Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Matemáticas

Regularidad de Castelnuovo-Mumford e ideales iniciales genéricos

Autor: Rodrigo San José Rubio
Tutor: Philippe Gimenez

Resumen

La regularidad de Castelnuovo-Mumford de un ideal homogéneo es una medida importante de la complejidad del ideal. Mide, en particular, lo difícil que será construir una resolución libre minimal graduada del ideal ya que proporciona una cota superior para el grado de sus sizigias en cada paso de una resolución libre minimal graduada. En este trabajo presentaremos un método efectivo para el cálculo de la regularidad sin pasar por la construcción de una resolución. Este método se basa en varios trabajos de Bermejo y Gimenez que hicieron efectivos los resultados clásicos de Bayer y Stillman. Primero estudiaremos las resoluciones libres y la información que podemos obtener a partir de ellas. A continuación se estudiarán las propiedades de los ideales iniciales genéricos y también de los ideales monomiales de tipo encajado, así como los resultados que nos dan su relación con la regularidad de Castelnuovo-Mumford y otros invariantes del ideal. Finalmente, haremos mención a algunas cotas para la regularidad, en particular la conjetura de Eisenbud-Goto, que ha sido resuelta en negativo recientemente.

Índice

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar un método efectivo para el cálculo de la regularidad de Castelnuovo-Mumford de un ideal homogéneo en el anillo de polinomios sin construir una resolución. Este método se basa principalmente en el trabajo de Bermejo y Gimenez [4], que hizo efectivos los resultados clásicos de Bayer y Stillman [2]. Antes de poder llegar a estos resultados tenemos que estudiar las resoluciones libres, para lo cual utilizaremos principalmente [1], [8] y [10]. Por otro lado, para el estudio previo a los resultados de Bayer y Stillman sobre los ideales iniciales genéricos, utilizaremos, además de [10], la referencia [13]. También hacemos una breve mención a las cotas para la regularidad, utilizando sobre todo la referencia [17] y haciendo especial hincapié en la conjetura de Eisenbud-Goto, que ha quedado abierta durante 35 años (se ha resuelto en negativo en 2018) y ha dado lugar a multitud de trabajos relevantes.

La regularidad de Castelnuovo-Mumford de un ideal homogéneo es una medida importante de la complejidad del ideal. Mide, en particular, lo difícil que será construir una resolución libre minimal graduada del ideal, ya que proporciona una cota superior para el grado de sus sizigias en cada paso de dicha resolución. Otro invariante que mide la complejidad del ideal es la dimensión proyectiva, que mide la longitud de una resolución libre minimal graduada. Sin embargo, para la dimensión proyectiva tenemos una cota razonable dada por el Teorema de las Sizigias de Hilbert, y para la regularidad las cotas generales son mucho peores. Esto es lo que ha hecho que la regularidad sea un objeto de estudio interesante y que incentive la búsqueda de cotas, además de métodos para calcularla.

En la sección 2 estudiamos las resoluciones libres de módulos, que son la base teórica de todo lo que haremos posteriormente. También presentamos los resultados que nos permiten obtener una resolución libre mediante cálculos de bases de Gröbner. Por otro lado, introducimos los diagramas de Betti y las definiciones de distintos invariantes que serán centrales en este trabajo. Finalmente, estudiamos la función de Hilbert de un módulo graduado y vemos como obtenerla a partir de una resolución libre graduada.
La sección 3 está dedicada al estudio del ideal inicial genérico. Primero demostramos la existencia de este ideal (asociado a otro ideal I) y luego estudiamos algunas de sus propiedades generales. Posteriormente vemos la relación de este ideal con distintos invariantes de I (en particular, la regularidad) cuando utilizamos el orden lexicográfico inverso graduado a través de los resultados de Bayer y Stillman en [2].
En la sección 4 presentamos otro tipo de ideal genérico asociado a un ideal I, que llamaremos ideal monomial de tipo encajado asociado a I. Vemos que para este tipo de ideal, es sencillo calcular la regularidad, y como también observamos que la regularidad de este ideal coincide con la de I, entonces obtenemos un método efectivo para calcular la regularidad de I que ha sido implementado en distintos programas especializados como [9] o [12].
Finalmente, en la sección 5 mencionamos algunas cotas para la regularidad. En particular enunciamos la conjetura de Eisenbud-Goto que ha sido resuelta en negativo recientemente. Vemos algunos contraejemplos de la conjetura y mencionamos las posibilidades que quedan después de demostrarse que la conjetura es falsa.

Notación

A lo largo de la memoria introduciremos notación específica, que se explicará en cada caso, pero hay parte de la notación que será común a toda la memoria y que vemos a continuación:

- k denotará un cuerpo arbitrario. En ocasiones utilizaremos hipótesis sobre la característica del cuerpo, que serán mencionadas en caso de haberlas.
- R denotará un anillo conmutativo, unitario y *noetheriano*. En muchos casos, sobre todo en las secciones 3 y 4, trabajaremos en el anillo de polinomios en $n+1$ variables $R = k[x_0, \ldots, x_n]$.
- I denotará un ideal arbitrario de R. En el contexto de módulos graduados, I debe ser homogéneo, aunque se mencionará explícitamente. En particular, en las secciones 3, 4 y 5 tendremos que I es un ideal homogéneo.
- M denotará un R-módulo arbitrario. En muchos casos será finitamente generado, pero se dirá explícitamente. También se supondrá que es graduado a partir del momento en que se defina lo que es un R-módulo graduado.
- El ideal $\mathfrak{m}$ denotará el ideal homogéneo maximal $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_n) \subset k[x_0, \ldots, x_n]$. Denotaremos con las letras $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ a los ideales primos y primarios, respectivamente.

2. Resoluciones libres

En esta sección introduciremos los conceptos básicos relacionados con las resoluciones libres que vamos a necesitar en partes posteriores. En toda la sección supondremos que R es un anillo noetheriano y M un R-módulo. Como referencia, utilizamos principalmente [8], que trabaja en el anillo de polinomios, y [1] y [10] para dar definiciones y resultados en anillos más generales que el anillo de polinomios.

2.1. Resoluciones de módulos

A la hora de tratar la teoría de módulos nos encontramos con que sus propiedades pueden ser descritas habitualmente mediante sucesiones exactas, de manera que vamos a recordar algunas definiciones y resultados que nos van a ser útiles más adelante.

Definición 2.1. Consideramos una sucesión de R-módulos y homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

(a) Decimos que la sucesión es *exacta* en M_i si $\mathrm{Im}(\varphi_{i+1}) = \ker(\varphi_i)$.

(b) La sucesión completa se dice que es *exacta* si lo es en cada M_i que no esté al principio o al final de la sucesión.

Como ejemplo de propiedades sencillas que podemos expresar de esta manera tenemos:

- $\varphi : M \to N$ es sobreyectiva si y solo si la sucesión

  $$M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$$

  es exacta.

- $\varphi : M \to N$ es inyectiva si y solo si la sucesión

  $$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$$

  es exacta.

- $\varphi : M \to N$ es un isomorfismo si y solo si la sucesión

  $$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$$

  es exacta.

Si tenemos un homomorfismo de R-módulos obtenemos de manera directa la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow \mathrm{coker}(\varphi) \longrightarrow 0,$$

donde $\ker(\varphi) \to M$ es la aplicación inclusión y $N \to \operatorname{coker}(\varphi) = N/\operatorname{Im}(\varphi)$ es el homomorfismo de paso al cociente.

En particular, si tenemos $Q \subset P$ un submódulo de un R-módulo P, entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow P \xrightarrow{\nu} P/Q \longrightarrow 0,$$

donde $Q \to P$ es la aplicación inclusión y ν es el homomorfismo de paso al cociente.

Un resultado que utilizaremos de manera habitual es el siguiente, que expresa la elección de elementos de un R-módulo en términos de homomorfismos:

Proposición 2.2 ([8, Chapter 6, Prop. 1.3])**.** *Sea M un R-módulo.*

(a) *Elegir un elemento de M es equivalente a elegir un homomorfismo $R \to M$.*

(b) *Elegir t elementos de M es equivalente a elegir un homomorfismo $R^t \to M$.*

(c) *Si M es finitamente generado, elegir un conjunto de t generadores de M es equivalente a elegir un homomorfismo $R^t \to M$ sobreyectivo (equivalentemente, una sucesión exacta $R^t \to M \to 0$).*

(d) *Si M es libre y de rango finito (tiene una base con un número finito de elementos), elegir una base con t elementos es equivalente a elegir un isomorfismo $R^t \to M$.*

Demostración. Para ver la parte (a), basta darse cuenta de que el homomorfismo $\varphi : R \to M$ queda determinado por su valor $\varphi(1)$. Luego elegir un elemento f del módulo M es lo mismo que elegir el homomorfismo de R-módulos que satisface $\varphi(1) = f$.
De manera análoga, si pensamos en R^t como un espacio formado por vectores columna y denotamos su base estándar por $e_1, \ldots, e_t$, entonces elegir t elementos $f_1, \ldots, f_t$ de M corresponde a elegir el homomorfismo de R-módulos $\varphi : R^t \to M$ definido por $\varphi(e_i) = f_i$, para $i = 1, \ldots, t$. La imagen de φ es el submódulo $\langle f_1, \ldots, f_t\rangle \subset M$. Por tanto, elegir un conjunto de t generadores de M corresponde a elegir un homomorfismo de R-módulos $R^t \to M$ sobreyectivo. La última parte es evidente a partir de la definición de base y lo anterior. $\square$

Por la proposición anterior, si M es finitamente generado y $f_1, \ldots, f_t$ son un sistema de generadores de M, entonces nos dan un homomorfismo sobreyectivo $\varphi : R^t \to M$, o, equivalentemente, una sucesión exacta

$$R^t \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0.$$

Llamaremos *primer módulo de sizigias* al núcleo del homomorfismo φ anterior. La notación que utilizaremos será

$$\operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_t) = \ker(\varphi).$$

Observamos que el primer módulo de sizigias depende de la elección del sistema de generadores, por eso los ponemos explícitamente en la notación. Por otro lado, en general, este módulo no tiene por qué ser finitamente generado aunque M lo sea. Sin embargo, como hemos supuesto que R es noetheriano, tenemos que el primer módulo de sizigias (y, posteriormente, el resto) es finitamente generado por ser un submódulo de R^t (que es noetheriano por serlo R). Este es el principal motivo por el que hemos supuesto que R es noetheriano desde el principio.

Definición 2.3. Sea M un módulo finitamente generado. Una *presentación finita* de M es un conjunto de generadores $f_1, \ldots, f_t$, junto con un conjunto de generadores del primer módulo de sizigias $\mathrm{Syz}(f_1, \ldots, f_t)$.

Por el apartado (c) de la proposición 2.2, elegir un conjunto de s generadores del primer módulo de sizigias corresponde a elegir un homomorfismo sobreyectivo $\psi : R^s \to \mathrm{Syz}(f_1, \ldots, f_t) = \ker(\varphi)$ (siguiendo con la notación anterior). Puesto que es sobreyectivo, $\mathrm{Im}(\psi) = \ker(\varphi)$, que es la condición para que la siguiente sucesión sea exacta en R^t

$$R^s \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Esta sucesión exacta es otra manera de ver una presentación de un módulo. De hecho, en muchos casos se llama presentación de un módulo a la sucesión anterior.

De la teoría de módulos se obtiene que para trabajar con un R-módulo M en general no basta con conocer los generadores $f_1, \ldots, f_t$, sino que hay que conocer también las relaciones $\mathrm{Syz}(f_1, \ldots, f_t)$ que satisfacen. Sin embargo, $\mathrm{Syz}(f_1, \ldots, f_t)$ es un R-módulo a su vez, de manera que necesitamos conocer, además de sus generadores $g_1, \ldots, g_s$, el conjunto de relaciones $\mathrm{Syz}(g_1, \ldots, g_s)$ entre esos generadores, que se conoce como segundas sizigias de M.

Por los comentarios previos, la elección de un sistema de generadores $h_1, \ldots, h_r$ para $\mathrm{Syz}(g_1, \ldots, g_s)$ extiende la sucesión exacta (2.1) a

$$R^r \xrightarrow{\lambda} R^s \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0,$$

donde la imagen de $\lambda : R^r \to R^s$ es igual al núcleo de ψ (el segundo módulo de sizigias). Continuando de la misma manera, escogiendo generadores de los módulos de sizigias cada vez más altos, podemos extender la sucesión exacta. Este proceso iterativo nos lleva a las siguientes definiciones.

Definición 2.4. Sea M un R-módulo. Una *resolución* por la izquierda (o simplemente, resolución) de M es una sucesión exacta (posiblemente infinita) de R-módulos

$$\cdots \longrightarrow E_2 \xrightarrow{\varphi_2} E_1 \xrightarrow{\varphi_1} E_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0\ .$$

En nuestro caso, nos van a interesar las *resoluciones libres*, que son resoluciones

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

donde, para todo i, $F_i \cong R^{r_i}$ es un R-módulo libre de rango finito. Si hay un l tal que $F_{l+1} = F_{l+2} = \cdots = 0$, pero $F_l \neq 0$, entonces decimos que la resolución es *finita*, de *longitud* l. En este caso, escribiremos la resolución como

$$0 \longrightarrow F_l \xrightarrow{\varphi_l} F_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} F_{l-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0 \ .$$

Por tanto, siguiendo esta terminología, lo que hemos demostrado antes es la existencia de una resolución libre del R-módulo M mediante la consideración de los módulos de sizigias.

2.2. Aspectos computacionales

Un caso de especial interés, en el cual además nos vamos a centrar posteriormente en esta memoria, es cuando R es un anillo de polinomios y M un submódulo de un módulo libre sobre R. En esta situación, la construcción de una resolución libre puede realizarse de manera explícita mediante la teoría de bases de Gröbner. Empezando primero por el caso de un ideal $I = \langle f_1, \ldots, f_t \rangle$ de R, al construir una base de Gröbner de I, $\{g_1, \ldots, g_s\}$, mediante el algoritmo de Buchberger se obtiene además un sistema de generadores del primer módulo de sizigias $\mathrm{Syz}(g_1, \ldots, g_s)$ a partir de las expresiones de los S-polinomios. Además, se puede obtener $\mathrm{Syz}(f_1, \ldots, f_t)$ fácilmente una vez se ha calculado $\mathrm{Syz}(g_1, \ldots, g_s)$. Cuando se extiende la teoría de bases de Gröbner al caso de módulos (en el capítulo 5 de [8]) se encuentra que el algoritmo de Buchberger se mantiene ([8, Chapter 5, Thm. 2.11]) y los resultados anteriores relativos al primer módulo de sizigias también, por lo que ahora los enunciaremos en este contexto más general y justificamos las aseveraciones que hemos hecho en el caso de un ideal.

Para ello, fijado un orden monomial en R^m (en [8, Chapter 5, Def. 2.4] se ve como se extienden los órdenes monomiales de R a R^m), y dados f, $g \in R^m$, definimos el *S-vector* (en analogía con el *S-polinomio*) de f y g, denotado por $S(f, g)$, como el siguiente elemento de R^m:

$$S(f,g) = \frac{m}{\mathrm{LT}(f)} f - \frac{m}{\mathrm{LT}(g)} g,$$

donde m es el mínimo común múltiplo (ver comentario previo a [8, Chapter 5, Prop. 2.3] para la definición) de $\mathrm{LT}(f)$ e $\mathrm{LT}(g)$ ($\mathrm{LT}(f)$ es el término inicial de f para el orden elegido, ver [8]).

El criterio de Buchberger en el caso de módulos ([8, Chapter 5, Thm. 2.9]) nos dice que en el caso de que $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ sea una base de Gröbner los S-vectores $S(g_i, g_j)$ tienen resto 0 para todo i, j al dividir por $\mathcal{G}$. Esto significa que tenemos una expresión

$$S(g_i, g_j) = \sum_{k=1}^{s} a_{ijk} g_k,$$

donde $a_{ijk} \in R$, y $\mathrm{LT}(a_{ijk} g_k) \leq \mathrm{LT}(S(g_i, g_j))$, para todo i, j, k. Sean $e_1, \ldots, e_s$ los vectores de la base estándar de R^s. Sea m_{ij} el mínimo común múltiplo de $\mathrm{LT}(g_i)$ e $\mathrm{LT}(g_j)$, y sea $a_{ij} \in R^s$ el vector columna

$$a_{ij} = a_{ij1} e_1 + a_{ij2} e_2 + \cdots + a_{ijs} e_s \in R^s.$$

Para las parejas (i, j) tales que $m_{ij} \neq 0$, definimos $s_{ij} \in R^s$ como

$$s_{ij} = \frac{m_{ij}}{\mathrm{LT}(g_i)} e_i - \frac{m_{ij}}{\mathrm{LT}(g_j)} e_j - a_{ij}, \tag{2.2}$$

y $s_{ij} = 0$ en cualquier otro caso. Entonces ya tenemos el primer resultado que buscábamos:

Teorema 2.5. *Sea $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una base de Gröbner de un submódulo $M \subset R^m$ con respecto a un cierto orden monomial. Entonces $\{s_{ij}, 1 \leq i, j \leq s\}$ definidos como en (2.2) generan* $\mathrm{Syz}(g_1, \ldots, g_s)$ *como R-módulo.*

La versión del teorema anterior para ideales se encuentra en [8, Chapter 5, Thm. 3.2], pero esta versión se deduce fácilmente a partir del teorema 2.10 que enunciaremos más adelante.

Falta ver el caso en el que queremos calcular $\mathrm{Syz}(f_1, \ldots, f_t)$ pero $\{f_1, \ldots, f_t\}$ no es una base de Gröbner del módulo $N = \langle f_1, \ldots, f_t \rangle$. En este caso, consideramos una base de Gröbner de N, $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$, y denotamos por $F = (f_1, \ldots, f_t)$ y $G = (g_1, \ldots, g_s)$ a las matrices $m \times t$ y $m \times s$ cuyas columnas son los f_i y los g_i, respectivamente. Puesto que las columnas de F y G generan el mismo módulo, existe una matriz A de dimensiones $t \times s$ y una matriz B de dimensiones $s \times t$, ambas con entradas en R, tales que $G = FA$ y $F = GB$. La matriz B se puede calcular aplicando el algoritmo de división con respecto a $\mathcal{G}$, expresando cada f_i en términos de los g_j. La matriz A se puede calcular a partir de las expresiones de los S-polinomios en términos de los f_i, aunque en casos sencillos se puede calcular de manera ad hoc.

Ejemplo 2.6. Sea $I = \langle f_1, f_2 \rangle \subset R = k[x, y]$ el ideal generado por $f_1 = xy + x$ y $f_2 = y^2 + 1$. Utilizando el orden lexicográfico con $x > y$, la base de Gröbner reducida de I consiste en $g_1 = x$, $g_2 = y^2 + 1$. Obviamente tenemos que $f_2 = g_2$, y es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} f_1 &= (y+1) g_1, \\ g_1 &= -(1/2)(y-1) f_1 + (1/2) x f_2. \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$G = (g_1, g_2) = (f_1, f_2) \begin{pmatrix} -(y-1)/2 & 0 \\ x/2 & 1 \end{pmatrix} = FA.$$

Por otro lado, también tenemos

$$F = (f_1, f_2) = (g_1, g_2) \begin{pmatrix} y+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = GB.$$

Utilizando las matrices que acabamos de ver ya podemos enunciar el resultado que nos falta:

Proposición 2.7 ([8, Chapter 5, Prop 3.8])**.** *Sea $F = (f_1, \ldots, f_t)$ una t-upla ordenada de elementos de R^m, y sea $G = (g_1, \ldots, g_s)$ una base de Gröbner ordenada para $M = \langle F \rangle$ con respecto a un orden monomial arbitrario en R^m. Sean A y B las matrices introducidas en el comentario anterior, y sean s_{ij}, $1 \leq i, j \leq s$, los generadores de Syz$(g_1, \ldots, g_s)$ definidos en (2.2). Finalmente, sean $S_1, \ldots, S_t$ las columnas de la matriz $I_t - AB$ de dimensiones $t \times t$. Entonces*

$$\mathrm{Syz}(f_1, \ldots, f_t) = \langle As_{ij}, S_1, \ldots, S_t \rangle.$$

Ahora que sabemos calcular el primer módulo de sizigias (y también el segundo, el tercero,...), vemos que podemos construir una resolución, calculando en cada paso una base de Gröbner de un módulo de sizigias para obtener el siguiente.

Ejemplo 2.8. Volvemos sobre el ejemplo 2.6. Para hallar el primer módulo de sizigias de $\{g_1, g_2\}$ lo primero que tenemos que hacer es hallar los s_{ij}. Para ello, calculamos el S-polinomio de g_1 y g_2, que al reducirse a 0 por $\{g_1, g_2\}$ debe poder expresarse como combinación de g_1 y g_2:

$$S(g_1, g_2) = y^2 g_1 - x g_2 = -x = -g_1.$$

Por el teorema 2.5, tenemos que $s_{12} = (y^2 + 1)e_1 - xe_2$ genera $\mathrm{Syz}(g_1, g_2)$. Para hallar $\mathrm{Syz}(f_1, f_2)$ tenemos que utiliza las matrices A y B que ya hemos calculado. Multiplicando el generador s_{12} por la matriz A obtenemos

$$As_{12} = \begin{pmatrix} -(y-1)/2 & 0 \\ x/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2+1 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y^3 - y^2 + y - 1)/2 \\ (xy^2 - x)/2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$I_2 - AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -(y-1)/2 & 0 \\ x/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y^2+1)/2 & 0 \\ -(xy+x)/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las columnas de la matriz que hemos obtenido de esta manera son $S_1 = \frac{1}{2}(y^2+1)e_1 - \frac{1}{2}(xy+x)e_2$ y $S_2 = 0$. Por la proposición 2.7 resulta que $\mathrm{Syz}(f_1, f_2) = \langle As_{12}, S_1, S_2 \rangle$. Puesto que $S_2 = 0$ y $As_{12} = -(y-1)S_1$, finalmente obtenemos $\mathrm{Syz}(f_1, f_2) = \langle (y^2+1)e_1 - (xy+x)e_2 \rangle$. Podemos comprobar estos resultados utilizando Singular [9] de la siguiente manera:

```
> option(redSB);
> ring r=0,(x,y),lp;
> poly f1=xy+x; poly f2=y2+1;
> ideal I=f1,f2;
> ideal J=std(I); J;
J[1]=y2+1
J[2]=x
> ideal G=J[2],J[1]; //Cambio de orden para que coincida con el del ejemplo
> syz(G);
_[1]=x*gen(2)-y2*gen(1)-gen(1)
> syz(I);
_[1]=xy*gen(2)+x*gen(2)-y2*gen(1)-gen(1)
```

Ejemplo 2.9. Consideramos el ideal $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle \subset k[x, y, z] = R$, con $f_1 = x^2$, $f_2 = xy$, $f_3 = xz$ y $f_4 = y^3$. Entonces tenemos un morfismo sobreyectivo

$$R^4 \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0$$

definido por $\varphi_0(e_i) = f_i, i = 1, \ldots, 4$. Como se trata de un ideal monomial, es trivial ver que los generadores que hemos dado forman una base de Gröbner del ideal I para cualquier orden monomial. Por tanto, por el teorema 2.5 podemos hallar un sistema de generadores del primer módulo de sizigias sin más que considerar los s_{ij} de (2.2), lo que nos lleva a los 6 generadores siguientes:

$$M = \mathrm{Syz}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \langle xe_2 - ye_1, ye_3 - ze_2, xe_3 - ze_1, xe_4 - y^2e_2, xze_4 - y^3e_3, x^2e_4 - y^3e_1\rangle, \tag{2.3}$$

siendo $e_i, i = 1, \ldots, 4$, los vectores de la base estándar de R^4. Ahora consideramos el siguiente orden monomial en este módulo que extendemos a partir del orden lexicográfico: $x^\alpha e_i < x^\beta e_j$ si $i < j$ o si $i = j$ y $x^\alpha <_{Lex} x^\beta$. Puesto que $xze_4 - y^3e_3 = -y^2(ye_3 - ze_2) + z(xe_4 - y^2e_2)$ y $x^2e_4 - y^3e_1 = y^2(xe_2 - ye_1) + x(xe_4 - y^2e_2)$, y sus términos iniciales son múltiplos del de $xe_4 - y^2e_2$, podemos quitarlos de los generadores a la hora de calcular la base de Gröbner reducida. El resto de S-vectores se reducen a 0 por los 4 primeros generadores, así que se tiene que

$$M = \mathrm{Syz}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \langle xe_2 - ye_1, ye_3 - ze_2, xe_3 - ze_1, xe_4 - y^2e_2\rangle, \tag{2.4}$$

formando estos generadores, que llamaremos g_i, $1 \leq i \leq 4$, la base de Gröbner reducida de M para este orden. Esto se puede comprobar con [9] de la siguiente manera:

```
> option(redSB);
> ring r=0,(x,y,z), (C,lp);
> vector s1=[-y,x,0,0]; vector s2=[0,-z,y,0]; vector s3=[-z,0,x,0];
> vector s4=[0,-y2,0,x]; vector s5=[0,0,-y3,xz]; vector s6=[-y3,0,0,x2];
> module N=s1,s2,s3,s4,s5,s6;
> print(N);
-y,0, -z,0,  0,  -y3,
x, -z,0, -y2,0,  0,
0, y, x, 0,  -y3,0,
0, 0, 0, x,  xz, x2
> std(N);
_[1]=x*gen(2)-y*gen(1)
_[2]=y*gen(3)-z*gen(2)
_[3]=x*gen(3)-z*gen(1)
_[4]=x*gen(4)-y2*gen(2)
```

Como tenemos, de nuevo, una base de Gröbner, podemos calcular fácilmente los generadores del segundo módulo de sizigias. En (2.4) tenemos los monomios ya ordenados de mayor a menor para el orden elegido, por lo que vemos que el único S-vector no nulo será $S(g_2, g_3)$, que nos da el generador del segundo módulo de sizigias:

$$N = \mathrm{Syz}(g_1, g_2, g_3, g_4) = \langle yu_3 - xu_2 - zu_1\rangle,$$

donde $u_i, i = 1, \ldots, 4$, son los vectores de la base estándar de R^4 de nuevo, pero los denotamos de manera distinta porque se trata de copias distintas de R^4. Por tanto, vamos a escoger a los g_i como generadores del primer módulo de sizigias porque nos permiten hacer los cálculos de manera sencilla, y esta elección nos da el siguiente morfismo sobreyectivo

$$R^4 \xrightarrow{\varphi_1} \mathrm{Syz}(f_1, f_2, f_3, f_4) \longrightarrow 0$$

definido por $\varphi_1(u_i) = g_i, i = 1, \ldots, 4$. Finalmente, puesto que N es un módulo generado por un único elemento tenemos el siguiente morfismo sobreyectivo:

$$R \xrightarrow{\varphi_2} \operatorname{Syz}(g_1, g_2, g_3, g_4) \longrightarrow 0$$

definido por $\varphi_2(1) = yu_3 - xu_2 - zu_1 = h_1$. De hecho, puesto que N es un módulo libre por estar generado por un único elemento, tenemos que φ_2 es también inyectiva, por lo que es un isomorfismo. Así que podemos extender la sucesión exacta anterior añadiendo un 0 a la izquierda. Juntando las sucesiones exactas que tenemos, obtenemos

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi_2} R^4 \xrightarrow{\varphi_1} R^4 \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0.$$

Por tanto, hemos construido una resolución libre finita de I.

