



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Curso 2019-2020

**Polinomios ortogonales clásicos: propiedades asintóticas y su aplicación
a los problemas de interpolación.**

Autor: Raúl González Barragán

Tutor: Dr. Luis M^a Abia Llera

Prefacio

Este trabajo Fin de Grado estuvo motivado por mi interés por los polinomios ortogonales, que se introducen por primera vez en tercer curso del Grado de Matemáticas. Los polinomios ortogonales tienen una teoría muy extensa, con ramificaciones en muchas ramas del Análisis Matemático, y con múltiples aplicaciones a la aproximación de funciones, y en particular, a la aproximación de las funciones especiales de la Física Matemática.

El capítulo primero es una introducción breve y acelerada a ciertos elementos de la teoría de integración de Riemann-Stieltjes y Lebesgue-Stieltjes, para poner en contexto la definición de polinomios ortogonales con respecto a distribuciones más generales que las dadas por una función peso en un intervalo. Se reúnen en este capítulo también resultados auxiliares de la teoría de la aproximación que serán utilizados más adelante.

El capítulo 2 entra en materia reproduciendo algunas propiedades fundamentales de los polinomios ortogonales ya estudiadas en el Grado, e incorporando algunos resultados clásicos adicionales; en particular, la fórmula de Christoffel-Darboux y los núcleos de reproducción. Se estudian también ciertas fórmulas relacionadas con los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite y las ecuaciones diferenciales que satisfacen, y algunos resultados asintóticos sobre sus ceros y extremos. Estos resultados serán relevantes para las propiedades asintóticas de convergencia de los interpolantes en dichos ceros. Se presentan los principales sistemas clásicos de polinomios ortogonales, pero la Memoria recoge otras clases de polinomios menos conocidos, y que están motivados por aplicaciones al campo de la Estadística.

El capítulo tercero es el proyecto que motiva este trabajo, y se centra en el estudio de las propiedades de convergencia de los interpolantes de Lagrange de una función en las abscisas formadas por los ceros de un sistema de polinomios ortogonales. El núcleo del capítulo se centra en el caso en que las abscisas son las raíces de los polinomios de Jacobi, pero también se formulan resultados para los interpolantes en las raíces de los polinomios de Laguerre. Estos son los principales resultados de la Memoria.

La principal fuente ha sido la monografía clásica de G. Szegő *Orthogonal Polynomials*, en su edición de 1975 por la American Mathematical Society de 1975. En el desarrollo de este trabajo pronto se puso de manifiesto que una Memoria autocontenida necesitaba de un volumen de resultados previos fuera de la dimensión de este Proyecto, por lo que la Memoria desarrolla un discurso que remite en muchas ocasiones a referencias bibliográficas para la prueba de los resultados.

En Valladolid, a 13 de julio de 2020

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Integrales de Stieltjes	1
1.2. Distribuciones, funciones peso y ortogonalidad	5
1.3. Aproximación uniforme por polinomios.	10
2. Definición de polinomios ortogonales, ejemplos principales	13
2.1. Ortogonalidad	13
2.2. Polinomios ortogonales	16
2.3. La fórmula de Christoffel	23
2.4. Polinomios ortogonales clásicos	26
2.5. Propiedades de los polinomios de Jacobi en $[-1, 1]$	30
2.6. Polinomios ortogonales y cuadratura.	31
2.7. Ecuaciones diferenciales y polinomios ortogonales	33
2.8. Propiedades asintóticas de los polinomios clásicos	36
2.9. Polinomios ortogonales no clásicos	39
2.9.1. Una clase de polinomios considerada por S. Bernstein y G. Szego	39
2.9.5. Polinomios de Stieltjes-Wigert	42
2.9.6. Distribuciones del tipo Stieltjes, un análogo de los po- linomios de Legendre	42
2.9.7. Polinomios de Poisson-Charlier	43
2.9.8. Polinomios de Krawtchouk	44
2.9.9. Otros casos especiales	46
3. Interpolación	49
3.1. Definiciones	49
3.2. Convergencia en media de los polinomios de Lagrange	53
3.3. Polinomios de Lagrange en abscisas de Jacobi	56
3.4. Polinomios escalonados en los casos clásicos	63
3.4.2. Polinomios escalonados y polinomios de interpolación Hermite para abscisas de Jacobi	64
3.5. Polinomios escalonados para abscisas de Laguerre	69
3.6. Polinomios de Lagrange para ciertas clases generales de abscisas	71

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se van a mostrar algunos resultados que resultarán útiles a lo largo del trabajo, así como una introducción a las integrales de Riemann-Stieltjes que luego extenderemos a las integrales de Lebesgue-Stieltjes. Estas últimas serán las que emplearemos para el estudio de la ortogonalidad de los polinomios ortogonales clásicos e interpolación en sus ceros. Veremos las definiciones y algunos resultados relativos a estas integrales, así como un repaso a las distribuciones y funciones peso, presentes en este tipo de integrales.

1.1. Integrales de Stieltjes

Definición 1.1.1. Sea \mathcal{C} una colección de conjuntos se dice que es *sin superposiciones* si distintos elementos de \mathcal{C} tienen interiores disjuntos.

Definición 1.1.2. Un *rectángulo* en \mathbb{R}^n es un subconjunto I de \mathbb{R}^n que se puede escribir como el producto cartesiano $\prod_1^N [a_k, b_k]$ de intervalos cerrados $[a_k, b_k]$ con $a_k \leq b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq N$.

Definición 1.1.3. Sea J un rectángulo y \mathcal{C} un recubrimiento de J , se dice que \mathcal{C} es un recubrimiento *exacto* de J si $J = \bigcup \mathcal{C}$.

Definición 1.1.4. Sea \mathcal{C} un recubrimiento finito, exacto y sin superposiciones de un rectángulo J , se llama *dimensión de la malla* a

$$\|\mathcal{C}\| = \max\{\text{diam}(I) : I \in \mathcal{C}\},$$

siendo $\text{diam}(I) = \left(\sum_{k=1}^N (b_k - a_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Definición 1.1.5. Sea $J = [a, b]$ un intervalo acotado de \mathbb{R} , f y α un par de funciones reales en J . Dado un recubrimiento finito, exacto y sin superposiciones \mathcal{C} de J por intervalos cerrados I y $\xi \in \Xi(\mathcal{C})$, siendo este el conjunto

de todas las aplicaciones $\xi : \mathcal{C} \rightarrow \bigcup \mathcal{C}$ tal que $\xi(I) \in I$ para cada $I \in \mathcal{C}$, se define la *suma de Riemann de f sobre \mathcal{C} con respecto a α relativa a ξ* por

$$\mathcal{R}(f|\alpha; \mathcal{C}, \xi) = \sum_{I \in \mathcal{C}} f(\xi(I)) \Delta_I \alpha$$

Denotando como $\Delta_I \alpha$ a la diferencia $\alpha(I^+) - \alpha(I^-)$ siendo I^+ y I^- los puntos del extremo derecho e izquierdo, respectivamente, del intervalo I . Podemos observar que si $\alpha(x) = x$, $x \in J$ entonces $\mathcal{R}(f|\alpha; \mathcal{C}, \xi) = \mathcal{R}(f; \mathcal{C}, \xi)$. Tiene sentido, por tanto, decir que f es *integrable en el sentido de Riemann* en J respecto de α o simplemente *α -Riemann integrable* en J , si existe un número A con la propiedad de que para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{\xi \in \Xi(\mathcal{C})} |\mathcal{R}(f|\alpha; \mathcal{C}, \xi) - A| < \epsilon$$

siempre que \mathcal{C} sea un recubrimiento sin superposiciones, finito y exacto de J satisfaciendo $\|\mathcal{C}\| < \delta$. Asumiendo que f es α -Riemann integrable en J , llamaremos al número A , la *integral de Riemann-Stieltjes de f en J con respecto a α* y usaremos para denotarlo

$$\int_J f(x) d\alpha(x)$$

Ejemplo 1.1.1. Si $f \in C(J)$ y $\alpha \in C^1(J)$ entonces se puede usar el teorema del valor medio para comprobar que f es α -Riemann integrable en J y que

$$\int_J f(x) d\alpha(x) = \int_J f(x) \alpha'(x) dx \quad (1.1)$$

Ejemplo 1.1.2. Si existen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tal que α es constante en cada intervalo (a_{m-1}, a_m) , $m = 1, 2, \dots, n$, entonces para toda $f \in C([a, b])$ es α -Riemann integrable en el intervalo $[a, b]$ y

$$\int_{[a, b]} f(x) d\alpha(x) = \sum_{m=0}^n f(a_m) d_m,$$

donde $d_0 = \alpha(a+) - \alpha(a)$, $d_m = \alpha(a_m+) - \alpha(a_m-)$ para $1 \leq m \leq n-1$, y $d_n = \alpha(b) - \alpha(b-)$. Se usa la notación $\alpha(x+)$, $\alpha(x-)$ para referirse a los límites por la derecha y por la izquierda de $\alpha(x)$ en x .

Corolario 1.1.3. *Veamos un par de propiedades:*

1. Si existen $\int_J f_1(x) d\alpha(x)$ y $\int_J f_2(x) d\alpha(x)$ (es decir, si f_1 y f_2 son α -Riemann integrable en J), entonces para todos los números reales γ y β , $\gamma f_1 + \beta f_2$ es integrable α -Riemann en J y

$$\int_J (\gamma f_1 + \beta f_2)(x) d\alpha(x) = \gamma \left(\int_J f_1 d\alpha(x) \right) + \beta \left(\int_J f_2(x) d\alpha(x) \right)$$

2. Si $J = J_1 \cup J_2$ con $\emptyset = \text{int}(J_1) \cap \text{int}(J_2)$ (siendo $\text{int}(A)$ el interior de A) y si f es integrable α -Riemann en J , entonces f es integrable α -Riemann en J_1 y J_2 y

$$\int_J f(x)d\alpha(x) = \int_{J_1} f(x)d\alpha(x) + \int_{J_2} f(x)d\alpha(x)$$

Tanto los dos puntos del ejemplo como las dos propiedades del corolario son consecuencias directas de la definición de integrabilidad de Riemann. El siguiente teorema también es consecuencia de ello aunque de forma no tan obvia.

Definición 1.1.6. Sea f una función acotada, llamamos *norma uniforme de f* y denotamos $\|f\|_u$ al supremo de f sobre el conjunto en el cual f está definida.

Teorema 1.1.4. Si f es integrable α -Riemann en $J = [a, b]$, entonces α es integrable f -Riemann en J y

$$\int_J \alpha(x)df(x) = \alpha(b)f(b) - \alpha(a)f(a) - \int_J f(x)d\alpha(x) \quad (1.2)$$

La demostración la podemos encontrar en el teorema 1.2.7 del capítulo 1 del libro [17].

Aunque este teorema nos muestra que es natural considerar que f y α juegan papeles simétricos en la teoría de integración de Riemann-Stieltjes, en la práctica se suele imponer una condición sobre α que garantice que todo $f \in C(J)$ es integrable en sentido Riemann con respecto a α y además que

$$\left| \int_J f(x)d\alpha(x) \right| \leq K_\alpha \|f\|_u, \quad (1.3)$$

para algún $K_\alpha < \infty$ y para todo f α -Riemann integrable en J . El ejemplo 1.1.1 nos dice que la condición sobre α que nos garantiza la integrabilidad α -Riemann para toda f continua es que $\alpha \in C^1(J)$. Además, en el caso de la ecuación (1.1) es fácil comprobar que la desigualdad (1.3) se cumple con $K_\alpha = \|\alpha'\|_u(b - a)$.

Por otra parte, el ejemplo 1.1.2 deja claro que α no necesita ser continua, ni mucho menos diferenciable, para que la integración de Riemann respecto de α tenga las propiedades anteriores. El siguiente teorema es muy importante ya que profundiza en este aspecto.

Teorema 1.1.5. Sea α no decreciente en J . Entonces cada $f \in C(J)$ es α -Riemann integrable en J . Además, si f es no-negativa e integrable α -Riemann en J , entonces $\int_J f(x)d\alpha(x) \geq 0$. En particular, (1.3) se cumple con $K_\alpha = \Delta_J \alpha$

Demostración. El hecho de que $\int_J f(x)d\alpha(x) \geq 0$ si f es no-negativa e integrable α -Riemann en J lo obtenemos que $\mathcal{R}(f|\alpha; \mathcal{C}, \xi) \geq 0$ para algún \mathcal{C} y $\xi \in \Xi(\mathcal{C})$, pues α es no decreciente. Aplicando esto a la función $\|f\|_u - f$ y usando la propiedad de la linealidad del corolario 1.1.3 podemos concluir

$$0 \leq \int_J (\|f\|_u - f)d\alpha = \|f\|_u(b-a) - \int_J f d\alpha$$

Luego tenemos que (1.3) se cumple con $K_\alpha = \Delta_J \alpha$. Solo nos falta comprobar que $f \in C(J)$ es integrable α -Riemann en J .

Supongamos que $f \in C(J)$ y definimos

$$U(f|\alpha; \mathcal{C}) = \sum_{I \in \mathcal{C}} (\sup_I f) \Delta_I \alpha \quad y \quad L(f|\alpha; \mathcal{C}) = \sum_{I \in \mathcal{C}} (\inf_I f) \Delta_I \alpha$$

Para \mathcal{C} y $\xi \in \Xi(\mathcal{C})$. Entonces tenemos que

$$L(f|\alpha; \mathcal{C}) \leq \mathcal{R}(f|\alpha; \mathcal{C}, \xi) \leq U(f|\alpha; \mathcal{C})$$

para algún $\xi \in \Xi(\mathcal{C})$. Además para cualquier par \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 se tiene que $L(f|\alpha; \mathcal{C}_1) \leq U(f|\alpha; \mathcal{C}_2)$. Por último, para una partición \mathcal{C} cualquiera se cumple

$$U(f|\alpha; \mathcal{C}) - L(f|\alpha; \mathcal{C}) \leq \omega(\|\mathcal{C}\|) \Delta_J \alpha,$$

con $\omega(\delta)$ definido de la siguiente forma

$$\omega(\delta) = \sup\{\|f(y) - f(x)\| : x, y \in J \text{ y } \|y - x\| \leq \delta\} \quad (1.4)$$

módulo de continuidad de f , por lo tanto llegamos a que

$$\lim_{\|\mathcal{C}\| \rightarrow 0} (U(f|\alpha; \mathcal{C}) - L(f|\alpha; \mathcal{C})) = 0$$

Es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$U(f|\alpha; \mathcal{C}) - U(f|\alpha; \mathcal{C}') \leq U(f|\alpha; \mathcal{C}) - L(f|\alpha; \mathcal{C}) < \epsilon$$

no importa como se elija \mathcal{C}' mientras que $\|\mathcal{C}\| < \delta$. A partir de esto es claro que

$$\lim_{\|\mathcal{C}\| \rightarrow 0} U(f|\alpha; \mathcal{C}) \quad y \quad \lim_{\|\mathcal{C}\| \rightarrow 0} L(f|\alpha; \mathcal{C})$$

existen y son iguales. □

Podemos extender este último resultado con la siguiente proposición

Proposición 1.1.6. *Sea f Riemann integrable en J respecto tanto de α_1 como de α_2 entonces f es Riemann integrable en J respecto a $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ y*

$$\int_J f(x)d\alpha(x) = \int_J f(x)d\alpha_2(x) - \int_J f(x)d\alpha_1(x)$$

Demostración. Este resultado se obtiene también como consecuencia directa del teorema 1.1.4 combinado con la propiedad 1 del corolario 1.1.3.

Por el teorema 1.1.4

$$\int_J f(x)d\alpha(x) = \alpha(b)f(b) - \alpha(a)f(a) - \int_J \alpha(x)df(x) \quad (1.5)$$

Teniendo en cuenta que $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ y la propiedad 1 del corolario 1.1.3

$$\begin{aligned} \int_J f(x)d\alpha(x) &= \alpha_2(b)f(b) - \alpha_2(a)f(a) - \int_J \alpha_2(x)df(x) \\ &\quad - \left(\alpha_1(b)f(b) - \alpha_1(a)f(a) - \int_J \alpha_1(x)df(x) \right) \end{aligned}$$

aplicando de nuevo el teorema 1.1.4 tenemos

$$\int_J f(x)d\alpha(x) = \int_J f(x)d\alpha_2(x) - \int_J f(x)d\alpha_1(x) \quad (1.6)$$

como queríamos probar. \square

En particular, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.7. *Si $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ donde α_1 y α_2 son funciones no decrecientes en J , entonces cada $f \in C(J)$ es Riemann integrable con respecto a α y (1.3) se cumple con $K_\alpha = \Delta_J\alpha_1 + \Delta_J\alpha_2$.*

1.2. Distribuciones, funciones peso y ortogonalidad .

Veamos para empezar que al menos entre las α 's que son continuas por la derecha en $\text{int}(J)$ y tienen límite por la izquierda en cada punto en $J \setminus J^-$, las funciones α del corolario 1.1.7 son las únicas con las propiedades de que toda $f \in C(J)$ es α -Riemann integrable en J y (1.3) se cumple para algún $K_\alpha < \infty$. El primer paso es dotar de una definición alternativa a estas funciones α en la cual puedan ser expresadas como la diferencia de dos funciones no decrecientes. Con este fin, supongamos que α es una función $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ y definimos

$$\mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}) = \sum_{I \in \mathcal{C}} |\Delta_I \alpha| \quad (1.7)$$

para alguna partición \mathcal{C} de J . Claramente

$$\mathcal{S}(k\alpha; \mathcal{C}) = |k|\mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}), \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (1.8)$$

$$\mathcal{S}(\alpha_1 + \alpha_2; \mathcal{C}) \leq \mathcal{S}(\alpha_1; \mathcal{C}) + \mathcal{S}(\alpha_2; \mathcal{C}), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \quad (1.9)$$

y si α es monótona en J

$$\mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}) = |\Delta_J \alpha| \quad (1.10)$$

Además, si \mathcal{C} es una partición dada y \mathcal{C}' se obtiene a partir de \mathcal{C} sustituyendo alguno de los intervalos I en \mathcal{C} por un par de intervalos $\{I_1, I_2\}$, donde $I = I_1 \cup I_2$ y además $\text{int}(I_1) \cap \text{int}(I_2) = \emptyset$, entonces por la desigualdad triangular

$$\mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}') - \mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}) = |\alpha(I_1^+) - \alpha(I_1^-)| + |\alpha(I_2^+) - \alpha(I_2^-)| - |\alpha(I^+) - \alpha(I^-)| \geq 0 \quad (1.11)$$

Por tanto observamos que

$$\mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}') \geq \mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}) \quad \text{para } \mathcal{C} \leq \mathcal{C}' \quad (1.12)$$

Definición 1.2.1. Sea $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ y \mathcal{C} una partición de $[a, b]$. Se define como *variación de α en J* al número

$$\text{Var}(\alpha; J) \equiv \sup_{\mathcal{C}} \mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}) \quad (1.13)$$

Se dice que α es de *variación acotada* si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que se cumple la desigualdad $\text{Var}(\alpha; J) \leq c$.

Resulta claro que si $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ con α_1, α_2 funciones no decrecientes en J , entonces α es de variación acotada en J y $\text{Var}(\alpha; J) \leq \Delta_J \alpha_1 + \Delta_J \alpha_2$. También se cumple aunque de forma no tan obvia el recíproco, es decir, si α es de variación acotada en J se puede expresar como diferencia de dos funciones no decrecientes. Para probarlo introducimos la notación

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_+(\alpha; \mathcal{C}) &= \sum_{I \in \mathcal{C}} (\Delta_I \alpha)^+ \\ \mathcal{S}_-(\alpha; \mathcal{C}) &= \sum_{I \in \mathcal{C}} (\Delta_I \alpha)^- \end{aligned}$$

donde $a^+ = \max(a, 0)$ y $a^- = -\max(-a, 0)$ para $a \in \mathbb{R}$. Usaremos esta notación también para las variaciones

$$\begin{aligned} \text{Var}_+(\alpha; J) &\equiv \sup_{\mathcal{C}} \mathcal{S}_+(\alpha; \mathcal{C}) \\ \text{Var}_-(\alpha; J) &\equiv \sup_{\mathcal{C}} \mathcal{S}_-(\alpha; \mathcal{C}) \end{aligned}$$

Y las llamaremos *variación positiva* y *variación negativa* respectivamente. Notemos que

$$2\mathcal{S}_{\pm}(\alpha; \mathcal{C}) = \mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}) \pm \Delta_J \alpha \quad (1.14)$$

$$\mathcal{S}_+(\alpha; \mathcal{C}) - \mathcal{S}_-(\alpha; \mathcal{C}) = \Delta_J \alpha \quad (1.15)$$

$$\mathcal{S}_+(\alpha; \mathcal{C}) + \mathcal{S}_-(\alpha; \mathcal{C}) = \mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}) \quad (1.16)$$

Podemos observar que

$$\mathcal{S}_{\pm}(\alpha; \mathcal{C}) \leq \mathcal{S}_{\pm}(\alpha; \mathcal{C}'); \quad \mathcal{C} \leq \mathcal{C}'$$

y que

$$\text{Var}_+(\alpha; J) < \infty \iff \text{Var}(\alpha; J) < \infty \iff \text{Var}_-(\alpha; J) < \infty \quad (1.17)$$

Lema 1.2.1. Si $Var(\alpha; J) < \infty$, entonces

$$Var_+(\alpha; J) + Var_-(\alpha; J) = Var(\alpha; J) \quad (1.18)$$

y

$$Var_+(\alpha; J) - Var_-(\alpha; J) = \Delta_J \alpha \quad (1.19)$$

Demostración. Utilizando la ecuación (1.15) tenemos que

$$\mathcal{S}_\pm(\alpha; \mathcal{C}) = \mathcal{S}_\mp(\alpha; \mathcal{C}) \pm \Delta_J \alpha$$

Como

$$\mathcal{S}_\mp(\alpha; \mathcal{C}) \leq Var_\mp(\alpha; J)$$

entonces

$$\mathcal{S}_\pm(\alpha; \mathcal{C}) \leq Var_\mp(\alpha; J) \pm \Delta_J \alpha$$

Por tanto

$$Var_\pm(\alpha; \mathcal{C}) \leq Var_\mp(\alpha; J) \pm \Delta_J \alpha$$

por lo tanto (1.19) queda probado. Además, utilizando las ecuaciones (1.19) y (1.15) obtenemos

$$Var_+(\alpha; J) - \mathcal{S}_+(\alpha; \mathcal{C}) = Var_-(\alpha; J) - \mathcal{S}_-(\alpha; \mathcal{C})$$

En particular, existe una sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_1^\infty$ tal que $\mathcal{S}_+(\alpha; \mathcal{C}_n) \rightarrow Var_+(\alpha; J)$ cuando $n \rightarrow \infty$ y, a la vez, $\mathcal{S}_-(\alpha; \mathcal{C}_n) \rightarrow Var_-(\alpha; J)$. Por tanto utilizando la relación (1.16) obtenemos

$$Var_+(\alpha; J) + Var_-(\alpha; J) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}_n) \leq Var(\alpha; J)$$

Tenemos también, por la ecuación (1.16)

$$\mathcal{S}(\alpha; \mathcal{C}) = \mathcal{S}_+(\alpha; \mathcal{C}) + \mathcal{S}_-(\alpha; \mathcal{C}) \leq Var_+(\alpha; J) + Var_-(\alpha; J)$$

para cada \mathcal{C} . Combinado con lo anterior se completa la demostración de (1.18). □

Teorema 1.2.2. Sea una aplicación $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ dada. Entonces α es de variación acotada en J si y solo si existen funciones no decrecientes α_1 y α_2 en J tal que $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. De hecho, si α es de variación acotada en $J = [a, b]$ y definimos $\alpha_\pm = Var_\pm(\alpha; [a, x])$ para $x \in J$, entonces α_+ y α_- son no decrecientes y $\alpha(x) = \alpha(a) + \alpha_+(x) - \alpha_-(x)$, $x \in J$. Por último, si α es de variación acotada en J , entonces cada $f \in C(J)$ es Riemann integrable en J con respecto a α y

$$\left| \int_J f(x) d\alpha(x) \right| \leq Var(\alpha; J) \|f\|_u$$

Lema 1.2.3. Si $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite por la derecha en \mathbb{R} para todo $x \in J \setminus J^+$ y límite por la izquierda en \mathbb{R} para todo $x \in J \setminus J^-$, entonces α es acotada y

$$\text{card}(\{x \in \text{int}(J) : |\alpha(x) - \alpha(x^+)| \vee |\alpha(x) - \alpha(x^-)| \geq \epsilon\}) < \infty \quad \forall \epsilon > 0$$

En particular, α tiene una cantidad a lo sumo numerable de discontinuidades. También, si $\tilde{\alpha}(x) \equiv \alpha(x^+)$ para $x \in \text{int}(J)$ y $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(x)$ con $x \in \{J^-, J^+\}$, entonces $\tilde{\alpha}(x)$ es continua por la derecha en $\text{int}(J)$, tiene límite por la izquierda en \mathbb{R} para todo $x \in J \setminus J^-$, y coincide con α en todos los puntos en los que α es continua. Por tanto, si α es Riemann integrable en J con respecto tanto de α como de $\tilde{\alpha}$, entonces $\int_J f(x)d\tilde{\alpha}(x) = \int_J f(x)d\alpha(x)$. Por último, si $f \in C(J)$ es Riemann integrable en J con respecto a α , entonces es también Riemann integrable en J con respecto a $\tilde{\alpha}$.

