



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Matemáticas

**El modelo de Poincaré del Semiplano Superior**

***Autora:***

***Paula Trapote Reglero***

***Tutora:***

***Carolina Ana Núñez Jiménez***



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. El modelo del Semiplano Superior</b>	<b>7</b>
1.1. Un modelo para el Plano Hiperbólico . . . . .	7
1.2. La esfera de Riemann . . . . .	11
1.3. La frontera en el infinito de $\mathbb{H}$ . . . . .	17
<b>2. Grupo general de Möbius</b>	<b>21</b>
2.1. Las transformaciones de Möbius . . . . .	21
2.2. Clasificación de las transformaciones de Möbius. . . . .	26
2.3. El grupo general de Möbius . . . . .	29
2.4. Preservando $\mathbb{H}$ . . . . .	36
<b>3. Longitud y distancia en <math>\mathbb{H}</math>.</b>	<b>43</b>
3.1. Longitud de caminos en $\mathbb{H}$ . . . . .	43
3.2. De la longitud a la métrica. . . . .	48
3.3. Fórmula para la distancia hiperbólica. . . . .	54
3.4. Isometrías . . . . .	56
3.5. Rectas paralelas y ultraparalelas . . . . .	60
<b>4. Otros modelos de geometría hiperbólica.</b>	<b>65</b>
4.1. El disco de Poincaré. . . . .	65
4.2. Una construcción general. . . . .	68
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>



# Introducción

Euclides, en su tratado *Los Elementos* (300 a.C.), sentó las bases de la geometría tal y como la conocemos ahora. La geometría que describió era axiomática, esto es, todos los teoremas se derivan de una serie de axiomas simples. Euclides consideró los siguientes axiomas o postulados:

1. Dos puntos distintos cualquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede prolongar indefinidamente en una recta.
3. Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.

Desde la Antigüedad el quinto postulado fue fruto de controversia, al ser el menos evidente de todos. Durante miles de años se intentó probar dicho axioma a partir de los otros cuatro. Ya en el siglo XIX, matemáticos como Gauss o Lobachevsky consideraron la posibilidad de geometrías sin este postulado, la existencia de geometrías no euclídeas. La primera en aparecer históricamente fue la Geometría Hiperbólica, que sustituía este quinto axioma por el siguiente:

“Por un punto exterior a una recta, existen infinitas paralelas a la recta dada.”

Este trabajo está dedicado al estudio de un modelo de la geometría hiperbólica, el modelo del Semiplano Superior de Poincaré. Sin embargo, la aproximación que se va a seguir no es axiomática, sino siguiendo el punto de

vista de Klein de que la geometría es el estudio de invariantes por un grupo de transformaciones del espacio.

El trabajo consta de 4 partes:

En el primer capítulo sentamos las bases de la geometría hiperbólica. Trabajamos en el espacio  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ , donde definimos las rectas hiperbólicas y estudiamos sus propiedades de paralelismo. Con el objetivo de visualizar  $\mathbb{H}$  dentro de un espacio compacto, estudiamos su relación con la esfera de Riemann. Por último, hablamos de la frontera en el infinito de  $\mathbb{H}$  y los diferentes tipos de rectas hiperbólicas paralelas.

El objetivo del segundo capítulo es encontrar un grupo de transformaciones de  $\mathbb{H}$  que dejen invariante el conjunto de rectas hiperbólicas. Para ello primero determinamos un grupo de homeomorfismos de  $\mathbb{C}$  que preserven el conjunto de circunferencias. Dicho grupo es el Grupo General de Möbius, Möb. Después determinaremos el subgrupo de Möb que deja invariante el conjunto de rectas hiperbólicas, Möb( $\mathbb{H}$ ), y estudiaremos algunas de sus propiedades.

En el tercer capítulo derivamos una forma de medir longitudes de caminos y distancias en  $\mathbb{H}$ , de manera que ambos conceptos sean invariantes bajo la acción de Möb( $\mathbb{H}$ ). Dotaremos a nuestro espacio  $\mathbb{H}$  de una estructura de espacio métrico de caminos, de manera que el grupo de isometrías sea exactamente el grupo Möb( $\mathbb{H}$ ).

El último capítulo del trabajo es un breve estudio de cómo derivar otros modelos de geometría hiperbólica a partir de nuestro estudio de  $\mathbb{H}$ . Se estudia en particular el modelo del Disco de Poincaré,  $\mathbb{D}$ , y cómo su construcción se puede generalizar, dando lugar a otros modelos de geometría hiperbólica en subespacios de  $\mathbb{C}$  conformes a  $\mathbb{H}$ .

# Capítulo 1

## El modelo del Semiplano Superior

En este capítulo describimos el modelo de la geometría hiperbólica objeto de este trabajo, el modelo del Semiplano Superior,  $\mathbb{H}$ . Exploramos propiedades de paralelismo de las rectas hiperbólicas, probando los postulados 1 y 2, y encontrando que el quinto postulado de Euclides se debe sustituir aquí por el postulado correspondiente de la geometría hiperbólica,

*“Por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas”.*

Con el objetivo de ver  $\mathbb{H}$  como un subespacio de un espacio topológico conocido, lo cual será importante en el capítulo 2, se estudia su relación con la esfera de Riemann, lo que finalmente nos lleva a entender el concepto de “frontera en el infinito” de  $\mathbb{H}$ .

### 1.1. Un modelo para el Plano Hiperbólico

Empezamos describiendo un *modelo* del plano hiperbólico, es decir, una elección de espacio subyacente y una elección del modo de representar objetos geométricos básicos, como puntos y rectas.

El modelo del plano hiperbólico que estudiaremos es el modelo del *Semiplano Superior*. El espacio subyacente a este modelo es  $\mathbb{H}$ , definido en el plano complejo  $\mathbb{C}$  como

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

Además usamos la noción de punto que  $\mathbb{H}$  hereda de  $\mathbb{C}$ , así como la noción de ángulo, esto es, el ángulo entre dos curvas en  $\mathbb{H}$  es el ángulo que forman esas dos curvas en  $\mathbb{C}$ .

Definiremos las rectas hiperbólicas de manera distinta a su definición en la geometría euclídea. Esto derivará en las grandes diferencias entre ambas geometrías.

**Definición 1.1.** Hay dos tipos de *rectas hiperbólicas*. Las primeras son la intersección de  $\mathbb{H}$  con rectas euclídeas perpendiculares al eje real  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$ . Las otras son la intersección de  $\mathbb{H}$  con circunferencias euclídeas centradas en el eje real  $\mathbb{R}$ .

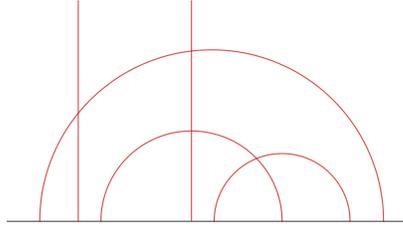


Figura 1.1: Varias rectas hiperbólicas

Más adelante unificaremos ambos tipos de rectas hiperbólicas, pero de momento esta definición nos sirve para determinar sus propiedades básicas.

**Proposición 1.2.** *Para cada par de puntos distintos  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{H} \cap \mathbb{R}$ , tal que  $Re(p) \neq Re(q)$ , existe una única circunferencia centrada en  $\mathbb{R}$  que pasa por  $p$  y  $q$ .*

*Demostración.* Empezamos demostrando la existencia. Sea  $L_{pq}$  el segmento euclídeo que une  $p$  y  $q$ , y sea  $K$  la mediatriz de dicho segmento. Entonces, cualquier circunferencia euclídea que pase por  $p$  y  $q$  tiene centro en  $K$ . Como  $p$  y  $q$  tienen partes reales diferentes,  $K$  no es paralela a  $\mathbb{R}$ , y por tanto  $K$  y  $\mathbb{R}$  se cortan en un único punto  $c$ .

Por tanto, sea  $A$  la circunferencia con centro  $c$  y radio  $|c - p|$ . Como  $c \in K$  tenemos que  $|c - p| = |c - q|$ , y  $A$  pasa por  $q$  y  $p$ . Esta circunferencia  $A$  es la buscada.

Si tenemos otra circunferencia que pasa por  $p$  y  $q$ , su centro debe estar necesariamente en la intersección de la mediatriz  $K$  y el eje  $\mathbb{R}$ . Luego ambas circunferencias son de hecho la misma, y hemos demostrado la unicidad.  $\square$

Ahora que hemos demostrado este resultado, podemos enunciar la siguiente proposición, que es una propiedad básica de la geometría euclídea, y como es de esperar, también es cierta en la geometría hiperbólica.

**Proposición 1.3.** *Dados dos puntos distintos  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{H}$ , existe una única recta hiperbólica que pasa por ambos.*

*Demostración.* En el caso  $Re(p) \neq Re(q)$ , el resultado es consecuencia directa de la proposición 1.2. Queda entonces solo probar el caso en el que  $Re(p) = Re(q)$ .

En este caso la recta euclídea  $L = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) = Re(p)\}$  es perpendicular al eje real y pasa por  $p$  y  $q$ . Luego  $\ell = \mathbb{H} \cap L$  es la recta que buscábamos.

La unicidad de esta recta es debida a que no existe una circunferencia que pase por ambos  $p$  y  $q$  cuyo centro esté en  $\mathbb{R}$ , y por tanto la única posibilidad de recta hiperbólica es la mencionada antes.  $\square$

Con la siguiente proposición ilustraremos la primera gran diferencia entre la geometría euclídea y la geometría hiperbólica, que es lo que en la geometría euclídea se conoce como el postulado de Euclides:

*Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela a la recta dada.*

Para ello necesitamos definir lo que son las rectas paralelas. En analogía con la geometría euclídea, se definen como sigue:

**Definición 1.4.** Dos rectas hiperbólicas son *paralelas* si son disjuntas.

**Proposición 1.5.** *Sea  $\ell$  una recta hiperbólica y  $p$  un punto en  $\mathbb{H}$  que no está en  $\ell$ . Entonces existen infinitas rectas hiperbólicas paralelas a  $\ell$  que pasan por  $p$ .*

*Demostración.* Tenemos que considerar dos casos, véase figura 1.2.

Primero consideramos el caso en el que  $\ell$  está contenida en una recta euclídea  $L$ . Como  $p$  es exterior a  $L$ , existe una única recta euclídea  $K$  que pasa por  $p$  y es paralela a  $L$ . Trivialmente  $K$  es perpendicular a  $\mathbb{R}$ , y por tanto  $K \cap \mathbb{H}$  es una recta hiperbólica paralela a  $\ell$  que pasa por  $p$ .

Ahora, para construir otra recta hiperbólica paralela a  $\ell$ , tomamos un  $x \in \mathbb{R}$  que se encuentre entre  $L$  y  $K$ , y consideramos la circunferencia euclídea  $A$  con centro en  $\mathbb{R}$  que pasa por  $x$  y  $p$ . Dicha circunferencia existe dado que  $Re(p) \neq Re(x)$ , por la proposición 1.2.

$A$  y  $L$  son disjuntas, puesto que todos los puntos  $z \in A$  cumplen  $Re(z) \geq x$ . Luego la recta hiperbólica  $\mathbb{H} \cap A$  es paralela a  $\ell$  pasando por  $p$ .

Como hay infinitas elecciones de  $x$ , existen infinitas rectas hiperbólicas paralelas a  $\ell$  que pasan por  $p$ .

Ahora supongamos que  $\ell$  está contenida en una circunferencia euclídea  $A$ , de centro  $c \in \mathbb{R}$ . Sea  $D$  la circunferencia concéntrica a  $A$  que pasa por  $p$ . Claramente  $\mathbb{H} \cap D$  es una recta hiperbólica paralela a  $\ell$  que pasa por  $p$ . Para construir otra recta hiperbólica con esta propiedad, tomamos un  $x \in \mathbb{R}$  entre  $A$  y  $D$ , y consideramos la circunferencia euclídea  $E$  que pasa por  $x$  y  $p$  y con centro en  $\mathbb{R}$ , cuya existencia garantiza la proposición 1.2. Como antes,  $E$  y  $A$  son disjuntas, luego  $E \cap \mathbb{H}$  es una recta hiperbólica que pasa por  $p$  y es paralela a  $\ell$ . También se tiene que hay infinitas formas de escoger dicho  $x$ , luego hay infinitas rectas hiperbólicas paralelas a  $\ell$  que pasan por  $p$ .  $\square$

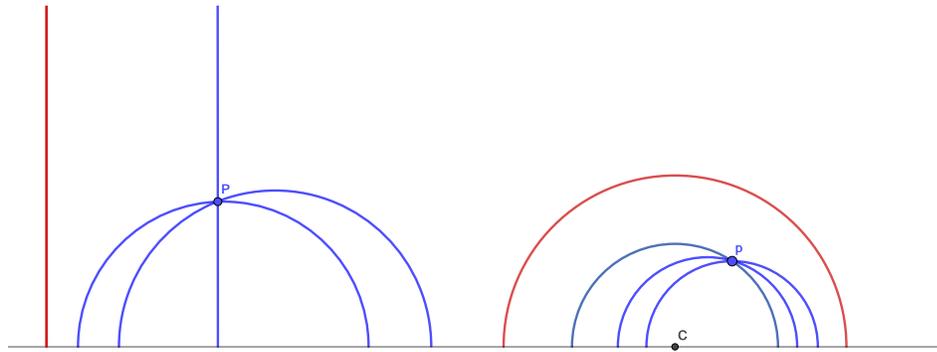


Figura 1.2: Varias rectas paralelas por un punto

## 1.2. La esfera de Riemann

Vamos en esta sección a unificar los dos tipos distintos de rectas hiperbólicas que hemos definido.

Como  $\mathbb{C}$  es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, podemos realizar la compactificación por un punto de  $\mathbb{C}$ , añadiendo un punto del infinito,  $\infty$ .

**Definición 1.6.** Sea  $X$  un espacio topológico. Un espacio  $Y$  es una *compactificación* de  $X$  si

1.  $X \subsetneq Y$ , y la topología de  $X$  es la de subespacio de  $Y$ .
2.  $Y$  es compacto y de Hausdorff.
3.  $X$  es denso en  $Y$ .

Si además  $|X - Y| = 1$ , se dice que  $Y$  es una *compactificación por un punto* de  $X$  (o compactificación de Alexandroff).

El siguiente teorema nos garantiza la existencia de la compactificación por un punto de  $\mathbb{C}$ . No incluiremos aquí la demostración, pues son nociones básicas de topología, pero se puede encontrar en [3].

**Teorema 1.7.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Sea  $\infty \notin X$  y sea  $Y = X \cup \{\infty\}$ . Entonces:

1. El conjunto  $\bar{\tau} = \tau \cup \{Y \setminus K \mid K \text{ es subespacio compacto (para } \tau) \text{ de } X\}$  es una topología en  $Y$ , y la topología de subespacio que induce en  $X$  es  $\tau$ .
2.  $(Y, \bar{\tau})$  es un espacio de Hausdorff y compacto.
3. Si  $X$  no es compacto, es denso en  $Y$ , y por tanto  $Y$  es una compactificación por un punto de  $Y$ .

Algunas de las propiedades topológicas de este nuevo espacio, que nos serán de utilidad, se resumen en la siguiente proposición.

**Proposición 1.8.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico que cumple las condiciones de la definición 1.6, y sea  $(Y, \bar{\tau})$  una compactificación por un punto de  $X$ . Denotando  $\bar{A}$  a la adherencia de  $A$  para la topología  $\bar{\tau}$ , tenemos:

1. Si  $A$  no está contenido en ningún compacto, entonces  $\bar{A} = \bar{A}^\tau \cup \{\infty\}$ , y  $Fr_{\bar{\tau}}A = Fr_\tau A \cup \{\infty\}$ .
2. Si  $A$  está contenido en un compacto,  $\bar{A} = \bar{A}^\tau$ , y  $Fr_{\bar{\tau}}A = Fr_\tau A$ .

*Demostración.* Tenemos  $A \subset X \subset Y$ , por tanto  $\bar{A}^\tau = \bar{A} \cap X$ .

Como  $Y = X \cup \{\infty\}$ , hay dos posibilidades, que  $\bar{A} = \bar{A}^\tau$ , o que  $\bar{A} = \bar{A}^\tau \cup \{\infty\}$ , puesto que  $X$  tiene la topología de subespacio de  $Y$ . Tenemos que  $\infty \in \bar{A}$  si y solo si para todo compacto  $K$  para la topología  $\tau$ ,  $(Y - K) \cap A \neq \emptyset$ , puesto que  $(Y - K) \cap A = \emptyset$  si y solo si  $A \subset K$ .

La demostración de las fronteras es análoga.  $\square$

En particular, añadiendo a  $\mathbb{C}$  un punto, al que llamaremos punto del infinito,  $\infty$ , obtenemos un nuevo espacio compacto  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Este espacio se denomina la *esfera de Riemann*.

Por lo tanto, la topología de  $\bar{\mathbb{C}}$  es:

$$\bar{\tau} = \{U \subset \mathbb{C} \mid U \text{ es abierto}\} \cup \{\bar{\mathbb{C}} \setminus K \mid K \text{ es compacto en } \mathbb{C}\}.$$

Recordamos que en  $\mathbb{C}$ , dado  $A \subset \mathbb{C}$ , si existe un compacto  $K$  tal que  $A \subset K$ , entonces  $A$  es acotado.

Para visualizar mejor este espacio, recurrimos a la proyección estereográfica. Recordamos su definición:

Identificamos el plano complejo  $\mathbb{C}$  con el plano  $XY$  de  $\mathbb{R}^3$ , y consideramos la aplicación definida en la esfera unidad  $\mathbb{S}^2$  de  $\mathbb{R}^3$ , a la que se le quita el punto  $N = (0, 0, 1)$ , por:

$$\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

donde la imagen de  $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  es el punto de intersección de  $\mathbb{C}$  con la semirrecta de  $\mathbb{R}^3$  que sale de  $N$  y pasa por  $p$ .

Analíticamente, si  $p = (x_1, x_2, x_3)$ , entonces

$$\pi(p) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Su inversa es

$$\pi^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{(\bar{z} - z)i}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Se tiene que  $\pi$  es una biyección entre  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  y  $\mathbb{C}$ , de hecho es un homeomorfismo, puesto que tanto  $\pi$  como su inversa son continuas.

La siguiente proposición nos permite extender  $\pi$  a un homeomorfismo entre  $\mathbb{S}^2$  y  $\bar{\mathbb{C}}$ .

**Proposición 1.9.** *Sea  $f : X_1 \rightarrow X_2$  un homeomorfismo entre espacios Hausdorff localmente compactos. Entonces  $f$  se puede extender a sus compactificaciones de Alexandroff definiendo  $f(\infty_1) = \infty_2$ .*

*Demostración.* La aplicación extendida es claramente biyectiva. Tenemos que  $U \subset \overline{X_1}$  es abierto si y solo si  $U \subset X_1$  es abierto en  $X_1$  o  $X_1 - U$  es compacto, por el teorema 1.7. Como  $f$  es homeomorfismo, esto se da si y solo si  $f(U) \subset X_2$  es abierto en  $X_2$ , o  $X_2 - f(U)$  es compacto. Por tanto concluimos que  $U \subset \overline{X_1}$  es abierto si y solo si  $f(U) \subset \overline{X_2}$  es abierto, luego  $f$  es homeomorfismo.  $\square$

Por tanto,  $\pi$  se extiende en las compactificaciones de  $\mathbb{S}^2 - N$  y  $\mathbb{C}$ , que son respectivamente  $\mathbb{S}^2$  y  $\overline{\mathbb{C}}$ . Denotaremos igualmente a la extensión  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , que es un homeomorfismo (con  $\pi(N) = \infty$ ).