El proceso que acabamos de mostrar es muy costoso computacionalmente ya que requiere el cálculo de muchas bases de Gröbner (aunque en el ejemplo concreto que hemos dado las hemos obtenido sin esfuerzo adicional), y tampoco tenemos garantías de que este proceso acabe; es decir, no sabemos si la resolución a la que llegaremos es finita. Sin embargo, un resultado debido a Schreyer nos define un orden monomial que garantiza que al calcular una base de Gröbner de un submódulo de R^m, $\{g_1, \ldots, g_s\}$, se obtiene no solo un sistema de generadores de $\operatorname{Syz}(g_1, \ldots, g_s)$, sino una base de Gröbner de este módulo respecto al orden definido por Schreyer.

Teorema 2.10 (Schreyer, [8, Chapter 5, Thm. 3.3]). *Sea $\mathcal{G} \subset R^m$ una base de Gröbner con respecto a un orden monomial arbitrario $>$ en R^m. Los s_{ij} definidos como en (2.2) forman una base de Gröbner del módulo de sizigias $\operatorname{Syz}(g_1, \ldots, g_s)$ con respecto a un orden monomial $>_\mathcal{G}$ en R^s definido como sigue: $x^\alpha e_i >_\mathcal{G} x^\beta e_j$ si $\operatorname{LT}_>(x^\alpha g_i) > \operatorname{LT}_>(x^\beta g_j)$ en R^m, o si $\operatorname{LT}_>(x^\alpha g_i) = \operatorname{LT}_>(x^\beta g_j)$ (salvo un escalar) e $i < j$. Además, para $i < j$ se tiene que $\operatorname{LT}_{>_\mathcal{G}}(s_{ij}) = \frac{m_{ij}}{\operatorname{LT}_>(g_i)} \epsilon_i$.*

Este resultado nos permite construir una resolución de manera análoga a la que hemos mencionado antes, pero con el cálculo de una única base de Gröbner $\mathcal{G}$, ya que una vez tengamos $\mathcal{G}$, obtenemos automáticamente una base de Gröbner para el orden de Schreyer del primer módulo de sizigias, y entonces con esta nueva base de Gröbner podemos obtener una base de Gröbner del siguiente módulo de sizigias, y continuar de esta manera. A partir de la demostración de este resultado se puede extraer el siguiente lema:

Lema 2.11 ([8, Chapter 6, Lem. 2.2]). *Sea $\mathcal{G}$ una base de Gröbner de un submódulo $M \subset R^t$ con respecto a un orden monomial arbitrario, y organizamos los elementos de $\mathcal{G}$ para que formen una s-upla $G = (g_1, \ldots, g_s)$ de manera que siempre que $\operatorname{LT}(g_i)$ e $\operatorname{LT}(g_j)$ contengan el mismo vector de la base estándar e_k e $i < j$, entonces $\operatorname{LT}(g_i)/e_k >_{lex} \operatorname{LT}(g_j)/e_k$, donde $>_{lex}$ es el orden lexicográfico en R con $x_0 > \cdots > x_n$. Si las variables $x_0, \ldots, x_m$ no aparecen en los términos iniciales de $\mathcal{G}$, entonces $x_0, \ldots, x_{m+1}$ no aparecen en los términos iniciales de los $s_{ij} \in \operatorname{Syz}(G)$ con respecto al orden $>_\mathcal{G}$ definido en el Teorema de Schreyer 2.10.*

Utilizando este lema se obtiene una demostración constructiva del Teorema de las Sizigias de Hilbert, ya que organizando los elementos de la base de Gröbner de la manera que indica el lema, nos aseguramos de ir reduciendo en cada paso a un módulo de sizigias superior el número de variables que están en los términos iniciales en, al menos, una unidad. Por lo que en un número de pasos menor o igual al número de variables tenemos que haber acabado.

Teorema 2.12 (Teorema de las Sizigias de Hilbert, [8, Chapter 6, Thm. 2.1])**.** *Sea* $R = k[x_0, \ldots, x_n]$*. Entonces cualquier* R*-módulo finitamente generado tiene una resolución libre finita de longitud a lo sumo* $n+1$*.*

Entonces vemos que el resultado de Schreyer no solo nos disminuye el coste computacional de la construcción de la resolución, sino que además nos asegura que el proceso acaba.

2.3. Resoluciones graduadas

En el contexto de este trabajo es habitual utilizar las resoluciones libres para estudiar ideales homogéneos de un anillo de polinomios. En este caso, tenemos una estructura adicional que viene dada por la *graduación* del anillo. Es por ello que vamos a introducir a continuación los conceptos de anillo graduado, módulo graduado y resolución graduada.

Definición 2.13. Un *anillo graduado* es un anillo R junto con una familia $\{R_t : t \in \mathbb{Z}\}$ de subgrupos del grupo aditivo R tales que $R = \oplus_{t\in\mathbb{Z}} R_t$ y $R_t R_s \subset R_{t+s}$ para todo $t, s \in \mathbb{Z}$. Por tanto, R_0 es un subanillo de R, y cada R_t es un R_0-módulo.

Ejemplo 2.14. El ejemplo más habitual es el del anillo de polinomios $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ con su graduación estándar. En este caso R_t es el conjunto de los polinomios homogéneos de grado t. Además, esta graduación se limita a los enteros no negativos, por lo que $R = \oplus_{n=0}^{\infty} R_n$.

Definición 2.15. Si R es un anillo graduado, un *R-módulo graduado* es un R-módulo M junto con una familia $\{M_t : t \in \mathbb{Z}\}$ de subgrupos de M tales que $M = \oplus_{t\in\mathbb{Z}} M_t$ y $R_s M_t \subset M_{t+s}$ para todo $t, s \in \mathbb{Z}$. Por tanto, cada M_t es un R_0-módulo. Un elemento x de M es *homogéneo* si $x \in M_t$ para algún t (y se dice que es de *grado* t). Cualquier elemento $x \in M$ se puede escribir de manera única como una suma finita $\sum_t x_t$, donde $x_t \in M_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, y todos menos un número finito de los x_t son 0. Las componentes no nulas x_t se llaman *componentes homogéneas* de x.

Ejemplo 2.16. El ejemplo más básico de módulo graduado nos lo dan los ideales homogéneos $I \subset R = k[x_0, \ldots, x_n]$ (se deduce fácilmente de las propiedades básicas de los ideales homogéneos en el anillo de polinomios).
Por otro lado, los módulos libres R^m son también módulos graduados sobre R si tomamos $(R^m)_t = (R_t)^m$, que será lo que llamaremos la estructura de módulo graduado *estándar* en R^m.

En cuanto a los submódulos, se extienden a submódulos graduados de la siguiente manera. Si M es un módulo graduado y N es un submódulo de M, entonces decimos que N es un *submódulo graduado* si los subgrupos aditivos $N_t = M_t \cap N$ para $t \in \mathbb{Z}$ definen una estructura de módulo graduado en N.

Respecto a la suma directa, si tenemos $M_1, \ldots M_m$ módulos graduados, podemos considerar la suma directa $N = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ de la manera habitual. Si consideramos ahora la graduación

$$N_t = (M_1)_t \oplus \cdots \oplus (M_m)_t$$

tenemos una estructura de módulo graduado en N.

Por otro lado, si $N \subset M$ es un submódulo graduado de un módulo graduado M, entonces el módulo cociente M/N también tiene una estructura de módulo graduado, definida por los subgrupos aditivos

$$(M/N)_t = M_t/N_t = M_t/\left(M_t \cap N\right).$$

La siguiente proposición nos va a permitir, dado un R-módulo graduado M cualquiera, conseguir módulos isomorfos a M como R-módulos, pero con graduación diferente.

Proposición 2.17 ([8, Chapter 6, Prop. 3.4])**.** *Sea M un R-módulo graduado, y sea d un entero. Sea $M(d)$ la suma directa*

$$M(d) = \bigoplus_{t \in Z} M(d)_t,$$

donde $M(d)_t = M_{d+t}$. Entonces $M(d)$ también es un R-módulo graduado.

Demostración. Solo haría falta comprobar que la descomposición es compatible con la multiplicación por elementos de R:

$$R_s M(d)_t = R_s M_{d+t} \subset M_{d+t+s} = M(d)_{t+s}.$$

□

Los módulos $(R^m)(d) = R(d)^m$ se llaman módulos libres graduados *desplazados* sobre R. Los vectores e_i de la base estándar siguen formando una base del módulo $R(d)^m$, pero ahora son elementos homogéneos de grado $-d$, ya que $R(d)_{-d} = R_0$. Con mayor generalidad, tomando la suma directa como antes, podemos considerar módulos libres de la forma

$$R(d_1) \oplus \cdots \oplus R(d_m)$$

para cualesquiera enteros $d_1, \ldots, d_m$, donde los vectores e_i de la base son homogéneos de grado $-d_i$ para cada i.

A continuación, consideramos el comportamiento de los homomorfismos con la estructura de módulo graduado.

Definición 2.18. Sean M, N módulos graduados sobre R. Un homomorfismo $\varphi : M \to N$ se dice que es un *homomorfimos graduado de grado d* si $\varphi(M_t) \subset N_{t+d}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$. A los homomorfismos graduados de grado 0 los llamaremos simplemente homomorfismos graduados.

Si tenemos que M es un R-módulo graduado generado por elementos homogéneos $f_1, \dots, f_m$ de grados $d_1, \dots, d_m$, entonces tenemos un homomorfismo graduado

$$\varphi : R(-d_1) \oplus \cdots \oplus R(-d_m) \to M \tag{2.5}$$

que envía los elementos de la base estándar e_i a $f_i \in M$. Puesto que e_i tiene grado d_i, φ tiene grado cero.

Otro ejemplo viene dado por una matriz A de tamaño $m \times p$ cuyas entradas son elementos homogéneos de grado d en el anillo R. Entonces A define un homomorfismo φ de grado d por la multiplicación de matrices

$$\begin{aligned} \varphi : R^p &\to R^m \\ f &\mapsto Af. \end{aligned}$$

Obviamente, podemos considerar que A define un homomorfismo graduado (de grado 0) de $R(-d)^p$ en R^m. Análogamente, si las entradas de la columna j-ésima de A son elementos homogéneos de grado d_j, entonces A define un homomorfismo graduado

$$R(-d_1) \oplus \cdots \oplus R(-d_p) \to R^m.$$

De manera aún más general, un homomorfismo graduado

$$R(-d_1) \oplus \cdots \oplus R(-d_p) \to R(-c_1) \oplus \cdots \oplus R(-c_m)$$

está definido por una matriz A de tamaño $m \times p$ cuya entrada $a_{ij} \in R$, si es no nula, es homogénea de grado $d_j - c_i$ para todo i, j. A una matriz A que satisface esta condición para una colección d_j de grados por columnas y otra colección c_i de grados por filas la llamaremos una *matriz graduada* sobre R.

El interés que tiene la discusión anterior es que estas matrices aparecen en las resoluciones libres de módulos graduados sobre R y podemos dar la noción de resolución *minimal* en términos de las mismas.

Definición 2.19. Si M es un R-módulo graduado, entonces una *resolución graduada* (libre) de M es una resolución

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0 \ ,$$

donde cada F_l es un módulo libre graduado desplazado de la forma $R(-d_1) \oplus \cdots \oplus R(-d_p)$ y cada homomorfismo φ_l es un homomorfismo graduado (por lo que las φ_l están dadas por las matrices graduadas definidas de la manera anterior).

La construcción que hicimos de una resolución a partir de los módulos de sizigias en la sección 2.1 se puede adaptar a esta situación y obtener una resolución graduada. Lo único que hay que comprobar es que el núcleo de un morfismo graduado φ entre dos módulos graduados M y N es un submódulo graduado de M. Para ver esto, consideramos $f \in \ker(\varphi)$, y sus componentes homogéneas $f = \sum_i f_i$, con $f_i \in M_{t_i}$. Entonces tenemos

$$\varphi(f) = 0 = \sum_i \varphi(f_i).$$

Cada $\varphi(f_i)$ es del mismo grado que f_i (y, por tanto, son de diferente grado para i distinto) por ser φ un homomorfismo graduado y f_i homogéneos. Se deduce que, para que se anule la suma, cada $\varphi(f_i) = 0$ y por tanto hemos demostrado que cualquier $f \in \ker(\varphi)$ se puede poner como suma de elementos homogéneos $f_i \in (\ker(\varphi))_{t_i} = \ker(\varphi) \cap M_{t_i}$.

Ejemplo 2.20. En virtud del comentario anterior podemos graduar la resolución del ejemplo 2.9. La única diferencia es que en vez de tener R^4 tendremos que poner $\bigoplus_i R(-d_i)$ con los grados d_i, $i = 1, \ldots, 4$ correspondientes. Comenzamos con la primera copia de R^4, que es la correspondiente a la elección de los generadores del ideal, $f_1, \ldots, f_4$. Puesto que φ_0 debe ser un morfismo graduado y $\varphi_0(e_i) = f_i, i = 1, \ldots, 4$, entonces el grado de cada e_i debe coincidir con el de cada f_i, que es 2 excepto para f_4, que es 3. Por tanto, tenemos el morfismo graduado:

$$R(-2)^3 \bigoplus R(-3) \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0.$$

Ahora consideramos φ_1, definido por $\varphi_1(u_i) = g_i, i = 1, \ldots, 4$ (recordamos que u_i son los vectores de la base estándar de R^4, pero de una copia distinta a la anterior). Para el grado de cada g_i, tenemos que fijarnos en que, en este caso, el grado de cada e_i es 2 excepto para e_4, que tiene grado 3. En consecuencia, el grado de los g_i es 3 excepto para g_4, que es 4. Por tanto obtenemos el siguiente morfismo graduado:

$$R(-3)^3 \bigoplus R(-4) \xrightarrow{\varphi_1} \mathrm{Syz}(f_1, f_2, f_3, f_4) \longrightarrow 0.$$

Finalmente, observamos que h_1, el generador que escogemos del tercer módulo de sizigias, es de grado 4, por ser los vectores u_1, u_2 y u_3 de grado 3. Así que tenemos el último morfimo graduado:

$$R(-4) \xrightarrow{\varphi_2} \mathrm{Syz}(g_1, g_2, g_3, g_4) \longrightarrow 0.$$

Juntando las sucesiones graduadas anteriores, obtenemos

$$0 \longrightarrow R(-4) \xrightarrow{\varphi_2} R(-3)^3 \bigoplus R(-4) \xrightarrow{\varphi_1} R(-2)^3 \bigoplus R(-3) \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0,$$

por lo que vemos que hemos conseguido graduar la resolución del ejemplo 2.9.

De esta manera, la resolución de longitud menor o igual que $n + 1$ que obtenemos en la demostración del Teorema de las Sizigias de Hilbert a partir del teorema de Schreyer 2.10 la podemos graduar y obtener entonces una resolución graduada de longitud menor o igual que $n + 1$.

Teorema 2.21 (Teorema de las Sizigias de Hilbert Graduado, [8, Chapter 6, Thm. 3.8])**.** *Sea $R = k[x_0, \ldots, x_n]$. Entonces cualquier R-módulo graduado finitamente generado tiene una resolución libre graduada finita de longitud a lo sumo $n + 1$.*

Definición 2.22. Sea

$$\cdots \longrightarrow F_l \xrightarrow{\varphi_l} F_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} F_{l-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

una resolución graduada de M. Entonces la resolución es *minimal* si para cada $l \geq 0$, las entradas no nulas de la matriz graduada de φ_l tienen grado estrictamente positivo.

Explícitamente, siguiendo la notación que hemos usado para las matrices graduadas, se tendría que $d_j - c_i > 0$ para todo i, j tales que $a_{ij} \neq 0$ (y esto se da para cada paso de la resolución libre minimal graduada).

Que una resolución sea minimal es, en realidad, algo que se puede entender de manera bastante intuitiva por la siguiente proposición:

Proposición 2.23 ([8, Chapter 6 ,Prop. 3.10])**.** *La resolución*

$$\cdots \longrightarrow F_l \xrightarrow{\varphi_l} F_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} F_{l-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$$

es minimal si y solo si para cada $l \geq 0$, φ_l lleva la base estándar de F_l a un sistema de generadores minimal de $\mathrm{Im}(\varphi_l)$*.*

Demostración. Primero probamos que si la resolución es minimal, entonces φ_l lleva la base estándar de F_l a un sistema de generadores minimal de $\mathrm{Im}(\varphi_l)$ para todo $l \geq 0$. Para ello, probamos que si para algún $l \geq 1$ la matriz graduada A_l de φ_l tiene sus entradas no nulas de grado positivo, entonces φ_{l-1} lleva la base estándar de F_{l-1} a un sistema de generadores minimal de $\mathrm{Im}(\varphi_{l-1})$. Sean $e_1, \ldots, e_m$ los vectores de la base estándar de F_{l-1}. Si $\varphi_{l-1}(e_1), \ldots, \varphi_{l-1}(e_m)$ no es un sistema de generadores minimal, entonces, reordenando si es necesario, tenemos que

$$\varphi_{l-1}(e_1) = \sum_{i=2}^{m} a_i \varphi_{l-1}(e_i), \qquad a_i \in R.$$

Entonces $\varphi_{l-1}(e_1 - a_2 e_2 - \cdots - a_m e_m) = 0$, por lo que $(1, -a_2, \ldots, -a_m) \in \ker(\varphi_{l-1})$. Como la resolución es exacta en F_{l-1}, entonces se tiene que $(1, -a_2, \ldots, -a_m) \in \mathrm{Im}(\varphi_l)$. Como A_l es la matriz de φ_l, sus columnas generan $\mathrm{Im}(\varphi_l)$. Por hipótesis estamos asumiendo que las componentes no nulas de las columnas tienen grado positivo. La primera entrada de $(1, -a_2, \ldots, -a_m)$ es una constante no nula, por lo que no puede ser una combinación lineal con coeficientes en R de columnas de A_l (recordamos que las componentes de las columnas son elementos homogéneos). Por tanto, llegamos a una contradicción y los $\varphi_{l-1}(e_i)$ forman un sistema de generadores minimal de $\mathrm{Im}(\varphi_{l-1})$.

Ahora vamos a ver que si a_{ij} es una entrada de A_l de grado 0 y no nula, entonces φ_{l-1} no lleva la base estándar de F_{l-1} en un sistema de generadores minimal de $\mathrm{Im}(\varphi_{l-1})$. Sean $u_1, \ldots, u_t$ los vectores de la base estándar de F_l. Consideramos $\varphi_l(u_j) \in \mathrm{Im}(\varphi_l) = \ker(\varphi_{l-1})$. Si escribimos $\varphi_l(u_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ y denotamos de nuevo por $e_1, \ldots, e_m$ a la base estándar de F_{l-1}:

$$\varphi_{l-1}(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) = 0 = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \varphi_{l-1}(e_k).$$

Como $0 \neq a_{ij} \in k$, podemos despejar $\varphi_{l-1}(e_i)$, por lo que $\{\varphi_{l-1}(e_k),\ k = 1, \ldots, m\}$ no es un sistema de generadores minimal de $\mathrm{Im}(\varphi_{l-1})$. $\square$

Ejemplo 2.24. Volviendo sobre el ejemplo 2.20, vemos que en cada paso el sistema de generadores que hemos elegido es minimal, así que la resolución que hemos construido es, de hecho, minimal.

A continuación estudiaremos hasta qué punto es única una resolución libre minimal. Para ello, primero definimos que significa que dos resoluciones sean isomorfas, y luego enunciamos el teorema que justifica la definición:

Definición 2.25. Dos resoluciones graduadas

$$\cdots \longrightarrow F_0 \overset{\varphi_0}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$$

$$\cdots \longrightarrow G_0 \overset{\psi_0}{\longrightarrow} M \longrightarrow 0$$

son *isomorfas* si existen isomorfismos graduados $\alpha_l : F_l \to G_l$ tales que $\psi_0 \circ \alpha_0 = \varphi_0$ y, para cada $l \geq 1$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F_l \arrow[r, "\varphi_l"] \arrow[d, "\alpha_l"'] & F_{l-1} \arrow[d, "\alpha_{l-1}"] \\ G_l \arrow[r, "\psi_l"] & G_{l-1} \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $\alpha_{l-1} \circ \varphi_l = \psi_l \circ \alpha_l$.

Teorema 2.26 ([11, Thm. 1.6])**.** *Sea M un R-módulo graduado finitamente generado. Si F y G son resoluciones libres graduadas minimales de M, entonces existe un isomorfismo entre ambas resoluciones $F \to G$ que induce la aplicación identidad en M. Además, cualquier resolución libre de M contiene una resolución libre minimal como sumando directo.*

Por tanto, tenemos que M tiene una única resolución minimal salvo isomorfismo. En $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ podemos hallar una resolución libre minimal, tomando en cada paso sistemas de generadores que mantengan la minimalidad de la resolución, de manera que al final obtengamos la única resolución libre minimal (a partir de ahora se entenderá que es salvo isomorfismo). Otra opción es construir una resolución con el método de Schreyer, que en general no será minimal, y luego extraer una resolución minimal de esta, lo cual es menos costoso computacionalmente en general que el método anterior.

2.4. Diagrama de Betti

Sea $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ un anillo de polinomios y sea

$$0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

la resolución libre minimal del R-módulo M finitamente generado, donde $F_i = \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{i,j}}$ para cada i; es decir, F_i está generado por $\beta_{i,j}$ elementos de grado j. Los $\beta_{i,j}$ se llaman los *números de Betti graduados* de M, a veces escritos como $\beta_{i,j}(M)$. Estos números se presentan habitualmente en una tabla, conocida como *diagrama de Betti*, que tiene la siguiente forma:

	0	1	$\cdots$	s
i	$\beta_{0,i}$	$\beta_{1,i+1}$	$\cdots$	$\beta_{s,i+s}$
$i+1$	$\beta_{0,i+1}$	$\beta_{1,i+2}$	$\cdots$	$\beta_{s,i+s+1}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
j	$\beta_{0,j}$	$\beta_{1,j+1}$	$\cdots$	$\beta_{s,j+s}$

Consiste en una tabla con $s+1$ columnas, etiquetadas de 0 a s, correspondientes a los módulos libres $F_0, \ldots, F_s$. Las filas están denotadas por enteros consecutivos que corresponden a los grados. Es habitual escribir - en vez de 0 en la tabla, y en ocasiones se omiten las etiquetas de las filas y las columnas cuando están claros por el contexto. La columna m-ésima nos da los grados de los generadores de F_m.

Observación 2.27. Es importante notar que la entrada correspondiente a la columna j y fila i es $\beta_{i,i+j}$ y no $\beta_{i,j}$. Esto se debe a que el mínimo grado de una sizigia sube estrictamente en cada paso, lo cual se puede ver a partir del comentario final de la definición 2.22, ya que $d_j > c_i$ para todo i, j tales que $a_{ij} \neq 0$, así que el menor grado de las sizigias en un paso ha de ser mayor que el grado de alguna de las sizigias del paso anterior, en particular, mayor que el grado de la sizigia de menor grado. Otra razón la veremos cuando definamos la regularidad.

Ejemplo 2.28. Retomando el ejemplo 2.20, con la resolución minimal

$$0 \longrightarrow F_2 = R(-4) \xrightarrow{\varphi_2} F_1 = R(-3)^3 \bigoplus R(-4) \xrightarrow{\varphi_1} F_0 = R(-2)^3 \bigoplus R(-3) \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0,$$

podemos construir el siguiente diagrama de Betti:

	0	1	2
2	3	3	1
3	1	1	-

A continuación introducimos varios conceptos que son centrales en este trabajo.

Definición 2.29. Sea M un R-módulo finitamente generado (que admite una resolución finita por ser R un anillo de polinomios). A la menor longitud de todas las resoluciones libres finitas de M se la llama *dimensión proyectiva* de M y la denotaremos por $\operatorname{pd}(M)$. Esto coincide con la longitud de la resolución minimal por el teorema 2.26.

Podemos leer la dimensión proyectiva a partir del diagrama de Betti como el ancho de la tabla del diagrama de Betti, es decir, la etiqueta de la última columna. Lo que acabamos de decir se puede escribir como

$$\operatorname{pd}(M) = \text{máx}\{i : \beta_{i,j}(M) \neq 0 \text{ para algún } j\}.$$

Definición 2.30. Sea M un R-módulo finitamente generado y $\beta_{i,j}(M)$ sus números de Betti. Entonces la *regularidad de Castelnuovo-Mumford* de M, o simplemente *regularidad*, es

$$\operatorname{reg}(M) = \text{máx}\{j - i : \beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

Vemos que la regularidad también podemos leerla a partir del diagrama de Betti, en este caso fijándonos en la altura de la tabla o la etiqueta de la última fila. Este es uno de los motivos que hemos mencionado antes para escribir la tabla de la manera en la que lo hemos hecho.

Por otro lado, vemos que la dimensión proyectiva y la regularidad son dos medidas de la complejidad de un módulo. El Teorema de las Sizigias de Hilbert proporciona una cota bastante buena para la dimensión proyectiva, pero la regularidad no la tenemos tan acotada. Por ello la regularidad, el tema central de este trabajo, es un objeto de estudio interesante en este contexto.

Ejemplo 2.31. A partir del diagrama de Betti del ejemplo 2.28 podemos obtener la dimensión proyectiva y la regularidad del ideal I: $\mathrm{pd}(I) = 2$, $\mathrm{reg}(I) = 3$.

De las definiciones podemos obtener fácilmente que

$$\mathrm{pd}(R/I) = \mathrm{pd}(I) + 1,$$
$$\mathrm{reg}(I) = \mathrm{reg}(R/I) + 1.$$

Ambas igualdades se obtienen a partir de la resolución minimal de I

$$0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0,$$

ya que entonces obtenemos otra resolución minimal para R/I

$$0 \longrightarrow F_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0.$$

Por tanto, la primera igualdad es directa porque la longitud aumenta en 1, y la segunda es consecuencia de la definición de regularidad, puesto que al aumentar en uno la longitud, aumenta la posición de cada F_i y, en consecuencia, disminuyen todas las diferencias $j - i$ que aparecen en la definición de regularidad en una unidad.