Tanto el teorema como el lema vienen demostrados en el capítulo 1 del libro [17], son el teorema 1.2.18 y el lema 1.2.20.

Llegados a este punto, cabe destacar, que como vemos en el teorema 2.9.3, el mejor resultado sobre la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes nos dice que si f es continua y α es de variación acotada en $[a, b]$ entonces la integral de Riemann-Stieltjes existe.

Definición 1.2.2. Con las hipótesis de la definición 1.1.5 llamamos *integral de Lebesgue-Stieltjes* a una extensión del concepto de integral de Riemann-Stieltjes en la que se elimina la condición de que a y b sean finitos y se añade que si $a = -\infty$ ó $b = +\infty$ tenemos que $\alpha(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x)$ y, respectivamente, $\alpha(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x)$. Además se pide que $f(x)$ sea de clase $L_\alpha(a, b)$. Esto ciertamente se cumple en el caso de que $f(x)$ sea continua, o de variación acotada, y $[a, b]$ intervalo acotado.

Si f es una función real continua y $\alpha(x)$ es una función real no decreciente, la integral de Lebesgue-Stieltjes es equivalente a la de Riemann-Stieltjes.

Definición 1.2.3. Sea $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función monótona creciente y acotada, se llama *punto de crecimiento efectivo* a todo punto z tal que dados dos puntos x, y cualesquiera con $x < z < y$ se cumple $\alpha(x) < \alpha(y)$.

Definición 1.2.4. Llamaremos *distribución* a una función $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona creciente y acotada, con un conjunto infinito de puntos de crecimiento efectivo y tal que $\int_a^b x^n d\mu_\alpha(x) < \infty$ (pudiendo ser a y b respectivamente $-\infty$ y $+\infty$). Siendo $\mu_\alpha(x)$ la medida de Lebesgue-Stieltjes engendrada por la función monótona $\alpha(x)$.

Además, se puede comprobar que el conjunto de puntos de discontinuidad de α es, a lo sumo, infinito numerable y todas las discontinuidades son de salto (ver en [12] propiedades de las funciones monótonas).

Nota 1.2.4. El conjunto de puntos de crecimiento efectivo se denota por $S(\alpha)$ y coincide con el soporte de la medida, es decir $\text{supp}(\mu_\alpha) = S(\alpha)$.

Nota 1.2.5. $S(\alpha)$ es un conjunto cerrado en la topología usual de \mathbb{R} .

Definición 1.2.5. Se denomina *momento n -ésimo* de la distribución α , definida en la definición , al número:

$$\int_a^b x^n d\mu_\alpha(x) \quad (1.20)$$

cuando existe, y se denota por S_n . Pudiendo ser $a = -\infty$ y $b = +\infty$.

Nota 1.2.6. Es frecuente la notación $\int g(x)d\alpha(x)$ en lugar de $\int g(x)d\mu_\alpha$. Se suele denominar como *medida $d\alpha$* , *distribución α* o *distribución $d\alpha$* .

Nota 1.2.7. Si los momentos convergen, se puede ver que $\alpha(x)$ es de variación acotada dando a n el valor 0.

Definición 1.2.6 (Producto escalar con integral de Lebesgue-Stieltjes). Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente, no constante cumpliendo las hipótesis para la integral de Lebesgue-Stieltjes vistas en la definición 1.2.2. Dadas $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales se define el *producto escalar* de f y g como

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x) \quad (1.21)$$

donde asumimos que $f(x)g(x)$ es de clase $L_\alpha(a, b)$. Esto se cumple si f y g son ambas continuas, o de variación acotada, y $[a, b]$ acotado. En el caso de ser a, b finitos y f, g continuas, estaríamos definiendo el producto escalar para integrales de Riemann-Stieltjes.

Para el caso en el que f y g son funciones con valores complejos definiríamos el producto escalar como

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}d\alpha(x) \quad (1.22)$$

Definición 1.2.7 (Ortogonalidad). Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una distribución con a y b pudiendo ser $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. Se dice que las funciones f y g cumpliendo las hipótesis de la definición anterior son ortogonales en el sentido de Lebesgue-Stieltjes respecto de la distribución $d\alpha(x)$ si se cumple $(f, g) = 0$. Si añadimos las condiciones a, b finitos y f y g continuas tenemos la definición para las integrales de Riemann-Stieltjes.

Nota 1.2.8. Si $\alpha(x)$ es no negativa y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $[a, b]$ tenemos que $\alpha(x) = w(x)dx$ y recaemos en los polinomios ortogonales con respecto a funciones peso en los que el producto escalar se define como $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$. Siendo $w(x)$

una función no negativa medible en el sentido de Lebesgue para la cual $\int_a^b w(x)dx > 0$ y a la que llamaremos *función peso* sobre el intervalo dado. Si $\alpha(x)$ es también derivable tendremos que $d\alpha(x) = \alpha'(x)dx$ y por lo tanto la función peso será $w(x) = \alpha'(x)$. Usaremos el mismo concepto de función peso y de distribución $d\alpha$ en una curva o en un plano complejo.

Nota 1.2.9 (Función cero). Sea $d\alpha(x)$ ó $w(x)dx$ con $a \leq x \leq b$ una distribución fija y consideramos el espacio de las funciones $f(x)$ que son de clase $L^2_\alpha(a, b)$. Llamamos *función cero* a aquellas funciones que cumplen $\|f\| = 0$, es decir, las funciones medibles iguales a cero salvo en un conjunto de medida nula.

Si $\alpha(x)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue f será función cero si y solo si $(f(x))^2w(x)$ o, equivalentemente $f(x)w(x)$, se anula en todo $[a, b]$ excepto un conjunto de medida nula de puntos.

Si $w(x)$ y $f(x)$ son integrables en sentido Riemann, $f(x)$ es una función cero si cumple que $f(x)w(x)$ se anula en todo punto de continuidad.

Nota 1.2.10. En la desigualdad de Schwarz $|fg| \leq \|f\|\|g\|$ se da la igualdad si y solo si $\lambda f(x) + \mu g(x)$ es una función cero con λ y μ constantes adecuadas con al menos una de ellas distinta de cero.

1.3. Aproximación uniforme por polinomios.

Utilizaremos los resultados de aproximación uniforme óptima por polinomios de funciones continuas (teoremas de Jackson).

Teorema 1.3.1. Sea $\omega(\delta)$ el módulo de continuidad (definido en (1.4)) de una función dada $f(x)$, continua en el intervalo acotado $[a, b]$,

$$\omega(\delta) = \text{máx} |f(x') - f(x'')| \quad \text{si} \quad |x' - x''| \leq \delta.$$

Entonces para cada m podemos encontrar un polinomio $\rho(x)$ de grado m , tal que en el intervalo dado de longitud l tenemos

$$|f(x) - \rho(x)| < A\omega(l/m).$$

En el caso de tener una función periódica $f(\theta)$ de periodo 2π , existe un polinomio trigonométrico $g(\theta)$ de grado m tal que

$$|f(\theta) - g(\theta)| < B\omega(2\pi/m).$$

Donde A y B son constantes.

Demostración. La demostración podemos encontrarla en el libro [3]. □

Teorema 1.3.2. *Supongamos que $f(x)$ tiene una derivada continua de orden r en el intervalo acotado $[a, b]$, $r \geq 1$, y sea $\omega_r(\delta)$ el módulo de continuidad de $f^{(r)}(x)$. Entonces existe un polinomio $\rho(x)$ de grado $m + r$ tal que*

$$|f(x) - \rho(x)| < C(l/m)^r \omega_r(l/m), \quad (1.23)$$

$$|f'(x) - \rho'(x)| < C(l/m)^{r-1} \omega_r(l/m), \quad l = b - a. \quad (1.24)$$

Donde C es una constante que depende solo de r .

Podemos obtener desigualdades similares para todas las derivadas $f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x)$.

Demostración. La demostración de podemos encontrar en los libros [3] y [5] \square

Capítulo 2

Definición de polinomios ortogonales, ejemplos principales

2.1. Ortogonalidad

A partir de ahora $\alpha(x)$ es una función fijada no decreciente, que es no constante en el intervalo $[a, b]$ y tal que si $a = -\infty$ o $b = +\infty$ entonces $\alpha(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x)$ y $\alpha(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x)$, respectivamente.

Definición 2.1.1. Un conjunto ortonormal de funciones $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_\ell$ con ℓ finito o infinito, se caracteriza por la relación

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)d\alpha(x) = \delta_{nm} \quad n, m = 0, 1, 2, \dots, \ell$$

Aquí $\phi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, \ell$ toma valores reales y pertenece a la clase $L^2_\alpha(a, b)$.

Teorema 2.1.1. *Sea el conjunto de funciones que toma valores reales $\{f_0, f_1, \dots, f_\ell\}$ con ℓ finito o infinito, todas ellas de clase $L^2_\alpha(a, b)$ y linealmente independientes. Entonces existe un conjunto ortonormal $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_\ell\}$ tal que para $n = 0, 1, 2, \dots, \ell$*

$$\phi_n(x) = \lambda_{n0}f_0(x) + \lambda_{n1}f_1(x) + \dots + \lambda_{nn}f_n(x) \quad \lambda_{nn} > 0$$

El conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_\ell\}$ está unívocamente determinado.

Nota 2.1.2 (Matriz de Gram). Dado un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y un conjunto de funciones linealmente independientes $\{f_0, \dots, f_n\}$ se define como *matriz de Gram* de dicho sistema a la matriz

$$G(f_0, \dots, f_n) = \begin{bmatrix} \langle f_0, f_0 \rangle & \cdots & \langle f_0, f_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f_n, f_0 \rangle & \cdots & \langle f_n, f_n \rangle \end{bmatrix}$$

Por tanto, podemos observar que la matriz de Gram del sistema $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ está estrechamente relacionada con la matriz de la forma cuadrática

$$\|u_0 f_0(x) + u_1 f_1(x) + \dots + u_n f_n(x)\|^2 = \int_a^b (u_0 f_0(x) + \dots + u_n f_n(x))^2 d\alpha(x)$$

ya que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} u_0 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle f_0, f_0 \rangle & \cdots & \langle f_0, f_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f_n, f_0 \rangle & \cdots & \langle f_n, f_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \\ & = \langle u_0 f_0(x) + u_1 f_1(x) + \dots + u_n f_n(x), u_0 f_0(x) + u_1 f_1(x) + \dots + u_n f_n(x) \rangle \\ & = \|u_0 f_0(x) + u_1 f_1(x) + \dots + u_n f_n(x)\|^2 \end{aligned}$$

Definición 2.1.2. Sea $\{\phi(x)\}_{n=0}^\ell$ un conjunto ortonormal dado, finito o infinito. A una función real arbitraria le corresponde el *desarrollo de Fourier*

$$f(x) \sim f_0 \phi_0(x) + f_1 \phi_1(x) + \dots + f_n \phi_n(x) + \dots \quad (2.1)$$

cuyos coeficientes f_n , llamados coeficientes de Fourier de $f(x)$ respecto del sistema dado, son definidos por

$$f_n = (f, \phi_n) = \int_a^b f(x) \phi_n(x) d\alpha(x) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Teorema 2.1.3. Sean $\{\phi(x)\}_{n=0}^\ell$, $f(x)$, f_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ con el mismo significado que en la definición anterior. Sea $\ell \geq 0$ un entero fijo y a_0, a_1, \dots, a_ℓ constantes reales arbitrarias. Si escribimos

$$g(x) = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_\ell \phi_\ell(x)$$

y los coeficientes a_k son variables, la integral

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 d\alpha(x)$$

alcanzará el mínimo si y solo si $a_k = f_k$, con $k = 0, 1, 2, \dots, \ell$

El mínimo sería

$$\int_a^b (f(x))^2 d\alpha(x) - \sum_{k=0}^{\ell} f_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{\ell} f_k^2$$

Como es el mínimo de la integral anterior que es positiva para todo valor de x el mínimo debe ser positivo también luego:

$$f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_{\ell}^2 \leq \|f\|^2$$

y obtenemos por tanto la *desigualdad de Bessel*

$$f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_{\ell}^2 \leq \|f\|^2 = \int_a^b (f(x))^2 d\alpha(x)$$

Si el lado izquierdo es una serie infinita, es convergente. El debate sobre el signo de igualdad nos conduce al concepto de sistema ortonormal completo.

Un ejemplo clásico de desarrollos de Fourier de este tipo son las series ordinarias de Fourier con las funciones $1, \cos nx, \sin nx, n = 1, 2, 3, \dots$; $-\pi \leq x \leq \pi$.

Otra importante caracterización del conjunto ortonormal $\{\phi_0(x), \dots, \phi_{\ell}(x)\}$ se basa en la propiedad anterior del mínimo de las sumas parciales..

Para las variables $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ la expresión

$$\|\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x) + f_n(x)\|$$

alcanza el mínimo si y solo si

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_{n-1} f_{n-1}(x) + f_n(x) = \lambda_{nn}^{-1} \phi_n(x)$$

Estas afirmaciones se pueden extender al caso complejo utilizando el producto interno adecuado, definido en (1.22).

2.2. Polinomios ortogonales

Definición 2.2.1. Sea $\alpha(x)$ una función no decreciente fija con infinitos puntos de crecimiento efectivo en el intervalo acotado o no acotado $[a, b]$, y supongamos que existen para $n = 0, 1, 2, \dots$ los momentos

$$c_n = \int_a^b x^n d\alpha(x)$$

Si ortogonalizamos el conjunto de las potencias sucesivas (son linealmente independientes como veremos)

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

como se hace en el teorema 2.1.1 obtendremos los polinomios

$$p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x), \dots$$

unívocamente determinados por las siguientes condiciones:

1. $p_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficiente de x^n positivo, que denotaremos k_n .
2. El conjunto $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortonormal respecto de la distribución α .

Demostración. En esta demostración veremos la independencia lineal que comentábamos antes. Sea $q(x)$ un polinomio real arbitrario, se tiene que

$$\|q(x)\|^2 = \int_a^b (q(x))^2 d\alpha(x) = 0$$

si y solo si $q(x)$ se anula en todos los puntos de crecimiento de $\alpha(x)$. Puesto que hay infinidad de tales puntos, será idénticamente nulo.

Si $\alpha(x)$ tuviera solo un número finito de puntos de crecimiento efectivo las funciones $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ serían también linealmente independientes. Mediante ortogonalización obtendremos el sistema de polinomios $p_n(x)$ $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ satisfaciendo las dos condiciones anteriores. □

Por otro lado, el hecho de que los momentos existan es equivalente a que las funciones x^n sean de clase $L_\alpha(a, b)$. En el caso en el que la distribución $d\alpha$ sea con peso, es decir, del tipo $w(x)dx$ la definición es similar. Asumimos que $w(x)$ es no negativa y medible en el sentido de Lebesgue y cumple $\int_a^b w(x)dx > 0$. Además, también existirán los momentos $\int_a^b x^n w(x)dx$. Los polinomios p_n serán denominados polinomios ortogonales asociados a la distribución $d\alpha(x)$ (en el caso de no ser con peso) y a la distribución $w(x)dx$ (en el caso de ser con peso), o también se dice asociado a la función peso

$w(x)dx$ en este último caso. Es claro que si la distribución es del tipo $w(x)dx$, el sistema

$$\{p_n(x)w(x)^{\frac{1}{2}}dx\} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

es ortonormal en el sentido habitual.

Nota 2.2.1. Veamos un caso particular de las aplicaciones del teorema 2.1.3 para el caso de los polinomios ortogonales.

La expansión de Fourier de $f(x)$ en términos de los polinomios $p_n(x)$ tiene la forma

$$f(x) \sim f_0 p_0(x) + f_1 p_1(x) + \dots + f_n p_n(x) + \dots$$

con

$$f_n = \int_a^b f(x)p_n(x)d\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Las sumas parciales cumplen la propiedad del mínimo formulada en el Teorema 2.1.3.

Consideramos ahora el conjunto de todos los polinomios $p(x)$ de grado n con coeficiente principal 1, es decir, con coeficiente 1 en la potencia x^n .

Observamos entonces que la integral

$$\int_a^b (p(x)^2) d\alpha(x)$$

alcanza el mínimo si y solo si $p(x) = Cp_n(x)$, con C una constante resultante de normalizar $p(x)$. Si denotamos al coeficiente principal de $p_n(x)$ como k_n el mínimo será k_n^{-2} .

La definición 2.2.1 muestra solo una forma de normalizar los polinomios en cuestión. A veces son apropiadas otras formas de normalizar, como por ejemplo, fijando el valor de $p_n(x)$ en $x = a$ o en $x = b$, o fijando el coeficiente principal de $p_n(x)$.

Veamos ahora unos resultados básicos sobre polinomios ortogonales.

Proposición 2.2.2. *Sea $\{p_n\}$ un conjunto de polinomios ortonormales como los descritos en la definición 2.2.1 se cumple que*

$$\int_a^b p_n(x)x^k d\alpha(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.3)$$

y de forma más general $p_n(x)$, $n \geq 1$, es ortogonal a los polinomios de grado $\leq n-1$.

Demostración. Esta demostración es inmediata dado que x^k será combinación lineal de p_{n-1}, \dots, p_0 y $\langle p_n, p_i \rangle = 0$ con $i < n$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A partir de esto resulta inmediato que $p_n(x)$ es ortogonal a todo polinomio de grado $\leq n - 1$. \square

Proposición 2.2.3. *Sea $\{p_n\}$ un conjunto de polinomios ortonormales como los descritos en la definición 2.2.1, si $\rho(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$ y*

$$\int_a^b p_n(x)\rho(x)d\alpha(x) = c$$

Entonces el coeficiente de x^n del polinomio $\rho(x)$ es ck_n

Demostración. Suponemos que $\rho(x)$ es de la forma

$$\rho(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \int_a^b p_n(x)\rho(x)d\alpha(x) = \\ &= \int_a^b p_n(x)[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0]d\alpha(x) \\ &= \int_a^b p_n(x)a_n x^n d\alpha(x) + \int_a^b p_n(x)[a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0]d\alpha(x) \end{aligned}$$

La segunda integral vale cero ya que $\int_a^b p_n(x)x^k d\alpha(x) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ y resulta

$$\int_a^b p_n(x)a_n x^n d\alpha(x)$$

Como $a_n x^n$ es combinación lineal de los $\{p_i\}_{k=0}^n$

$$a_n x^n = cp_n + \dots + c_0 p_0$$

Como p_n tiene coeficiente principal k_n entonces $a_n = ck_n$. Por tanto el coeficiente de x^n del polinomio es ck_n como queríamos probar. \square

Nota 2.2.4. Sea $[a, b]$ un intervalo simétrico con respecto al origen, consideramos una distribución del tipo $w(x)dx$ con función peso par, es decir, tal que $w(-x) = w(x)$. Por otra parte p_n será un polinomio par o impar dependiendo de si n es para o impar, por lo tanto se cumple

$$p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$$

Este polinomio solo puede contener las potencia de x que sean congruentes con $n \pmod{2}$.

Además, tenemos que para $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ se cumple:

$$\int_{-a}^a p_n(-x)x^k w(x)dx = (-1)^k \int_{-a}^a p_n(x)x^k w(x)dx = 0$$

Hemos cogido en esta integral extremos a y $-a$ porque es consecuencia de que el intervalo sea simétrico respecto del origen. Por tanto $p_n(-x)$ posee la misma propiedad de ortogonalidad que $p_n(x)$ que hemos visto en las dos proposiciones anteriores.

Por lo tanto comparando los coeficientes de x^n , llegamos a que $p_n(-x) = Cp_n(x) = (-1)^n p_n(x)$, con C una constante.