Nuestro objetivo es unificar los dos tipos de rectas hiperbólicas, para ello hacemos uso de la siguiente caracterización conjunta de rectas y circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Lema 1.10.** *Sea*

$$L = \{z \in \mathbb{C} : \alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0\} \quad (1.1)$$

con  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$ , y  $\beta\bar{\beta} - \alpha\gamma > 0$ . Si  $\alpha \neq 0$ , entonces  $L$  es una circunferencia, mientras que si  $\alpha = 0$ ,  $L$  es una recta. Además toda recta o circunferencia en  $\mathbb{C}$  se puede expresar como uno de los conjuntos  $L$  con apropiados  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ .

*Demostración.* Considerando  $z = x + iy$ ,  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ , con un simple cálculo obtenemos que

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha(x^2 + y^2) + 2\beta_1x + 2\beta_2y + \gamma = 0.$$

Si  $\alpha = 0$ , es la ecuación de una recta. Si  $\alpha \neq 0$ , entonces podemos reescribir la ecuación en la forma

$$\alpha \left(x + \frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2 + \alpha \left(y + \frac{\beta_2}{\alpha}\right)^2 = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 - \gamma$$

que es la ecuación de una circunferencia de centro  $-\frac{\beta}{\alpha}$  y radio  $\frac{\bar{\beta}\beta - \gamma\alpha}{\alpha^2}$ .

Recíprocamente, si tenemos una recta en  $\overline{\mathbb{C}}$  dada por  $ax + by + c = 0$ , consideramos  $\beta = a + ib$  y  $\gamma = 2c$  y obtenemos una recta en la forma (1.1). Si tenemos la circunferencia  $|z - z_0| = r^2$  entonces consideramos  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -z_0$ , y  $\gamma = |z_0|^2 - r^2$  para conseguir una expresión en la forma (1.1).  $\square$

**Proposición 1.11.** *La proyección estereográfica,  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , establece biyecciones entre:*

1. *El conjunto de circunferencias contenidas en  $\mathbb{S}^2$  que pasan por  $N$  y el conjunto  $\{\overline{L} \mid L \subset \mathbb{C}, L \text{ recta}\}$ , (obsérvese que  $\overline{L} = L \cup \{\infty\}$ , por la proposición 1.8).*
2. *El conjunto de circunferencias que no pasan por  $N$  y el conjunto de circunferencias de  $\mathbb{C}$ .*

*Demostración.* 1. Si tenemos una circunferencia en  $\mathbb{S}^2$  que pasa por  $N$ , entonces por la definición de la proyección estereográfica, la imagen de la circunferencia es la intersección del plano que contiene a dicha circunferencia con  $\mathbb{C}$ , que es una recta.

Recíprocamente, si tenemos una recta en  $\mathbb{C}$ , su contraimagen es la intersección de la esfera con el plano que contiene a la recta y al punto  $N$ . Como  $\infty \in \overline{L}$  y  $\pi^{-1}(\infty) = N$ , el punto  $N$  pertenece a la contraimagen. Por tanto ha de ser una circunferencia en  $\mathbb{S}^2$  que pasa por  $N$ .

2. Ahora tenemos una circunferencia  $S$  de  $\mathbb{S}^2$  que no pasa por  $N$ . Esa circunferencia está determinada por un plano de la forma  $Au + Bv + Cw + D = 0$ , con  $C \neq -D$ , puesto que  $N$  no pertenece al plano. Además,

- a) Dicho plano corta a  $\mathbb{S}^2$  en más de un punto, en particular existe  $(u, v, w) \in \mathbb{S}^2$  tal que  $(A, B, C)(u, v, w) = -D$ , y por la desigualdad de Schwarz se deduce que  $A^2 + B^2 + C^2 \geq D^2$ .
- b) No puede darse  $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$ , porque en este caso tendríamos que todos los puntos de la circunferencia serían proporcionales a  $(A, B, C)$ , y el plano cortaría solo en un punto a la esfera.

Sea  $(u, v, w) = \pi^{-1}(z)$ , es decir  $w = \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}$ ,  $u = (1-w)\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}$ ,  $v = (1-w)\frac{(z-\bar{z})i}{2} = \frac{(z-\bar{z})i}{z\bar{z}+1}$ . Sustituyendo en la ecuación del plano obtenemos la ecuación de  $\pi(S)$ :

$$A \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1} + B \frac{(z - \bar{z})i}{z\bar{z} + 1} + C \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} + D = 0, \text{ es decir}$$

$$(C + D)z\bar{z} + (A + Bi)z + (A - Bi)\bar{z} - C + D = 0,$$

haciendo  $\alpha = C + D \neq 0$ ,  $\beta = (A - Bi)$  y  $\gamma = -C + D$ , se cumple la condición  $\bar{\beta}\beta - \alpha\gamma = A^2 + B^2 + C^2 - D^2 > 0$  y por lo tanto la ecuación obtenida es una circunferencia, por el lema 1.10.

Si ahora tenemos una circunferencia en  $\mathbb{C}$  definida por la ecuación  $|z - a|^2 = r^2$ , escribiendo  $a = a_1 + ia_2$  podemos reescribir la ecuación anterior como

$$z\bar{z} - 2(a_1x + a_2y) = r^2 - |a|^2.$$

La contraimagen de la circunferencia es el conjunto de puntos  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathbb{S}^2$  que verifican

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2 \left( a_1 \frac{x_1}{1 - x_3} + a_2 \frac{x_2}{1 - x_3} \right) = r^2 - |a|^2 \Leftrightarrow$$

$$1 + x_3 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 = (r^2 - |a|^2)(1 - x_3)$$

que es la ecuación de un plano. Luego la contraimagen es la intersección de un plano con la esfera, que es una circunferencia.  $\square$

Ahora estamos en condiciones de unificar los dos tipos de rectas hiperbólicas.

**Definición 1.12.** Llamaremos *circunferencia en  $\bar{\mathbb{C}}$*  a, o bien una circunferencia en  $\mathbb{C}$ , o bien la unión de una recta euclídea en  $\mathbb{C}$  con  $\{\infty\}$ .

Esto quiere decir que el punto del infinito es el punto que añadimos a las rectas euclídeas para obtener una circunferencia. Más aún, si  $L$  es una recta en  $\mathbb{C}$ , la circunferencia en  $\bar{\mathbb{C}}$  que contiene a  $L$ , es decir,  $L \cup \{\infty\}$ , coincide con la adherencia de  $L$ ,  $\bar{L}$ .

A partir de ahora pasaremos a identificar  $\mathbb{S}^2$  con  $\bar{\mathbb{C}}$  vía la proyección estereográfica, la notación utilizada dejará claro en qué espacio se está trabajando. Vamos ahora a calcular las contraimágenes de  $\bar{\mathbb{R}}$  y de  $\mathbb{H}$  para tener una mejor visión de nuestro plano hiperbólico visto en  $\mathbb{S}^2$ .

La contraimagen de  $\bar{\mathbb{R}}$  debe ser una circunferencia de  $\mathbb{S}^2$  que pasa por  $N$ . Por la definición de la proyección estereográfica, los puntos de la intersección de  $\mathbb{S}^2$  con el plano  $XY$  son puntos fijos. Por tanto la circunferencia que buscamos pasa por  $(1, 0, 0)$ ,  $(-1, 0, 0)$  y  $N = (0, 0, 1)$ . Es decir, es la circunferencia contenida en el plano  $y = 0$ .

Para calcular la contraimagen de  $\mathbb{H}$  solo tenemos que calcular la contraimagen de un punto de  $\mathbb{H}$  y ver a que semiesfera pertenece. Tenemos que  $\pi^{-1}(i) = (0, 1, 0)$ , como la segunda componente es positiva, la contraimagen de  $\mathbb{H}$  es:

$$\pi^{-1}(\mathbb{H}) = \mathbb{S}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}$$

Otra propiedad importante de la proyección estereográfica es que es una aplicación conforme.

**Definición 1.13.** Una aplicación  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es *conforme* si conserva ángulos. Es decir, dadas dos curvas regulares  $\alpha$  y  $\beta$  que intersecan en  $\mathbb{R}^n$  con ángulo  $\varphi$ , entonces el ángulo que forman las curvas  $f(\alpha)$  y  $f(\beta)$  es  $\varphi$ .

**Proposición 1.14.** La proyección estereográfica  $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  y su inversa son aplicaciones conformes.

*Demostración.* Como  $\pi$  es un difeomorfismo, es suficiente probar que una de las dos es conforme. Demostraremos que el ángulo de dos rectas en  $\mathbb{C}$  es el mismo que el que forman la imagen de las rectas en  $\mathbb{S}^2$ .

Sean  $\ell_1$  y  $\ell_2$  dos rectas en  $\mathbb{C}$  que se cortan en el punto  $P$  con ángulo  $\theta$ . Sea  $\Pi_j$  el plano que contiene a  $N$  y  $\ell_j$  ( $j = 1, 2$ ). Se tiene que las circunferencias  $C_j = \mathbb{S}^2 \cap \Pi_j$  son las contraimágenes de  $\ell_j \cup \{\infty\}$ , que se cortan en  $Q = \pi^{-1}(P)$  y en  $N$ .

Sea  $T$  el plano tangente a  $\mathbb{S}^2$  en  $N$ .  $T$  es paralelo al eje  $XY$  que hemos identificado con  $\mathbb{C}$ , por lo que las rectas  $m_j = T \cap \Pi_j$  son paralelas a las rectas  $\ell_j = \mathbb{C} \cap \Pi_j$ , por tanto las rectas  $m_j$  se cortan en  $N$  con ángulo  $\theta$ .

Como las circunferencias  $C_j$  se cortan con el mismo ángulo en los dos puntos de intersección,  $N$  y  $Q$ , y como  $m_j$  es la tangente a  $C_j$  en  $N$ , las rectas  $\pi^{-1}(\ell_1)$  y  $\pi^{-1}(\ell_2)$  se cortan con ángulo  $\theta$  en  $Q = \pi^{-1}(P)$   $\square$

Definiremos el ángulo en  $\infty$  de dos curvas  $c_1$  y  $c_2$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  como el ángulo que forman en  $N$  las curvas  $\pi^{-1}(c_1)$  y  $\pi^{-1}(c_2)$ . De esto deducimos que la aplicación  $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , así como su inversa, son conformes.

Ahora que hemos probado que  $\pi$  es conforme, podemos demostrar que las rectas hiperbólicas se transforman en semicircunferencias en la esfera.

Sea  $\ell$  una recta hiperbólica, y sea  $A$  la circunferencia de  $\overline{\mathbb{C}}$  que contiene a  $\ell$ . Por la proposición 1.11, la contraimagen de  $A$  está contenida en una circunferencia de  $\mathbb{S}^2$ . Además,  $A$  corta a  $\mathbb{R}$  en ángulo recto, por tanto,  $\pi^{-1}(A)$  corta con la circunferencia  $\pi^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^2 \cap \{y = 0\}$  en ángulo recto también. Luego la contraimagen de  $\ell$  es una semicircunferencia.

### 1.3. La frontera en el infinito de $\mathbb{H}$

Anteriormente hemos definido las circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$  o bien como rectas en  $\mathbb{C}$  unión  $\{\infty\}$ , o bien como circunferencias en  $\mathbb{C}$ . Podemos, en analogía a la geometría euclídea, definir la noción de disco.

**Definición 1.15.** Definimos un *disco*  $D$  en  $\overline{\mathbb{C}}$  como una de las componentes conexas del complementario de una circunferencia  $A$  en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Nos referimos a  $A$  como la *circunferencia que determina el disco*  $D$ .

Por ejemplo,  $\mathbb{S}^1$  determina los discos  $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  y  $\overline{\mathbb{C}} - \overline{B}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ , y  $\overline{\mathbb{R}}$  determina el semiplano superior  $\mathbb{H}$  y el semiplano inferior  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\} \cup \{\infty\}$ .

Vamos a definir la frontera en el infinito de cualquier conjunto de  $\mathbb{H}$ , el motivo de la definición quedará claro en el capítulo 3, cuando definamos la distancia hiperbólica.

**Definición 1.16.** Dado un conjunto  $X \subset \mathbb{H}$ , se define la *frontera en el infinito de  $X$*  como la intersección  $\overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}}$ .

Teniendo en cuenta la proposición 1.8, la adherencia de un conjunto  $X$  es  $\overline{X}^r$  si  $X$  es acotado y  $\overline{X}^r \cup \{\infty\}$  en caso contrario.

En particular, la frontera en el infinito de  $\mathbb{H}$  es la circunferencia  $\overline{\mathbb{R}}$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Si  $\ell$  es una recta hiperbólica, su frontera en el infinito será  $\overline{\ell} \cap \overline{\mathbb{R}}$ . Si  $\ell$  está contenida en una recta euclídea su frontera en el infinito será un punto de  $\overline{\mathbb{R}}$  y  $\{\infty\}$ . Si por el contrario está contenida en una circunferencia euclídea, su frontera en el infinito serán 2 puntos de  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Ahora consideramos dos rectas hiperbólicas paralelas,  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , contenidas en las circunferencias  $A_1$  y  $A_2$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Entonces hay dos posibilidades para la frontera en el infinito de la unión  $\ell = \ell_1 \cup \ell_2$ , vease la figura 1.3.

- Si  $A_1$  y  $A_2$  se cortan, necesariamente ha de ser en  $\overline{\mathbb{R}}$ , y entonces la frontera en el infinito de  $\ell$  está formada por 3 puntos.
- Si por el contrario  $A_1$  y  $A_2$  son disjuntas también, entonces la frontera en el infinito está formada por 4 puntos.

A las rectas del segundo tipo se las denomina rectas hiperbólicas *ultraparalelas*.

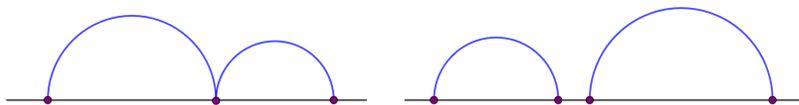


Figura 1.3: Rectas hiperbolicas paralelas y ultraparalelas.

En el primer supuesto se incluye el caso en el que las dos rectas hiperbólicas están contenidas en rectas euclídeas, puesto que se cortan en el punto  $\infty$ .

Hemos visto en la proposición 1.2 que dos puntos de  $\mathbb{H}$  determinan una única recta hiperbólica. El mismo argumento que se usa para esta demostración se puede aplicar a las rectas hiperbólicas determinadas por puntos en el infinito.

**Proposición 1.17.** *Sea  $p$  un punto de  $\mathbb{H}$  y sea  $q$  un punto de  $\overline{\mathbb{R}}$ . Entonces existe una única recta hiperbólica que pasa por  $p$  y  $q$*

*Demostración.* Si  $q = \infty$ , entonces de todas las rectas hiperbólicas que pasan por  $p$ , sólo hay una que contiene a  $q$  en su frontera en el infinito, la que está contenida en la recta euclídea  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)\}$ . Es única porque no existe ninguna recta hiperbólica que esté contenida en una circunferencia euclídea y que tenga a  $\infty$  en su frontera en el infinito.

Si  $q \neq \infty$  y  $\operatorname{Re}(q) = \operatorname{Re}(p)$ , entonces la recta hiperbólica es claramente la contenida en la recta euclídea  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(p)\}$ .

Por último, si  $q \neq \infty$  y  $\operatorname{Re}(q) \neq \operatorname{Re}(p)$ , la proposición 1.2 garantiza la existencia de la recta hiperbólica que pasa por  $p$  y  $q$ .  $\square$

De modo similar a la proposición 1.2, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.18.** *Sean  $p$  y  $q$  dos puntos en  $\overline{\mathbb{R}}$ . Entonces existe una única recta hiperbólica cuyos puntos en el infinito son  $p$  y  $q$ .*

*Demostración.* En el caso que uno de los dos puntos es  $\infty$ , pongamos  $p$ , entonces la recta hiperbólica debe estar contenida en una recta euclídea. La recta buscada es la recta  $\{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Re}(z) = q\}$ .

Si por el contrario,  $p, q \in \mathbb{R}$ , entonces tenemos que buscar una circunferencia euclídea con centro en  $\mathbb{R}$  que pase por  $p$  y  $q$ . Trivialmente el centro

ha de ser el punto medio de ambos puntos,  $c = \frac{p+q}{2}$ . La recta hiperbólica es entonces  $\{z \in \mathbb{H} : |z - c| = |p - c|\}$ .  $\square$



# Capítulo 2

## Grupo general de Möbius

Este capítulo pone el foco en entender algunos de los elementos de la geometría del plano hiperbólico como el conjunto de invariantes por la acción de ciertos grupos de transformaciones en el mismo. La base para dicho estudio está, después de lo visto en el capítulo 1, en empezar por encontrar el grupo de homeomorfismos de la esfera de Riemann que deja invariante el conjunto de circunferencias. Tal grupo es el grupo de Möbius de la esfera, que definiremos y caracterizaremos, para posteriormente describir el subgrupo que deja invariante  $\mathbb{H}$ , y probar algunas de sus propiedades de transitividad.

### 2.1. Las transformaciones de Möbius

Vamos en esta sección a definir un tipo de transformaciones en  $\overline{\mathbb{C}}$  que no nos es desconocido, el grupo de las transformaciones de Möbius, para más adelante probar que preservan el conjunto de circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Muchos de los resultados de esta sección son conocidos de la asignatura Variable Compleja, por lo que no se incluirá la demostración, el lector que lo desee puede encontrarlas en los libros [2] y [4].

**Definición 2.1.** Una *transformación de Möbius* es una función  $m : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  de la forma

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.1)$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ , y se entiende que si  $c \neq 0$ , entonces  $m(\infty) = \frac{a}{c}$  y  $m(-\frac{d}{c}) = \infty$ , y si  $c = 0$ ,  $m(\infty) = \infty$ .

La condición  $ad - bc \neq 0$  garantiza que  $m$  no es constante.

Denotaremos por  $\text{Möb}^+$  el conjunto de todas las transformaciones de Möbius.

**Proposición 2.2.** *El conjunto  $\text{Möb}^+$  es un grupo bajo la composición.*

**Proposición 2.3.** *Toda transformación de Möbius es composición de aplicaciones de la forma:*

$$(I) f_1(z) = az + b, a \neq 0$$

$$(II) f_2(z) = \frac{1}{z} \text{ (inversión)}$$

Como consecuencia directa de esta proposición tenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.4.** *Las transformaciones de Möbius son homeomorfismos.*

Ahora probaremos que estas transformaciones llevan circunferencias en circunferencias. Para ello, utilizamos el lema 1.10.

