Q(x, w) + 2\delta(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle x, w\rangle) + Q(x, y).$$

Si $Q(x, w) \neq 0$, la ecuación $\delta^2 Q(x, w) + 2\delta(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle x, w\rangle) + Q(x, y) = 0$ es de segundo grado, por lo que tiene como mucho dos raíces. Por tanto, podemos tomar un δ_1 lo suficientemente pequeño como para que $Q(x, y + \delta' w) \neq 0$ para todo δ' con $0 < \delta' < \delta_1$.

Veamos que existe $\delta_2 > 0$ tal que x e $y + \delta_2 w$ son linealmente independientes para todo δ' con $0 < \delta' < \delta_1$. Sea $\mathcal{B}$ una base del espacio vectorial V y $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $w = (w_1, \ldots, w_n)$ en esa base. Como x y w son linealmente independientes, entonces existe un menor de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es distinto de cero. Si suponemos que el menor es el de las componentes 1 y 2, entonces $x_1 w_2 - x_2 w_1 \neq 0$. Se tiene que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 + \delta w_1 & y_2 + \delta w_2 \end{vmatrix} = \delta(x_1 w_2 - x_2 w_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Como $x_1 w_2 - x_2 w_1 \neq 0$, entonces la ecuación $\delta(x_1 w_2 - x_2 w_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$ tiene como mucho una raíz, por lo que podemos tomar δ_2 tal que $\delta'(x_1 w_2 - x_2 w_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \neq 0$ para todo δ' con $0 < \delta' < \delta_1$.

Finalmente, basta con definir $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$.

□

Proposición 3.20. *M es plana si y solo si la curvatura seccional K es idénticamente nula en toda sección plana no degenerada.*

Demostración.

- Si M es plana, entonces R es nulo en todo punto de M. Si Π es una sección plana de M en p, y $\{v, w\}$ una base cualquiera de Π, se tiene que $R_{vw}v = 0$, por lo que $\langle R_{vw}v, w\rangle = 0$, y lo es también $K(v, w)$. Luego la curvatura seccional es idénticamente nula en Π.

- Suponemos que la curvatura seccional K es idénticamente nula en toda sección plana no degenerada. Sea $p \in M$, vamos a probar que R es nula en p. Dividiremos la demostración en cuatro pasos:

  1. $\langle R_{xy}x, y\rangle = 0 \ \forall x, y \in T_p(M)$.

     Si $\{x, y\}$ son base de una sección plana Π de $T_p(M)$ no degenerada, entonces $K(\Pi) = 0$, y se cumple lo anterior.

     Si $\{x, y\}$ no lo son, se pueden tomar como límite de pares de vectores $\{x_i, y_i\}$ que generan secciones planas no degeneradas, como hemos visto en el lema 3.19. Por consiguiente, para estos vectores $\langle R_{x_i y_i}x_i, y_i\rangle = 0$, y como esta función es continua al ser multilineal, se tiene que $\langle R_{xy}x, y\rangle = 0$.

  2. $R_{xy}x = 0$ para todo $x, y \in T_p(M)$.

     Para demostrarlo, tomamos $z \in T_p(M)$ arbitrario, y operamos de la siguiente manera:

     $\langle R_{y+z,x}y + z, x\rangle = \langle R_{yx}y, x\rangle + \langle R_{yx}z, x\rangle + \langle R_{zx}y, x\rangle + \langle R_{zx}z, x\rangle$.

     Por (1), tres de los anteriores se anulan, por lo que $\langle R_{yx}z, x\rangle = -\langle R_{zx}y, x\rangle$.

     Por la propiedad (4) de la proposición 3.12, se tiene que $\langle R_{yx}z, x\rangle = 0$. Haciendo uso de las propiedades (1) y (2) de la proposición 3.12, se tiene que $\langle R_{xy}x, z\rangle = 0$ para todo $z \in T_p(M)$, por lo que queda probado.

  3. $R_{xy}z = R_{yz}x$ para todo $x, y, z \in T_p(M)$.

     Operando, se tiene que $R_{x+z,y}(x + z) = R_{xy}x + R_{xy}z + R_{zy}x + R_{zy}z$.

     Tres de los sumandos se anulan por el apartado (2), por lo que $R_{xy}z = -R_{zy}x$. Debido a la antisimetría de R respecto a los dos primeros argumentos, queda probada la afirmación anterior.

  4. $R_{xy}z = 0$ para todo $x, y, z \in T_p(M)$.

     Debido a la Primera Identidad de Bianchi (proposción 3.11):

     $$R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0.$$

     Utilizando (3) se tiene que $3R_{xy}z = 0$, por lo que queda probado.

$\square$

Ejemplo 3.21. *Cualquier espacio semi-Euclídeo $\mathbb{R}^n_\nu$ es plano, ya que los símbolos de Christoffel son nulos para las coordenadas naturales, luego $R = 0$ por la proposición 3.14.*

Definición 3.22. Decimos que una función multilineal $F : T_p(M)^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es de *tipo curvatura* si F cumple las simetrías enunciadas en la proposicición 3.12 para la función $(v, w, x, y) \longrightarrow \langle R_{vw}x, y\rangle$, es decir:

1. $F(v, w, x, y) = -F(w, v, x, y)$.
2. $F(v, w, x, y) = -F(v, w, y, x)$.
3. $F(v, w, x, y) + F(w, x, v, y) + F(x, v, w, y) = 0$.
4. $F(v, w, x, y) = F(x, y, v, w)$.

Proposición 3.23. *Si $F(v, w, v, w) = 0$ para toda base $\{v, w\}$ de un plano no degenerado, entonces $F = 0$.*

Demostración. Para demostrarlo, se utiliza el mismo razonamiento que en la proposición 3.20, donde únicamente se ha hecho uso de las mismas propiedades algebraicas que se cumplen para F. □

El tensor de curvatura de Riemann es un operador bastante complicado. Veamos que K, que es una función más sencilla con llegada en $\mathbb{R}$, lo determina completamente.

Proposición 3.24. *Sea F una función de tipo curvatura en $T_p(M)$ tal que*

$$K(v, w) = \frac{F(v, w, v, w)}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$$

siempre que $\{v, w\}$ sean base de un plano no degenerado. Entonces,

$$\langle R_{vw}x, y\rangle = F(v, w, x, y) \quad \forall v, w, x, y \in T_p(M).$$

Demostración. Si denotamos la función diferencia $\Delta(v, w, x, y) = F(v, w, x, y) - \langle R_{vw}x, y\rangle$, entonces Δ cumple las relaciones de simetría anteriores, luego es de tipo curvatura. Por hipótesis, $\Delta(v, w, v, w) = 0$ si $\{v, w\}$ es base de un plano no degenerado, por lo que por la observación 3.23, $\Delta = 0$. □

Definición 3.25. Se dice que una variedad semi-riemanniana M tiene *curvatura constante* si su curvatura seccional es una función constante.

Ejemplo 3.26. *No tenemos el suficiente desarrollo teórico para probarlo, pero es interesante señalar que un ejemplo de variedad semi-riemanniana con curvatura constante es la esfera $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ de radio r.*

Corolario 3.27. *Si M tiene curvatura seccional constante C, entonces*

$$R_{xy}z = C\left(\langle z, x\rangle y - \langle z, y\rangle x\right).$$

Demostración. La fórmula

$$F(x, y, v, w) = C\langle\langle v, x\rangle y - \langle v, y\rangle x, w\rangle$$

cumple las propiedades de la definición 3.22, por lo que es de tipo curvatura. Además, si $\{x, y\}$ son base de un plano no degenerado,

$$K(x, y) = C = \frac{F(x, y, x, y)}{Q(x, y)}.$$

Por la proposición 3.24, $\langle R_{xy}z, w\rangle = F(x, y, z, w) = C\langle\langle v, x\rangle y - \langle v, y\rangle x, w\rangle$, para todo w, por lo cual el corolario queda probado.

□

3.3. Superficies semi-riemannianas

Sea M una superficie semi-riemanniana, es decir, una variedad semi-riemanniana de dimensión dos, y sean u y v coordenadas en un entorno U de M. Denotaremos las componentes del tensor métrico de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E &= g_{11} = \langle\partial_u, \partial_u\rangle \\ F &= g_{12} = g_{21} = \langle\partial_u, \partial_v\rangle \\ G &= g_{22} = \langle\partial_v, \partial_v\rangle. \end{aligned}$$

El elemento de línea es

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

y

$$Q = Q(\partial_u, \partial_v) = EG - F^2.$$

Utilizando que $g^{11} = G/Q$, $g^{22} = E/Q$, $g^{12} = g^{21} = -F/Q$ y la proposición 2.29, se deduce que los símbolos de Christoffel cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} Q\Gamma^1_{11} &= \begin{vmatrix} E_u/2 & F \\ F_u - E_v/2 & G \end{vmatrix} & Q\Gamma^2_{11} &= \begin{vmatrix} E & E_u/2 \\ F & F_u - E_v/2 \end{vmatrix} \\ Q\Gamma^1_{12} &= \begin{vmatrix} E_v/2 & F \\ G_u/2 & G \end{vmatrix} & Q\Gamma^2_{12} &= \begin{vmatrix} E & E_v/2 \\ F & G_u/2 \end{vmatrix} \\ Q\Gamma^1_{22} &= \begin{vmatrix} F_v - (G_u/2) & F \\ G_v/2 & G \end{vmatrix} & Q\Gamma^2_{22} &= \begin{vmatrix} E & F_v - (G_u/2) \\ F & G_v/2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Y las ecuaciones de las geodésicas son:

$$u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2 = 0$$

$$v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2 = 0.$$

Como M tiene dimensión 2, solo habrá un único plano tangente en p, $T_p(M)$. Por tanto, la curvatura seccional se convierte en una función real de M, y recibe el nombre de *curvatura de Gauss de M*.