Esto puede generalizarse, diciendo que la transformación lineal $x = r\tilde{x} + s$, con $r \neq 0$, transforma el intervalo $[a, b]$ en el intervalo $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ y la función peso $w(x)$ en una nueva función peso $w(r\tilde{x} + s)$. Es decir, los polinomios

$$(\operatorname{sgn} r)^n |r|^{\frac{1}{2}} p_n(r\tilde{x} + s)$$

son ortonormales en el intervalo $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ con la función peso $w(r\tilde{x} + s)$

Veamos ahora como un caso relevante la siguiente caracterización directa de los polinomios ortogonales.

Proposición 2.2.5. *Sea $w(x)$ una función peso en (a, b) y $\{\phi_n(x)\}, \{\psi_n(x)\}$ dos sucesiones de polinomios ortogonales. Entonces $\phi_n(x) = \alpha_n \psi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ donde α_n es un número real no nulo.*

Demostración. Tenemos que

$$\phi_n(x) = a_n x^n - \phi_{n-1}^*(x), \quad \psi_n(x) = b_n x^n - \psi_{n-1}^*(x)$$

Con $a_n, b_n \neq 0$ y $\phi_{n-1}^*(x), \psi_{n-1}^*(x)$ de grado $\leq n-1$. Podemos deducir gracias a la proposición 2.2.2 que $a_n x^n - \phi_{n-1}^*(x)$ y $(\frac{a_n}{b_n})(b_n x^n - \psi_{n-1}^*(x)) = a_n x^n - (\frac{a_n}{b_n})\psi_{n-1}^*(x)$ son ortogonales a todo polinomio de grado $\leq n-1$.

Tenemos que $\phi_{n-1}^*(x)$ y $(\frac{a_n}{b_n})\psi_{n-1}^*(x)$ son mejores aproximaciones a $a_n x^n$ por polinomios de grado $\leq n-1$. Como esta mejor aproximación debe ser única tenemos que $\phi_{n-1}^*(x) = (\frac{a_n}{b_n})\psi_{n-1}^*(x)$ y por tanto $\phi_n(x) = (\frac{a_n}{b_n})\psi_n(x)$. Es decir, los polinomios ortogonales están definidos salvo una normalización que determine el coeficiente director (o alternativamente el valor en un punto que no sea un cero, etc...)

□

Una propiedad fundamental es que los polinomios ortogonales se pueden generar por recurrencia.

Teorema 2.2.6. *Si $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de polinomios ortogonales entonces existen constantes c_n, a_n, b_n tales que*

$$p_n(x) = (c_n x - a_n)p_{n-1}(x) - b_n p_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (2.4)$$

Recíprocamente, definiendo

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x - a_1 \\ a_n &= \langle xp_{n-1}, p_{n-1} \rangle / \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= \langle xp_{n-1}, p_{n-2} \rangle / \langle p_{n-2}, p_{n-2} \rangle, \quad n = 2, 3, \dots \\ p_n &= (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

se genera la sucesión de polinomios ortogonales mónicos.

Demostración. Demostramos sólo el teorema directo, ya que el recíproco es análogo. Como xp_{n-1} tiene grado exactamente n , se expresa como

$$xp_{n-1} = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_{n-1} p_{n-1} + \alpha_n p_n, \quad \alpha_n \neq 0$$

Por consiguiente, dividiendo por α_n

$$p_n = \beta_0 p_0 + \dots + \beta_{n-2} p_{n-2} + \beta_{n-1} p_{n-1} + \beta_n xp_{n-1},$$

para ciertos β_i , y sólo hay que probar que $\beta_i = 0$ si $i < n - 2$. Ahora bien, para $i < n - 2$,

$$\begin{aligned} \langle p_n, p_i \rangle &= \beta_0 \langle p_0, p_i \rangle + \dots + \\ &\quad \beta_{n-2} \langle p_{n-2}, p_i \rangle + \beta_{n-1} \langle p_{n-1}, p_i \rangle + \beta_n \langle xp_{n-1}, p_i \rangle. \end{aligned}$$

El primer miembro es nulo por la hipótesis de ortogonalidad y los mismo ocurre con todos los $\langle p_j, p_i \rangle$, cuando $i \neq j$. Por tanto,

$$0 = \beta_i \langle p_i, p_i \rangle + \beta_n \langle xp_{n-1}, p_i \rangle.$$

Ahora bien, $\langle xp_{n-1}, p_i \rangle = \langle p_{n-1}, xp_i \rangle$ y p_{n-1} es ortogonal a xp_i , al ser el grado de éste $< n - 1$. En definitiva $\beta_i \langle p_i, p_i \rangle = 0$ ó $\beta_i = 0$, y resulta

$$p_n = (\beta_n x + \beta_{n-1}) p_{n-1} + \beta_{n-2} p_{n-2}.$$

En consecuencia, $c_n = \beta_n$ y

$$a_n = -\beta_{n-1} = \beta_n \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}, \quad b_n = -\beta_{n-2} = \beta_n \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-2} \rangle}{\langle p_{n-2}, p_{n-2} \rangle}$$

Para probar el recíproco, probaremos por inducción que $\langle p_n, p_i \rangle = 0$ para todo $i < n$. Naturalmente, cuando $n = 1$,

$$\langle p_1, p_0 \rangle = \langle (x - a_1)p_0, p_0 \rangle = \langle xp_0, p_0 \rangle - a_1 \langle p_0, p_0 \rangle = 0$$

por la definición de a_1 . Supongamos la propiedad que deseamos probar hasta $n - 1$, y veámos que $\langle p_n, p_i \rangle = 0$, para $i < n$. Primero

$$\begin{aligned} \langle p_n, p_{n-1} \rangle &= \langle (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_{n-1} \rangle \\ &= \langle xp_{n-1}, p_{n-1} \rangle - a_n \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle - b_n \langle p_{n-2}, p_{n-1} \rangle = 0 \end{aligned}$$

por la definición de a_n y porque el último producto interno es cero por la hipótesis de inducción. De la misma manera

$$\begin{aligned}\langle p_n, p_{n-2} \rangle &= \langle (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_{n-2} \rangle \\ &= \langle x p_{n-1}, p_{n-2} \rangle - a_n \langle p_{n-1}, p_{n-2} \rangle - b_n \langle p_{n-2}, p_{n-2} \rangle = 0.\end{aligned}$$

por la definición de b_n , dado que el producto interno del medio es nulo por la hipótesis de inducción. Finalmente, si $i < n - 2$

$$\begin{aligned}\langle p_n, p_i \rangle &= \langle (x - a_n)p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_i \rangle \\ &= \langle x p_{n-1}, p_i \rangle - a_n \langle p_{n-1}, p_i \rangle - b_n \langle p_{n-2}, p_i \rangle \\ &= \langle p_{n-1}, x p_i \rangle = 0\end{aligned}$$

por la hipótesis de inducción. \square

Vemos que β_n es el cociente entre coeficientes principales y β_{n-2} se puede escribir como

$$\frac{\beta_n \langle x p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\beta_{n-1} \langle p_{n-2}, p_{n-2} \rangle}$$

pues $\langle p_n, p_n \rangle = \beta_n \langle x p_{n-1}, p_n \rangle = \beta_n \langle x p_n, p_{n-1} \rangle$, para todo n . Esto evita algunos cálculos.

Propiedades 2.2.7. La relación (2.4) se llama *relación de recurrencia de tres términos*. Gracias a ella es posible evaluar eficientemente polinomios $p(x)$ que vengan expresados en la forma $p(x) = \alpha_0 p_0 + \dots + \alpha_n p_n$.

Por completitud, notemos que si $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de polinomios ortogonales, entonces p_0, p_1, \dots, p_n son una base de Π_n (espacio de los polinomios de grado $\leq n$) y que la mejor aproximación en Π_n a una función $f \in L^2_\alpha$ se escribe

$$p = \sum_{i=0}^n \frac{\langle f, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle} p_i. \quad (2.5)$$

Corolario 2.2.8. Sean $p_n(x) = k_n x^n + s_n x^{n-1} + \dots$ los polinomios ortonormales. Entonces los coeficientes en la recurrencia

$$p_n = (c_n x - a_n) p_{n-1} - b_n p_{n-2} \quad (2.6)$$

están dados por

$$c_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}, \quad a_n = -c_n \left(\frac{s_n}{k_n} - \frac{s_{n-1}}{k_{n-1}} \right), \quad b_n = c_n \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} = \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2},$$

$n = 2, 3, \dots$

Demostración. Las primeras dos identidades se obtienen introduciendo $p_n(x) = k_n x^n + s_n x^{n-1} + \dots$ en (2.6) y comparando los coeficientes de x^n y x^{n-1} . La tercera identidad se puede probar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 0 = \langle p_n, p_{n-2} \rangle &= \langle c_n x p_{n-1} - a_n p_{n-1} - b_n p_{n-2}, p_{n-2} \rangle \\ &= c_n \langle x p_{n-1}, p_{n-2} \rangle - b_n. \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \langle x p_{n-1}, p_{n-2} \rangle &= \langle p_{n-1}, x p_{n-2} \rangle = \langle p_{n-1}, k_{n-2} x^{n-1} \rangle \\ &= \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \langle p_{n-1}, k_{n-1} x^{n-1} \rangle = \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle = \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}. \end{aligned}$$

resulta clara, ahora, la fórmula para b_n . □

Propiedades 2.2.9. Corolario. p_n tiene sus n raíces reales, simples y en el intervalo (a, b) .

Demostración. Sea $n \geq 1$ fijo. Si $p_n(x)$ tuviera signo constante en $[a, b]$, pongamos que positivo, entonces $\int_a^b p_n(x) w(x) dx = \langle p_n, p_0 \rangle > 0$. Pero esto contradice la ortogonalidad. Por tanto, $p_n(x_1) = 0$ para algún $x_1 \in (a, b)$. Supongamos que hay un cero en x_1 que es múltiple. Entonces $\frac{p(x)}{(x-x_1)^2}$ sería un polinomio de grado $n-2$. Por tanto,

$$0 = \langle p_n(x), \frac{p_n(x)}{(x-x_1)^2} \rangle = \langle 1, \left(\frac{p_n(x)}{(x-x_1)} \right)^2 \rangle > 0$$

y esto es imposible. Por lo tanto, todo cero es simple. Suponemos ahora que $p_n(x)$ tiene j ceros x_1, x_2, \dots, x_j y no otros en (a, b) . Entonces,

$$p_n(x)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_j) = P_{n-j}(x-x_1)^2(x-x_2)^2\dots(x-x_j)^2$$

donde P_{n-j} es un polinomio de grado $n-j$ que no cambia su signo en (a, b) . Por tanto, $\langle p_n(x), (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_j) \rangle = \langle P_{n-j}, (x-x_1)^2(x-x_2)^2\dots(x-x_j)^2 \rangle$. El lado derecho no se anula. Pero el de la izquierda se anula si $j < n$, así que $j \geq n$. Pero $j > n$ es imposible, y en consecuencia $j = n$. □

Otra propiedad importante de los polinomios ortogonales es la siguiente:

Teorema 2.2.10. Si $\{p_n\}$ es una sucesión de polinomios ortogonales y $f \in L^2_\alpha \cap C(a, b)$ es ortogonal a p_0, \dots, p_{n-1} entonces ó f es idénticamente nula ó hay n puntos r_i en (a, b) en los que f cambia de signo (es decir, hay un entorno de r_i en que ó bien $f > 0$ para $x > r_i$, y $f < 0$ para $x < r_i$, ó bien $f < 0$, para $x < r_i$, y $f > 0$ para $x > r_i$).

Demostración. La condición $\langle f, p_0 \rangle = 0$ significa

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = 0$$

luego si f no es idénticamente nula, toma valores positivos y negativos y, siendo continua, hay cuando menos un punto en el que cambia el signo. Supongamos que cambie el signo sólo $k < n$ veces, y sean $r_1 < r_2 < \dots < r_k$ los puntos en que lo hace. Entonces

$$\int_a^b f(x)(x - r_1) \cdots (x - r_k) d\alpha(x) \neq 0$$

pues el integrando no cambia de signo. Pero ésto es absurdo, pues f debe ser ortogonal a $(x - r_1) \cdots (x - r_k) \in \Pi_{n-1}$. \square

Teorema 2.2.11. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, su desarrollo finito de Fourier en los polinomios ortogonales $p(x) = \sum_{i=0}^n \langle f(x), p_i(x) \rangle p_i(x)$ interpola a $f(x)$ en $n + 1$ abscisas de (a, b) .

Demostración. Este teorema es una consecuencia directa del teorema 2.2.10 porque $p(x) - f(x)$ es ortogonal a $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ y debe por tanto cambiar de signo al menos $n + 1$ veces. \square

2.3. La fórmula de Christoffel

Definición 2.3.1. Sea $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ el sistema de polinomios ortonormales obtenidos al aplicar Gram-Schmidt a $\{1, x, x^2, \dots\}$ y sea $S_n f$ un operador integral definido como $S_n f = \sum_{i=0}^n \langle f, p_i \rangle p_i$ tenemos que

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{i=0}^n \int_a^b f(t) p_i(t) d\alpha(t) p_i(x) \\ &= \int_a^b f(t) \sum_{i=0}^n p_i(x) p_i(t) d\alpha(t) \\ &= \int_a^b f(t) K_n(t, x) d\alpha(t) \end{aligned}$$

Esta función $K_n(t, x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) p_i(t)$ se llama *núcleo de reproducción* del sistema ortonormal de polinomios.

Corolario 2.3.1 (La identidad de Christoffel-Darboux). Sea $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ el sistema de polinomios ortonormales obtenidos al aplicar Gram-Schmidt al sistema $\{1, x, x^2, \dots\}$ y k_n el coeficiente de x^n en $p_n(x)$. La función núcleo del sistema ortonormal $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ definida como $K_n(t, x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) p_i(t)$ tiene la forma

$$\sum_{i=0}^n p_i(x) p_i(t) = k_{n+1}^{-1} k_n \frac{p_{n+1}(x) p_n(t) - p_n(x) p_{n+1}(t)}{x - t} \quad (2.7)$$

Demostración. Denotaremos $\bar{p}_n(x)$ al polinomio mónico $\bar{p}_n(x) = k_n^{-1}p_n(x)$. A partir de la relación de recurrencia de tres términos del teorema 2.2.6

$$\begin{aligned}\bar{p}_{n+1}(x)\bar{p}_n(t) &= (x - a_{n+1})\bar{p}_n(x)\bar{p}_n(t) - b_{n+1}\bar{p}_{n-1}(x)\bar{p}_n(t) \\ \bar{p}_{n+1}(t)\bar{p}_n(x) &= (t - a_{n+1})\bar{p}_n(t)\bar{p}_n(x) - b_{n+1}\bar{p}_{n-1}(t)\bar{p}_n(x)\end{aligned}$$

Restando a la segunda ecuación la primera, obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{p}_{n+1}(x)\bar{p}_n(t) - \bar{p}_{n+1}(t)\bar{p}_n(x) &= \\ &= (x - t)\bar{p}_n(t)\bar{p}_n(x) + b_{n+1}[\bar{p}_n(x)\bar{p}_{n-1}(t) - \bar{p}_n(t)\bar{p}_{n-1}(x)]\end{aligned}\quad (2.8)$$

Notese que $k_n^{-1} = \sqrt{\langle \bar{p}_n(x), \bar{p}_n(x) \rangle}$ ya que $\bar{p}_n(x) = k_n^{-1}p_n(x)$. A partir de la fórmula de recurrencia escrita en la forma $b_{n+1}\bar{p}_{n-1} = xp_n(x) - a_{n+1}p_n(x) - p_{n+1}$ obtenemos, utilizando el producto interno con $p_{n-1}(x)$,

$$\begin{aligned}b_{n+1}k_{n-1}^{-2} &= \langle x\bar{p}_n(x), \bar{p}_{n-1} \rangle = \langle \bar{p}_n(x), x\bar{p}_{n-1}(x) \rangle \\ &= \langle \bar{p}_n(x), \bar{p}_n(x) + a_n\bar{p}_{n-1} + b_n\bar{p}_{n-2} \rangle = k_{n-1}^{-2} \quad (\bar{p}_{-1} = 0)\end{aligned}$$

Por tanto, si la ecuación (2.8) se divide entre k_n^{-2} el resultado es

$$\begin{aligned}k_n^2[\bar{p}_{n+1}\bar{p}_n(x) - \bar{p}_{n+1}(t)\bar{p}_n(x)] &= \\ &= (x - t)\bar{p}_n(t)\bar{p}_n(x) + k_{n-1}^2[\bar{p}_n(x)\bar{p}_{n-1}(t) - \bar{p}_n(t)\bar{p}_{n-1}(x)]\end{aligned}\quad (2.9)$$

Aplicando la fórmula de recurrencia 2.9 para simplificar el último término obtenemos

$$\begin{aligned}k_n^2[\bar{p}_{n+1}(x)\bar{p}_n(t) - \bar{p}_{n+1}(t)\bar{p}_n(x)] &= \\ &= (x - t)\sum_{i=1}^n \bar{p}_i(x)\bar{p}_i(t) + k_0^2[\bar{p}_1(x)\bar{p}_0(t) - \bar{p}_1(t)\bar{p}_0(x)] \\ &= (x - t)\sum_{i=0}^n \bar{p}_i(x)\bar{p}_i(t)\end{aligned}$$

La prueba se completa escribiendo $k_n^{-1}p_n(x)$ en lugar de $\bar{p}_n(x)$. □

A continuación vamos a ver una forma alternativa de representar los polinomios que se debe también a Christoffel.

Teorema 2.3.2. *Sea $\{p_n(x)\}$ los polinomios ortonormales asociados a la distribución $d\alpha$ en el intervalo $[a, b]$. Supongamos también que*

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_\ell) \quad c \neq 0$$

es un π_ℓ (polinomio de grado menor o igual que ℓ) que es no negativo en ese intervalo. Entonces los polinomios ortogonales $\{q_n(x)\}$, asociados a la distribución $p(x)d\alpha(x)$, pueden ser representadas en términos de los polinomios $p_n(x)$ de la siguiente forma:

$$p(x)q_n(x) = \begin{vmatrix} p_n(x) & p_{n+1}(x) & \dots & p_{n+\ell}(x) \\ p_n(x_1) & p_{n+1}(x_1) & \dots & p_{n+\ell}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n(x_\ell) & p_{n+1}(x_\ell) & \dots & p_{n+\ell}(x_\ell) \end{vmatrix}$$

En el caso de tener un cero en x_k , de multiplicidad m , $m > 1$, hay que cambiar las filas por las derivadas de orden $0, 1, 2, \dots, m-1$ de los polinomios $p_n(x), p_{n+1}(x), \dots, p_{n+\ell}(x)$ en $x = x_k$.

Demostración. Se considera, en general, $q_n(x)$ como no normalizado. El segundo miembro de la igualdad es un $\pi_{n+\ell}$ el cual es por tanto divisible entre $p(x)$. Tendrá la forma $p(x)q_n(x)$, donde $q_n(x)$ es un π_n . Además será una combinación lineal de polinomios $p_n(x), p_{n+1}(x), \dots, p_{n+\ell}$, así que si $q(x)$ es un polinomio π_{n-1} arbitrario entonces

$$\int_a^b p(x)q_n(x)q(x)d\alpha(x) = \int_a^b q_n(x)q(x)p(x)d\alpha(x) = 0$$

Veamos que el segundo miembro no es idénticamente nulo. Para demostrar esto, basta con probar que el coeficiente de $p_{n+\ell}$, es decir, el determinante $[p_{n+i}(x_{j+1})]$, con $i, j = 0, 1, 2, \dots, \ell - 1$, no se anula. Procedemos por reducción al absurdo, supongamos que sí se anula, luego existen ciertas constantes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell-1}$, no todas cero, tal que

$$\lambda_0 p_n(x) + \lambda_1 p_{n+1}(x) + \dots + \lambda_{\ell-1} p_{n+\ell-1}(x)$$

se anula para $x = x_1, x_2, \dots, x_\ell$. Por lo tanto este determinante es de la forma $p(x)G(x)$ donde $G(x)$ es un π_{n-1} . Ya que como hemos visto antes este término es ortogonal a un π_{n-1} arbitrario tendremos que se cumple:

$$\int_a^b p(x)G(x)G(x)d\alpha(x) = 0$$

$$\int_a^b (G(x))^2 p(x)d\alpha(x) = 0$$

Luego la $G(x) = 0$ y hemos llegado a contradicción. \square

Esta representación nos permite, por ejemplo, reducir los polinomios ultrasféricos en polinomios de Legendre (en el caso de $\alpha = \beta$) o en polinomios de Chebyshev (en el caso $\alpha + \frac{1}{2} = \beta + \frac{1}{2}$). Se puede obtener otra ilustración que conecta con los polinomios de la siguiente sección.

Usando las propiedades de $d\alpha(x)$ y de $p(x)$ se pueden obtener simplificaciones de la fórmula determinantal. Por ejemplo supongamos $d\alpha(x) = w(x)dx$, $w(x)$ y $p(x)$ funciones pares y $a = -b$. Obtenemos así la representación

$$p(x)q_n(x) = \begin{vmatrix} p_n(x) & p_{n+2}(x) & p_{n+4}(x) & \dots & p_{n+\ell}(x) \\ p_n(x_1) & p_{n+2}(x_1) & p_{n+4}(x_1) & \dots & p_{n+\ell}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n(x_{\frac{\ell}{2}}) & p_{n+2}(x_{\frac{\ell}{2}}) & p_{n+4}(x_{\frac{\ell}{2}}) & \dots & p_{n+\ell}(x_{\frac{\ell}{2}}) \end{vmatrix}$$

Siendo $\{\pm x_1, \pm x_2, \dots, \pm x_{\frac{\ell}{2}}\}$ todos los ceros de $p(x)$. Por ejemplo, los polinomios ortogonales asociados con la función peso $1 - x^2$ in $[-1, +1]$ puede ser determinado por

$$(1 - x^2)q_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+2}(x) \\ P_n(1) & P_{n+2}(1) \end{vmatrix} = P_n(x) - P_{n+2}(x).$$

2.4. Polinomios ortogonales clásicos

Veamos algunos ejemplos de polinomios ortogonales clásicos

- $a = -1, b = 1$, función peso $w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, $\alpha > -1, \beta > -1$. Estamos hablando por tanto, salvo una constante, de los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Además dentro de estos podemos diferenciar varios casos especiales:

- Si $\alpha = \beta$ estamos en el caso de los polinomios ultrasféricos.

