

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
FACULTAD DE CIENCIAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

La Paradoja de Banach-Tarski

Autor:

Ana Margarita Rodríguez Cordero

Tutor:

Jorge Mozo Fernández

Agradecimientos

El presente Trabajo de Fin de Grado ha sido realizado bajo la supervisión de Jorge Mozo Fernández, a quien me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento por haber hecho posible la realización del mismo. Especialmente, agradecerle la paciencia, tiempo y dedicación a que el trabajo saliera adelante.

Índice general

Introducción	v
1. Nociones previas	1
1.1. Notación	1
1.2. Resultados previos	2
1.3. Sobre las biyecciones	5
1.4. Axioma de elección	8
2. Equidescomposición	11
3. Teorema de Banach-Tarski	23
3.1. Paradoja de Hausdorff	26
3.2. Paradoja de Banach-Tarski	28
4. El problema General de la Medida	33
4.1. La recta y el plano	38
5. Generalización	43
5.1. Espacio de dimensión tres	43
5.2. La esfera	45
6. Conclusiones	49

Introducción

Un enunciado informal y bastante conocido de La Paradoja de Banach-Tarski sería que *un guisante puede ser dividido en un número finito de partes y estas ser reensambladas, de manera que dichas partes formen un conjunto del tamaño del sol*. Esto desde luego puede parecer, en un principio, inverosímil; pero es sabido que bajo los axiomas de las Matemáticas modernas el resultado es totalmente válido. Una vez escrito con formalismo matemático adecuado y sabiendo que es cierto bajo la axiomática de las Matemáticas modernas, podemos empezar a discernir qué hace que sea un resultado válido.

Partiendo del enunciado informal se puede empezar a sospechar que será necesario utilizar el axioma de elección, debido a que puede cumplir un papel importante a la hora de dividir el conjunto pequeño (el guisante). Por otro lado, el hecho de que las *partes* sean *reensambladas* nos introduce la necesidad de utilizar movimientos rígidos que no deformen dichas *partes* o alteren su medida, por lo que puede parecer que al empezar con un conjunto “pequeño” y terminar con uno “grande” se crea algo de la nada. Pero esto no es así, como veremos, está relacionado con la existencia de los conjuntos no medibles y con el hecho de que trabajamos con conjuntos no numerables.

La implicación más inmediata de la paradoja de Banach-Tarski está directamente relacionada con el problema de la medida. Este implica que, además de existir conjuntos no medibles Lebesgue, no existe una medida que permita *medir todos los subconjuntos acotados* en los espacios euclídeos de dimensión mayor o igual a tres.

De manera resumida, decir que en el presente trabajo se pretende abordar primero hablando de la descomposición finita de conjuntos en partes respectivamente equivalentes (o *equidescomposición* finita), indagando en algunas particularidades de esta en los espacios euclídeos de dimensión menor que tres (donde no se da esta “*paradoja*”). A continuación hacemos una pequeña introducción a los conjuntos y grupos paradójicos, para poder hablar con rigor sobre el tema que da título al presente trabajo, procediendo entonces a demostrar el resultado que nos atañe. Hablamos a continuación sobre la consecuencia más inmediata de este resultado para por último, dar una

generalización y caer en ciertas similitudes que el mismo acarrea, desde el punto de vista de la equidescomposición finita, entre la esfera y los espacios euclídeos de dimensión tres o mayor.

Capítulo 1

Nociones previas

En este capítulo pretendemos introducir la notación empleada durante el trabajo, así como una serie de resultados y definiciones previas necesarias para poder contextualizar y abordar el problema y sus consecuencias. El fin de este capítulo es facilitar, a los lectores menos familiarizados con ciertos temas, la lectura del presente trabajo. Para profundizar más sobre alguna definición o resultado concreto de este capítulo es recomendable dirigirse a las referencias dadas en la bibliografía. No incluiremos la mayoría de las demostraciones de los resultados de este capítulo o bien por su sencillez o bien porque son resultados que han sido abordados durante el grado.

1.1. Notación

A continuación introducimos una serie de símbolos de uso frecuente.

- Utilizaremos los símbolos \cup , \cap , \setminus , Δ y \times para referirnos a la unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y producto cartesiano entre dos conjuntos.
- $A \subset B$ significa que A está contenido en B , mientras que $A \subsetneq B$ significa que A está contenido en B pero no pueden ser iguales.
- Si se dice que $x \in A$, significa que x es un elemento de A .
- A^c indica el conjunto complementario de A dentro de un espacio X .
- \mathbb{R} denotará el cuerpo de los números reales, así como \mathbb{N} a los números naturales sin el cero, \mathbb{Z} a los enteros y \mathbb{Q} a los racionales.
- Si A es un conjunto de un espacio topológico denotaremos por A° a su interior y por \overline{A} a su clausura.

- Denotaremos por $B(\mathbf{a}, r)$ a la bola abierta de centro \mathbf{a} y radio r en \mathbb{R}^n y por $\overline{B}(\mathbf{a}, r)$ a la bola cerrada.
- Denotaremos por \mathbb{S}^n a la n -esfera, contenida en \mathbb{R}^{n+1}
- Denotaremos por $SO(n)$ al grupo especial ortogonal.

1.2. Resultados previos

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto arbitrario. Una clase \mathcal{A} de subconjuntos de X es un *álgebra* si

- I. $X \in \mathcal{A}$,
- II. para todo conjunto A que pertenece a \mathcal{A} , A^c también pertenece a \mathcal{A} ,
- III. para toda familia finita de conjuntos $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, se tiene que los conjuntos $\bigcup_{k=1}^n A_k$ y $\bigcap_{k=1}^n A_k$ pertenecen a \mathcal{A} .

Definición 1.2.2. Sea X un conjunto arbitrario. Una clase \mathcal{S} de subconjuntos de X es una σ -*álgebra* si

- I. $X \in \mathcal{S}$,
- II. para todo conjunto A que pertenece a \mathcal{S} , A^c también pertenece a \mathcal{S} ,
- III. para toda sucesión de conjuntos de \mathcal{S} ($\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$), se tiene que los conjuntos $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ pertenecen a \mathcal{S} .

Definición 1.2.3. Una función μ definida sobre un álgebra \mathcal{A} , con valores en \mathbb{R} , es *finitamente aditiva* si para toda familia finita de conjuntos disjuntos dos a dos $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$

Definición 1.2.4. Una función μ definida sobre una σ -álgebra \mathcal{S} , con valores en \mathbb{R} , es σ -*aditiva* si para toda sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Definición 1.2.5. Sea X un conjunto arbitrario, y sea \mathcal{S} una σ -álgebra en X . Una *medida*, sobre la σ -álgebra \mathcal{S} es una función σ -aditiva μ definida en \mathcal{A} con valores en $[0, +\infty]$.

Definición 1.2.6. Sea X un conjunto arbitrario, y sea \mathcal{A} un álgebra en X . Una *medida finitamente aditiva*, sobre el álgebra \mathcal{A} es una función finitamente aditiva μ definida en \mathcal{A} con valores en $[0, +\infty]$.

Nota. Una medida finitamente aditiva no es una medida.

Ejemplo 1.2.7.

I. Consideramos en \mathbb{R}^n los conjuntos $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ para todo k . Llamaremos \mathcal{B} a la σ -álgebra generada por esos conjuntos (σ -álgebra de Borel). [Coh13]

II. Definimos en los conjuntos $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ la función

$$\mu^*([a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

que tiene una única extensión en \mathcal{B} , esa extensión es una medida en \mathcal{B} [Hal78] [Bil12] y la denotaremos por $\mu_{\mathcal{B}}$. Si $A \in \mathcal{B}$, definimos su medida exterior e interior

$$\begin{aligned} \mu_e &:= \inf \sum_k \mu^*(A_k), \quad A \subset \cup_k A_k \\ \mu_i &:= \sup \mu^*(\cup A_k), \quad \cup A_k \subset A \end{aligned}$$

y cuando estas coinciden se tiene que $\mu_{\mathcal{B}}(A) = \mu_e(A) = \mu_i(A)$.

III. Completamos \mathcal{B} a \mathcal{M} , la σ -álgebra los conjuntos medibles Lebesgue, con los conjuntos de la forma $A \triangle N$ donde $A \in \mathcal{B}$ y N es un subconjunto de un conjunto de medida nula en \mathcal{B} , a la extensión de $\mu_{\mathcal{B}}$ la llamamos medida de Lebesgue (m). [Hal78]

IV. Un ejemplo de función finitamente aditiva y no σ -aditiva definida en la σ -álgebra de Lebesgue en \mathbb{R} es

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} m(A \cap [0, k))$$

que toma el valor 1 cuando $A \supset (c, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$ y es 0 en el resto de los casos. Se ve fácilmente que

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} [k, k+1)\right) \neq \sum_{k=0}^{\infty} \mu([k, k+1))$$

V. Un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible *Jordan* si su función característica, \mathcal{X}_E es integrable Riemann. La familia de conjuntos medibles Jordan es aditiva, pero no σ -aditiva [Bur95].

$$\mathcal{X}_E(x) := \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Definición 1.2.8. Sean X un conjunto, \mathcal{A} una σ -álgebra en X y μ una medida en \mathcal{A} , entonces la terna (X, \mathcal{A}, μ) es un *espacio medible*. También, si X es un conjunto y \mathcal{A} una σ -álgebra en X , el par (X, \mathcal{A}) es llamado *espacio medible*. Si trabajamos en (X, \mathcal{A}, μ) , se dice que μ es una *medida* en (X, \mathcal{A}) y si no hay confusión sobre la σ -álgebra, decimos que μ es una *medida* en X . En un espacio medible, decimos que un *conjunto es medible* si pertenece a la σ -álgebra.