3.4. Contracciones métricas

En la proposición 2.25 vimos que en cualquier variedad semi-riemanniana M hay un isomorfismo $\mathcal{F}(M)$-lineal entre campos vectoriales diferenciables y 1-formas diferenciables sobre M, dado por:

$$X \in \mathcal{X}(M) = \mathcal{T}^1_0(M) \longrightarrow X^* \in \mathcal{X}^*(M) = \mathcal{T}^0_1(M), \text{ donde } X^*(Y) = \langle X, Y\rangle \ \ \forall Y \in \mathcal{X}(M).$$

En esta sección veremos cómo extender el isomorfismo anterior a campos tensoriales de mayor orden.

Proposición 3.28. *Sea U un abierto de M con coordenadas $x^1, \dots, x^n$. El campo vectorial en U métricamente equivalente a dx^i es $\sum_j g^{ij}\dfrac{\partial}{\partial x^j}$, y la 1-forma métricamente equivalente a $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ es $\sum_j g^{ij}dx^j$.*
En general, si $\theta = \sum_i \theta_i dx^i \in \mathcal{X}^*(M)$ en U, su campo vectorial métricamente equivalente es $\theta^* = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Demostración. Sea X un campo vectorial cualquiera. Entonces, en U:

$$dx^i(X) = \sum_k X^k dx^i(\frac{\partial}{\partial x^k}) = X^i$$

$$\langle \sum_j g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}, X\rangle = \sum_{j,k} g^{ij}X^k \langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\rangle = \sum_{j,k} g^{ij}g_{jk}X^k = \sum_k \delta_{ik}X^k = X^i.$$

Como ambos coinciden, se cumple la primera parte del lema. La segunda se demuestra de forma análoga.

Que el campo vectorial métricamente equivalente a $\theta = \sum_i \theta_i dx^i \in \mathcal{X}^*(M)$ en U sea $\theta^* = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i \frac{\partial}{\partial x^j}$ se obtiene directamente de lo anterior.

□

Definición 3.29. Sean r y s enteros postivos, y a y b enteros tales que $1 \leq a \leq r$ y $1 \leq b \leq s$. Llamamos *operador bajada de índice* a la aplicación $\downarrow_b^a\colon \mathcal{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{s+1}^{r-1}(M)$ dada por:

$$\downarrow_b^a (A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{s+1}) = A(\theta^1, \ldots, X_b^*, \ldots, \theta^{r-1}, X_1, \ldots, X_{b-1}, X_{b+1}, \ldots, X_{s+1}),$$

donde $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, $\theta^1, \ldots, \theta^{r-1} \in \mathcal{X}^*(M)$, $X_1, \ldots, X_{s+1} \in \mathcal{X}(M)$ y X_b^* está en la posición a.

Definición 3.30. Sean r y s enteros postivos, y a y b enteros tales que $1 \leq a \leq r$ y $1 \leq b \leq s$. Llamamos *operador subida de índice* a la aplicación $\uparrow_b^a\colon \mathcal{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r+1}(M)$ dada por:

$$\uparrow_b^a (A)(\theta^1, \ldots, \theta^{r+1}, X_1, \ldots, X_{s-1}) = A(\theta^1, \ldots, \theta^{a-1}, \theta^{a+1}, \ldots, \theta^{r+1}, X_1, \ldots, \theta^{a^*}, \ldots, X_{s-1}),$$

donde $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, $\theta^1, \ldots, \theta^{r+1} \in \mathcal{X}^*(M)$, $X_1, \ldots, X_{s-1} \in \mathcal{X}(M)$ y θ^{a^*} está en la posición b.

Proposición 3.31. *Las operaciones subida y bajada de índices son isomorfismos $\mathcal{F}(M)$-lineales.*

Demostración. Que sean $\mathcal{F}(M)$-lineales es inmediato por la definición, ya que los campos tensoriales lo son. Para ver que son isomorfismos, demostraremos que una es inversa de la otra. Vale con probar que $\uparrow_b^a (\downarrow_b^a (A)) = A$, ya que son aplicaciones entre $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de la misma dimensión.

Si tomamos $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathcal{X}^*(M)$ y $X_1, \ldots, X_s \in \mathcal{X}(M)$ cualesquiera, se tiene:

$$\begin{aligned}
&\uparrow_b^a (\downarrow_b^a (A))(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) = \\
&\qquad = \downarrow_b^a (A)(\theta^1, \ldots, \theta^{a-1}, \theta^{a+1}, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, \theta^{a^*}, \ldots, X_s) = \\
&\qquad = A(\theta^1, \ldots, \theta^{a-1}, (\theta^{a^*})^*, \theta^{a+1}, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) = \\
&\qquad = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s).
\end{aligned}$$

Por lo que $\uparrow_b^a (\downarrow_b^a (A)) = A$.

□

Proposición 3.32. *Sea M una variedad semi-riemanniana y sean $x^1, \ldots, x^n$ coordenadas de un entorno de M. Si $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, en ese entorno:*

1. $\downarrow_b^a (A)_{j_1,\ldots,j_{s+1}}^{i_1,\ldots,i_{r-1}} = \sum_k g_{j_b,k} A_{j_1,\ldots,j_{b-1},j_{b+1},\ldots,j_{s+1}}^{i_1,\ldots,i_{a-1},k,i_{a+1},\ldots,i_{r-1}}$
2. $\uparrow_b^a (A)_{j_1,\ldots,j_{s-1}}^{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \sum_k g^{i_a,k} A_{j_1,\ldots,j_{b-1},k,j_{b+1},\ldots,j_{s-1}}^{i_1,\ldots,i_{a-1},i_{a+1},\ldots,i_{r+1}}$.

Demostración. Solo vamos a demostrar (1), pues la demostración de (2) se hace de manera análoga.

$$\begin{aligned}
\downarrow_b^a (A)^{i_1,\ldots,i_{r-1}}_{j_1,\ldots,j_{s+1}} &= \downarrow_b^a (A)(dx^{i_1},\ldots,dx^{i_{r-1}},\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_{s+1}}) = \\
&= A(dx^{i_1},\ldots,\partial_{j_b}^*,\ldots,dx^{i_{r-1}},\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_{b-1}},\partial_{j_{b+1}},\ldots,\partial_{j_{s+1}}) = \\
&= A(dx^{i_1},\ldots,\sum_k g_{j_b,k}dx^k,\ldots,dx^{i_{r-1}},\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_{b-1}},\partial_{j_{b+1}},\ldots,\partial_{j_{s+1}}) = \\
&= \sum_k g_{j_b,k} A^{i_1,\ldots,k,\ldots,i_{r-1}}_{j_1,\ldots,j_{b-1},j_{b+1},\ldots,j_{s+1}}.
\end{aligned}$$

□

Definición 3.33. Dos campos tensoriales tales que uno es obtenido a partir del otro con las operaciones subida y bajada de índice se dice que son *métricamente equivalentes.*

Vimos que el tensor curvatura de Riemann $R : \mathcal{X}(M)^* \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ se puede entender como un campo tensorial diferenciable de tipo $(1,3)$ debido a la observación 1.69. Por tanto, se puede aplicar sobre R la operación bajada de índice $\downarrow_1^1 R$ obteniendo un campo tensorial de tipo $(0,4)$ métricamente equivalente al tensor curvatura de Riemann, denominado *tensor curvatura de Riemann-Christoffel.* Sus componentes en un sistema de coordenadas $x^1,\ldots,x^n$ de M son:

$$R_{i,j,k,l} = \downarrow_1^1 (R)(\frac{\partial}{\partial^i},\frac{\partial}{\partial^j},\frac{\partial}{\partial^k},\frac{\partial}{\partial^l}) = \sum_h g_{ih}R^h_{jkl}.$$

En variedades diferenciables, las contracciones operan en un índice covariante y uno contravariante, obteniendo tensores de tipo $(r-1,s-1)$ a partir de tensores de tipo (r,s). En variedades semi-riemannianas podemos *contraer métricamente* dos índices covariantes elevando uno de ellos y luego contrayendo de manera usual. Análogamente, podremos contraer métricamente dos índices contravariantes bajando uno de ellos y contrayendo posteriormente de la manera habitual.