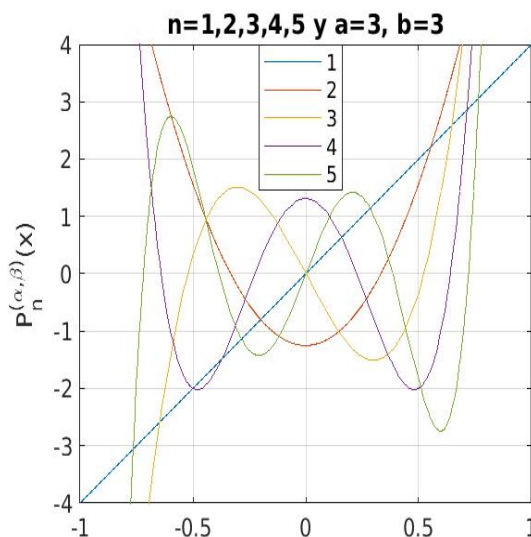


Figura 2.1: Polinomios ultrasféricos hasta grado 5, con $\alpha = \beta = 3$.

- Si $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, polinomios de Chebyshev de primera especie definidos por: $T_n(x) = \cos n\theta$, $x = \cos \theta$.

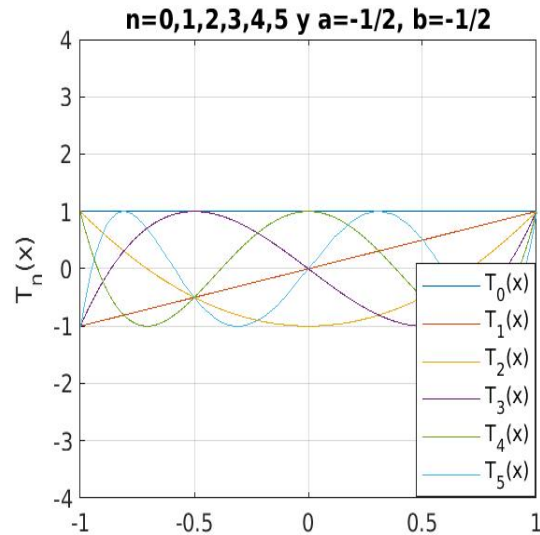


Figura 2.2: Polinomios de Chebyshev de primera especie hasta grado 5.

- Si $\alpha = \beta = +\frac{1}{2}$, polinomios de Chebyshev de segunda especie definidos por: $U_n = \sin((n + 1)\theta)/(\sin \theta)$, con $x = \cos \theta$.

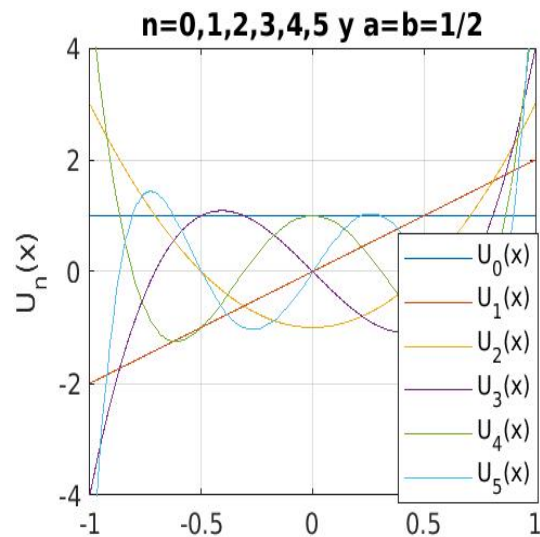


Figura 2.3: Polinomios de Chebyshev de segunda especie hasta grado 5.

- Si $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$, tenemos los polinomios $U_{2n} = \sin((n + \frac{1}{2})\theta)/(\sin \frac{\theta}{2})$ con $\cos \theta = x$

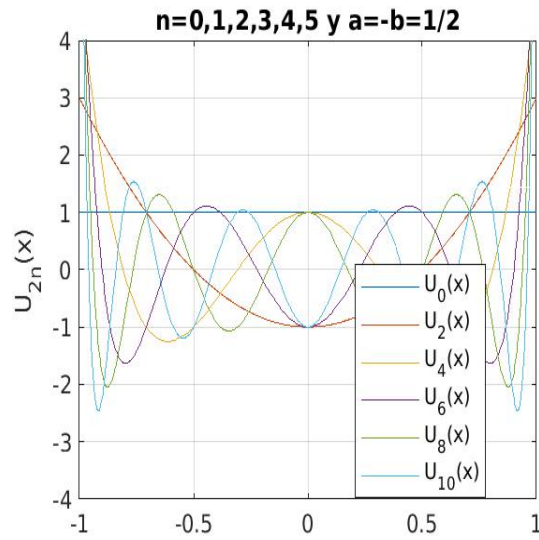


Figura 2.4: Polinomios U_{2n} hasta grado 10 ($n = 5$), con $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$.

- Si $\alpha = \beta = 0$, estamos en el caso de los polinomios de Legendre $P_n(x)$.

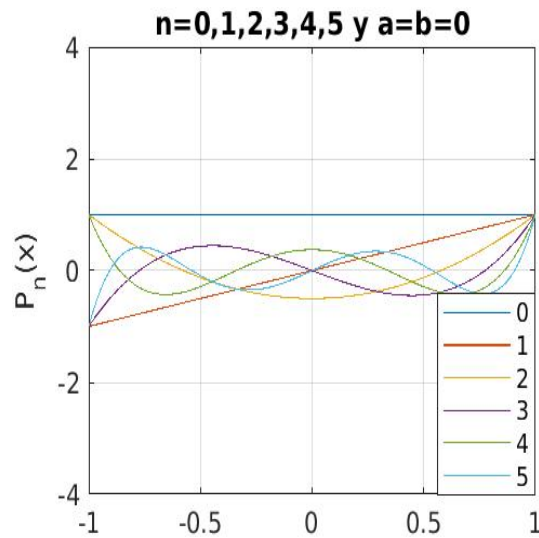


Figura 2.5: Polinomios de Legendre hasta grado 5.

- $a = 0$, $b = +\infty$, función peso $w(x) = e^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$. En este caso estamos hablando, salvo una constante, de los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$.

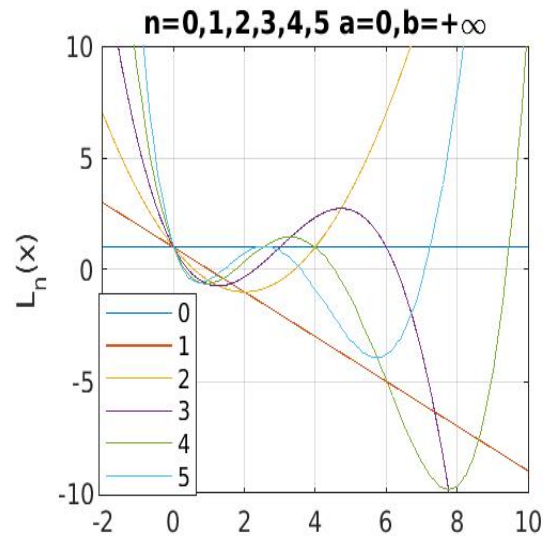


Figura 2.6: Polinomios de Laguerre hasta grado 5.

- $a = -\infty, b = +\infty$, función peso $w(x) = e^{-x^2}$. En este caso tenemos, excepto por una constante, los polinomios de Hermite $H_n(x)$.

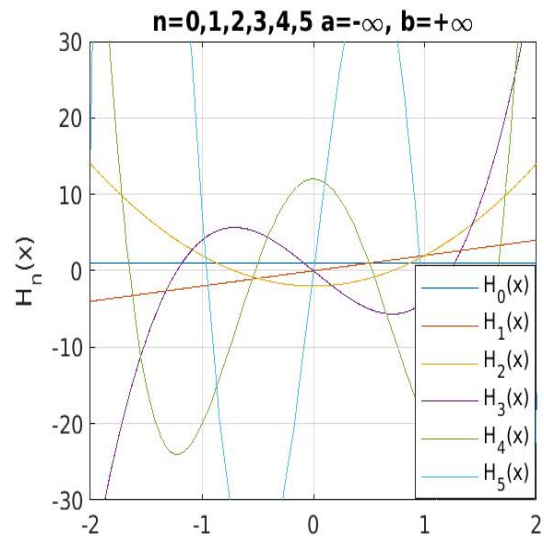


Figura 2.7: Polinomios de Hermite hasta grado 5.

2.5. Propiedades de los polinomios de Jacobi en $[-1, 1]$

- Los polinomios de Jacobi satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \\ & = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!} \delta_{nm}, \quad \alpha, \beta > -1. \end{aligned}$$

Como se define, no tienen una norma unitaria con respecto al peso. Esto se puede corregir dividiendo por la raíz cuadrada del lado derecho de la ecuación anterior, cuando $n = m$.

Aunque no proporciona una base ortonormal, a veces se prefiere una normalización alternativa debido a su simplicidad:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}.$$

- Los polinomios tienen la relación de simetría

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x);$$

por lo tanto, el valor en $z = -1$ es

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

- La k -ésima derivada de la expresión explícita conduce a

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1 + k)}{2^k \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} P_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(x). \quad (2.10)$$

- El polinomio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ es una solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden (vease (2.15))

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

- La relación de recurrencia para los polinomios de Jacobi de α, β fija es:

$$\begin{aligned} & 2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \\ & = (2n + \alpha + \beta - 1) \{ (2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)x + \alpha^2 - \beta^2 \} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ & - 2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x), \end{aligned}$$

para $n = 2, 3, \dots$. Dado que los polinomios de Jacobi se pueden describir en términos de la función hipergeométrica, las recurrencias de la función hipergeométrica dan recidivas equivalentes de los polinomios

de Jacobi. En particular, las relaciones contiguas de Gauss corresponden a las identidades

$$\begin{aligned}
(x-1) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{1}{2}(x-1)(1+\alpha+\beta+n)P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) \\
&= nP_n^{(\alpha, \beta)}(x) - (\alpha+n)P_{n-1}^{(\alpha, \beta+1)}(x) \\
&= (1+\alpha+\beta+n) \left(P_n^{(\alpha, \beta+1)}(x) - P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right) \\
&= (\alpha+n)P_n^{(\alpha-1, \beta+1)}(x) - \alpha P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\
&= \frac{2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha, \beta-1)}(x) - (x(1+\alpha+\beta+n) + \alpha + 1 + n - \beta)P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{1+x} \\
&= \frac{(2\beta+n+nx)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - 2(\beta+n)P_n^{(\alpha, \beta-1)}(x)}{1+x} \\
&= \frac{1-x}{1+x} \left(\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - (\beta+n)P_n^{(\alpha+1, \beta-1)}(x) \right).
\end{aligned}$$

- La función generadora de los polinomios de Jacobi está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)t^n = 2^{\alpha+\beta} R^{-1}(1-t+R)^{-\alpha}(1+t+R)^{-\beta},$$

de donde

$$R = R(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}},$$

y la rama de la raíz cuadrada se elige para que $R(x, 0) = 1$.

2.6. Polinomios ortogonales y cuadratura.

En esta sección vamos a ver algunos resultados relativos a los polinomios ortogonales clásicos que serán de utilidad más adelante en el capítulo de interpolación.

Teorema 2.6.1. Sean $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ los ceros de los polinomios ortogonales $p_n(x)$ entonces existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tal que

$$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \lambda_1 \rho(x_1) + \lambda_2 \rho(x_2) + \dots + \lambda_n \rho(x_n), \quad (2.11)$$

donde $\rho(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $\leq 2n - 1$. Estos λ_k , $k = 1, \dots, n$ están determinados únicamente por la distribución $d\alpha(x)$ y el entero n .

Estos λ_k , $k = 1, \dots, n$ se llaman números de Christoffel.

Demostración. Basta probar (2.11) para el caso $\rho(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 2n-1$. Estos casos representan $2n$ condiciones que determinan de forma unívoca, los números de Christoffel λ_k , en los puntos x_k . (Si se toman distintos puntos x_k arbitrarios, se pueden determinar los λ_k luego (2.11) se cumple para cada polinomio de grado $\leq n-1$.)

Para demostrar (2.11) vamos a construir el polinomio de interpolación de Lagrange de grado $n-1$ que coincide con $\rho(x)$ en los puntos x_k , es decir,

$$L(x) = \sum_{k=1}^n \rho(x_k) \frac{p_n(x)}{p'_n(x_k)(x-x_k)} = \sum_{k=1}^n \rho(x_k) l_k(x),$$

donde los $l_k(x)$ son los polinomios fundamentales de interpolación de Lagrange asociados a las abscisas x_1, x_2, \dots, x_n (esto se explicará con más detalle más adelante, en el capítulo 3). Como $\rho(x) - L(x)$ es divisible entre $p_n(x)$ entonces $\rho(x) - L(x) = p_n(x)s(x)$, donde $s(x)$ es un polinomio de grado $\leq n-1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) d\alpha(x) &= \int_a^b L(x) d\alpha(x) + \int_a^b p_n(x)s(x) d\alpha(x) \\ &= \int_a^b L(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \rho(x_k) \int_a^b l_k(x) d\alpha(x). \end{aligned}$$

Esto demuestra (2.11) teniendo en cuenta que

$$\lambda_k = \int_a^b l_k(x) d\alpha(x) = \int_a^b \frac{p_n(x)}{p'_n(x)(x-x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

Por otra parte, supongamos que (2.11) se cumple para un polinomio arbitrario de grado $\leq 2n-1$, $\rho(x)$. Entonces podemos elegir $\rho(x) = l(x)s(x)$, donde $l(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ y $s(x)$ un polinomio arbitrario de grado $\leq n-1$. Podemos llegar gracias a (2.11) a que

$$\int_a^b l(x)s(x) d\alpha(x) = 0,$$

ya que se anula el segundo miembro de la igualdad. Por tanto, tenemos que $l(x) = Cp_n(x)$, con C una constante.

La interpretación del primer miembro de la igualdad de (2.11) como cuadratura de Gauss es evidente. Para una función arbitraria $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$ pongamos

$$Q_n(f) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Por tanto, el teorema (2.6.1) se puede formular de la siguiente forma: $Q_n(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$ siempre que $f(x)$ sea un polinomio arbitrario de grado $\leq 2n-1$.

En otros términos, los números de Christoffel no son otros que los pesos de las fórmulas de cuadratura Gaussianas asociadas a la distribución $d\alpha$. Además, a partir de (2.12) podemos observar que los números de Christoffel λ_k son los valores de $Q_n(f)$ para $f(x) = l_k(x)$. También podemos hablar de la convergencia de la sucesión de cuadraturas $\{Q_n(f)\}_{k=1}^n$ cuando $n \rightarrow \infty$ a la integral de f . Respecto a las fórmulas de cuadratura mecánica para un polinomio arbitrario de grado $\leq 2n - 1$ podemos ver el libro [3]. \square

Teorema 2.6.2. *Los números de Christoffel λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ son positivos y además*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a). \quad (2.13)$$

y también se cumplen la relación

$$\lambda_k = \int_a^b \left(\frac{p_n(x)}{p'_n(x_k)(x - x_k)} \right)^2 d\alpha(x) \quad (2.14)$$

Demostración. Basta aplicar el teorema 2.6.1 a $\rho(x) = 1$ para demostrar (2.13). Para (2.14) simplemente tenemos que aplicar el mismo teorema a $\rho(x) = (l_k(x))^2$. Con esto último resulta claro que los números de Christoffel son positivos y ya tenemos probadas las tres propiedades. \square

2.7. Ecuaciones diferenciales y polinomios ortogonales

Teorema 2.7.1. *Los polinomios de Jacobi $y = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ satisfacen la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:*

$$(1 - x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0 \quad (2.15)$$

ó

$$\frac{d}{dx} [(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}y'] + n(n + \alpha + \beta + 1)(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta y = 0. \quad (2.16)$$

Demostración. Lo primero de todo, notemos que y es un polinomio de grado $\leq n$, la expresión

$$d[(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}y']/dx$$

es de la forma $(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta z$, donde z es también un polinomio de grado $\leq n$. Para demostrar que $z = Cy$, con C una constante, vamos a probar la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} [(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}y'] \rho(x) dx = 0,$$

donde $\rho(x)$ es un polinomio arbitrario de grado $\leq n - 1$. Integrando por partes el primer miembro de la igualdad se reduce a

$$- \int_{-1}^1 [(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y']\rho'(x)dx,$$

siempre que $\alpha + 1$ y $\beta + 1$ sean positivos. Una segunda integración por partes nos da

$$\int_{-1}^1 y \frac{d}{dx} [(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\rho'(x)]dx = 0.$$

en el último integrando el coeficiente de y es de la forma $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta s(x)$, donde $s(x)$ es un polinomio de grado $\leq n - 1$. Por lo tanto esta integral se anula y el resultado queda probado. La constante $-n(n + \alpha + \beta + 1)$ se obtiene comparando los términos más altos.

Una alternativa a (2.15) es

$$(1-x^2)Y'' + [\alpha - \beta - (\alpha + \beta + 2)x]Y' + (n+1)(n + \alpha + \beta + 1)Y = 0,$$

con $Y = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta y = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

□

Teorema 2.7.2. *Sea $\alpha > -1$, $\beta > -1$. La ecuación diferencial*

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + \gamma y = 0,$$

donde γ es un parámetro, tiene una solución polinomial distinta de cero si y solo si γ tiene la forma $n(n + \alpha + \beta)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Esta solución es $CP_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, con C una constante adecuada, y ninguna solución que sea linealmente independiente de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ puede ser un polinomio.

Demostración. La demostración podemos encontrarla en [19] capítulo 4, sección 4.2, pp. 61, 62. □

Si sustituimos $x = 1 - 2x'$ en (2.15) obtenemos

$$x'(1-x') \frac{d^2y}{dx'^2} + [\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)x'] \frac{dy}{dx'} + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0,$$

que es la ecuación hipergeométrica de Gauss. Sus soluciones son funciones hipergeométricas de Gauss, definidas por $F(a, b; c; x)$, que describiremos más adelante. Teniendo en cuenta la segunda parte del teorema 2.7.2, para $n \geq 1$, obtenemos la siguiente representación:

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \binom{n+\alpha}{n} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n+\alpha+\beta+1) \dots (n+\alpha+\beta+k) \\ &\quad \cdot (\alpha+k+1) \dots (\alpha+n) \left(\frac{x-1}{2}\right)^k. \end{aligned} \quad (2.17)$$

En la identidad anterior debemos reemplazar

$$\binom{n}{k} (n + \alpha + \beta + 1) \dots (n + \alpha + \beta + k) (\alpha + k + 1) \dots (\alpha + n)$$

por

$$(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)$$

para $k = 0$, y por

$$(n + \alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + k) \dots (2n + \alpha + \beta)$$

para $k = n$.

La notación $F(a, b; c; x)$ representa las series hipergeométricas.

$$F(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k x^k}{(c)_k k!}$$

donde

$$(a)_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ a(a+1) \dots (a+k-1) & k > 0 \end{cases}$$

convergente para $|x| < 1$ y satisfaciendo

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dy}{dx} - aby = 0.$$

(ver [20] p. 283) Otra aplicación de (2.17) es la fórmula

$$\frac{d}{dx} (P_n^{(\alpha, \beta)}(x)) = \frac{1}{2} (n + \alpha + \beta + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x), \quad (2.18)$$

que se obtiene de forma inmediata cuando expandimos ambos lados de (2.18) utilizando (2.17).

Como aplicación de (2.18) observamos que las derivadas sucesivas

$$T'_n(x), T''_n(x), T'''_n(x), \dots$$

de los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ son, salvo una constante,

$$P_{n-1}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x), P_{n-2}^{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}(x), P_{n-3}^{(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})}(x), \dots$$

El primero es, salvo por una constante, $U_{n-1}(x)$ (puede verse en la sección 1 del capítulo 4 del libro [19]). Notamos también que las derivadas $P'_n(x), P''_n(x), \dots$ de los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son múltiplos constantes de $P_{n-1}^{(1,1)}(x), P_{n-2}^{(2,2)}(x), \dots$, respectivamente.

Proposición 2.7.3. Sean $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\alpha > -1$ los polinomios de Laguerre definidos por la siguiente condición de ortogonalidad y normalización:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n} \delta_{nm},$$

se cumplen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny &= 0, & y &= L_n^{(\alpha)}(x), \\ xz'' + (x + 1)z' + \left(n + \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{\alpha^2}{4x}\right)z &= 0, & z &= e^{-x} x^{\alpha/2} L_n^{(\alpha)}(x), \\ u'' + \left(\frac{n + (\alpha + 1)/2}{x} + \frac{1 - \alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4}\right)u &= 0, & u &= e^{-x/2} x^{(\alpha+1)/2} L_n^{(\alpha)}(x), \\ v'' + \left(4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{1 - \alpha^2}{x^2}\right)v &= 0, & v &= e^{-x/2} x^{\alpha + \frac{1}{2}} L_n^{(\alpha)}(x^2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Demostración. La prueba la podemos encontrar en [16], pp. 41-42. \square

Proposición 2.7.4. Sea $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ los polinomios de Hermite definidos por la condición de ortogonalidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \pi^{\frac{1}{2}} 2^n n! \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

con el coeficiente de x^n del n -ésimo polinomio positivo. Se cumplen entonces las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' + 2ny &= 0, & y &= H_n(x), \\ z'' + (2n + 1 - x^2)z &= 0, & z &= e^{-x^2/2} H_n(x), \end{aligned} \quad (2.20)$$

Demostración. La demostración podemos encontrarla en [19]. \square

2.8. Propiedades asintóticas de los polinomios clásicos

Proposición 2.8.1. Sean $P_n(x)$, con $P_n(1) = 1$, $n = 1, 2, \dots$ los polinomios de Legendre con $a = -1$, $b = 1$ y función peso $w(x) = 1$. Se tiene entonces la siguiente desigualdad:

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq +1 \quad (2.21)$$

Si $n > 0$ el signo de igualdad se cumple solo para $x = \pm 1$.