Proposición 1.2.9. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio medible y A y B conjuntos medibles tales que $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Además, si $\mu(A) < +\infty$, entonces $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. [Hal78]

Definición 1.2.10. Un subgrupo N de un grupo G es *normal*, si para todo elemento g de G , y cualquier elemento h de N , se tiene que $g^{-1}hg \in N$, es decir

$$Ng = gN; \quad g^{-1}Ng = N.$$

Si N es un subgrupo normal de G , escribimos $N \triangleleft G$

Definición 1.2.11. Un conjunto A en un espacio topológico X es *nunca denso* o *diseminado* si y solo si el interior de su clausura es el vacío ($(\overline{A})^\circ = \emptyset$). Un punto $p \in X$ es *aislado* si $\{p\}$ es abierto y un conjunto D es discreto en X si y solo si todo punto $d \in D$ es aislado.

Proposición 1.2.12. Los conjuntos nunca densos cumplen las siguientes propiedades:

- I. En un espacio métrico, X sin puntos aislados, un conjunto discreto es nunca denso;
- II. En un espacio topológico X , la frontera de un abierto es cerrado y nunca denso;
- III. Todo conjunto cerrado y nunca denso es la frontera de un abierto;
- IV. La unión finita de nunca densos es nunca densa.

Definición 1.2.13. Un *espacio métrico* es un par ordenado (M, d) , donde M es un conjunto y d es una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que para $x, y, z \in M$ satisface que:

- I. $d(x, y) \geq 0$;
- II. $d(x, y) = 0$, si $d(x, y) = 0$ entonces $x = y$;
- III. $d(x, y) = d(y, x)$;

IV. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (desigualdad triangular).

La función d se llama medida o métrica del espacio M , y si esta es conocida se prescinde de la notación del par ordenado y se simplifica refiriéndose a M como espacio métrico.

Definición 1.2.14. Una *norma* sobre un espacio vectorial V es una aplicación real definida positiva en V ($\|\mathbf{v}\| \geq 0, \mathbf{v} \in V$) cumpliendo que

- I. $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|, a \in K$;
- II. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (Propiedad triangular);
- III. $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Definición 1.2.15. Un espacio métrico M es completo si y solo si toda sucesión de Cauchy es convergente

Definición 1.2.16. Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial, normado y completo. Si además tiene un subconjunto denso numerable, se dice que es *separable*.

Definición 1.2.17. Un *funcional lineal* es una aplicación lineal definida en un espacio de Banach con imagen en el cuerpo.

Teorema 1.2.18. (Teorema de extensión de Hahn-Banach para espacios reales). Sea L un subespacio lineal propio de un espacio de Banach real y separable (E). Entonces, si $F(f)$ es un funcional lineal acotado en L , con norma $\|F\|$, existe un funcional lineal acotado $F^*(f)$ en E tal que $F^*(f) = F(f) \forall f \in L$ y $\|F^*\| = \|F\|$. [BL98][Zaa53]

Proposición 1.2.19. Sea p una función sublineal definida en un espacio vectorial real X . Si $x_0 \in X$, existe un funcional lineal F definido en X de manera que $F(x_0) = p(x_0)$ y $|F(x)| \leq p(x)$ para todo x en X . [BL98]

1.3. Sobre las biyecciones

La mayor parte de esta sección se puede encontrar en [Ban24]

Teorema 1.3.1. (Cantor-Schröder-Bernstein). Sean A y B conjuntos de un espacio topológico X . Si la función φ es una biyección de A en un subconjunto de B y la función ψ es otra biyección que transforma un subconjunto de A en el conjunto B , entonces existe una descomposición de los conjuntos A y B :

$$A = A_1 \cup A_2, B = B_1 \cup B_2$$

satisfaciendo las condiciones:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2, \varphi(A_1) = B_1 \text{ y } \psi(A_2) = B_2$$

Demostración. Sea a un elemento cualquiera de A , fijémosnos en los subconjuntos E de A (por ejemplo, el propio conjunto A), que cumplen las siguientes condiciones:

- I. $a \in E$;
- II. si $x \in E$, entonces $\psi^{-1}\varphi(x) \in E$;
- III. si $x \in E$ y existe $\varphi^{-1}\psi(x)$, entonces $\varphi^{-1}\psi(x) \in E$

Designamos por $C(a)$ la intersección de todos los subconjuntos e de A que cumplen las condiciones anteriores, notando de inmediato que $C(a)$ está compuesto de los términos de la siguiente cadena:

$$\dots \varphi^{-1}\psi(a), a, \psi^{-1}\varphi(a), \psi^{-1}\varphi\psi^{-1}\varphi(a) \dots$$

Siendo bastante claro, por la manera en que están contruidos, que los conjuntos $C(a)$ cumplen las siguientes propiedades I-III. Otra cosa a destacar es que las cadenas $C(a)$ son disjuntas dos a dos, dos cadenas con un elemento en común o bien son la misma cadena o bien son vacías.

Designemos por A_2 al conjunto de todos los elementos a de A que verifican que $C(a)$ está contenido en $\psi^{-1}(B)$, estando de esta manera A_2 contenido en $\psi^{-1}(B)$ pero sin darse la inclusión contraria. El conjunto A_2 está compuesto por todos los elementos a tales que $C(a)$ puede representarse con el primer término perteneciente a $\psi^{-1}(B)$, es decir, para los cuales $\varphi^{-1}\psi(x)$ no existe.

Tomemos ahora $A_1 = A \setminus A_2$, cumpliendo por tanto que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y observemos algunas de las propiedades de A_1 y A_2 :

1. Si b pertenece a B y $\psi^{-1}(b) = a$ está en A_1 , entonces existe $\varphi^{-1}(b)$:
Si $\varphi^{-1}(b) = \varphi^{-1}\psi(a)$ no existiese, el primer término de la sucesión $C(a)$, sería $a = \psi^{-1}(b)$, del conjunto $\psi^{-1}(B)$. Por lo tanto, deduciríamos que $a \in A_2$, lo que contradice que A_1 y A_2 son disjuntos.
2. Si b pertenece a B y $\psi^{-1}(b) = a$ está en A_1 , entonces existe $\varphi^{-1}(b)$:
Si b pertenece a B y uno de los elementos $a_1 = \psi^{-1}(b)$ o bien $a_2 = \varphi^{-1}(b)$, pertenece a A_1 el otro también, ya que $a_1 = \psi^{-1}\varphi(a_2)$.

Definamos entonces, de acuerdo a $A = A_1 \cup A_2$, $A_2 \subset \psi^{-1}(B)$ y la hipótesis del teorema:

$$B_1 = \varphi(A_1), \quad B_2 = \psi(A_2),$$

teniendo que

$$B_1 \cup B_2 \subset B.$$

En aras de establecer la inclusión inversa, consideramos un elemento arbitrario b de B . Si $\psi^{-1}(b) \in A_2$, es evidente que b pertenece a $\psi(A_2) = B_2$. Si por el contrario $\psi^{-1}(b) \in A_1$, por 2 deducimos que existe $\varphi^{-1}(b)$ y pertenece a A_1 , por lo tanto $b \in \varphi(A_1) = B_1$. Y podemos entonces concluir que

$$B \subset B_1 \cup B_2$$

$$B = B_1 \cup B_2$$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Por tanto, se tiene que la descomposición de A y B dada cumple todas las condiciones del teorema. \square

Definición 1.3.2. Sea X un conjunto cualquiera. Sea \mathcal{R} una relación entre las partes de X ($\mathcal{P}(X)$). Se dice que \mathcal{R} posee la propiedad (α) , cuando siendo $A, B \in \mathcal{P}(X)$ que A esté relacionado con B implica la existencia de una función φ biyectiva, que transforma A en B

$$\varphi : A \rightarrow B,$$

de manera que $C\mathcal{R}\varphi(C)$ para todo subconjunto C de A .

Dada esta definición, el teorema de *Cantor-Schröder-Bernstein* implica la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3. Sean A y B subconjuntos de X y \mathcal{R} una relación entre los elementos de $\mathcal{P}(X)$. Supongamos que la relación \mathcal{R} cumple la propiedad (α) , entonces si $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, $A\mathcal{R}B_1$ y $A_1\mathcal{R}B$, podemos descomponer cada uno de los conjuntos A y B en dos subconjuntos disjuntos:

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2,$$

tales que:

$$A_1\mathcal{R}B_1 \text{ y } A_2\mathcal{R}B_2.$$

Demostración. Empecemos tomando $A_2 = A \setminus A_1$ y $B_2 = B \setminus B_1$. Como la relación cumple la propiedad (α) , tenemos que existen φ y ψ biyecciones de manera que $\varphi(A) = B_1$ y $\psi(A_1) = B$. Como las aplicaciones son biyecciones y estamos trabajando con particiones de A y B , se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2) = B_1 \\ \psi^{-1}(B) &= \psi^{-1}(B_1 \cup B_2) = \psi^{-1}(B_1) \cup \psi^{-1}(B_2) = A_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo la segunda en la primera, tenemos que

$$\begin{aligned} B_1 &= \varphi(\psi^{-1}(B_1) \cup \psi^{-1}(B_2)) \cup \varphi(A_2) \\ &= \varphi\psi^{-1}(B_1) \cup \varphi\psi(B_2) \cup \varphi(A_2) \end{aligned}$$

y como estamos trabajando con biyecciones, tenemos que B_1 es biyectivo con $\varphi\psi^{-1}(B_1)$ y como hemos visto, $\varphi\psi^{-1}(B_1)$ está contenido en $\varphi(A_1) \subset \varphi(A) = B_1$, por tanto, tenemos que A_1 es biyectivo con B_1 y al cumplir \mathcal{R} la propiedad (α) y procediendo de igual manera para A_2 y B_2 , tenemos que

$$A_1\mathcal{R}B_1 \quad A_2\mathcal{R}B_2.$$

□

Definición 1.3.4. Sea X un conjunto cualquiera, sea \mathcal{R} una relación en $\mathcal{P}(X)$. Se dice que la relación posee la propiedad (β) , cuando las condiciones $A_1\mathcal{R}B_1$, $A_2\mathcal{R}B_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$ implican que $(A_1 \cup A_2)\mathcal{R}(B_1 \cup B_2)$.