**Teorema 2.5.** *Sea  $m$  una transformación de Möbius y  $L$  una circunferencia en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Entonces  $m(L)$  es también una circunferencia en  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

*Demostración.* Como  $m$  es composición de transformaciones de la forma  $z \rightarrow az + b$  y  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ , basta demostrar que  $m(L)$  es una circunferencia para ambos casos.

La ecuación de toda circunferencia de  $\overline{\mathbb{C}}$ , según el lema 1.10, es de la forma

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0, \quad \text{con } \gamma, \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \beta\bar{\beta} - \alpha\gamma > 0. \quad (2.2)$$

Consideramos primero la transformación  $m(z) = az + b$ . La ecuación de  $m(L)$  se obtiene sustituyendo  $z$  por  $aw + b$  en (2.2), dicha ecuación resulta

$$\alpha a\bar{a}w\bar{w} + (\alpha a\bar{b} + \bar{\beta}a)w + (\alpha\bar{a}b + \beta\bar{a})\bar{w} + (\gamma + \alpha b\bar{b} + \bar{b}\beta + \bar{\beta}b) = 0.$$

Tenemos que  $\alpha a\bar{a} \in \mathbb{R}$  y como  $\bar{b}\beta + \bar{\beta}b = \frac{1}{2}\text{Re}(b\bar{\beta})$ , se cumple también  $\gamma + \alpha b\bar{b} + \bar{b}\beta + \bar{\beta}b \in \mathbb{R}$ . Falta comprobar la última condición de (2.2), tras unas sencillas cuentas, esta expresión queda

$$(\alpha a\bar{b} + \bar{\beta}a)(\alpha\bar{a}b + \beta\bar{a}) - \alpha a\bar{a}(\gamma + \alpha b\bar{b} + \bar{b}\beta + \bar{\beta}b) = a\bar{a}(\beta\bar{\beta} - \alpha\gamma) > 0,$$

como queríamos. Por tanto concluimos que  $m(L)$  es una circunferencia.

Ahora consideramos la transformación  $m(z) = \frac{1}{z}$ . Como en el anterior caso, sustituimos  $z = \frac{1}{w}$ , y se obtiene que la ecuación de  $m(L)$  es

$$\gamma w\bar{w} + \bar{\beta}\bar{w} + \beta w + \alpha = 0,$$

que es la ecuación de una circunferencia, por ser  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$  y  $\beta\bar{\beta} - \alpha\gamma > 0$ .  $\square$

Ahora vamos a estudiar el número de puntos fijos de una transformación de Möbius  $m$  en función de sus parámetros  $a, b, c$  y  $d$ . Suponemos que  $m$  no es la identidad.

Tenemos que  $m(\infty) = \infty$  si y solo si  $c = 0$ . Por otra parte, los puntos fijos de  $m$  son las soluciones de la ecuación

$$\frac{az + b}{cz + d} = z,$$

que es equivalente a

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

En el caso  $c \neq 0$ , la ecuación anterior tiene 1 o 2 puntos fijos, y no más.

En el caso  $c = 0$ , los puntos fijos distintos de  $\infty$  deben satisfacer la ecuación  $(d - a)z = b$ . Si  $d = a$ , necesariamente  $b \neq 0$  puesto que hemos supuesto que  $m$  no es la identidad. Por tanto en este caso el único punto fijo es  $\infty$ . Si tenemos  $a \neq d$ , entonces hay un punto fijo adicional,  $z = \frac{b}{d-a}$ .

Como consecuencia de este análisis tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 2.6.** *Sea  $m(z)$  una transformación de Möbius que fija 3 puntos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Entonces  $m(z)$  es la identidad.*

A continuación enunciamos una de las propiedades básicas de las transformaciones de Möbius.

**Proposición 2.7.** *Dadas dos ternas de puntos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $(z_1, z_2, z_3)$  y  $(w_1, w_2, w_3)$  existe una única transformación de Möbius  $m$  tal que  $m(z_i) = w_i$  para  $i = 1, 2, 3$ .*

*Demostración.* Primero probamos la unicidad, suponiendo que existen dos transformaciones  $m, n$  que satisfacen  $n(z_i) = m(z_i) = w_i$  para  $i = 1, 2, 3$ . Entonces  $m^{-1} \circ n$  fija 3 puntos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ , por lo que es la identidad, y  $m = n$ .

Para probar la existencia vamos a demostrar que existe una transformación tal que  $m(z_1) = 0, m(z_2) = 1$  y  $m(z_3) = \infty$ . Una vez probado que tal transformación  $m$  existe, entonces existirá otra transformación  $n$  tal que  $n(w_1) = 0, n(w_2) = 1$  y  $n(w_3) = \infty$ , y la transformación que buscamos será por tanto  $n^{-1} \circ m$ .

Si cada  $z_i \in \mathbb{C}$ , es decir, si  $z_i \neq \infty$   $i = 1, 2, 3$ , entonces

$$m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

cumple las condiciones  $m(z_1) = 0, m(z_2) = 1$  y  $m(z_3) = \infty$ .

Además, como los  $z_i$  son todos distintos,

$$(z_2 - z_3)(-z_3)(z_2 - z_1) - (-z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) = (z_2 - z_3)(z_1 - z_3)(z_2 - z_1) \neq 0,$$

y  $m$  es de hecho una transformación de Möbius.

En los casos en los que  $z_i = \infty$  la transformación es,

$$m(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \quad m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad m(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

respectivamente si  $i = 1, i = 2$ , o  $i = 3$ .

□

La acción de  $\text{Möb}^+$  sobre el conjunto de las ternas de puntos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$  es un ejemplo de *acción de grupo*.

**Definición 2.8.** Una *acción de un grupo*  $G$  en un conjunto  $X$  es un homomorfismo  $\Phi$  de  $G$  en el grupo de biyecciones de  $X$ .

$$\Phi : G \rightarrow \{\text{aplicaciones biyectivas } X \rightarrow X\}.$$

Dado  $g \in G$  y  $x \in X$ , se suele denotar también a  $\Phi(g)(x)$  como simplemente  $g \cdot x$ .

Si la acción  $\Phi$  satisface que para cada  $x, y \in X$  existe un elemento  $g \in G$  tal que  $g(x) = y$ , entonces se dice que la acción es *transitiva*, o que  $G$  actúa *transitivamente* sobre  $X$ .

Otra forma de ver la proposición 2.7, es que  $\text{Möb}^+$  actúa transitivamente en el conjunto de ternas de puntos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Hay más conjuntos de objetos de  $\overline{\mathbb{C}}$  en los que  $\text{Möb}^+$  actúa transitivamente.

**Proposición 2.9.**  $Möb^+$  actúa transitivamente sobre el conjunto  $\mathcal{C}$  de circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Dada una terna de puntos distintos de  $\overline{\mathbb{C}}$ ,  $(z_1, z_2, z_3)$ , esta determina una única circunferencia de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

Sin embargo la implicación contraria es falsa, dada una circunferencia  $A$  de  $\overline{\mathbb{C}}$  hay una infinidad de ternas que determinan  $A$ .

Sean  $A, B$  dos circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Escogemos dos ternas de puntos distintos que determinen  $A$  y  $B$  respectivamente y sea  $m$  la única transformación de Möbius que lleva la terna de puntos que determinan  $A$  a la terna que determina  $B$ . Tenemos que las circunferencias  $m(A)$  y  $B$  pasan ambas por la misma terna de puntos (la que determina  $B$ ), entonces necesariamente se da  $m(A) = B$ .  $\square$

Observamos que no hay unicidad, pues dadas dos circunferencias  $A$  y  $B$  de  $\overline{\mathbb{C}}$ , existe más de una transformación de Möbius  $m$  tal que  $m(A) = B$ , ya que las ternas de puntos que determinan ambas circunferencias se pueden elegir de muchas formas.

**Proposición 2.10.**  $Möb^+$  actúa transitivamente en el conjunto  $\mathcal{D}$  de discos de  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Sean  $D$  y  $E$  dos discos de  $\overline{\mathbb{C}}$  determinados respectivamente por las circunferencias  $C_D$  y  $C_E$ . Por la proposición anterior, existe una transformación de Möbius  $m$  tal que  $m(C_D) = C_E$ . Y tenemos que  $m(D)$  es uno de los discos determinados por la circunferencia  $C_E$ .

Sin embargo, hay dos discos determinados por  $C_E$ , y puede ocurrir que  $m(D) = E$  o que sea el otro disco. Por tanto si  $m(D) = E$  hemos terminado. En caso contrario, necesitamos una transformación de Möbius que lleve la circunferencia  $C_E$  en sí misma y que intercambie los dos discos.

Para la circunferencia  $\overline{\mathbb{R}}$ , la transformación  $J(z) = \frac{1}{z}$  deja fijo  $\overline{\mathbb{R}}$  e intercambia los dos discos, puesto que  $J(i) = -i$  y  $J(0) = \infty$ ,  $J(\infty) = 0$  y  $J(1) = 1$ . Entonces, consideramos la transformación de Möbius  $n$  que lleva  $C_E$  a  $\overline{\mathbb{R}}$ , y tenemos que la transformación  $n^{-1} \circ J \circ n$  lleva  $C_E$  a sí misma, e intercambia los discos. Esto completa la demostración.  $\square$

Observamos que, al igual que la proposición 2.9, no hay unicidad.

## 2.2. Clasificación de las transformaciones de Möbius.

La clasificación de las transformaciones de Möbius en base a su número de puntos fijos que hicimos anteriormente puede refinarse.

Recordamos que dos elementos  $g, h$  de un grupo son conjugados si existe otro elemento del grupo,  $p$ , tal que  $g = p \circ h \circ p^{-1}$ . Del mismo modo, al ser  $\text{Möb}^+$  un grupo, tenemos esta definición para las transformaciones de Möbius:

**Definición 2.11.** Dos transformaciones de Möbius  $m_1, m_2$  son *conjugadas* si existe otra transformación de Möbius  $p$  tal que  $m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}$ .

Es fácil ver que dos transformaciones conjugadas  $m$  y  $n$  tienen el mismo número de puntos fijos, ya que si  $m$  fija un punto  $x$ , entonces  $n = p \circ m \circ p^{-1}$  fija  $p(x)$ .

Para clasificar las transformaciones de Möbius vamos a empezar por asignar a cada transformación de Möbius una conjugada a ella, escrita en cierta forma estándar.

**Proposición 2.12.** *Sea  $m$  una transformación de Möbius.*

1. *Si  $m$  tiene un único punto fijo, entonces  $m$  es conjugada a la transformación  $n(z) = z + 1$ .*
2. *Si  $m$  tiene dos puntos fijos, entonces existe  $a \neq 0$  tal que  $m$  es conjugada a  $n(z) = az$ .*

*Demostración.*

1. Sea  $x$  el punto fijo de  $m$ . Sea  $y$  otro punto en  $\overline{\mathbb{C}} - \{x\}$ , entonces la terna  $(x, y, m(y))$  es de puntos distintos.

Sea  $p$  la transformación que lleva  $(x, y, m(y))$  en la terna  $(\infty, 0, 1)$ , y consideramos la transformación  $p \circ m \circ p^{-1}$ .

Tenemos que  $p \circ m \circ p^{-1}(\infty) = p \circ m(x) = p(x) = \infty$ . Como  $\infty$  es un punto fijo, podemos escribir  $p \circ m \circ p^{-1}(z) = az + b$  con  $a \neq 0$ . Además,  $\infty$  es el único punto fijo, por lo que la ecuación  $az + b = z$  no tiene más soluciones en  $\overline{\mathbb{C}}$ , entonces debe ser  $a = 1$  y  $b \neq 0$ .

Por otro lado,  $p \circ m \circ p^{-1}(0) = p \circ m(y) = 1$  y concluimos que  $b = 1$ , es decir,  $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z + 1$ . Por lo tanto, toda transformación de Möbius con un punto fijo es conjugada con la transformación  $n(z) = z + 1$ .

## 2.2. CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.27

2. Ahora suponemos que  $m$  tiene dos puntos fijos,  $x$ , e  $y$ . Sea  $q$  una transformación de Möbius que satisface  $q(x) = 0$  y  $q(y) = \infty$ , y consideramos la transformación  $q \circ m \circ q^{-1}$ .

Tenemos que  $q \circ m \circ q^{-1}(\infty) = q \circ m(y) = q(y) = \infty$  y  $q \circ m \circ q^{-1}(0) = q \circ m(x) = q(x) = 0$ . Por tanto podemos escribir  $q \circ m \circ q^{-1}(z) = az$ , para algún  $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1\}$ .

□

Observamos que en la demostración del punto 2 anterior, la elección de la transformación  $q$  no es única, por lo que puede haber varios valores de  $a$  posibles. Sin embargo sí se puede decir algo sobre las posibles elecciones de  $a$ .

**Proposición 2.13.** *Sea  $m$  una transformación de Möbius con dos puntos fijos  $x$  e  $y$ . Sean  $q_1$  y  $q_2$  transformaciones de Möbius tales que  $q_k \circ m \circ q_k^{-1}(z) = a_k z$ ,  $k = 1, 2$ . Entonces, salvo reordenación de  $x$  e  $y$ , se da uno de los siguientes casos:*

1.  $q_1(x) = q_2(x) = 0$ ,  $q_1(y) = q_2(y) = \infty$  y  $a_1 = a_2$ .
2.  $q_1(x) = q_2(y) = 0$ ,  $q_1(y) = q_2(x) = \infty$  y  $a_1 = \frac{1}{a_2}$

*Demostración.* Primero vamos a probar que, salvo reordenación de  $x$  e  $y$ , se tiene, o bien  $q_1(x) = q_2(x) = 0$  y  $q_1(y) = q_2(y) = \infty$ , o bien  $q_1(x) = q_2(y) = 0$  y  $q_1(y) = q_2(x) = \infty$ .

Como para  $k = 1, 2$ ,  $q_k \circ m \circ q_k^{-1}(z) = a_k z$ , entonces  $0$  y  $\infty$  son puntos fijos de  $q_k \circ m \circ q_k^{-1}$ .

Si suponemos que  $q_k(x), q_k(y) \notin \{0, \infty\}$ , como los únicos puntos fijos de  $m$  son  $0, \infty$ , tenemos que  $m(q_k^{-1}(0)) \neq q_k^{-1}(0)$ . Suponiendo esto llegamos a la contradicción que  $0 = q_k \circ m(q_k^{-1}(0)) \neq q_k(q_k^{-1}(0)) = 0$ . Utilizando el punto  $\infty$  llegaríamos a la contradicción  $\infty = q_k \circ m(q_k^{-1}(\infty)) \neq q_k(q_k^{-1}(\infty)) = \infty$ .

Por tanto tenemos que  $q_k(x), q_k(y) \in \{0, \infty\}$  para  $k = 1, 2$ . Las únicas posibilidades, salvo reordenación de  $x$  e  $y$ , son entonces que

$$q_1(x) = 0, q_1(y) = \infty \text{ y } q_2(x) = 0, q_2(y) = \infty,$$

o que

$$q_1(x) = 0, q_1(y) = \infty \text{ y } q_2(y) = 0, q_2(x) = \infty,$$

como precisábamos. Falta ahora comprobar lo relativo a los valores de  $a_1$  y  $a_2$ , estudiando estos dos casos por separado:

1. En el caso  $q_1(x) = q_2(x) = 0$ ,  $q_1(y) = q_2(y) = \infty$ , tenemos que 0 e  $\infty$  son puntos fijos de  $q_2 \circ q_1^{-1}$ . Entonces sabemos que  $p = q_2 \circ q_1^{-1}(z) = cz$  para algún  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

Entonces

$$\begin{aligned} a_2 z &= q_2 \circ m \circ q_2^{-1}(z) = p \circ q_1 \circ m \circ q_1^{-1} \circ p^{-1}(z) \\ &= p \circ (q_1 \circ m \circ q_1^{-1}) \left( \frac{1}{c} z \right) = p \left( \frac{a_1}{c} z \right) \\ &= a_1 z \end{aligned}$$

y obtenemos  $a_1 = a_2$ .

2. En el caso  $q_1(x) = q_2(y) = 0$ ,  $q_1(y) = q_2(x) = \infty$ , consideramos la transformación  $q = J^{-1} \circ q_2$ , con  $J(z) = \frac{1}{z}$ . Tenemos que  $q$  es una transformación de Möbius que lleva  $x$  en 0, e  $y$  en  $\infty$ . Ahora,  $q$  y  $q_1$  satisfacen las condiciones del caso 1, luego  $q \circ m \circ q^{-1} = a_1 z$ .

Tenemos entonces que para todo  $z \in \overline{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} a_2 z &= q_2 \circ m \circ q_2^{-1}(z) = J \circ (q \circ m \circ q^{-1}) \circ J(z) \\ &= J \circ (q \circ m \circ q^{-1}) \left( \frac{1}{z} \right) = J \left( a_1 \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{a_1} z. \end{aligned}$$

Concluimos que  $a_2 = \frac{1}{a_1}$  y hemos demostrado la proposición.  $\square$

Hemos probado que para cualquier transformación de Möbius con dos puntos fijos, existe  $a \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$  tal que  $m$  es conjugada con la transformación  $n(z) = az$  o con  $n(z) = \frac{1}{a}z$ .

**Definición 2.14.** Llamaremos tanto a  $a$  como a  $\frac{1}{a}$  un *multiplicador* de  $m$ .

Resumiendo todo este análisis, tenemos la siguiente clasificación:

**Definición 2.15.** Sea  $m$  una transformación de Möbius.

1. Si  $m$  tiene un único punto fijo, entonces decimos que es *parabólica* y que su forma estándar es  $n(z) = z + 1$ .
2. Si  $m$  tiene dos puntos fijos, sea  $a$  un multiplicador de  $m$ , entonces hay dos posibilidades:

- a) Si  $|a| = 1$ , podemos escribirlo de la forma  $a = e^{2i\varphi}$  para algún  $\varphi \in (0, \pi)$ . En este caso decimos que  $m$  es *elíptica* y que  $n(z) = e^{2i\varphi}z$  es su *forma estándar*.
- b) Si  $|a| \neq 1$ , podemos escribir  $a = \lambda^2 e^{2i\varphi}$  para algún real positivo  $\lambda^2$  y algún  $\varphi \in [0, \pi)$ . En este caso decimos que  $m$  es *loxodrómica* y que su *forma estándar* es  $n(z) = \lambda^2 e^{2i\varphi}z$ .

La forma estándar de una transformación loxodrómica es la composición de una dilatación (contracción si  $\lambda^2 < 1$ , expansión si  $\lambda^2 > 1$ ) y una rotación (pudiendo ser esta trivial) de ángulo  $2\varphi$ .

## 2.3. El grupo general de Möbius

Nuestro objetivo es determinar las transformaciones de  $\mathbb{H}$  que preservan el conjunto de rectas hiperbólicas, para ello primero exploramos aquellas que preservan el conjunto de circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Ya hemos determinado un grupo de transformaciones,  $\text{Möb}^+$ , que cumplen esta propiedad.

Una extensión natural de este grupo es considerar la extensión a  $\overline{\mathbb{C}}$  de la *conjugación compleja*,

$$C(z) = \bar{z}, \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad C(\infty) = \infty.$$

Como  $C^{-1} = C$ , tenemos que  $C$  es un homeomorfismo, por la proposición 1.9. Además lleva circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$  en circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Aún así, no es un elemento del grupo  $\text{Möb}^+$ , debido a que fija  $\overline{\mathbb{R}}$ , y no es la identidad.