Recordemos en primer lugar que los polinomios de Legendre para $n = 0, 1$ son respectivamente

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \end{aligned}$$

Recordemos también la representación de los polinomios de Legendre dada por:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k} (x-1)^k \quad (2.22)$$

Para demostrar (2.21) utilizaremos el siguiente teorema

Teorema 2.8.2. *Sea $n \geq 2$. Los sucesivos máximos relativos de $|P_n(x)|$, cuando x decrece de 1 a 0, forman una secuencia decreciente. Para mayor precisión, si $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{[n/2]}$ denotan estos máximos correspondientes a los valores decrecientes de x , tenemos*

$$1 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{[n/2]}$$

Demostración. Si n es par, tenemos

$$\mu_{[n/2]} = |P_n(0)| = \frac{1 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}$$

Sea $f(x)$ una función definida por la relación

$$n(n+1)f(x) = n(n+1)(P_n(x))^2 + (1-x^2)(P'_n(x))^2. \quad (2.23)$$

Tenemos entonces que $f(x) = (P_n(x))^2$ si $P'_n(x) = 0$, o si $x = \pm 1$. Por tanto,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} (P_n(x))^2 \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} f(x). \quad (2.24)$$

Ahora, derivando en (2.23) y utilizando (2.15),

$$\begin{aligned} n(n+1)f'(x) &= 2P'_n(x) [n(n+1)P_n(x) - xP'_n(x) + (1-x^2)P''_n(x)] \\ &= 2P'_n(x)xP'_n(x) = 2x(P'_n(x))^2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Por tanto tenemos que $f(x)$ es decreciente cuando $x < 0$ y creciente cuando $x > 0$. Entonces el máximo de $f(x)$ se alcanzará en $x = 1$ o $x = -1$.

Sabemos que $f(\pm 1) = (P_n(\pm 1))^2$ y sabemos también por la fórmula (2.22) que $(P_n(\pm 1))^2 = 1$. Esto junto con (2.24) nos permite afirmar que $(P_n(x))^2 \leq f(x) \leq 1$. Con esto queda probado 2.21. \square

Teorema 2.8.3. *Tenemos*

$$(\sin \theta)^{\frac{1}{2}} |P_n(\cos \theta)| < (2/\pi)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (2.26)$$

donde la constante $(2/\pi)^{\frac{1}{2}}$ no puede ser reemplazada por una más pequeña.

Demostración. Podemos encontrar la demostración en el libro [19], capítulo 7, teorema 7.3.3. \square

Teorema 2.8.4. Sea $\alpha > -1$, $\beta > -1$,

$$x_0 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 1}$$

tenemos

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| = \begin{cases} \binom{n+q}{n} \sim n^q & \text{si } q = \max(\alpha, \beta) \leq -\frac{1}{2}, \\ |P_n^{(\alpha, \beta)}(x')| \sim n^{-\frac{1}{2}} & \text{si } q = \max(\alpha, \beta) < -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Donde x' es uno de los dos puntos máximos próximos a x_0 .

Demostración. Ver [19] capítulo 7, sección 7.32, teorema 7.32.1. \square

Teorema 2.8.5. Sean α y β arbitrarios y reales, y c una constante fija positiva y $n \rightarrow \infty$. Entonces

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \begin{cases} \theta^{-\alpha-\frac{1}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}}) & \text{si } cn^{-1} \leq \theta \leq \pi/2, \\ O(n^\alpha) & \text{si } 0 \leq \theta \leq cn^{-1}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Demostración. Ver [19], capítulo 7, teorema 7.32.2. \square

Teorema 2.8.6. Sea α arbitrario y real, c y ω constantes positivas fijadas, y suponemos que $n \rightarrow \infty$. Entonces

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha/2-\frac{1}{2}} O(n^{\alpha/2-\frac{1}{2}}) & \text{si } cn^{-1} \leq \theta \leq \omega, \\ O(n^\alpha) & \text{si } 0 \leq \theta \leq cn^{-1}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Estas cotas son precisas en cuanto a su orden en n .

Demostración. Ver [19], capítulo 7, teorema 7.6.4. \square

Para $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, ambas cotas se cumplen en ambos intervalos, es decir,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha/2-\frac{1}{2}} O(n^{\alpha/2-\frac{1}{2}}) & 0 < x \leq \omega, \alpha \geq -\frac{1}{2}. \\ O(n^\alpha) & \end{cases}$$

Por otro lado,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O(n^{\alpha/2-\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq x \leq \omega, \quad \alpha \leq -\frac{1}{2}.$$

Y generalmente, con α arbitrario y real,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = O(n^a), \quad a = \max\left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha\right) \quad 0 \leq x \leq \omega. \quad (2.30)$$

Teorema 2.8.7. Sea $\alpha > -1$, y sean $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ los ceros de $L_n^{(\alpha)}(x)$; entonces tenemos para los ceros x_k , $k = 1, \dots, n$, para un intervalo fijo $0 < x \leq \omega$

$$2x_k^{\frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{2}}(k\pi + O(1)).$$

Además,

$$|L_n^{(\alpha)'}(x_k)| \sim x_k^{-\alpha/2 - \frac{3}{4}} n^{\alpha/2 + \frac{1}{4}} \sim k^{-\alpha - \frac{3}{2}} n^{\alpha + 1}.$$

Demostración. Ver [19], capítulo 8, teorema 8.9.2. \square

Proposición 2.8.8. Sean λ_k , $k = 1, \dots, n$ los números de Christoffel para las abscisas de los polinomios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ ordenadas de forma creciente $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ entonces tenemos que

$$\lambda_k = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} x_k^{-1} (L_n^{(\alpha)'}(x_k))^{-2}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha > -1, \quad (2.31)$$

Demostración. La demostración podemos encontrarla en en [19], capítulo 15, sección 15.3 (1). \square

2.9. Polinomios ortogonales no clásicos

2.9.1. Una clase de polinomios considerada por S. Bernstein y G. Szego

Veamos primero un par de resultados previos:

Teorema 2.9.2. Sea $g(\theta)$ un polinomio trigonométrico con coeficientes reales que son no negativos para todos los valores de θ . Entonces existe un polinomio $\rho(z)$ del mismo grado que $g(\theta)$ tal que $g(\theta) = |\rho(z)|^2$, donde $z = e^{i\theta}$. Por otra parte, si $z = e^{i\theta}$, la expresión $|\rho(z)|^2$ siempre representa un polinomio trigonométrico no negativo en θ del mismo grado que el polinomio $\rho(z)$.

Teorema 2.9.3. Sea $g(\theta)$ que satisface las condiciones del teorema 2.9.2 y $g(\theta) \neq 0$. Entonces la representación $g(\theta) = |h(e^{i\theta})|^2$ existe tal que $h(z)$ es un polinomio del mismo grado que $g(\theta)$, con $h(z) \neq 0$ en $|z| < 1$, y $h(0) > 0$. Este polinomio está unívocamente determinado. Si $g(\theta)$ es un polinomio de cosenos, $h(z)$ es un polinomio con coeficientes reales.

Demostración. La demostración de estos teoremas podemos encontrarla en [19]. \square

Sea $\rho(x)$ un polinomio de grado exactamente l y positivo en $[-1, +1]$. Entonces los polinomios ortonormales $p_n(x)$ que están asociados a la función peso:

$$w(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\rho(x)^{-1}, \\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\rho(x)^{-1}, \\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\rho(x)^{-1}, \end{cases}$$

pueden ser calculados siempre que $l < 2n$ en el primer caso, $l < 2(n+1)$ en el segundo caso y $l < 2n+1$ en el tercer caso. Los polinomios del primer caso desempeñan un importante papel en la prueba del teorema de la equiconvergencia de Szegő. Los tres casos fueron investigados por S. Bernstein junto con su fórmula asintótica.

Teorema 2.9.4. *Sea $\rho(x)$ un polinomio de grado exactamente ℓ y positivo en $[-1, +1]$. Sea $\rho(\cos\theta) = |h(e^{i\theta})|^2$ una representación normalizada de $\rho(\cos\theta)$ en el sentido del teorema 2.9.3. Escribiendo $h(e^{i\theta}) = c(\theta) + is(\theta)$, con $c(\theta)$ y $s(\theta)$ reales, obtenemos las siguientes formulas:*

$$\begin{aligned} p_n(\cos\theta) &= (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \Re\{e^{in\theta} \overline{h(e^{i\theta})}\} \\ &= (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \{c(\theta) \cos n\theta + s(\theta) \sin n\theta\}, \\ w(x) &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(\rho(x))^{-1}, \end{aligned} \quad l < 2n;$$

$$\begin{aligned} p_n(\cos\theta) &= (2/\pi)^{\frac{1}{2}} (\sin\theta)^{-1} \Im\{e^{i(n+1)\theta} \overline{h(e^{i\theta})}\} \\ &= (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \left\{ c(\theta) \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} - s(\theta) \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta} \right\}, \\ w(x) &= (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(\rho(x))^{-1}, \end{aligned} \quad l < 2(n+1);$$

$$\begin{aligned} p_n(\cos\theta) &= \pi^{-\frac{1}{2}} (\sin \frac{\theta}{2})^{-1} \Im\{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} \overline{h(e^{i\theta})}\} \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} \left\{ c(\theta) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} - s(\theta) \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right\}, \\ w(x) &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right) (\rho(x))^{-1}, \end{aligned} \quad l < 2n+1;$$

Estas fórmulas deben ser modificadas para $l = 2n$, $l = 2(n+1)$, y $l = 2n+1$, respectivamente, multiplicando el miembro de la derecha de la primera formula por $(1 + \frac{h_l}{h_0})^{-\frac{1}{2}}$ y los de la segunda y tercera por $(1 - \frac{h_l}{h_0})^{-\frac{1}{2}}$, donde $h_0 = h(0)$ y h_l es el coeficiente de z^l en $h(z)$.

Demostración. Observamos que los miembros de la derecha de las tres fórmulas son polinomios de cosenos cuyo término más elevado es

$$(2/\pi)^{\frac{1}{2}} h_0 \cos n\theta, \quad (2/\pi)^{\frac{1}{2}} h_0 \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \quad \pi^{-\frac{1}{2}} h_0 \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

respectivamente. En la primera de estas expresiones, si $l = 2n > 0$, h_0 debe ser reemplazada por $h_0 + h_l$; en el segundo y el último, si $l = 2(n+1)$ y $l = 2n+1$, respectivamente, tendremos $h_0 - h_l$ en lugar de h_0 .

Demostremos la primera fórmula, el resto se hacen de forma similar.

En primer lugar vemos que

$$\int_{-1}^1 p_n(x) x^k (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (\rho(x))^{-1} dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

o lo que es lo mismo

$$\int_0^\pi p_n(\cos\theta) \cos k\theta (\rho(\cos\theta))^{-1} d\theta = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Luego

$$\begin{aligned} & \frac{(2/\pi)^{\frac{1}{2}}}{2} \Re \left\{ \int_0^\pi e^{in\theta} \overline{h(e^{i\theta})} (e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}) |h(e^{i\theta})|^{-2} d\theta \right\} = \\ &= \frac{(2/\pi)^{\frac{1}{2}}}{4} \Re \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{i(n+k)\theta} + e^{i(n-k)\theta}}{h(e^{i\theta})} d\theta \right\} \\ &= \frac{(2/\pi)^{\frac{1}{2}}}{4} \Re \left\{ \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^{n+k} + z^{n-k}}{zh(z)} dz \right\} = 0 \end{aligned}$$

ya que la función $\frac{z^{n+k} + z^{n-k}}{zh(z)}$ es regular para $|z| \leq 1$.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} (p_n(x))^2 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (\rho(x))^{-1} dx = \\ &= \int_0^\pi (p_n(\cos\theta))^2 (\rho(\cos\theta))^{-1} d\theta \\ &= \int_0^\pi p_n(\cos\theta) \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} h_0 \cos n\theta (\rho(\cos\theta))^{-1} d\theta \\ &= \frac{1}{4} (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \Re \left\{ \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n} + 1}{zh(z)} dz \right\} \\ &= \frac{1}{4} (2/\pi) h_0 (2\pi/h_0) = 1 \end{aligned}$$

Las demostraciones de las otras dos formulas son similares. En lugar de utilizar $\cos k\theta$ usaremos $\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ y $\frac{\sin(k+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$, respectivamente. Las modificaciones para $l = 2n$, $l = 2(n+1)$ y $l = 2n+1$ en cada una de las tres fórmulas respectivamente se pueden demostrar facilmente. Finalmente, observamos que la primera fórmula sale de la tercera, la tercera de la segunda y la primera de la segunda sustituyendo $\rho(x)$ por $(1-x)\rho(x)$, $(1+x)\rho(x)$ y $(1-x^2)\rho(x)$, respectivamente. \square

2.9.5. Polinomios de Stieltjes-Wigert

Wigert quería encontrar una forma más elegante de representar los polinomios ortonormales $p_n(x)$ asociados con la función peso

$$w(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} k e^{(-k^2 \log^2 x)} = \pi^{-\frac{1}{2}} k x^{-k^2 \log x}, \quad 0 < x < +\infty; k > 0.$$

Usó la notación

$$\begin{bmatrix} n \\ v \end{bmatrix} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1}) \dots (1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^k)}, \quad 0 < k < n, \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1,$$

y denotando

$$q = e^{-(2k^2)^{-1}},$$

Tenemos que

$$p_n(x) = (-1)^n q^{n/2 + \frac{1}{2}} \{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)\}^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ v \end{bmatrix} q^{k^2} (-q^{\frac{1}{2}} x)^k \quad (2.32)$$

Si $n = 0$ el producto entre llaves se sustituye por 1. La demostración se basa en la identidad de Gauss:

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ v \end{bmatrix} q^{k(k+1)/2} u^k = (1+qu)(1+q^2u) \dots (1+q^nu)$$

2.9.6. Distribuciones del tipo Stieltjes, un análogo de los polinomios de Legendre

En esta sección vamos a hablar de un conjunto finito de polinomios estudiados por Chebyshev, asociados a una distribución del tipo Stieltjes $d\alpha$, con α una función escalonada que presenta saltos de una unidad en $x = 0, 1, 2, \dots, N-1$ donde $N \in \mathbb{N}$ y es fijo. Esta distribución es del tipo mencionado al final de la demostración de la independencia lineal en la definición 2.2.1. Los polinomios asociados son, salvo constante,

$$t_n(x) = n! \Delta^n \binom{x}{n} \binom{x-N}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.33)$$

Además, Chebyshev muestra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t_n(x)t_m(x)d\alpha(x) = \sum_{x=0,1,2,\dots,N-1} t_n(x)t_m(x) = 0, \quad \text{si } n \neq m$$

y

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (t_n(x))^2 d\alpha(x) &= \sum_{x=0,1,2,\dots,N-1} (t_n(x))^2 \\ &= \frac{N(N^2 - 1)(N^2 - 2^2) \dots (N^2 - n^2)}{2n + 1} \\ n, m &= 0, 1, 2, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Estas fórmulas se cumplen para todo valor no negativo de n y m , pero son triviales para $n \geq N$ o $m \geq N$, ya que, en este caso, $t_n(x) = 0$ para $x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

En (2.33) se usa el símbolo

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x + 1) - f(x), \\ \Delta^n f(x) &= \Delta(\Delta^{n-1} f(x)) \\ &= f(x + n) - \binom{n}{1} f(x + n - 1) + \dots + (-1)^n f(x) \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio

$$\Delta^n f(x) = f^{(n)}(x + \theta n) \quad 0 < \theta < 1$$

Obtenemos para un valor fijo de n la siguiente fórmula

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-n} t_n(Nx) = P_n(2x - 1) \quad (2.34)$$

donde P_n es el polinomio de Legendre de grado n . Chebyshev también consideró un caso más general en el que los puntos $0, 1, 2, \dots, N - 1$ son reemplazados por un conjunto arbitrario de N puntos distintos. En relación a esto se obtiene un fórmula de interpolación de cierta relevancia en estadística matemática.

2.9.7. Polinomios de Poisson-Charlier

Estos polinomios guardan una importante relación con el cálculo de probabilidad y estadística. Están asociados la distribución $d\alpha$ donde α es una función escalonada con salto

$$j(x) = e^{-a} a^x (x!)^{-1} \quad \text{en el punto } x, \quad x = 1, 2, \dots; a > 0.$$

La variación total de α es

$$\alpha(+\infty) - \alpha(-\infty) = \sum_{x=0}^{\infty} j(x) = 1$$

Los polinomios ortonormales correspondientes son:

$$p_n(x) = a^{n/2}(n!)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! a^{-k} \binom{x}{k} \quad (2.35)$$

$$= a^{n/2}(n!)^{-\frac{1}{2}} (-1)^n (j(x))^{-1} \Delta^n j(x-n) \quad (2.36)$$

La demostración de esta expresión puede darse por el método de generación de funciones. Sea para un $|w|$ suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} G(x, w) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n/2} (n!)^{-\frac{1}{2}} p_n(x) w^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \binom{n}{k} k! a^{-k} \binom{x}{k} w^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \binom{x}{k} w^k e^{-w} = e^{-w} (1 + a^{-1}w)^x \end{aligned} \quad (2.37)$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\sum_{x=0,1,2,\dots} j(x) G(x, u) G(x, v) = \\ &= \sum_{x=0,1,2,\dots} e^{-a} a^x (x!)^{-1} e^{-u} (1 + a^{-1}u)^x e^{-v} (1 + a^{-1}v)^x \\ &= e^{-a-u-v} e^{a(1+a^{-1}u)(1+a^{-1}v)} = e^{a^{-1}uv} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\sum_{x=0,1,2,\dots} j(x) a^{-n/2} (n!)^{-\frac{1}{2}} p_n(x) a^{-m/2} (m!)^{-\frac{1}{2}} p_m(x) = a^{-n} (n!)^{-1} \delta_{nm}, \quad (2.38)$$

$$n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

Los polinomios (2.35) están relacionados con los polinomios de Laguerre mediante la relación

$$p_n(x) = a^{-n/2} (n!)^{\frac{1}{2}} L_n^{(x-n)}(a)$$

2.9.8. Polinomios de Krawtchouk

Otra distribución $d\alpha$ aplicada al cálculo de probabilidades tiene definido el salto en x como

$$j(x) = \binom{N}{x} p^x q^{(N-x)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, N$$

Aquí N es un entero positivo, $p > 0$, $q > 0$, y $p + q = 1$. La variación total de $\alpha(x)$ es 1. El conjunto de polinomios ortonormales asociados es de nuevo finito como en la subsección 2.9.6

El método de generación de funciones da lugar a la fórmula

$$p_n(x) = \left\{ \binom{N}{n} \right\}^{-\frac{1}{2}} (pq)^{-n/2} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{N-x}{n-k} \binom{x}{k} p^{n-k} q^k, \quad (2.40)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.41)$$

Además, sea

$$\begin{aligned} K(x, w) &= \sum_{n=0}^N \left\{ \binom{N}{n} \right\}^{-\frac{1}{2}} (pq)^{-n/2} p_n(x) w^n \\ &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{N-x}{n-k} \binom{x}{k} p^{n-k} q^k w^n \end{aligned}$$

Siendo x un entero, $0 \leq x \leq N$, la última suma puede ser extendida para todos los $k, n = 0, 1, 2, \dots$; con $k \leq n$, dado que el término general se anula si $N-x < n-k$ o si $x < k$. Por lo tanto, para todos los valores de n, k, x, N que cumplan ambas desigualdades tendremos ceros en el término general, luego solo podrá ser no nulo si $N-x \geq n-k$, $x \geq k$, es decir, si $N \geq n$.

Por tanto

$$K(x, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} q^k w^k \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^{n-k} \binom{N-x}{n-k} p^{n-k} w^{n-k} \quad (2.42)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} q^k w^k (1-pw)^{N-x} \quad (2.43)$$

$$= (1+qw)^x (1-pw)^{N-x} \quad (2.44)$$

A partir del cual,

$$\begin{aligned} &\sum_{x=0,1,2,\dots,N} j(x) K(x, u) K(x, v) = \\ &= \sum \binom{N}{x} p^x q^{N-x} (1+qu)^x (1-pu)^{N-x} (1+qv)^x (1-pv)^{N-x} \\ &= [p(1+qu)(1+qv) + q(1-pu)(1-pv)]^N = (1+pquv)^N, \end{aligned}$$

de hecho, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{x=0,1,2,\dots,N} j(x) \left\{ \binom{N}{n} \right\}^{\frac{1}{2}} (pq)^{n/2} p_n(x) \left\{ \binom{N}{m} \right\}^{\frac{1}{2}} (pq)^{m/2} p_m(x) &= \\ &= \binom{N}{m} (pq)^n \delta_{nm}, \\ n, m &= 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Si $n > N$, $p_n(x) = 0$ para $x = 0, 1, 2, \dots, N$, como ya vimos.

Otras dos clases diferentes de polinomios derivan de los polinomios (2.40) a través de dos métodos diferentes.

1. Sea $z \in \mathbb{R}$ y supongamos que x denota el entero más grande que sea menor o igual a $pN + z(2pqN)^{\frac{1}{2}}$ donde p, q, z son fijos y $N \rightarrow \infty$. Entonces para un n fijo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_n(x) = (2^n n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(z)$$

Si $H_n(z)$ denota el polinomio de Hermite n -ésimo. Sustituyendo por el $p_n(x)$ de (2.40) y el $K(x, w)$ de (2.42), como x es entero, $0 < x < N$,

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left\{ \binom{N}{n} \right\}^{-\frac{1}{2}} (pq)^{-n/2} p_n(x) ((2/N)^{\frac{1}{2}} w)^n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + (2/N)^{\frac{1}{2}} qw)^x (1 - (2/N)^{\frac{1}{2}} pw)^{N-x} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{(2/N)^{\frac{1}{2}} qw x - (2/N)^{\frac{1}{2}} pw(N-x) - N^{-1} q^2 w^2 x - N^{-1} p^2 w^2 (N-x)} \\ &= e^{2z(pq)^{\frac{1}{2}} w - pqw^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} ((pq)^{\frac{1}{2}} w)^n. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que el mismo proceso que se aplica a la distribución dada $d\alpha(x)$ es el que sigue la distribución $e^{-z^2} dz$ de los polinomios de Hermite, para ser más exactos:

$$j(x) \cong (2\pi pqN)^{-\frac{1}{2}} e^{-z^2} \quad \text{ó} \quad j(x)dx \cong \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-z^2} dz$$

2. Sea $pN = a$, donde $a > 0$ y fijo, $N \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $q \rightarrow 1$. Entonces para un n fijo y un entero fijo $x \geq 0$, encontramos que $\lim_{N \rightarrow \infty} p_n(x)$ existe y es igual al polinomio de Poisson-Charlier. De hecho (ver (2.37))

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + qw)^x (1 - pw)^{N-x} &= \lim_{p \rightarrow 0} (1 + qw)^x (1 - pw)^{-x} (1 - pw)^{p^{-1}a} \\ &= (1 + w)^x e^{-aw} \end{aligned}$$

2.9.9. Otros casos especiales

- Markov consideró el caso en el que $\alpha(x)$ es una función escalonada con salto, en el punto q^x , de $j(x) = q^x$, $x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, y $q > 0$, $q \neq 1$. Se trata de una distribución muy similar a la de la subsección 2.9.6. Se cumplen, de hecho, (2.33) y (2.34).