Teorema 1.3.5. Sean A y B dos conjuntos de un espacio cualquiera X y \mathcal{R} una relación en $\mathcal{P}(X)$. Si la relación \mathcal{R} cumple las propiedades (α) y (β) , y $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, $A\mathcal{R}B_1$ y $A_1\mathcal{R}B$, entonces $A\mathcal{R}B$.

Demostración. Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema. Entonces por la proposición 1.3.3, se tiene que además existen A_2 y B_2 que junto con A_1 y B_1 conforman particiones de A y B respectivamente, de manera que $A_1\mathcal{R}B_1$ y $A_2\mathcal{R}B_2$. Por tanto al cumplir la relación la propiedad (β) , se tiene que $A\mathcal{R}B$. □

1.4. Axioma de elección

La Paradoja de Banach-Tarski no sería posible sin el *axioma de elección*. En un principio la palabra *axioma* se utilizaba con el significado de “una verdad evidente”, actualmente un sistema axiomático en matemáticas es un conjunto básico de proposiciones a partir de las cuales (junto con la aplicación de la regla del modus ponens) se desarrolla una teoría formal. El sistema axiomático sobre el que se fundan las matemáticas modernas, surge como una propuesta de Zermelo para evitar las paradojas que surgían de la teoría de conjuntos “informal”, empezando por la definición de conjunto dada por Cantor. De este sistema dio una primera versión Zermelo en 1904 que fue evolucionando, con algunas modificaciones hasta llegar al sistema que se utiliza actualmente: Axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZFC). Dentro de estos axiomas es el axioma de elección, introducido por Zermelo, siempre ha

resultado bastante polémico, disminuyendo la polémica al Gödel probar la consistencia con el resto de axiomas. Este resulta polémico puesto que lleva, entre otras cosas, a la existencia de conjuntos no medibles y a resultados como los que tratamos en el presente trabajo. [Ham89] [Kle02]

Axioma de Elección: Dada una familia no vacía $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, existe un conjunto C que consiste exactamente en un elemento de cada miembro A_α de la familia.

Capítulo 2

Equidescomposición

Este capítulo, en el que hacemos una inmersión en las bases de la equidescomposición, forma el pilar del presente trabajo. Es posible llegar al resultado que nos atañe hablando únicamente en términos de esta equivalencia (y de hecho, lo haremos). Las referencias de este capítulo son [BT24] [Kur24] y [MMS14].

Supongamos ahora que estamos trabajando con conjuntos de un espacio métrico X .

Definición 2.0.1. Decimos que dos conjuntos (A, B) son *congruentes* ($A \cong B$) si existe una isometría que transforma A en B

Definición 2.0.2. Se dice que dos conjuntos (A, B) son *equivalentes por descomposición finita* ($A =_f B$), si existen conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n y B_1, B_2, \dots, B_n , con n natural, que cumplen:

- I. $A_k \cap A_l = \emptyset = B_k \cap B_l$ para todo k y l tales que $1 \leq k < l \leq n$
- II. $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ y $B = \bigcup_{k=1}^n B_k$
- III. $A_k \cong B_k$ con $1 \leq k \leq n$

Definición 2.0.3. Se dice que dos conjuntos $(A$ y $B)$ son *equivalentes por descomposición infinita numerable* ($A =_d B$), si existen conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ y $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ que cumplen las condiciones siguientes:

- I. $A_k \cap A_l = \emptyset = B_k \cap B_l$ para todo $k \neq l$
- II. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$

III. $A_k \cong B_k$ para todo k natural

En lo siguiente establecemos algunas de las propiedades de la equivalencia por descomposición finita, en aras de aplicarlas a la descomposición de la esfera y la bola de radio 1. Cada uno de estos resultados tiene su equivalente para la equivalencia por descomposición infinita numerable, siendo sus demostraciones análogas.

Teorema 2.0.4. La equivalencia por descomposición finita es una relación de equivalencia:

- I. Es reflexiva: $A =_f A$.
- II. Es simétrica: Si $A =_f B$, entonces $B =_f A$.
- III. Es transitiva: $A =_f B$ y $B =_f C$ entonces $A =_f C$.

Demostración. La reflexión y la simetría son inmediatas partiendo de la definición 2.0.2, probemos entonces la transitividad.

Supongamos que $A =_f B$ y $B =_f C$. Por la definición de equivalencia por descomposición finita 2.0.2 podemos suponer que existen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ y $B'_1, \dots, B'_m, C_1, \dots, C_m$ con n y m naturales, descomposiciones de los conjuntos A, B y C :

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k \quad y \quad B = \bigcup_{k=1}^n B_k$$

$$B = \bigcup_{l=1}^m B'_l \quad y \quad C = \bigcup_{l=1}^m C'_l$$

que satisfacen las condiciones I-III de la definición 2.0.2.

Definimos

$$B_{k,l} := B_k \cap B'_l, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq l \leq m.$$

Es inmediato que

$$B_k = \bigcup_{l=1}^m B_{k,l} \quad B'_l = \bigcup_{k=1}^n B_{k,l}.$$

Gracias a que los conjuntos B_k y B'_l son respectivamente disjuntos entre sí, tenemos que los conjuntos $B_{k,l}$ también lo son y por hipótesis A_k es congruente con B_k y B'_l es congruente con C_l para todo k y l ($1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$). Así llegamos a que existen conjuntos $A_{k,1}, A_{k,2}, \dots, A_{k,m}$ y $C_{1,l}, C_{2,l}, \dots, C_{n,l}$, que verifican:

$$A_{k,l} \cap A_{k_1,l_1} = \emptyset, \quad k \neq k_1 \text{ o } l \neq l_1;$$

$$C_{k,l} \cap C_{k_1,l_1} = \emptyset, \quad k \neq k_1 \text{ o } l \neq l_1;$$

$$A_k = \bigcup_{l=1}^m A_{k,l}, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$C_l = \bigcup_{k=1}^n C_{k,l}, \quad 1 \leq l \leq m;$$

$$A_{k,l} \cong B_{k,l} \text{ para } 1 \leq k \leq n \text{ y } 1 \leq l \leq m;$$

$$B_{k,l} \cong C_{k,l} \text{ para } 1 \leq k \leq n \text{ y } 1 \leq l \leq m.$$

Por lo que

$$A = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^m A_{k,l}, \quad C = \bigcup_{l=1}^m \bigcup_{k=1}^n C_{k,l} = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{l=1}^m C_{k,l}$$

y cada conjunto $A_{k,l}$ es congruente con $C_{k,l}$.

Tenemos, por tanto, una descomposición de los conjuntos A y C en un número finito de partes (igual a $n \cdot m$) que cumple las condiciones de la definición 2.0.2 y por ello A y C son equivalentes por descomposición finita. \square

Proposición 2.0.5. Si los conjuntos A y B se pueden descomponer en subconjuntos disjuntos:

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^n B_k$$

de manera que

$$A_k =_f B_k \text{ para } 1 \leq k \leq n,$$

entonces

$$A =_f B.$$

Es decir, la equivalencia por descomposición finita cumple la propiedad (β) 1.3.4.

Demostración. Como para todo k entre 1 y n se tiene que $A_k =_f B_k$, existen descomposiciones de A_k y B_k :

$$A_k = \bigcup_{l=1}^{m_k} A_{k,l}, \quad B_k = \bigcup_{l=1}^{m_k} B_{k,l}$$

que satisfacen las condiciones de la definición de equivalencia por descomposición finita

$$A_{k,l} \cap A_{k_1,l_1} = \emptyset = B_{k,l} \cap B_{k_1,l_1}, \quad k \neq k_1 \text{ o } l \neq l_1;$$

$$A_{k,l} \cong B_{k,l}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq l \leq m_k$$

siendo claro que

$$A_k = \bigcup_{l=1}^{m_k} A_{k,l}, \quad B_k = \bigcup_{l=1}^{m_k} B_{k,l}$$

resultando inmediato que $A =_f B$. \square

Proposición 2.0.6. Si $A =_f B$, entonces existe una función φ definida en A con imagen en B , que cumple las siguientes condiciones:

- I. φ transforma A en B de manera biyectiva;
- II. Si C es un subconjunto de A , $C =_f \varphi(C)$.

Es decir, la equivalencia por descomposición finita cumple la propiedad (α) 1.3.2.

Demostración. Sea:

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^n B_k$$

una descomposición de los conjuntos A y B que satisface las condiciones de la definición 2.0.2. Como los conjuntos A_k y B_k son congruentes, existen isometrías φ_k que transforman A_k en B_k de manera biyectiva. Definimos φ para todo p en A como $\varphi(p) = \varphi_k(p)$ si $p \in A_k$. Como los conjuntos A_k y B_k son descomposiciones disjuntas de A y B tenemos que φ transforma A en B de manera biyectiva.

Tomemos $C \subset A$ y definamos: $C_k := C \cap A_k$ $1 \leq k \leq n$, obteniendo que

$$C = \bigcup_{k=1}^n C_k;$$

$$C_k \cap C_l = \emptyset, \quad 1 \leq k < l \leq n;$$

$$C_k \subset A_k \quad \forall k;$$

y por lo tanto

$$\varphi(C) = \bigcup_{k=1}^n \varphi(C_k),$$

$$\varphi(C_k) \cap \varphi(C_l) = \emptyset, \text{ con } 1 \leq k < l \leq n.$$

Finalmente, dadas las propiedades de las funciones φ_k , tenemos que

$$C_k \cong \varphi(C_k), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Proporcionando C_k y $\varphi(C_k)$ descomposiciones de los conjuntos C y $\varphi(C)$ respectivamente. Las cuales cumplen todas las condiciones de la definición 2.0.2, teniendo por tanto que

$$C =_f \varphi(C).$$

Viendo finalmente que φ es la función deseada. \square

Corolario 2.0.7. Si $A =_f B$ y existe una descomposición de A en subconjuntos disjuntos,

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k;$$

entonces también existe una descomposición de B en subconjuntos disjuntos:

$$B = \bigcup_{k=1}^n B_k$$

de manera que $A_k =_f B_k$ $1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que se cumplen las hipótesis del corolario, entonces, por la proposición anterior, tenemos que existe una función φ que transforma de manera biyectiva A en B y que $A_k =_f \varphi(A_k)$ para todo k entre 1 y n . Sea ahora $B_k := \varphi(A_k)$, como la función es biyectiva y los A_k son disjuntos, tenemos que los B_k también son disjuntos y además:

$$B = \varphi(A) = \varphi\left(\bigcup_k A_k\right) = \bigcup_k \varphi(A_k) = \bigcup B_k.$$

\square

Teorema 2.0.8. (Cantor-Schröder-Bernstein, teoría de conjuntos). Suponemos que A_1 y B_1 son subconjuntos de A y B respectivamente y que A es equivalente a B_1 por descomposición finita al igual que B es equivalente a A_1 , entonces se tiene que A y B son equivalentes por descomposición finita.