Ejemplo 2.32. Si utilizamos la resolución de I que tenemos en el ejemplo 2.28 para hallar la de R/I se obtiene

$$0 \longrightarrow R(-4) \xrightarrow{\psi_3} R(-3)^3 \bigoplus R(-4) \xrightarrow{\psi_2} R(-2)^3 \bigoplus R(-3) \xrightarrow{\psi_1} R \xrightarrow{\psi_0} R/I \longrightarrow 0.$$

A partir de esta resolución obtenemos el siguiente diagrama de Betti:

	0	1	2	3
0	1	-	-	-
1	-	3	3	1
2	-	1	1	-

Vemos que obtenemos la misma tabla que en el ejemplo 2.28, pero desplazada y añadiendo $\beta_{0,0} = 1$. Podemos leer de la tabla que $\mathrm{pd}(R/I) = 3$, $\mathrm{reg}(I) = 2$. También se puede obtener la tabla de Betti y la resolución minimal de R/I utilizando [9]:

```
> ring r=0,(x,y,z), (C,lp);
> ideal I=x2,xy,xz,y3;
> resolution rs=minres(res(I,0));rs;
 1      4      4      1
r <--  r <--  r <--  r

0      1      2      3

> print(betti(rs),"betti");
           0     1     2     3
------------------------------
    0:     1     -     -     -
    1:     -     3     3     1
    2:     -     1     1     -
------------------------------
total:     1     4     4     1
```

Vamos a introducir un invariante más, la profundidad. Para ello tenemos que ver la definición de sucesión regular:

Definición 2.33. Sea R un anillo y M un R-módulo. Una sucesión de elementos $x_0, \dots, x_d$ en un anillo R se llama *sucesión M-regular* si cumple

(a) $(x_0, \dots, x_n)M \neq M$, y

(b) para cada $i = 0, \dots, n$, x_i es un no divisor de cero en $M/(x_0, \dots, x_{i-1})M$.

Una sucesión R-regular se llama simplemente *sucesión regular*.

Ejemplo 2.34. El ejemplo clásico de sucesión regular es la sucesión $x_0, \dots, x_n$ de variables en el anillo de polinomios $R = k[x_0, \dots, x_n]$.

Diremos que una sucesión M-regular $x_0, \dots, x_d$ (contenida en el ideal I) es *maximal* (en I) si $x_0, \dots, x_{d+1}$ no es una sucesión M-regular para cualquier $x_{d+1} \in R$ ($x_{d+1} \in I$). El siguiente resultado nos permitirá dar la definición de la profundidad de un ideal.

Teorema 2.35 (Northcott y Rees, [14, Thm. 121])**.** *Sea R un anillo noetheriano, I un ideal en R, y M un R-módulo finitamente generado. Suponemos que $IM \neq M$. Entonces dos sucesiones M-regulares maximales contenidas en I tienen la misma longitud.*

Definición 2.36. Sea R un anillo noetheriano, I un ideal en R y M un R-módulo finitamente generado que satisface $IM \neq M$. La longitud común de todas las sucesiones M-regulares maximales en I se llama *profundidad de I en M* y se denota $\operatorname{depth}(I, M)$. En el caso en el que $IM = M$, definimos $\operatorname{depth}(I, M) = \infty$. Si $M = R$, entonces llamamos a $\operatorname{depth}(I, M)$ simplemente *profundidad de I* y lo denotamos $\operatorname{depth}(I)$.
En el caso en el que $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots$ es un anillo graduado, finitamente generado como álgebra sobre un cuerpo R_0, $P = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$ es su ideal homogéneo maximal y M es un R-módulo finitamente generado, llamaremos a la profundidad de P en M simplemente profundidad de M y la denotamos $\operatorname{depth}(M)$. En el caso en el que M es un ideal, esta terminología coincide con la anterior, pero en la práctica no hay confusión y ambas notaciones se utilizan simultáneamente. En cualquier caso, en este trabajo estaremos principalmente en esta segunda situación para el módulo R/I.

Entre la dimensión proyectiva y la profundidad hay una relación importante que viene dada por la siguiente fórmula:

Teorema 2.37 (Fórmula de Auslander-Buchsbaum, [10, Thm. 19.9 & Ex. 19.8])**.** *Sea $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots$ un anillo graduado, finitamente generado como álgebra sobre un cuerpo R_0. Sea $P = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$ el ideal homogéneo maximal. Si M es un R-módulo graduado finitamente generado de dimensión proyectiva finita, entonces*

$$\operatorname{pd}(M) = \operatorname{depth}(P, R) - \operatorname{depth}(P, M) = \operatorname{depth}(R) - \operatorname{depth}(M).$$

En el caso del anillo de polinomios $R = k[x_0, \dots, x_n]$ la fórmula se reduce a

$$\operatorname{pd}(M) = n + 1 - \operatorname{depth}(M).$$

Por tanto, podemos obtener $\operatorname{depth}(M)$ a partir de $\operatorname{pd}(M)$. Este último invariante sabemos obtenerlo a partir del diagrama de Betti, luego también podemos obtener $\operatorname{depth}(M)$ de la tabla.

Ejemplo 2.38. Considerando los datos del ejemplo 2.32, puesto que el número de variables es 3 y $\mathrm{pd}(R/I) = 3$, tenemos que $\mathrm{depth}(R/I) = 0$.

2.5. Función de Hilbert

En esta sección veremos como obtener la función de Hilbert y el polinomio de Hilbert a partir de resoluciones graduadas. Consideraremos $R = k[x_0, \dots, x_n]$, el anillo de polinomios en $n+1$ variables, en toda la sección.

Lo primero que vamos a hacer es definir la función de Hilbert. Para ello, primero nos fijamos en que, dado M un R-módulo graduado finitamente generado, el conjunto M_t de elementos homogéneos de grado t de M es un R_0-módulo por la definición, pero en este caso tenemos $R_0 = k$, por lo que es un k-espacio vectorial. Por otro lado, como es finitamente generado, podemos considerar el homomorfismo graduado de (2.5) para unos ciertos generadores de M. Como φ es sobreyectiva, $\varphi((\bigoplus_i R(-d_i))_t) \subset M_t$ por ser de grado cero y $M_t \cap M_s = 0$ si $t \neq s$, se tiene que $\varphi((\bigoplus_i R(-d_i))_t) = M_t$. Es fácil ver que los polinomios homogéneos de grado $t \geq 0$ en $n+1$ variables tienen estructura de k-espacio vectorial de dimensión $\binom{t+n}{n}$. Puesto que M_t es imagen de una suma directa de espacios vectoriales del tipo anterior, se tiene que M_t es de dimensión finita. Esto nos lleva de manera natural a la definición que buscábamos:

Definición 2.39. Si M es un módulo graduado finitamente generado sobre $R = k[x_0, \dots, x_n]$, entonces la *función de Hilbert* $H_M(t)$ está definida por

$$H_M(t) = \dim_k M_t,$$

donde $\dim_k$ es la dimensión como espacio vectorial sobre k.

Por el comentario anterior, vemos que para $R = k[x_0, \dots, x_n]$ y $t \geq 0$

$$H_R(t) = \dim_k R_t = \binom{t+n}{n}.$$

Si convenimos que $\binom{a}{b} = 0$ si $a < b$, entonces la fórmula anterior se da para todo t. Podemos resaltar ahora que para $t \geq 0$ y n fijo, el coeficiente binomial anterior es un polinomio de grado n en t:

$$\binom{t+n}{n} = \frac{(t+n)!}{t!n!} = \frac{(t+n)(t+n-1)\cdots(t+1)}{n!}.$$

Por tanto, $H_R(t)$ está dado por un polinomio para t suficientemente grande (en este caso $t \geq 0$). Más adelante veremos que esta situación se da siempre para un R-módulo finitamente generado.

Por otro lado, de la definición es claro que si M es un R-módulo graduado finitamente generado, entonces $H_{M(d)}(t) = H_M(t+d)$, ya que

$$H_{M(d)}(t) = \dim_k(M(d))_t = \dim_k M_{t+d} = H_M(t+d).$$

En particular, para el módulo libre graduado desplazado $R(d)$ tenemos

$$H_{R(d)}(t) = \dim_k R_{t+d} = \binom{t+d+n}{n}. \tag{2.6}$$

Proposición 2.40. *Sean M, N y P R-módulos finitamente generados. Si tenemos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} P \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

donde α y β son homomorfismos graduados, entonces $H_P = H_M + H_N$.

Demostración. La sucesión exacta anterior nos da otra sucesión exacta entre k-espacios vectoriales de dimensión finita

$$0 \longrightarrow M_t \xrightarrow{\alpha_t} P_t \xrightarrow{\beta_t} N_t \longrightarrow 0$$

donde α_t y β_t son las restricciones a los elementos homogéneos de grado t del espacio de salida de cada homomorfismo. Esto se debe a que, al ser homomorfismos graduados, tenemos que $\mathrm{Im}(\alpha_t) = (\mathrm{Im}(\alpha))_t = (\ker(\beta))_t = \ker(\beta_t)$ ($\mathrm{Im}(\alpha) = \ker(\beta)$ por exactitud). Como estamos tratando con espacios vectoriales de dimensión finita sabemos que

$$\dim_k P_t = \dim_k \ker(\beta_t) + \dim_k \mathrm{Im}(\beta_t).$$

Puesto que la sucesión anterior es exacta, $\mathrm{Im}(\beta_t) = N_t$. Además, como α_t es inyectiva, tenemos que $M_t \cong \mathrm{Im}(\alpha_t) = \ker(\beta_t)$. Sustituyendo en la fórmula anterior, obtenemos

$$H_P(t) = \dim_k P_t = \dim_k M_t + \dim_k N_t = H_M(t) + H_N(t).$$

□

Como caso particular de la proposición anterior, tenemos que si $P = M \oplus N$, entonces $H_P = H_M + H_N$, ya que tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P = M \oplus N \xrightarrow{\pi} N \longrightarrow 0$$

donde i denota la inclusión y π la proyección sobre N.

Vemos que con estos resultados podemos calcular la función de Hilbert de cualquier módulo libre desplazado. Para tratar el caso general, vamos a utilizar resoluciones graduadas. Para ello, primero probamos el siguiente lema:

Lema 2.41. *Sean V_j, $j = 0, \dots, n$, k-espacios vectoriales de dimensión finita, y sea*

$$0 \longrightarrow V_n \xrightarrow{\varphi_n} V_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_{n-2} \xrightarrow{\varphi_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} V_0 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de aplicaciones lineales. Entonces se tiene que la suma alternada de las dimensiones de los V_j es 0:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \dim_k(V_j) = 0.$$

Demostración. De esta sucesión exacta a su vez podemos deducir la siguiente sucesión exacta para cada $j = 1, \ldots, n$

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi_j) \xrightarrow{i} V_j \xrightarrow{\varphi_j} \ker(\varphi_{j-1}) \longrightarrow 0.$$

En cada sucesión exacta corta como la anterior tenemos que

$$\dim_k V_j = \dim_k \ker(\varphi_j) + \dim_k \operatorname{Im}(\varphi_j).$$

Podemos reconstruir la sucesión inicial a partir de estas sucesiones, ya que $\operatorname{Im}(\varphi_j) = \ker(\varphi_{j-1})$ y $\ker(\varphi_j) = \operatorname{Im}(\varphi_{j+1})$. Encadenando estas igualdades con la anterior, y teniendo en cuenta que $\operatorname{Im}(\varphi_1) = V_0$ y $\ker(\varphi_n) = 0$ se obtiene el resultado. □

Teorema 2.42 ([8, Chapter 6, Thm. 4.4])**.** *Sea $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ y sea M un R-módulo graduado finitamente generado. Entonces, para cualquier resolución graduada de M*

$$0 \longrightarrow F_k \longrightarrow F_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

tenemos

$$H_M(t) = \dim_k M_t = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \dim_k (F_j)_t = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j H_{F_j}(t).$$

Demostración. Como en la proposición 2.40, obtenemos una sucesión exacta de k-espacios vectoriales de dimensión finita

$$0 \longrightarrow (F_k)_t \xrightarrow{\varphi_k} (F_{k-1})_t \xrightarrow{\varphi_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} (F_0)_t \xrightarrow{\varphi_0} M_t \longrightarrow 0.$$

Por el lema 2.41, la suma alternada de las dimensiones en esta sucesión exacta es 0. Por tanto,

$$\dim_k M_t = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \dim_k (F_j)_t.$$

□

Puesto que conocemos la función de Hilbert de cualquier módulo libre desplazado, vemos que la podemos calcular también para un R-módulo graduado arbitrario a partir de una resolución graduada.

Anteriormente resaltamos que $H_{R(d)}(t)$ es un polinomio para t suficientemente grande. Esta situación se da en general, como se muestra en el teorema siguiente:

Teorema 2.43 ([8, Chapter 6, Prop. 4.7])**.** *Sea $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ y M un R-módulo graduado finitamente generado. Entonces existe un único polinomio HP_M tal que*

$$H_M(t) = HP_M(t)$$

para todo t suficientemente grande.

Demostración. Utilizando (2.6) y la proposición 2.40, tenemos que para un módulo libre desplazado de la forma

$$F = R(-d_1) \oplus \cdots \oplus R(-d_m),$$

la función de Hilbert es

$$H_F(t) = \sum_{i=1}^{m} \binom{t - d_i + n}{n}.$$

Vemos que es un polinomio para t suficientemente grande ($t \geq \text{máx}(d_1, \dots, d_m)$). Como para un R-módulo finitamente generado sabemos que existe una resolución graduada finita, y cada módulo de la resolución es de la forma anterior, por el teorema 2.42 su función de Hilbert es la suma alternada de funciones de Hilbert como la que acabamos de ver. Por tanto, para t suficientemente grande es un polinomio. □

Al polinomio $HP_M(t)$ que cumple lo anterior se le llama el *polinomio de Hilbert* de M. Si en vez de considerar un módulo arbitrario consideramos $M = R/I$, con I un ideal homogéneo y $R = k[x_0, \dots, x_n]$, entonces el polinomio de Hilbert encierra bastante información sobre la variedad proyectiva $V(I)$. Si $f_1, \dots, f_r$ son generadores homogéneos de I, entonces $V(I)$ se define como

$$V(I) = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_k^n / f_i(x_0, \dots, x_n) = 0, \;\; i = 1, \dots, r\}.$$

La exigencia de que I sea homogéneo es precisamente para garantizar que si tenemos dos representantes del mismo punto $[x_0, \dots, x_n] \in V(I) \subset \mathbb{P}_k^n$ ambos cumplan la condición $f_i(x_0, \dots, x_n) = 0, \;\; i = 1, \dots, r$. Antes de ver la información que contiene el polinomio de Hilbert, vamos a dar la siguiente definición:

Definición 2.44. Sea R un anillo conmutativo. La *dimensión de Krull* (o simplemente dimensión) de R es el supremo de las longitudes n de cadenas de ideales primos $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$, y la denotaremos por $\dim R$.

Se puede demostrar ([8, Pg. 284]) que el término de mayor grado del polinomio de Hilbert es de la forma $\frac{D}{d!}t^d$ para algún entero positivo D. El grado d del polinomio de Hilbert es la *dimensión* de la variedad proyectiva $V(I)$, que también es la dimensión de Krull de R/I menos 1. De hecho, se puede tomar como definición de la dimensión de una variedad proyectiva V el grado del polinomio de Hilbert de $R/I(V)$ ($I(V)$ es el conjunto de polinomios que se anulan en todos los puntos de V), que es lo que se hace por ejemplo en [7].
Por otro lado, el entero D se llama *grado* de la variedad V (cuando en vez de V tenemos un módulo M, se llama *multiplicidad*), se denota por $\deg(V)$ y se puede ver que es igual al número de puntos en la intersección de V con un subespacio proyectivo genérico de dimensión $n - d$.

Una vez visto esto, podemos ver que existen formas más eficientes de calcular la función o el polinomio de Hilbert de un módulo graduado basadas en los resultados debidos a Macaulay que vamos a ver a continuación, que también nos resultarán útiles en algunas demostraciones más adelante. Primero introducimos la siguiente notación que vamos a utilizar con bastante frecuencia: dado un orden monomial $>$ y un R-módulo M, para cada

$f \in M$ definimos el *monomio inicial de* f, denotado por $\mathrm{in}_>(f)$ (o $\mathrm{in}(f)$ si no hay lugar a confusión), como el mayor monomio de f con respecto al orden $>$, y para un submódulo $N \subset M$ definimos $\mathrm{in}_>(N)$ como el submódulo monomial generado por los elementos $\mathrm{in}_>(f)$ para todo $f \in N$. Vemos que la diferencia entre $\mathrm{in}(f)$ y $\mathrm{LT}(f)$ (notación introducida en la sección 2.2) es únicamente que $\mathrm{LT}(f)$ incluye el coeficiente del monomio inicial. Con esta notación ya podemos pasar a enunciar los siguientes resultados:

Teorema 2.45 (Macaulay, [10, Thm. 15.3])**.** *Sea F un R-módulo libre con base, y sea M un submódulo arbitrario. Para cualquier orden monomial $>$ en F, el conjunto B de todos los monomios que no están en* $\mathrm{in}(M)$ *forma una base de F/M.*

Demostración. Para mostrar que B es linealmente independiente, observamos que si hubiera una relación de dependencia

$$p = \sum_i u_i m_i \in M, \quad m_i \in B, \quad 0 \neq u_i \in k,$$

entonces $\mathrm{in}(p) \in \mathrm{in}(M)$. Puesto que $\mathrm{in}(p)$ es uno de los m_i, los cuales hemos supuesto que están en B, se llega a una contradicción.
Ahora supongamos que B no genera F/M. Del conjunto de elementos de F que no están generados por M y B, podemos coger f con término inicial mínimo. Si $\mathrm{in}(f)$ estuviera en B, podríamos restarlo, obteniendo un polinomio con término inicial aún más pequeño. Por tanto, podemos suponer que $\mathrm{in}(f) \in \mathrm{in}(M)$. Restando un elemento de M con el mismo término inicial que f se llega a una contradicción. $\square$

Teorema 2.46 (Macaulay, [10, Thm. 15.26])**.** *Sea P un R-módulo graduado finitamente generado, dado a partir de unos generadores y sus relaciones como $P = F/M$, donde F es un módulo libre con base homogénea y M es un submódulo generado por elementos homogéneos. La función de Hilbert de P es la misma que la función de Hilbert de* $F/\mathrm{in}(M)$.

Demostración. Sea B el conjunto de monomios que no están en $\mathrm{in}(M)$. Como P es graduado, tenemos que $P = \bigoplus_d P_d$, donde $P_d = F_d/M_d$. Por el teorema 2.45, la imagen de B es una base (de espacio vectorial) de P, así que la imagen de B_d será una base de P_d. Por tanto, $\dim_k P_d$ es el número de elementos de B_d. Puesto que el argumento se puede aplicar también a $P' = F/\mathrm{in}(M)$, obtenemos el resultado. $\square$

3. Ideal inicial genérico

En esta sección trabajaremos con $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios sobre un cuerpo infinito k, y $<$ un orden monomial en R que refina el orden parcial por grado y cumple que $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$. Para un ideal homogéneo $I \subset R$ mostraremos que existe un abierto no vacío U del conjunto de automorfismos lineales de R de manera que $\mathrm{in}(\alpha I)$, el ideal inicial de αI respecto del orden elegido, no depende de $\alpha \in U$. A este ideal lo llamaremos el ideal inicial genérico de I con respecto a $<$. Probaremos también diversas propiedades de interés de este ideal y en la última parte veremos la relación que tiene con los invariantes del ideal I cuando usamos el orden lexicográfico inverso. Las referencias principales que utilizaremos serán [10] y [13], y también [2] para la última parte.

3.1. Existencia

Puesto que el concepto de ideal inicial genérico involucra un abierto, debemos introducir la topología con la que trabajamos. Sea k un cuerpo. Un subconjunto del espacio afín k^m es un cerrado para la topología de Zariski si es el conjunto de ceros comunes de un conjunto finito de polinomios en m variables. Los abiertos quedan definidos, por tanto, como los complementarios de los cerrados para la topología de Zariski. Si k es un cuerpo finito entonces todo subconjunto de k^m es cerrado, y, por tanto, también es abierto, así que nos restringiremos al caso de que k sea un cuerpo infinito.

Empezamos con una propiedad importante de los abiertos de Zariski:

Lema 3.1 ([13, Lem. 4.1.1])**.** *Sean $U_1, \ldots, U_r \subset k^m$ abiertos de Zariski no vacíos. Entonces $U_1 \cap \cdots \cap U_r \neq \emptyset$.*

Demostración. Es suficiente probarlo para dos abiertos de Zariski U, U'. Sean $A = k^m \setminus U$ y $A' = k^m \setminus U'$, y supongamos que A es el conjunto de los ceros comunes de los polinomios $f_1, \ldots, f_r$ y A' el de los polinomios $g_1, \ldots, g_s$. Sea $x \in U$ y $x' \in U'$. Entonces existen f_i y g_j con $f_i(x) \neq 0$ y $g_j(x') \neq 0$. Por tanto, $f_i g_j \neq 0$. Como k es infinito, existe $x'' \in k^m$ tal que $f_i g_j(x'') \neq 0$. Luego $f_i(x'') \neq 0$ y $g_j(x'') \neq 0$, de manera que $x'' \in U \cap U'$. □

El lema anterior dice que cualquier abierto de Zariski no vacío es denso en k^m. El conjunto en el que estamos interesados es $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$, el grupo lineal general (grupo de matrices $(n+1) \times (n+1)$ invertibles con entradas en k). Cualquier $\alpha \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$, $\alpha = (a_{ij})$, induce un automorfismo

$$\alpha : R \to R, \quad f(x_0, \ldots, x_n) \mapsto f(\sum_{i=0}^{n} a_{i0} x_i, \ldots, \sum_{i=0}^{n} a_{in} x_i),$$

que en realidad no es más que un cambio de variables. El conjunto $M_{n+1}(k)$ de todas las matrices $(n+1) \times (n+1)$ se puede identificar con los puntos de $k^{(n+1)\times(n+1)}$, siendo las coordenadas de los puntos las entradas de las correspondientes matrices. Entonces podemos ver que $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$ es un abierto de Zariski de $M_{n+1}(k)$, ya que $\alpha \in M_{n+1}(k)$ pertenece a $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$ si y solo si $\det \alpha \neq 0$. Esto sucede si y solo si α no pertenece al cerrado de Zariski definido como el conjunto de ceros del polinomio $\det(x_{ij}) \in k[\{x_{ij}\}_{i,j=0,\dots,n}]$.

Puesto que $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$ es abierto, cualquier subconjunto suyo es abierto si y solo si es abierto de Zariski en $M_{n+1}(k)$ (o $k^{(n+1)\times(n+1)}$).

En preparación del resultado principal de la sección, tenemos que introducir algunos conceptos y notación. Sean d, $t \in \mathbb{N}$ con $t \leq \dim_k R_d$. Consideramos la potencia exterior t-ésima $\bigwedge^t R_d$ del k-espacio vectorial R_d. Dado un orden monomial $<$ en R, un elemento $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_t$ donde cada u_i es un monomio de grado d y donde $u_1 > u_2 > \cdots > u_t$ se llamará un *monomio exterior estándar* de $\bigwedge^t R_d$. Es obvio que los monomios exteriores estándar forman una base del k-espacio vectorial $\bigwedge^t R_d$. En particular, cualquier elemento $f \in \bigwedge^t R_d$ es una combinación lineal única de monomios exteriores estándar. El *soporte* de f es el conjunto $\mathrm{supp}(f)$ de monomios exteriores estándar que aparecen en f con coeficiente no nulo.

Ordenamos los monomios exteriores estándar con el orden lexicográfico de manera que

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_t > v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_t,$$

si $u_i > v_i$ para el menor índice i con $u_i \neq v_i$. Esto nos permite definir el *monomio inicial* $\mathrm{in}(f)$ de un elemento no nulo $f \in \bigwedge^t R_d$ como el mayor monomio exterior estándar en el soporte de f.

Por otro lado, si tenemos $V \subset R_d$ un subespacio vectorial de dimensión t de R_d y $f_1, \dots, f_t$ es una base de V, observamos que el k-espacio vectorial $\bigwedge^t V$ de dimensión 1 está generado por $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_t$.

Denotaremos por $\mathrm{in}(V)$ al k-espacio vectorial generado por todos los monomios $\mathrm{in}(f)$ con $0 \neq f \in V$.

Una vez hemos visto lo anterior, podemos probar los siguientes lemas que nos serán de utilidad para probar el teorema que vendrá a continuación.

Lema 3.2. *Sea $V \subset R_d$ un subespacio vectorial de dimensión t y sea $\{g_1, \dots, g_t\}$ una base de V. Entonces $\{\mathrm{in}(g_1), \dots, \mathrm{in}(g_t)\}$ es una base de $\mathrm{in}(V)$ y, en consecuencia, $\dim_k V = \dim_k \mathrm{in}(V)$.*

Demostración. Sea $\{g_1, \dots, g_t\}$ una base del k-espacio vectorial V. Podemos suponer que todos los elementos de la base tienen monomios iniciales distintos, ya que de no ser así podríamos restar un múltiplo de otro elemento de la base y obtener otro con monomio inicial menor, y repetir el proceso hasta que el monomio inicial sea distinto del resto. No se puede llegar a que obtengamos 0 al restar porque iría en contra de la independencia lineal de los elementos de la base. Si ahora elegimos un elemento $v \in V$, entonces se expresa como combinación lineal de los elementos de la base $v = \sum_{i=1}^{t} \beta_i g_i$, $\beta_i \in k$, y se tiene que $\mathrm{in}(v) = \mathrm{in}(g_i)$ para el elemento g_i con mayor monomio inicial y $\beta_i \neq 0$. Así que tenemos que $\{\mathrm{in}(g_1), \dots, \mathrm{in}(g_t)\}$ es una base de $\mathrm{in}(V)$. $\square$

Lema 3.3 ([13, Lem. 4.1.4]). *Sean $w_1, \dots, w_t$ monomios en R_d con $w_1 > w_2 > \cdots > w_t$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *los monomios $w_1, \dots, w_t$ forman una base del k-espacio vectorial* $\mathrm{in}(V)$*;*

(b) *si $w_i = \mathrm{in}(g_i)$ con $g_i \in V$, entonces $g_1, \dots, g_t$ es una base del k-espacio vectorial V y*

$$\mathrm{in}(g_1 \wedge \cdots \wedge g_t) = \mathrm{in}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{in}(g_t);$$

(c) *si $f_1, \dots, f_t$ es una base del k-espacio vectorial V, entonces* $\mathrm{in}(f_1 \wedge \cdots \wedge f_t) = w_1 \wedge \cdots \wedge w_t$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Sea $0 \neq f \in V$. Entonces $\mathrm{in}(f) = w_i$ para algún i. Razonamos por inducción sobre $i \leq t$ para ver que si $\mathrm{in}(f) = w_i$, entonces f es una combinación lineal de $g_i, \dots, g_t$. Si $i = t$, entonces debe existir $a \in k$ tal que $f = ag_t$, ya que no puede darse que $\mathrm{in}(f - ag_t) < w_t$ por ser w_t el menor en una base de $\mathrm{in}(V)$. Para $i < t$, tenemos que existe $a \in k$ de manera que $f - ag_i = 0$ o $\mathrm{in}(f - ag_i) < w_i$. Por hipótesis de inducción, $f - ag_i$ es una combinación lineal de $g_{i+1}, \dots, g_t$. Esto implica que $g_1, \dots, g_t$ es un sistema de generadores de V.
Si tuviéramos $\sum_{i=1}^{t} a_i g_i = 0$ con $a_i \in k$ y no todos los $a_i = 0$, entonces si j es el menor entero tal que $a_j \neq 0$ tenemos que $\mathrm{in}(\sum_{i=1}^{t} a_i g_i) = w_j \neq 0$, una contradicción. Luego $g_1, \dots, g_t$ son linealmente independientes.
Como $w_1 > w_2 > \cdots > w_t$ se tiene que $\mathrm{in}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{in}(g_t)$ es un monomio exterior estándar. Sea $g = g_1 \wedge \cdots \wedge g_t$. Salvo el signo, un monomio exterior estándar de $\mathrm{supp}(g)$ es de la forma $u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_t$ con $u_i \in \mathrm{supp}(g_i)$ (en este caso es el soporte habitual de un polinomio). Puesto que $w_i \geq u_i$ se tiene que cualquier monomio de $\mathrm{supp}(g)$ es menor o igual que $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_t$. Como $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_t \in \mathrm{supp}(g)$, se obtiene el resultado.