Stieltjes y Gottlieb investigaron el caso en el que $\alpha(x)$ es una función escalonada con salto q^x en el punto x , $x = 0, 1, 2, \dots$, $0 < q < 1$.

- Una distribución destacable es la que se define con la función peso

$$w(x) = \{x(\alpha - x)(\beta - x)\}^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 < x \leq \alpha, \alpha < \beta.$$

- Heine deriva la ecuación diferencial lineal de segundo orden para polinomios ortogonales relacionados con las funciones elípticas jacobianas. Archieser investigó los polinomios ortogonales asociados con la función peso

$$w(x) = \begin{cases} \{(1 - x^2)(a - x)(b - x)\}^{-\frac{1}{2}}|c - x|, & -1 \leq x \leq a, \quad b \leq x \leq +1 \\ 0, & a < x < b \end{cases}$$

donde $-1 < a < b < +1$ y c depende de a y b . Estos polinomios están también relacionados con las funciones elípticas.

Capítulo 3

Interpolación

En este capítulo vamos a tratar problemas de interpolación relativos a la teoría de polinomios ortogonales. En particular, nos centraremos en interpolaciones cuyas abscisas son los ceros de los polinomios ortogonales $p_n(x)$ asociados a distribuciones del tipo $d\alpha$ o $w(x)dx$.

3.1. Definiciones

Definición 3.1.1. Sea una disposición triangular en $[a, b]$, siendo este un intervalo acotado o infinito,

$$S_n : a \leq x_{1n} < x_{2n} < \dots < x_{nn} \leq b, \quad (3.1)$$

($a < x_{1n}$ en el caso de ser $a = -\infty$ y $x_{nn} < b$ en el caso de ser $b = +\infty$) lo cual denota un conjunto de n puntos distintos dos a dos de este intervalo. Sea $l(x)$ un polinomio no idénticamente cero de grado $\leq n$, idénticamente distinto de cero, que se anula en $x = x_{kn}$, $k = 1, 2, \dots, n$ y que está determinado salvo por una constante de proporcionalidad distinta de cero. Cuando no haya ambigüedad, escribiremos x_k en lugar x_{kn} .

Los polinomios

$$l_k(x) = \frac{l(x)}{l'(x_k)(x - x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

son llamados *polinomios fundamentales* de interpolación de Lagrange correspondientes al conjunto S_n . Estos tienen la propiedad

$$l_k(x_{ik}) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

Sean f_1, f_2, \dots, f_n valores arbitrarios. Entonces la expresión

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k l_k(x) \quad (3.2)$$

representa el único polinomio de grado $\leq n-1$ que toma el valor de f_k en $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Este es el n -ésimo *polinomio de Lagrange* correspondiente a las abscisas S_n . Vemos fácilmente que se cumple

$$l_1(x) + l_2(x) + \dots + l_n(x) = 1$$

Definición 3.1.2. Sea S_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ una sucesión de conjuntos de abscisas en $[a, b]$ satisfaciendo (3.1) que llamamos *disposición triangular de nodos en $[a, b]$* . Si $f(x)$ es una función dada definida en $[a, b]$, podemos considerar la sucesión de los correspondientes polinomios de Lagrange $L_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, definidos por (3.2) con $f_k = f(x_{kn})$. Varias propiedades de convergencia y divergencia de esta sucesión han sido estudiadas bajo condiciones de continuidad adecuadas de $f(x)$.

De ahora en adelante nos vamos a centrar exclusivamente en el caso en el que las abscisas S_n son los ceros de los polinomios ortogonales asociados con una distribución preasignada. Se pueden considerar diferentes tipos de convergencia, por ejemplo:

1. *convergencia ordinaria o puntual*: $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = f(x)$;
2. *convergencia en media cuadrática*: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |L_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$
3. *convergencia en media generalizada*, como la anterior pero cambiando el exponente 2 por p , con $p \geq 1$.

Como es natural, estas definiciones se adaptan al caso en que tengamos distribuciones con función peso.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Helly). Sea $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de distribuciones en un intervalo $[a, b]$ y denotemos

$$l_n(f) = \int_a^b f(x) d\alpha_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$l(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Una condición necesaria y suficiente para que $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n(f) = l(f)$, donde $f(x)$ es una función continua arbitraria en $[\alpha, \beta]$, es que se cumplan las dos condiciones siguientes a la vez:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n(x^k) = l(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

$$\int_a^b |d\alpha_n(x)| < A, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

Además, si la segunda condición (3.4) no se cumple, existe una función continua $f(x)$ tal que la sucesión $\{l_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ es no acotada.

Demostración. Podemos encontrar esta demostración en [10], pp. 268-271. Véase también [1], p. 123. La primera condición (3.3) expresa la validez del paso al límite para un polinomio arbitrario. La segunda condición (3.4) confirma que las variaciones totales de $\alpha_n(x)$ están acotadas. \square

Nota 3.1.2. Veamos un problema que se nos plantea ante la falta de convergencia de la sucesión $\{L_n\}_{n=1}^\infty$. Sean a y b finitos. Si $f(x)$ es sólo continua, el comportamiento de los polinomios de Lagrange es bastante irregular. Faber demostró en [7] que dada una sucesión arbitraria $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ existe una función continua $f(x)$ tal que la sucesión $\{L_n\}_{n=1}^\infty$ no converge uniformemente a f . Por otro lado, Bernstein en [2] demostró que existe una función continua para la cual $L_n(x)$ es no acotada en un punto preasignado x_0 . De acuerdo con el teorema de Helly (teniendo en cuenta que todo operador lineal puede ser escrito como $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ siempre que $\alpha(x)$ sea de variación acotada, definida en un intervalo $[a, b]$ acotado e independiente de $f(x)$, ver [19], p. 12), esto es equivalente al hecho de que la sucesión de las constantes de Lebesgue

$$\sum_{k=1}^n |l_k(x_0)|, \quad \text{con } n \rightarrow \infty$$

es no acotada.

Se sabe mucho más para el caso de la sucesión especial

$$x_{kn} = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

con $a = -1, b = +1$, es decir, los ceros de $T_n(x)$. Grunwald en [9] y Marcinkiewicz en [13] demostraron la existencia de una función continua $f(x)$ para la cual la sucesión de polinomios de Lagrange correspondiente a estos x_{kn} son siempre no acotadas, incluso no convergentes.

Con el objetivo de obtener la convergencia de las sucesiones de los polinomios de interpolación, es necesario introducir restricciones adicionales respecto a: (a) la función $f(x)$, más concretamente las restricciones respecto a su módulo de continuidad (definido en (1.4)), o (b) el polinomio de interpolación, como las condiciones sobre su derivada y similares.

En base a esto, introduciremos los polinomios

$$h_k(x) = \left\{ 1 - \frac{l''(x_k)}{l'(x_k)}(x - x_k) \right\} l_k(x)^2 \quad (3.5)$$

$$= v_k(x)l_k(x)^2, \quad (3.6)$$

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)l_k(x)^2, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

denominados *polinomios fundamentales* de primera y segunda especie de interpolación de Hermite correspondiente al conjunto S_n . Estos polinomios

de grado $\leq 2n - 1$ están unívocamente determinados por las condiciones:

$$h_k(x_j) = \delta_{kj}, \quad h'_k(x_k) = 0; \quad \mathfrak{h}_k(x_j) = 0, \quad \mathfrak{h}'_k(x_j) = \delta_{kj}, \quad (3.8)$$

$k, j = 1, 2, \dots, n$ y dados los valores f_k, f'_k ,

$$W_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k h_k(x) + \sum_{k=1}^n f'_k \mathfrak{h}_k(x) \quad (3.9)$$

representa el polinomio de grado $\leq 2n - 1$ unívocamente determinado para el cual

$$W_n(x_k) = f_k, \quad W'_n(x_k) = f'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10)$$

Definición 3.1.3. De nuevo, sea $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, una disposición triangular de conjuntos de abcisas. Si $f(x)$ es una función que tiene derivada en $[a, b]$, podemos tomar $f_k = f(x_{kn})$, $f'_k = f'(x_{kn})$ y consideramos los correspondientes polinomios de interpolación de Hermite $W_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, definidos por (3.10). Si solo se conoce que $f(x)$ es continua, podemos elegir f'_k arbitrariamente; por ejemplo, podemos tomar $f'_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Si $f'_k = 0$, llamaremos a los $W_n(x)$ los *polinomios escalonados* correspondientes a S_n . En el caso más general $|f'_k| < A$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, donde A es una constante independiente de k y n , en este caso se los denomina *polinomios escalonados generalizados*.

Los polinomios escalonados $W_n(x)$ ya sean simples o generalizados, presentan un comportamiento más regular cuando $n \rightarrow \infty$ de lo que lo hacen los polinomios ordinarios de Lagrange $L_n(x)$. Coinciden con la función dada $f(x)$ en los mismos puntos en que lo hacen los polinomios de Lagrange, pero a la vez satisfacen ciertas restricciones adicionales relativas a su derivada primera. Su grado es $2n - 1$ en lugar de $n - 1$. Veremos que determinadas sucesiones $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ de polinomios escalonados (incluso los generalizados) serán uniformemente convergentes si $f(x)$ es una función continua arbitraria.

Para los polinomios fundamentales de interpolación de Hermite se cumplen las siguientes relaciones:

$$h_1(x) + h_2(x) + \dots + h_n(x) = 1 \quad (3.11)$$

$$\sum_{k=1}^n x_k h_k(x) + \sum_{k=1}^n \mathfrak{h}_k(x) = x. \quad (3.12)$$

La primera identidad presenta una consecuencia relevante que se da cuando tenemos polinomios escalonados, es decir, cuando $f'_k = 0$. Sea el conjunto $\{S_n\}$ tal que

$$h_k(x) \geq 0 \quad a \leq x \leq b, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.13)$$

Entonces por la definición de $W_n(x)$ vista en (3.10), la identidad (3.11) y acotando f_k por $\max f_k$ y minorando f_k por $\min f_k$ tenemos que

$$\min f_k \leq W_n(x) \leq \max f_k, \quad a \leq x \leq b, n = 1, 2, \dots$$

Además, la expresión (3.13) es equivalente al hecho de que la función lineal

$$v_k(x) = 1 - \frac{l''(x_k)}{l'(x_k)}(x - x_k) \quad (3.14)$$

no se anule en el intervalo abierto $a < x < b$, o lo que es lo mismo, las *abscisas conjugadas*

$$x_k + \frac{l'(x_k)}{l''(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

quedan fuera de este intervalo.

3.2. Convergencia en media de los polinomios de Lagrange

Teorema 3.2.1. *Sea $\alpha(x)$ una distribución arbitraria en el intervalo $[a, b]$, $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ los polinomios ortonormales asociados y $l_1(x), l_2(x), \dots, l_n(x)$ los polinomios fundamentales de interpolación de Lagrange correspondientes a los ceros de $p_n(x)$. Entonces se tiene que*

$$\int_a^b l_k(x)l_j(x)d\alpha(x) = \lambda_k\delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n$$

donde los λ_k son los números de Christoffel definidos por

$$\int_a^b \rho(x)d\alpha(x) = \lambda_1\rho(x_1) + \lambda_2\rho(x_2) + \dots + \lambda_n\rho(x_n),$$

donde $\rho(x)$ es un polinomio de grado $\leq 2n - 1$ y los x_i $i = 1, \dots, n$ son los ceros de $p_n(x)$.

Demostración. La demostración se obtiene de forma inmediata de (2.11), ya que $l_k(x)l_j(x)$ se anula en los ceros de $p_n(x)$ si $k \neq j$. La única excepción es el cero x_k cuando $k = j$ lo que nos da $(l_k(x_k))^2 = 1$. □

Teorema 3.2.2. *Sea $d\alpha(x)$ una distribución arbitraria en el intervalo acotado $[a, b]$, y sea $Q_n(f)$ la correspondiente cuadratura de Gauss (es decir, x_{kn} son los ceros de los polinomios ortogonales $p_n(x)$ asociados con $d\alpha(x)$ y λ_{kn} los correspondientes números de Christoffel). Entonces tenemos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

se cumple para una función continua arbitraria $f(x)$ para la que existe la integral de Riemann-Stieltjes del lado derecho de la igualdad.

Demostración. La demostración podemos encontrarla en [3], capítulo 4. \square

Teorema 3.2.3. Sea $d\alpha(x)$ una distribución arbitraria en el intervalo acotado $[a, b]$, y sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ el correspondiente conjunto de polinomios ortonormales. Para la función que toma valores complejos $f(x)$ supongamos que las integrales de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_a^b f(x)x^n d\alpha(x), \quad \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

existen. Entonces si $L_n(x)$ denota el polinomio de Lagrange de grado $n - 1$, que coincide con $f(x)$ en los ceros de $p_n(x)$, obtenemos la convergencia en media cuadrática

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - L_n(x)|^2 d\alpha(x) = 0 \quad (3.15)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - L_n(x)|^2 d\alpha(x) &= \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) + \sum_{k=1}^n \lambda_k |f(x_k)|^2 \\ &\quad - 2\Re \sum_{k=1}^n \overline{f(x_k)} \int_a^b f(x) l_k(x) d\alpha(x) \\ &\leq \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) + \sum_{k=1}^n \lambda_k |f(x_k)|^2 \\ &\quad + 2 \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k |f(x_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{-1} \left| \int_a^b f(x) l_k(x) d\alpha(x) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) + \sum_{k=1}^n \lambda_k |f(x_k)|^2 \\ &\quad + 2 \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k |f(x_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Siendo cierta esta última desigualdad por la desigualdad de Bessel. Por tanto usando un teorema 3.2.2 tenemos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - L_n(x)|^2 d\alpha(x) \leq 4 \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x)$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, y $\rho(x)$ un polinomio, se desprende del teorema de Weierstrass que

$$\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x) < \epsilon \quad \forall x$$

Si $L_n(f; x)$ denota el polinomio de Lagrange de grado $n - 1$ correspondiente a $f(x)$, tenemos

$$f(x) - L_n(f; x) = f(x) - \rho(x) - L_n(f - \rho; x) \quad (3.16)$$

si n excede el grado de $\rho(x)$, luego tendrá grado $\leq n - 1$. Con lo que se concluye la demostración. \square

En el caso de tener una función peso en la integral, la convergencia en media en el sentido usual para algún $f(x)$ Riemann integrable se obtiene al cumplirse (3.15) teniendo en cuenta que $d\alpha(x) = w(x)dx$, $w(x) > 0$, con a lo sumo un número finito de ceros .

En el caso de que $a = -1, b = +1$ $d\alpha(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$, (es decir, para abscisas de Chebyshev de primera especie) Erdős y Feldheim demostraron en [6] el siguiente teorema:

Teorema 3.2.4. *Sea $p \leq 1$ arbitrario y $f(x)$ una función continua. Entonces para los polinomios de Lagrange correspondientes a las abscisas de Chebyshev de primera especie,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} |f(x) - L_n(x)|^p (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = 0$$

Demostración. Basta con demostrar esto para valores pares de p . En la prueba de inducción desempeña un papel fundamental el uso de la siguiente propiedad de las abscisas de Chebyshev:

Proposición 3.2.5. *Llamamos l_k , $k = 1, 2, \dots, n$, a los polinomios fundamentales de interpolación de Lagrange con los ceros de los polinomios de Chebyshev de primera especie como abscisas. Si ℓ es par,*

$$\int_{-1}^{+1} l_{k_1}(x) l_{k_2}(x) \dots l_{k_\ell}(x) (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = 0$$

donde k_1, k_2, \dots, k_ℓ son enteros entre 1 y n .

Feldheim señaló en [8] que (3.15) no se cumple en general si $a = -1, b = +1$ $d\alpha(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, ó sea, para las abscisas de Chebyshev de segunda especie, y sustituyendo el exponente 2 por $p = 4$. Para las mismas abscisas en general no es cierto tampoco que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} |f(x) - L_n(x)|^2 dx = 0 \quad (3.17)$$

(es decir, con dx en lugar de $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}dx$). En ambos casos el límite superior de las integrales en cuestión puede resultar $+\infty$ si $f(x)$ es una función

continua adecuada.

A partir del teorema 3.2.3 la convergencia media en el sentido de (3.17) se obtiene de forma inmediata para las abscisas de Jacobi, es decir, para los ceros de los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, y que cumplan $\max(\alpha, \beta) \leq 0$, con $\alpha > -1$ y $\beta > -1$; siendo $f(x)$ una función continua arbitraria o incluso Riemann integrable.

Á. Holló demostró en [11] esta convergencia en media cuadrática para las abscisas de Jacobi con $\max(\alpha, \beta) < \frac{1}{2}$, siendo esta la cota más precisa y $f(x)$ continua. Holló también investigó la validez de la convergencia en L^1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} |f(x) - L_n(x)| dx = 0 \quad (3.18)$$

siendo $f(x)$ continua, y mostró que (3.18) se cumple para $\max(\alpha, \beta) < \frac{3}{2}$. La última cota es de nuevo la más precisa, en el sentido de que para $\max(\alpha, \beta) > \frac{3}{2}$ y una función continua $f(x)$ adecuada, la expresión (3.18) puede fallar. \square

3.3. Polinomios de Lagrange en abscisas de Jacobi

Veamos para empezar algunos resultados previos que utilizaremos más adelante.

Teorema 3.3.1 (Fórmula de Darboux). Sean $\alpha > -1$, $\beta > -1$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = n^{-\frac{1}{2}} k(\theta) [\cos(N\theta + \gamma) + (n \sin \theta)^{-1} O(1)], \quad (3.19)$$

para θ en el intervalo $cn^{-1} \leq \theta \leq \pi - cn^{-1}$, c una constante fijada positiva y la notación $k(\theta) = \pi^{-\frac{1}{2}} (\sin \frac{\theta}{2})^{-\alpha-\frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta}{2})^{-\beta-\frac{1}{2}}$, $N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ y $\gamma = \frac{-(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{2}$. La cota para el término del error se cumple de forma uniforme en el intervalo $[\epsilon, \pi - \epsilon]$.

Demostración. La demostración podemos encontrarla en el libro [19], capítulo 8. \square

Nota 3.3.2. Darboux demostró que podemos extender este resultado a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios y entonces

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = n^{-\frac{1}{2}} k(\theta) \cos(N\theta + \gamma) + O(n^{-\frac{3}{2}}),$$

para $0 < \theta < \pi$ con $k(\theta) = \pi^{-\frac{1}{2}} (\sin \frac{\theta}{2})^{-\alpha-\frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta}{2})^{-\beta-\frac{1}{2}}$, $N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ y $\gamma = \frac{-(\alpha+\frac{1}{2})\pi}{2}$. La cota para el término del error se cumple de forma uniforme

en el intervalo $[\epsilon, \pi - \epsilon]$. La demostración hecha por Darboux se encuentra en el libro [4].

Teorema 3.3.3. *Sea $\alpha > -1$, $\beta > -1$, y supongamos que $0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < \pi$ son los ceros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$. Entonces*

$$\theta_k = n^{-1}(k\pi + O(1)) \quad (3.20)$$

con $O(1)$ estando uniformemente acotada para todos los valores de $k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, 3, \dots$. Además,

$$|P_n^{(\alpha, \beta)' }(\cos \theta_k)| \sim k^{-\alpha - \frac{3}{2}} n^{\alpha+2}, \quad 0 < \theta_k \leq \pi/2 \quad (3.21)$$

en el sentido de que el cociente de estas expresiones se mantiene entre ciertas cotas positivas dependientes sólo de α y β .

Demostración. La demostración podemos encontrarla en [19], capítulo 8, teorema 8.9.1. \square

Proposición 3.3.4. *Sean $\alpha > -1$, $\beta > -1$ y $\theta \in (0, \pi)$ cumpliendo $cn^{-1} \leq \theta \leq \pi - cn^{-1}$ y denotamos $k(\theta) = \pi^{-\frac{1}{2}} (\sin \frac{\theta}{2})^{-\alpha - \frac{1}{2}} (\cos \frac{\theta}{2})^{-\beta - \frac{1}{2}}$. Entonces*

$$\frac{d}{d\theta}(P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)) = n^{\frac{1}{2}} k(\theta) [-\sin(N\theta + \gamma) + (n \sin \theta)^{-1} O(1)], \quad (3.22)$$

con $N = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}$ y $\gamma = \frac{-(\alpha + \frac{1}{2})\pi}{2}$.

Demostración. Utilizando la propiedad de la derivada de los polinomios de Jacobi vista en (2.10) para reescribir el término de la izquierda de (3.22) y usando la identidad (3.19) y el hecho de que $k'(\theta) = k(\theta)(\sin \theta)^{-1} O(1)$ tenemos que

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1) \sin \theta P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos \theta) = -\frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1) \sin \theta \\ & \cdot (n-1)^{-\frac{1}{2}} k(\theta) (\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2})^{-1} (\cos(N\theta + \gamma - \pi/2) + (n \sin \theta)^{-1} O(1)) \end{aligned}$$

operando y simplificando llegamos al miembro de la derecha de la identidad (3.22). El último término de (3.22) puede ser reemplazado por $\theta^{-\alpha - \frac{3}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}})$ si $cn^{-1} \leq \theta \leq \pi - \epsilon$, y por $O(n^{-\frac{1}{2}})$ si $\epsilon \leq \theta \leq \pi - \epsilon$. \square

De (3.22) se deriva, aplicando el teorema del valor medio a $h(\theta) = P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) - \frac{k(\theta) \cos(N\theta + \gamma)}{\sqrt{n}}$, las siguientes fórmulas importantes:

(a)

$$\begin{aligned} & \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta_1) - P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} = n^{-\frac{1}{2}} k(\theta_1) \frac{\cos(N\theta_1 + \gamma) - \cos(N\theta_2 + \gamma)}{\theta_1 - \theta_2} \\ & + \theta_1^{-\alpha - \frac{3}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}}) + (\pi - \theta_2)^{-\beta - \frac{3}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos \theta_1) - P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos \theta_2)}{\cos \theta_1 - \cos \theta_2} &= n^{-\frac{1}{2}} k(\theta_1) \frac{\cos(N\theta_1 + \gamma) - \cos(N\theta_2 + \gamma)}{\cos \theta_1 - \cos \theta_2} \\ &+ \theta_1^{-\alpha-\frac{3}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}}) + (\pi - \theta_2)^{-\beta-\frac{3}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Con $cn^{-1} \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi - cn^{-1}$ siendo c una constante fija positiva.