Demostración. De acuerdo a las proposiciones 2.0.5 y 2.0.6, la relación de equivalencia por descomposición finita cumple las propiedades (α) y (β) de las definiciones 1.3.2 y 1.3.4. Por lo tanto, el teorema 2.0.8 es consecuencia inmediata del teorema 1.3.5. \square

Corolario 2.0.9. Si $A \supset B \supset C$ y $A =_f C$, entonces $A =_f B$ y $B =_f C$.

Este corolario es inmediato si en el teorema 2.0.8 se reemplaza A_1 por B y B_1 por C y se tiene en cuenta que estamos trabajando con una relación de equivalencia.

Proposición 2.0.10. Sean A, B_1, \dots, B_n , $n \in \mathbb{N}$ subconjuntos de X . Si $A =_f A \cup B_k$ para $1 \leq k \leq n$, entonces

$$A =_f A \cup \left(\bigcup_{k=1}^n B_k \right)$$

Demostración. Podemos suponer que los conjuntos A, B_1, \dots, B_n son disjuntos. Si no lo fueran, definimos los conjuntos

$$B'_1 := B_1 \setminus A, B'_k := B_k \setminus \left(A \cup \left(\bigcup_{l=1}^{k-1} B_l \right) \right), \quad 2 \leq k \leq n,$$

de manera que son disjuntos dos a dos entre ellos y con A . Teniendo claramente que

$$A \cup \left(\bigcup_{k=1}^n B'_k \right) = A \cup \left(\bigcup_{k=1}^n B_k \right)$$

y que $A \cup B'_k$ está contenido en $A \cup B_k$ para todo k . Teniendo así que

$$A \subset A \cup B'_k \subset A \cup B_k$$

y pudiendo aplicar el corolario 2.0.9, se llega finalmente a que

$$A =_f A \cup B'_k =_f A \cup B_k.$$

Una vez tenemos que los conjuntos A, B_1, \dots, B_n son disjuntos, notamos que la proposición es evidente para $n = 1$ y pasamos a aplicar inducción suponiendo que es cierto para $n = n'$ y para ver que también lo es para $n = n' + 1$. Entonces, tenemos que

$$A =_f A \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n'} B_k \right),$$

$$A =_f A \cup B_{n'+1}$$

y como

$$A \cap B_{n'+1}, B_{n'+1} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n'} B_k \right)$$

son intersecciones vacías, mediante la aplicación de la proposición 2.0.5 se obtiene que

$$A \cup B_{n'+1} =_f A \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n'+1} B_k \right)$$

llegando por transitividad a que

$$A =_f A \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n'+1} B_k \right).$$

□

Proposición 2.0.11. Si $A_1 =_f A_2$, $B_1 =_f B_2$, $A_1 \cup A_2 =_f B_1 \cup B_2$, y $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$, entonces $A_1 =_f B_1$.

Demostración. Por el corolario 2.0.7, el conjunto $A_1 \cup A_2$ se descompone en dos subconjuntos disjuntos,

$$A_1 \cup A_2 = B'_1 \cup B'_2,$$

de manera que

$$B'_1 =_f B_1, \quad B'_2 =_f B_2.$$

Como $B_1 =_f B_2$, se tiene que

$$B'_1 =_f B_1 =_f B_2 =_f B'_2, \quad A_1 \cup A_2 = B'_1 \cup B'_2 =_f B_1 \cup B_2,$$

por lo tanto, el problema a probar es “Si $A_1 =_f A_2$, $B_1 =_f B_2$, $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$, y $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$, entonces $A_1 =_f B_1$ ”

Por la proposición 2.0.6, sabemos que existen funciones biunívocas φ y ψ definidas en A_1 y B_1 respectivamente, con sendas imágenes en A_2 y B_2 . Podemos extender la definición de φ a todo $A_1 \cup A_2$ de manera que la composición sea la identidad

$$\bar{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \in A_1 \\ \varphi^{-1}(x), & \text{si } x \in A_2 \end{cases}$$

como no hay confusión, seguiremos llamando φ a $\bar{\varphi}$). Procedemos igual con $B_1 \cup B_2$ y ψ . De esta manera, ambas funciones quedan definidas y tienen su imagen en $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$ y tiene sentido hablar de su composición.

La demostración de que $A_1 =_f B_1$ consiste en construir un serie de cadenas disjuntas de elementos de $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$, $C(x)$:

$$\dots \psi\varphi\psi(x), \varphi\psi(x), \psi(x), x, \varphi(x), \psi\varphi(x), \varphi\psi\varphi(x), \dots$$

de manera que si dos cadenas tienen un elemento en común, son la misma.

En cada una de las cadenas C elegimos un elemento $x_{(C,0)} \in A_1$, llamando a los elementos de esta cadena por $x_{(C,k)}$, de manera que

$$\begin{aligned} x_{(C,-1)} &:= \psi(x_{(C,0)}) \\ x_{(C,k)} &:= \psi\varphi(x_{(C,k-2)}) \quad \text{si } k \text{ par} \\ x_{(C,k)} &:= \varphi\psi(x_{(C,k-2)}) \quad \text{si } k \text{ impar} \end{aligned}$$

Tomemos ahora en C un elemento $x_{(C,k)}$ en A_1 y definimos $l(k)$ de la siguiente manera:

- I. Si k es par y $x_{(C,k+1)} \in B_1$, entonces denotamos $l(k) = k + 1$
- II. Si k es par y $x_{(C,k+1)} \in B_1$, entonces $x_{(C,k+2)} = \psi\varphi(x_{(C,k)}) = \psi(x_{(C,k+1)}) \in B_1$ y denotamos $l(k) = k + 2$
- III. Si k es impar y $x_{(C,k)} \in B_1$, entonces denotamos $l(k) = k$
- IV. Si k es impar y $x_{(C,k)} \in B_2$, entonces $x_{(C,k+1)}\psi(x_{(C,k)}) \in B_1$ y denotamos $l = k + 1$

La correspondencia $x_{(C,k)} \rightarrow x_{(C,l(k))}$ es una biyección bien definida entre $A_1 \cap C$ y $B_1 \cap C$, ya que para otra elección, digamos k' , si $x_{(C,k)} = x_{(C,k')}$, entonces k y k' son congruentes módulo 2.

Tomemos ahora la siguiente partición de $A_1 \cap C$:

$$\begin{aligned} A_{11} \cap C &:= \{x_{(C,k)} \in A_1/k \text{ par}, x_{(C,k+1)} \in B_1\} \\ A_{12} \cap C &:= \{x_{(C,k)} \in A_1/k \text{ par}, x_{(C,k+1)} \notin B_1\} \\ A_{13} \cap C &:= \{x_{(C,k)} \in A_1/k \text{ impar}, x_{(C,k)} \in B_1\} \\ A_{14} \cap C &:= \{x_{(C,k)} \in A_1/k \text{ impar}, x_{(C,k)} \notin B_1\}, \end{aligned}$$

por la biyección y la definición anterior esta partición induce una en $B_1 \cap C$:

$$\begin{aligned} B_{11} \cap C &= \varphi(A_{11} \cap C) \\ B_{12} \cap C &= \psi\varphi(A_{12} \cap C) \\ B_{13} \cap C &= A_{13} \cap C \\ B_{14} \cap C &= \psi(A_{14} \cap C) \end{aligned}$$

Extendemos ahora las definiciones (haciendo la unión con todas las cadenas C) y tenemos sendas particiones congruentes entre A_1 y B_1 por lo que se tiene que efectivamente, $A_1 =_f B_1$.

□

Corolario 2.0.12. Supongamos que las familias A_1, A_2, \dots, A_{2^n} y B_1, B_2, \dots, B_{2^n} , n natural, son de subconjuntos disjuntos de X y

$$\text{I. } A_1 =_f A_k \text{ y } B_1 =_f B_k, 1 \leq k \leq 2^n,$$

$$\text{II. } \bigcup_{k=1}^{2^n} A_k =_f \bigcup_{k=1}^{2^n} B_k,$$

entonces $A_1 =_f B_1$

Demostración. Por la proposición 2.0.11, el corolario es cierto en el caso $n = 1$. Para aplicar inducción, supongamos que el corolario es cierto para $n = n'$ y probemos que es cierto para $n = n' + 1$. Por la hipótesis se tiene que $A_1 =_f A_k$ y $B_1 =_f B_k$ con

$$\bigcup_{k=1}^{2^{n'+1}} A_k =_f \bigcup_{k=1}^{2^{n'+1}} B_k.$$

Sean

$$A' = \bigcup_{k=1}^{2^{n'}} A_k, A'' = \bigcup_{k=2^{n'}+1}^{2^{n'+1}} A_k, B' = \bigcup_{k=1}^{2^{n'}} B_k, B'' = \bigcup_{k=2^{n'}+1}^{2^{n'+1}} B_k.$$

De acuerdo con la proposición 2.0.5, concluimos que

$$A' =_f A'', B' =_f B'', A' \cup A'' =_f B' \cup B''.$$

Como tanto los conjuntos A' y A'' como B' y B'' son disjuntos, por las equivalencias anteriores y de acuerdo con la proposición 2.0.11 tenemos que

$$A' =_f B'.$$

Por tanto los conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_{2^{n'}}$ y $B_1, B_2, \dots, B_{2^{n'}}$ satisfacen la hipótesis de la proposición, llegando a que

$$A_1 =_f B_1.$$

□

Teorema 2.0.13. Sean A y B subconjuntos de un espacio E cualquiera. Si $A =_f B$ y A pertenece a una clase de subconjuntos de E , \mathbf{K} , satisfaciendo las condiciones siguientes:

$$\text{I. si } X \in \mathbf{K} \text{ e } Y \in \mathbf{K} \text{ entonces } X \cup Y \in \mathbf{K},$$

II. si $X \in \mathbf{K}$ e $Y \subset X$ entonces $Y \in \mathbf{K}$,

III. si $X \in \mathbf{K}$ e $Y \cong X$ entonces $Y \in \mathbf{K}$,

entonces el conjunto B también pertenece a \mathbf{K} .