(b) $\Rightarrow$ (c): Puesto que $f_1 \wedge \cdots \wedge f_t$ y $g_1 \wedge \cdots \wedge g_t$ se diferencian únicamente en un escalar no nulo, tenemos

$$\mathrm{in}(f_1 \wedge \cdots \wedge f_t) = \mathrm{in}(g_1 \wedge \cdots \wedge g_t) = w_1 \wedge \cdots \wedge w_t.$$

(c) $\Rightarrow$ (a): Como $\bigwedge^t V$ es unidimensional, $\mathrm{in}(f_1 \wedge \cdots \wedge f_t) = \mathrm{in}(h_1 \wedge \cdots \wedge h_t)$ para cualquier otra base $h_1, \dots, h_t$ de V. Podemos suponer entonces que $\mathrm{in}(f_1) > \mathrm{in}(f_2) > \cdots > \mathrm{in}(f_t)$, y entonces $w_i = \mathrm{in}(f_i)$. Luego cada $w_i \in \mathrm{in}(V)$. Como $\dim_k V = \dim_k \mathrm{in}(V)$ por el lema 3.2, esto implica que $w_1, \dots, w_t$ es una base del k-espacio vectorial $\mathrm{in}(V)$. □

Observación 3.4. Sea $\alpha \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ un automorfismo lineal de R, y $f_1, f_2, \dots, f_t$ una base del k-espacio vectorial $V \subset R_d$. Entonces $\alpha(f_1), \alpha(f_2), \dots, \alpha(f_t)$ es una base del k-subespacio vectorial $\alpha V \subset R_d$, y si $\mathrm{in}(\alpha(f_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(f_t)) = w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_t$, entonces $\mathrm{in}(\alpha V)$ tiene la base $w_1, \dots, w_t$ (por el lema 3.3).

Lema 3.5 ([13, Lem. 4.1.5]). *Sea $w_1 \wedge \cdots \wedge w_t$ el mayor monomio exterior estándar de $\bigwedge^t R_d$ con la propiedad de que existe $\alpha \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ con*

$$\mathrm{in}(\alpha(f_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(f_t)) = w_1 \wedge \cdots \wedge w_t.$$

Entonces el conjunto $U = \{\alpha \in \mathrm{GL}_{n+1}(k) : \mathrm{in}(\alpha(f_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(f_t)) = w_1 \wedge \cdots \wedge w_t\}$ es un subconjunto abierto no vacío de Zariski de $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$.

Demostración. Por definición, $U \neq \emptyset$. Sea $p(\alpha)$ el coeficiente de $w_1 \wedge \cdots \wedge w_t$ en la escritura de $\alpha(f_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(f_t)$ como combinación lineal de monomios estándar exteriores. Entonces α pertenece a U si y solo si $p(\alpha) \neq 0$.
Por otro lado, es claro que $p(\alpha)$ es un polinomio en las entradas de α y cuyos coeficientes están determinados por $f_1, \ldots, f_t$ (al aplicar un α genérico obtenemos coeficientes polinómicos que dependen de α, y al hacer el producto exterior se obtiene como coeficientes sumas de productos de estos coeficientes). Por tanto U es el complementario del cerrado de Zariski definido por los ceros de este polinomio. □

Ejemplo 3.6. Sea $R = k[x_0, x_1]$, y $>$ el orden lexicográfico en R. Entonces los monomios exteriores estándar en $\bigwedge^2 R_2$ son:

$$x_0^2 \wedge x_0x_1 > x_0^2 \wedge x_1^2 > x_0x_1 \wedge x_1^2.$$

Sea $f_1 = x_0^2$, $f_2 = x_1^2$ y $\alpha \in \mathrm{GL}_2(k)$. Entonces $\alpha(f_1) = \alpha_{00}^2x_0^2 + 2\alpha_{00}\alpha_{10}x_0x_1 + \alpha_{10}^2x_1^2$ y $\alpha(f_2) = \alpha_{01}^2x_0^2 + 2\alpha_{01}\alpha_{11}x_0x_1 + \alpha_{11}^2x_1^2$. Por tanto,

$$\alpha(f_1) \wedge \alpha(f_2) = (2\alpha_{00}^2\alpha_{01}\alpha_{11} - 2\alpha_{01}^2\alpha_{00}\alpha_{10})x_0^2 \wedge x_0x_1 + \cdots ,$$

así que $p(\alpha) = 2\alpha_{00}\alpha_{01}(\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10})$.

Teorema 3.7 ([13, Thm. 4.1.2])**.** *Sea $I \subset R$ un ideal homogéneo. Entonces existe un abierto no vacío $U \subset \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ tal que $\mathrm{in}(\alpha I) = \mathrm{in}(\alpha' I)$ para todo $\alpha, \alpha' \in U$.*

Demostración. Sea $d \in \mathbb{Z}_+$ con $I_d \neq 0$. Sea $f_1, \ldots, f_t$ una base de I_d, y $U_d \subset \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ el abierto no vacío de Zariski definido como en el lema 3.5 para el subespacio vectorial $I_d \subset R_d$. Para los $d \in \mathbb{Z}_+$ con $I_d = 0$, tomamos $U_d = \mathrm{GL}_{n+1}(k)$.

Sea $\alpha \in U_d$ y sea $J_d = \mathrm{in}(\alpha I_d) = \mathrm{in}(\alpha I)_d$. Por la definición de U_d, $\mathrm{in}(\alpha(f_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(f_t)) = w_1 \wedge \cdots \wedge w_t$ $\forall \alpha \in U_d$. Por la observación 3.4, $\mathrm{in}(\alpha I_d)$ tiene a $w_1, \ldots, w_t$ como base (para cualquier $\alpha \in U_d$ por el comentario previo). Deducimos que J_d no depende de la elección de $\alpha \in U_d$.

Ahora veremos que $J = \bigoplus_d J_d$ es un ideal. Para $d \in \mathbb{Z}_+$ tenemos que $U_d \cap U_{d+1} \neq \emptyset$. Entonces para cualquier $\alpha \in U_d \cap U_{d+1}$ tenemos que

$$R_1J_d = R_1\,\mathrm{in}(\alpha I_d) \subset \mathrm{in}(\alpha I_{d+1}) = J_{d+1}.$$

De aquí se deduce que J es un ideal, ya que de lo anterior se deduce que $R_tJ_d \subset J_{d+t}$ y tenemos que $RJ = \bigoplus_t R_tJ \subset J$.

Sea c el mayor grado de un generador de J, y sea $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_c$. Para cualquier $\alpha \in U$ veremos que $J_d = \mathrm{in}(\alpha I_d)$ para todo d. Para $d \leq c$ es evidente porque $\alpha \in U_d$ para todo $d \leq c$. Para $d > c$ lo probaremos por inducción. Tenemos que $J_d = R_1J_{d-1}$ por ser d mayor que el grado de cualquier generador de J (los generadores están fijos desde que elegimos el c). Por tanto, aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que:

$$J_d = R_1J_{d-1} = R_1\,\mathrm{in}(\alpha I_{d-1}) \subset \mathrm{in}(\alpha I_d).$$

Si ahora consideramos $\alpha' \in U_d$, tenemos que $\dim_k J_d = \dim_k \mathrm{in}(\alpha' I_d) = \dim_k \mathrm{in}(\alpha I_d)$ porque α, α' son automorfismos, así que la dimensión no cambia. Luego $J_d = \mathrm{in}(\alpha I_d)$. El abierto de Zariski no vacío U cumple la propiedad del enunciado. $\square$

El ideal $\mathrm{in}(\alpha I)$ en el teorema se llama *ideal inicial genérico* de I, y se denota por $\mathrm{gin}(I)$. Por otro lado, la demostración del teorema 3.7 nos da la siguiente información adicional sobre $\mathrm{gin}(I)$ que utilizaremos más adelante en la demostración del teorema 3.10.

Proposición 3.8 ([13, Prop. 4.1.7]). *Sea $t = \dim_k I_d$ y sea $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_t$ el monomio exterior estándar que genera $\bigwedge^t \mathrm{gin}(I)_d$. Entonces*

$$w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_t = \text{máx} \left\{ \mathrm{in}(f) : 0 \neq f \in \bigwedge^t \alpha(I)_d, \alpha \in \mathrm{GL}_{n+1}(k) \right\}.$$

Ejemplo 3.9. Consideramos el ideal homogéneo $I \subset R = \mathbb{C}[x_0, x_1]$ generado por los polinomios $f_1 = x_1^2$ y $f_2 = x_0^2$. Vamos a realizar una transformación genérica φ definida por:

$$\begin{aligned} x_0 &\mapsto t_{00}x_0 + t_{10}x_1, \\ x_1 &\mapsto t_{01}x_0 + t_{11}x_1. \end{aligned}$$

A continuación consideramos el ideal $J = \varphi(I) = \langle \varphi(f_1), \varphi(f_2) \rangle$ y calculamos su base de Gröbner reducida $\mathcal{G}$ respecto al orden lexicográfico inverso graduado en $k(t_{00}, t_{10}, t_{01}, t_{11})[x_0, x_1]$ con $x_0 > x_1$ usando [9]:

$$\mathcal{G} = \{(2t_{00}t_{01})x_0x_1 + (t_{00}t_{11} + t_{10}t_{01})x_1^2, (t_{00}t_{01})x_0^2 - t_{10}t_{11}x_1^2, x_1^3\}.$$

Vemos que, salvo que $(t_{00}, t_{10}, t_{01}, t_{11}) \in V$, siendo V el conjunto de puntos de $\mathbb{C}^4$ que anulan al polinomio $t_{00}t_{01}$, se tiene que $\mathrm{in}(J) = (x_0^2, x_0x_1, x_1^3)$. Entonces, considerando la identificación de los puntos de $\mathbb{C}^4$ con los elementos de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ y denotando por V' al subconjunto de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ correspondiente a V, vemos que si definimos $U = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \setminus V'$, tenemos un abierto no vacío U tal que $\mathrm{in}(\alpha I) = \mathrm{in}(\alpha' I)$ para todo $\alpha, \alpha' \in U$. Por tanto, hemos encontrado el abierto no vacío del teorema 3.7 y $\mathrm{gin}(I) = (x_0^2, x_0x_1, x_1^3)$. La forma de realizar estos cálculos con [9] es la siguiente:

```
> option(redSB);
> ring R=(0,t00,t10,t01,t11),(x0,x1),dp;
> poly g1=x1^2; poly g2=x0^2;
> ideal I=g1,g2;
> std(I);
_[1]=x1^2
_[2]=x0^2
> map f=R,t00*x0+t10*x1,t01*x0+t11*x1;
> poly p1=f(g1); poly p2=f(g2);
> ideal J=p1,p2;
> J;
J[1]=(t01^2)*x0^2+(2*t01*t11)*x0*x1+(t11^2)*x1^2
J[2]=(t00^2)*x0^2+(2*t00*t10)*x0*x1+(t10^2)*x1^2
```

```
> std(J);
_[1]=(2*t00*t01)*x0*x1+(t00*t11+t10*t01)*x1^2
_[2]=(t00*t01)*x0^2+(-t10*t11)*x1^2
_[3]=x1^3
> ideal G=lead(std(J));
> std(G);
_[1]=x0*x1
_[2]=x0^2
_[3]=x1^3
```

3.2. Propiedades

El subgrupo $\mathcal{B} \subset \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ de todas las matrices triangulares superiores no singulares se llama el *subgrupo de Borel* de $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$. Una matriz $\alpha = (a_{ij}) \in \mathcal{B}$ se llama una matriz *elemental superior* si $a_{ii} = 1$ para todo i y existen enteros $0 \leq k < l \leq n$ tales que $a_{kl} \neq 0$ mientras que el resto de entradas son nulas. Es decir, son matrices con unos en la diagonal y un único elemento no nulo fuera de ella y que está por encima. El subgrupo $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ de todas las matrices diagonales no singulares junto con el conjunto de todas las matrices elementales superiores genera $\mathcal{B}$.

Diremos que un ideal homogéneo $I \subset R$ es *Borel-fixed* si es fijo bajo la acción de $\mathcal{B}$, es decir, $gI = I$ para todo $g \in \mathcal{B}$. Lo que vamos a ver ahora es que el ideal inicial genérico lo es.

Teorema 3.10 (Galligo, Bayer y Stillman, [10, Thm. 15.20])**.** *Si $I \subset R$ es un ideal homogéneo entonces $\mathrm{gin}(I)$ es Borel-fixed: para todo $g \in \mathcal{B}$, $g(\mathrm{gin}(I)) = \mathrm{gin}(I)$.*

Demostración. Cambiando I por αI para un $\alpha \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ genérico, por el teorema 3.7 podemos suponer que $\mathrm{in}(I) = \mathrm{gin}(I)$. Antes hemos mencionado que las matrices diagonales no singulares junto con las matrices elementales superiores generan $\mathcal{B}$. Los ideales monomiales son invariantes por la acción de las matrices diagonales (no singulares), ya que si δ es una matriz diagonal invertible con diagonal $d_0, \ldots, d_n$ y u es un monomio, entonces $\delta(u) = u(d_0, \ldots, d_n)u$ y $u(d_0, \ldots, d_n) \in k \setminus \{0\}$. Aquí $u(d_0, \ldots, d_n)$ denota la evaluación del monomio u en el punto $(d_0, \ldots, d_n)$, esto es, si $u = x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, entonces $u(d_0, \ldots, d_n) = d_0^{a_0} d_1^{a_1} \cdots d_n^{a_n}$.

Por tanto, es suficiente probar el resultado para matrices elementales superiores. Sea $\gamma = I + \gamma'$ una matriz elemental superior (I es la matriz identidad y γ' una matriz con una única entrada no nula γ'_{ij} con $i < j$). Probaremos que para cada grado d tenemos que $\gamma(\mathrm{in}(I_d)) = \mathrm{in}(I_d)$.

Podemos elegir una base $f_1, \ldots, f_t$ para I_d con $\mathrm{in}(f_1) > \cdots > \mathrm{in}(f_t)$. Sea $f = f_1 \wedge \cdots \wedge f_t$ el generador correspondiente del subespacio unidimensional $\bigwedge^t I_d \subset \bigwedge^t R_d$. Tenemos que $\mathrm{in}(f) = \mathrm{in}(f_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{in}(f_t)$.

Dejamos actuar a γ como una aplicación k-lineal sobre $\bigwedge^t R_d$ definiendo

$$\gamma(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_t) = \gamma(w_1) \wedge \gamma(w_2) \wedge \cdots \wedge \gamma(w_t)$$

para cualquier monomio exterior estándar $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_t \in \bigwedge^t R_d$.

Si $\gamma(\mathrm{in}(I_d)) \neq \mathrm{in}(I_d)$ entonces $\gamma \,\mathrm{in}(f) \neq \mathrm{in}(f)$. Como γ' tiene el término no nulo por encima de la diagonal, los términos de $\gamma \,\mathrm{in}(f)$ que no sean $\mathrm{in}(f)$ son estrictamente mayores que $\mathrm{in}(f)$. Sea am uno de esos términos, donde a es un escalar no nulo y m es un monomio de $\bigwedge^t R_d$. Mostraremos a continuación que para una matriz diagonal δ apropiada, el monomio m aparece con un coeficiente no nulo en $\gamma\delta f$. Esto contradiría la proposición 3.8, por lo que tendríamos que $\gamma(\mathrm{in}(I_d)) = \mathrm{in}(I_d)$ para cada grado d, probando el teorema.

Para cada término $q = aq_1 \wedge \cdots \wedge q_t \in \bigwedge^t R_d$ definimos el *peso* de q como el monomio $w = \prod_s q_i \in R$. Sea $f_w \in \bigwedge^t R_d$ la suma de todos los términos de f con diferente peso w, de manera que tenemos $f = \sum_w f_w$. Sea w_0 el peso de $\mathrm{in}(f)$. Diferentes términos de f pueden tener el mismo peso, pero $\mathrm{in}(f)$ es el único término con peso w_0. Si δ es una matriz diagonal con diagonal $d_0, \ldots, d_n$, por el comentario que hemos hecho al principio de la demostración tenemos

$$\delta f = \sum_w w(d_0, \ldots, d_n) f_w$$

donde $w(d_0, \ldots, d_n)$ es la evaluación de w en el punto $(d_0, \ldots, d_n)$. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \gamma\delta f &= \sum_w \gamma(w(d_0, \ldots, d_n) f_w) = \sum_w w(d_0, \ldots, d_n)\gamma f_w \\ &= w_0(d_0, \ldots, d_n)\gamma \,\mathrm{in}(f) + \sum_{w \neq w_0} w(d_0, \ldots, d_n)\gamma f_w. \end{aligned}$$

En consecuencia, el coeficiente de m en $\gamma\delta f$ tiene la forma

$$c(d_0, \ldots, d_n) = aw_0(d_0, \ldots, d_n) + \sum_{w \neq w_0} a_w w(d_0, \ldots, d_n),$$

donde $a_w \in k$ es el coeficiente de m en γf_w. Como el término $aw_0(d_0, \ldots, d_n)$ es no nulo (por como elegimos el monomio m), el polinomio c es no nulo. Puesto que asumimos que k es infinito, existen valores $d_0, \ldots, d_n$ tales que $c(d_0, \ldots, d_n)$ es no nulo, que es lo que queríamos probar. □

Ahora estudiamos la naturaleza de los ideales Borel-fixed. En esta parte no solo trataremos el caso de característica 0, por lo que especificaremos las hipótesis correspondientes en cada caso. Para el caso de característica p nos será útil introducir el orden parcial $\prec_p$ en los números naturales definido de la manera siguiente: decimos que $a \prec_p b$ si el coeficiente binomial $\binom{b}{a} \not\equiv 0 \mod p$. Por $\prec_0$ entenderemos el orden total habitual $\leq$. Para $p > 0$, tenemos la siguiente descripción explícita:

Proposición 3.11 (Gauss, [10, Prop. 15.21])**.** *Sea p un número primo. Tenemos $a \prec_p b$ si y solo si cada dígito en la expansión en base p de a es $\leq$ que el correspondiente dígito en la expansión en base p de b.*

La prueba es inmediata a partir del siguiente resultado:

Lema 3.12 (Lucas, [10, Lem. 15.22]). *Sea p un número primo. Si $a = \sum_i a_i p^i$ y $b = \sum_i b_i p^i$ con $0 \leq a_i, b_i < p$, entonces $\binom{b}{a} \equiv \prod_i \binom{b_i}{a_i} \mod p$.*

Demostración. Basta comparar los coeficientes de t^a de las siguientes expresiones

$$(t+1)^b = (t+1)^{\sum b_i p^i} = \prod_i (t+1)^{b_i p^i} \equiv \prod_i (t^{p^i}+1)^{b_i} \mod p,$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que p es primo y $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$ para k distinto de 0 o p. $\square$

Es conocido que los ideales monomiales son exactamente los ideales fijos bajo la acción del grupo de las matrices diagonales ([10, Thm. 15.23]). Ahora vamos a ver cuál es la caracterización combinatoria de los ideales Borel-fixed.

Proposición 3.13 ([10, Thm. 15.23]). *Sea $J \subset R = k[x_0, \ldots, x_n]$ un ideal y sea k un cuerpo de característica $p \geq 0$. Entonces J es fijo bajo la acción del grupo $\mathcal{B}$ de matrices triangulares superiores (es decir, J es Borel-fixed) si y solo si J está generado por monomios y la siguiente condición se satisface para todo $i < j$ y todos los generadores monomiales m de J:*
Si m es divisible por x_j^t pero no lo es por ninguna potencia mayor de x_j, entonces se tiene que $(x_i/x_j)^s m \in J$ para todo $i < j$ y $s \prec_p t$.

A partir de esta proposición podemos demostrar la siguiente propiedad de los ideales Borel-fixed:

Proposición 3.14 (Bayer y Stillman, [10, Prop. 15.24]). *Sea $I \subset R = k[x_0, \ldots, x_n]$ un ideal Borel-fixed. Para cualquier $j = 0, \ldots, r$ tenemos*

$$I : x_j^\infty = I : (x_0, \ldots, x_j)^\infty.$$

Si $\operatorname{char} k = 0$, *entonces también se da que*

$$I : x_j^s = I : (x_0, \ldots, x_j)^s$$

para todo $s \geq 0$.

Demostración. Supongamos que para algún entero s y algún monomio m tenemos $x_j^s m \in I$. Para el primer resultado basta probar que si $0 \leq i < j$ entonces para algún $s' \geq s$ tenemos que $x_i^{s'} m \in I$. Esto es porque si s es suficientemente grande, entonces

$$I : x_j^\infty = I : x_j^s \subset I : (x_0^{s'}, \ldots, x_j^{s'}) \subset I : (x_0, \ldots, x_j)^{(j+1)s'} \subset I : (x_0, \ldots, x_j)^\infty,$$

y la otra inclusión es obvia.

Aumentando s si es necesario, podemos suponer que x_j no divide a m. Si ahora aplicamos la proposición 3.13 a $x_j^s m$, obtenemos que $(x_i/x_j)^l x_j^s m \in I$ para todo $i < j$ y $l \prec_p s$. En particular, para $l = s$, obtenemos $x_i^s m \in I$, que es lo que buscábamos.

Supongamos ahora que $\operatorname{char} k = 0$. Si $x_j^s m \in I$, entonces por la caracterización de la proposición 3.13, aplicada reiteradamente, cualquier monomio $n = x_0^{s_0} \cdots x_j^{s_j}$ con $\sum_u s_u = s$ satisface $nm \in I$, luego $I : x_j^s \subset I : (x_0, \ldots, x_j)^s$. De nuevo, la otra inclusión es obvia. $\square$

Vamos a introducir algo de notación para el siguiente resultado, que también nos servirá para otros posteriores.

Definición 3.15. Sea R un anillo y M un R-módulo. Un ideal primo $\mathfrak{p}$ de R se llama *primo asociado* a M si $\mathfrak{p}$ es el anulador $\operatorname{ann}(x) = \{a \in R : ax = 0\}$ para algún $x \in M$. El conjunto de primos asociados a M se denota $\operatorname{Ass}(M)$. Para un ideal I de R, los primos asociados a el R-módulo R/I se llaman *divisores primos* de I, aunque también diremos que son primos asociados a I.

De la definición es obvio que, como cada primo $\mathfrak{p}$ asociado a un ideal I se puede expresar como $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}(f)$ para un cierto $f \in R/I$, tomando la contraimagen de f por el paso al cociente tenemos que $\mathfrak{p} = I : (f)$.
Por otro lado, es conocido que si tenemos una descomposición primaria irredundante de un ideal $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$, los ideales primos $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, $1 \leq i \leq t$, son únicos y coinciden con $\operatorname{Ass}(R/I)$, los primos asociados a I (ver [16, Thm. 6.8]). Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el siguiente corolario:

Corolario 3.16 ([10, Prop. 15.24])**.** *Si I es un ideal Borel-fixed en R, y $\mathfrak{p}$ es un primo asociado a I, entonces $\mathfrak{p} = (x_0, \ldots, x_j)$ para algún j. Además, si $P = (x_0, \ldots, x_t)$ es un primo asociado maximal, entonces $x_{t+1}, \ldots, x_r$ (en cualquier orden) es una sucesión R/I-regular.*

Demostración. Puesto que I es un ideal monomial, cualquier primo asociado a I está generado por un conjunto de variables. Supongamos que j es el mayor índice tal que $x_j \in \mathfrak{p}$; tenemos que ver que $x_i \in \mathfrak{p}$ para $i < j$. Puesto que $\mathfrak{p}$ es un primo asociado podemos escribir $\mathfrak{p} = (I : f)$ para algún polinomio f. Puesto que $x_i f \in I$, deducimos de la proposición 3.14 que $x_i^s f \in I$ para algún s. Por tanto, $x_i^s \in \mathfrak{p}$, y como $\mathfrak{p}$ es primo, tenemos que $x_i \in \mathfrak{p}$. Si $P = (x_0, \ldots, x_t)$ es un primo asociado maximal, entonces las variables $x_{t+1}, \ldots, x_r$ no pueden aparecer en los generadores minimales de I. Por tanto, $x_{t+1}, \ldots, x_r$ es una sucesión R/I-regular (en cualquier orden). $\square$

Ejemplo 3.17. Partimos del ideal inicial genérico calculado en el ejemplo 3.9, $\operatorname{gin}(I) = (x_0^2, x_0x_1, x_1^3)$. Vamos a ir comprobando las propiedades que hemos ido mencionando para el caso de un cuerpo de característica 0. La propiedad de ser Borel-fixed la podemos comprobar a partir de la definición haciendo un cambio de variables triangular y viendo que obtenemos el mismo ideal. Para ello, usando [9]:

```
> option(redSB);
> ring R=(0,t00,t10,t11),(x0,x1),dp;
> poly g1=x0^2; poly g2=x0*x1; poly g3=x1^3;
> ideal I=g1,g2,g3;
> map f=R,t00*x0,t10*x0+t11*x1;
> poly p1=f(g1); poly p2=f(g2);poly p3=f(g3);
> ideal J=p1,p2,p3;
```

```
> J;
J[1]=(t00^2)*x0^2
J[2]=(t00*t10)*x0^2+(t00*t11)*x0*x1
J[3]=(t10^3)*x0^3+(3*t10^2*t11)*x0^2*x1+(3*t10*t11^2)*x0*x1^2+(t11^3)*x1^3
> std(J);
_[1]=x0*x1
_[2]=x0^2
_[3]=x1^3
```

Vemos que obtenemos el mismo ideal. Por otro lado, podemos utilizar la caracterización 3.13 para comprobarlo. Primero observamos que el ideal es monomial, por lo que solo tenemos que comprobar la segunda condición. Un generador es x_1^3, lo que, según la caracterización, debe implicar que $x_0x_1^2$, $x_0^2x_1$ y x_0^3 estén también en el ideal, lo cual vemos que es cierto. Otro generador es x_0x_1, por lo que x_0^2 debe estar en el ideal, que es cierto de nuevo. El generador x_0^2 no nos da ninguna condición adicional, así que deducimos de la caracterización que este ideal es Borel-fixed.
Sobre la proposición 3.14, la primera parte es trivialmente cierta porque $x_0^2, x_1^3 \in \text{gin}(I)$, así que las saturaciones son todas iguales a $R = k[x_0, x_1]$. Por otro lado, como estamos en característica 0, se debe cumplir también la segunda parte de la proposición 3.14. Para $s \geq 3$ es trivial porque $x_1^3 \in \text{gin}(I)$, para $s = 1, 2$ lo podemos comprobar utilizando [9] (suponiendo que las definiciones ya están dadas como en la parte anterior del código):

```
> LIB "elim.lib";
> ideal m=x0,x1;
> quotient(I,x1);
_[1]=x0
_[2]=x1^2
> quotient(I,m);
_[1]=x0
_[2]=x1^2
> quotient(I,x1^2);
_[1]=x1
_[2]=x0
> quotient(I,m^2);
_[1]=x1
_[2]=x0
```

Vemos que los cocientes coinciden. Finalmente, podemos comprobar la propiedad del corolario 3.16 calculando una descomposición primaria del ideal con [9]:

```
> LIB "primdec.lib";
> primdecGTZ(I);
[1]:
   [1]:
      _[1]=x0*x1
      _[2]=x0^2
      _[3]=x1^3
   [2]:
      _[1]=x0
      _[2]=x1
```

Obtenemos que solo hay una componente primaria (que es el propio ideal), y un único primo asociado (x_0, x_1) (que es su radical), por lo que vemos que se cumple el corolario 3.16.