Demostración. Aplicamos el teorema del valor medio a $h(\theta)$ y tenemos

$$\frac{h(\theta_1) - h(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} = h'(\tau_1) \quad \frac{h(\theta_1) - h(\theta_2)}{\cos \theta_1 - \cos \theta_2} = -\frac{h'(\tau_2)}{\sin \tau_2}, \quad \begin{array}{l} \theta_1 < \tau_1 < \theta_2, \\ \theta_1 < \tau_1 < \theta_2. \end{array}$$

Sabemos que $h'(\tau_1) = n^{\frac{1}{2}} k(\tau_1) (n \sin \tau_1)^{-1} O(1)$, que es $\theta_1^{-\alpha-\frac{3}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}})$ ó $(\pi - \theta_2)^{-\beta-\frac{3}{2}} O(n^{-\frac{1}{2}})$ dependiendo de si $\tau_1 \leq \pi/2$ ó $\tau_1 \geq \pi/2$. Además,

$$\begin{aligned} &\frac{k(\theta_1) \cos(N\theta_1 + \gamma) - k(\theta_2) \cos(N\theta_2 + \gamma)}{\theta_1 - \theta_2} = \\ &= k(\theta_1) \frac{\cos(N\theta_1 + \gamma) - \cos(N\theta_2 + \gamma)}{\theta_1 - \theta_2} + \cos(N\theta_2 + \gamma) \frac{k(\theta_1) - k(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2}. \end{aligned}$$

La última fracción es $k'(\tau) = \theta_1^{-\alpha-\frac{3}{2}} O(1) + (\pi - \theta_2)^{-\beta-\frac{3}{2}} O(1)$, $\theta_1 < \tau < \theta_2$.

Un argumento similar se utiliza para la segunda fórmula en (3.24).

Si θ_1 y θ_2 están dentro del intervalo $\epsilon \leq \theta \leq \pi - \epsilon$ de $[0, \pi]$, los últimos términos en las fórmulas (3.23), (3.24) son $O(n^{-\frac{1}{2}})$. □

Asumiremos ahora que $\alpha > -1, \beta > -1$, y supongamos que $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ denota los ceros del polinomio de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ en orden decreciente, pongamos $x_k = \cos \theta_k$, $0 < \theta_k < \pi$. En estas condiciones podemos afirmar el siguiente teorema

Teorema 3.3.5. *Sea $f(x)$ continua en $[-1, +1]$ con módulo de continuidad $\omega(\delta)$ definido en (1.4). Entonces los polinomios de Lagrange coincidentes con $f(x)$ en los ceros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ convergen uniformemente a $f(x)$ en cada intervalo $[-1 - \epsilon, 1 - \epsilon]$, con $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, siempre que $\omega(\delta) = o(|\log \delta|^{-1})$. Lo mismo se cumple en el intervalo $[-1 + \epsilon, 1]$ si $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ y $\omega(\delta) = o(|\log \delta|^{-1})$ o $r - \frac{1}{2} \leq \alpha < r + \frac{1}{2}$ y $f(x)$ tiene derivada continua de orden r con módulo de continuidad $\omega(\delta) = o(\delta^{\alpha-r+\frac{1}{2}})$, $r = 0, 1, 2, \dots$*

En el caso de que $\alpha < -\frac{1}{2}$ los polinomios de Lagrange son convergentes en el punto $x = 1$ si $f(x)$ es una función continua arbitraria.

Existen funciones continuas cuyos polinomios de Lagrange son divergentes (no acotados) en un punto fijado x_0 , $-1 < x_0 < 1$; lo mismo es cierto en el punto $x_0 = 1$ siempre que $\alpha \geq -\frac{1}{2}$.

Resultados similares se cumplen en el intervalo $[-1, 1 - \epsilon]$ y en el punto $x = -1$ si sustituimos α por β . La convergencia es uniforme en el intervalo $[-1, +1]$ siempre que $\max(\alpha, \beta) \leq -\frac{1}{2}$ y $\omega(\delta) = o(|\log \delta|^{-1})$, o si $r - \frac{1}{2} \leq \max(\alpha, \beta) < r + \frac{1}{2}$ y $f(x)$ tiene derivada continua de orden r con módulo de continuidad $w(\delta) = o(\delta^{\max(\alpha, \beta) - r + \frac{1}{2}})$, $r = 0, 1, 2, \dots$. De nuevo, el signo de igualdad en el caso $r = 0$, es decir, en el caso $\max(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}$, es excluido.

Demostración. Dividiremos la demostración en cuatro partes.

Parte 1: Empezaremos con un estudio de las “constantes de Lebesgue”

$$\sum_{k=1}^n |l_k(x_0)|, \quad (3.25)$$

donde $-1 < x_0 < 1$. Sea $\delta > 0$ fijo tal que $\delta < 1 - |x_0|$, entonces $P_n^{(\alpha, \beta)}(x_0) = O(n^{-\frac{1}{2}})$, de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{|x_k - x_0| > \delta} |l_k(x_0)| &= O(n^{-\frac{1}{2}}) \sum_{|x_k - x_0| > \delta} |P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)|^{-1} \\ &= O(n^{-\frac{1}{2}}) \sum_{k=1}^n |P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)|^{-1} \end{aligned}$$

De acuerdo con $|P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)| \sim k^{-\alpha - \frac{3}{2}} n^{\alpha + 2}$, (véase la expresión (3.21))

$$\sum_{k=1}^n |P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)|^{-1} = O(1) \sum_{k=1}^n k^{\alpha + \frac{3}{2}} n^{-\alpha - 2} + O(1) \sum_{k=1}^n k^{\beta + \frac{3}{2}} n^{-\beta - 2} = O(n^{\frac{1}{2}})$$

En consecuencia

$$\sum_{|x_k - x_0| > \delta} |l_k(x_0)| = O(1)$$

Por otra lado, asumimos $|x_k - x_0| \leq \delta$. Para un k fijo, por (3.24) tenemos que

$$l_k(x_0) = O(n^{-\frac{1}{2}}) \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x_k) - P_n^{(\alpha, \beta)}(x_0)}{x_k - x_0} = O(1)$$

de modo que si $x_0 = \cos \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$,

$$\begin{aligned} \sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |l_k(x_0)| &= \sum_{n^{-1} < |\theta_k - \theta_0| \leq \delta'} |l_k(x_0)| + O(1) \\ &= O(n^{-\frac{1}{2}}) O(n^{-\frac{1}{2}}) \sum_{n^{-1} < |\theta_k - \theta_0| \leq \delta'} |\theta_k - \theta_0|^{-1} + O(1), \end{aligned}$$

donde δ' es un número fijo positivo. De acuerdo con el teorema 3.3.3 $\theta_k = n^{-1}(k\pi + O(1))$ luego la última expresión es $O(\log n)$. La misma acotación se cumple para (3.25), y lo hace uniformemente si se cumple la condición $-1 + \epsilon \leq x_0 \leq 1 - \epsilon$.

Podemos mostrar también que

$$\sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |l_k(x_0)| \sim \log n$$

si n tiene a $+\infty$ sobre una sucesión de enteros adecuados. Es suficiente con elegir n tal que $|\cos(N\theta + \gamma)| \geq \cos \epsilon$, donde N y γ tienen el mismo significado que en la fórmula de Darboux, y $\epsilon = \frac{1}{2} \min(\theta_0, \pi - \theta_0)$. Esto es posible dado que

$$(m + \frac{1}{2})\pi - \epsilon < N\theta_0 + \gamma < (m + \frac{1}{2})\pi + \epsilon,$$

m entero, del mismo modo

$$(m + \frac{1}{2})\pi + \epsilon < (N + 1)\theta_0 + \gamma < (m + \frac{3}{2})\pi - \epsilon$$

La fórmula de Darboux junto con la discusión previa y (3.20) nos da la demostración deseada.

Parte 2:

Como consecuencia del último resultado, podemos concluir a través del teorema de Helly la existencia de una función continua $f(x)$ cuyos polinomios de Lagrange son no acotados en el punto interior $x = x_0$. Por otro lado, supongamos que $f(x)$ tiene módulo de continuidad $w(\delta) = o(|\log \delta|^{-1})$, y supongamos que $L_n(f; x)$ es el polinomio de Lagrange de grado $n - 1$ correspondiente a $f(x)$. Aproximemos $f(x)$ por un polinomio de grado $\leq n - 1$ $\rho(x)$ tal que

$$f(x) - \rho(x) = o[(\log n)^{-1}], \quad -1 \leq x \leq 1$$

Entonces, al igual que en (3.16), tenemos

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &= |L_n(f - \rho; x) - (f(x) - \rho(x))| \\ &= o([\log n]^{-1})O(\log n) = o(1) \end{aligned}$$

Parte 3: Asumimos que $1 - \delta \leq x_0 \leq 1$. Poniendo $r = n + 1 - k$, $r = O(n)$, tenemos por el teorema 2.8.5 y (3.21),

$$\begin{aligned} \sum_{|x_k - x_0| > \delta} |l_k(x_0)| &= O(1) |P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_0)| \sum_{|x_k - x_0| > \delta} |P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)|^{-1} \\ &= O(n^a) \sum k^{\beta + \frac{3}{2}} n^{-\beta - 2} = O(n^{a + \frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

Siendo $a = \max(\alpha, -\frac{1}{2})$.

Ahora procederemos a calcular una cota superior para

$$\sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |l_k(x_0)| = \sum \left| \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta_0)}{\cos \theta_0 - \cos \theta_k} \right| |P_n^{(\alpha, \beta)'(\cos \theta_k)}|^{-1} \quad (3.26)$$

$$= |P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta_0)| \sum \frac{k^{\alpha + \frac{3}{2}} n^{-\alpha - 2}}{|\theta_0^2 - \theta_k^2|}, \quad (3.27)$$

(dado que $\frac{|\theta_0^2 - \theta_k^2|}{\cos \theta_0 - \cos \theta_k}$ es acotado). De ahora en adelante usaremos ambas cotas. Tenemos de (2.18)

$$\left| \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta_0) - P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta_k)}{\cos \theta_0 - \cos \theta_k} \right| |P_n^{(\alpha, \beta)'(\cos \theta_k)}|^{-1} \quad (3.28)$$

$$= O(1) |P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos \tau)| k^{\alpha + \frac{3}{2}} n^{-\alpha - 1} \quad (3.29)$$

donde τ está entre θ_0 y θ_k .

Supongamos que $\theta_0 = n^{-1}\xi$, y consideramos primero el caso $\xi = O(1)$. Supongamos que $k = O(1)$; entonces (3.29) pasa a ser $O(1)n^{\alpha+1}k^{\alpha+\frac{3}{2}}n^{-\alpha-1} = O(1)$. Por otro lado, si k es más grande que un número positivo suficientemente grande ya fijado, la segunda expresión de (3.27) pasa a ser (ver segunda cota de (2.28))

$$O(1)n^\alpha \sum k^{\alpha + \frac{3}{2}} n^{-\alpha - 2} \theta_k^{-2} = O(1) \sum k^{\alpha + \frac{1}{2}} = O(n^{\alpha + \frac{1}{2}}), O(\log n), O(1),$$

de acuerdo con $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, o $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Ahora sea ξ “grande” y $\xi - k\pi = O(1)$, por tanto el número de estos valores k está acotado. Entonces obtenemos para (3.29) (ver primera cota de (2.28))

$$O(1)\tau^{-\alpha - \frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{2}} k^{\alpha + \frac{3}{2}} n^{-\alpha - 1} = O(1)(k/n)^{-\alpha - \frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{2}} k^{\alpha + \frac{3}{2}} n^{-\alpha - 1} = O(1)$$

Finalmente, asumimos que ambos ξ y $\xi - k\pi$ son “grandes”. La segunda expresión de (3.27) pasa a ser (ver primera cota de (2.28))

$$O(\xi^{-\alpha - \frac{1}{2}}) \sum \frac{k^{\alpha + \frac{3}{2}}}{|\xi^2 - k^2\pi^2|} = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3,$$

donde la suma se extiende sobre $k\pi \leq \xi/2$, $\xi/2 < k\pi \leq 3\xi/2$ y $k\pi > 3\xi/2$, respectivamente. Aquí tenemos que tener en cuenta el hecho de que el ratio

$$\left| \frac{\xi^2 - (k\pi + O(1))^2}{\xi^2 - k^2\pi^2} \right|$$

tiene una cota inferior positiva. En el segundo sumatorio $|\xi - k\pi|$ es más grande que una constante fijada. Tenemos ahora que

$$\sum_1 = O(\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}})O(\xi^{-2}) \sum_{k\pi \leq \xi/2} k^{\alpha+\frac{3}{2}} = O(1), \quad (3.30)$$

$$\sum_2 = O(\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}})O(\xi^{\alpha+\frac{1}{2}}) \sum_{\xi/2 < k\pi \leq 3\xi/2} |\xi - k\pi|^{-1} = O(\log \xi) = O(\log n), \quad (3.31)$$

$$\sum_3 = O(\xi^{-\alpha-\frac{1}{2}}) \sum_{k\pi > 3\xi/2} k^{\alpha+\frac{1}{2}} = O(n^{\alpha+\frac{1}{2}}), O(\log n), O(1), \quad (3.32)$$

para los siguientes valores de α , $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, o $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Resumiendo, para las constantes de Lebesgue (3.25) obtenemos, la acotación $O(n^{\alpha+\frac{1}{2}})$ y $O(\log n)$, uniformemente en $-1 + \epsilon \leq x_0 \leq 1$, de acuerdo con $\alpha > -\frac{1}{2}$ o $\alpha \leq -\frac{1}{2}$. Un resultado similar lo tenemos para el intervalo $-1 \leq x_0 \leq 1 - \epsilon$ sustituyendo α por β . En el subintervalo $-1 \leq x_0 \leq 1$ obtenemos las cotas $O(n^{\gamma+\frac{1}{2}})$ y $O(\log n)$ para $\gamma > -\frac{1}{2}$ y $\gamma \leq -\frac{1}{2}$, respectivamente, donde $\gamma = \max(\alpha, \beta)$.

Debemos usar ahora un argumento similar al usado en la parte 2. Asumimos primero que $-1 + \epsilon \leq x_0 \leq 1$, y supongamos que $f(x)$ satisface las condiciones del teorema 3.3.5. De acuerdo con el teorema 1.3.2 existe un polinomio de grado $\leq n - 1$ $\rho(x)$ tal que

$$f(x) - \rho(x) = \begin{cases} n^{-r} o(n^{-\alpha+r-\frac{1}{2}}) = o(n^{-\alpha-\frac{1}{2}}), \\ o[(\log n)^{-1}], \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 1,$$

dependiendo de si $\alpha > -\frac{1}{2}$ o $\alpha \leq -\frac{1}{2}$. Esto confirma el resultado concerniente a la convergencia en el intervalo $[-1 + \epsilon, 1]$. La demostración es obviamente la misma para $[-1, 1 - \epsilon]$ y para $[-1, 1]$.

Parte 4: Falta por discutir el caso de las constantes de Lebesgue para $x_0 = 1$, es decir, las expresiones.

$$\sum_{k=1}^n |l_k(1)| \sim n^\alpha \sum_{k=1}^n (1 - x_k)^{-1} |P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)|^{-1}.$$

Los ceros positivos x_k aportan la contribución $\sim n^\alpha \sum (k/n)^{-2} k^{\alpha+\frac{3}{2}} n^{-\alpha-2} = \sum k^{(\alpha-\frac{1}{2})}$, el cual es $O(n^{\alpha+\frac{1}{2}})$, $O(\log n)$, $O(1)$, para los valores de $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\alpha < -\frac{1}{2}$. La contribución de los ceros negativos es

$$n^\alpha \sum |P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)|^{-1} \sim n^\alpha \sum k^{\beta+\frac{3}{2}} n^{-\beta-2} \sim n^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

a continuación aplicando del teorema de Helly obtenemos la prueba buscada del teorema 3.3.5. \square

3.4. Polinomios escalonados en los casos clásicos

Para empezar vamos a calcular las funciones lineales $v_k(x)$ vistas en (3.14) para las abscisas de Jacobi, Laguerre y Hermite respectivamente. Asumimos que $\alpha > -1$, $\beta > -1$ en el primer caso y $\alpha > -1$ en el segundo.

En el caso de Jacobi obtenemos de (4.2.1 del libro), dado que $l(x_k) = 0$

$$\frac{l''(x_k)}{l'(x_k)} = \frac{\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x_k}{1 - x_k^2}$$

y de ahí tenemos que

$$v_k(x) = \frac{1 - x[\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x_k] + (\alpha - \beta)x_k + (\alpha + \beta + 1)x_k^2}{1 - x_k^2} \quad (3.33)$$

En particular,

$$v_k(-1) = \frac{(1 + \alpha)(1 + x_k) - \beta(1 - x_k)}{1 - x_k} \quad (3.34)$$

$$v_k(1) = \frac{(1 + \beta)(1 - x_k) - \alpha(1 + x_k)}{1 + x_k} \quad (3.35)$$

El conjunto de los ceros x_k es denso en el intervalo $[-1, +1]$ si n es grande. Por tanto $v_k(-1)$ es no negativo para cada k y n si y solo si $\beta \leq 0$. De igual manera, $v_k(1) \geq 0$ si y solo si $\alpha \leq 0$. Como $v_k(x)$ es lineal tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.4.1. *Los polinomios fundamentales $h_k(x)$ de primera especie asociados con las abscisas de Jacobi, son no negativos en $-1 \leq x \leq 1$ para todos los valores de k y n , si y solo si*

$$-1 < \alpha \leq 0, \quad -1 < \beta \leq 0.$$

En el caso de tener abscisas de Laguerre (ver (2.19), primera ecuación) nos quedaría:

$$v_k(x) = \frac{x_k(x_k - \alpha) + x(\alpha + 1 - x_k)}{x_k}; \quad v_k(0) = x_k - \alpha.$$

En este caso $v_k(x)$ cambia de signo para todos los valores de α si k y n se eligen adecuadamente.

En el caso de tener abscisas de Hermite (ver (2.20), primera ecuación) nos quedaría:

$$v_k(x) = 1 - 2x_k x + 2x_k^2$$

3.4.2. Polinomios escalonados y polinomios de interpolación Hermite para abscisas de Jacobi

Asumiremos que $\alpha > -1$, $\beta > -1$ y usaremos la misma notación que en la sección 3.3.

Teorema 3.4.3. *Sea $f(x)$ continua en $[-1, 1]$. Los polinomios escalonados generalizados (3.9) [$f_k = f(x_k)$, $|f'_k| < A$] convergen uniformemente a $f(x)$ sobre cada intervalo $[-1 + \epsilon, 1 + \epsilon]$. Lo mismo se cumple en el intervalo $[-1 + \epsilon, 1]$ siempre que $\alpha < 0$. Los polinomios escalonados son, en general, divergentes en $x = 1$ si $f(x)$ es sólo continua y $\alpha \geq 0$.*

Los polinomios de interpolación de Hermite (3.9) [$f_k = f(x_k)$, $f'_k = f'(x_k)$] converge uniformemente a $f(x)$ en $[-1 + \epsilon, 1]$ si $\alpha < \frac{1}{2}$ y $f(x)$ tiene derivada segunda continua, o si $\frac{r}{2} \leq \alpha < \frac{r+1}{2}$ y $f(x)$ tiene derivada $(r+1)$ -ésima continua con módulo de continuidad $\omega_{r+1}(\delta)$ satisfaciendo la condición $\omega_{r+1}(\delta) = o(\delta^{2\alpha-r})$, $r = 1, 2, 3, \dots$

Resultados similares se cumplen para $[-1, 1 - \epsilon]$ y en $x = -1$ si sustituimos α por β y en el intervalo $[-1, 1]$ si sustituimos α por $\max(\alpha, \beta)$.

Demostración. Vamos a dividir la demostración en cuatro partes.

Parte 1: Empezaremos con la discusión de la convergencia para $-1 < x_0 < 1$. En esta parte, otra vez más, el teorema 3.3.3 es indispensable. Si $x = x_k$, el numerador de $v_k(x)$ en (3.33) es

$$1 - x_k[\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x_k] + (\alpha - \beta)x_k + (\alpha + \beta + 1)x_k^2 = 1 - x_k^2 > 0$$

Por tanto, $v_k(x_0)$ es positivo si $|x_k - x_0|$ es suficientemente pequeño, es decir, $|x_k - x_0| \leq \delta$. Lo mismo es por supuesto cierto para $h_k(x_0)$ (por como contruimos $h_k(x_0)$ en (3.5)). Además, $v_k(x_0)$ tiene para este k una cota inferior positiva que es independiente de δ . Obtenemos por tanto, teniendo en cuenta la identidad (3.11)

$$\sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |h_k(x_0)| = \sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} h_k(x_0) = 1 - \sum_{|x_k - x_0| > \delta} h_k(x_0), \quad (3.36)$$

y de (3.5), (3.6), (3.7) observamos que

$$\sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |h_k(x_0)| \leq \delta \sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} \frac{|h_k(x_0)|}{v_k(x_0)} = O(1)\delta \sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} h_k(x_0) \quad (3.37)$$

donde $O(1)$ es independiente de δ .

Debemos encontrar una cota de las correspondientes sumas para el caso $|x_k - x_0| > \delta$. De (3.33) y (3.21) obtenemos

$$\sum_{|x_k-x_0|>\delta} |h_k(x_0)| = O(1) \sum_{|x_k-x_0|>\delta} (1-x_k^2)^{-1} (l_k(x_0))^2 \quad (3.38)$$

$$= O(1) (P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0))^2 \sum_{|x_k-x_0|>\delta} (1-x_k^2)^{-1} (P_n^{(\alpha,\beta)'}(x_k))^{-2} \quad (3.39)$$

$$= O(n^{-1}) \sum_{k=1}^n (k/n)^{-2} k^{2\alpha+3} n^{-2\alpha-4} + O(n^{-1}) \sum_{k=1}^n (k/n)^{-2} k^{2\beta+3} n^{-2\beta-4} \quad (3.40)$$

$$= O(n^{-1}) \quad (3.41)$$

Además observamos que

$$\sum_{|x_k-x_0|>\delta} |\mathfrak{h}_k(x_0)| = O(1) \sum_{|x_k-x_0|>\delta} (l_k(x))^2 \quad (3.42)$$

$$= O(1) (P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0))^2 \sum_{|x_k-x_0|>\delta} (P_n^{(\alpha,\beta)'}(x_k))^{-2} \quad (3.43)$$

$$= O(n^{-1}) \sum_{k=1}^n k^{2\alpha+3} n^{-2\alpha-4} + O(n^{-1}) \sum_{k=1}^n k^{2\beta+3} n^{-2\beta-4} \quad (3.44)$$

$$= O(n^{-1}) \quad (3.45)$$

Esto implica la convergencia de los polinomios escalonados generalizados a una función continua si $-1 < x_0 < 1$. Además, de acuerdo con (3.9), (3.11) y (3.12).

$$\begin{aligned} |W_n(x_0) - f(x_0)| &\leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_0)| |h_k(x_0)| + A \sum_{k=1}^n |\mathfrak{h}_k(x_0)| \\ &\leq \max_{|x_k-x_0|\leq\delta} |f(x_k) - f(x_0)| \sum_{|x_k-x_0|\leq\delta} h_k(x_0) + O(1) \sum_{|x_k-x_0|\leq\delta} |\mathfrak{h}_k(x_0)| \\ &\quad + 2 \max_{|x_k-x_0|>\delta} |f(x)| \sum_{|x_k-x_0|>\delta} |h_k(x_0)| + O(1) \sum_{|x_k-x_0|>\delta} |\mathfrak{h}_k(x_0)| \\ &= \max_{|x_k-x_0|\leq\delta} |f(x_k) - f(x_0)| O(1) + \delta O(1) + O(n^{-1}) + O(n^{-1}) \end{aligned} \quad (3.46)$$

El factor $O(1)$ en la última expresión es independiente de δ .