Demostración. De acuerdo a la definición 2.0.2, sea

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^n B_k$$

una partición de los conjuntos A y B en partes respectivamente congruentes. De acuerdo con las descomposiciones de A y B dadas, la condición II de la hipótesis del teorema implica que $A_k \in \mathbf{K}$ con $1 \leq k \leq n$. De esto y de la condición III, sacamos que $B_k \in \mathbf{K}$ con $1 \leq k \leq n$. Como la condición I puede extenderse por inducción al caso de la unión de una cantidad finita arbitraria de conjuntos, concluimos que $B \in \mathbf{K}$ \square

Corolario 2.0.14. Sean A y B conjuntos de un espacio euclídeo de dimensión finita. Si $A =_f B$ y A es nunca denso, entonces B también lo es.

Demostración. Veamos que la clase de los conjuntos nunca densos cumplen las condiciones I-III del teorema anterior.

I. Si X e Y son nunca densos, se tiene que $X \cup Y$ también lo es por 1.2.12

II. Si $(\overline{X})^\circ = \emptyset$ e $Y \subset X$, entonces $(\overline{Y})^\circ \subset (\overline{X})^\circ = \emptyset$.

III. Si $(\overline{X})^\circ$ e $Y \cong X$, existe una isometría φ de manera que $Y = \varphi(X)$; se tiene que $(\overline{Y})^\circ = (\overline{\varphi(X)})^\circ = \varphi((\overline{X})^\circ) = \varphi(\emptyset) = \emptyset$.

\square

Corolario 2.0.15. Sean A y B como en el corolario anterior. Si $A =_f B$ y A es medible en el sentido de Jordan, con medida cero, entonces B también es medible en el mismo sentido y con medida cero.

Demostración. Veamos que los conjuntos medibles Jordan, con medida cero, forman una clase \mathbf{K} como en el teorema 2.0.13. De darse esto, tenemos que el corolario es consecuencia inmediata de este resultado.

I. Si X e Y son medibles según la medida de Jordan con medida cero, $X \cup Y$ también es medible Jordan, además si μ denota esta medida, tenemos que

$$\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cap Y) = 0$$

- II. Si X es medible Jordan con medida cero e $Y \subset X$, tenemos que $0 \leq \mu(Y) \leq \mu(X) = 0$ por lo que $\mu(Y) = 0$.
- III. Si X es medible según la medida Jordan con medida nula y X e Y son congruentes, se tiene que existe una isometría que lleva uno en otro, es decir, Y también será medible Jordan con medida cero.

□

Ejemplo 2.0.16. Si A es acotado y $B =_f A$, entonces B es acotado.

Capítulo 3

Teorema de Banach-Tarski

Una vez vista la descomposición finita, estamos en posición de formular el resultado. Primero, debemos definir matemáticamente a lo que nos referimos con la palabra *paradoja*, para no dar lugar a interpretaciones. Después procedemos a ver en concreto por qué la bola cerrada de radio unidad es “paradójica”, o lo que es lo mismo, por qué y cómo se da la Paradoja de Banach-Tarski.

Esta introducción está apoyada principalmente en ideas de [Wag93].

Definición 3.0.1. Sea G un grupo de biyecciones del conjunto X y tomamos $E \subset X$. E es G -paradójico o (paradójico con respecto a G), si existen dos naturales n, m y subconjuntos de E disjuntos dos a dos,

$$A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subset E,$$

$$\tau_1, \dots, \tau_n, \rho_1, \dots, \rho_m \in G,$$

de manera que

$$E = \cup_{i=1}^n \tau_i(A_i) = \cup_{j=1}^m \rho_j(B_j).$$

Definición 3.0.2. Se dice que G es un *grupo paradójico* si es G -paradójico, con G actuando sobre si mismo con la multiplicación por la izquierda.

Si G es un grupo de isometrías en X , se tendría que

$$E =_f \cup_{i=1}^n A_i =_f \cup_{j=1}^m B_j.$$

En términos de esta definición, la paradoja de Banach-Tarski indica que las bolas en \mathbb{R}^3 son paradójicas con respecto al grupo de isometrías en \mathbb{R}^3

Definición 3.0.3. Un *grupo libre* G con conjunto generador M es el conjunto de las palabras reducidas formadas con elementos de M , con la operación concatenación (pasando a una palabra reducida si la obtenida no lo es).

Sea \tilde{G} el conjunto de todas las palabras finitas que se obtienen usando letras de M y sus inversos ($\{\tau^{-1} \circ \tau \in M\}$), dos palabras son equivalentes (mediante la relación \mathcal{R}) si podemos obtener una a través de la otra simplemente quitando o añadiendo pares de letras adyacentes ($\tau^{-1}\tau$ o $\tau\tau^{-1}$). Las *palabras reducidas* son aquellas que no tienen como letras adyacentes un elemento de M y su opuesto. $G = \tilde{G}/\mathcal{R}$

Definición 3.0.4. M es una *base de un grupo libre* G , si M es libre (no se puede obtener un elemento a partir de otros de M) y genera G . Llamaremos *rango* de G a la cantidad de elementos de M .

Proposición 3.0.5. El rango de G no depende de la base elegida [Mas72]

Teorema 3.0.6. Todo grupo libre G de rango dos es paradójico.

Demostración. Supongamos que $M = \{\tau, \sigma\}$ es una base de G . Si

$$\rho \in \{\tau, \tau^{-1}, \sigma, \sigma^{-1}\},$$

llamamos $G(\rho)$ al conjunto de los elementos de G cuya representación como palabra reducida empieza por ρ , teniendo que

$$G = \{id\} \cup G(\tau) \cup G(\tau^{-1}) \cup G(\sigma) \cup G(\sigma^{-1}).$$

Tomamos la siguiente partición de G

$$\begin{aligned} G_1 &:= G(\tau) \cup \{id, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \tau^{-3}, \dots\} \\ G_2 &:= G(\tau^{-1}) \setminus \{\tau^{-1}, \tau^{-2}, \tau^{-3}, \dots\} \\ G_3 &:= G(\sigma) \\ G_4 &:= G(\sigma^{-1}) \end{aligned}$$

son subconjuntos disjuntos de G cumpliendo que

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$$

y que

$$\begin{aligned} G_1 &= G(\tau) \cup \{id, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \tau^{-3}, \dots\} \\ \tau G_2 &= \tau G(\tau^{-1}) \setminus \sigma \{\tau^{-1}, \tau^{-2}, \tau^{-3}, \dots\} \\ &= G \setminus G(\tau) \setminus \{id, \tau^{-1}, \tau^{-2}, \tau^{-3}, \dots\} \\ G_3 &= G(\sigma) \\ \sigma G_4 &= \sigma G(\sigma^{-1}) = G \setminus G_3 \end{aligned}$$

teniendo entonces que $G = G_1 \cup \tau G_2 = G_3 \cup \sigma G_4$ y es en efecto paradójico. \square

Proposición 3.0.7. Si G es un grupo paradójico, actuando sobre X , de manera que el único elemento de G que deja puntos fijos es la identidad, tenemos que X es G -paradójico. Por tanto, X es F -paradójico, si F es un grupo libre de rango 2, que actúa sobre X de manera que el único elemento de F que deja puntos fijos es la identidad.

Demostración. Supongamos $A_i, B_j \subset G$ y $g_i, h_j \in G$ de manera que cumplen que G es G -paradójico. Por el axioma de elección, existe un subconjunto M de X que contiene un elemento de cada G -órbita, siendo una G -órbita, para un elemento $x \in X$ el conjunto $G(x) = \{g(x) : g \in G\}$. Entonces los conjuntos $\{g(M) : g \in G\}$ forman una descomposición de X en conjuntos disjuntos, ya que G no deja puntos fijos (menos la identidad).

Tomemos ahora

$$A_i^* = \cup_g \{g(M) : g \in A_i\}$$

y

$$B_j^* = \cup_g \{g(M) : g \in B_j\}.$$

Como por hipótesis

$$G = \cup_i A_i \cup_j B_j = \cup_i g_i(A_i) = \cup_j h_j(B_j)$$

y A_i, B_j son disjuntos dos a dos, se tiene que A_i^*, B_j^* son disjuntos dos a dos y

$$X = \cup_i A_i^* \cup_j B_j^* = \cup_i g_i(A_i^*) = \cup_j h_j(B_j^*),$$

teniendo así que X es G -paradójico.

Para ver que X es F -paradójico, es suficiente repetir el mismo razonamiento que acabamos de aplicar para G , teniendo en cuenta que todo grupo libre de rango 2 es paradójico (por el teorema anterior). \square

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos el siguiente corolario, que se cumple, ya que un subgrupo actúa sobre todo el grupo por multiplicación por la izquierda, sin puntos fijos que no sean los triviales.

Corolario 3.0.8. Un grupo con un subgrupo paradójico es paradójico. Por tanto un grupo con un subgrupo libre de rango 2 es paradójico (en particular, cualquier grupo libre no abeliano).