**Definición 2.16.** El *grupo general de Möbius* es el subgrupo del grupo de homeomorfismos de  $\overline{\mathbb{C}}$  generado por  $\text{Möb}^+$  y la transformación  $C$ . Denotamos a dicho grupo  $\text{Möb}$ .

Ahora nos conviene dar una expresión general de los elementos de este grupo. Unos cálculos simples prueban el siguiente lema.

**Lema 2.17.** *Dados*

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad n(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$$

donde  $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ ,  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} m \circ C(z) &= \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, & n \circ C(z) &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, & y \\ n \circ m(z) &= \frac{(\alpha\bar{a} + \beta\bar{c})\bar{z} + (\alpha\bar{b} + \beta\bar{d})}{(\gamma\bar{c} + \delta\bar{e})\bar{z} + (\gamma\bar{b} + \delta\bar{d})}, \end{aligned}$$

con  $(\alpha\bar{a} + \beta\bar{c})(\gamma\bar{b} + \delta\bar{d}) - (\alpha\bar{b} + \beta\bar{d})(\gamma\bar{c} + \delta\bar{e}) \neq 0$ .

**Proposición 2.18.** *Todo elemento  $f$  de Möb tiene una de las siguientes formas*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{o bien} \quad f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ .

*Demostración.* Sea  $f \in \text{Möb}$ . Por definición de Möb, existen  $f_1, \dots, f_n$  tal que  $f = f_1 \circ \dots \circ f_n$  donde para todo  $i = 1 \dots n$  o bien  $f_i \in \text{Möb}^+$  o bien  $f_i = C$ .

Vamos a mostrar el resultado por inducción sobre  $n$ .

Si  $n = 1$ , entonces o bien  $f \in \text{Möb}^+$ , que entonces es de tipo 1, o bien  $f = C$ , que sería del tipo 2. Luego para  $n = 1$  el resultado es cierto.

Suponemos que para cierto  $n \in \mathbb{N}$  se tiene que si  $f = f_1 \circ \dots \circ f_n \in \text{Möb}$  donde cada  $f_i$  es un elemento de  $\text{Möb}^+$  o es la transformación  $C$ , entonces  $f$  tiene una de las dos formas del enunciado.

Vamos a probarlo ahora para  $n + 1$ . Tenemos entonces que  $m = f_1 \circ \dots \circ f_n \circ f_{n+1}$ . Podemos agrupar las  $n$  primeras transformaciones  $f_i$ , y expresamos  $f$  de la forma

$$f = (f_1 \circ \dots \circ f_n) \circ f_{n+1}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción  $f_1 \circ \dots \circ f_n$  es o bien de tipo 1 o de tipo 2. Aplicando el lema anterior, tenemos que la composición  $(f_1 \circ \dots \circ f_n) \circ f_{n+1}$  es de nuevo de tipo 1 o de tipo 2.  $\square$

Ya hemos visto que Möb preserva el conjunto de circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$ , de hecho, esta propiedad caracteriza a Möb:

**Teorema 2.19.** *Sea un homeomorfismo  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ . Entonces  $f$  preserva el conjunto de circunferencias si y solo si  $f \in \text{Möb}$ .*

*Demostración.* Denotando  $\text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$  al grupo de transformaciones de  $\overline{\mathbb{C}}$  que fijan el conjunto de circunferencias, tenemos que demostrar únicamente  $\text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}}) \subset \text{Möb}$ , puesto que por 2.5 tenemos que  $\text{Möb} \subset \text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ .

Dada  $f$ , consideramos la transformación de Möbius  $p$  que lleva la terna  $(f(0), f(1), f(\infty))$  en la terna  $(0, 1, \infty)$ . Entonces  $p \circ f(0) = 0$ ,  $p \circ f(1) = 1$  y  $p \circ f(\infty) = \infty$ . Como  $p \circ f$  es un homeomorfismo que lleva circunferencias en circunferencias, se deduce que  $p \circ f(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$ , y que o bien  $p \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  o bien  $p \circ f(\mathbb{H})$  es el semiplano inferior de  $\overline{\mathbb{C}}$ . Si estamos en el primer caso consideramos  $m = p$ , y en el otro caso consideramos  $m = C \circ p$ . Ahora tenemos que  $m$  es un elemento de  $\text{Möb}$  que verifica  $m \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ ,  $m \circ f(0) = 0$ ,  $m \circ f(1) = 1$  y  $m \circ f(\infty) = \infty$ .

Además  $m \circ f$ , como fija  $\infty$ , lleva rectas euclídeas en rectas euclídeas y circunferencias euclídeas en circunferencias euclídeas.

Vamos a probar que  $m \circ f$  es la identidad.

Sea  $Z = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : m \circ f(z) = z\}$ , veamos que  $Z$  es denso en  $\overline{\mathbb{C}}$ . Tenemos  $\{0, 1, \infty\} \in Z$ .

Si tenemos  $X$  e  $Y$  dos rectas hiperbólicas que se cortan en  $z_0$ , tales que  $m \circ f(X) = X$  y  $m \circ f(Y) = Y$ , entonces  $z_0 \in Z$ . Además, si tenemos dos puntos distintos de  $Z$ ,  $x, y$ , entonces la recta euclídea que pasa por  $x$  e  $y$  es invariante por  $m \circ f$ .

Sea  $H \neq \mathbb{R}$  una recta horizontal en  $\mathbb{C}$ , como  $\mathbb{R}$  y  $H$  son disjuntas y  $m \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ,  $m \circ f(H)$  debe ser una recta horizontal en  $\mathbb{C}$ . Como además  $m \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ , la recta  $m \circ f(H)$  está contenida en  $\mathbb{H}$  si y solo si  $H$  esta en  $\mathbb{H}$ .

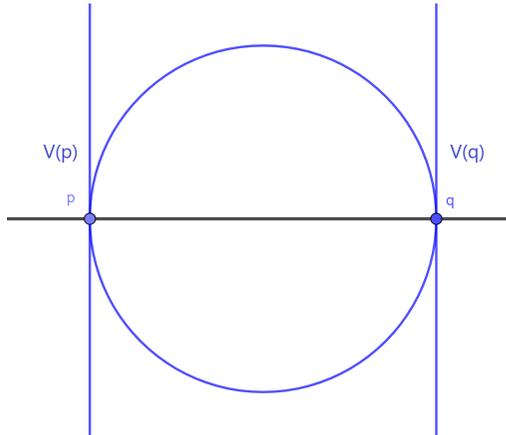
Para cada  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  denotamos  $V(z)$  a la recta euclídea perpendicular a  $\mathbb{R}$  que pasa por  $z$  y  $H(z)$  a la recta euclídea paralela a  $\mathbb{R}$  que pasa por  $z$ .

Sean  $p$  y  $q$  puntos de  $Z$  distintos, que se encuentran en la misma recta horizontal, es decir,  $H(p) = H(q)$ , de manera que tanto la recta  $H(p)$  como los dos semiplanos que determina dicha recta quedan fijos por  $m \circ f$ . Llamaremos a todo par de puntos  $p, q \in Z$  que satisfagan esto *esquema básico de tipo 1*.

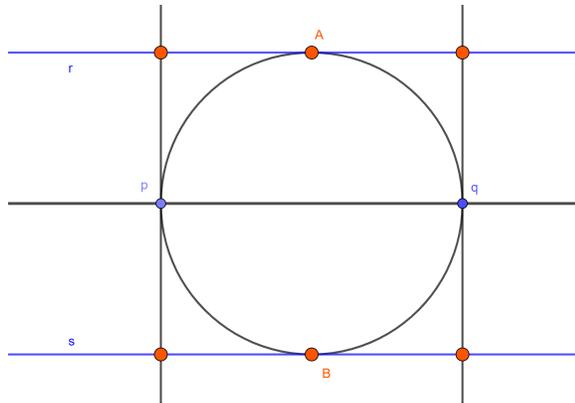
Vamos a demostrar que si tenemos  $p, q$ , un esquema básico de tipo 1, entonces estos puntos dan lugar a otros 7 puntos de  $\overline{\mathbb{C}}$  que pertenecen también a  $Z$ .

Consideramos las rectas  $V(p)$  y  $V(q)$ , y la circunferencia euclídea  $A_{p,q}$  que pasa por  $p$  y  $q$  cuyo centro está en  $H(p)$ . Por lo dicho anteriormente, las imágenes por  $m \circ f$  de  $V(p)$  y  $V(q)$  deben ser rectas euclídeas disjuntas, por tanto paralelas. Además como  $V(p)$  y  $V(q)$  son tangentes a  $A_{p,q}$  en  $p$  y  $q$  respectivamente, debe darse que  $m \circ f(V(p))$  y  $m \circ f(V(q))$  son tangentes a

$m \circ f(A_{p,q})$  en  $m \circ f(p) = p$  y  $m \circ f(q) = q$ . Por tanto necesariamente  $V(p)$ ,  $V(q)$  y  $A_{p,q}$  quedan fijas por  $m \circ f$ .



Consideramos ahora las rectas horizontales tangentes a  $A_{p,q}$ ,  $r$  y  $s$ . Tenemos, como antes, que  $m \circ f(r)$  y  $m \circ f(s)$  son tangentes a  $m \circ f(A_{p,q}) = A_{p,q}$  y disjuntas. Como los dos semiplanos determinados por  $H(p)$  son fijos, necesariamente  $m \circ f(s) = s$  y  $m \circ f(r) = r$ .



Tenemos que  $m \circ f$  deja fijas las rectas  $H(p)$ ,  $V(p)$ ,  $V(q)$ ,  $r$  y  $s$ , así como la circunferencia  $A_{p,q}$ . Luego los 8 puntos de corte de estas rectas y circunferencias son también fijos, y pertenecen a  $Z$ . Sean  $A$  y  $B$  los puntos de corte de  $A_{p,q}$  con  $r$  y  $s$ , entonces la recta que pasa por  $A$  y  $B$ , es también fija, luego su corte con  $H(p)$ , que es el centro de  $A_{p,q}$ , también pertenece a  $Z$ .

Además, como la circunferencia es fija, también lo son los semiplanos determinados por cada recta que aparece en la figura 2.1.

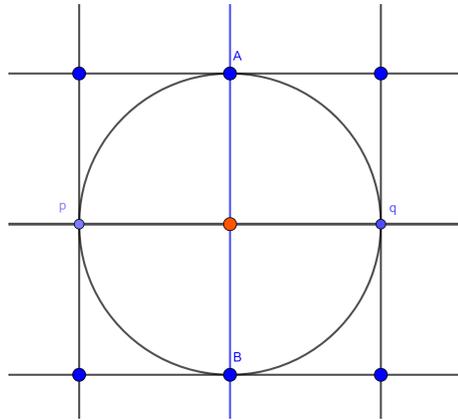


Figura 2.1: Esquema básico tipo 1.

Llamaremos *esquema básico de tipo 2* a dos puntos  $p, q \in Z$  en la misma recta euclídea vertical,  $V(p)$ , tal que dicha recta queda fijada por  $m \circ f$ , así como los dos semiplanos que determina. Este esquema también da lugar a una construcción igual a la del esquema de tipo 1, que podemos observar en la figura 2.2.

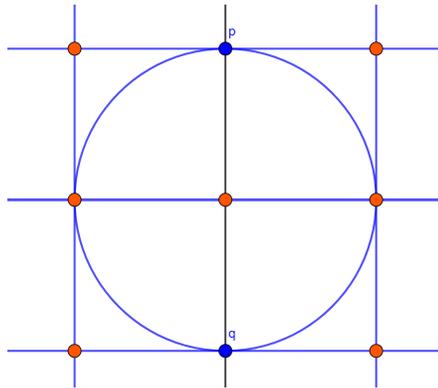


Figura 2.2: Esquema básico tipo 2.

Si tenemos un esquema básico de tipo 1 o 2, tenemos 9 puntos que pertenecen a  $Z$ , que forman una cuadrícula  $9 \times 9$ . Eligiendo dos de los puntos de la parte superior (resp. parte inferior) como nuevo esquema tipo 1, el esquema se propaga hacia arriba (resp. hacia abajo). Eligiendo dos puntos de la parte

izquierda (resp. parte derecha) como nuevo esquema tipo 2, el esquema se propaga hacia la izquierda (resp. derecha). Si se eligen el punto del centro y un punto en la recta vertical o horizontal del medio, el esquema se propaga hacia dentro. Vease la figura 2.3.

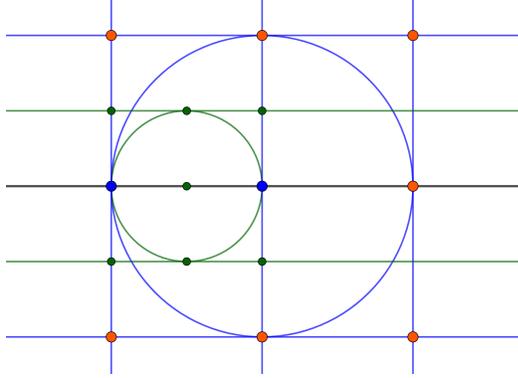


Figura 2.3: Propagación hacia dentro.

Tenemos que  $0, 1$  forman un esquema básico de tipo 1, que será nuestro esquema inicial. Realizando las construcciones anteriores, deducimos que todo  $D \times D \subset \mathbb{C}$  pertenece a  $Z$ , donde  $D$  es el subconjunto

$$D = \left\{ m + \frac{q}{2^n} : p, q, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Como  $D \times D$  es denso en  $\overline{\mathbb{C}}$ , concluimos que  $Z$  también lo es. Por tanto  $m \circ f = Id$  lo que implica que  $f = m^{-1} \in \text{Möb}$ .

Esto concluye la demostración.  $\square$

Una propiedad fundamental de los elementos de Möb es que conservan ángulos, tal y como vamos a comprobar a continuación.

Recordamos que denotamos a  $\pi$  a la proyección estereográfica extendida a  $\overline{\mathbb{C}}$ . Sean  $c_1, c_2$  dos curvas en  $\overline{\mathbb{C}}$  que se cortan en  $\infty$ , definimos el ángulo en  $\infty$  de como el ángulo que forman las curvas  $\pi^{-1}(c_1)$  y  $\pi^{-1}(c_2)$  en  $N$ . Con esta definición, por la proposición 1.9, tenemos que  $\pi$  es conforme.

Vamos a probar primero que la aplicación  $J(z) = \frac{1}{z}$  induce una rotación en  $\mathbb{S}^2$ . Sea  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ , entonces tenemos

$$\pi^{-1}(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{\bar{z} - z}{z\bar{z} + 1}, \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right) = (x_1, x_2, x_3).$$

$$\pi^{-1} \left( \frac{1}{z} \right) = \left( \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{1 - z\bar{z}}{z\bar{z} + 1} \right) = (x_1, -x_2, -x_3).$$

Por tanto,  $J$  induce la transformación

$$\tilde{J} = \pi^{-1} J \pi : \quad \mathbb{S}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{S}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \quad \longmapsto \quad (x_1, -x_2, -x_3)$$

que es la rotación de ángulo  $\pi$  en torno al eje  $x_1$ , tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{c_i} & \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{J} & \bar{\mathbb{C}} \\ & \searrow & \downarrow \pi^{-1} & & \downarrow \pi^{-1} \\ & & \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\tilde{J} = \pi^{-1} \circ J \circ \pi} & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

$\tilde{c}_i = \pi^{-1} \circ c_i$

Al ser  $\tilde{J}$  una rotación, es una aplicación conforme. Como tanto  $\pi$  como su inversa son conformes, entonces  $J$  también lo es. Por tanto, una aplicación  $f$  en  $\bar{\mathbb{C}}$  será conforme en  $\infty$  si y solo si  $f \circ J$  es conforme en 0.

Para probar que los elementos de Möb son conformes haremos uso de una proposición conocida de variable compleja:

**Proposición 2.20.** *Sea  $f$  una función analítica en  $z_0$ . Entonces  $f$  es conforme en  $z_0$  si y solo si  $f'(z_0) \neq 0$*

**Proposición 2.21.** *Los elementos de Möb son aplicaciones conformes.*

*Demostración.* Sea  $m$  una transformación de Möbius,  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $ad - bc \neq 0$ , entonces su derivada es

$$m'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Luego  $m'(z) \notin \{0, \infty\}$  para cada  $z \in \mathbb{C} - \{-d/c\}$ , y, por la proposición anterior,  $m$  es conforme en  $\mathbb{C} - \{-d/c\}$ . Luego falta por ver los casos  $z = \infty$  y  $z = -d/c$ .

En el caso  $z = \infty$ , tenemos que diferenciar si  $m(\infty) = \infty$  o  $m(\infty) \neq \infty$ .

Si  $m(\infty) \neq \infty$ , entonces  $c \neq 0$ . Consideramos la aplicación

$$U = m \circ J : z \mapsto \frac{a + bz}{c + dz}$$

cuya derivada en 0 es  $U'(0) = \frac{bc-ad}{c^2} \neq 0, \infty$ , luego  $U$  es conforme en 0, por tanto  $m$  es conforme en  $\infty$ .

Si  $m(\infty) = \infty$ , entonces  $c = 0$  y  $a \neq 0$ , y consideramos la aplicación

$$V = J \circ m \circ J : z \mapsto \frac{c + dz}{a + bz}$$

y tenemos  $V'(0) = \frac{ad-bc}{a^2} \neq 0, \infty$ , luego  $V$  es conforme en 0, y  $m$  es conforme en  $\infty$  como antes.

El último caso es  $z = -d/c$  con  $c \neq 0$ . Consideramos

$$W = J \circ m : z \mapsto \frac{cz + d}{az + b}$$

y obtenemos  $W'(-d/c) = \frac{c^2}{bc-ad} \neq 0, \infty$ , y  $W$  es conforme en  $-d/c$  y por tanto  $m$  también.

La transformación  $C(z) = \bar{z}$  induce la reflexión de  $\mathbb{S}^2$  en el plano  $y = 0$ , luego es conforme.  $\square$

## 2.4. Preservando $\mathbb{H}$

Ahora ya estamos en situación de determinar las transformaciones que preservan el conjunto de rectas hiperbólicas.

Para ello, consideramos el subgrupo de Möb

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) = \{m \in \text{Möb} : m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}.$$

**Teorema 2.22.** *Todo elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  lleva rectas hiperbólicas en rectas hiperbólicas.*

*Demostración.* Toda recta hiperbólica está contenida en una circunferencia de  $\bar{\mathbb{C}}$  que corta a  $\mathbb{R}$  de forma ortogonal en 1 o 2 puntos, luego su imagen debe cumplir lo mismo. La condición  $m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  para todo  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ , garantiza que la imagen es una recta hiperbólica.  $\square$

Como  $\mathbb{H}$  es un disco en  $\bar{\mathbb{C}}$  determinado por la circunferencia  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  en  $\bar{\mathbb{C}}$ , primero determinamos las transformaciones que preservan  $\bar{\mathbb{R}}$

**Teorema 2.23.** *Sea  $m \in \text{Möb}$ , entonces  $m$  fija  $\bar{\mathbb{R}}$ , es decir  $m(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$ , si y solo si tiene una de las siguientes formas:*

1.  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$
2.  $m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$ ;
3.  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c, d$  imaginarios puros y  $ad - bc = 1$ ;
4.  $m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  con  $a, b, c, d$  imaginarios puros y  $ad - bc = 1$ .