Parte 2: Asumimos ahora que $\alpha < 0$ y $1 - \delta \leq x_0 \leq 1$. La expresión (3.35) nos muestra que $v_k(x_0)$ y $h_k(x_0)$ son de nuevo positivas y $v_k(x_0)$ está acotada a partir de 0 si $|x_k - x_0| \leq \delta$, siempre que δ sea suficientemente pequeño. (Tenemos que $v_k(x_0) \geq v_k(+1)$ si $\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x_k > 0$). Razonamientos análogos se deducen para (3.36) y (3.37). En (3.38)-(3.41) y

(3.42)-(3.45) es necesario una pequeña modificación debido a que en este caso $P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0) = O(n^a)$, $a = \max(\alpha, -\frac{1}{2})$. (Las expresiones correspondientes a (3.38)-(3.41) y (3.42)-(3.45) se cumplen para un $\alpha > -1$ arbitrario, esta anotación se usará en la parte 3 de la demostración). Siempre que $a < 0$, las conclusiones de la parte 1 de la demostración permanecen válidas, esto establece la convergencia de los polinomios escalonados generalizados si $\alpha < 0$ y $f(x)$ es continua. (Por supuesto, lo mismo es cierto para los polinomios de interpolación de Hermite si $f'(x)$ está acotada.)

Parte 3: Pospondremos el análisis de los polinomios escalonados en $x = +1$ si $f(x)$ es continua y $\alpha \geq 0$, y pasaremos a un análisis de los polinomios de interpolación de Hermite para $1 - \delta \leq x_0 \leq 1$ con α arbitrario pero mayor que -1 . Primero observamos que el numerador de (3.33) se anula para $x = x_k = +1$; por tanto, para $|x_k - x_0| \leq \delta$

$$|v_k(x_0)| < (1 - x_k^2)^{-1} \epsilon(\delta)$$

donde $\epsilon(\delta) \rightarrow 0$ si $\delta \rightarrow 0$. Ahora,

$$\begin{aligned} \sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |h_k(x_0)| &= \epsilon(\delta) \sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} (1 - x_k^2)^{-1} (l_k(x_0))^2 \\ &= \epsilon(\delta) \sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} (1 - x_k^2)^{-1} \left(\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_0)}{x_0 - x_k} \right)^2 (P_n^{(\alpha,\beta)'}(x_k))^{-2}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Usando la notación y los argumentos de la parte 3 de la sección 3.3, obtenemos para la suma de arriba:

1. $O(n^2)$ si $\xi = O(1)$, $k = O(1)$.
2. $O(1) \sum k^{2\alpha-1} (k/n)^{-2} = O(n^{2\alpha})$, $O(n^2 \log n)$, $O(n^2)$, de acuerdo con $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, $\alpha < 1$, si $\xi = O(1)$, y k es grande.
3. $O(1)(k/n)^{-2} = O(n^2)$ si ξ es grande y $\xi - k\pi = O(1)$.
4. $O(1)\xi^{-2\alpha-1} \sum k^{2\alpha+3} (\xi^2 - k^2\pi^2)^{-2} (k/n)^{-2} = \sum'_1 + \sum'_2 + \sum'_3$ si tanto ξ como $\xi - k\pi$ son grandes. Los sumatorios en las últimas tres sumas se extienden sobre los mismos valores de k que en (3.30)-(3.32). Tenemos

que

$$\begin{aligned}\sum_1' &= O(\xi^{-2\alpha-5}) \sum_{k\pi \leq \frac{\xi}{2}} k^{2\alpha+3}(k/n)^{-2} = O(\xi^{-3}n^2) = O(n^2) \\ \sum_2' &= O(1) \sum_{\frac{\xi}{2} \leq k\pi \leq \frac{3\xi}{2}} (\xi - k\pi)^{-2}(k/n)^{-2} = O(\xi^{-2}n^2) = O(n^2) \\ \sum_3' &= O(\xi^{-2\alpha-1}) \sum_{k\pi > \frac{3\xi}{2}} k^{2\alpha-1}(k/n)^{-2} = O(n^{2\alpha}), O(n^2 \log n), O(n^2),\end{aligned}$$

según $\alpha > 1$, $\alpha = 1$ o $\alpha < 1$. Para estos casos se corresponden las cotas

$$\sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |h_k(x_0)| = \epsilon(\delta)O(n^{2\alpha}), \epsilon(\delta)O(n^2 \log n), \epsilon(\delta)O(n^2)$$

Para obtener las cotas análogas para $\mathfrak{h}_k(x_0)$, cancelamos en (3.47) el factor $(1 - x_k^2)^{-1} \sim (k/n)^{-2}$. Por tanto, en seguida, obtenemos

$$\sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |\mathfrak{h}_k(x_0)| = \delta O(n^{2\alpha}), \delta O(\log n), \delta O(1)$$

según $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$.

Las cotas correspondientes para $|x_k - x_0| > \delta$ son $O(n^{2\alpha})$ (ver la anotación hecha en la parte 2). Por tanto, (3.9) y la identidad (3.11) nos dan el resultado

$$\begin{aligned}|W_n(x_0) - f(x_0)| &\leq \max_{|x_k - x_0| \leq \delta} |f(x_k) - f(x_0)| \epsilon(\delta) \left\{ \begin{array}{c} O(n^{2\alpha}) \\ O(n^2 \log n) \\ O(n^2) \end{array} \right\} \\ &+ \max_{|x_k - x_0| \leq \delta} |f'(x_k)| \delta \left\{ \begin{array}{c} O(n^{2\alpha}) \\ O(\log n) \\ O(1) \end{array} \right\} + \max |f(x)| O(n^{2a}) \\ &+ \max |f'(x)| O(n^{2a}), a = \max(\alpha, -\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

En el primer término tenemos las opciones $\alpha > 1$, $\alpha = 1$, o $\alpha < 1$. En el segundo término $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$. Las expresiones formadas con la O de Landau son independientes de $f(x)$ y δ . Ahora aplicaremos el argumento

habitual. Sea $W_n(f; x)$ el polinomio de interpolación de Hermite correspondiente a $f(x)$, y $\rho(x)$ un polinomio de grado $\leq 2n - 1$ arbitrario tenemos que

$$W_n(f; x_0) - f(x_0) = W_n(f - \rho; x_0) - (f(x_0) - \rho(x_0)).$$

Bajo la condición mencionada en el teorema 3.4.3 podemos determinar $\rho(x)$ por el teorema 1.3.2 tal que

$$\begin{aligned} f(x) - \rho(x) &= o(n^{-2}), & f'(x) - \rho'(x) &= o(n^{-1}) \text{ si } \alpha < \frac{1}{2} \\ f(x) - \rho(x) &= o(n^{-2\alpha-1}), & f'(x) - \rho'(x) &= o(n^{-2\alpha}) \\ \text{si } \frac{1}{2}r &\leq \alpha < \frac{1}{2(r+1)}, & r &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Esto confirma el resultado relativo a los polinomios de interpolación de Hermite.

Parte 4: Finalmente estudiaremos (ver (3.34) y (3.35))

$$\sum_{k=1}^n |h_k(1)| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{(1+\beta)(1-x_k) - \alpha(1+x_k)}{1+x_k} \right| (l_k(1))^2.$$

La parte de esta suma definida para $x_k \geq 1 - \delta$ es, para $\alpha \neq 0$,

$$\sim n^{2\alpha} \sum_{x_k \geq 1-\delta} (1-x_k)^{-2} (P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k))^{-2} \sim n^{2\alpha} \sum_{x_k \geq 1-\delta} (k/n)^{-4} k^{2\alpha+3} n^{-2\alpha-4}$$

que es de orden $n^{2\alpha}$ o 1, según sea $\alpha > 0$ o $\alpha < 0$. Esto muestra que los polinomios escalonados (y también los polinomios generalizados escalonados) de una función continua son, en general, divergentes en $x = 1$ si $\alpha > 0$. (La convergencia para $\alpha < 0$ ha sido probada en la parte 2.) La posibilidad de divergencia en el caso $\alpha = 0$ se obtiene eligiendo $f(x) = 1 - x$. El correspondiente polinomio escalonado es de hecho

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n h_k(1) f(x_k) &= (1+\beta) \sum_{k=1}^n \frac{(1-x_k)^2}{1+x_k} (l_k(1))^2 \\ &= (1+\beta) \sum_{k=1}^n (1+x_k)^{-1} (P_n^{(0, \beta)'}(x_k))^{-2} \\ &\sim \sum (k/n)^{-2} k^{2\beta+3} n^{-2\beta-4} \sim 1 \end{aligned}$$

Así que no puede tender a $f(1) = 0$. Es fácil probar también la divergencia de los polinomios escalonados de $f(x) = (1+\beta)(1-x) - \alpha(1+x)$ si $\alpha > 0$, ya que $f(1) = -2\alpha < 0$. \square

3.5. Polinomios escalonados para abscisas de Laguerre

Asumimos que $\alpha > -1$, y supongamos que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ denota los ceros del polinomio de Laguerre $L_n^\alpha(x)$. En estas condiciones tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.5.1. *Sea $f(x)$ continua para $x \geq 0$ y $f(x) = O(x^m)$ si $x \rightarrow +\infty$; aquí m es fijo, positivo y arbitrario. Los polinomios generalizados escalonados (3.9) ($f_k = f(x_k), |f'_k| < A$) convergen uniformemente a $f(x)$ sobre cada intervalo positivo $\epsilon \leq x \leq \omega$. Lo mismo se cumple en el intervalo $0 \leq x \leq \omega$ siempre que $\alpha < 0$. Los polinomios escalonados son en general divergentes en $x = 0$ si $f(x)$ es continua y $\alpha \geq 0$.*

Para la demostración necesitaremos algunas consideraciones similares a las que vimos en el caso de las abscisas de Jacobi en la sección 3.4.2. En particular, usaremos el teorema 2.8.7. Son necesarias algunas modificaciones de los argumentos pues ahora los ceros son no acotados. La cuadratura de Gaus aparecerá como nueva herramienta (ver (2.31)).

Demostración. Vamos a dividir de nuevo la demostración, esta vez, en tres partes.

Parte 1: Asumimos que $0 < \epsilon \leq x_0 \leq \omega$. Si $v_k(x) = \frac{x_k(x_k - \alpha) + x(\alpha + 1 - x_k)}{x_k}$ por la descripción dada en (3.33) los valores $v_k(x_0)$ y $h_k(x_0)$ son positivos, y $v_k(x_0)$ es acotado en $(0, +\infty)$ siempre que $|x_k - x_0|$ sea suficientemente pequeño. Por tanto, para un δ pequeño,

$$\sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |h_k(x_0)| = \sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} h_k(x_0) = 1 - \sum_{|x_k - x_0| > \delta} h_k(x_0), \quad (3.48)$$

$$\sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} |h_k(x_0)| = \delta O(1) \sum_{|x_k - x_0| \leq \delta} h_k(x_0). \quad (3.49)$$

Donde $O(1)$ es independiente de δ . Si x_k es pequeño, $v_k(x_0) = O(x_k^{-1})$, si x_k es grande, $v_k(x_0) = O(x_k)$. Por tanto (ver (2.29))

$$\sum_{|x_k - x_0| > \delta} |h_k(x_0)| = O(1) \sum_{x_k < x_0 - \delta} x_k^{-1} \left\{ \frac{L_n^\alpha(x_0)}{L_n^{(\alpha)'}(x_k)(x_0 - x_k)} \right\}^2 \quad (3.50)$$

$$+ O(1) \sum_{x_k > x_0 + \delta} x_k \left\{ \frac{L_n^{(\alpha)}(x_0)}{L_n^{(\alpha)'}(x_0)(x_0 - x_k)} \right\}^2 \quad (3.51)$$

$$= O(n^{\alpha - \frac{1}{2}}) \sum_{x_k < x_0 - \delta} x_k^{-1} (L_n^{(\alpha)'}(x_k))^{-2} + O(n^{\alpha - \frac{1}{2}}) \sum_{x_k > x_0 + \delta} x_k^{-1} (L_n^{(\alpha)'}(x_k))^{-2} \quad (3.52)$$

$$= O(n^{\alpha - \frac{1}{2}}) \sum_{k=1}^n x_k^{-1} (L_n^{(\alpha)'}(x_k))^{-2} \quad (3.53)$$

Pero combinando (2.31) y (2.13), tenemos

$$\sum_{k=1}^n x_k^{-1} (L_n^{(\alpha)'}(x_k))^{-2} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}, \quad (3.54)$$

lo que implica la acotación $O(n^{\alpha-\frac{1}{2}})O(n^{-\alpha}) = O(n^{-\frac{1}{2}})$ para (3.50)

Más generalmente, vemos que a partir de (2.31) y (2.11), si m es un entero positivo, $m \leq 2n-1$,

$$\sum_{k=1}^n x_k^{m-1} (L_n^{(\alpha)'}(x_k))^{-2} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \quad (3.55)$$

Por lo tanto el mismo argumento de antes conduce a

$$\sum_{|x_k-x_0|>\delta} x_k^m |h_k(x_0)| = O(n^{-\frac{1}{2}}), \quad (3.56)$$

con m fijo. Tenemos también

$$\sum_{|x_k-x_0|>\delta} |h_k(x_0)| = O(n^{-\frac{1}{2}}). \quad (3.57)$$

Las ecuaciones (3.48), (3.49), (3.56) y (3.57) determinan la convergencia uniforme de los polinomios escalonados en el intervalo $\epsilon \leq x_0 \leq \omega$ (ver (3.46)).

Parte 3: Ahora asumimos $\alpha < 0$ y $0 \leq x_0 \leq \delta$. Si δ es suficientemente pequeño, y $|x_k - x_0| < \delta$, tanto $v_k(x_0)$ como $h_k(x_0)$ son positivos, y $v_k(x_0)$ está acotado a partir de 0. Por lo tanto, (3.48) y (3.49) son de nuevo válidos. En (3.50) solo la cota de $(L_n^{(\alpha)}(x))^2$ debe cambiarse. De acuerdo con (2.30) esta será $O(n^{2a})$ donde $a = \max(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha)$. Por tanto,

$$\sum_{|x_k-x_0|>\delta} |h_k(x_0)| = O(n^{2a-\alpha}),$$

cumpliéndose la misma cota para las sumas en (3.56) y (3.57). Siempre que el exponente $2a - \alpha = \max(-\frac{1}{2}, \alpha) < 0$, estas sumas tienden a cero. A partir de esto se obtiene la convergencia uniforme en $0 \leq x \leq \omega$.

Parte 4: El caso $x_0 = 0$, $\alpha \geq 0$, se puede resolver fácilmente eligiendo $f(x) = x - \alpha$. Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(x_k) h_k(0) &= \sum_{k=1}^n (x_k - \alpha)^2 (l_k(0))^2 \\ &\cong n^{2\alpha} (\Gamma(\alpha+1))^{-2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k - \alpha}{x_k} \right)^2 (L_n^{(\alpha)'}(x_k))^{-2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Ya que esta expresión es positiva, no puede tender a $f(0) = -\alpha$ siendo α positiva. Si $\alpha = 0$, la última expresión en (3.58) es 1 (ver (3.55), $m=1$), y $f(0) = 0$. \square

3.6. Polinomios de Lagrange para ciertas clases generales de abscisas

Supongamos que $x_{1n} > x_{2n} > \dots > x_{nn}$ denota los ceros del n -ésimo polinomio ortogonal $p_n(x)$ asociada con la función peso $w(x)$ en el intervalo $-1 \leq x \leq +1$. Consideramos dos clases A, B de funciones peso caracterizadas por las siguientes condiciones:

A. Existe $\mu \in \mathbb{R}$ positivo tal que

$$w(x) \geq \mu, \quad -1 \leq x \leq 1$$

B. Existe $\mu \in \mathbb{R}$ positivo tal que

$$w(x) \geq \mu(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad -1 < x < 1$$

Utilizando esta notación vamos a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.6.1. *Sea $f(x)$ definida en $-1 \leq x \leq +1$. Sea $\{L_n(f; x)\}$ la sucesión de polinomios de Lagrange que coinciden con $f(x)$ en los ceros x_{kn} de los polinomios ortogonales $p_n(x)$ asociados con la función peso $w(x)$, $-1 \leq x \leq 1$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; x) = f(x)$, uniformemente en el intervalo $[-1, +1]$, siempre que $w(x)$ cumpla la condición A y $f(x)$ tenga derivada continua en $[-1, 1]$. Lo mismo obtenemos si $w(x)$ cumple la condición B y el módulo de continuidad de $f(x)$ en $[-1, 1]$, $\omega(\delta)$, cumple $\omega(\delta) = o(\delta^{\frac{1}{2}})$. Además, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f; x) = f(x)$, uniformemente en el intervalo $[-1 + \epsilon, 1 - \epsilon]$, donde $0 < \epsilon < 1$, siempre que $w(x)$ cumpla A y $\omega(\delta) = o(\delta^{\frac{1}{2}})$.*

Demostración. Veamos que los polinomios fundamentales interpoladores de Lagrange cumplen

$$\sum_{k=1}^n |l_k(x)| = \begin{cases} O(n), & -1 \leq x \leq 1 \\ O(n^{\frac{1}{2}}), & -1 \leq x \leq 1 \\ O(n^{\frac{1}{2}}), & -1 + \epsilon \leq x \leq 1 - \epsilon \end{cases} \quad (3.59)$$

donde $w(x)$ pertenece a A en el primer y tercer caso, y a B en el segundo. A partir de (3.59) el resultado queda demostrado utilizando los teoremas 1.3.1 y 1.3.2.

Sea x fijo, $\epsilon_k = \text{sgn}(l_k(x))$. Escribimos en el caso A.

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^n \epsilon_k l_k(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(t),$$

donde $P_k(t)$ es el k -ésimo polinomio de Legendre. Luego

$$\begin{aligned} \rho(x) = \sum_{k=1}^n |l_k(x)| &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(x) \leq \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k^2}{k + \frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (k + \frac{1}{2}) [P_k(x)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \int_{-1}^1 [\rho(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (k + \frac{1}{2}) [P_k(x)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mu^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-1}^1 w(t) [\rho(t)]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (k + \frac{1}{2}) [P_k(x)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ahora, de acuerdo con $\int_a^b |L_n(x)|^2 d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |f_k|^2$

$$\int_{-1}^1 w(t) [\rho(t)]^2 dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k (\rho(x_k))^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k \epsilon_k^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k = \int_{-1}^1 w(t) dt.$$

La expresión (3.59) se obtiene fácilmente utilizando (2.21) y (2.26). La única modificación esencial para la demostración del caso B es que escribamos

$$\rho(t) = \sum_{k=1}^n \epsilon_k l_k(t) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k T_k(t),$$

donde $T_k(t)$ es polinomio de Chebyshev de primera especie. □

Bibliografía

- [1] S. Banach, *Théorie des Operations Linéaires*, Warszawa-Lwów, 193 (Cited on p. 51)
- [2] S. Bernstein, *Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini*, Journal de Mathématiques **9**, 1930, pp. 127-177, **10**, 1931, pp. 219-286. (Cited on p. 51)
- [3] E. W. Cheney, *Introduction to Aproximation Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Company, 1966. (Cited on pp. 10, 11, 33, 54)
- [4] G. Darboux, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*, Journal de Mathematiques **4**, 1878, pp. 5-56, 377-416. (Cited on p. 57)
- [5] Philip J. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975. (Cited on p. 11)
- [6] P. Erdős y E. Feldheim, *Sur le mode de convergence pour l' interpolation de Lagrange*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **203**, 1936, pp. 913-915. (Cited on p. 55)
- [7] G. Faber, *Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinung **23**, 1914, pp. 192-210. (Cited on p. 51)
- [8] E. Feldheim, *Sur le mode de convergence dans l'interpolation de Lagrange*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de l'URSS **14**, 1937, pp.327-331. (Cited on p. 55)
- [9] G. Grünwald, *Über Interpolation*, Anali della Scuola Normale Superiore de Pisa **7**, 1938, pp. 137-146. (Cited on p. 51)
- [10] E. Helly, *Über lineare Funktionaloperationen*, Sitzungsberitche der mathematisch-natuwissenschaftlichen Klasse der Akademie in Wien, Abteilung **121**, 1912. (Cited on p. 51)

- [11] Á. Holló, *A mechanikus quadraturárol*, Thesis, Budapest, 1939, pp. 23. (Cited on p. 56)
- [12] Gabriel Klambauer, *Mathematical Analysis*, MerceL Dekker, Inc. New York, 1975. (Cited on p. 8)
- [13] J. Marcinkiewicz, *Sur la divergence des polynomes d'interpolation*, Acta Litterarum ac Scientarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae **8**, 1937, pp. 130-135. (Cited on p. 51)
- [14] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill Book Company, 1980. (Not cited)
- [15] J. Sohat, *On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients*. Transactions of the American Mathematical Society **42**, 1937, pp. 461-496. (Not cited)
- [16] N. J. Sonin, *Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries*, Mathematische Annalen **16**, 1880, pp 1-80. (Cited on p. 36)
- [17] Daniel W. Strook, *A concise introduction to the Theory of Integration*, Birkhauser, 1994. (Cited on pp. 3, 8)
- [18] E. Torrano, *Los Polinomios Ortogonales y la Teoría de la Aproximación*, Curso de Doctorado 96/97, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid. (Not cited)
- [19] Gabor Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications **23**, American Mathematical Society, 1975. (Cited on pp. 34, 35, 36, 38, 39, 51, 56, 57)
- [20] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A course of Modern Analysis*, Cambridge, 1935 (Cited on p. 35)