Este corolario puede llevarnos a hacernos la pregunta de si esos son los únicos grupos paradójicos. La respuesta a esta pregunta es negativa. Se ha visto existen grupos paradójicos que no tienen elementos de orden infinito y por tanto, no contienen subgrupos libres de ningún rango [Wag93]. No indagaremos en este tema pues excede las competencias de este trabajo. Sin embargo, tenemos que los grupos abelianos no son paradójicos y tampoco lo son los grupos resolubles.

3.1. Paradoja de Hausdorff

Trabajaremos en \mathbb{R}^3 , debido a que es el espacio en el que se contextualiza la Paradoja de Hausdorff y la Paradoja de Banach-Tarski. Para esta sección nos basamos principalmente en ideas de [Tao91], [Wag93] y [TW19b].

Teorema 3.1.1. Existen dos rotaciones independientes, φ y σ , alrededor de ejes de \mathbb{R}^3 que pasan por el origen. Por tanto, si $n \geq 3$, $SO(n)$ tiene un subgrupo libre de rango 2.

Demostración. Podemos dar rotaciones que satisfagan las condiciones del teorema. Sean $\varphi, \sigma \in SO(3)$ y $\mathbf{x} = [x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\varphi(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad y \quad \sigma(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

con inversas

$$\varphi^{-1}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad y \quad \sigma^{-1}(\mathbf{x}) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Veamos ahora que ninguna palabra reducida es trivial, usando como letras $\varphi^{\pm 1}, \sigma^{\pm 1}$. Es suficiente con demostrar que las palabras formadas con $5\varphi^{\pm 1}, 5\sigma^{\pm 1}$ no nos dan aplicaciones cuyos coeficientes sean divisibles por 5. Para simplificar, trabajaremos en F_5^3 , donde $F_5 = \mathbb{Z}/(5)$ es el cuerpo finito de orden 5. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} 5\varphi^{\pm 1}(\mathbf{x}) &= [3x \pm 4y, \mp 4x + 3y, 0]^T \\ 5\sigma^{\pm 1}(\mathbf{x}) &= [0, 3y \pm 4z, \mp 4y + 3z]^T \end{aligned}$$

Cada una de estas aplicaciones lineales son de rango 1 en F_5^3 , ya que su núcleo es de rango 2

$$\text{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ -4x + 3y = 0 \\ z = \lambda_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda_1 \\ y = \lambda_1 \\ z = \lambda_3 \end{array} \right\},$$

con λ_1, λ_3 escalares. De la misma manera llegamos a que los rangos de $\varphi^{-1}, \sigma^{\pm 1}$ son 1 en F_5^3 . Se deduce entonces que ninguna palabra reducida obtenida con las letras $\varphi^{\pm 1}, \sigma^{\pm 1}$ nos dará una función igual a la identidad, debido a que sus rangos no coinciden con los de la identidad (rango 3) en F_5^3 . \square

Lema 3.1.2. Sea C un subconjunto numerable de la esfera \mathbb{S}^2 , entonces existen S_1, S_2 subconjuntos disjuntos de la esfera, con $\mathbb{S}^2 = S_1 \cup S_2$, de manera que $\mathbb{S}^2 \setminus C = S_1 \cup \sigma(S_2)$ con $\sigma \in SO(3)$, es decir $\mathbb{S}^2 =_f \mathbb{S}^2 \setminus C$.

Demostración. Tomemos $\sigma \in SO(3)$ de manera aleatoria, σ deja fijos dos puntos de \mathbb{S}^2 (los correspondientes a su eje de rotación y la intersección con la esfera). Como C es numerable, y por tanto de medida nula, también lo será la unión de los $\sigma^i(C)$, $i \in \mathbb{N}$, por lo cual se puede asegurar con probabilidad 1 que dos elementos cualesquiera de estos conjuntos caen en distintas σ -órbitas. Por lo tanto, podemos decir que $\sigma^i(C) \cap \sigma^j(C) = \emptyset$, $i \neq j$ y definimos

$$S_2 := C \cup \sigma(C) \cup \sigma^2(C), \dots; S_1 := \mathbb{S}^2 \setminus S_2$$

teniendo así la descomposición deseada.

La rotación σ ha de cumplir que su eje de rotación no pase por ninguno de los puntos de C . Además, si consideramos para cada punto $p \in C$ el plano normal al eje de rotación que pasa por él (como mucho tendremos una cantidad numerable de puntos en la intersección de ese plano con C), el ángulo de rotación ha de ser primo con π y con los ángulos que separan cada uno de los puntos de intersección de C con el plano. □

Teorema 3.1.3. (Paradoja de Hausdorff, primera versión).

Existe un subconjunto numerable C de la esfera \mathbb{S}^2 de manera que $\mathbb{S}^2 \setminus C$ es $SO(3)$ -paradójico.

Demostración. Sean τ y σ como en el teorema 3.1.1 y G el grupo generado por τ y σ , siendo G y G_1, G_2, G_3, G_4 como en el teorema 3.0.6. Cada rotación en G deja dos puntos de \mathbb{S}^2 fijos. Sea C la colección de los puntos fijos, el grupo G actúa sobre $\mathbb{S}^2 \setminus C$ como en la proposición 3.0.7, por lo tanto, $\mathbb{S}^2 \setminus C$ es G -paradójico y como G es un subgrupo libre de rango dos de $SO(3)$, se tiene que $\mathbb{S}^2 \setminus C$ es $SO(3)$ -paradójico.

La descomposición de la esfera (menos C) que proporciona este grupo, por la proposición 3.0.7 es tal que G_1, G_2, G_3, G_4 , forman una partición suya. Sea ahora M el conjunto formado por únicamente un punto de cada g -órbita, que es posible obtener gracias al axioma de elección, y tomamos

$$S_i = \cup_g \{g(M) : g \in G_i\}, i = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathbb{S}^2 \setminus C = S_1 \cup \tau(S_2) = S_3 \cup \sigma(S_4)$$

Por lo tanto $\mathbb{S}^2 \setminus C =_f S_1 \cup S_2 =_f S_3 \cup S_4 =_f S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ □

Corolario 3.1.4. La esfera \mathbb{S}^2 es $SO(3)$ -paradójica.

Demostración. La demostración es inmediata a partir del resultado anterior, ya que $\mathbb{S}^2 =_f \mathbb{S}^2 \setminus C$, siendo C numerable. \square

3.2. Paradoja de Banach-Tarski

Introduzcamos primero un último resultado antes de pasar a enunciar y probar la Paradoja de Banach-Tarski.

Lema 3.2.1. Sea A un conjunto de interior no vacío contenido en \mathbb{R}^2 , y B la unión de un número finito de segmentos, entonces $A =_f A \cup B$.

Demostración. Supongamos que los conjuntos A y B son disjuntos y sea C un disco contenido en A . Es claro que B se puede descomponer en un número finito de segmentos (no necesariamente disjuntos), siendo cada uno de ellos de longitud menor que el radio de C . Sea $\{B_k\}_{k=1}^n$, con n natural, dicha descomposición de B y tomamos D_1 congruente con B_1 , estando D_1 contenido en un radio de C sin contener el centro del disco. Elegimos ahora un ángulo α que sea irracional con π y para cada i natural, designamos por D_{1+i} al segmento que se obtiene de rotar D_1 ($= D_{1_1}$) un ángulo igual a $i\alpha$ alrededor del centro del disco.

Sea ahora $E_1 := \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{1+i}$, $F_1 := \bigcup_{i=2}^{\infty} D_{1_i}$ y $G_1 := A \setminus E_1$. De esto resulta inmediato que $A = G_1 \cup F_1 \cup D_{1_1}$ y $A \cup B_1 = G_1 \cup E_1 \cup B_1$ y siendo evidente que F_1 y E_1 son congruentes (ya que se obtiene uno a partir del otro mediante una rotación de ángulo α), y también los son D_1 y B_1 , se tiene que

$$A =_f A \cup B_1.$$

Tomando ahora para todos los B_k un D_k y construyendo la sucesión $\{D_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, llegamos que para para todo k

$$A =_f A \cup B_k,$$

estando entonces en condiciones de aplicar la proposición 2.0.10 y llegando así a que

$$A =_f A \cup B.$$

De no ser A y B disjuntos, tenemos que el conjunto $A \setminus B$ tiene interior no vacío y como $(A \setminus B)$ y B son disjuntos, por lo ya demostrado tenemos que $A \setminus B =_f (A \setminus B) \cup B = A \cup B$. Dado que $A \cup B \supset A \supset A \setminus B$, podemos aplicar el corolario 2.0.9 y por tanto

$$A =_f A \cup B.$$

\square

Teorema 3.2.2. (Paradoja de Banach-Tarski).

La bola cerrada de radio unidad $\overline{B}(\mathbf{0}, 1)$ en \mathbb{R}^3 , puede ser descompuesta en cinco subconjuntos disjuntos D, B_1, B_2, B_3, B_4 , de manera que $\overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\} = D \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$, $\overline{B}(\mathbf{0}, 1) =_f D \cup B_1 \cup B_2 =_f B_3 \cup B_4$.