*Demostración.* Todo elemento de Möb se puede expresar de la forma  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  o de forma  $m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ , según la proposición 2.18. Dada una transformación de la forma  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc = e \neq 0$ , dividiendo todos los coeficientes de  $m$  por  $\sqrt{e}$ , se puede suponer  $ad - bc = 1$ .

Por tanto, consideramos primero las transformaciones de la forma

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc = 1.$$

Imponiendo que  $m$  lleve  $\overline{\mathbb{R}}$  en  $\overline{\mathbb{R}}$ , tenemos que los puntos

$$m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}, \quad m(\infty) = \frac{a}{c}, \quad m^{-1}(0) = -\frac{b}{a}$$

todos están en  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Si suponemos que  $a$  y  $c$  son no nulos, los tres puntos anteriores están en  $\mathbb{R}$  y tenemos que

$$1 = ad - bc = c^2 \left[ \frac{a}{c} \left( \frac{d}{c} - \frac{b}{a} \right) \right].$$

Luego  $c$  es o bien real o bien imaginario puro. Por tanto todos los coeficientes de  $m$  también. En el caso en que  $a = 0$  o  $c = 0$  se razona de forma similar.

Recíprocamente, si tenemos  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $ad - bc = 1$  y todos los coeficientes de  $m$  son o bien reales o bien imaginarios puros, entonces los tres puntos  $m(0), m(\infty), m^{-1}(\infty)$  pertenecen a  $\mathbb{R}$ , luego  $m(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

Con este análisis hemos probado los casos 1 y 3. Componiendo con la aplicación  $C(z) = \bar{z}$  y aplicando lo anterior tenemos los casos 2 y 4.  $\square$

Ahora podemos determinar el grupo  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

**Teorema 2.24.** *Todo elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  tiene una de las dos formas siguientes:*

1.  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$
2.  $m(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  con  $a, b, c, d$  imaginarios puros y  $ad - bc = 1$ .

*Demostración.* Por continuidad,  $\text{Möb}(\mathbb{H}) \subset \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ , luego sólo hay que analizar que transformaciones de  $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$  pertenecen a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Las transformaciones del teorema 2.23 pueden, o bien fijar los dos discos determinados por  $\overline{\mathbb{R}}$  o intercambiarlos. Las transformaciones  $m \in \text{Möb}$  serán las que fijen los dos discos, es decir, las que verifiquen que  $m(i)$  tiene parte imaginaria positiva. Estudiaremos cada caso por separado:

1. En el primer caso, la parte imaginaria de  $m(i)$  es:

$$\begin{aligned} \text{Im}(m(i)) &= \text{Im}\left(\frac{ai + b}{ci + d}\right) \\ &= \text{Im}\left(\frac{(ai + b)(-ci + d)}{(ci + d)(-ci + d)}\right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} = \frac{1}{c^2 + d^2} > 0 \end{aligned}$$

luego  $m$  pertenece a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

2. En el segundo caso, la parte imaginaria de  $m(i)$  es:

$$\begin{aligned} \text{Im}(m(i)) &= \text{Im}\left(\frac{-ai + b}{-ci + d}\right) \\ &= \text{Im}\left(\frac{(-ai + b)(ci + d)}{(-ci + d)(ci + d)}\right) = \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2} = \frac{-1}{c^2 + d^2} < 0 \end{aligned}$$

y por tanto  $m$  no pertenece a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

3. En el tercer caso, como  $a, b, c, d$  son imaginarios puros, escribimos  $a = \alpha i$ ,  $b = \beta i$ ,  $c = \gamma i$ , y  $d = \delta i$  y entonces  $ad - bc = -\alpha\delta + \beta\gamma = 1$ . la parte imaginaria es:

$$\begin{aligned} \text{Im}(m(i)) &= \text{Im}\left(\frac{ai + b}{ci + d}\right) = \text{Im}\left(\frac{-\alpha + \beta i}{-\gamma + \delta i}\right) \\ &= \text{Im}\left(\frac{(-\alpha + \beta i)(-\gamma - \delta i)}{(-\gamma + \delta i)(-\gamma - \delta i)}\right) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{-1}{\gamma^2 + \delta^2} < 0 \end{aligned}$$

y  $m$  no pertenece a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

4. En el último caso, con la misma notación del caso anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Im}(m(i)) &= \text{Im}\left(\frac{-ai + b}{-ci + d}\right) = \text{Im}\left(\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}\right) \\ &= \text{Im}\left(\frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)}\right) = \frac{-\alpha\delta + \beta\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{1}{\gamma^2 + \delta^2} > 0 \end{aligned}$$

luego  $m$  pertenece a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

□

Vamos ahora a determinar los generadores de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , para poder trabajar con más facilidad.

**Proposición 2.25.** *El grupo  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  está generado por las transformaciones de la forma  $m(z) = az + b$  con  $a > 0$  y  $b \in \mathbb{R}$ ,  $K(z) = \frac{-1}{z}$  y  $B(z) = -\bar{z}$ .*

*Demostración.* Por el teorema 2.24 sabemos que los elementos de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  tienen una de las dos formas siguientes:

1.  $m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = 1$
2.  $n(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  con  $a, b, c, d$  imaginarios puros y  $ad - bc = 1$ .

En el primer caso, si  $c = 0$ , podemos escribir

$$m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

y de la condición  $1 = ad - bc = ad$  obtenemos que  $\frac{a}{d} = a^2 > 0$ .

Si tenemos  $c \neq 0$ , podemos expresar  $m$  como  $m = f \circ K \circ g$ , con  $g(z) = c^2z + cd$  y  $f(z) = z + \frac{a}{c}$ .

En el segundo caso, tenemos

$$n(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

con  $a, b, c, d$  imaginarios puros y  $ad - bc = 1$ . Consideramos la composición  $m(z) = (B \circ n)(z)$ , y obtenemos una transformación de la forma

$$m(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  y  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , que es del primer tipo. Luego  $n = B^{-1} \circ m = B \circ m$  y aplicando el caso anterior, el resultado es cierto.  $\square$

Hicimos en la sección 2.2 una clasificación de las transformaciones de Möbius en base a su número de puntos fijos. Ahora que hemos determinado el grupo  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , podemos determinar el conjunto de los puntos fijos de una transformación  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ .

1. Consideramos la transformación  $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c, d$  reales y  $ad - bc = 1$ . Los puntos fijos son las raíces en  $\mathbb{C}$  del polinomio  $p(z) = cz^2 + (d - a)z - b$ .

Si  $c = 0$  ya vimos que los puntos fijos eran  $\infty$  y  $b/(d - a)$ , (este último solo si  $d \neq a$ ). Como  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , entonces los puntos fijos pertenecen a  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Si  $c \neq 0$ , los puntos fijos son  $\frac{1}{2} \left( a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4bc} \right)$ . Como los coeficientes de  $p(z)$  son todos reales, entonces sus raíces son invariantes bajo conjugación compleja. Por tanto las dos raíces han de ser o ambas reales, o una de ellas debe pertenecer a  $\mathbb{H}$  y la otra al semiplano inferior.

Combinando esto con la clasificación dada en la definición 2.15, tenemos que una transformación  $m$  de  $\text{Mob}^+(\mathbb{H}) = \text{Möb}^+ \cap \text{Möb}(\mathbb{H})$  tiene un único punto fijo en  $\mathbb{H}$  si y solo si es elíptica, tiene un punto fijo en  $\overline{\mathbb{R}}$  si y solo si es parabólica, y tiene dos puntos fijos en  $\overline{\mathbb{R}}$  si y solo si es loxodrómica.

2. Ahora consideramos  $m(z) = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$ , con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  imaginarios puros y  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ . Escribimos  $z = x + iy$ , y  $\alpha = ai$ ,  $\beta = bi$ ,  $\gamma = ci$  y  $\delta = di$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  y  $ad - bc = -1$ . Entonces los puntos fijos de  $m$  satisfacen

$$cx^2 + cy^2 + (d - a)x - b + i(d + a)y = 0.$$

Si  $m$  tiene un punto fijo  $z = x + iy$  en  $\mathbb{H}$ , entonces podemos deducir que  $d + a = 0$  y los puntos fijos de  $m$  verifican  $cx^2 + cy^2 + 2dx - b = 0$ . Si  $c = 0$ , entonces no hay ninguna restricción en la parte imaginaria del punto fijo  $z$ , y todos los puntos de la recta  $Re(z) = \frac{b}{2d}$  son puntos fijos de  $m$ . Si  $c \neq 0$ , los puntos fijos de  $m$  verifican

$$\left(x + \frac{d}{c}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Luego los puntos fijos de  $m$  en este caso forman la circunferencia euclídea de centro  $-d/c$  y radio  $\frac{1}{|c|}$ . En ambos casos los puntos fijos de  $m$  forman una recta hiperbólica,  $\ell$ , y  $m$  es la reflexión respecto a  $\ell$ .

Suponemos ahora que  $m$  no tiene puntos fijos en  $\mathbb{H}$ , ponemos  $y = 0$  y consideramos los puntos fijos que se encuentran en  $\overline{\mathbb{R}}$ . Estos puntos verifican  $cx^2 + (d - a)x - b = 0$ . Por tanto hay dos puntos fijos en  $\overline{\mathbb{R}}$ . En este caso la recta hiperbólica determinada por los dos puntos fijos es invariante por  $m$  (aunque sus puntos no son fijos). Por tanto es una reflexión deslizante.

Para acabar esta sección vamos a estudiar algunas de las propiedades transitivas de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

**Proposición 2.26.**  *$\text{Möb}(\mathbb{H})$  actúa transitivamente en  $\mathbb{H}$ . Es decir, dados dos puntos  $w_1, w_2 \in \mathbb{H}$ , existe un elemento  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $m(w_1) = w_2$ .*

*Demostración.* Sea  $w \in \mathbb{H}$ , es suficiente mostrar que existe un elemento  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $m(w) = i$ .

Si probamos esto, entonces dado otro  $w_1 \in \mathbb{H}$  existirá un  $m_1 \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $m_1(w_1) = i$  y se tendrá  $m_1^{-1} \circ m(w) = m_1^{-1}(i) = w_1$ , como queríamos.

Pasamos a construir dicho  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ , expresamos  $w = a + bi$ , con  $b > 0$ . Primero vamos a llevar a  $w$  al eje imaginario positivo con la transformación  $p(z) = z - a$  para que  $p(w) = bi$ . A continuación consideramos  $q(z) = \frac{1}{b}z$  y tenemos entonces que  $q(p(w)) = q(bi) = i$ .

Como  $-a \in \mathbb{R}$  y  $\frac{1}{b} > 0$ , por la proposición 2.25 tenemos que tanto  $p$  como  $q$  pertenecen a  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , luego su composición  $m = q \circ p$  es el elemento de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  que buscamos.  $\square$

**Proposición 2.27.**  *$\text{Möb}(\mathbb{H})$  actúa transitivamente en el conjunto de rectas hiperbólicas de  $\mathbb{H}$ .*

*Demostración.* Sea  $\ell$  una recta hiperbólica. Al igual que en la proposición anterior basta probar que existe una transformación que lleve  $\ell$  al eje imaginario positivo  $I$ .

Si  $\ell$  está contenida en una recta euclídea, pongamos la recta  $\operatorname{Re}(z) = c$  con  $c \in \mathbb{R}$ , entonces basta considerar la transformación  $m(z) = z - c$ . Tenemos que  $m(\ell) = I$ , y por la proposición 2.25,  $m$  pertenece a  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ .

Si  $\ell$  está contenida en una circunferencia euclídea, consideramos  $p, q \in \mathbb{R}$ , con  $p < q$ , los puntos que pertenecen a la frontera en el infinito de  $\ell$ . Entonces la transformación  $m(z) = \frac{z-q}{z-p}$  lleva  $q$  en  $0$  y  $p$  en  $\infty$ . Luego la imagen de  $\ell$  es  $I$ . La transformación  $m$  pertenece a  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ , puesto que  $q - p > 0$ .  $\square$

**Proposición 2.28.**  *$\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  actúa transitivamente en el conjunto de ternas de puntos distintos de  $\overline{\mathbb{R}}$ .*

*Demostración.* De nuevo, dada una terna de puntos distintos  $(z_1, z_2, z_3)$  de  $\overline{\mathbb{R}}$ , basta mostrar que existe un elemento  $m \in \operatorname{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $m$  lleve la terna  $(z_1, z_2, z_3)$  en la terna  $(0, 1, \infty)$ .

Supongamos que  $z_k \neq \infty$  para  $k = 1, 2, 3$ , y que  $z_1 < z_2 < z_3$ . La proposición 2.7 ya nos proporcionó un elemento de  $\operatorname{Möb}^+$  que lleva  $(z_1, z_2, z_3)$  en  $(0, 1, \infty)$ , dicho elemento es

$$m(z) = \frac{(z_2 - z_3)z - z_1(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)z - z_3(z_2 - z_1)}.$$

Veamos que este elemento pertenece a  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ . Los coeficientes de  $m$  son todos reales, luego basta ver que se cumple la condición  $ad - bc > 0$ .

$$-z_3(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) + z_1(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) = (z_2 - z_3)(z_2 - z_1)(z_1 - z_3) > 0,$$

puesto que hemos supuesto, sin pérdida de generalidad, que  $z_1 < z_2 < z_3$ . Falta estudiar los casos en los que  $z_k = \infty$ . Haremos únicamente el caso

$z_1 = \infty$ , puesto que el resto son similares.

Por la proposición 2.7, el elemento  $m$  de  $\operatorname{Möb}^+$

$$m(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

lleva la terna  $(\infty, z_2, z_3)$  en  $(0, 1, \infty)$ . Podemos volver a suponer sin pérdida de generalidad que  $z_2 < z_3$ . Por tanto, todos los coeficientes de  $m$  son reales y tenemos que  $z_3 - z_2 > 0$ , luego  $m \in \operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ .  $\square$

# Capítulo 3

## Longitud y distancia en $\mathbb{H}$ .

Ahora que ya se tiene descrito el grupo  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , vamos a buscar un modo de definir una distancia en el plano hiperbólico tal que el grupo de isometrías de  $\mathbb{H}$  para esta distancia sea precisamente dicho grupo. La aproximación que haremos será a través de la definición, en primer lugar, del “elemento longitud de arco”, esto es, de la longitud de los caminos diferenciables a trozos en  $\mathbb{H}$ . De este capítulo se derivan también los postulados 3 y 4 de la geometría.

### 3.1. Longitud de caminos en $\mathbb{H}$ .

El objetivo de esta sección es determinar una forma de medir longitudes en  $\mathbb{H}$ . Recordamos la siguiente definición.

**Definición 3.1.** Sea  $\rho : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y sea  $f : [a, b] \rightarrow U$  una curva diferenciable (de clase  $\mathcal{C}^1$  al menos) a trozos. Se define la longitud de la curva  $f$  con respecto a  $\rho$  como

$$\text{long}_\rho f = \int_a^b \rho(f(t)) |f'(t)| dt.$$

Esta longitud es siempre finita por ser  $\rho$  continua y  $f$  diferenciable, definida en un compacto. Además si tenemos  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  derivable entonces se tiene

$$\text{long}_\rho f = \text{long}_\rho (f \circ h).$$

Esto quiere decir, en particular, que la longitud de  $f$  respecto de  $\rho$  no varía si se reparametriza.

Lo que nos interesa en este caso es que esta longitud sea invariante bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Elegimos para ello la función  $\rho : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\rho(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)}.$$

Esta elección no es aleatoria, la razón de ello se explicará más adelante.

**Definición 3.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un camino continuo, diferenciable a trozos. Definimos la *longitud hiperbólica de  $f$*  como

$$\text{long}_{\mathbb{H}}(f) = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt.$$

Observamos que con esta definición, la longitud de cualquier camino  $f$  en  $\mathbb{H}$  es siempre positiva, puesto que  $\text{Im}(f(t)) > 0$  y  $|f'(t)| > 0$ .

A continuación probaremos que, efectivamente, esta definición de longitud hiperbólica es invariante bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Antes de ello vamos a calcular la longitud de un camino sencillo.

**Ejemplo 3.3.** Consideramos el camino  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  dado por  $f(t) = it$  con  $0 < a < b$ , que es el segmento que une los puntos  $ia$  y  $ib$ . Por tanto,  $|f'(t)| = 1$  y la longitud es

$$\text{long}_{\mathbb{H}}(f) = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \log \left| \frac{b}{a} \right| = \log \left( \frac{b}{a} \right).$$

**Teorema 3.4.** Para todo elemento  $\gamma$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  y para todo camino continuo, diferenciable a trozos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , se tiene  $\text{long}_{\mathbb{H}}(f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f)$ .

*Demostración.* Imponiendo la igualdad de las longitudes, tenemos que ha de cumplirse

$$\begin{aligned} \text{long}_{\rho}(f) &= \int_a^b \rho(f(t)) |f'(t)| dt = \int_a^b \rho((\gamma \circ f)(t)) |\gamma'(f(t))| \cdot |f'(t)| dt \\ &= \text{long}_{\rho}(\gamma \circ f). \end{aligned}$$

Esto es equivalente a mostrar que, dado  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  continua y diferenciable a trozos, entonces para todo  $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  se satisface

$$\int_a^b \rho(f(t)) |f'(t)| - \rho((\gamma \circ f)(t)) |(\gamma \circ f)'(t)| dt = 0.$$

Vamos a definir por tanto  $\mu_\gamma^f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\mu_\gamma^f(t) = \rho(f(t)) |f'(t)| - \rho((\gamma \circ f)(t)) |(\gamma \circ f)'(t)|.$$

Esta aplicación depende tanto de  $\gamma$  como de  $f$ .

Vamos a probar que  $\forall \gamma, \varphi \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  se tiene

$$\mu_{\gamma \circ \varphi}^f = \mu_\varphi^f + \mu_\gamma^{\varphi \circ f}. \quad (3.1)$$

Si probamos esto, entonces es suficiente probar que  $\mu_\gamma^f \equiv 0$  para todo elemento  $\gamma$  de un sistema de generadores de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , pues en ese caso tendríamos  $\mu_\gamma^f \equiv 0$  para todo  $\gamma$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , y por tanto la longitud de todo camino en  $\mathbb{H}$  sería invariante por la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

$$\begin{aligned} \mu_\varphi^f(t) + \mu_\gamma^{\varphi \circ f}(t) &= \rho(f(t)) |f'(t)| - (\rho \circ \varphi)(f(t)) |(\varphi \circ f)'(t)| \\ &\quad + \rho((\varphi \circ f)(t)) |(\varphi \circ f)'(t)| - (\rho \circ \gamma)((\varphi \circ f)(t)) |(\gamma \circ \varphi \circ f)'(t)| \\ &= \rho(f(t)) |f'(t)| - (\rho \circ \gamma)((\varphi \circ f)(t)) |(\gamma \circ \varphi \circ f)'(t)| \\ &= \mu_\varphi^f(t) + \mu_\gamma^{\varphi \circ f}(t). \end{aligned}$$

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un camino continuo diferenciable a trozos, podemos expresarlo de la forma  $f(t) = x(t) + iy(t)$ .