Definición 3.34. Si $1 \leq a < b \leq s$ y r es un entero positivo, se llama *contracción métrica covariante* $C_{ab} : \mathcal{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathcal{T}_{s-2}^r$ a la aplicación $\mathcal{F}(M)$-lineal $C_{ab} = C^1_{b-1} \circ \uparrow_a^1$.

Definición 3.35. Si $1 \leq a < b \leq r$ y s es un entero positivo, se llama *contracción métrica contravariante* $C^{ab} : \mathcal{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathcal{T}_s^{r-2}$ a la aplicación $\mathcal{F}(M)$-lineal $C^{ab} = C_1^{b-1} \circ \downarrow_1^a$.

Proposición 3.36. *Si $x^1,\ldots,x^n$ son coordenadas de M, y $a \in T_s^r(M)$ se tiene que:*

1. $(C_{ab}A)^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_{s-2}} = \sum_{l,k} g^{lk} A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,l,\ldots,k,\ldots,j_{s+2}}$
2. $(C^{ab}A)^{i_1,\ldots,i_{r-2}}_{j_1,\ldots,j_s} = \sum_{l,k} g_{lk} A^{i_1,\ldots,l,\ldots,k,\ldots,i_{r-2}}_{j_1,\ldots,j_s}$,

donde en ambos casos l y k están en las posiciones a y b, respectivamente.

Demostración. Vamos a probar (1). La demostración del apartado (2) se haría de manera análoga.

$$(C_{ab}A)^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_{s-2}} = C^1_{b-1}(\uparrow^1_a (A))^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_{s-2}} = \sum_k \uparrow^1_a (A)^{k,i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_{b-2},k,j_b,\ldots,j_{s-2}} =$$
$$= \sum_{l,k} g^{kl} A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_{a-1},l,j_{a+1},\ldots,j_{b-2},k,j_b,\ldots,j_{s+2}} = \sum_{l,k} g^{lk} A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,l,\ldots,k,\ldots,j_{s+2}}.$$

En efecto, l y k están en las posiciones a y b.

□

3.5. Campos de referencias

Definición 3.37. Un *campo de referencias ortonormales* es un conjunto de n campos vectoriales $\{E_1,\ldots,E_n\}$, unitarios y ortogonales entre sí, tal que para cada punto $p \in M$, $\{E_1(p),\ldots,E_n(p)\}$ es una base ortonormal del espacio tangente $T_p(M)$.

No tiene por qué existir un campo de referencias ortonormales definido en todo M, pero veremos que sí localmente.

Si $E_1,\ldots,E_n$ es un campo de referencias ortonormales de M y V es campo vectorial, podemos escribir $V = \sum V^i E_i$. Además, $\langle V, E_i\rangle = \langle \sum V^j E_j, E_i\rangle = \sum V^j \langle E_j, E_i\rangle = \varepsilon_i V^i$, donde $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$, luego

$$V = \sum \varepsilon_i \langle V, E_i\rangle E_i. \tag{3.1}$$

Por tanto,

$$\langle V, W\rangle = \sum \varepsilon_i \langle V, E_i\rangle\langle W, E_i\rangle.$$

En un entorno normal coordenado de un punto p, la base de las parciales es ortonormal y los corchetes de Lie son nulos en el origen p. Pero en un entorno general, es necesario valorar en cada caso el uso de la referencia de campos $E_1,\ldots,E_n$ o el uso de $\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}$. El primero tiene como ventaja que $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}\varepsilon_j$ frente a $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = g_{ij}$, pero los corchetes de Lie $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}]$ se anulan y los de los campos de referencia no tienen por qué anularse.

Definición 3.38. Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ una curva diferenciable sobre M. Un *campo de referencias ortonormales a lo largo de la curva* α es un conjunto de campos vectoriales $\{E_1,\ldots,E_n\}$ a lo largo de α, ortogonales y unitarios.

Esta referencia de campos se puede definir sobre toda la curva, y además los campos vectoriales se pueden elegir paralelos:

Proposición 3.39. *Si $\alpha : I \longrightarrow M$ es una curva, y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal del espacio tangente $T_{\alpha(0)}(M)$, entonces hay un único campo de referencias ortonormales $\{E_1, \ldots, E_n\}$ a lo largo de α tal que $E_i(0) = e_i$ para $1 \leq i \leq n$.*

Demostración. Por la proposición 2.44, existe un único campo vectorial paralelo E_i en α tal que $E_i(0) = e_i$ para $1 \leq i \leq n$. Sabemos que estos campos vectoriales son ortonormales en $\alpha(0)$, ya que $e_1, \ldots, e_n$ es una referencia en $\alpha(0)$. Como vimos en la proposición 2.46, las traslaciones paralelas son isometrías lineales, luego se conservan los productos $\langle\,,\rangle$ y $E_1, \ldots, E_n$ son ortonormales en todo $\alpha(t)$, $t \in I$.

□

Con lo anterior ya podemos afirmar que las referencias de campos sobre M existen localmente. Sea $p \in M$. Dada cualquier referencia ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ del espacio tangente $T_p(M)$, se coge un entorno normal U de p y se extiende la referencia anterior a una referencia de campos $E_1, .., E_n$ en U por transporte paralelo sobre geodésicas radiales.

3.6. Operadores diferenciales

En esta sección, se van a estudiar las generalizaciones a las variedades semi-riemannianas de algunos operadores diferenciales muy importantes en el cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$. Por tanto, se supone que M es una variedad semi-riemanniana.

Definición 3.40. El *gradiente* de una aplicación $f \in \mathcal{F}(M)$ es el campo de vectores métricamente equivalente a la diferencial $df \in \mathcal{X}^*(M)$. Se denota como $grad(f)$.

Por tanto, $\langle grad(f), X\rangle = df(X) = X(f)$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Proposición 3.41. *Sea U es un abierto de M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. En U se tiene:*

$$grad(f) = \sum_{ij}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Demostración. Como $f \in \mathcal{F}(M)$, $df = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$ en U.

Además, como $grad(f) \in \mathcal{X}(M)$, su expresión en U será de la forma $grad(f) = \sum F^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, con $F^j \in \mathcal{F}(M)$. Se tiene por tanto lo siguiente:

- $\langle grad(f), \dfrac{\partial}{\partial x^i}\rangle = df(\dfrac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_j^n \dfrac{\partial f}{\partial x^j} dx^j(\dfrac{\partial}{\partial x^i}) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$
- $\langle grad(f), \dfrac{\partial}{\partial x^i}\rangle = \sum F^j \langle \dfrac{\partial}{\partial x^j}, \dfrac{\partial}{\partial x^i}\rangle = \sum F^j g_{ji}.$

Igualando las dos expresiones, y denotado por $G = (g_{ij})$ a la matriz de la métrica, se tiene:

$$(F_1, \dots, F_n)G = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}).$$

Multiplicando por G^{-1} los dos términos por la derecha:

$$(F_1, \dots, F_n) = (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n})G^{-1}.$$

Por lo que $F_j = \sum g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$.

□

Definición 3.42. Sea A un campo tensorial diferenciable en M. Una *divergencia* de A, denotada en general por $div(A)$, es la contracción del nuevo argumento covariante de su diferencial covariante $D(A)$ con uno de sus argumentos orginales.

Vamos a estudiar dos casos en los que existe una única divergencia:

Proposición 3.43.

1. *Si $X \in \mathcal{X}(M)$, entonces $div(X) = C^1_1(DX)$. Si U es un abierto de M con coordenadas $x^1, \dots, x^n$, y denotamos por X^i a las componentes de X en U, entonces se tiene que en U:*
$$div(X) = \sum_i^n \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_l \Gamma^i_{il} X^l \right).$$

2. *Si $b \in \mathcal{T}^0_2(M)$ es simétrico, entonces $div(b) = C_{13}(Db) = C_{23}(Db) \in \mathcal{X}^*(M)$. Si U es un abierto de M con coordenadas $x^1, \dots, x^n$, y denotamos por b_{ij} a las componentes de b en U, entonces en U:*
$$div(b) = \sum_{jlk}^n g^{lk} \left(\frac{\partial b_{lj}}{\partial x^k} - \sum_m (\Gamma^m_{kl} b_{mj} + \Gamma^m_{kj} b_{lm}) \right) dx^j.$$

Demostración.

1. Como $X \in \mathcal{X}(M) = \mathcal{T}^1_0(M)$, entonces $DX \in \mathcal{T}^1_1(M)$, por lo que la única contracción que se puede aplicar sobre DX es C^1_1.