3.3. El orden lexicográfico inverso y m-regularidad

En esta sección vamos a estudiar la relación entre el orden lexicográfico inverso y la regularidad de un ideal homogéneo I. En general se tiene la desigualdad

$$\operatorname{reg}(\operatorname{in}(I)) \geq \operatorname{reg}(I).$$

Esto lo podemos ver de la siguiente manera: dada una resolución graduada de $\operatorname{in}(I)$ para un cierto orden, entonces podemos levantarla (completarla) a una resolución graduada del ideal I, que no tiene por qué ser minimal aunque la de $\operatorname{in}(I)$ lo sea. Esto se debe a que podemos completar las sizigias de los términos iniciales a sizigias de elementos de I, pero el conjunto que obtenemos no será necesariamente minimal. De la resolución obtenida de esta manera podemos extraer una resolución minimal para I, que nos da la desigualdad $\operatorname{reg}(\operatorname{in}(I)) \geq \operatorname{reg}(I)$ (y también nos da que $\operatorname{pd}(\operatorname{in}(I)) \geq \operatorname{pd}(I)$). Lo que vamos a ver en esta sección es que se da la igualdad $\operatorname{reg}(\operatorname{gin}(I)) = \operatorname{reg}(I)$ cuando utilizamos el orden lexicográfico inverso, y que en característica 0 la regularidad coincide además con el mayor grado de un generador minimal de $\operatorname{gin}(I)$.

Consideramos el ideal maximal homogéneo $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_n)$ en $R = k[x_0, \ldots, x_n]$. I denotará un ideal homogéneo y M un R-módulo graduado. Además, supondremos que k es un cuerpo infinito. Por otro lado, en esta sección y las siguientes hay resultados que requieren de herramientas de álgebra homológica. Como el estudio de este área no es el objetivo del trabajo y llevaría mucho tiempo, cuando necesitemos resultados que hagan uso de estas herramientas no incluiremos la demostración en la memoria. Como referencia, utilizaremos principalmente los resultados de Bayer y Stillman de [2].

Definición 3.18. Sea $R = k[x_0, \ldots, x_n]$. Un ideal homogéneo I es *m-regular* si existe una resolución libre

$$0 \longrightarrow \bigoplus_j R(-e_{sj}) \xrightarrow{\varphi_s} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_j R(-e_{1j}) \xrightarrow{\varphi_1} \bigoplus_j R(-e_{0j}) \xrightarrow{\varphi_0} I \longrightarrow 0$$

de I, con $e_{ij} - i \leq m$ para todo i, j.

Directamente de la definición se tiene que la regularidad de I es el menor m tal que I es m-regular.

Definición 3.19. Sea $I \subset R$ un ideal. La *saturación* de I se define por $I^{\text{sat}} = \bigcup_{i\geq 0} I : \mathfrak{m}^i = I : (\mathfrak{m})^\infty$. Cuando $I = I^{\text{sat}}$, decimos que I es *saturado.*

Proposición 3.20. *Sea $I \subset R$ un ideal homogéneo. Entonces para todo d suficientemente grande se tiene que $I_d = I_d^{sat}$.*

Demostración. Si el ideal es saturado entonces para todo $d \geq 0$ se cumple. Si I no es saturado, entonces tiene una componente $\mathfrak{m}$-primaria en su descomposición primaria. En efecto, como no es saturado, existe $f \in I : \mathfrak{m}$ tal que $f \notin I$. Entonces vemos que $I : f \supset \mathfrak{m}$, pero como $\mathfrak{m}$ es maximal y $f \notin I$, ha de ser $I : f = \mathfrak{m}$. Como $\mathfrak{m}$ maximal, es primo, por lo que $I : f$ es un primo asociado a I e I tiene una componente $\mathfrak{m}$-primaria.
Llamamos Q a la componente $\mathfrak{m}$-primaria de I, así que tenemos $I = Q \cap J$ para un ideal J que no tiene ninguna componente $\mathfrak{m}$-primaria, por lo que J es saturado, y de hecho se tiene que $I^{\mathrm{sat}} = Q^{\mathrm{sat}} \cap J^{\mathrm{sat}} = J$, así que tenemos $I = Q \cap I^{\mathrm{sat}}$. Puesto que Q es $\mathfrak{m}$-primario, tenemos que $\sqrt{Q} = \mathfrak{m}$, por lo que existe un d tal que $\left(\sqrt{Q}\right)^d = \mathfrak{m}^d \subset Q$. Por otro lado, si $I^{\mathrm{sat}} \neq R$, tenemos que $I^{\mathrm{sat}} \subset \mathfrak{m}$, luego $I_d^{\mathrm{sat}} \subset \mathfrak{m}_d \subset \mathfrak{m}^d$. Juntando lo que hemos obtenido, vemos que para d suficientemente grande $I_d^{\mathrm{sat}} \subset \mathfrak{m}^d \subset Q$, así que $I_d = Q_d \cap I_d^{\mathrm{sat}} = I_d^{\mathrm{sat}}$ (en el caso de $I^{\mathrm{sat}} = R$, $I_d = Q_d \supset \mathfrak{m}_d = I_d^{\mathrm{sat}}$). $\square$

Definición 3.21. Un ideal $I \subset R$ es m-saturado si $I_d = I_d^{\mathrm{sat}}$ para todos los grados $d \geq m$. El menor grado d para el que se da la igualdad se llama *índice de saturación* de I y se denota por $\mathrm{sat}(I)$.

Observación 3.22. Se tiene que si I es m-regular, entonces I es m-saturado (ver [2, Rem. 1.3]).

Puesto que hemos supuesto que el cuerpo k es infinito, si $\mathfrak{m}$ no es un primo asociado a I, podemos encontrar un elemento lineal $h \in R_1$ que no sea divisor de cero en R/I.

Observación 3.23. Un elemento $h \in R$ es un no divisor de cero si, para $a \in R$, $ah = 0 \Rightarrow a = 0$. Una reformulación de la definición anterior nos da que si h es un no divisor de cero en R/I, entonces $(I : h) = I$.

Definición 3.24. Llamaremos a un elemento $h \in R$ *genérico* para I si es un no divisor de cero en R/I^{sat}. Si $\dim(R/I) = 0$, se considera que todo $h \in R$ es genérico para I.
Para $j > 0$, definimos $U_j(I)$ como el subconjunto

$$\{(h_1, \ldots, h_j) \in R_1^j \mid h_i \text{ es genérico para } (I, h_1, \ldots, h_{i-1}),\ 1 \leq i \leq j\}$$

de R_1^j.

En la primera sección de [2] se encuentra un criterio para determinar cuando un ideal homogéneo es m-regular:

Teorema 3.25 ([2, Thm. 1.10])**.** *Sea $I \subset R$ un ideal generado por elementos de grado $\leq m$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *I es m-regular,*

(b) *Existen $h_1, \ldots, h_j \in R_1$ para algún $j \geq 0$ tales que*

$$((I, h_1, \ldots, h_{i-1}) : h_i)_m = (I, h_1, \ldots, h_{i-1})_m \quad \text{para } i = 1, \ldots, j,$$

y

$$(I, h_1, \ldots, h_j)_m = R_m.$$

(c) *Sea* $r = \dim(R/I)$. *Para todo* $(h_1, \ldots, h_r) \in U_r(I)$, *y para todo* $p \geq m$,

$$((I, h_1, \ldots, h_{i-1}) : h_i)_p = (I, h_1, \ldots, h_{i-1})_p \ \textit{para} \ i = 1, \ldots, r,$$

y

$$(I, h_1, \ldots, h_r)_p = R_p.$$

Además, si $h_1, \ldots, h_j$ *satisfacen la condición* (b), *entonces* $(h_1, \ldots, h_j) \in U_j(I)$.

En el tratamiento que hemos hecho del ideal inicial genérico tenemos libertad para elegir el orden monomial. Vamos a ver que, para el orden lexicográfico inverso obtenemos ciertas propiedades adicionales.

Definición 3.26. Sean $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$ vectores de exponentes. El orden lexicográfico inverso en los monomios de R del mismo grado se define como $x^\alpha > x^\beta$ si la última entrada no nula de $\alpha - \beta$ es negativa.

Observación 3.27. Se trata de un orden graduado que cumple que $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$. Sea $f \in R$ homogéneo e $\mathrm{in}(f) \in R$ su monomio inicial para un cierto orden en R. El orden anterior se puede caracterizar por la siguiente propiedad: $x_i | f$ si y solo si $x_i | \mathrm{in}(f)$, para cada i y para cada $f \in R = k[x_0, \ldots, x_i]$ (se deduce directamente de la definición). Las consecuencias de esta relación serán el objeto de estudio de los resultados que presentamos a continuación. Puesto que vamos a tratar con ideales homogéneos, en general con el orden que hemos definido para monomios del mismo grado es suficiente, pero si queremos considerar un orden total entonces realmente tendríamos que hablar del orden lexicográfico inverso graduado. Aunque vamos a utilizar siempre el orden lexicográfico inverso graduado, omitiremos la palabra graduado en lo que sigue.

Lema 3.28 ([2, Lem. 2.2]). *Sea* $>$ *el orden lexicográfico inverso, y escogemos un* i *entre 0 y* n, $0 \leq i \leq n$.

(a) $\mathrm{in}(I, x_n, \ldots, x_i) = (\mathrm{in}(I), x_n, \ldots, x_i)$.

(b) *Sean* $x_n, \ldots, x_{i+1} \in I$, *y sea* $m \geq 0$. *Entonces*

$$(I : x_i)_m = I_m \Leftrightarrow (\mathrm{in}(I) : x_i)_m = \mathrm{in}(I)_m.$$

(c) *Sean* $x_n, \ldots, x_{i+1} \in I$, *y sea* $m \geq 0$. *Suponemos que* $(I : x_i)_d = I_d$ *para todo* $d \geq m$, *y que* $\mathrm{in}(I, x_i)$ *está generado por elementos de grado* $\leq m$. *Entonces* $\mathrm{in}(I)$ *está generado por elementos de grado* $\leq m$.

Demostración. (a) $\mathrm{in}(I, x_n, \ldots, x_i) \supset (\mathrm{in}(I), x_n, \ldots, x_i)$ para cualquier orden $>$; tenemos que ver que, para el orden lexicográfico inverso, $\mathrm{in}(I, x_n, \ldots, x_i) \subset (\mathrm{in}(I), x_n, \ldots, x_i)$. Supongamos que $f \in (I, x_n, \ldots, x_i)$. Si $x_j | \mathrm{in}(f)$ para algún $j \geq i$, entonces $\mathrm{in}(f) \in (x_j) \subset (\mathrm{in}(I), x_n, \ldots, x_i)$. Si no es así, escribimos $f = g + h_n x_n + \cdots + h_i x_i$ para $g \in I$ y $h_n, \ldots, h_i \in R$. Puesto que $\mathrm{in}(f) > \mathrm{in}(h_n x_n + \cdots + h_i x_i)$ en el orden lexicográfico inverso (ya que solo tiene las variables x_j, con $j < i$), $\mathrm{in}(f) = \mathrm{in}(g)$, así que $\mathrm{in}(f) \in \mathrm{in}(I) \subset (\mathrm{in}(I), x_n, \ldots, x_i)$.
(b) Supongamos que $(I : x_i)_m = I_m$, y que $x^\alpha \in R_m$. Si $x_i x^\alpha \in \mathrm{in}(I)_{m+1}$, entonces

$x_i x^\alpha = \mathrm{in}(f)$ para algún $f \in I_{m+1}$. Si alguno de los $x_n, \dots, x_{i+1} \in I$ divide a x^α, entonces $x^\alpha \in \mathrm{in}(I)_m$. Si no, entonces restando múltiplos de $x_n, \dots, x_{i+1}$, podemos suponer que $f \in k[x_0, \dots, x_i]$. Entonces, por la caracterización del orden lexicográfico que hemos visto en la observación 3.27, $f = x_i g$ para algún $g \in R_m$, con $\mathrm{in}(g) = x^\alpha$. Por hipótesis $g \in I_m$, así que $x^\alpha \in \mathrm{in}(I)_m$.
Supongamos que $(\mathrm{in}(I) : x_i)_m = \mathrm{in}(I)_m$. Sea $x_i f \in I_{m+1}$, y supongamos por inducción que para todo $g \in R_m$ tal que $\mathrm{in}(g) < \mathrm{in}(f)$ y $x_i g \in I_{m+1}$, $g \in I_m$. Puesto que $x_i \,\mathrm{in}(f) = \mathrm{in}(x_i f) \in \mathrm{in}(I)_{m+1}$, $\mathrm{in}(f) \in \mathrm{in}(I)_m$ por hipótesis. Entonces $\mathrm{in}(f) = \mathrm{in}(g)$ para algún $g \in I_m$. En consecuencia, $x_i(f-g) \in I_{m+1}$, e $\mathrm{in}(f-g) < \mathrm{in}(f)$, así que por inducción $f - g \in I_m$. Por tanto, $f \in I_m$.
(c) Sea $f \in I$ homogéneo de grado $> m$. Si algún $x_n, \dots, x_{i+1}$ divide a $\mathrm{in}(f)$, entonces $\mathrm{in}(f)$ no puede ser un generador minimal de $\mathrm{in}(I)$. Si no es así, entonces restando múltiplos de $x_n, \dots, x_{i+1}$, podemos suponer que $f \in k[x_0, \dots, x_i]$. Si $x_i | \mathrm{in}(f)$, entonces $f = x_i g$ para algún $g \in R_m$ por ser $>$ el orden lexicográfico inverso. Como $\deg(f) > m$, se tiene que $g \in (I : x_i)_d$ para $d = \deg(f) - 1 \geq m$, así que $g \in I_d$. Por tanto, $\mathrm{in}(f) = x_i \,\mathrm{in}(g)$ no es un generador minimal de $\mathrm{in}(I)$.
Si ninguno de los $x_n, \dots, x_i$ divide a $\mathrm{in}(f)$, escribimos $\mathrm{in}(f) = x^\alpha \,\mathrm{in}(g)$ para $g \in (I, x_i)$ y $x^\alpha \neq 1$. Esto se puede hacer porque $f \in I \subset (I, x_i)$, pero $\mathrm{in}(f)$ tiene un grado demasiado alto para ser un generador minimal de $\mathrm{in}(I, x_i)$. Escribimos $g = g_1 + x_i g_2$, con $g_1 \in I$. Puesto que $\mathrm{in}(g) > \mathrm{in}(x_i g_2)$ en el orden lexicográfico inverso, $\mathrm{in}(g) = \mathrm{in}(g_1)$. Por tanto, $\mathrm{in}(f) = x^\alpha \,\mathrm{in}(g_1)$ no es un generador minimal de $\mathrm{in}(f)$. □

Lema 3.29 ([2, Lem. 2.3])**.** *Sea $r \geq 0$, sea $m \geq 0$, y sea $>$ el orden lexicográfico inverso. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $((I, x_n, \dots, x_{i+1}) : x_i)_m = (I, x_n, \dots, x_{i+1})_m$ *para* $i = n, \dots, n-r+1$, *y* $(I, x_n, \dots, x_{n-r+1})_m = R_m$.

(b) $((\mathrm{in}(I), x_n, \dots, x_{i+1}) : x_i)_m = (\mathrm{in}(I), x_n, \dots, x_{i+1})_m$ *para* $i = n, \dots, n-r+1$, *y* $(\mathrm{in}(I), x_n, \dots, x_{n-r+1})_m = R_m$.

Demostración. La equivalencia de (a) y (b) se sigue de manera inmediata de las partes (a) y (b) del lema 3.28. □

Teorema 3.30 ([2, Thm. 2.4])**.** *Sea $I \subset R$ un ideal homogéneo, sea $>$ el orden lexicográfico inverso, y sea $r = \dim(S/I)$.*

(a) $(x_n, \dots, x_{n-r+1}) \in U_r(I) \Leftrightarrow (x_n, \dots, x_{n-r+1}) \in U_r(\mathrm{in}(I))$.

(b) *Si* $(x_n, \dots, x_{n-r+1}) \in U_r(I)$, *$I$ e* $\mathrm{in}(I)$ *tienen la misma regularidad.*

Demostración. $r = \dim(R/\mathrm{in}(I))$, ya que I e $\mathrm{in}(I)$ tienen la misma función de Hilbert por el resultado de Macaulay 2.46. Supongamos que $(x_n, \dots, x_{n-r+1}) \in U_r(I)$, y sea m la regularidad de I. Entonces $(x_n, \dots, x_{n-r+1})$ satisface la condición (c) del teorema 3.25 para I (utilizando la definición de $U_r(I)$ y la observación 3.23). Puesto que $(I, x_n, \dots, x_{n-r+1})_m = R_m$, $\mathrm{in}(I, x_n, \dots, x_{n-r+1})$ está generado por elementos de grado $\leq m$. Suponemos por inducción que $\mathrm{in}(I, x_n, \dots, x_i)$ está generado por elementos de grado $\leq m$. Por el apartado (c) del lema 3.28, $\mathrm{in}(I, x_n, \dots, x_{i+1})$ está generado por elementos de grado $\leq m$. Por tanto, $\mathrm{in}(I)$

está generado por elementos de grado $\leq m$.
Por el lema 3.29, $(x_n, \ldots, x_{n-r+1})$ también satisface la condición (b) del teorema 3.25 para $\mathrm{in}(I)$. En consecuencia, $(x_n, \ldots, x_{n-r+1}) \in U_r(\mathrm{in}(I))$ e $\mathrm{in}(I)$ es m-regular, por el teorema 3.25.
Supongamos que $(x_n, \ldots, x_{n-r+1}) \in U_r(\mathrm{in}(I))$, y sea m la regularidad de $\mathrm{in}(I)$. Sea f un generador minimal de I. Si $\mathrm{in}(f) = x^\alpha \,\mathrm{in}(g)$ para algún $g \in I$ y $x^\alpha \neq 1$, entonces f se puede sustituir por $f - x^\alpha g$ como un generador minimal de I, donde $\mathrm{in}(f - x^\alpha g) < \mathrm{in}(f)$. Iterando este proceso, podemos suponer que $\mathrm{in}(f)$ es un generador minimal de $\mathrm{in}(f)$. Puesto que $\mathrm{in}(I)$ está generado por elementos de grado $\leq m$, $\deg(f) \leq m$, luego I está generado por elementos de grado $\leq m$.
De nuevo, por el teorema 3.25 y el lema 3.29, $(x_n, \ldots, x_{n-r+1}) \in U_r(I)$ e I es m-regular. □

Corolario 3.31 ([2, Cor. 2.5]). *Sea $I \subset R$ un ideal homogéneo, sea $>$ el orden lexicográfico inverso, y sea m la regularidad de I. Si $(x_n, \ldots, x_{n-r+1}) \in U_r(I)$, entonces* $\mathrm{in}(I)$ *está generado por elementos de grado $\leq m$.*

Observación 3.32. Llamamos la atención sobre el hecho de que el apartado (a) del teorema 3.30 no dice que $U_r(I) = U_r(\mathrm{in}(I))$, lo cual es falso.

El corolario 3.31 nos dice que para el orden lexicográfico inverso y una elección genérica de coordenadas, $\mathrm{in}(I)$ está generado por monomios de grado $\leq m$. Mostraremos con los siguientes resultados que, en característica cero, esta cota es exacta: para el orden lexicográfico inverso y una elección genérica de coordenadas, $\mathrm{in}(I)$ tiene un generador minimal de grado m.

Proposición 3.33 ([2, Prop. 2.9]). *Sea I un ideal monomial Borel-fixed, generado por monomios de grado $\leq m$, y con un generador minimal de grado m. Si k es de característica cero, entonces la regularidad de I es precisamente m.*

Demostración. $x_0^m \in I$, ya que I contiene un monomio de grado m, e I es Borel-fixed (ver la caracterización 3.13). Elegimos $r \geq 0$ tal que $x_{n-r}^q \in I$, para algún q, pero $x_{n-r+1}^p \notin I$, para todo p. Puesto que I está generado por monomios de grado $\leq m$, $x_{n-r}^m \in I$.
Para ver que I es m-regular, por el teorema 3.25 basta demostrar que

$$((I, x_n, \ldots, x_{i+1}) : x_i)_m = (I, x_n, \ldots, x_{i+1})_m$$

para $i = n, \ldots, n-r+1$, y $(I, x_n, \ldots, x_{n-r+1})_m = R_m$.
Puesto que $x_{n-r}^m \in I$, cualquier monomio de grado m en las variables $x_0, \ldots, x_{n-r}$ está también en I (por la caracterización de los ideales Borel-fixed 3.13). En consecuencia, $(I, x_n, \ldots, x_{n-r+1})_m = R_m$.
Sea $J = (I, x_n, \ldots, x_{i+1})$ para algún i en el rango $n - r + 1 \leq i \leq n$; y supongamos que $x_i x^\alpha \in J$ para un monomio x^α de grado m. Si algún $x_n, \ldots, x_{i+1}$ divide a x^α, entonces $x^\alpha \in J$. Si no, $x_i x^\alpha \in I$. Puesto que $\deg(x_i x^\alpha) = m+1$, $x_i x^\alpha$ no es un generador minimal de I. Escribimos $x_i x^\alpha = x_j x^\beta$, para algún $j \leq i$, donde $x^\beta \in I$. Si $j = i$, entonces $x^\alpha = x^\beta \in J$. Si $j < i$, escribimos $x^\beta = x_i x^\gamma$. Entonces $x^\alpha = x_j x^\gamma$. Por la caracterización de los ideales Borel-fixed 3.13, puesto que $x^\beta = x_i x^\gamma \in I$, y $j \leq i$, se tiene que $x^\alpha = x_j x^\gamma \in I \subset J$. Por tanto, $(J : x_i)_m = J_m$. □

Lema 3.34 ([2, Lem. 2.10]). *Sea U_1 como en el teorema 3.10 (para el orden lexicográfico inverso), y sea U_2 el subconjunto abierto de $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$ dado por $\{g \in \mathrm{GL}_{n+1}(k) \mid (x_n, \ldots, x_{n-r+1}) \in U_r(gI)\}$. Entonces $U_1 \subset U_2$.*

Demostración. Para cada $g \in U_1$, puesto que $\mathrm{in}(gI)$ es Borel-fixed, los primos asociados a $\mathrm{in}(gI)$ son todos de la forma $(x_0, \ldots, x_j)$ para $1 \leq j \leq n$ por el corolario 3.16. Por tanto, $(x_n, \ldots, x_{n-r+1}) \in U_r(\mathrm{in}(gI))$. Por el teorema 3.30, $(x_n, \ldots, x_{n-r+1}) \in U_r(gI)$, por lo que $g \in U_2$. □

Proposición 3.35 ([2, Prop. 2.11]). *Sea $I \subset R$ un ideal homogéneo con regularidad m. Supongamos que k es de característica 0, y definamos el subconjunto abierto de Zariski $U_1 \subset \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ como en el teorema 3.10. Entonces para cada $g \in U_1$, $\mathrm{in}(gI)$ tiene un generador minimal de grado m.*

Demostración. Para cada $g \in U_1$, $\mathrm{in}(gI)$ es Borel-fixed por el teorema 3.10. Puesto que $U_1 \subset U_2$ por el lema 3.34, $\mathrm{in}(gI)$ tiene regularidad m, la misma que I, por el teorema 3.30. Por la proposición 3.33, $\mathrm{in}(gI)$ tiene un generador minimal de grado m. □

Ejemplo 3.36. Volviendo sobre el ejemplo 3.9, vemos que $\mathrm{gin}(I) = (x_0^2, x_0x_1, x_1^3)$ para el orden lexicográfico inverso. Así que $\mathrm{reg}(I) = \mathrm{reg}(\mathrm{gin}(I)) = 3$. Esto lo podemos comprobar con [9] a partir de la resolución libre minimal de R/I:

```
> ring R=(0,t00,t10,t01,t11),(x0,x1),dp;
> poly g1=x1^2; poly g2=x0^2;
> ideal I=g1,g2;
> resolution resI = minres(res(I,0));
> regularity(resI);
3
> print(betti(resI),"betti");
           0     1     2
------------------------
    0:     1     -     -
    1:     -     2     -
    2:     -     -     1
------------------------
total:     1     2     1
```

A partir de la fórmula de Auslander-Buchsbaum 2.37 se puede demostrar el siguiente corolario:

Corolario 3.37 ([10, Cor. 19.11]). *Sea $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios sobre un cuerpo infinito. Si $I \subset R$ es un ideal homogéneo, entonces*

$$\mathrm{pd}(S/I) = \mathrm{pd}(S/\,\mathrm{gin}(I)),$$
$$\mathrm{depth}(S/I) = \mathrm{depth}(S/\,\mathrm{gin}(I)).$$

Resumiendo, lo que hemos conseguido en esta sección es ver que, en coordenadas genéricas, $\mathrm{reg}(R/I) = \mathrm{reg}(\mathrm{in}(R/I))$, $\mathrm{pd}(S/I) = \mathrm{pd}(S/\,\mathrm{in}(I))$ y $\mathrm{depth}(S/I) = \mathrm{depth}(S/\,\mathrm{in}(I))$, donde $\mathrm{in}(I)$ es el ideal inicial con respecto al orden lexicográfico inverso. Además, en característica

0, hemos visto que $\operatorname{reg}(\operatorname{in}(I))$, y por tanto $\operatorname{reg}(I)$, se puede obtener como el mayor grado de un generador minimal de $\operatorname{in}(I)$. Para calcular la regularidad de un ideal homogéneo I aplicando estos resultados, hay que hacer un cambio de coordenadas genérico antes de realizar el cálculo de la base de Gröbner (ver el ejemplo 3.9). Además de que este procedimiento no sirve cuando $\operatorname{char} k > 0$, tiene un coste computacional muy elevado, por lo que la utilidad práctica se ve reducida.