Vamos a probar entonces que  $\mu_\gamma^f \equiv 0$  para todo elemento  $\gamma$  del sistema de generadores de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Por la proposición 2.25, los generadores de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  son  $m(z) = az + b$  con  $a > 0$  y  $b \in \mathbb{R}$ ,  $K(z) = \frac{-1}{z}$  y  $B(z) = -\bar{z}$ . Recordamos que  $\rho(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)}$ .

1. Consideramos primero  $m(z) = az + b$ , con  $a > 0$  y  $b \in \mathbb{R}$ . Tenemos  $m \circ f(t) = af(t) + b$  y  $|(m \circ f)'(t)| = a|f'(t)|$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mu_m^f(t) &= \rho(f(t)) |f'(t)| - \rho((m \circ f)(t)) |(m \circ f)'(t)| \\ &= \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)| - \frac{1}{a \text{Im}(f(t))} a |f'(t)| = 0. \end{aligned}$$

2. Para  $K(z) = \frac{-1}{z}$ , tenemos

$$K \circ f(t) = \frac{-1}{x(t) + iy(t)} = \frac{-x(t) + iy(t)}{|f(t)|^2}.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Im}(K \circ f(t)) = \frac{\operatorname{Im}(f(t))}{|f(t)|^2} \quad \text{y} \quad |(K \circ f)'(t)| = \frac{|f'(t)|}{|f(t)|^2},$$

y concluimos que

$$\begin{aligned} \mu_K^f(t) &= \rho(f(t)) |f'(t)| - \rho((K \circ f)(t)) |(K \circ f)'(t)| \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(f(t))} |f'(t)| - \frac{|f(t)|^2}{\operatorname{Im}(f(t))} \frac{|f'(t)|}{|f(t)|^2} = 0. \end{aligned}$$

3. Por último consideramos  $B(z) = -\bar{z}$ .

Tenemos que  $B \circ f(t) = -x(y) + iy(t)$ . Por tanto  $|(B \circ f)'(t)| = |f'(t)|$  y  $\operatorname{Im}(B \circ f)(t) = \operatorname{Im}(f(t))$ , luego

$$\begin{aligned} \mu_B^f(t) &= \rho(f(t)) |f'(t)| - \rho((B \circ f)(t)) |(B \circ f)'(t)| \\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}(f(t))} |f'(t)| - \frac{1}{\operatorname{Im}(f(t))} |f'(t)| = 0. \end{aligned}$$

Los tres generadores de  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ , satisfacen  $\mu_\gamma^f \equiv 0$  para todo camino  $f$ , continuo y diferenciable, luego también verifican  $\operatorname{long}(\gamma \circ f) = \operatorname{long}(f)$ . El teorema queda por tanto demostrado.  $\square$

Para acabar la sección vamos a justificar nuestra elección de  $\rho$ . En la prueba de este teorema, observamos que imponiendo  $\operatorname{long}_{\mathbb{H}}(f) = \operatorname{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f)$ , llegamos a que debe satisfacerse

$$\int_a^b \rho(f(t)) |f'(t)| - \rho((\gamma \circ f)(t)) |(\gamma \circ f)'(t)| dt = 0,$$

para todo camino  $f$  continuo y diferenciable, y todo elemento  $\gamma$  de  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ .

Luego una condición suficiente para que se de la igualdad de longitudes es que satisfaga

$$\rho(f(t)) |f'(t)| - \rho((\gamma \circ f)(t)) |(\gamma \circ f)'(t)| = 0$$

para todo camino  $f$  y todo elemento  $\gamma$  de  $\operatorname{Möb}(\mathbb{H})$ .

Definimos

$$g_{\rho,f}(t) = \int_a^t \rho(f(s)) |f'(s)| - \rho((\gamma \circ f)(s)) |(\gamma \circ f)'(s)| dt$$

Entonces,  $\text{long}_{\mathbb{H}}(f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f)$ , es equivalente a que  $g_{\rho,f}(t) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Aplicando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que

$$g'_{\rho,f}(t) = \rho(f(t)) |f'(t)| - \rho((\gamma \circ f)(t)) |(\gamma \circ f)'(t)| = 0,$$

luego la condición suficiente es también necesaria.

Imponiendo esta condición al elemento  $\gamma(z) = z + b$  de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , con  $b \in \mathbb{R}$ , deducimos que debe satisfacerse

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \rho(f(t)) |f'(t)| - (\rho \circ \gamma)(f(t)) |(\gamma \circ f)'(t)| \\ &= \rho(f(t)) |f'(t)| - (\rho(f(t) + b)) |f'(t)|, \end{aligned}$$

para todo  $f(t) \in \mathbb{H}$  y para todo  $b \in \mathbb{R}$ . Esto es,

$$\rho(z) = \rho(z + b).$$

Concluimos que entonces  $\rho : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  sólo depende de la parte imaginaria  $y$  de  $z = x + iy \in \mathbb{H}$ , que es siempre positiva. Podemos considerar entonces la función real  $r : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $r(y) = \rho(iy)$ . Nótese que  $\rho(z) = r(\text{Im}(z))$  para todo  $z \in \mathbb{H}$ .

Ahora considerando  $\gamma(z) = az$  para  $a > 0$ , deducimos que ha de satisfacerse

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \mu_{\gamma}(f(t)) = \rho(f(t)) |f'(t)| - \rho(\gamma(f(t))) |(\gamma \circ f)'(t)| \\ &= \rho(f(t)) |f'(t)| - \rho(af(t)) a |f'(t)| \end{aligned}$$

para todo  $f(t) \in \mathbb{H}$  y todo  $a > 0$ . Esto es,  $\rho(z) = a\rho(az)$ .

En particular tenemos que  $r(y) = ar(ay)$  para todo  $y > 0$  y todo  $a > 0$ . Intercambiando los papeles de  $y$  y de  $a$ , tenemos que  $r(a) = yr(ay)$ , y por tanto,

$$r(ay) = \frac{1}{y} r(a).$$

Tomando  $a = 1$ , obtenemos  $r(y) = \frac{1}{y} r(1)$ , y  $r$  queda completamente determinada por su valor en 1.

Por tanto tenemos que  $\rho$  tiene que ser de la forma

$$\rho(z) = r(\text{Im}(z)) = \frac{c}{\text{Im}(z)}$$

donde  $c$  es una constante positiva arbitraria.

Con esta definición de  $\rho$ , que depende del parámetro  $c$ , también se cumple que la longitud de todo camino es invariante bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , independientemente del valor de  $c$ . Hemos elegido  $c = 1$  para simplificar los cálculos.

## 3.2. De la longitud a la métrica.

El objetivo de esta sección es dotar a  $\mathbb{H}$  de una estructura de espacio métrico, utilizando para ello la longitud hiperbólica de caminos.

Recordamos la definición de distancia:

**Definición 3.5.** Una *distancia* en un conjunto  $X$  es una función  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface

1.  $d(x, y) \geq 0$  para todos  $x, y \in X$  y  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$ .
2.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todos  $x, y \in X$ .
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todos  $x, y, z \in X$ .

Llamamos a  $(X, d)$  *espacio métrico*.

Vamos ahora a definir una aplicación  $d_{\mathbb{H}}$  en  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  para más adelante mostrar que  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  es un espacio métrico.

Para cada par de puntos  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{H}$ , consideramos la colección  $\Gamma[x, y]$  de caminos  $\mathcal{C}^1$  a trozos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ , con  $f(a) = x$  y  $f(b) = y$ . Observamos que esta colección es no vacía, pues siempre podemos parametrizar el segmento de recta hiperbólica que une  $x$  e  $y$ . Podemos entonces calcular la longitud de todo elemento  $f \in \Gamma[x, y]$ , que es siempre finita.

Se considera la función  $d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  definida

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf\{\text{long}_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\}.$$

Anticipándonos a la prueba del teorema 3.8, llamamos a  $d_{\mathbb{H}}$  como *distancia hiperbólica* entre  $x$  e  $y$ .

Una pregunta que nos podemos ahora plantear, es si para todo  $x, y \in \mathbb{H}$ , existe un camino  $f$  en  $\Gamma[x, y]$  tal que  $\text{long}_{\mathbb{H}}(f) = d_{\mathbb{H}}(x, y)$ . Denominaremos a los espacios que cumplen esta propiedad *espacios métricos de caminos*.

Esta propiedad no se cumple en todo espacio métrico, por ejemplo es conocido que si consideramos  $X = \mathbb{C} - \{0\}$ , y la función en  $X \times X$  donde se toma el ínfimo de las longitudes de caminos, tomando  $\rho = 1$ , como hemos hecho antes con  $\mathbb{H}$ , la métrica que se deriva es la usual en  $\mathbb{C}$ . Entonces se tiene que  $d_X(-1, 1) = 2$  y no existe ningún camino en  $\Gamma[-1, 1]$  tal que su longitud es 2.

Antes de mostrar que  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  es un espacio métrico de caminos, vamos a demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 3.6.** *Para todo elemento  $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  y para cada par de puntos  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{H}$ , se cumple*

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)).$$

*Demostración.* En primer lugar, para todo camino  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  en  $\Gamma[x, y]$  tal que  $f(a) = x$  y  $f(b) = y$ , tenemos que  $\gamma \circ f(a) = \gamma(x)$  y  $\gamma \circ f(b) = \gamma(y)$ , luego  $\{\gamma \circ f \mid f \in \Gamma[x, y]\} \subset \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]$ .

Entonces  $\text{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f)$ , para todo camino  $f$  en  $\Gamma[x, y]$ , puesto que  $\text{long}_{\mathbb{H}}$  es invariante bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Por tanto

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)) &= \inf\{\text{long}_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf\{\text{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} \\ &\leq \inf\{\text{long}_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} = d_{\mathbb{H}}(x, y). \end{aligned}$$

Repitiendo este argumento con  $\gamma^{-1}$ , tenemos  $\{\gamma^{-1} \circ f \mid f \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \subset \Gamma[x, y]$ . Entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(x, y) &= \inf\{\text{long}_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[x, y]\} \\ &\leq \inf\{\text{long}_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1} \circ f) \mid f \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf\{\text{long}_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)). \end{aligned}$$

Concluimos entonces  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$ , como queríamos.  $\square$

Ahora podemos demostrar que  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  es un espacio métrico de caminos. Vamos a dividir este resultado en dos partes.

Primero mostraremos que la distancia hiperbólica entre dos puntos es igual a la longitud del segmento de recta hiperbólica que los une. Una vez demostrado esto, veremos que, de hecho,  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  es un espacio métrico, es decir  $d_{\mathbb{H}}$  satisface las propiedades de la definición 3.5.

**Proposición 3.7.** *Para todos  $x, y \in \mathbb{H}$ ,  $x \neq y$ , se cumple que  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f_0) > 0$ , siendo  $f_0$  una parametrización regular a trozos cualquiera del segmento de recta hiperbólica que une  $x$  e  $y$ .*

*Demostración.* Consideramos  $x, y \in \mathbb{H}$ ,  $x \neq y$ , y sea  $\ell$  la recta hiperbólica que pasa por  $x$  e  $y$ . Por la proposición anterior, la distancia no varía bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , por lo que podemos simplificar el problema, considerando la transformación  $\gamma$  que lleva  $\ell$  al eje imaginario positivo. La existencia de  $\gamma$  esta garantizada por la proposición 2.27.

Sea  $\mu i = \gamma(x)$  y  $\lambda i = \gamma(y)$ , con  $\mu < \lambda$ . Si  $\mu < \lambda$  se considera entonces  $K \circ \gamma$  con  $K = \frac{-1}{z}$ , para obtener  $\mu < \lambda$ .

Sea  $f_0(t)$  dada por  $f_0(t) = it$ , una parametrización del segmento de recta hiperbólica. Si probamos que  $f_0$  es el camino que satisface que su longitud es igual a la distancia hiperbólica entre  $\mu i$  y  $\lambda i$ , entonces, como la longitud es invariante bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ , tendremos que

$$\text{long}_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1} \circ f_0) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f_0).$$

Y como  $d_{\mathbb{H}}$  preserva la distancia hiperbólica podremos concluir que

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1}(\mu i), \gamma^{-1}(\lambda i)) = d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f_0).$$

Luego tendremos que el camino en  $\Gamma[x, y]$  que verifica que su longitud es la distancia entre  $x$  e  $y$  es  $(\gamma^{-1} \circ f_0)$ , que es una parametrización del segmento de recta hiperbólica que une  $x$  e  $y$ .

Sabemos que la longitud de  $f_0$  es  $\log\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ , por el ejemplo 3.3.

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un camino continuo diferenciable a trozos cualquiera en  $\Gamma[\mu i, \lambda i]$ . Vamos a construir otro camino  $g \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$  satisfaciendo  $\text{long}_{\mathbb{H}}(f) \geq \text{long}_{\mathbb{H}}(g)$ . Expresando  $f$  de la forma  $f(t) = x(t) + iy(t)$ , consideramos entonces el camino  $g(t) = iy(t)$ . Observamos que  $\text{Im}(f(t)) =$

$Im(g(t)) = y(t)$  y que  $g \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$ , por tanto

$$\begin{aligned} \text{long}_{\mathbb{H}}(g) &= \int_a^b \frac{1}{Im(g(t))} |g'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{y'(t)^2} dt \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{Im(f(t))} |f'(t)| dt = \text{long}_{\mathbb{H}}(f). \end{aligned}$$

Por tanto hemos demostrado que

$$\text{long}_{\mathbb{H}}(f) \geq \text{long}_{\mathbb{H}}(g). \quad (3.2)$$

Falta entonces solo probar que cualquier camino  $g \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$  de la forma  $g(t) = iy(t)$  verifica

$$\text{long}_{\mathbb{H}}(f_0) \leq \text{long}_{\mathbb{H}}(g). \quad (3.3)$$

Sea entonces  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un camino  $g \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$ , de la forma  $g(t) = iy(t)$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \text{long}_{\mathbb{H}}(g) &= \int_a^b \frac{1}{y(t)} |y'(t)| dt \\ &\geq \left| \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| = \log \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f_0). \end{aligned}$$

Queda probada la desigualdad (3.3).

De todo esto deducimos que para todo camino  $f \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$  se tiene

$$\text{long}_{\mathbb{H}}(f_0) \leq \text{long}_{\mathbb{H}}(f), \quad (3.4)$$

con  $f_0$  una parametrización regular a trozos del segmento de recta hiperbólica  $[\mu i, \lambda i]$ .  $\square$

**Observación 1.** Sean  $f, f_0 \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$ , con  $f_0$  una parametrización regular a trozos del segmento de recta hiperbólica. Expresamos  $f(t) = x(t) + iy(t)$ . Si

tenemos  $\text{long}_{\mathbb{H}}(f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f)$ , de la demostración anterior podemos deducir varios hechos.

De la desigualdad (3.2) deducimos que se da la igualdad de longitudes si y solo si  $x'(t) = 0$  para todo  $t \in [a, b]$ , es decir  $x$  es constante. Como  $f(a) = \mu i$ , entonces  $x(a) = 0$ , y se da la igualdad si y solo si  $x(t) = 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Concluimos entonces que necesariamente la imagen de  $f$  está contenida en el eje imaginario (positivo).

En (3.3) se da la igualdad si y solo si  $y'(t) \leq 0$  para todo  $t \in [a, b]$  o  $y'(t) \geq 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Es decir,  $y$  es siempre creciente o siempre decreciente. Como  $y(a) = \mu < \lambda = y(b)$ , necesariamente  $y$  debe ser creciente.

**Teorema 3.8.**  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  es un espacio métrico de caminos.

*Demostración.* Para que  $d_{\mathbb{H}}$  sea una distancia en  $\mathbb{H}$  debe cumplir las 3 condiciones de la definición 3.5. Vamos a demostrar cada una de ellas.

Hemos demostrado ya, que dados  $x, y \in \mathbb{H}$ , la distancia entre  $x$  e  $y$  es la longitud del segmento de recta hiperbólica que une ambos puntos,  $\ell_{x,y}$ . Esta longitud es siempre no negativa y se cumple además que  $\text{long}_{\mathbb{H}}(\ell_{x,y}) = 0$  si y solo si  $x = y$ . La primera condición de la definición 3.5 queda probada.

Para la condición 2, hacemos primero una observación. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$  un camino de  $\Gamma[x, y]$ . Entonces consideramos la composición  $f \circ h$ , donde  $h$  es la función  $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$  dada por  $h(t) = a + b - t$ . Como  $f \circ h(a) = f(b) = y$  y  $f \circ h(b) = f(a) = x$ , tenemos que  $(f \circ h) \in \Gamma[y, x]$ . Al ser  $h$  una reparametrización, ya hemos demostrado que  $\text{long}_{\mathbb{H}}(f \circ h) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f)$ .

De esto deducimos que todo camino de  $\Gamma[x, y]$  da lugar a un camino en  $\Gamma[y, x]$  de la misma longitud. Usando el mismo razonamiento tenemos también que todo camino de  $\Gamma[y, x]$  da lugar a otro camino, con la misma longitud, en  $\Gamma[x, y]$ .

Por tanto tenemos que los conjuntos

$$\{\text{long}_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} \quad \text{y} \quad \{\text{long}_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[y, x]\}$$

son iguales, luego tienen el mismo ínfimo. Concluimos entonces que  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(y, x)$ , y la condición 2 se verifica.

Por último consideramos  $x, y, z \in \mathbb{H}$ . Sean  $f \in \Gamma[x, y]$  y  $g \in \Gamma[y, z]$  caminos tal que  $\text{long}_{\mathbb{H}}(f) = d_{\mathbb{H}}(x, y)$  y  $\text{long}_{\mathbb{H}}(g) = d_{\mathbb{H}}(y, z)$ , es decir, son parametrizaciones del segmento hiperbólico que une, respectivamente,  $x$  con  $y$ , e  $y$  con  $z$ . Consideramos la concatenación  $h$  de ambos caminos. Tenemos entonces

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) \leq \text{long}_{\mathbb{H}}(h) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f) + \text{long}_{\mathbb{H}}(g) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z),$$

y  $d_{\mathbb{H}}$  satisface la condición 3.

Tenemos entonces que  $d_{\mathbb{H}}$  cumple las tres condiciones de la definición 3.5, por tanto  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  es un espacio métrico. Como además, por la proposición 3.7 tenemos que dados  $x, y \in \mathbb{H}$  existe un camino  $f \in \Gamma[x, y]$  tal que  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f)$ , concluimos que  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$  es un espacio métrico de caminos.  $\square$

**Observación 2.** De la proposición 3.7 y el teorema 3.8 se deduce que dado un punto  $p$  y una distancia  $r$ , la circunferencia hiperbólica de centro  $p$  y radio  $r$  se puede construir escogiendo de cada recta hiperbólica que pasa por  $p$  los dos puntos a distancia  $r$  de  $p$ . Por otra parte, como consecuencia de la proposición 3.6, todo ángulo recto es congruente a un ángulo recto uno de cuyos lados es vertical, ya que dadas dos rectas hiperbólicas que se cortan ortogonalmente en un punto se puede aplicar una transformación de Möb( $\mathbb{H}$ ) que transforme una de ellas en el eje imaginario positivo  $I$ , y esta transformación es una isometría. Y es fácil comprobar utilizando inversiones en circunferencias, que dos ángulos rectos con uno de sus lados en el eje vertical son congruentes.