   Las componentes de DX son las siguientes, debido a la proposición 2.29:
$$(DX)^i_j = DX(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}) = D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} X(dx^i) = \sum_k \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} + \sum_j \Gamma^k_{jl} X^l \right) \frac{\partial}{\partial x^k}(dx^i) =$$
$$= \sum_{ij}^n \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \sum_l \Gamma^i_{jl} X^l \right).$$

Debido a la expresión 2.1, se tiene:

$$div(X) = \sum_{i}^{n} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{l} \Gamma^i_{il} X^l \right).$$

2. Como $b \in \mathcal{T}^0_2(M)$, entonces $Db \in \mathcal{T}^0_3(M)$. Por tanto, hay dos contracciones posibles que cumplen la condición de la definición, C_{13} y C_{23}. Veamos que coinciden, para lo cual comprobaremos que coinciden en cualquier entorno coordenado.

   Por la proposición 3.36, las componentes de $C_{13}(Db)$ son:

$$C_{13}(Db)_j = \sum g^{lk} Db_{ljk}.$$

   Veamos cuáles son las expresiones de las componentes de Db, para lo que utilizamos la regla del producto de las derivaciones (proposición 2.12):

$$\begin{aligned}
Db_{ljk} &= Db(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) = D_{\frac{\partial}{\partial x^k}}(b)(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \\
&= D_{\frac{\partial}{\partial x^k}}(b(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j})) - b(D_{\frac{\partial}{\partial x^k}}(\frac{\partial}{\partial x^l}), \frac{\partial}{\partial x^j}) - b(\frac{\partial}{\partial x^l}, D_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j})) = \\
&= \frac{\partial b_{lj}}{\partial x^k} - b(\sum_m \Gamma^m_{kl} \frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^j}) - b(\frac{\partial}{\partial x^l}, \sum_m \Gamma^m_{kj} \frac{\partial}{\partial x^m}) = \\
&= \frac{\partial b_{lj}}{\partial x^k} - \sum_m (\Gamma^m_{kl} b_{mj} + \Gamma^m_{kj} b_{lm}).
\end{aligned}$$

   Por último, como b y g son simétricos, se tiene:

$$C_{23}(Db)_j = \sum g^{lk} Db_{jlk} = \sum g^{lk} Db_{ljk} = C_{13}(Db)_j,$$

   por lo que queda probado que es la única divergencia posible de b.

□

Definición 3.44. Sea $f \in \mathcal{F}(M)$. Se llama *hessiana* de f a la segunda diferencial covariante $H^f = D(Df)$.

Proposición 3.45. *La hessiana de f es un campo tensorial simétrico de tipo $(0,2)$ tal que*

$$H^f(X,Y) = X \circ Y(f) - D_X(Y)(f) = g(D_X(grad(f)), Y).$$

Si U es un abierto de M con coordenadas $x^1, \dots, x^n$, entonces en U:

$$H^f = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) dx^i \otimes dx^j.$$

Demostración. Se tiene que $Df = df$, ya que $Df(X) = D_X(f) = X(f) = df(X)$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Aplicando la regla del producto de las derivaciones (proposición 2.12) se tiene lo siguiente:

$$D(Df)(X,Y) = D_Y(Df)(X) = D_Y(df)(X) = D_Y(df(X)) - df(D_Y(X)) = \\ = D_Y(X(f)) - D_Y(X)(df) = Y(X(f)) - D_Y(X)(df).$$

Debido a la propiedad (D4) de la conexión de Levi-Civita ($[X,Y] = D_X(Y) - D_Y(X)$) del teorema 2.26, se da la siguiente igualdad:

$$D(Df)(X,Y) = X(Y(f)) - D_X(Y)(df),$$

y se deduce que la hessiana es simétrica.

Por la propiedad (D5) de la conexión de Levi-Civita (teorema 2.26) se tiene que:

$$Xg(grad(f),Y) = g(D_X(grad(f)),Y) + g(grad(f),D_X(Y)).$$

Como $g(grad(f),Y) = df(Y) = Y(f)$ y $g(grad(f),D_X(Y)) = D_X(Y)(f)$, se tiene la última igualdad a probar:

$$X(Y(f)) - D_X(Y)(df) = g(D_X(grad(f)),Y).$$

Finalmente, si U es un abierto de M con coordenadas $x^1,\ldots,x^n$, se tiene que las componentes de la hessiana de f son:

$$H^f_{ij} = H^f(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^i}\circ\frac{\partial}{\partial x^j}(f) - D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\frac{\partial}{\partial x^j})(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} - \sum_k^n \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

□

Definición 3.46. Sea $f \in \mathcal{F}(M)$. La *laplaciana* de f, Δf, es la divergencia de su gradiente. Es decir, $\Delta f = div(grad(f)) \in \mathcal{F}(M)$.

Proposición 3.47. *La laplaciana de f es la contracción de su hessiana.*

Demostración. Como la diferencial covariante conmuta con el operador subida de índice, y además $\uparrow^1_1(df) = grad(f)$, se tiene que:

$$\Delta f = div(grad(f)) = C^1_1\circ D(grad(f)) = C^1_1\circ D\circ\uparrow^1_1(df) = C^1_1\circ\uparrow^1_1\circ D(df) = \\ = C_{12}D(df) = C_{12}(H^f).$$

□

Proposición 3.48. *Sea U un abierto de M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$. En U, se tiene que:*

$$\Delta(f) = \sum_{ij}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right).$$

Demostración. Como $\Delta(f) = C_{12}(H^f) \in \mathcal{X}(M)$, por la proposición 3.36 se tiene:

$$\Delta(f) = \sum_{ij} g^{ij} H_{ij}^{f}.$$

$\square$

Observación 3.49. En el espacio $\mathbb{R}^3$ se obtienen los operadores clásicos, ya que los símbolos de Christoffel son nulos, como vimos en la proposición 2.30.

3.7. Curvatura de Ricci y Curvatura Escalar

Sea $R : \mathcal{X}(M)^3 \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ el tensor de curvatura de Riemann de una variedad semi-riemanniana M. Hemos visto que, debido a la observación 1.69, el tensor de curvatura de Riemann se puede entender como un campo tensorial diferenciable de tipo $(1, 3)$ en M. Utilizaremos la notación $\overline{R} : \mathcal{X}^*(M) \times \mathcal{X}(M)^3 \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ para distinguir las dos formas de entender el tensor de curvatura. De esta manera, vimos que $\overline{R}(\theta, X, Y, Z) = \theta(R(X, Y, Z))$ para todo $\theta \in \mathcal{X}^*(M)$ y $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Vamos a estudiar una aplicación necesaria para definir el tensor de curvatura de Ricci:

Sea V un K-espacio vectorial. Sea $\widetilde{\phi}^{13} : V \times V^* \times V^* \times V^* \longrightarrow V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$ la aplicación K-multilineal dada por $\widetilde{\phi}^{13}(v, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = v \otimes \varphi_3 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_1$. Como vimos en la proposición 1.53, esta induce una aplicación K-lineal $\phi^{13} : V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^* \longrightarrow V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$ tal que $\phi^{13}(v \otimes \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3) = v \otimes \varphi_3 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_1$.

La aplicación ϕ^{13} es su propia inversa, por lo que es un isomorfismo. Además, si $A \in T_s^r(V)$, sus coordenadas respecto a una base cumplen que $\phi^{13}(A)_{ijk}^{l} = A_{kji}^{l}$.

Definición 3.50. El *tensor de curvatura de Ricci* de M, al que denotamos por Ric, se define como $Ric = C_2^1(\phi^{13}(\overline{R})) \in \mathcal{T}_2^0(M)$.

En esta sección, si $\{V_1, \ldots, V_n\}$ es una base de $\mathcal{X}(M)$, denotamos por V_i^* a los elementos de la base dual, y no a las 1-formas métricamente equivalentes a estos campos tensoriales.

La siguiente proposición se cumple para una base cualquiera de $\mathcal{X}(M)$, sin necesidad de que sea ortonormal.

Proposición 3.51. *Si $\{V_1, \ldots, V_n\}$ es una base de $\mathcal{X}(M)$ y $\{V_1^*, \ldots, V_n^*\}$ es su base dual, entonces:*

$$Ric_{ij} = \sum R^m_{ijm},$$

donde

$$R^l_{ijm} = V_l^*(R(V_j, V_m, V_i)).$$

Demostración. Si definimos $R^l_{kij} = V_l^*(R(V_i, V_j, V_k))$, se tiene

$$R(V_i, V_j, V_k) = \sum_l R^l_{kij} V_l.$$

Por tanto,

$$R^l_{kij} = V_l^*(R(V_i, V_j, V_k)) = \overline{R}(V_l^*, V_i, V_j, V_k) = \overline{R}^l_{i,j,k}.$$

Por otra parte, como $Ric \in \mathcal{T}_2^0(M)$, podemos escribir:

$$Ric(R) = \sum_{ij} Ric_{ij} V_i^* \otimes V_j^*,$$

y por definición, $Ric(R) = C_2^1(\phi^{13}(\overline{R}))$, por lo que:

$$Ric_{ij} = \sum_m (\phi^{13}(\overline{R}))^m_{imj} = \sum_m \overline{R}^m_{jmi} = \sum_m R^m_{ijm}.$$

□

Observación 3.52. Se puede probar que las únicas contracciones no nulas de $\phi^{13}(\overline{R})$ son $\pm Ric$.