4. Ideales monomiales de tipo encajado

En esta sección vamos a asociar a cada ideal I un ideal monomial $N(I)$ de tipo encajado, de manera similar a como se asocia el ideal inicial genérico $\mathrm{gin}(I)$ a un ideal I. Veremos que la regularidad del ideal I se puede obtener a partir de la de $N(I)$, por lo que estudiaremos como hallar la regularidad de los ideales de tipo encajado. A lo largo de esta sección k es un cuerpo arbitrario, el anillo en el que trabajamos es $R = k[x_0, \dots, x_n]$ y consideraremos ideales $I \subset R$ homogéneos. Denotaremos por $\mathfrak{m}$ al ideal homogéneo maximal $(x_0, \dots, x_n)$ de R. Como referencia utilizaremos principalmente los resultados de Bermejo y Gimenez en [4].

4.1. Índice de saturación de un ideal homogéneo

Comenzamos estudiando algunas propiedades sobre el ideal $I : \mathfrak{m}$ y el índice de saturación $\mathrm{sat}(I)$. Para ver si un ideal es saturado se suele comprobar la igualdad $I = I : \mathfrak{m}$. El siguiente resultado nos dice que el ideal $I : \mathfrak{m}$ aporta información adicional.

Proposición 4.1 ([4, Prop. 2.1])**.** *Si el ideal I no es saturado e $I : \mathfrak{m} = (h_1, \dots, h_r)$, donde $h_1, \dots, h_r$ son polinomios homogéneos, entonces*

$$\mathrm{sat}(I) = \max_{1 \le i \le r} \{\deg(h_i); h_i \notin I\} + 1.$$

Demostración. Sea m_0 el menor entero m tal que para todo $s \geq m$, $I_s = (I : \mathfrak{m})_s$. Primero veremos que $\mathrm{sat}(I) = m_0$. Puesto que $I \subset I : \mathfrak{m} \subset I^{\mathrm{sat}}$, si $I_s = I_s^{\mathrm{sat}}$ entonces $I_s = (I : \mathfrak{m})_s$, por lo que se tiene que $\mathrm{sat}(I) \geq m_0$. Consideramos ahora $g \in I^{\mathrm{sat}}$ un polinomio homogéneo de grado $\mathrm{sat}(I) - 1$ tal que $g \notin I$. Este polinomio pertenece a $I : \mathfrak{m}$, así que $\mathrm{sat}(I) \leq m_0$. Por la definición de m_0, se tiene que siempre ha de ser $m_0 > \max_{1 \le i \le r}\{\deg(h_i); h_i \notin I\}$, así que como $\mathrm{sat}(I) = m_0$, tenemos que $\mathrm{sat}(I) \geq \max_{1 \le i \le r}\{\deg(h_i); h_i \notin I\} + 1$. Obtendremos el resultado si demostramos que para algún $i \in \{1, \dots, r\}$, el elemento h_i no está en I y $\deg(h_i) = \mathrm{sat}(I) - 1$. Consideramos $h \in (I : \mathfrak{m}) \setminus I$, un polinomio homogéneo de grado $\mathrm{sat}(I) - 1$. Si $h = q_1 h_1 + \cdots + q_r h_r$, donde q_i es un polinomio homogéneo de grado $\deg(h) - \deg(h_i)$ cuando $q_i \neq 0$, entonces existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $q_i \in k \setminus \{0\}$ y $h_i \notin I$. Si no, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, o q_i es igual a 0, o $\deg(q_i) \geq 1$ (luego $q_i h_i \in I$), o $h_i \in I$, y entonces h estaría en I. □

Ejemplo 4.2. Consideramos el ideal $I \subset R = \mathbb{Q}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ generado por

$$\{x_0x_1x_3 - x_2x_3^2, x_0x_1x_2 - x_2^2x_3, x_0x_1^2 - x_1x_2x_3, x_0^2x_1 - x_0x_2x_3,$$
$$x_1^2x_2^2 - x_0^3x_3, x_1^3x_2 - x_0^2x_3^2, x_1^4 - x_0x_3^3, x_0^4 - x_1x_2^3\}.$$

Utilizando [9], se obtiene que $I : \mathfrak{m} = (x_0x_1 - x_2x_3, x_1^2x_2^2 - x_0^3x_3, x_1^3x_2 - x_0^2x_3^2, x_1^4 - x_0x_3^3, x_0^4 - x_1x_2^3)$. Puesto que $x_0x_1 - x_2x_3 \in (I : \mathfrak{m}) \setminus I$, I no es saturado y por la proposición 4.1, $\mathrm{sat}(I) = 3$.

Observación 4.3. Cuando el ideal $I \subset R$ es monomial, la proposición 4.1 nos dice que $\mathrm{sat}(I)$ es independiente de la característica de k, se trata de un fenómeno combinatorio en $\mathbb{N}^{n+1}$.

Corolario 4.4 ([4, Cor. 2.4]). *Si $I \subset R$ es un ideal monomial no saturado tal que $I : \mathfrak{m} = I : (x_i)$ para algún $i \in \{0, \ldots, n\}$, entonces el índice de saturación de I es el mayor grado de los elementos que involucran a x_i en el conjunto de los monomios que generan I minimalmente.*

Demostración. Si F_1 y F_2 son los conjuntos finitos de monomios que generan minimalmente I e $I : (x_i)$, respectivamente, se tiene que $\{x^\beta \in F_2; x^\beta \notin I\} = \{\frac{x^\alpha}{x_i}; x^\alpha \in F_1$ con $x_i \mid x^\alpha\}$. El resultado se sigue de la proposición 4.1. □

Cuando el ideal $I \subset R$ es monomial, el siguiente corolario de la proposición 4.1 muestra que para comprobar si I es saturado y calcular $\operatorname{sat}(I)$, se puede utilizar un cociente de ideales monomiales distinto de $I : \mathfrak{m}$.

Corolario 4.5 ([4, Cor. 2.6]). *Sea I un ideal monomial en R, y sea $x_0^{\lambda_0} \cdots x_n^{\lambda_n}$ el mínimo común múltiplo de los generadores de I. Definimos $I^\star = (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_n^{\lambda_n+1}) : I$. Entonces,*

(a) *I es saturado si y solo si ninguno de los generadores minimales de $I^\star$ involucra a todas las variables.*

(b) *Si I no es saturado y δ_n es el menor grado de los generadores minimales de $I^\star$ que involucran a todas las variables, se tiene que:*

$$\operatorname{sat}(I) = \lambda_0 + \cdots + \lambda_n + 1 - \delta_n.$$

Demostración. Sea H el conjunto de monomios en R que dividen a $x^\lambda = x_0^{\lambda_0} \cdots x_n^{\lambda_n}$, y sea $f : H \to H$ la aplicación definida por $x^\alpha \mapsto \frac{x^\lambda}{x^\alpha}$. Observamos que f^2 es la aplicación identidad. Definimos $F = \{x^\alpha \in I : \mathfrak{m}; x^\alpha \notin I\}$, y llamamos G al conjunto de generadores minimales de $I^\star$ que involucran a todas las variables.
Supongamos que hemos probado que $F, G \subset H$, y también que $f(F) \subset G$ y $f(G) \subset F$. En este caso, la aplicación $f : F \to G$ nos da una correspondencia biunívoca entre F y G, por lo que se obtiene (a) directamente. Además, si I no es saturado, se obtiene que $\max\{\deg(x^\alpha); x^\alpha \in F\} = \lambda_0 + \cdots + \lambda_n - \min\{\deg(x^\beta); x^\beta \in G\}$, y se obtiene (b) a partir de la proposición 4.1.
Así que vamos a probar primero que $F \subset H$ y que $f(F) \subset G$. Consideramos un monomio $x^\alpha \in F$. Para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, puesto que $x_i x^\alpha \in I$ y $x^\alpha \notin I$, existe un generador minimal x^γ de I que divide a $x_i x^\alpha$ y no divide a x^α. Esto implica que $\alpha_i + 1 = \gamma_i$ y, puesto que $\gamma_i \leq \lambda_i$, se tiene que $\alpha_i < \lambda_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$. Por tanto $x^\alpha \in H$, y $f(x^\alpha)$ es un monomio que involucra a todas las variables. Si ahora tenemos que $x^\gamma \times f(x^\alpha) \notin (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_n^{\lambda_n+1})$ para algún monomio $x^\gamma \in I$, entonces $x^\gamma \frac{x^\lambda}{x^\alpha}$ divide a x^λ, y entonces x^γ divide a x^α. Esto es imposible ya que $x^\alpha \notin I$. Deducimos que $f(x^\alpha) \in I^\star$. Finalmente, $f(x^\alpha)$ es un generador minimal de $I^\star$ ya que, para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, x_i divide a $f(x^\alpha)$ (puesto que $\alpha_i < \lambda_i$), $x_i x^\alpha \in I$, y $\frac{f(x^\alpha)}{x_i} \times (x_i x^\alpha) = x^\lambda \notin (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_n^{\lambda_n+1})$. Por tanto, $f(x^\alpha) \in G$.
Para concluir la demostración, tenemos que ver que $G \subset H$ y $f(G) \subset F$. Sea x^β un monomio en G. Puesto que $x_i^{\lambda_i+1} \in I^\star$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, se tiene que $x_i^{\lambda_i+1}$ no divide a x^β (es minimal), así que $\beta_i \leq \lambda_i$. Por tanto, $x^\beta \in H$. Además, para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, x_i divide a x^β (involucra todas las variables) y $\frac{x^\beta}{x_i} \notin I^\star$, así que existe $x^\gamma \in I$ tal que

$\frac{x^\beta}{x_i} \times x^\gamma \notin (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_n^{\lambda_n+1})$. Entonces $\frac{x^\beta}{x_i} \times x^\gamma$ divide a x^λ, y puesto que $x^\beta \in H$, se tiene que x^γ divide a $x_i \frac{x^\lambda}{x^\beta}$. Por tanto $x_i f(x^\beta) \in I$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, así que $f(x^\beta) \in I : \mathfrak{m}$. Finalmente, $x^\beta \times f(x^\beta) = x^\lambda \notin (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_n^{\lambda_n+1})$, así que $f(x^\beta) \notin I$. Por tanto, $f(x^\beta) \in F$ y hemos terminado. □

Ejemplo 4.6. Sea k un cuerpo arbitrario. Consideramos el ideal monomial

$$I = (x_0^2, x_1x_2, x_1^3, x_0x_1x_3, x_0x_2^3, x_0x_2^2x_3, x_1^2x_3^3, x_1^2x_3^2x_4) \subset k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4].$$

Usando [9], se puede comprobar que $x_0^2x_1x_2^3x_3x_4$ es el único generador minimal de $(x_0^3, x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^2) : I$ que involucra a todas las variables. Por tanto, I no es saturado y $\operatorname{sat}(I) = 2+3+3+3+1+1-8 = 5$ por el corolario 4.5.

Observación 4.7. La demostración del corolario 4.5 nos da el siguiente resultado más fuerte que utilizaremos en la demostración del teorema 4.19.

Sea I un ideal monomial en R, y sea $x_0^{\gamma_0} \cdots x_n^{\gamma_n}$ cualquier múltiplo común de los generadores de I. Entonces,

(a) *I es saturado si y solo si ninguno de los generadores minimales de $(x_0^{\gamma_0+1}, \ldots, x_n^{\gamma_n+1}) : I$ involucra a todas las variables.*

(b) *Si I no es saturado y $\delta_n^{(\gamma)}$ es el menor grado de los generadores minimales de $(x_0^{\gamma_0+1}, \ldots, x_n^{\gamma_n+1}) : I$ que involucran a todas las variables, se tiene que:*

$$\operatorname{sat}(I) = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n + 1 - \delta_n^{(\gamma)}.$$

4.2. Regularidad de Castelnuovo-Mumford de un ideal monomial de tipo encajado

En esta sección vamos a estudiar las propiedades de los ideales monomiales de tipo encajado. Comenzamos dando la definición de estos ideales monomiales de $R = k[x_0, \ldots, x_n]$:

Definición 4.8. Un ideal monomial $I \subset R$ se dice que es de *tipo encajado* si, para cualquier ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$ asociado a I, existe un $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $\mathfrak{p} = (x_0, \ldots, x_i)$.

Proposición 4.9 ([4, Prop. 3.2])**.** *Sea $I \subset R$ un ideal monomial, y sea $d = \dim R/I$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *I es de tipo encajado.*

(2) *$\forall i \in \{0, \ldots, n\}$, $I : (x_i)^\infty = I : (x_0, \ldots, x_i)^\infty$.*

(3) *x_n es un no divisor de cero en R/I^{sat}, y para todo $i : n-d+1 \leq i < n$, x_i es un no divisor de cero en $R/(I, x_n, \ldots, x_{i+1})^{\text{sat}}$.*

(4) (a) *$\forall i \in \{0, \ldots, n-d\}$, existe $k_i \geq 1$ tal que $x_i^{k_i} \in I$, y*

(b) *$I : (x_n)^\infty \subset I : (x_{n-1})^\infty \subset \cdots \subset I : (x_{n-d+1})^\infty$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t$ una descomposición primaria irredundante de I donde $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t$ son ideales monomiales. Puesto que para cualquier ideal $J \subset R$ se tiene que $I : J^\infty = \bigcap_{i=1}^t (\mathfrak{q}_i : J^\infty)$, tendremos el resultado si demostramos que (2) se cumple para cualquier $\mathfrak{q} \in \{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t\}$. Por (1), existe $j \in \{n-d, \ldots, n\}$ tal que $\mathfrak{q}$ es un ideal monomial $(x_0, \ldots, x_j)$-primario. Para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, si $i > j$, los ideales $\mathfrak{q} : (x_i)^\infty$ y $q : (x_0, \ldots, x_i)^\infty$ coinciden con $\mathfrak{q}$, y si $i \leq j$, $\mathfrak{q} : (x_i)^\infty = \mathfrak{q} : (x_0, \ldots, x_i)^\infty = R$, por lo que hemos probado el resultado.
(2) $\Rightarrow$ (1). La demostración es la misma que la que vimos en el corolario 3.16, ya que la hipótesis (2) es lo que nos da la proposición 3.14 que se usa en esa demostración.
(2) $\Rightarrow$ (3). Puesto que $I^{\text{sat}} = I : (x_n)^\infty$, x_n es un no divisor de cero en R/I^{sat}. Por otro lado, para todo $i \in \{n-d+1, \ldots, n-1\}$, $(I, x_n, \ldots, x_{i+1})^{\text{sat}} = (I, x_n, \ldots, x_{i+1}) : (x_i)^\infty$. En efecto, si x^α es un monomio en $(I, x_n, \ldots, x_{i+1}) : (x_i)^\infty$, se tiene que o $x^\alpha \in (I, x_n, \ldots, x_{i+1})$ o $x^\alpha \in I : (x_i)^\infty$. Puesto que $I : (x_i)^\infty = I : (x_0, \ldots, x_i)^\infty \subset (I, x_n, \ldots, x_{i+1})^{\text{sat}}$, obtenemos la igualdad que hemos mencionado antes. Teniendo en cuenta esta igualdad, si tenemos $ax_i = 0$ en $R/(I, x_n, \ldots, x_{i+1})^{\text{sat}}$ para un cierto a en ese cociente, entonces $ax_i \in (I, x_n, \ldots, x_{i+1}) : (x_i)^\infty$, por lo que existe un $s \in \mathbb{N}$ tal que $ax_i^{s+1} \in (I, x_n, \ldots, x_{i+1})$. De aquí se deduce que $ax_i^{s+1} \in I$, de modo que $a \in (I, x_n, \ldots, x_{i+1}) : (x_i)^\infty$ y por tanto a es cero en $R/(I, x_n, \ldots, x_{i+1})^{\text{sat}}$, así que x_i es un no divisor de cero.
(3) $\Rightarrow$ (4). Para cualquier ideal homogéneo J de R y cualquier polinomio homogéneo f, $(J^{\text{sat}}, f)^{\text{sat}} = (J, f)^{\text{sat}}$. Así que si se da (3), entonces $\dim R/(I, x_n, \ldots, x_{n-d+1}) = 0$ (al hacer el cociente por un no divisor de cero la dimensión baja en 1, [1, Prop 11.3]), por lo que (4)(a) se da también. Por otro lado, si x_n es un no divisor de cero en R/I^{sat}, se tiene que $I : (x_n)^\infty = I^{\text{sat}}$. En consecuencia, $I : (x_n)^\infty \subset I : (x_{n-1})^\infty$. Suponemos ahora que $I : (x_n)^\infty \subset \cdots \subset I : (x_i)^\infty$ para algún $i \in \{n-d+2, \ldots, n-1\}$, y veremos que $I : (x_i)^\infty \subset I : (x_{i-1})^\infty$. Sea x^α un generador minimal de $I : (x_i)^\infty$. Para algún $l_1 \geq 0$, $x_i^{l_1} x^\alpha \in I \subset (I, x_n, \ldots, x_{i+1})^{\text{sat}}$, así que $x^\alpha \in (I, x_n, \ldots, x_{i+1})^{\text{sat}}$ por (3) (x_i es un no divisor de cero en $R/(I, x_n, \ldots, x_{i+1})^{sat}$). Puesto que $(I, x_n, \ldots, x_{i+1})^{\text{sat}} \subset (I, x_n, \ldots, x_{i+1}) : (x_{i-1})^\infty$, existe $l_2 \geq 0$ tal que $x_{i-1}^{l_2} x^\alpha \in (I, x_n, \ldots, x_{i+1})$. Además, $x^\alpha \notin (x_{i+1}, \ldots, x_n)$ porque, si no fuera así, existiría $j \in \{i+1, \ldots, n\}$ y $x^\beta \in R$ tal que $x^\alpha = x_j x^\beta$. Por tanto, $x_i^{l_1} x^\beta \in I : (x_j) \subset I : (x_j)^\infty \subset I : (x_i)^\infty$ por la hipótesis de inducción, así que $x^\beta \in I : (x_i)^\infty$. Como x^α es un generador minimal de $I : (x_i)^\infty$, hemos encontrado una contradicción. Por tanto, $x_{i-1}^{l_2} x^\alpha \in I$, y $x^\alpha \in I : (x_{i-1})^\infty$.
(4) $\Rightarrow$ (2). Utilizando las dos hipótesis de (4) obtenemos

$$I : (x_n)^\infty \subset \cdots \subset I : (x_{n-d+1})^\infty \subset R = I : (x_{n-d})^\infty = I : (x_{n-d-1})^\infty = \cdots = I : (x_0)^\infty.$$

Por tanto, tenemos que $I : (x_i)^\infty \subset I : (x_j)^\infty$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ y $j \leq i$. Así que tenemos que $I : (x_0, \ldots, x_i)^\infty = \bigcap_{j \leq i} (I : x_j^\infty) = I : (x_i)^\infty$ y obtenemos (2). □

Observación 4.10. De la demostración (1) $\Rightarrow$ (2) se puede deducir fácilmente que si $I \subset R$ es un ideal monomial de tipo encajado, $d = \dim R/I$, e $I = \bigcap \mathfrak{q}_j$ es una descomposición primaria irredundante de I tal que cada $\mathfrak{q}_j$ es un ideal monomial, entonces

$$I : (x_i)^\infty = \bigcap_{\sqrt{\mathfrak{q}_j} \subset (x_0, \ldots, x_{i-1})} \mathfrak{q}_j \quad \forall i \in \{n-d+1, \ldots, n\}.$$

En particular, $I : (x_{n-d+1})^\infty$ es la única componente $(x_0, \ldots, x_{n-d})$-primaria de I.

Observación 4.11. Como ya hemos indicado en la demostración (2) $\Rightarrow$ (1), la condición (2) nos permite deducir que cualquier ideal Borel-fixed es un ideal monomial de tipo encajado (ver la proposición 3.14). Es interesante notar que, al contrario que la propiedad de ser Borel-fixed, ser de tipo encajado no depende de la característica de k.
La condición (3) de la proposición 4.9 es la que se pide para un ideal homogéneo arbitrario en el teorema 3.30 para ver que, bajo esta condición, la regularidad de Castelnuovo-Mumford de un ideal coincide con la de su ideal inicial con respecto al orden lexicográfico inverso.
La condición (4) de la proposición 4.9 nos da un criterio muy efectivo para comprobar que I es de tipo encajado. Esto se debe a que para un ideal monomial $I \subset R$ es inmediato comprobar que el cociente $I : (x_i)^\infty$ coincide con $I|_{x_i=1}$, el ideal generado por la imagen de I bajo el morfismo de evaluación que envía x_i a 1.

Observación 4.12. Para comprobar 4.9(4)(a) y (b) haría falta conocer a priori la dimensión del ideal, pero en realidad no es necesario. Para que se cumpla (4)(a), debemos tener potencias de las primeras $n - d + 1$ variables en el ideal, y además en todos los demás generadores alguna de estas variables debe estar involucrada (si no, la dimensión no sería d). Por tanto, la comprobación consiste en ver las potencias de las primeras variables que están en el ideal (supongamos que tenemos potencias de las primeras m variables) y comprobar si el resto de generadores involucran a esas variables. Si es así, entonces obtenemos la dimensión como $n + 1 - m$ y podemos pasar a comprobar (4)(b), mientras que si no es así, el ideal no es de tipo encajado.

Ejemplo 4.13. Consideramos el ideal monomial del ejemplo 4.6

$$I = (x_0^2, x_1x_2, x_1^3, x_0x_1x_3, x_0x_2^3, x_0x_2^2x_3, x_1^2x_3^3, x_1^2x_3^2x_4) \subset k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4].$$

Puesto que $x_0^2, x_1^3 \in I$, y además

$$I|_{x_4=1} = (x_0^2, x_1x_2, x_1^3, x_0x_1x_3, x_0x_2^3, x_0x_2^2x_3, x_1^2x_3^2) \subset I|_{x_3=1} = (x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_1x_2, x_0x_2^2) \subset I|_{x_2=1} = (x_0, x_1),$$

I es de tipo encajado.

El siguiente resultado es un test para comprobar si $k[x_{n-d+1}, \ldots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I que vamos a utilizar frecuentemente.

Lema 4.14 ([3, Lem. 4.1])**.** *Sea I un ideal homogéneo de $R = k[x_0, \ldots, x_n]$ tal que $d = \dim R/I$, y sea $\mathrm{in}(I)$ el ideal inicial de I con respecto al orden lexicográfico inverso. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$k[x_{n-d+1}, \ldots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I.*

(b) *$\forall i \in \{0, \ldots, n-d\}$, existe $k_i \geq 1$ tal que $x_i^{k_i} \in \mathrm{in}(I)$.*

(c) *$\dim R/(I, x_{n-d+1}, \ldots, x_n) = 0$.*

(d) *$\dim R/(\mathrm{in}(I), x_{n-d+1}, \ldots, x_n) = 0$.*

Si $I \subset R$ es un ideal monomial de tipo encajado y $d = \dim R/I$, (4)(a) en la proposición 4.9 significa que $k[x_{n-d+1}, \ldots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I por el lema 4.14. De hecho, podemos decir más.

Proposición 4.15 ([4, Prop. 3.6]). *Sea $I \subset R$ un ideal monomial y sea $d = \dim R/I$. Entonces, I es de tipo encajado si y solo si $k[x_{n-d+1}, \ldots, x_n]$ es una normalización de Noether fuerte de R/I, es decir, para cualquier componente primaria $\mathfrak{q}$ de I tal que $\dim R/\mathfrak{q} \geq 1$, $k[x_{n-(\dim R/\mathfrak{q})+1}, \ldots, x_n]$ es una normalización de Noether de $R/\mathfrak{q}$.*

Demostración. Para un ideal monomial primario $\mathfrak{q} \subset R$ con $r = \dim R/\mathfrak{q}$, se tiene que $k[x_{n-r+1}, \ldots, x_n]$ es una normalización de Noether de $R/\mathfrak{q}$ si y solo si $\sqrt{\mathfrak{q}} = (x_0, \ldots, x_{n-r})$. El resultado se sigue de la definición 4.8. $\square$

El siguiente teorema nos dice que la regularidad de Castelnuovo-Mumford de un ideal monomial de tipo encajado se puede expresar como el máximo de los índices de saturación de algunos ideales monomiales. Para ello, necesitamos hacer uso de la siguiente igualdad

$$\operatorname{reg}(I) = \text{máx}\left\{\operatorname{sat}(I), \operatorname{reg}(I^{\text{sat}})\right\},$$

que se obtiene directamente a partir de otra definición de regularidad equivalente a la que hemos dado (ver [4]).

Teorema 4.16 ([4, Thm. 3.7]). *Consideramos un ideal monomial $I \subset R$ de tipo encajado. Si d es la dimensión de R/I, y p es el menor entero tal que ninguno de los generadores minimales de f involucra a $x_{p+1}, \ldots, x_n$, entonces*

(a) $\operatorname{depth}(R/I) = n - p$.

(b) $$\begin{aligned}\operatorname{reg}(I) = \text{máx}\{&\operatorname{sat}(I \cap k[x_0, \ldots, x_p]),\\ &\operatorname{sat}(I|_{x_p=1} \cap k[x_0, \ldots, x_{p-1}]),\\ &\operatorname{sat}(I|_{x_{p-1}=1} \cap k[x_0, \ldots, x_{p-2}]),\\ &\vdots\\ &\operatorname{sat}(I|_{x_{n-d+1}=1} \cap k[x_0, \ldots, x_{n-d}])\}.\end{aligned}$$

Demostración. Por definición de p, $x_{p+1}, \ldots, x_n$ es una sucesión regular en R/I y, para cualquier primo $\mathfrak{p}$ asociado a I, $\mathfrak{p} + (x_{p+1}, \ldots, x_n)$ es un primo asociado a $I + (x_{p+1}, \ldots, x_n)$. Puesto que por la definición 4.8, $(x_0, \ldots, x_p)$ es un primo asociado a I, se obtiene (a).
Para ver (b), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p = n$. Por la observación 4.10, se tiene que

- $I^{\text{sat}} = I|_{x_n=1}$,
- $\forall i \in \{n-d+2, \ldots, n\}$, $(I|_{x_i=1} \cap k[x_0, \ldots, x_{i-1}])^{\text{sat}} = I|_{x_{i-1}=1} \cap k[x_0, \ldots, x_{i-1}]$, y
- $(I|_{x_{n-d+1}=1} \cap k[x_0, \ldots, x_{n-d}])^{\text{sat}} = k[x_0, \ldots, x_{n-d}]$.