Demostración. Como hemos visto, por la Paradoja de Hausdorff 3.1.3, tenemos que

$$\mathbb{S}^2 =_f \mathbb{S}^2 \setminus C = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 =_f S_1 \cup S_2 =_f S_3 \cup S_4.$$

Consideremos ahora el conjunto $D = \{\alpha \cdot x : 0 < \alpha \leq 1, x \in C\}$, y para cada $i = 1, 2, 3, 4$ formamos los conjuntos $B_i = \{\alpha \cdot x : 0 < \alpha \leq 1, x \in S_i\}$, tendremos entonces que

$$\overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\} = D \cup B_1 \cup \tau(B_2)$$

y

$$\overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus (D \cup \{\mathbf{0}\}) = B_3 \cup \sigma(B_4).$$

Para ver que

$$\overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\} =_f \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus (D \cup \{\mathbf{0}\}),$$

basta con aplicar el lema 3.2.1 y la proposición 2.0.10. Veamos ahora que

$$\overline{B}(\mathbf{0}, 1) =_f \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Sea $\mathbf{p} = [0, 0, \frac{1}{2}]^T$ y sea ρ una rotación de orden infinito cuyo eje de rotación pasa por \mathbf{p} y no por el origen, entonces tenemos que el conjunto $H = \{\rho^n(\mathbf{0}) : n \geq 0\}$ se puede usar para “absorber” $\mathbf{0}$: $\rho(H) = H \setminus \{\mathbf{0}\}$ y por tanto $\overline{B}(\mathbf{0}, 1) =_f \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{B}(\mathbf{0}, 1) &= \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\} =_f \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus (D \cup \{\mathbf{0}\}) \\ &= B_1 \cup B_2 =_f B_3 \cup B_4 =_f D \cup B_1 \cup B_2 =_f D \cup B_3 \cup B_4 \end{aligned}$$

□

Notemos que el razonamiento usado en la anterior demostración para ver que $\overline{B}(\mathbf{0}, 1) =_f \overline{B}(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\}$ junto con la proposición 2.0.10, sirven para demostrar que $\mathbb{S}^2 =_f \mathbb{S}^2 \setminus D$, siendo D un subconjunto numerable de \mathbb{S}^2 y por tanto, también el lema 3.1.2.

Fijémonos en que los resultados los hemos probado para \mathbb{S}^2 y la bola de radio unidad en \mathbb{R}^3 , pero los razonamientos utilizados son válidos para esferas y bolas de cualquier radio y si consideramos rotaciones afines, donde los ejes no pasan necesariamente por el origen de coordenadas, tenemos que pueden estar centradas en punto cualquiera del espacio.

Corolario 3.2.3. Cualquier bola $\overline{B}(\mathbf{x}, r)$ en \mathbb{R}^3 , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $r \in \mathbb{R}$ es paradójica respecto al grupo de movimientos en el espacio.

Veamos otra versión de la Paradoja de Hausdorff, que induce una descomposición distinta de $\overline{B}(\mathbf{0}, 1)$

Proposición 3.2.4. (Paradoja de Hausdorff, segunda versión). La esfera \mathbb{S}^2 se puede descomponer en cuatro conjuntos C, C_1, C_2, C_3 , siendo C numerable, de manera que $\mathbb{S}^2 \setminus C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, cumpliendo que

$$C_1 \cong C_2 \cong C_3, C_1 \cong C_2 \cup C_3$$

Demostración. Sea G el grupo de rotaciones generado por τ de orden 3 y por σ de orden dos, de manera que τ y σ cada palabra reducida en G sea única y las combinaciones de τ, τ^2, σ , no nos den palabras triviales. Veamos que el grupo G tiene una cantidad infinita numerable de rotaciones. La cantidad de elementos que empieza por τ y τ^2 es la misma que empieza por σ , para comprobarlo basta con multiplicar los que empiezan por σ por σ^{-1} . De esta manera también se comprueba que los que empiezan por los inversos tienen el mismo cardinal que los anteriormente mencionados. Por lo tanto basta con comprobar que los que empiezan por τ y τ^2 son numerables y ello se hace fácilmente notando que si l_i es una función que denota la cantidad de palabras de longitud i , cumple que

$$\begin{aligned} l_1 &= 2 \\ l_i &= l_{i-1} \cdot 2, \text{ si } i \text{ impar} \\ l_i &= l_{i-1}, \text{ si } i \text{ par} \end{aligned}$$

por lo que la cantidad de rotaciones que empiezan por τ y τ^2 es numerable y por tanto G también.

Damos ahora una partición de G en subconjuntos disjuntos, G_1, G_2, G_3 de manera que:

- I. La identidad está en G_1 , ($Id \in G_1$), $\tau, \sigma \in G_2$ y $\tau^2 \in G_3$.
- II. Si $\alpha \in G_1$, y su primer carácter es τ o τ^2 , asignamos $\sigma\alpha$ a G_2 ; en caso contrario, asignamos $\tau\alpha$ a G_2 y $\tau^2\alpha$ a G_3 .
- III. Si $\alpha \in G_2$, y su primer carácter es τ o τ^2 , asignamos $\sigma\alpha$ a G_1 ; en caso contrario, asignamos $\tau\alpha$ a G_3 y $\tau^2\alpha$ a G_1 .
- IV. Si $\alpha \in G_3$, asignamos $\sigma\alpha$ a G_1 .

A partir de esta descripción de los G_i es fácil ver que

$$\begin{aligned}\tau(G_1) &= G_2 \\ \tau^2(G_1) &= G_3 \\ \sigma(G_1) &= G_2 \cup G_3.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Probemos la primera de estas ecuaciones, pues las otras se prueban de manera análoga.

Sea $\tau\alpha \in \tau(G_1)$, $\alpha \in G_1$. Por II. tenemos que si el primer carácter de α es σ , $\tau\alpha \in G_2$. Si el primer carácter de α es τ , tenemos que $\alpha = \tau\beta$, donde el primer carácter de β es σ y fijándonos en cómo se asignan los elementos a G_1 , vemos que $\beta \in G_3$ y por IV. tenemos que $\tau\alpha = \tau^2\beta \in G_2$. Supongamos que el primer carácter de α es τ^2 , por lo tanto $\alpha = \tau^2\beta$, donde el primer carácter de β es σ y por III. vemos que $\beta = \tau\tau^2\beta = \tau\alpha \in G_2$. Así tenemos que $\tau(G_1) \subset G_2$.

Veamos ahora la inclusión contraria. Sea $\tau\alpha$ un elemento de G_2 , entonces el primer carácter de α es σ , por II. tenemos que $\alpha \in G_1$. Sea $\tau\alpha = \tau^2\beta \in G_2$, $\alpha = \tau\beta$ y como el primer carácter de α es τ y el primer carácter de β es σ , tenemos, por IV. que $\beta \in G_3$ y que $\alpha = \tau\beta \in G_1$. Sea ahora $\tau\alpha = \tau^3\beta = \beta \in G_2$, $\alpha = \tau^2\beta$, donde el primer carácter de β es σ , por III. tenemos que $\alpha = \tau^2\beta \in G_1$. Así tenemos que $\tau(G_1) \supset G_2$.

Como cada rotación en G deja dos puntos fijos en \mathbb{S}^2 , tomamos C como el subconjunto de la esfera formado por todos esos puntos. Por el axioma de elección, existe un conjunto M compuesto por un elemento de cada G -órbita $G(x)$ (y sólo por uno), siendo x un elemento de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. De esta manera tenemos que el cardinal de M es infinito no numerable, que ningún punto de M se puede obtener mediante rotaciones de otro punto de M , C y M son disjuntos, M no es medible Lebesgue (a probar más adelante).

Ahora, para $i = 1, 2, 3$ sea $C_i := \{g(x), x \in M, g \in G_i\}$, es claro que estos conjuntos son disjuntos y tenemos que

$$C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \bigcup_{i=1}^3 \{g(x), x \in M, g \in G_i\} = \{g(x), x \in M, g \in G\}$$

por lo tanto, forman una partición de $\mathbb{S}^2 \setminus C$. Además, por 3.1, tenemos que

$$\begin{aligned}\tau(C_1) &= C_2 \Rightarrow C_1 \cong C_2, \\ \tau^2(C_1) &= C_3 \Rightarrow C_1 \cong C_3, \\ \sigma(C_1) &= C_2 \cup C_3 \Rightarrow C_1 \cong C_2 \cup C_3,\end{aligned}$$

es decir,

$$C_1 \cong C_2 \cong C_3 \cong C_2 \cup C_3$$

como queríamos. \square

Este resultado nos permite descomponer la esfera en un número finito de conjuntos de manera que mediante movimientos rígidos obtenemos dos copias idénticas de la esfera ($S_1, S_2 : \mathbb{S}^2 =_f S_1 \cup S_2 =_f S_1 =_f S_2$). Así, si tenemos $\mathbb{S}^2 \setminus C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ y $C_1 \cong C_2 \cup C_3$, $C_2 \cong C_2 \cup C_3$, $C_3 \cong C_2 \cup C_3$, teniendo así que

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 \setminus C &= C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cong C_2 \cup C_3 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_2 \cup C_3 \\ &\cong C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (\mathbb{S}^2 \setminus C) \cup (\mathbb{S}^2 \setminus C) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{S}^2 =_f \mathbb{S}^2 \setminus C =_f (\mathbb{S}^2 \setminus C) \cup (\mathbb{S}^2 \setminus C) =_f \mathbb{S}^2 \cup \mathbb{S}^2$.

Una vez tenemos esta descomposición de la esfera, tenemos que lo mismo pasa con cualquier otra esfera centrada en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y de radio $r > 0$ y esta a su vez induce una descomposición en la bola $B(\mathbf{x}, r)$ cuya frontera es la esfera que hemos descompuesto, de esta manera, si D, B_1, B_2, B_3 son los subconjuntos de $\overline{B}(\mathbf{x}, r)$ tales que $D = \{\alpha y : y \in C, 0 < \alpha \leq 1\}$, $B_i = \{\alpha y : y \in C_i, 0 < \alpha \leq 1\}$, de esta manera tenemos una descomposición paradójica de la bola $\overline{B}(\mathbf{x}, r)$ en cinco subconjuntos disjuntos, $D, B_1, B_2, B_3, \{\mathbf{x}\}$.

Notemos que los conjuntos B_i no son medibles (sea cual sea la medida utilizada). Veamos primero que al menos uno no lo es, puesto que de ser todos medibles, y al ser la medida invariante bajo movimientos rígidos, tendríamos que

$$\begin{aligned} \mu(\overline{B}(\mathbf{x}, r)) &= \mu(D \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \{\mathbf{x}\}) \\ &= \mu(D) + m(B_1) + \mu(B_2) + \mu(B_3) + \mu(\{\mathbf{x}\}) \\ &= \mu(D) + 3\mu(\tau(B_1)) + \mu(\{\mathbf{x}\}) \\ &= \mu(D) + 3\mu(B_2 \cup B_3) + \mu(\{\mathbf{x}\}) \\ &= \mu(D) + 3\mu(B_2) + 3\mu(B_3) + \mu(\{\mathbf{x}\}) \\ &= \mu(D \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \{\mathbf{x}\}) + \mu(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \\ &= 2\mu(\overline{B}(\mathbf{x}, r)) \end{aligned}$$

y esto no es posible mientras $\mu(\overline{B}(\mathbf{x}, r))$ sea no nulo. Suponiendo que el conjunto no medible es B_1 , se tendría que B_2 tampoco lo es, puesto que obtenes uno mediante una rotación del otro, pasando lo mismo con B_3 .