Proposición 3.53. *Respecto a un campo de referencias ortonormales $\{E_1, \ldots, E_n\}$:*

$$Ric(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{X,E_m} Y, E_m \rangle$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, con $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$.

En particular, el tensor de curvatura de Ricci es simétrico.

Demostración. Sea $\{E_1^*, \ldots, E_n^*\}$ la base dual de $\{E_1, \ldots, E_n\}$.

Debido a la ecuación 3.1, se tiene:

$$R(E_i, E_j, E_k) = \sum_l R^l_{kij} E_l,$$

donde

$$R^l_{kij} = \varepsilon_l \langle R(E_i, E_j, E_k)), E_l \rangle.$$

Como $Ric \in \mathcal{T}^0_2(M)$, utilizando las bases anteriores podemos escribir:

$$Ric = \sum_{ij} Ric_{ij} E^*_i \otimes E^*_j = \sum_{ijm} R^m_{ijm} E^*_i \otimes E^*_j = \sum_{ijm} \varepsilon_m \langle R(E_j, E_m, E_i), E_m \rangle E^*_i \otimes E^*_j.$$

Por tanto, si $X = \sum X^k E_k$ y $Y = \sum Y^k E_k$, debido a la a la proposición 3.7 y a la $\mathcal{F}(M)$-multilinealidad de R y de la métrica, se tiene que:

$$\begin{aligned} Ric(X.Y) &= \sum_{ijm} \varepsilon_m \langle R(E_j, E_m, E_i), E_m \rangle E^*_i \otimes E^*_j(X, Y) = \\ &= \sum_{ijm} \varepsilon_m \langle R_{E_j, E_m}(E_i), E_m \rangle E^*_i(X) E^*_j(Y) = \sum_{ijm} \varepsilon_m \langle R_{E_j, E_m}(E_i), E_m \rangle X^i Y^j = \\ &= \sum_m \varepsilon_m \langle R_{Y, E_m}(X), E_m \rangle = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{X, E_m}(Y), E_m \rangle. \end{aligned}$$

De la parte 4 de la proposición 3.7, se deduce que el tensor de curvatura de Ricci es simétrico.

□

Definición 3.54. Si el tensor de curvatura de Ricci de M es idénticamente nulo se dice que M es *plana de Ricci*.

Como la curvatura seccional detemina R, también determinará Ric.

Definición 3.55. La *curvatura escalar* S de M es la contracción $C(Ric) \in \mathcal{F}(M)$ del tensor de Ricci.

En función de las coordenadas,

$$S = \sum_{ij} g^{ij} Ric_{ij} = \sum_{ijk} g^{ij} R^k_{ijk}.$$

Y respecto a un campo de referencias ortonormales:

$$S = 2 \sum_{i<j} K(E_i, E_j),$$

ya que

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_i \varepsilon_i Ric_{ii} = \sum_i \varepsilon_i Ric(E_i, E_i) = \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle R_{E_i, E_j} E_i, E_j \rangle = \\
&= \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j K(E_i, E_j)(\varepsilon_i \varepsilon_j - (\langle E_i, E_j \rangle)^2) = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j)(1 - \delta_j^i) = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j) = \\
&= 2 \sum_{i<j} K(E_i, E_j).
\end{aligned}
$$

La siguiente proposición es crucial para el estudio de la relatividad general.

Proposición 3.56.

$$dS = 2div(Ric)$$

Demostración. Sea U un entorno normal de M con coordenadas $x^1, \ldots, x^n$.

En esta proposición haremos uso de la siguiente notación. Si $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, denotaremos las coordenadas de $DA \in \mathcal{T}_{s+1}^r$ por $A_{j_1, \ldots, j_s; k}^{i_1, \ldots, i_r}$.

Debido a la proposición 3.13 se cumple la siguiente igualdad:

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^r}}(R)_{\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}} + D_{\frac{\partial}{\partial x^k}}(R)_{\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^r}} + D_{\frac{\partial}{\partial x^l}}(R)_{\frac{\partial}{\partial x^r}, \frac{\partial}{\partial x^k}} = 0.$$

Como $D_{\frac{\partial}{\partial x^r}}(R)_{\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}}(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_i R_{jkl;r}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, evaluando la expresión anterior en $\frac{\partial}{\partial x^j}$ se obtiene que:

$$\sum_i \left(R_{jkl;r}^i + R_{jlr;k}^i + R_{jrk;l}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = 0,$$

luego

$$R_{jkl;r}^i + R_{jlr;k}^i + R_{jrk;l}^i = 0.$$

Contrayendo sobre los índices i y r, y utilizando que $R_{jrk;l}^i = R_{jkr;l}^i$ (proposición 3.7):

$$\sum_r R_{jkl;r}^i + \sum_r R_{jlr;k}^i - \sum_r R_{jkr;l}^i = 0.$$

Y por la definición de tensor de Ricci esto corresponde a:

$$\sum_r R_{jkl;r}^i + Ric_{jl;k} - Ric_{jk;l} = 0.$$

Haciendo la contracción métrica en j y k, se obtiene:

$$\sum_{r,j,k} g^{jk} R_{jkl;r}^r + \sum_{j,k} g^{jk} Ric_{jl;k} - \sum_{j,k} g^{jk} Ric_{jk;l} = 0.$$

El tercer término corresponde a la coordenada l-ésima de la diferencial covariante de la curvatura escalar:

$$\sum_{j,k} g^{jk} Ric_{jk;l} = C_1^1(DRic_l) = D(C_1^1 Ric)_l = D(S)_l = S_{;l},$$

y además $D(S) = dS$, por lo que se corresponde con dS_l.

El segundo término es la coordenada l-ésima de la divergencia de la curvatura de Ricci. Esto se justifica porque la curvatura de Ricci es simétrica y utilizando la proposición 3.43 se tiene $C_3^1(DRic) = div(Ric)$.

Operamos en el primer sumando, teniendo en cuenta la relación entre el tensor de curvatura de Riemann y el de Riemann-Christoffel (3.4), al cual vamos a denotar por $\widetilde{R}$:

$$\sum_{r,j,k} g^{jk} R^r_{jkl;r} = \sum_{r,j,k,m} g^{jk} g^{mr} \widetilde{R}_{mjkl;r} = \sum_{r,j,k,m} g^{mr} g^{jk} \widetilde{R}_{jmlk;r} = \sum_{r,j,k} g^{mr} R^r_{mlk;r},$$

que corresponde a su vez con la coordenada l-ésima de la divergencia de la curvatura de Ricci.

Por tanto, se tiene que $2div(Ric)_l = dS_l$, por lo que se cumple la igualdad del enunciado. $\square$

Capítulo 4

Introducción a la relatividad especial

A finales del siglo XIX se empezó a aceptar la existencia de varios problemas importantes en la física newtoniana, relacionados con las propiedades de la luz. Muchos científicos tales como Lorenz o Poincaré hicieron progresos en la resolución de estos problemas, pero el primero que dio una solución fue Einstein con la teoría de la relatividad especial. La base de esta fue el cambio de las coordenadas espaciales y temporales. Más adelante, Minkowski mostró que esto se da de forma natural al intercambiar los espacios $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^4_1$. Escribió: "De aquí en adelante el espacio por sí mismo, y el tiempo por sí mismo, están condenados a desvanecerse en meras sombras, y solo una especie de unión de los dos preservará una realidad independiente".

En este capítulo introduciremos algunas nociones básicas sobre la relatividad especial y algunos conceptos necesarios para desarrollar esta teoría en el marco de la geometría semi-riemanniana. Nos centraremos en dar las ideas básicas, omitiendo las demostraciones. Este es uno de los ejemplos más característicos de las aplicaciones de la geometría semi-riemanniana, entre los que se incluyen a su vez áreas científicas como la relatividad general o la electrodinámica.

4.1. Geometría lorentziana

En este apartado nos centraremos en las variedades lorentzianas y su geometría, que será indispensable para el desarrollo de la relatividad especial.

Recordemos que una variedad lorentziana es una variedad semi-riemanniana de índice $\nu = 1$ y dimensión $n \geq 2$.

4.1.1. Carácter causal lorentziano en espacios vectoriales

Definición 4.1. Un espacio vectorial con un producto escalar de índice uno y dimensión mayor o igual que dos se llama *espacio vectorial lorentziano.*

Definición 4.2. Sea (V, g) un espacio vectorial lorentziano. El *carácter causal* de un vector $v \in V$ se define como:

1. *Espacial* si $\langle v, v\rangle > 0$ o $v = 0$.
2. *Nulo* o *luminoso* si $\langle v, v\rangle = 0$ y $v \neq 0$.
3. *Temporal* si $\langle v, v\rangle < 0$.