Por tanto, el modelo del plano hiperbólico satisface también los postulados 3 y 4 de Euclides.

Terminamos esta sección explicando la razón por la cual llamamos a  $\overline{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{H}$  la frontera en el infinito de  $\mathbb{H}$ . Dados  $z \in \mathbb{H}$  y  $w \in \overline{\mathbb{R}}$ , la proposición 1.17 asegura que existe una única recta hiperbólica  $\ell$ , que pasa por  $z$  y tiene a  $w$  en su frontera en el infinito. También existe un elemento  $\gamma$  en Möb( $\mathbb{H}$ ) tal que  $\gamma(\ell)$  es el eje imaginario positivo. Pongamos  $\gamma(z) = i\mu$ , y  $\gamma(w)$  debe ser o  $0$  o  $\infty$ .

Como la distancia es invariante bajo la acción de Möb( $\mathbb{H}$ ), tenemos que

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), \gamma(w)) = d_{\mathbb{H}}(i\mu, \gamma(w)).$$

Si  $\gamma(w) = 0$ , entonces parametrizando el rayo hiperbólico  $(0, \mu i]$  por  $f : (0, \mu i] \rightarrow \mathbb{H}$  dado por  $f(t) = it$  tenemos que

$$d_{\mathbb{H}}(w, z) = d_{\mathbb{H}}(0, i\mu) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^\mu \frac{1}{t} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \log \left( \frac{\mu}{a} \right) = \infty.$$

Si tenemos  $\gamma(w) = \infty$ , parametrizamos el rayo  $[\mu i, \infty)$  por  $f : [\mu i, \infty) \rightarrow \mathbb{H}$  dado por  $f(t) = it$  y obtenemos que

$$d_{\mathbb{H}}(w, z) = d_{\mathbb{H}}(i\mu, \infty) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_\mu^a \frac{1}{t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \log \left( \frac{a}{\mu} \right) = \infty.$$

Esto quiere decir que los puntos de  $\overline{\mathbb{R}}$  se encuentran infinitamente lejos de todos los puntos de  $\mathbb{H}$  en términos de la distancia hiperbólica.

### 3.3. Fórmula para la distancia hiperbólica.

En esta sección nos dedicaremos a derivar una fórmula para hallar la distancia hiperbólica de dos puntos cualesquiera de  $\mathbb{H}$ .

La prueba del teorema 3.8 nos proporciona un método para calcular la distancia hiperbólica entre dos puntos  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ , construyendo una aplicación  $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $\gamma(z_1) = \mu i$  y  $\gamma(z_2) = \lambda i$  con  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces tendremos que

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i) = \left| \log \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \right|$$

Entonces sean  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$  dos puntos de  $\mathbb{H}$ . Suponemos  $x_1 \neq x_2$ , ya que en el caso  $x_1 = x_2$  sabemos calcular su distancia hiperbólica, que sería  $\left| \log \left( \frac{y_2}{y_1} \right) \right|$ .

Sean  $c$  y  $r$  el centro y radio, respectivamente, de la circunferencia euclídea que contiene la recta hiperbólica que pasa por  $z_1$  y  $z_2$ . Suponemos  $x_1 > x_2$  y sea  $\theta_k$  el argumento de  $z_k$  tomado en  $[0, \pi)$  (medido desde el eje  $\mathbb{R}$  y en el sentido inverso de las agujas del reloj).

El segmento de recta hiperbólica entre  $z_1$  y  $z_2$  se puede parametrizar como  $f : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $f(t) = c + re^{it}$ . Tenemos  $\text{Im}(f) = r \sin(t)$  y  $|f'(t)| = r$ , por tanto la distancia entre  $z_1$  y  $z_2$  es

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin(t)} dt = \log \left| \frac{\csc(\theta_2) - \cot(\theta_2)}{\csc(\theta_1) - \cot(\theta_1)} \right|$$

Ahora vamos a reescribir esta última expresión en términos de  $z_1, z_2, r$  y  $c$ . Como  $\theta_k$  es el ángulo del triángulo recto con lado opuesto  $y_k$  y lado adyacente  $x_k - c$  e hipotenusa  $r$ . Por tanto

$$\csc(\theta_k) = \frac{r}{y_k} \quad \cot(\theta_k) = \frac{x_k - c}{y_k}$$

y obtenemos la fórmula para la distancia

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \log \left| \frac{(x_1 - c - r)y_2}{(x_2 - c - r)y_1} \right|.$$

En el caso  $x_1 < x_2$  obtenemos la fórmula

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \log \left| \frac{(x_2 - c - r)y_1}{(x_1 - c - r)y_2} \right|$$

que difiere de  $\left| \frac{(x_1 - c - r)y_2}{(x_2 - c - r)y_1} \right|$  por un factor de  $-1$ .

Luego la fórmula general de la distancia hiperbólica entre dos puntos  $z_k = x_k + iy_k$  de  $\mathbb{H}$  es

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \left| \log \left| \frac{(x_1 - c - r)y_2}{(x_2 - c - r)y_1} \right| \right|.$$

Es posible expresar  $c$  y  $r$  en términos de  $x_k$  y  $y_k$ , pero la expresión que se obtendría no se simplifica mucho, por lo que nos conformamos con esta fórmula.

Terminamos esta sección con una proposición relativa a la transitividad de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  sobre pares de puntos de  $\mathbb{H}$ .

**Proposición 3.9.** *Dados dos pares de puntos distintos  $(z_1, z_2)$  y  $(w_1, w_2)$  de  $\mathbb{H}$ , existe un elemento  $q \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  satisfaciendo  $q(z_k) = w_k$  para  $k = 1, 2$  si y solo si  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2)$ .*

*Demostración.* Si existe dicho  $q$ , entonces como la distancia hiperbólica es invariante bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  se tiene

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(q(z_1), q(z_2)) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2).$$

Para la otra implicación, suponemos que tenemos  $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = d$ . Existe un elemento  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $m(z_1) = i$  y  $m(z_2) = e^d i$ . De igual manera que existe  $n \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $n(w_1) = i$  y  $n(w_2) = e^d i$ . Tenemos entonces  $m(z_1) = n(w_1) = i$  y  $m(z_2) = n(w_2) = e^d i$  y concluimos que la transformación  $q = n^{-1} \circ m$  lleva  $z_k$  en  $w_k$  para  $k = 1, 2$ . □

Vamos ahora a poner unos ejemplos de cálculo de distancias hiperbólicas entre dos puntos.

**Ejemplo 3.10.** Consideramos los puntos  $i$  y  $1 + 2i$ . Tenemos que calcular el centro y radio de la circunferencia euclídea que los contiene.

La mediatriz del segmento  $[i, 1 + 2i]$  tiene ecuación  $y = -x + 2$ , luego el centro  $c$  de la circunferencia será el corte de la mediatriz con el eje  $\mathbb{R}$ , que es  $c = 2$ . El radio es  $\sqrt{5}$ .

Aplicando la fórmula, tenemos

$$d_{\mathbb{H}}(i, 1 + 2i) = \left| \log \left| \frac{(-2 - \sqrt{5})2}{(1 - 2 - \sqrt{5})} \right| \right| = \log \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

**Ejemplo 3.11.** Consideramos  $1 + 5i, -6 + 2i$ . La mediatriz del segmento que forman ambos puntos tiene ecuación  $y = -\frac{7}{3}x - \frac{7}{3}$ . Luego la circunferencia euclídea que los contiene tiene centro  $c = -1$  y radio  $r = \sqrt{29}$ . Entonces

$$d_{\mathbb{H}}(1 + 5i, -6 + 2i) = \left| \log \left| \frac{(1 + 1 - \sqrt{29})2}{(-6 + 1 - \sqrt{29})5} \right| \right| = \log \left( \frac{39 + 7\sqrt{29}}{10} \right).$$

### 3.4. Isometrías

En general una isometría en un espacio métrico  $(X, d)$  es un homeomorfismo  $f$  en  $X$  que preserva distancia. Es decir, dados  $x, y \in X$  se verifica

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Para todo espacio métrico  $(X, d)$ , el conjunto de las isometrías de  $X$ ,  $\text{Isom}(X)$ , es, de hecho, un grupo, dado que la identidad preserva distancias, así como la inversa de un homeomorfismo que preserva distancias, como la composición.

**Definición 3.12.** Una *isometría hiperbólica* es una isometría en el espacio métrico  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ . Denotamos al conjunto de isometrías hiperbólicas como  $\text{Isom}(\mathbb{H})$ .

Antes de determinar el grupo  $\text{Isom}(\mathbb{H})$ , comenzaremos por unos resultados previos.

**Proposición 3.13.** Sean  $x, y, z$  puntos distintos de  $\mathbb{H}$ . Entonces se verifica

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z)$$

si y solo si  $y$  está contenido en el segmento de recta hiperbólica que une  $x$  y  $z$ .

*Demostración.* Existe un elemento  $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$  tal que  $m(x) = i$  y  $m(z) = \alpha i$ , con  $\alpha > 1$ . Entonces  $\log(\alpha) = d_{\mathbb{H}}(i, \alpha i) = d_{\mathbb{H}}(x, z)$ .

Sea  $m(y) = a + bi$ , hay dos casos por considerar.

Si  $a = 0$ , entonces podemos calcular fácilmente las distancias

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = \log(\alpha), \quad d_{\mathbb{H}}(x, y) = \log(b), \quad d_{\mathbb{H}}(y, z) = \log \left| \frac{\alpha}{b} \right|$$

Si  $\alpha \geq b$ , entonces  $y$  pertenece al segmento de recta hiperbólica determinado por  $x$  y  $z$ . Además

$$d_{\mathbb{H}}(y, z) = \log(\alpha) - \log(b) = d_{\mathbb{H}}(x, z) - d_{\mathbb{H}}(x, y),$$

luego se da la igualdad.

Si  $b > \alpha$ , entonces  $y$  ya no pertenece al segmento, y tenemos

$$d_{\mathbb{H}}(y, z) = \log(b) - \log(\alpha) = d_{\mathbb{H}}(x, y) - d_{\mathbb{H}}(x, z) > 0.$$

Luego

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, y) - d_{\mathbb{H}}(y, z) < d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

En el caso en el que  $a \neq 0$ , consideramos  $f$  la concatenación del segmento hiperbólico  $f_1$ , que une  $x$  con  $y$ , y el segmento  $f_2$ , que une  $y$  con  $z$ . Entonces, como la imagen de  $f$  no está contenida en el eje imaginario, por la observación 1, se tiene

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) < \text{long}_{\mathbb{H}}(f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(f_1) + \text{long}_{\mathbb{H}}(f_2) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

Por tanto, el único caso en el que se cumple  $d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z)$ , es cuando  $y$  pertenece al segmento de recta hiperbólica que une  $x$  y  $z$ .  $\square$

**Proposición 3.14.** *Si  $f \in \text{Isom}(\mathbb{H})$ , entonces  $f$  lleva rectas hiperbólicas en rectas hiperbólicas.*

*Demostración.* Sean  $x$  y  $z$  dos puntos distintos de  $\mathbb{H}$  y sea  $\ell$  la única recta hiperbólica que pasa por ambos. Sea  $y \in \mathbb{H}$  un punto que pertenece al segmento de recta hiperbólica,  $\ell_{x,z}$  que une  $x$  y  $z$ . Por la proposición anterior tenemos que

$$d_{\mathbb{H}}(x, z) = d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z).$$

Como  $f$  es una isometría, preserva la distancia hiperbólica, luego

$$d_{\mathbb{H}}(f(x), f(z)) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) + d_{\mathbb{H}}(f(y), f(z)),$$

y por tanto tenemos que  $f(y)$  pertenece al segmento de recta hiperbólica que une  $f(x)$  y  $f(z)$ .

Podemos entonces concluir que  $f(\ell_{x,z}) = \ell_{f(x),f(z)}$ . Y por tanto la imagen de una recta hiperbólica por una isometría hiperbólica es de nuevo una recta hiperbólica.  $\square$

Para el siguiente corolario necesitamos un resultado que no vamos a probar, ya que alargaría bastante este trabajo, y es el siguiente:

**Proposición 3.15.** *Toda circunferencia hiperbólica en  $\mathbb{H}$  es una circunferencia euclídea (generalmente de distinto centro y radio).*

Una demostración de este resultado, basada en el estudio de las reflexiones con respecto a circunferencias, puede encontrarse en el capítulo 5 de [5].

**Corolario 3.16.** *Sean  $p, q \in \mathbb{H}$ ,  $p \neq q$ . Entonces el bisector perpendicular de  $p$  y  $q$ , definido como  $\{z \in \mathbb{H} : d_{\mathbb{H}}(p, z) = d_{\mathbb{H}}(q, z)\}$ , es una recta hiperbólica.*

*Demostración.* Mediante una transformación de Möb( $\mathbb{H}$ ) se puede suponer  $p, q \in I$ ,  $p = ai$  y  $q = bi$ , con  $a < b$ . Sea  $r = \sqrt{ab}$  y sea  $z_0 = ri$ . Se tiene

$$d_{\mathbb{H}}(p, z_0) = d_{\mathbb{H}}(ai, ri) = \log\left(\frac{r}{a}\right) = \log\left(\frac{b}{r}\right) = d_{\mathbb{H}}(ri, bi) = d_{\mathbb{H}}(q, z_0).$$

Sea  $\ell$  la recta hiperbólica contenida en la circunferencia euclídea de centro 0 radio  $r$ . Se considera la *reflexión con respecto a  $\ell$* , definida por

$$C_{\ell}(z) = \frac{r^2}{\bar{z}} = \frac{r^2 z}{|z|^2},$$

que es un elemento de Möb( $\mathbb{H}$ ).

Si  $z \in \ell$ , entonces  $C_{\ell}(z) = r^2 \frac{z}{r^2} = z$ . Por tanto  $C_{\ell}$  fija todos los puntos de  $\ell$ . Además intercambia  $p$  y  $q$ ,

$$C_{\ell}(p) = \frac{r^2 ai}{a^2} = \frac{r^2}{a} i = \frac{ab}{a} i = q.$$

Concluimos que  $d_{\mathbb{H}}(z, p) = d_{\mathbb{H}}(C_{\ell}(z), C_{\ell}(p)) = d_{\mathbb{H}}(z, q)$ , es decir, todos los puntos de  $\ell$  pertenecen al bisector perpendicular de  $p$  y  $q$ . Falta por tanto demostrar que dado  $w \in \mathbb{H}$  tal que  $d_{\mathbb{H}}(w, p) = d_{\mathbb{H}}(w, q)$ , entonces  $w \in \ell$ .

Sea  $\ell'$  la recta hiperbólica contenida en  $\mathbb{S}^1(0, |w|)$ , y sea  $z_1$  la intersección de  $\ell'$  con el eje imaginario  $I$ . Veamos que  $z_1 = z_0$ .

Supongamos que  $|w| \neq |p|$ . Si no es así, será necesariamente  $|w| \neq |q|$ , en cuyo caso se razona de manera análoga.

Sea  $\tilde{q} = C_{\ell'}(p)$ . Como  $p \notin \ell'$ , entonces  $p \neq \tilde{q}$ . Al igual que antes se tiene que

$$d_{\mathbb{H}}(p, w) = d_{\mathbb{H}}(\tilde{q}, w).$$

Por hipótesis tenemos que  $d_{\mathbb{H}}(q, w) = d_{\mathbb{H}}(p, w)$ .

Ahora bien,  $p, q, \tilde{q}$  son tres puntos en el eje imaginario positivo  $I$  que pertenecen a la misma circunferencia hiperbólica  $A$ , de centro  $w$  y radio hiperbólico  $d = d_{\mathbb{H}}(p, w)$ . Por la proposición 3.15,  $A$  es una circunferencia euclídea. Por tanto, en la intersección  $A \cap I$  solo puede haber dos puntos. Tenemos que  $p \neq q$  y  $p \neq \tilde{q}$ , luego ha de ser  $q = \tilde{q}$ . Por tanto  $z_0 = z_1$  y concluimos que  $\ell = \ell'$ , luego  $w \in \ell$ .  $\square$

**Teorema 3.17.**  $Isom(\mathbb{H}) = Möb(\mathbb{H})$ .

*Demostración.* Por la proposición 3.6, sabemos ya que  $Möb(\mathbb{H}) \subset Isom(\mathbb{H})$ . Por tanto queda por demostrar la inclusión contraria.

Sea  $f \in Isom(\mathbb{H})$ . Sean  $x, y$  dos puntos en el eje imaginario positivo  $I$ , y sea  $H$  uno de los semiplanos de  $\mathbb{H}$  determinados por  $I$ . Es decir,  $H = \{z \in \mathbb{H} : Re(z) > 0\}$  o bien  $H = \{z \in \mathbb{H} : Re(z) < 0\}$ . Por la proposición 3.9, puesto que  $d_{\mathbb{H}}(x, y) = d_{\mathbb{H}}(f(x), f(y))$ , sabemos que existe  $\gamma \in Möb(\mathbb{H})$  satisfaciendo  $\gamma(f(x)) = x$  y  $\gamma(f(y)) = y$ .

Entonces  $\gamma \circ f$  fija  $x$  e  $y$ , y como tanto  $f$  como  $\gamma$  llevan rectas hiperbólicas en rectas hiperbólicas,  $\gamma \circ f$  fija también  $I$ . Si fuera necesario escogemos  $B \circ \gamma$ , con  $B(z) = -\bar{z}$  para que deje fijo también  $H$ .

Si  $z$  es un punto de  $I$ ,  $z$  queda unívocamente determinado por  $d_{\mathbb{H}}(x, z)$  y  $d_{\mathbb{H}}(y, z)$ . Tenemos pues que  $\gamma \circ f$  fija todo punto  $z$  de  $I$ , puesto que  $\gamma$  y  $f$  preservan ambas distancias hiperbólicas.

Sea  $w \notin I$ . Sea  $r = |w|$  y sea  $\ell$  la recta hiperbólica que está contenida en la circunferencia euclídea  $\mathbb{S}^1(0, r)$ . Sea  $z_0$  la intersección de  $\ell$  con el eje imaginario  $I$ . Escogiendo  $p = ai$  y  $q = bi$ , con  $a < r$ ,  $b > r$  y  $ab = r^2$ , tenemos que  $\ell$  es el bisector perpendicular de  $p$  y  $q$ , por el corolario 3.16. Es decir  $d_{\mathbb{H}}(p, w) = d_{\mathbb{H}}(q, w)$  para todo  $w \in \ell$ .

Por tanto, si  $z \in \ell$ , como la distancia es invariante bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  y  $\gamma \circ f$  fija todo punto de  $I$ ,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(z), p) &= d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(z), \gamma \circ f(p)) = d_{\mathbb{H}}(z, p) \\ &= d_{\mathbb{H}}(z, q) = d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(z), \gamma \circ f(q)) = d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(z), q) \end{aligned}$$

luego tenemos que necesariamente  $\gamma \circ f(z) \in \ell$ . Es decir,  $\gamma \circ f$  fija  $\ell$ .