Puesto que $\operatorname{reg}(I|_{x_i=1} \cap k[x_0,\dots,x_i]) = \operatorname{reg}(I|_{x_i=1} \cap k[x_0,\dots,x_{i-1}])$ para todo $i \in \{n-d+1,\dots,n\}$, aplicando reiteradamente la fórmula

$$\operatorname{reg}(\bullet) = \text{máx}\left\{\operatorname{sat}(\bullet), \operatorname{reg}(\bullet^{\text{sat}})\right\},$$

se obtiene el resultado. □

Observación 4.17. Si $I \subset R$ es un ideal monomial de tipo encajado, se deduce de la observación 4.3 y el teorema 4.16 que $\operatorname{depth}(R/I)$ y $\operatorname{reg}(I)$ son independientes de la característica de k.

Esto no es cierto para ideales monomiales arbitrarios, como muestra el siguiente ejemplo [19, Section 1]. Consideramos el ideal $I \subset k[x_0,\dots,x_5]$ generado por los siguientes monomios:

$$x_0x_1x_2, x_0x_1x_5, x_0x_2x_4, x_0x_3x_4, x_0x_3x_5, x_1x_2x_3, x_1x_3x_4, x_1x_4x_5, x_2x_3x_5, x_2x_4x_5.$$

Si calculamos una resolución libre graduada minimal de I utilizando por ejemplo [9], se obtiene que $\operatorname{depth}(R/I) = 3$ y $\operatorname{reg}(I) = 3$ en el caso de característica 0, mientras que $\operatorname{depth}(R/I) = 2$ y $\operatorname{reg}(I) = 4$ si la característica de k es 2. Esto lo podemos comprobar con [9] calculando la tabla de Betti en ambos casos. A continuación presentamos este cálculo para R/I, de manera que la profundidad se obtiene a partir de la fórmula de Auslander-Buchsbaum 2.37 $\operatorname{depth}(R/I) = 6 - \operatorname{pd}(R/I)$ y la etiqueta de la última columna de la tabla de Betti, y la regularidad se obtiene sumando 1 a la etiqueta de la última fila de la tabla de Betti:

```
> ring R1=0,(x0,x1,x2,x3,x4,x5),dp;//char(k)=0
> ideal I=x0*x1*x2,x0*x1*x5,x0*x2*x4,x0*x3*x4,x0*x3*x5,x1*x2*x3,x1*x3*x4,x1*x4*x
5,x2*x3*x5,x2*x4*x5;
> resolution resI = minres(res(I,0));
> print(betti(resI),"betti");
           0     1     2     3
------------------------------
    0:     1     -     -     -
    1:     -     -     -     -
    2:     -    10    15     6
------------------------------
total:     1    10    15     6

> ring R2=2,(x0,x1,x2,x3,x4,x5),dp; //char(k)=2
> ideal I=imap(R1,I);
> resolution resI = minres(res(I,0));
> print(betti(resI),"betti");
           0     1     2     3     4
------------------------------------
    0:     1     -     -     -     -
    1:     -     -     -     -     -
    2:     -    10    15     6     1
    3:     -     -     -     1     -
------------------------------------
total:     1    10    15     7     1
```

Para un ideal monomial de tipo encajado $I \subset R$, el teorema 4.16, junto con la proposición 4.1, reduce el cálculo de la regularidad de Castelnuovo-Mumford de I al cálculo de $\dim R/I - \operatorname{depth}(R/I) + 1$ cocientes de ideales monomiales por $\mathfrak{m}$.

Ejemplo 4.18. Sea k un cuerpo arbitrario, y sea $R = k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Consideramos el ideal

$$I = (x_0^4, x_0^3x_1, x_0^2x_1^2, x_1^4, x_0^3x_2, x_0^2x_2^2, x_0^3x_3, x_0^3x_4^2, x_1^3x_2^5).$$

Puesto que $x_0^4, x_1^4 \in I$, e $I|_{x_4=1} = (x_0^3, x_0^2x_1^2, x_1^4, x_0^2x_2^2, x_1^3x_2^5) = I|_{x_3=1} \subset I|_{x_2=1} = (x_0^2, x_1^3)$, tenemos que I es de tipo encajado.
Por el teorema 4.16, $\operatorname{depth}(R/I) = 0$ y $\operatorname{reg}(I) = \text{máx}\{\operatorname{sat}(I), \operatorname{sat}(I_1), \operatorname{sat}(I_2), \operatorname{sat}(I_3)\}$, donde $I_1 = I|_{x_4=1} \cap k[x_0, x_1, x_2, x_3]$, $I_2 = I|_{x_3=1} \cap k[x_0, x_1, x_2]$ e $I_3 = I|_{x_2=1} \cap k[x_0, x_1]$.
Puesto que $I : (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = I + (x_0^3x_4)$, aplicando la proposición 4.1 se obtiene que $\operatorname{sat}(I) = 5$. Además, I_1 es saturado, $I_2 : (x_0, x_1, x_2) = I_2 + (x_0^2x_1x_2, x_0x_1^3x_2^4)$, e $I_3 : (x_0, x_1) = I_3 + (x_0x_1^2)$. Utilizando de nuevo la proposición 4.1, se deduce que $\operatorname{reg}(I) = \text{máx}\{5, 0, 9, 4\} = 9$.

En el ejemplo anterior, los 4 índices de saturación se podrían haber calculado utilizando el corolario 4.5 en lugar de la proposición 4.1. El siguiente resultado muestra que si se elige este método alternativo, entonces con el cálculo de un único cociente de ideales monomiales se puede obtener $\operatorname{reg}(I)$.
Para establecer este resultado de manera precisa, vamos a generalizar la definición de δ_n del corolario 4.5. Si $I \subset R$ es un ideal monomial, y $x_0^{\lambda_0} \cdots x_n^{\lambda_n}$ es el mínimo común múltiplo de sus generadores minimales, para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, sea δ_i el menor grado de los generadores minimales de $I^\star = (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_n^{\lambda_n+1}) : I$ que involucran exactamente las variables $x_0, \ldots, x_i$, si hay alguno. Si no, fijamos $\delta_i = 0$.

Teorema 4.19 ([4, Thm. 3.14]). *Sea $I \subset R$ un ideal monomial de tipo encajado. Entonces*

$$\operatorname{reg}(I) = \underset{n-\dim R/I \le i \le n-\operatorname{depth}(R/I)}{\text{máx}} \{\lambda_0 + \cdots \lambda_i + 1 - \delta_i;\ \delta_i \neq 0\}.$$

Demostración. Por el teorema 4.16(a), $\operatorname{reg}(I) = \operatorname{reg}(I \cap k[x_0, \ldots, x_p])$ para $p = n - \operatorname{depth}(R/I)$. Además, $I^\star$ está generado minimalmente por $x_{p+1}, \ldots, x_n$ y los generadores minimales de $(I \cap k[x_0, \ldots, x_p])^\star$. Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\operatorname{depth}(R/I) = 0$.
Por el corolario 4.5, $\delta_n \neq 0$ y $\operatorname{sat}(I) = \lambda_0 + \cdots + \lambda_n + 1 - \delta_n$. Sea $d = \dim R/I$. Aplicando, para $i \in \{n-d+1, \ldots, n\}$, el resultado de la observación 4.7 al ideal $I_i = I|_{x_i=1} \cap k[x_0, \ldots, x_{i-1}]$ y al monomio $x_0^{\lambda_0} \cdots x_{i-1}^{\lambda_{i-1}}$, la fórmula que buscamos para $\operatorname{reg}(I)$ será consecuencia del teorema 4.16(b) si vemos que:

$$I^\star \cap k[x_0, \ldots, x_{i-1}] = (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_{i-1}^{\lambda_{i-1}+1}) : I_i. \tag{4.1}$$

Así que solo falta probar esta igualdad. Sea $x_0^{\alpha_0} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \in I^\star$. Si $x_0^{\beta_0} \cdots x_{i-1}^{\beta_{i-1}} \in I_i$, existe $\beta_i \le \lambda_i$ tal que $x_0^{\beta_0} \cdots x_i^{\beta_i} \in I$. Por tanto, $x_0^{\alpha_0+\beta_0} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}+\beta_{i-1}} x_i^{\beta_i} \in (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_n^{\lambda_n+1})$ y $x_0^{\alpha_0} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \in (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_{i-1}^{\lambda_{i-1}+1}) : I_i$. Consideramos $x_0^{\alpha_0} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \in (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_{i-1}^{\lambda_{i-1}+1}) : I_i$ y tomamos $x^\beta = x_0^{\beta_0} \cdots x_n^{\beta_n} \in I$. Puesto que $\frac{x^\beta}{x_i^{\beta_i}} \in I|_{x_i=1}$, existe $x_0^{\gamma_0} \cdots x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} \in I_i$ que divide a $\frac{x^\beta}{x_i^{\beta_i}}$ por la observación 4.10. Por tanto $x_0^{\alpha_0} \cdots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x^\beta \in (x_0^{\lambda_0+1}, \ldots, x_n^{\lambda_n+1})$ y obtenemos la igualdad (4.1). $\square$

Ejemplo 4.20. Consideramos el ideal monomial $I \subset R = k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ del ejemplo 4.6:

$$I = (x_0^2, x_1x_2, x_1^3, x_0x_1x_3, x_0x_2^3, x_0x_2^2x_3, x_1^2x_3^3, x_1^2x_3^2x_4).$$

Como vimos en el ejemplo 4.13, I es de tipo encajado. Se tiene que

$$I^\star = (x_0^3, x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^2) : I = (x_0^3, x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^2, x_0^2x_1x_2^3x_3x_4, x_0^2x_1x_2^3x_3^2, x_0x_1^3x_2x_3^3, x_0x_1x_2^3x_3^3,$$
$$x_0x_1^3x_2^2, x_0^2x_1^2x_2^3, x_0^2x_1^3),$$

y $\operatorname{sat}(I) = 2+3+3+3+1+1-8 = 5$ como se vio en el ejemplo 4.6. Aplicando el teorema 4.19 obtenemos

$$\operatorname{reg}(I) = \text{máx}\{5, 2+3+3+3+1-8, 2+3+3+1-6, 2+3+1-5\} = 5.$$

Como consecuencia del teorema 4.19 se puede obtener el siguiente resultado que relaciona la regularidad de Castelnuovo-Mumford de un ideal monomial de tipo encajado con la regularidad de sus componentes irreducibles. Cualquier ideal monomial $I \subset R$ tiene una descomposición irredundante única $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_\mathfrak{r}$ donde los $\mathfrak{q}_\mathfrak{i}$ son ideales monomiales irreducibles, es decir, ideales generados por potencias de variables (ver [13, Thm 1.3.1]). Esta descomposición la llamaremos *descomposición irreducible irredundante* de I.

Corolario 4.21 ([4, Thm. 3.17]). *Sea $I \subset R$ un ideal monomial de tipo encajado, y sea $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_\mathfrak{r}$ su descomposición irreducible irredundante. Entonces*

$$\operatorname{reg}(I) = \text{máx}\{\operatorname{reg}(\mathfrak{q}_i);\ 1 \leq i \leq r\}.$$

4.3. Regularidad de Castelnuovo-Mumford de un ideal homogéneo

En esta sección veremos finalmente como calcular la regularidad de un ideal homogéneo arbitrario. Esto lo haremos asociando un ideal monomial de tipo encajado a cada ideal homogéneo, de manera que la regularidad de ambos sea la misma, y la regularidad de un ideal monomial de tipo encajado ya hemos visto en la sección anterior como calcularla.
Sea k un cuerpo arbitrario, y sea $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$ un ideal homogéneo. Denotamos por $\operatorname{in}(I)$ al ideal inicial de I con respecto al orden lexicográfico inverso con $x_0 > \cdots > x_n$. El siguiente teorema incluye el resultado 3.30.

Teorema 4.22 ([4, Thm. 4.1]). *Si* $\operatorname{in}(I)$ *es un ideal monomial de tipo encajado, entonces*

(a) $\operatorname{depth}(R/I) = \operatorname{depth}(R/\operatorname{in}(I))$.

(b) $\operatorname{reg}(I) = \operatorname{reg}(\operatorname{in}(I))$.

Para un ideal homogéneo $I \subset R$ tal que $\operatorname{in}(I)$ es de tipo encajado, el teorema 4.22, junto con el teorema 4.16 o el teorema 4.19, nos dan métodos efectivos para calcular $\operatorname{reg}(I)$ y $\operatorname{depth}(R/I)$.

Definición 4.23. Si $\operatorname{in}(I)$ es de tipo encajado, llamamos a $\operatorname{in}(I)$ el *ideal monomial de tipo encajado asociado a* I, y lo denotamos $N(I)$.

Ejemplo 4.24. Consideramos el ideal $I \subset R = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ generado por los polinomios

$$x_0^4 - x_3x_4^3, x_0^3x_1^2 - x_2^3x_4^2, x_0^3x_1x_3 - x_2^4x_4, x_0x_2^3 - x_1^2x_3x_4, x_1^3 - x_0x_2^2, x_1x_2 - x_3x_4, x_2^5 - x_0^3x_3^2.$$

Utilizando [9] se obtiene $\text{in}(I) = (x_0^4, x_1^3, x_2^5, x_1x_2, x_0x_2^3, x_0^3x_1^2, x_0^3x_1x_3)$. Podemos comprobar que $\text{in}(I)$ es de tipo encajado con 4.9(4)(a) y (b). Evidentemente, vemos que tenemos potencias de x_0, x_1 y x_2 en $\text{in}(I)$ y además $\text{in}(I)|_{x_4=1} = \text{in}(I) \subset \text{in}(I)|_{x_3=1} = (x_0^4, x_1^3, x_2^5, x_1x_2, x_0x_2^3,\ x_0^3x_1)$, así que $\text{in}(I)$ es de tipo encajado. Por otro lado, utilizando el teorema 4.16 y el teorema 4.22, obtenemos que $\text{depth}(R/I) = 1$. Puesto que el mínimo común múltiplo de los generadores es $x_0^4x_1^3x_2^5x_3$ y tenemos que

$$(x_0^5, x_1^4, x_2^6, x_3^2) : \text{in}(I) = (x_0^5, x_1^4, x_2^6, x_3^2, x_0x_1^2x_2^5x_3, x_0x_1^3x_2^3, x_0^4x_1^3x_2, x_0^2x_1x_2^5),$$

obtenemos que $\text{reg}(I) = \text{máx}\{13 + 1 - 9, 12 + 1 - 7\} = 6$ por el teorema 4.19 y el teorema 4.22. Los cálculos con [9] que hemos hecho en este ejemplo se pueden hacer de la siguiente manera:

```
> LIB "poly.lib";
> option(redSB);
> ring R = 0,(x0,x1,x2,x3,x4),dp;
> ideal J=x0^4-x3*x4^3,x0^3*x1^2-x2^3*x4^2,x0^3*x1*x3-x2^4*x4,x0*x2^3-x1^2*x3
*x4, x1^3-x0*x2^2,x1*x2-x3*x4,x2^5-x0^3*x3^2;
> ideal Y=lead(J);Y;
Y[1]=x0^4
Y[2]=x0^3*x1^2
Y[3]=x0^3*x1*x3
Y[4]=x0*x2^3
Y[5]=x1^3
Y[6]=x1*x2
Y[7]=x2^5
> lcm(Y);
x0^4*x1^3*x2^5*x3
> ideal T=x0^5,x1^4,x2^6,x3^2;
> quotient(T,Y);
_[1]=x3^2
_[2]=x1^4
_[3]=x0^5
_[4]=x2^6
_[5]=x0*x1^3*x2^3
_[6]=x0^2*x1*x2^5
_[7]=x0^4*x1^3*x2
_[8]=x0*x1^2*x2^5*x3
```

Para un ideal homogéneo $I \subset R$ tal que $\text{in}(I)$ no es de tipo encajado, queremos asociar a I un ideal monomial de tipo encajado, $N(I) \subset R$, tal que $\text{reg}(I) = \text{reg}(N(I))$ y $\text{depth}(R/I) = \text{depth}(R/N(I))$. Una posibilidad es conseguir $N(I)$ como el ideal inicial con respecto al orden lexicográfico inverso de la imagen de I bajo una transformación lineal

homogénea, y luego aplicar el teorema 4.22. Por otro lado, para una transformación lineal homogénea φ tal que $\mathrm{in}(\varphi(I))$ sea de tipo encajado, se tiene que $k[x_{n-d+1},\ldots,x_n]$ es una normalización de Noether de $R/\varphi(I)$, donde $d=\dim R/I$ (ver proposición 4.9(4)(a) y el lema 4.14). Por tanto, para obtener $N(I)$, parece natural empezar suponiendo que $k[x_{n-d+1},\ldots,x_n]$ es una normalización de Noether de R/I, y luego aplicar una transformación lineal homogénea que conserve esta propiedad. Hacemos esto de la manera siguiente.
Sea $I\subset R=k[x_0,\ldots,x_n]$ un ideal homogéneo tal que $k[x_{n-d+1},\ldots,x_n]$ es una normalización de Noether de R/I, donde $d\geq 2$. Sea $k(t)=k(t_1,\ldots,t_{d(d-1)/2})$ una extensión trascendental pura de k, y sea R' el anillo de polinomios $k(t)[x_0,\ldots,x_n]$. Sea $\psi(t):R'\to R'$ el $k(t)[x_0,\ldots,x_{n-d+1}]$-isomorfismo definido por

$$\begin{aligned}
x_n &\mapsto x_n+t_1x_{n-1}+t_2x_{n-2}+\cdots+t_{d-1}x_{n-d+1},\\
x_{n-1} &\mapsto \qquad\quad x_{n-1}+t_dx_{n-2}+\cdots+t_{2d-3}x_{n-d+1},\\
&\vdots\\
x_{n-d+2} &\mapsto \qquad\qquad\qquad\qquad x_{n-d+2}+t_{\frac{d(d-1)}{2}}x_{n-d+1},
\end{aligned}\tag{4.2}$$

y denotamos por I' al ideal $\psi(t)(I.R')$ de R'. Denotaremos por $I'(\gamma)$ a la especialización $\psi(\gamma)(I)$ de I' con respecto a la sustitución $t\to\gamma$.
Tenemos el siguiente resultado, tanto para k finito como infinito:

Teorema 4.25 ([4, Thm. 4.4]). *Existe un subconjunto abierto de Zariski denso en $k^{d(d-1)/2}$ tal que $\mathrm{in}(I'(\gamma))$ es constante y de tipo encajado para $\gamma\in\mathcal{U}$.*

Definición 4.26. Si $\mathrm{in}(I)$ no es de tipo encajado y $k[x_{n-d+1},\ldots,x_n]$ es una normalización de Noether de R/I, llamamos a $\mathrm{in}(I')\cap R$ el *ideal monomial de tipo encajado asociado a I* y lo denotamos $N(I)$.

Ejemplo 4.27. Sea $I\subset R=k[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$ el ideal homogéneo tridimensional generado por

$$\{x_0^2+x_0x_1,2x_0x_2+x_1x_3+x_1x_4,x_0^2x_2+x_1^2x_4,x_1^3+x_0x_2^2-x_1^2x_3+x_1x_2x_4\}.$$

Suponemos primero que $k=\mathbb{Q}$. Utilizando [9], podemos calcular el ideal inicial $\mathrm{in}(I)$ de I con respecto al orden lexicográfico inverso, y comprobar que no es de tipo encajado porque 4.9(4)(b) no se cumple. Por otro lado, $\mathrm{in}(I)$ satisface 4.9(4)(a), por lo que $k[x_2,x_3,x_4]$ es una normalización de Noether de R/I por el lema 4.14. En consecuencia, el ideal monomial de tipo encajado asociado a I, $N(I)\subset R$, está generado por los generadores normalizados (sin el coeficiente) de $\mathrm{in}(\psi(t)(I.R'))$, donde $R'=k(t_1,t_2,t_3)[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$ y $\psi(t):R'\to R'$ es el $k(t_1,t_2,t_3)[x_0,x_1,x_2]$-isomorfismo definido por

$$\begin{aligned}
x_4 &\mapsto x_4+t_1x_3+t_2x_2,\\
x_3 &\mapsto \qquad x_3+t_3x_2.
\end{aligned}$$

Podemos utilizar [9] para realizar el cálculo de la base de Gröbner sobre $k(t_1,t_2,t_3)$:

```
> LIB "poly.lib";
> option(redSB);
> ring r=(0,t1,t2,t3),(x0,x1,x2,x3,x4),dp;
> poly p1=x0^2+x0*x1; poly p2=2*x0*x2+x1*x3+x1*x4; poly p3=x0^2*x2+x1^2*x4;
> poly p4=x1^3+x0*x2^2-x1^2*x3+x1*x2*x4;
> ideal I=p1,p2,p3,p4;
> map f=r,x0,x1,x2,x3+t3*x2,x4+t1*x3+t2*x2;
> poly q1=f(p1);poly q2=f(p2);poly q3=f(p3);poly q4=f(p4);
> ideal J=q1,q2,q3,q4;
> ideal Y=normalize(lead(std(J)));Y;
Y[1]=x0*x2
Y[2]=x0^2
Y[3]=x0*x1*x3
Y[4]=x1^2*x2
Y[5]=x1^3
Y[6]=x1^2*x3^2
Y[7]=x1*x2^2*x3
Y[8]=x1*x2^3
```

Se obtiene que $N(I) = (x_0^2, x_0x_2, x_1^3, x_0x_1x_3, x_1^2x_2, x_1^2x_3^2, x_1x_2^2x_3, x_1x_2^3)$. Por tanto, aplicando el teorema 4.16(a) y el teorema 4.22, obtenemos que $\operatorname{depth}(R/I) = 1$.
Por el teorema 4.16(b) y el teorema 4.22, $\operatorname{reg}(I) = \text{máx}\{\operatorname{sat}(J_1), \operatorname{sat}(J_2), \operatorname{sat}(J_3)\}$, donde $J_1 = N(I) \cap k[x_0, x_1, x_2, x_3]$, $J_2 = N(I)|_{x_3=1} \cap k[x_0, x_1, x_2]$, y $J_3 = N(I)|_{x_2=1} \cap k[x_0, x_1]$. Por la proposición 4.1, puesto que $J_1 : (x_0, x_1, x_2, x_3) = J_1 + (x_0x_1^2, x_1x_2^2, x_1^2x_3)$, $J_2 : (x_0, x_1, x_2) = J_2 + (x_0, x_1, x_2)$ y $J_3 : (x_0, x_1) = (1)$, se obtiene que

$$\operatorname{reg}(I) = \text{máx}\{4, 2, 1\} = 4.$$

Si ahora suponemos que $k = \mathbb{Z}_2$, utilizando [9] de nuevo podemos obtener el ideal monomial de tipo encajado asociado a I:

```
> LIB "poly.lib";
> option(redSB);
> ring R=(2,t1,t2,t3),(x0,x1,x2,x3,x4),dp;
> poly p1=x0^2+x0*x1; poly p2=2*x0*x2+x1*x3+x1*x4; poly p3=x0^2*x2+x1^2*x4;
> poly p4=x1^3+x0*x2^2-x1^2*x3+x1*x2*x4;
> ideal I=p1,p2,p3,p4;
> map f=R,x0,x1,x2,x3+t3*x2,x4+t1*x3+t2*x2;
> poly q1=f(p1);poly q2=f(p2);poly q3=f(p3);poly q4=f(p4);
> ideal J=q1,q2,q3,q4;
> ideal Y=normalize(lead(std(J)));Y;
Y[1]=x1*x2
Y[2]=x0^2
Y[3]=x0*x1*x3
Y[4]=x1^3
Y[5]=x0*x2^2*x3
Y[6]=x0*x2^3
Y[7]=x1^2*x3^2*x4
Y[8]=x1^2*x3^3
```

Por tanto, el resultado es $N(I) = (x_0^2, x_1x_2, x_1^3, x_0x_1x_3, x_0x_2^3, x_0x_2^2x_3, x_1^2x_3^3, x_1^2x_3^2x_4)$. Además, por los teoremas 4.16(a) y 4.22 obtenemos que $\operatorname{depth}(R/I) = 0$. Observamos que $N(I)$ es el ideal introducido en el ejemplo 4.6. Utilizando los cálculos del ejemplo 4.20 y aplicando los teoremas 4.19 y 4.22 obtenemos que $\operatorname{sat}(I) = 5$ y $\operatorname{reg}(I) = 5$.

Finalmente, podemos eliminar la hipótesis sobre la normalización de Noether. Sea $I \subset R = k[x_0, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo tal que $d = \dim R/I \geq 1$. Sea $k(t) = k(t_1, \dots, t_{dn-d(d-1)/2})$ una extensión trascendental pura de k, y sea R'' el anillo de polinomios $k(t)[x_0, \dots, x_n]$. Sea $\Gamma(t) : R'' \to R''$ el $k(t)[x_0, \dots, x_{n-d}]$-isomorfismo definido por

$$\begin{aligned}
x_n &\mapsto x_n + t_1x_{n-1} + t_2x_{n-2} + \cdots + t_nx_0,\\
x_{n-1} &\mapsto x_{n-1} + t_{n+1}x_{n-2} + \cdots + t_{2n-1}x_0,\\
&\vdots\\
x_{n-d+1} &\mapsto x_{n-d+1} + \cdots + t_{dn-\frac{d(d-1)}{2}}x_0,
\end{aligned}$$

y denotamos por I'' al ideal $\Gamma(t)(I.R'')$ de R''. Entonces se puede obtener un resultado análogo al del teorema 4.25.

Teorema 4.28 ([4, Thm. 4.11]). *Existe un subconjunto abierto de Zariski $\mathcal{U}$ denso en $k^{dn-d(d-1)/2}$ tal que* $\operatorname{in}(I''(\gamma))$ *es constante y de tipo encajado para $\gamma \in \mathcal{U}$.*

Definición 4.29. Denotando $d = \dim R/I$, si $k[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ no es una normalización de Noether de R/I, llamamos a $\operatorname{in}(I'') \cap R$ el *ideal monomial de tipo encajado asociado a* I y lo denotamos por $N(I)$.

Recopilando los resultados anteriores, podemos enunciar los siguientes teoremas que juntan los distintos casos que hemos considerado:

Teorema 4.30 ([4, Thm. 1.1]). *Sea k un cuerpo arbitrario. Consideramos el ideal homogéneo $I \subset R = k[x_0, \dots, x_n]$, y sea $N(I)$ el ideal monomial de tipo encajado asociado a I. Sea $d = \dim R/I$, y sea p el menor entero tal que ninguno de los generadores minimales de $N(I)$ involucra a $x_{p+1}, \dots, x_n$. Entonces,*

(a) $\operatorname{depth}(R/I) = n - p$.