Se dice que el vector es *causal* si es temporal o nulo. Además, el conjunto de todos los vectores nulos se llama *cono de luz* de V, y se denota por Λ.

Definición 4.3. Sea (V, g) un espacio vectorial lorentziano, y sea $W \subset V$ un subespacio de V. Se define el *carácter causal* de W como:

1. *Espacial* si $g\big|_W$ es definido positivo.
2. *Nulo* o *luminoso* si $g\big|_W$ es degenerado.
3. *Temporal* si $g\big|_W$ es no degenerado de índice 1.

Esta clasificación es excluyente. Además, el carácter causal de un vector $v \in V$ coincide con el carácter causal del subespacio $\mathbb{R}v = \{av : a \in \mathbb{R}\}$.

Proposición 4.4. *Sea W un subespacio de un espacio vectorial lorentziano V. Entonces:*

1. *W es temporal si y solo si $W^\perp$ es espacial.*
2. *W es espacial si y solo si $W^\perp$ es temporal.*
3. *W es luminoso si y solo si $W^\perp$ es luminoso.*
4. *Dos vectores luz son ortogonales si y solo si son proporcionales.*

Proposición 4.5. *Un subespacio W de un espacio vectorial lorentziano V es espacial si y solo si todos sus vectores son espaciales.*

Proposición 4.6. *Si W es un subespacio de un espacio vectorial lorentziano V, con $dimW \geq 2$, entonces los tres enunciados siguientes son equivalentes:*

- *W es temporal.*
- *W contiene un vector temporal.*
- *W contiene dos vectores luminosos linealmente independientes.*

Proposición 4.7. *Si W es un subespacio de un espacio vectorial lorentziano V, los siguientes resultados son equivalentes:*

- *W es luminoso.*
- *W contiene un vector luz, pero ninguno temporal.*
- *$W \cap \Lambda = L - 0$, donde L es un subespacio de V de dimensión 1.*

El concepto de carácter causal en espacios vectoriales se puede extrapolar a variedades semi-riemannianas sin dificultad de la manera siguiente. El carácter causal de un vector tangente v a M en p se define como el carácter causal de v en $T_p(M)$. Si P es un abierto de la variedad semi-riemanniana M y para cada $p \in M$, el subespacio $T_p(P)$ del espacio tangente $T_p(M)$ tiene el mismo carácter causal, entonces se dice que este es el carácter causal de P.

Definición 4.8. Se dice que una *curva diferenciable $\alpha : I \longrightarrow M$ es temporal, nula o causal* si $\alpha'(t)$ es un vector temporal, nulo o causal de M para todo $t \in I$, respectivamente.

4.1.2. Conos temporales y orientación temporal en espacios vectoriales

Sea (V, g) un espacio vectorial lorentziano. Denotaremos por $\mathscr{T} \subset V$ al conjunto de los vectores temporales de V.

Definición 4.9. Dado $u \in \mathscr{T}$, se definen los siguientes conjuntos:

1. *Cono temporal de u*: $C(u) = \{v \in \mathscr{T} : g(u, v) < 0\}$.
2. *Cono temporal opuesto de u*: $C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathscr{T} : g(u, v) > 0\}$.
3. *Cono causal de u*: $\overline{C}(u) = \{v \in \mathscr{T} \cup \Lambda : g(u, v) < 0\}$.

Observación 4.10. Si $u \in \mathscr{T}$:

1. Como u es temporal, $u \in C(u)$.
2. Por la proposición 4.4, se tiene que si $u, v \in \mathscr{T}$, entones $g(u, v) \neq 0$, de donde se concluye que $\mathscr{T} = C(u) \cup C(-u)$ para cada $u \in \mathscr{T}$. La unión anterior es disjunta.
3. Como $C(u)$ y $C(-u)$ son abiertos, $\mathscr{T}$ no es conexo.

Proposición 4.11. *Dos vectores temporales están en el mismo cono temporal si y solo si su producto escalar es negativo.*

Por tanto, si $u, v \in \mathscr{T}$ y $u \in C(v)$, entonces $v \in C(u)$ y $C(u) = C(v)$. Como consecuencia, $\mathscr{T}$ es la unión disjunta de dos conos temporales.

Los conos temporales $C(u)$ y $C(-u)$ son convexos, ya que si $v, w \in C(u)$, $tv + (1-t)w \in C(u)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Definición 4.12. Una *orientación temporal de* V es una elección de uno de los dos conos temporales de V. Si el cono temporal está fijado, diremos que V está *orientado temporalmente*. El cono elegido se llama *futuro* y el otro *pasado*.

Proposición 4.13. *Dados* $u, v \in \mathscr{T}$, *se tiene que:*

1. $\| g(u,v) \| \geq \| u \| \| v \|$, *lo que se conoce como* desigualdad de Schwartz invertida. *La igualdad se cumple si y solo si v y w son proporcionales.*
2. *Si* $C(u) = C(v)$, *existe un único ángulo* $\varphi > 0$, *al que llamaremos* ángulo hiperbólico, *tal que* $g(u,v) = - \| u \| \| v \| cosh(\varphi)$.
3. *Si* $C(u) = C(v)$, $\| u+v \| \geq \| u \| \| v \|$, *lo que se conoce como* desigualdad triangular invertida. *La igualdad se cumple si y solo si u y v son proporcionales.*

4.1.3. Conos temporales y orientación temporal en una variedad lorentziana

Ahora vamos a proceder a definir la orientación temporal de una variedad. Una variedad va a ser temporalmente orientable si para cada punto puede elegirse una noción de futuro y pasado, que varíe continuamente.

Definición 4.14. Sea (M, g) una variedad lorentziana y $p \in M$. Se dice que dos vectores temporales $u, v \in T_p(M)$ tienen la misma *orientación temporal* si $g_p(u,v) < 0$, es decir, si están en el mismo cono temporal de $T_p(M)$.

En cada $T_p(M)$, podemos elegir una orientación temporal $\mathcal{T}_p$, es decir, uno de los dos conos temporales. Queremos ver si hay alguna forma adecuada de elegir las orientaciones temporales de los espacios tangentes en cada punto de la variedad.

Definición 4.15. Se dice que una aplicación $p \longrightarrow \mathcal{T}_p$ que asocia a cada $p \in M$ un cono temporal de $T_p(M)$ es *diferenciable* si para todo $p \in M$ existe un entorno U de p y un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(U)$ tal que $X(q) \in \mathcal{T}_q$ para todo $q \in U$.

Una aplicación del tipo anterior se llama *orientación temporal de* M. Se dice que M es *temporalmente orientable* si admite una orientación temporal y, si la orientación ya está fijada, se dice que M está *orientada temporalmente*. Denotaremos por $\overline{\mathcal{T}_p}$ al cono causal de $T_p(M)$ que incluye a $\mathcal{T}_p$.

Definición 4.16. Se dice que $X \in \mathcal{X}(M)$ es un *campo vectorial temporal* si para todo $p \in M$, $X(p) \in T_p(M)$ es un vector temporal de M.

Proposición 4.17. *Una variedad lorentziana M es orientable temporalmente si y solo si existe un campo vectorial temporal $X \in \mathcal{X}(M)$.*

Como consecuencia, en una variedad lorentziana temporalmente orientable, es lo mismo elegir una orientación temporal que fijar un campo vectorial temporal diferenciable en M, el cual se puede tomar unitario sin pérdida de generalidad.

Ejemplo 4.18. *El espacio de Minkowski es orientable temporalmente, y su orientación temporal usual es la dada por el campo vectorial temporal y unitario $\frac{\partial}{\partial x^0}$.*

Definición 4.19. Sea M una variedad lorentziana orientada temporalmente por $\mathcal{T}$. Diremos que:

- Un *vector temporal* $v \in T_p(M)$ es *futuro* si $v \in \mathcal{T}_p$, y que es *pasado* si $v \in -\mathcal{T}_p$.
- Un *vector causal* $v \in T_p(M)$ es *futuro* si $v \in \overline{\mathcal{T}_p}$ y *pasado* si $v \in -\overline{\mathcal{T}_p}$.
- Una *curva diferenciable* $\alpha : I \longrightarrow M$ es *futura* si $\alpha'(t)$ es futuro $\forall t \in I$, y *pasada* si $\alpha'(t)$ es pasado $\forall t \in I$.

4.2. Espacio-tiempo de Minkowski

Es conocido que la mecánica newtoniana encaja en el marco del espacio euclídeo de la siguiente manera:

Definición 4.20.