Tenemos que

$$d_{\mathbb{H}}(w, z_0) = d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(w), \gamma \circ f(z_0)) = d_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f(w), z_0),$$

como  $\gamma \circ f$  fija ambos semiplanos hiperbólicos determinados por  $I$ , necesariamente  $\gamma \circ f$  debe fijar  $w$ . Luego deja fijo todo punto de  $\mathbb{H}$ , y  $f = \gamma^{-1} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ . □

### 3.5. Rectas paralelas y ultraparalelas

Al igual que hemos definido la distancia hiperbólica de puntos de  $\mathbb{H}$ , podemos definir la distancia hiperbólica entre conjuntos de  $\mathbb{H}$ , de la forma habitual:

**Definición 3.18.** Sean  $X, Y \subset \mathbb{H}$ , definimos la *distancia hiperbólica entre  $X$  e  $Y$*  como

$$d_{\mathbb{H}}(X, Y) = \inf\{d_{\mathbb{H}}(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Recordemos que hay dos tipos de rectas hiperbólicas paralelas; las que las circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$  que las contienen son disjuntas (rectas hiperbólicas ultraparalelas), y las que no. Ahora que podemos medir distancias en  $\mathbb{H}$  vamos a diferenciar de manera intrínseca los dos tipos de rectas hiperbólicas paralelas.

**Proposición 3.19.** Sean  $\ell_0, \ell_1$  dos rectas paralelas que no son ultraparalelas. Entonces  $d_{\mathbb{H}}(\ell_0, \ell_1) = 0$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ , el punto en el infinito que comparten  $\ell_0$  y  $\ell_1$ . Sean  $y_k$  los otros puntos en el infinito de  $\ell_k$ , para  $k = 0, 1$ .

Como  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  actúa transitivamente en las ternas de  $\overline{\mathbb{R}}$ , por la proposición 2.28, podemos suponer que  $x = \infty$ ,  $y_0 = 0$  y  $y_1 = 1$ .

Los puntos de  $\ell_0$  tienen la forma  $\lambda i$  para  $\lambda > 0$ , y los de  $\ell_1$  tienen la forma  $1 + \lambda i$  para  $\lambda > 0$ .

Consideramos el camino  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  dado por  $f(t) = t + \lambda i$ , que parametriza el segmento euclídeo horizontal que une  $\lambda i$  con  $1 + \lambda i$ . Tenemos entonces

$$d_{\mathbb{H}}(\ell_0, \ell_1) \leq d_{\mathbb{H}}(\lambda i, 1 + \lambda i) \leq d_{\mathbb{H}}(f) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} dt = \frac{1}{\lambda}$$

para todo  $\lambda > 0$ .

Si ahora tomamos el límite cuando  $\lambda$  tiende a infinito, observamos que  $d_{\mathbb{H}}(\ell_0, \ell_1) = 0$ , como queríamos.  $\square$

Hemos demostrado que, dadas dos rectas hiperbólicas paralelas  $\ell_0, \ell_1$ , que no son ultraparalelas, entonces  $d_{\mathbb{H}}(\ell_0, \ell_1) = 0$ . En la geometría euclídea la distancia entre dos rectas paralelas distintas es siempre positiva. Veamos ahora que si las rectas hiperbólicas son ultraparalelas entonces esto sí que se cumple.

Antes de ello enunciamos un resultado, cuya demostración no incluiremos debido a sus engorrosas cuentas.

**Proposición 3.20.** *Sean  $\ell$  una recta hiperbólica y  $w$  un punto exterior a  $\ell$ . Entonces existe un único punto  $z \in \ell$  tal que el segmento de recta hiperbólica determinado por  $z$  y  $w$  es perpendicular a  $\ell$ . Además se verifica*

$$d_{\mathbb{H}}(w, \ell) = d_{\mathbb{H}}(w, z).$$

**Proposición 3.21.** *Sean  $\ell_0, \ell_1$  dos rectas hiperbólicas ultraparalelas. Entonces  $d_{\mathbb{H}}(\ell_0, \ell_1) > 0$ .*

*Demostración.* Podemos suponer de nuevo que la frontera en el infinito de  $\ell_0$  son los puntos  $0$  y  $\infty$ , y la de  $\ell_1$  son los puntos  $1$  y  $x > 1$ .

Sea  $C_r$  la recta hiperbólica contenida en la circunferencia euclídea de centro  $0$  y radio  $r$ , para cada  $r > 0$ . Cada  $C_r$  es perpendicular a  $\ell_0$ , y  $C_r$  corta a  $\ell_1$  si y solo si  $1 < r < x$ . En este caso, el punto de intersección de  $C_r$  con  $\ell_1$  puede expresarse de la forma  $re^{i\theta}$  con  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Vamos a determinar  $\theta$ , atendiendo al triángulo euclídeo de la figura 3.1.

Los vértices del triángulo son  $0, re^{i\theta}$  y el centro de la circunferencia euclídea que contiene a  $\ell_1$ , que es  $(x + 1)/2$ .

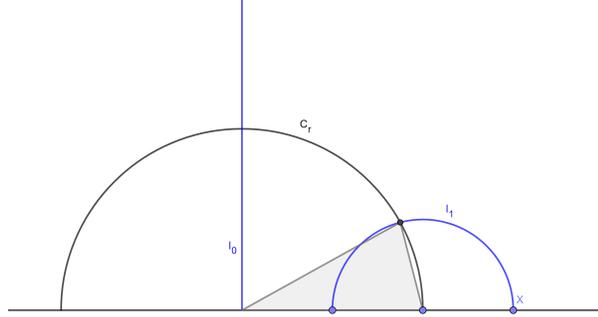


Figura 3.1: Triángulo euclídeo de vértices  $0$ ,  $re^{i\theta}$  y  $(x+1)/2$ .

Aplicando la ley del coseno a este triángulo, obtenemos tras unos sencillos cálculos

$$\cos(\theta) = \frac{r^2 + x}{r(x+1)}.$$

Por lo tanto tenemos que

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{(r^2-1)(x^2-r^2)}}{r(x+1)^2}.$$

La distancia hiperbólica entre  $ri$  y  $re^{i\theta}$  para este valor de  $\theta$  es

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(ri, re^{i\theta}) &= \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(t)} dt = -\log |\csc(\theta) - \cot(\theta)| \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{(r+1)(x+r)}{(r-1)(x-r)} \right| \end{aligned}$$

Como  $C_r$  es perpendicular a  $l_0$ , tenemos por la proposición 3.20 que

$$d_{\mathbb{H}}(re^{i\theta}, ri) = d_{\mathbb{H}}(re^{i\theta}, l_0).$$

Por tanto la distancia hiperbólica entre  $l_0$  y  $l_1$  es la mínima distancia entre  $l_0$  y  $re^{i\theta}$  cuando  $r$  varía en  $(1, x)$ .

$$\frac{d}{dr} \log \left( \frac{(r+1)(x+r)}{(r-1)(x-r)} \right) = \frac{2(r^2-x)(x+1)}{(r^2-1)(x^2-r^2)}$$

Esta derivada se anula únicamente en  $r = \sqrt{x}$ . Concluimos que

$$d_{\mathbb{H}}(\ell_0, \ell_1) = \log \left( \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right),$$

es positiva por ser  $x > 1$ .

□



# Capítulo 4

## Otros modelos de geometría hiperbólica.

En este capítulo se cierra el trabajo haciendo una muy breve incursión en cómo se pueden derivar del modelo estudiado otros modelos de geometría hiperbólica. En concreto se define el modelo del disco de Poincaré, y se describe una distancia en el mismo, mediante la conversión de una transformación entre el disco y el plano hiperbólico en una isometría. Se menciona cómo esta idea se puede generalizar a otros difeomorfismos entre el plano hiperbólico y subespacios de  $\mathbb{C}$ .

### 4.1. El disco de Poincaré.

Hay otros modelos de geometría hiperbólica. Quizás uno de los más útiles es el disco de Poincaré,  $\mathbb{D}$ .

El espacio subyacente a este modelo es el disco unidad

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Para construir dicho modelo tenemos dos opciones. Podemos seguir un proceso análogo al seguido para construir el modelo del semiplano superior  $\mathbb{H}$ , o buscar la manera de trasladar todos los conocimientos que ya tenemos de  $\mathbb{H}$  a nuestro nuevo espacio  $\mathbb{D}$ . Seguiremos este segundo camino.

Tenemos que tanto  $\mathbb{D}$  como  $\mathbb{H}$  son discos de  $\overline{\mathbb{C}}$ , luego por la proposición 2.10, existe un elemento  $m$  perteneciente a Möb tal que  $m(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ . Usaremos este elemento  $m$  para trasladar la geometría hiperbólica a  $\mathbb{D}$ .

**Definición 4.1.** Una recta hiperbólica en  $\mathbb{D}$  es la contraimagen por  $m$  de una recta hiperbólica en  $\mathbb{H}$ .

Recordamos que las rectas hiperbólicas de  $\mathbb{H}$  están contenidas en circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$  perpendiculares a  $\mathbb{R}$ . Como  $m$  pertenece a Möb,  $m$  es una transformación conforme que lleva circunferencias en circunferencias. Por tanto deducimos que las rectas hiperbólicas en  $\mathbb{D}$  son las intersecciones con  $\mathbb{D}$  de las circunferencias de  $\overline{\mathbb{C}}$  perpendiculares a  $\mathbb{S}^1$ . Luego el conjunto de rectas hiperbólicas de  $\mathbb{D}$  no depende de la elección de  $m$ .

Al igual que hicimos en  $\mathbb{H}$ , ahora podemos determinar las transformaciones de  $\mathbb{D}$  que preservan el conjunto de rectas hiperbólicas de  $\mathbb{D}$ . Denotaremos al grupo de dichas transformaciones  $\text{Möb}(\mathbb{D})$ .

Sea  $m$  cualquier transformación del grupo Möb tal que  $m(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ . Entonces tenemos que un elemento  $p$  de Möb preserva  $\mathbb{D}$  si y solo si  $p \circ m^{-1}(\mathbb{H}) = \mathbb{D} = m^{-1}(\mathbb{H})$ , que es equivalente a  $q = m \circ p \circ m^{-1}(\mathbb{H})$ , esto es,  $q \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ . Luego todo elemento  $p$  de  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  tiene la forma  $p = m^{-1} \circ q \circ m$ , donde  $q \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ . Por tanto,  $\text{Möb}(\mathbb{D})$  hereda todas las propiedades de transitividad de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ .

Vamos ahora a derivar una forma de medir longitudes de caminos en  $\mathbb{D}$  a partir de la longitud hiperbólica  $\text{long}_{\mathbb{H}}$ . Primero fijaremos el elemento de Möb,  $\xi$ , que lleva  $\mathbb{D}$  en  $\mathbb{H}$ . Vamos a considerar

$$\xi(z) = \frac{iz + 1}{-z - i}.$$

**Definición 4.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  un camino en  $\mathbb{D}$ , continuo y diferenciable a trozos. La *longitud hiperbólica de  $f$  en  $\mathbb{D}$*  se define como

$$\text{long}_{\mathbb{D}}(f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(\xi \circ f).$$

**Proposición 4.3.** La longitud de un camino en  $\mathbb{D}$  no depende de la elección de  $\xi$ .

*Demostración.* Sea  $m$  otro elemento de Möb tal que  $m(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ . Tenemos entonces que  $m \circ \xi^{-1}$  pertenece al grupo  $\text{Möb}(\mathbb{H})$ . Como  $\text{long}_{\mathbb{H}}$  es invariante bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{H})$  concluimos que

$$\text{long}_{\mathbb{D}}(f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(\xi \circ f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(m \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(m \circ f).$$

Por tanto, la longitud de caminos en  $\mathbb{D}$  es invariante a la elección del elemento  $\xi$ .  $\square$

**Teorema 4.4.** *La longitud hiperbólica de un camino continuo, diferenciable a trozos,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{D}$  es*

$$\text{long}_{\mathbb{D}}(f) = \int_a^b \frac{2}{1 - |f(t)|^2} |f'(t)| dt.$$

*Demostración.* Unos sencillos cálculos nos proporcionan las siguientes igualdades

$$\text{Im}(\xi \circ f(t)) = \frac{1 - |f(t)|^2}{|-f(t) - i|^2} \quad \text{y} \quad |(\xi \circ f)'(t)| = \frac{2|f'(t)|}{|f(t) + i|^2}.$$

Por tanto, aplicando la fórmula para la longitud hiperbólica en  $\mathbb{H}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \text{long}_{\mathbb{D}}(f) &= \text{long}_{\mathbb{H}}(\xi \circ f) = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(\xi \circ f(t))} |(\xi \circ f)'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{|-f(t) - i|^2}{1 - |f(t)|^2} \frac{2|f'(t)|}{|f(t) + i|^2} dt \\ &= \int_a^b \frac{2}{1 - |f(t)|^2} |f'(t)| dt, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Definimos la distancia hiperbólica en  $\mathbb{D}$  de manera análoga a como se definió en el capítulo 3.

**Definición 4.5.** Dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{D}$ , la *distancia hiperbólica* entre  $x$  e  $y$  es

$$d_{\mathbb{D}}(x, y) = \inf \{ \text{long}_{\mathbb{D}}(f) : f \in \Gamma[x, y] \}.$$

Con esta definición se deduce fácilmente que para cualquier  $m \in \text{Möb}$  tal que  $m(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ ,  $m$  es una isometría entre  $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$  y  $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ . Por lo tanto las propiedades métricas de  $\mathbb{H}$  se transportan por  $m^{-1}$  a  $\mathbb{D}$ , y tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 4.6.**  $(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}})$  es un espacio métrico de caminos. Su grupo de isometrías es  $\text{Isom}(\mathbb{D}, d_{\mathbb{D}}) = \text{Möb}(\mathbb{D})$ . Además, dados  $x, y \in \mathbb{D}$ , el camino en  $\mathbb{D}$ ,  $f$ , que verifica  $d_{\mathbb{D}}(x, y) = \text{long}_{\mathbb{D}}(f)$ , es una parametrización del segmento de recta hiperbólica que une  $x$  e  $y$ .

## 68CAPÍTULO 4. OTROS MODELOS DE GEOMETRÍA HIPERBÓLICA.

Antes hemos mencionado que este modelo para la geometría hiperbólica era de los modelos más útiles. Esto es principalmente porque en este modelo existe una relación directa entre la distancia euclídea y la distancia hiperbólica, al contrario que en  $\mathbb{H}$ , donde esta relación no se puede expresar de manera sencilla.

No vamos a incluir la demostración, que se encuentra en el capítulo 4 de [1], pero diremos que esta construcción se basa en el hecho de que la transformación  $\varphi : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi(x, y) = \frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}$$

es invariante bajo la acción de  $\text{Möb}(\mathbb{D})$ .

Podemos, a partir de esto, mostrar que dados  $x, y \in \mathbb{D}$  se verifica

$$d_{\mathbb{D}}(x, y) = \text{arcosh} \left( \frac{2d(x, y)^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} + 1 \right),$$

donde  $d(x, y)$  es la distancia euclídea entre  $x$  e  $y$ .

En particular, de aquí se deduce que toda circunferencia euclídea es una circunferencia hiperbólica, resultado que mencionamos anteriormente en este trabajo (proposición 3.15).

### 4.2. Una construcción general.

Finalizaremos este trabajo dando un procedimiento general para la construcción de otros modelos de geometría hiperbólica, basado en nuestra construcción del disco de Poincaré.

Sea  $X$  un abierto de  $\mathbb{C}$  que es difeomorfo a  $\mathbb{H}$ , esto es, que existe un homeomorfismo  $\xi : X \rightarrow \mathbb{H}$  tal que  $\xi$  y su inversa son continuas. Los subconjuntos de  $\mathbb{C}$  que son difeomorfos a  $\mathbb{H}$  son los abiertos de  $\mathbb{C}$  conexos y simplemente conexos, distintos de  $\mathbb{C}$ .

Entonces podemos trasladar a  $X$ , mediante  $\xi$ , la geometría hiperbólica, de la misma manera que lo hicimos con  $\mathbb{D}$ :

Las rectas hiperbólicas serán las contraímagenes por  $\xi$  de rectas hiperbólicas en  $\mathbb{H}$ , las longitudes de caminos en  $X$  se definen como

$$\text{long}_X(f) = \text{long}_{\mathbb{H}}(\xi \circ f).$$

Definimos también la distancia hiperbólica en  $X$  entre  $x, y$ ,  $d_X$  como el ínfimo de las longitudes de caminos en  $X$  que unen  $x$  e  $y$ .

También se verifica que  $(X, d_X)$  es un espacio métrico de caminos. Además, los caminos en  $\Gamma[x, y]$  que satisfacen que su longitud es igual a la distancia hiperbólica en  $X$  entre  $x$  e  $y$ , son las parametrizaciones del segmento de recta hiperbólica entre  $x$  e  $y$ . Y su grupo de isometrías es

$$\text{Isom}(X) = \{\xi^{-1} \circ m \circ \xi : m \in \text{Möb}(\mathbb{H})\}.$$

Toda esta estructura que hemos construido en  $X$ , el conjunto de rectas hiperbólicas, la longitud de caminos, la distancia y el conjunto de isometrías, es independiente de la elección del homeomorfismo  $\xi$ , siempre y cuando tanto  $\xi$  como su inversa sean homeomorfismos.

Para terminar, pondremos un ejemplo de otro modelo de geometría hiperbólica.

**Ejemplo 4.7.** Tomamos  $X = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0 \text{ y } \text{Im}(z) > 0\}$  y el homeomorfismo holomorfo  $\xi : X \rightarrow \mathbb{H}$  dado por  $\xi(z) = z^2$ .

Las rectas hiperbólicas en  $X$  son de dos formas: Si son contraímagenes por  $\xi$  de rectas hiperbólicas en  $\mathbb{H}$  contenidas en rectas euclídeas, son de la forma

$$\{w = u + iv \in X : u^2 - v^2 = c\},$$

con  $c \in \mathbb{R}$ . Si provienen de rectas hiperbólicas en  $\mathbb{H}$  contenidas en circunferencias euclídeas, son de la forma

$$\{w = u + iv \in C : (u^2 + v^2)^2 - 2c(u^2 - v^2) + c^2 = r^2\},$$

con  $r > 0$ ,  $c, r \in \mathbb{R}$ .

La longitud de un camino  $f : [a, b] \rightarrow X$  resulta

$$\text{long}_X(f) = \int_a^b \frac{|f(t)|}{\text{Re}(f(t))\text{Im}(f(t))} |f'(t)| dt.$$

Y, de nuevo, todo esto es independiente de la elección de  $\xi$ .



# Bibliografía

- [1] James W. Anderson *Hyperbolic geometry*. Second edition. Springer Undergraduate Mathematics Series. UK (2005)
- [2] Gareth A. Jones and David Singerman, *Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint*. Lectures in Mathematics, University of Southampton. Cambridge University Press, UK (1987).
- [3] Munkres, James R., *Topology*. Pearson Modern Classics. Pearson , UK (2014).
- [4] R. B. Ash, W. P. Novinger, *Complex Variables*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, (2007).
- [5] S. Stahl, *Gateway to Modern Geometry: The Poincare Half-Plane*. Jones and Bartlett, (2007).