(b) $$\begin{aligned}\operatorname{reg}(I) = \max\{&\operatorname{sat}(N(I) \cap k[x_0, \dots, x_p]),\\
&\operatorname{sat}(N(I)|_{x_p=1} \cap k[x_0, \dots, x_{p-1}]),\\
&\operatorname{sat}(N(I)|_{x_{p-1}=1} \cap k[x_0, \dots, x_{p-2}]),\\
&\vdots\\
&\operatorname{sat}(N(I)|_{x_{n-d+1}=1} \cap k[x_0, \dots, x_{n-d}])\}.\end{aligned}$$

Teorema 4.31 ([4, Thm. 1.2]). *Con la notación del teorema 4.30, sea $x_0^{\lambda_0} \cdots x_p^{\lambda_p}$ el mínimo común múltiplo de los generadores minimales de $N(I)$. Para todo $i \in \{n-d, \dots, p\}$, denotamos por δ_i al menor grado de los generadores minimales del ideal $(x_0^{\lambda_0+1}, \dots, x_p^{\lambda_p+1}) : N(I)$ involucrando exactamente las variables $x_0, \dots, x_i$, si hay alguno, y sea $\delta_i = 0$ en otro caso. Entonces*

$$\operatorname{reg}(I) = \max_{n-d \leq i \leq p} \{\lambda_0 + \cdots \lambda_i + 1 - \delta_i;\ \delta_i \neq 0\}.$$

Estos resultados están implementados en la librería mregular.lib [5] de [9]. Esta librería incluye funciones para calcular la regularidad y la profundidad de un ideal, comprobar si es de tipo encajado, calcular índices de saturación, etc. La forma en que calcula la regularidad es la que se deduce de los resultados que hemos presentado, es decir, primero se comprueba si el ideal inicial es de tipo encajado, en cuyo caso se calcula la regularidad con el teorema 4.30. Si no lo es, se comprueba usando el lema 4.14 si está en posición de Noether (esto quiere decir que $k[x_{n-d+1}, \ldots, x_n]$ es una normalización de Noether del ideal), y en caso de que sea así, se aplica una transformación más económica según (4.2), se comprueba que el inicial obtenido sea de tipo encajado y se procede como en el primer caso. Si no estamos en ninguna de las situaciones anteriores, se hace una transformación triangular con coeficientes aleatorios, se comprueba que el inicial sea de tipo encajado y se calcula su regularidad como en los casos anteriores.

Ejemplo 4.32. Vamos a ver un ejemplo de uso de la librería anterior para un ideal cuya resolución libre minimal no se puede calcular, lo cual muestra la eficiencia del método que hemos presentado. Consideramos el ideal $I \subset R = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{10}]$ definido paramétricamente por

$$x_0 = st^6u^4v^4, \quad x_1 = st^4u^3v^7, \quad x_2 = u^{11}v^4, \quad x_3 = s^6t^3u^4v^2, \quad x_4 = st^7uv^6,$$
$$x_5 = tu^{10}v^4, \quad x_6 = s^3t^3u^3v^6, \quad x_7 = s^{15}, \quad x_8 = t^{15}, \quad x_9 = u^{15}, \quad x_{10} = v^{15}.$$

Con [9] podemos llevar a cabo la eliminación de los parámetros t, s, u, v, y posteriormente podemos utilizar las funciones de la librería mregular.lib [5] para calcular la regularidad y la profundidad del ideal.

```
> LIB "mregular.lib";
> ring S=0,(x(0..10),s,t,u,v),dp;
> ideal I=x(0)-st6u4v4,x(1)-st4u3v7,x(2)-u11v4,x(3)-s6t3u4v2,x(4)-st7uv6,
x(5)-tu10v4,x(6)-s3t3u3v6,x(7)-s15,x(8)-t15,x(9)-u15,x(10)-v15;
> ideal J=eliminate(I,stuv);
> ideal j=minbase(J);
> ring R=0,x(0..10),dp;
> ideal J=imap(S,j);
> size(minbase(J));
389
> deg(minbase(J));
17
> regIdeal(J);
29
> depthIdeal(J);
1
```

Obtenemos $\text{reg}(I) = 29$ y $\text{depth}(R/I) = 1$. La parte que más tiempo conlleva es la de la eliminación, que tarda alrededor de 2 minutos. Sin embargo, la regularidad se obtiene en apenas unos segundos y la profundidad prácticamente al instante. También vemos que el ideal está generado minimalmente por 389 binomios de grado ≤ 17, lo cual nos da a entender que no es razonable pedir una resolución debido al tamaño del ideal.

A continuación vamos a explicar lo que hace la implementación de los dos comandos de la librería mregular.lib que acabamos de utilizar. Para ello, realizaremos los pasos que hacen estas funciones utilizando [9]. En este ejemplo tenemos directamente que $\mathbb{C}[x_7, x_8, x_9, x_{10}]$ es una normalización de Noether de R/I, ya que al ser x_7, x_8, x_9, x_{10} potencias puras de los parámetros s, t, u, v, vemos que el resto de variables se pueden ver como raíces de polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}[x_7, x_8, x_9, x_{10}]$ (por ejemplo, x_0 es solución de $y^{15} - x_7x_8^6x_9^4x_{10}^4 = 0$). La implementación comprobaría esto utilizando el lema 4.14. En cualquier caso, podemos hacer un cambio aleatorio para buscar un ideal inicial de tipo encajado que solo involucre a las variables x_7, x_8, x_9, x_{10}:

$$\begin{aligned} x_{10} &\mapsto x_{10} + t_1x_9 + t_2x_8 + t_3x_7, \\ x_9 &\mapsto \phantom{x_{10} + t_1}x_9 + t_4x_8 + t_5x_7, \\ x_8 &\mapsto \phantom{x_{10} + t_1x_9 + t_2}x_8 + t_6x_7. \end{aligned}$$

Si elegimos los valores $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (95, -95, -46, -11, 59, 36)$, entonces podemos calcular con [9] el ideal resultante y comprobar si su inicial es de tipo encajado usando la proposición 4.9. Para realizar esta última comprobación, también utilizaremos una función de la librería mregular.lib [5] (el código que sigue debe ir después del que hemos visto antes).

```
> intvec t=95,-95,-46,-11,59,36;
> map f=R,x(0),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),x(6),x(7),x(8)+t[6]*x(7),x(9)+t[4]*x(8)+
t[5]*x(7),x(10)+t[1]*x(9)+t[2]*x(8)+t[3]*x(7);
> ideal N=lead(std(f(J)));
> is_nested(N);
1
```

Vemos que hemos obtenido que el ideal inicial después de realizar la transformación es de tipo encajado, así que podemos utilizar los resultados que hemos visto para calcular su regularidad (y, en consecuencia, la de I). Ayudándonos de [9] podemos calcular la regularidad, utilizando el teorema 4.30 y la proposición 4.1.

```
> select(N,11);   // No tiene la ultima variable x(10)
_[1]=0
> ring r1=0,x(0..9),dp; // Contraemos el anillo
> ideal i=imap(R,N);
> size(select(i,10)); // Tiene la variable x(9), la profundidad es 10-9=1
21
> deg(reduce(quotient(i,maxideal(1)),std(i)))+1; // Indice de saturacion
18
> ideal I=subst(i,x(9),1);
> I=minbase(I);
> ring r2=0,x(0..8),dp;
> ideal i=imap(r1,I);
> deg(reduce(quotient(i,maxideal(1)),std(i)))+1;
24
> ideal I=subst(i,x(8),1);   // Iteramos
> I=minbase(I);
> ring r3=0,x(0..7),dp;
> ideal i=imap(r2,I);
> deg(reduce(quotient(i,maxideal(1)),std(i)))+1;
```

```
29
> ideal I=subst(i,x(7),1);
> I=minbase(I);
> ring r4=0,x(0..6),dp;
> ideal i=imap(r3,I);
> deg(reduce(quotient(i,maxideal(1)),std(i)))+1;
12
```

Observamos que el máximo de los índices de saturación es 29, en acuerdo con lo que hemos obtenido antes. También obtenemos que $\operatorname{depth}(R/I) = 1$, ya que el menor entero p tal que ninguno de los generadores minimales de $N(I)$ involucra a $x_{p+1}, \dots, x_n$ es 9, así que $\operatorname{depth}(R/I) = n - p = 10 - 9 = 1$.
Por otro lado, vemos que hacer el cambio de coordenadas genérico para hallar $\operatorname{gin}(I)$ es muchísimo más costoso. Tendríamos que considerar $11 \times 11 = 121$ coeficientes aleatorios (que den lugar a una matriz invertible) y realizar la transformación. Además, después de realizarla no podemos comprobar que el ideal inicial del ideal transformado sea $\operatorname{gin}(I)$ (aunque la probabilidad sea muy alta).

Recapitulando, hemos conseguido asociar a cada ideal homogéneo I un ideal monomial de tipo encajado $N(I)$ con la misma regularidad y profundidad que I, y que gracias a sus propiedades nos permite hallar fácilmente estos invariantes. En el caso en el que $\operatorname{in}(I)$ (para el orden lexicográfico inverso) es de tipo encajado, podemos realizar el cálculo de manera directa con los resultados que hemos visto. Si no es el caso, pero $k[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ ($d = \dim R/I$) es una normalización de Noether de R/I, basta con realizar un cambio de coordenadas genérico triangular y que solamente involucra a $x_n, \dots, x_{n-d+1}$, por lo que supone una mejora significativa respecto al cambio de coordenadas general que había que realizar en el caso del ideal inicial genérico. Finalmente, si no estamos en ninguno de los dos casos anteriores, tenemos que realizar un cambio de coordenadas genérico triangular, que también supone una mejora respecto a un cambio de coordenadas general.
Por otro lado, si bien el cálculo de la regularidad de $N(I)$ no es demasiado costoso (el cálculo de los índices de saturación es bastante eficiente), para el $\operatorname{gin}(I)$ no hay que realizar ningún cálculo, ya que es directamente el mayor grado de un generador minimal de $\operatorname{gin}(I)$. Además, en la práctica lo que se hace es un cambio de coordenadas arbitrario, y mientras que es fácil comprobar que un ideal es de tipo encajado, en el caso de $\operatorname{gin}(I)$ no podemos afirmar con total seguridad que lo hayamos obtenido tras realizar el cambio de coordenadas. Teniendo todo lo anterior en cuenta, el cálculo de la regularidad con el método que acabamos de presentar es bastante más eficiente computacionalmente que el método que se obtendría a partir de los resultados de Bayer y Stillman para $\operatorname{gin}(I)$. A pesar de esto, el ideal inicial genérico sigue teniendo gran importancia desde el punto de vista teórico y continúa siendo interesante en diversos contextos.

5. Cotas para la regularidad y conjetura de Eisenbud-Goto

En esta sección, más corta que las anteriores, vamos a presentar brevemente algunas cotas para la regularidad, y en particular vamos a enunciar la conjetura de Eisenbud-Goto, que ha sido una conjetura fundamental durante los últimos 35 años y que ha sido resuelta en negativo en 2018 por McCullough y Peeva en su artículo [17], que es el artículo que utilizamos como referencia principal.
Sea $R = k[x_0, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios. Antes de empezar con las cotas para la regularidad vamos a introducir algunas definiciones que nos serán útiles en lo que sigue. Para ello, recordamos que la longitud de una cadena $\mathfrak{p}_r \supsetneq \mathfrak{p}_{r-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_0$ de ideales primos se toma como r (R no se considera un ideal primo).

Definición 5.1. Dado un ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$, llamamos *codimensión* (o *altura*) de $\mathfrak{p}$, denotado $\operatorname{codim} \mathfrak{p}$, a la dimensión del anillo local $R_{\mathfrak{p}}$. Equivalentemente, es el superior de las longitudes de cadenas descendentes de ideales primos desde $\mathfrak{p}$.

Vemos que la definición es análoga a la de dimensión de Krull 2.44, pero con cadenas descendentes de ideales en vez de cadenas ascendentes. En el caso del anillo de polinomios $R = k[x_0, \dots, x_n]$, se tiene que

$$\operatorname{codim} \mathfrak{p} = \dim R - \dim R/\mathfrak{p} = n + 1 - \dim R/\mathfrak{p}.$$

Por otro lado, vemos ahora la definición de un tipo particular de anillos que mencionaremos más adelante:

Definición 5.2. Un anillo noetheriano R en el que la profundidad coincide con la dimensión de Krull se dice que es *Cohen-Macaulay.*

En general, se tiene que la profundidad es menor que la dimensión. Si tenemos en cuenta la fórmula de Auslander-Buchsbaum, entonces vemos que los anillos Cohen-Macaulay son aquellos con la resolución minimal más corta posible.

En cuanto a las cotas, comenzamos primero haciendo una mención a la dimensión proyectiva. Como ya vimos cuando dimos la definición, tenemos una cota bastante buena para la dimensión proyectiva de un ideal $I \subset R$ por el Teorema de las Sizigias de Hilbert 2.21:

$$\operatorname{pd}(I) < n + 1.$$

Sin embargo, la cota general (sin requerir condiciones adicionales) para la regularidad es doblemente exponencial:

$$\operatorname{reg}(I) \leq (2 \operatorname{maxdeg}(I))^{2^{n-1}},$$

donde $\operatorname{maxdeg}(I)$ es el mayor grado de un elemento en un sistema de generadores minimal de I (siempre se da que $\operatorname{maxdeg}(I) \leq \operatorname{reg}(I)$). Este resultado fue probado por Bayer-Mumford en característica 0, y por Caviglia-Sbarra en cualquier característica (las referencias exactas de estos resultados y la mayoría de los que siguen se encuentran en [17]). Vemos que es una cota mucho peor que la que tenemos para la dimensión proyectiva, lo cual justifica la búsqueda de cotas mejores para la regularidad. Sin embargo, esta cota es bastante fina, ya que hay ejemplos basados en la construcción de Mayr-Meyer que se aproximan en buena medida; por ejemplo, existe un ideal I en $10r + 1$ variables para el cual $\mathrm{maxdeg}(I) = 4$ y

$$\mathrm{reg}(I) \geq 2^{2^r}.$$

A pesar de esto, bajo ciertas condiciones se espera que podamos reducir mucho esta cota. En particular, se esperan cotas mucho mejores si $J = I(X)$ es el ideal asociado a una variedad proyectiva de $\mathbb{P}^n_k$ con buenas propiedades geométricas. Especialmente importante es la cota que se da en la siguiente conjetura debida a Eisenbud y Goto (Journal of Algebra 88, 1984):

Conjetura 5.3 (Eisenbud-Goto Conjecture, [17])**.** Supongamos que el cuerpo k es algebraicamente cerrado. Si $\mathfrak{p} \subset (x_0, \dots, x_n)^2$ es un ideal homogéneo primo en R, entonces

$$\mathrm{reg}(\mathfrak{p}) \leq \deg(R/\mathfrak{p}) - \mathrm{codim}(\mathfrak{p}) + 1.$$

La conjetura se ha demostrado que es cierta en algunos casos, como el de curvas irreducibles o el de superficies lisas. También ha sido probada en el caso de que $R/\mathfrak{p}$ sea Cohen-Macaulay. En el caso liso, se han encontrado cotas en dimensión 3 y 4 que son solo ligeramente peores que las de la conjetura, y en dimensiones mayores se han encontrado cotas que van empeorando al aumentar la dimensión. D. Eisenbud y S. Goto también conjeturaron que las hipótesis en 5.3 se podían debilitar y decir solamente que X es reducida (es decir, suponer que el ideal $\mathfrak{p}$ en la conjetura 5.3 es radical en lugar de primo) y conexa en codimensión 1, lo cual ha sido probado para curvas. Las hipótesis no se pueden relajar mucho más, ya que se ha visto a través de contraejemplos que la regularidad de una variedad reducida equidimensional (lo cual quiere decir que el ideal $\mathfrak{p}$ es intersección de primos con la misma codimensión) X no se puede acotar por su grado y que no existe una cota para la regularidad de un ideal homogéneo no reducido en términos de la multiplicidad, incluso para codimensión fija.

Esta conjetura ha permanecido abierta durante 35 años y ha dado lugar a numerosos trabajos relevantes. Finalmente se ha demostrado que no es cierta en general en el artículo [17]. De hecho, se demuestra que la regularidad de ideales homogéneos primos no degenerados no está acotada por ninguna función polinomial del grado (en cualquier cuerpo k). Un ideal primo $\mathfrak{p}$ no degenerado es un ideal primo que cumple $\mathfrak{p} \subset (x_0, \dots, x_n)^2$ (la condición que se pide en la conjetura), lo cual es equivalente a que X no esté contenido en un hiperplano de $\mathbb{P}^n_k$. En lo que sigue entenderemos que los anillos de polinomios se consideran con la graduación estándar. El resultado que se ha probado es el siguiente:

Teorema 5.4 (McCullough y Peeva, [17, Thm. 1.9])**.** *En cualquier cuerpo k (el caso $k = \mathbb{C}$ es especialmente importante), la regularidad de los ideales primos homogéneos no degenerados no está acotada por ninguna función polinomial de la multiplicidad, es decir, para cualquier polinomio $\Theta(x)$ existe un ideal primo homogéneo no degenerado $\mathfrak{p}$ en un anillo de polinomios R sobre el cuerpo k tal que* $\mathrm{reg}(\mathfrak{p}) > \Theta(\deg(R/\mathfrak{p}))$.

La manera de conseguir un contraejemplo es construir un ideal primo homogéneo con regularidad alta (por ejemplo con la construcción de Mayr-Meyer que hemos mencionado antes). El método, por tanto, consiste en, comenzando con un ideal homogéneo I, construir un ideal primo $\mathfrak{p}$ cuya dimensión proyectiva, regularidad, grado máximo de un generador minimal (maxdeg), multiplicidad, dimensión, profundidad y codimensión estén expresados en términos de los invariantes de I. El teorema que se prueba para el ideal $\mathfrak{p}$ así construido (no vamos a estudiar cómo se construye) es el que enunciamos a continuación:

Teorema 5.5 (McCullough y Peeva, [17, Thm. 1.6])**.** *Sea k un cuerpo arbitrario. Sea I un ideal generado minimalmente por elementos homogéneos $f_1, \dots, f_m$ (con $m \geq 2$) en el anillo de polinomios $S = k[x_0, \dots, x_n]$.*
El ideal $\mathfrak{p}$ que se construye es homogéneo en el anillo de polinomios

$$R = S[y_1, \dots, y_m, u_1, \dots, u_m, z, v]$$

con $n + 2m + 3$ variables. El ideal $\mathfrak{p}$ es primo y no degenerado, y además se tiene que:

(a) *El mayor grado de un generador minimal de $\mathfrak{p}$ es*

$$\operatorname{maxdeg}(\mathfrak{p}) = \text{máx}\left\{1 + \operatorname{maxdeg}(\operatorname{Syz}^S(I)),\ \ 2(\operatorname{maxdeg}(I) + 1)\right\},$$

donde $\operatorname{Syz}^S(I)$ es el primer módulo de sizigias de I para el anillo S y los generadores $f_1, \dots, f_m$.

(b) *La multiplicidad de $R/\mathfrak{p}$ es*

$$\deg(R/\mathfrak{p}) = 2\prod_{i=1}^{m}(\deg(f_i) + 1).$$

(c) *La regularidad, la dimensión proyectiva, la profundidad, la codimensión, y la dimensión de $R/\mathfrak{p}$ son:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{reg}(R/\mathfrak{p}) &= \operatorname{reg}(S/I) + 2 + \sum_{i=1}^{m}\deg(f_i),\\
\operatorname{pd}(R/\mathfrak{p}) &= \operatorname{pd}(S/I) + m - 1,\\
\operatorname{depth}(R/\mathfrak{p}) &= \operatorname{depth}(S/I) + m + 3,\\
\operatorname{codim}(\mathfrak{p}) &= m,\\
\dim(R/\mathfrak{p}) &= m + n + 3.
\end{aligned}$$

A partir del teorema anterior, utilizando ideales I con regularidad elevada que han sido construidos previamente, podemos obtener un ideal primo $\mathfrak{p}$ candidato a contradecir la conjetura 5.3.

Contraejemplo 5.6. En [15], Koh construye un ideal I_r generado por $22r - 3$ cuádricas y una forma lineal en un anillo de polinomios de $22r-1$ variables, y tal que $\operatorname{maxdeg}(\operatorname{Syz}(I_r)) \geq 2^{2^{r-1}}$. Por el teorema 5.5, podemos construir a partir de I_r un ideal primo homogéneo $\mathfrak{p}_r$ (en un anillo de polinomios R_r) cuya multiplicidad y maxdeg son:

$$\begin{aligned}
\deg(R_r/\mathfrak{p}_r) &\leq 4 \cdot 3^{22r-3} < 4^{22r-2} < 2^{50r},\\
\operatorname{maxdeg}(\mathfrak{p}_r) &\geq 2^{2^{r-1}} + 1 > 2^{2^{r-1}},
\end{aligned}$$

lo cual contradice la conjetura 5.3 para r suficientemente grande. De hecho, la diferencia

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{p}_r) - \deg(R_r/\mathfrak{p}_r) \geq \operatorname{maxdeg}(\mathfrak{p}_r) - \deg(R_r/\mathfrak{p}_r) > 2^{2^{r-1}} - 2^{50r}$$

se puede hacer arbitrariamente grande eligiendo r suficientemente grande. Si tenemos en cuenta que $\operatorname{codim}(\mathfrak{p}_r) = 22r - 2$ por el teorema 5.5, vemos que la codimensión crece linealmente con r, por lo que la cota de la conjetura 5.3 no se cumple por cantidades arbitrariamente grandes escogiendo r suficientemente grande. Esto hace que en vez de buscar cotas similares se intente encontrar hipótesis más fuertes que hagan que se cumpla la conjetura.

Contraejemplo 5.7. Vamos a ver ahora un contraejemplo que podemos construir directamente. El ideal que vamos a considerar es el ideal de definición del álgebra de Rees de un ideal. Para ello, partimos del anillo $S = k[u, v, w, x, y, z]$ y también tomamos otras 4 variables T_1, T_2, T_3 y t. Consideramos el morfismo de álgebras $\psi : S[T_1, T_2, T_3] \to S[t]$ definido por

$$T_1 \mapsto tu^6, \quad T_2 \mapsto tv^6, \quad T_3 \mapsto t(u^2w^4 + v^2x^4 + uvwy^3 + uvxz^3).$$

El ideal que vamos a considerar es $I = \ker \psi$, que es primo porque es el núcleo de un morfismo. Podemos calcularlo con [9] de la siguiente manera:

```
> ring R=0,(T(1..3),u,v,w,x,y,z,t),dp;
> ideal i=T(1)-t*(u6),T(2)-t*(v6),T(3)-t*(u2w4+v2x4+uvwy3+uvxz3);
> ideal I=eliminate(i,t);
> ring S=0,(T(1..3),u,v,w,x,y,z),dp;
> ideal I=imap(R,I);
> size(minbase(I));
76
```

El ideal que obtenemos de esta manera está generado minimalmente por 76 polinomios. Ahora podemos calcular la regularidad del ideal a partir de la tabla de Betti y también podemos obtener $\deg(R/I)$ con [9] (suponiendo que se escribe lo siguiente a continuación del código anterior):

```
> list rI=minres(res(I,0));
> regularity(rI);
38
> degree(std(I));
// dimension (proj.)  = 6
// degree (proj.)   = 31
```

Así que obtenemos $\operatorname{reg}(I) = 38$, $\deg(R/I) = 31$ y la dimensión de $V(I)$ como variedad proyectiva es 6, por lo que $\dim R/I = 6 + 1 = 7$ y $\operatorname{codim} I = 9 - 7 = 2$. Por tanto, como $38 > 31 - 2 + 1$, vemos que no se verifica la cota de la conjetura 5.3.

También se conocen otras cotas, como puede ser la siguiente cota debida a Bertram-Ein-Lazarsfeld en característica 0 para $\mathfrak{p}$ radical, generado en grado menor o igual que s y con $V(\mathfrak{p})$ lisa:

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{p}) \leq 1 + (s - 1) \operatorname{codim}(\mathfrak{p}).$$

Por otro lado, Mumford demostró la siguiente cota para $\mathfrak{p}$ radical tal que $V(\mathfrak{p})$ es lisa y equidimensional:

$$\operatorname{reg}(\mathfrak{p}) \leq \dim\,(R/\mathfrak{p})\,(\deg R/\mathfrak{p} - 2) + 2.$$

Estas cotas son distintas a la de la conjetura 5.3 en el sentido de que no son lineales en el grado (o los grados de los generadores), ya que hay un coeficiente que involucra la dimensión o la codimensión. La cota que se da en la conjetura es muy elegante y es interesante estudiar si la conjetura es cierta cuando imponemos condiciones adicionales en el ideal primo. El caso más interesante es el de característica 0 y $X \subset \mathbb{P}^n_k$ una variedad lisa, en el cual la conjetura sigue abierta.

Bibliografía

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1969.

[2] D. Bayer, M. Stillman. A criterion for detecting m-regularity. Inventiones mathematicae 87 (1987) 1-11.

[3] I. Bermejo, P. Gimenez. Computing the Castelnuovo-Mumford regularity of some subschemes of $\mathbb{P}_k^n$ using quotients of monomial ideals. Journal of Pure and Applied Algebra 164 (2001) 23-33.

[4] I. Bermejo, P. Gimenez. Saturation and Castelnuovo-Mumford regularity. Journal of Algebra 303 (2006) 592-617.

[5] I. Bermejo, P. Gimenez, G.-M. Greuel. mregular.lib, a library for computing the Castelnuovo-Mumford regularity. Singular 4.1.2, 2019.

[6] W. Bruns, J. Herzog. Cohen-Macaulay rings. Second Edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 39. Cambridge University Press, 1998.

[7] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea. Ideals,Varieties, and Algorithms. Fourth Edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2015.

[8] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea. Using Algebraic Geometry. Second Edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 185. Springer, 2005.

[9] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann. Singular 4.1.2. A Computer Algebra System for Polynomial Computations, `http://www.singular.uni-kl.de`, 2019.

[10] D. Eisenbud. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 150. Springer, 1995.

[11] D. Eisenbud. The Geometry of Syzygies. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 229. Springer, 2005.

[12] D. Grayson, M. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/`.

[13] J. Herzog, T. Hibi. Monomial Ideals. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 260. Springer, 2011.

[14] I. Kaplansky. Commutative Rings. University of Chicago Press, 1974.

[15] J. Koh. Ideals generated by quadrics exhibiting double exponential degrees. Journal of Algebra 200 (1998) 225-245.

[16] H. Matsumura. Commutative ring theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8. Cambridge University Press, 1989.

[17] J. McCullough, I. Peeva. Counterexamples to the Eisenbud-Goto regularity conjecture. Journal of the American Mathematical Society 31 (2018) 473-496.

[18] M. E. Rossi. Castelnuovo-Mumford regularity and applications. CoCoA School, 2009. http://www.dima.unige.it/~rossim/CocoASchool.RossiH.pdf.

[19] B. Sturmfels. Four counterexamples in combinatorial algebraic geometry. Journal of Algebra 230 (2000) 282-294.