1. Un *espacio de Newton* es un espacio euclídeo tridimensional E, es decir, una variedad riemanniana isométrica a $\mathbb{R}^3$.
2. Se llama *tiempo de Newton* a $\mathbb{R}$.
3. Un *espacio-tiempo de Newton* es la variedad semi-riemanniana producto $\mathbb{R} \times E$, donde E es un espacio de Newton.
4. Una *partícula newtoniana* es una curva diferenciable $\alpha : I \longrightarrow E$ junto con una *masa* $m : I \longrightarrow (0, \infty)$, que se determina experimentalmente.
5. El *momento* de α es el campo vectorial $m\alpha' \in \mathcal{X}(\alpha)$.
6. La *fuerza* en α se define como $\frac{d(m\alpha')}{dt} \in \mathcal{X}(\alpha)$. Si m es constante, coincide con $m\alpha''$.
7. La *energía cinética* de α es $\frac{1}{2}m \parallel \alpha' \parallel^2 \in \mathcal{F}(\alpha)$.

La física newtoniana trata la luz de manera relativa cuando debería ser tratada de manera absoluta, y trata el movimiento de manera absoluta cuando debería ser tratado de manera relativa.

Recordemos que $c = 3 \cdot 10^8 m/s$ y $G = 6,7 \cdot 10^{-11} m^3/(kg \cdot s^2)$. Sin embargo, en el estudio de los espacios-tiempo, se utilizará el *sistema de unidades geométrico*, en el cual se toman la velocidad de la luz, c, y la constante de gravitación universal, G, adimensionales e iguales a la unidad. De esta manera, tanto la longitud como la masa se miden en unidades de tiempo.

Vamos a definir a continuación los conceptos relacionados con el espacio-tiempo de Minkowski.

Definición 4.21. Un *espacio-tiempo de Minkowski* es una variedad lorentziana (M, g) conexa, 4 dimensional, orientada en el tiempo e isométrica a $\mathbb{R}^4_1$.

Definición 4.22. Se dice que una curva diferenciable en una variedad M, $\alpha : I \longrightarrow M$, está *parametrizada por la longitud de arco* si $\left|\alpha'(t)\right| = \left|g(\alpha'(t), \alpha'(t))\right|^{1/2} = 1$, $\forall t \in I$.

Definición 4.23. Una *partícula material en* M es una curva diferenciable $\alpha : I \longrightarrow M$, con $I \subset \mathbb{R}$, parametrizada por la longitud de arco, temporal y futura.

Dada la trayectoria, la condición de que esté parametrizada por la longitud de arco fija el parámetro, y por tanto la curva. Este recibe el nombre de *tiempo propio*, y se denota por τ.

Cada partícula material posee una *masa* $m : I \longrightarrow (0, \infty)$, que se determina experimentalmente.

Se dice que una partícula material está en *caída libre* si es una geodésica.

Definición 4.24. Una *partícula luminosa en* M es una curva diferenciable $\alpha : I \longrightarrow M$, con $I \subset \mathbb{R}$, geodésica, luminosa y futura.

Como vimos en la proposición 2.52, la condición de ser geodésica no fija el parámetro.

Definición 4.25. Una *línea de espacio-tiempo* es la imagen de una partícula temporal o luminosa en M.

Toda partícula α tiene como imagen una línea del espacio-tiempo, y viceversa.

Definición 4.26. Llamamos *sistema de coordenadas lorentziano o inercial* a cualquier isometría $\xi : M \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$ que preserve la orientación temporal.

Es decir, una carta global $\xi = (x^0, \ldots, x^3) : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es un sistema de coordenadas lorentziano si y solo si $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_j$, donde $\varepsilon = (-1, 1, 1, 1)$ y $\frac{\partial}{\partial x^0}$ es futuro.

Proposición 4.27. *Dada una base ortonormal de $T_p(M)$, $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, tal que e_0 es futuro, existe un único sistema de coordenadas lorentziano $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ tal que $\xi(p) = (0, 0, 0, 0)$ y $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = e_i$ para todo i, $0 \leq i \leq 3$.*

De hecho, el único sistema lorentziano que cumple lo anterior es el sistema normal de coordenadas determinado por $\{e_0, \ldots, e_3\}$.

4.3. Geometría de Minkowski

Un espacio-tiempo de Minkowski (M, g) es isométrico a $\mathbb{R}^4_1$, por lo que:

1. Para todo $p, q \in M$, existe una isometría lineal de $T_p(M)$ en $T_q(M)$ (el transporte paralelo, 2.45).
2. Para cada $p, q \in M$ existe una única geodésica $\sigma : [0, 1] \longrightarrow M$ entre p y q , y por lo visto en el ejemplo 2.57, $\sigma(t) = p + t(q - p)$. Como consecuencia, M es convexa.
3. Debido al ejemplo 2.68, para todo $p \in M$, la exponencial $exp_p : T_p(M) \longrightarrow M$, que cumple $exp_p(v_p) = p + v$, es una isometría. Por tanto, M vista desde p es geométricamente lo mismo que $T_p(M)$ visto desde el 0.

Para cada $p, q \in M$, se denota $\overrightarrow{pq} = \sigma'(0) \in T_p(M)$. Es decir, $exp_p(\overrightarrow{pq}) = q$.

En términos de un sistema coordenado lorentziano $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, se tiene que:

$$\overrightarrow{pq} = \sum_{i=0}^{3} (x^i(q) - x^i(p)) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Las observaciones anteriores sugieren que la causalidad en $T_p(M)$ se va a poder trasladar a M.

Definición 4.28. Dado $p \in M$, se llama *cono temporal futuro (resp. pasado) de p* al conjunto de puntos $q \in M$ tales que $\overrightarrow{pq}$ es temporal futuro (resp. pasado). Análogamente se definen los *conos luminosos y causales futuros y pasados.*

Si $\sigma(t)$, con dominio $[0, 1]$, es geodésica futura entre p y q, entonces $\sigma(1 - t)$ es geodésica pasada entre q y p. Por tanto, si q está en el cono temporal futuro de p, p está en el cono temporal pasado de q. Para los conos luminosos y causales ocurre lo mismo. Llamaremos *cono luminoso de p*, y denotaremos por $\Lambda(p)$, a la unión del cono luminoso futuro y al cono luminoso pasado de p.

El cono causal futuro recibe ese nombre porque un suceso $q \in M$ puede ser influenciado por q, es decir, existe alguna partícula material o luminosa de p a q, si y solo si $\overrightarrow{pq}$ es causal futuro.

Definición 4.29. Dados $p, q \in M$, se define la *separación entre p y q* como $pq = |\overrightarrow{pq}| \geq 0$.

En cualquier sistema de coordenadas lorentziano $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, se tiene:

$$pq = \sqrt{\Big| -(x^0(q) - x^0(p))^2 + \sum_{i=1}^{3}(x^i(q) - x^i(p))^2 \Big|}.$$

Proposición 4.30. *Sean $o, p, q \in M$ tales que $\overrightarrow{op}$ sea espacial y $\overrightarrow{oq}$ sea temporal. Entonces, dos enunciados cualesquiera de los siguientes implican el tercero:*

1. *$\overrightarrow{pq}$ es luminoso.*
2. *$\overrightarrow{op} \perp \overrightarrow{oq}$.*
3. *$op = oq$.*

Proposición 4.31. *Sean $o, p, q \in M$ tales que p y q están en el mismo cono temporal de o y $\overrightarrow{op} \perp \overrightarrow{pq}$. Entonces:*

1. *$oq^2 = op^2 - pq^2$*
2. *$op = oq\, cosh(\varphi)$*
3. *$pq = oq\, sinh(\varphi)$,*

donde φ es el ángulo hiperbólico entre $\overrightarrow{op}$ y $\overrightarrow{oq}$ definido por $g(\overrightarrow{op}, \overrightarrow{oq}) = op\, oq\, cosh(\varphi)$ (proposición 4.13).

Observación 4.32. Dados $p, q \in M$, veamos cuál es el significado físico de la separación pq. Para ello, anticiparemos el concepto de observador que aparece en la siguiente sección.

1. Si $\overrightarrow{pq}$ es temporal futuro, entonces pq coincide con el tiempo propio transcurrido para la única partícula material en caída libre entre p y q.
2. Si $\overrightarrow{pq}$ es luminoso futuro, entonces $pq = 0$.
3. Si $\overrightarrow{pq}$ es espacial futuro, entonces pq es la distancia entre p y q medida por un observador en caída libre y ortogonal a $\overrightarrow{pq}$.

Observamos finalmente que debido a las proposiciones 2.30 y 3.14, el tensor de curvatura de Riemann del espacio-tiempo de Minkowski es idénticamente nulo, y se dice que el espacio-tiempo es plano. Como consecuencia, también son nulos la curvatura seccional, la curvatura escalar y la curvatura de Ricci.

4.4. Observación de partículas

Sea $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3) : M \longrightarrow \mathbb{R}^4_1$ un sistema coordenado lorentziano.

El eje x^0, es decir, la imagen por ξ^{-1} del eje u^0 de $\mathbb{R}^4_1$, es una línea de espacio-tiempo de M, luego es la trayectoria de una geodésica temporal. Además, el subespacio tridimensional $\{x^0 = 0\} = \xi^{-1}(\{u^0 = 0\})$ es isométrico a $\mathbb{R}^3$ por $\overrightarrow{x} := (x^1, x^2, x^3)$.

Definición 4.33. Se denomina *ξ-tiempo* a la función $x^0 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y *ξ-posición* a la función $\overrightarrow{x} = (x^1, x^2, x^3) : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Además, se dice que dos sucesos p y q son *ξ-simultáneos* si $x^0(p) = x^0(q)$.

Proposición 4.34. *Dada una partícula material o luminosa $\alpha : I \longrightarrow M$, la aplicación $t = x^0 \circ \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, a la que llamaremos J.*

Definición 4.35. Si $\alpha : I \longrightarrow M$ es una partícula material o luminosa, se llama *partícula newtoniana asociada a α por ξ* a:

$$\overrightarrow{\alpha} = (\overrightarrow{x} \circ \alpha) \circ (x^0 \circ \alpha)^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

y se dice que $\overrightarrow{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{\alpha}(t)}{dt}$ es su *velocidad relativa.*

La relación entre α y $\overrightarrow{\alpha}$ es una vía para el desarrollo de la relatividad especial. El hecho de aplicar los conceptos newtonianos a $\overrightarrow{\alpha}$ sugiere cómo encontrar sus análogos relativistas para α.

Proposición 4.36. *Si α es luminosa, la imagen por $\overrightarrow{\alpha}$ es una recta y $v(t) = \| \overrightarrow{v}(t) \| = 1$.*

Vimos que dada la trayectoria, el hecho de que α sea luminosa no fija el parámetro, pero sí lo fija si es material, y se llama tiempo propio.

Proposición 4.37. *Si α es material, entonces:*

1. *Se cumple que $v(t) = \| \overrightarrow{v}(t) \| = tanh\,(\varphi(\tau(t))) < 1$, donde $\varphi \geq 0$ es el ángulo hiperbólico entre α' y $\frac{\partial}{\partial x^0} \circ \alpha$, definido como vimos en la proposición 4.13 por $cosh(\varphi) = -g(\alpha', \frac{\partial}{\partial x^0} \circ \alpha)$.*

2. *Se verifica:*

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{d(x^0 \circ \alpha)}{d\tau} = -g(\alpha', \frac{\partial}{\partial x^0} \circ \alpha) = cosh(\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \geq 1.$$

La proposición anterior tiene como consecuencia que para una partícula con tiempo propio τ, cuanto más rápido se mueva respecto al observador, es decir, cuanto mayor sea v, más lento se mueve su "reloj" τ con respecto del "reloj" del observador, t.

Observación 4.38. Si p y q son ξ-simultáneos, es decir, tales que $\overrightarrow{pq} \perp \frac{\partial}{\partial x^0}$, entonces su separación es $pq = \left| \sum_{i=1}^{3}(x^i(q) - x^i(p))^2 \right|^{1/2}$.

Definición 4.39. Un *observador* en un espacio-tiempo de Minkowski (M, g) es una partícula material.

Se ha visto que si $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ es un sistema coordenado lorentziano, el eje x^0 es una línea de espacio-tiempo de M, y por tanto es la trayectoria de un observador en caída libre. Veamos que lo recíproco también se cumple, es decir, que se puede encontrar un sistema coordenado lorentziano a partir de un observador en caída libre que cumpla lo anterior.

Sea $\omega : I \longrightarrow M$ un observador en caída libre. Como es una geodésica, va a estar definido en el cero. Sabemos que $\omega'(0) \in T_{\omega(0)}(M)$ es futuro. Por la proposición 4.27, para cada trío $e_1, e_2, e_3 \in T_{\omega(0)}(M)$ tal que $\{\omega'(0), e_1, e_2, e_3\}$ es una referencia en $T_{\omega(0)}(M)$ existe un sistema coordenado lorentziano $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ que cumple que $\xi(\omega(0)) = (0, 0, 0, 0)$, $\frac{\partial}{\partial x^0}|_{\omega(0)} = \omega'(0)$ y $\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\omega(0)} = e_i$, $1 \leq i \leq 3$. Sabemos que es la carta normal global de (M, g) asociada a $\{\omega'(0), e_1, e_2, e_3\}$.

Como $\omega'(0) = \sum \frac{d(x^i \circ \omega)}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\omega(0)} = \frac{\partial}{\partial x^0}|_{\omega(0)}$, entonces $x^0 \circ \omega(t) = t$ y $x^i \circ \omega(t) = 0$, $1 \leq i \leq 3$.

Luego dado un observador $\omega : I \longrightarrow M$ en caída libre, existe un sistema coordenado lorentziano $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ tal que su eje x^0 es la trayectoria de ω. Este recibe el nombre de *sistema coordenado lorentziano asociado a* ω.

Definición 4.40. Sea $\omega : I \longrightarrow M$ un observador en caída libre, y ξ su sistema coordenado lorentziano asociado.

1. Se llama ω-*tiempo* a la función ξ-tiempo $x^0 : M \longrightarrow \mathbb{R}$.
2. Se llama ω-*espacio* al isomorfismo $\overrightarrow{x} = (x^1, x^2, x^3) : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$. El hiperplano euclídeo $\{x^0 = 0\}$ es por tanto isomorfo a $\mathbb{R}^3$.
3. Si $\alpha : I \longrightarrow M$ es una partícula material o luminosa, se llama *partícula newtoniana asociada a* α *por* ω a la partícula newtoniana $\overrightarrow{\alpha}$ asociada a α por ξ.

4.5. Energía y momento

En este apartado suponemos que $\omega : I \longrightarrow M$ es un observador con sistema coordenado lorentziano asociado $\xi = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Definición 4.41. Se define la *energía-momento* de una partícula material $\alpha : I \longrightarrow M$ como $P_\alpha = m\alpha' \in \mathcal{X}(\alpha)$.

Definición 4.42. Con respecto al observador ω se definen:

1. La *enegía de* α como $E_\alpha = -g(P_\alpha, \frac{\partial}{\partial x^0}\big|_\alpha)$.
2. El *momento de* α como $\overrightarrow{P}_\alpha = P_\alpha - E_\alpha$.

Debido a la proposición 4.37:

1. $E_\alpha = -g(P_\alpha, \dfrac{\partial}{\partial x^0}\big|_\alpha) = m\dfrac{d(x^0 \circ \alpha)}{dt} = \dfrac{m}{\sqrt{1-v^2}}$.
2. $\overrightarrow{P}_\alpha = P_\alpha - E_\alpha = m\dfrac{d(\overrightarrow{x} \circ \alpha)}{dt} = \dfrac{m\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-v^2}}$.

Es decir, se tiene que $P_\alpha = \overrightarrow{P}_\alpha + E_\alpha(\frac{\partial}{\partial x^0} \circ \alpha)$. Además, como α está parametrizada por la longitud de arco, tomando φ como en la proposición 4.37:

1. $E_\alpha^2 = m^2 + \left|\overrightarrow{P}_\alpha\right|^{1/2}$.
2. $E_\alpha = m\, cosh(\varphi)$.
3. $\left|\overrightarrow{P}_\alpha\right| = m\, sinh(\varphi)$.
4. $\left|\overrightarrow{P}_\alpha\right|/E_\alpha = tanh(\varphi) = v$.

Definición 4.43. Si $\gamma : I \longrightarrow M$ es una partícula luminosa, definimos su *energía-momento* como $P_\gamma = \gamma' \in \mathcal{X}(\gamma)$.

Definición 4.44. Con respecto al observador ω se definen:

1. La *enegía de* γ como $E_\gamma = -g(P_\gamma, \frac{\partial}{\partial x^0}\big|_\gamma)$.
2. El *momento de* γ como $\overrightarrow{P}_\gamma = P_\gamma - E_\gamma$.

Por tanto,

1. $E_\gamma = \dfrac{d(x^0 \circ \gamma)}{dt}$.
2. $\overrightarrow{P}_\gamma = \dfrac{d(\overrightarrow{x} \circ \gamma)}{dt} = \dfrac{m\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-v^2}}$.

Y además $P_\gamma = \overrightarrow{P}_\gamma + E_\gamma(\frac{\partial}{\partial x^0} \circ \gamma)$.

Energía y momento tienen la misma unidad geométrica que la masa, la longitud y el tiempo.

Con este tipo de técnicas se pueden estudiar algunos efectos relativísticos como la paradoja de los gemelos, la suma relativística de velocidades o la contracción de Lorentz.

Bibliografía

[1] R. L. Bishop, S.I.Goldberg. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Publications (1980).

[2] M. P. do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Versión española de J.C.Sabina de Lis (1990).

[3] A. Einstein. *Mi credo humanista*(1950).

[4] C. Fernández Pérez. *Ecuaciones diferenciales I. Ecuaciones lineales*. Pirámide (1996).

[5] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press (1983).

[6] S. Sternberg. *Semi-Riemann Geometry and General Relativity* (2003).

[7] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Editorial Board (1983).