Capítulo 4

El problema General de la Medida

Los conjuntos medibles en un espacio (medible) X forman una σ -álgebra [Coh13] y esta no tiene por qué contener todos los subconjuntos del espacio. En la medida de Lebesgue existen conjuntos que son no medibles, como puede ser el conjunto de Vitali, que veremos un poco más adelante.

Se ha visto que el axioma de elección es necesario para la construcción de los conjuntos no medibles. De hecho, aceptar la hipótesis de que todos los conjuntos acotados son medible Lebesgue, es negar el axioma de elección y viceversa [TW19b]. Sabido esto, es natural preguntarse si existe alguna medida para la cuál todos los conjuntos acotados del espacio son medibles. La respuesta a esta cuestión es negativa, pero si pedimos que se trate de una medida finitamente aditiva, tenemos que en el plano y en la recta sí que se puede construir una función de estas características.

Veamos primero que en \mathbb{R} no podemos extender la medida de Lebesgue a todos los conjuntos acotados:

¿Podemos asignarle a cada conjunto acotado E de \mathbb{R} un número real no negativo $\mu(E)$ con μ satisfaciendo las siguientes condiciones?

- I. $\mu[0, 1] = 1$,
- II. Si A y B , subconjuntos de \mathbb{R} , son congruentes, entonces $\mu(A) = \mu(B)$,
- III. μ es σ -aditiva, es decir, si la sucesión de subconjuntos de \mathbb{R} , $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, es disjunta dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Teorema 4.0.1. El problema anterior no tiene solución. [BL98]

Demostración. Suponemos que el problema sí tiene solución y que existen conjuntos disjuntos y congruentes $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Por III. tenemos que si A y B son subconjuntos de \mathbb{R} y A está contenido en B , $\mu(A) \leq \mu(B)$, por lo que tenemos que

$$\mu\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \mu\left(\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) < \infty.$$

Como $[-1/2, 1/2]$ es congruente con $[0, 1]$, ya que es una traslación, tenemos que $\mu([-1/2, 1/2]) = 1$. Como la sucesión $\{E_k\}$ es de conjuntos congruentes dos a dos, se tiene que $\mu(E_1) = \mu(E_2) = \dots$ y por tanto

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$$

y ningún número real puede satisfacer esta condición, por tanto el problema no tiene solución en \mathbb{R} . \square

Corolario 4.0.2. El problema anterior no es resoluble en \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. [BL98]

Demostración. Se puede adaptar la demostración anterior a \mathbb{R}^n . \square

Nota. De existir dicha medida en \mathbb{R}^n , se tendría que esta induciría a su vez una medida en \mathbb{R} y como hemos visto, en \mathbb{R} esta no existe. [BL98]

Ejemplo 4.0.3. El conjunto de Vitali: [Nat64].

Definimos en \mathbb{R} la relación de equivalencia $x \mathcal{R} y$ si y solo si $x - y \in \mathbb{Q}$. Se tiene que las clases de equivalencia son $[x] = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$ y por el axioma de elección, se tiene que existe un conjunto $\mathcal{H} \subset [0, 1]$ que contiene uno y solo un elemento de cada clase de equivalencia. Sean q_1, \dots, q_k, \dots los racionales contenidos en $[-1, 1]$ y definamos $\mathcal{H}_k := \mathcal{H} + q_k = \{x + q_k : x \in \mathcal{H}\}$. La sucesión es de conjuntos disjuntos. Si no lo fuera, tendríamos para distintos x e y en \mathcal{H} con $x + q_{k_1} = y + q_{k_2}$ con $k_1 \neq k_2$, y por lo tanto tendríamos $x - y = q_{k_2} - q_{k_1} \in \mathbb{Q}$, lo cual contradice cómo está construido \mathcal{H} .

Supongamos que \mathcal{H} es medible ($m(\mathcal{H}) = m > 0$), como las traslaciones son isometrías se tiene que los conjuntos \mathcal{H}_k tienen medida de Lebesgue m . La medida de \mathcal{H} es no nula, ya que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k \subset [-1, 2]. \quad (4.1)$$

Es claro ver que la segunda inclusión se cumple y la primera se da debido a que si $x \in [0, 1]$ e y es el elemento de $[x]$ que está en \mathcal{H} , entonces existe un número q_k tal que $x = y + q_k$ y por lo tanto $x \in \mathcal{H}_k$. Teniendo así por (4.1) que

$$1 < m(\cup_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m < 3 \quad (4.2)$$

contradiciendo la suposición de que $m(\mathcal{H}) = m > 0$, por lo cual el conjunto \mathcal{H} no es medible.

Volviendo al problema 4.0.1, si cambiamos el requisito de σ -aditividad y pedimos que sea finitamente aditiva, se tiene que el problema es resoluble en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 . Teniendo así el siguiente teorema.

Teorema 4.0.4. Podemos asignar a cualquier conjunto acotado A del plano o de la recta (\mathbb{R}^n , $n = 1, 2$) un número real positivo ($\mu(A)$), de manera que si B es otro conjunto acotado, se cumple que:

- I. si A es medible Lebesgue, entonces $\mu(A) = m(A)$,
- II. si A y B son disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
- III. $\mu(B) = \mu(A)$ si $A \cong B$.

Demostración. [MMS14, BL98]. Haremos la demostración para $n = 2$ pues, como ya se ha mencionado antes, esto implicaría que existe para $n = 1$ pero no nos dice nada para dimensiones superiores.

Consideramos en conjunto $T = [0, 1) \times [0, 1)$ de \mathbb{R}^2 , llamaremos X al espacio vectorial de las funciones reales, definidas y acotadas en T . Llamaremos \mathcal{L} el subespacio de X de las funciones medibles Lebesgue.

Sean $\mathbf{t}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in T$, de manera que si consideremos T como un toro, en el que el segmento $\{0\} \times [0, 1)$ está identificado con $\{1\} \times [0, 1)$ y el segmento $[0, 1) \times \{0\}$ está identificado con $[0, 1) \times \{1\}$; se tendrá que $\mathbf{a}_i + \mathbf{t}$ seguirá en el toro T . Dicho de otra manera, se consideran las funciones definidas en T y doblemente periódicas de período 1.

Definimos ahora para todo $x \in X$

$$p(x) := \inf_{\mathbf{a}_i \in T} \left\{ \sup_{\mathbf{t} \in T} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x(\mathbf{t} + \mathbf{a}_i) \right\}, \mathbf{t} + \mathbf{a}_i \in T,$$

veamos que p es sublineal y definido positivo.

Como $x \in X$, existe un número real y positivo ($M > 0$), de manera que $|x(\mathbf{t})| \leq M$, teniendo entonces que $-M \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x(\mathbf{t} + \mathbf{a}_i) \leq M$ para todo \mathbf{t} y para cualquier $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$; por tanto

$$-M \leq \sup_{\mathbf{t} \in T} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x(\mathbf{t} + \mathbf{a}_i) \leq M$$

y entonces $|p(x)| \leq M$.

Si A es un subconjunto de \mathbb{R} , y a un número real positivo cualquiera, tenemos que $\sup aA = a \sup A$ e $\inf aA = a \inf A$, en vista de esto, se tiene que $p(ax) = ap(x)$. Para terminar de ver que p es sublineal, nos falta ver que es subaditiva. Por definición de p tenemos que para todo $\epsilon > 0$ y cualquier $x, y \in X$, deben existir $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ y $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ de manera que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(\mathbf{t} + \mathbf{a}_i) \leq p(x) + \epsilon, \quad y \quad \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y(\mathbf{t} + \mathbf{b}_j) \leq p(y) + \epsilon$$

para todo \mathbf{t} . Sea $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_j$ y fijémonos en

$$\frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \{x(\mathbf{t} + \mathbf{c}_{ij}) + y(\mathbf{t} + \mathbf{c}_{ij})\}.$$

Como la cantidad de sumandos es finita, podemos reagrupar el sumatorio como queramos, teniendo así que el sumatorio anterior es igual a

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{i=1}^n x(\mathbf{t} + \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) \right\} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^m y(\mathbf{t} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_j) \right\},$$

que es menor o igual que $p(x) + p(y) + 2\epsilon$. Notemos que

$$\sup \frac{1}{nm} \sum_{i,j=1}^{n,m} \{x(\mathbf{t} + \mathbf{c}_{ij}) + y(\mathbf{t} + \mathbf{c}_{ij})\}$$

es un miembro del conjunto cuyo inferior es $p(x + y)$, llegando así a que

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) + 2\epsilon$$

y como no hemos impuesto ningún requisito sobre ϵ , este puede ser arbitrariamente pequeño y por tanto tenemos que p es subaditiva:

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Si $x(\mathbf{t}) \geq 0$ para todo $\mathbf{t} \in T$ es claro que $p(x) \geq 0$.

Por la proposición 1.2.19, tenemos que existe un funcional lineal, f , definido en X , de manera que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Por ello tenemos que $f(-x) \leq p(-x)$ y entonces $-f(-x) = f(x) \geq -p(-x)$, es decir $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$. Además, la integral de Lebesgue es un funcional lineal definido en \mathcal{L} y por el Teorema de Hahn-Banach 1.2.18, sabemos que se puede extender a un funcional lineal definido positivo (I) en X , de manera que $Ix \leq p(x)$, puesto que $\int x \leq p(x)$, para todo $x \in X$ (es fácil comprobar esto a partir de la construcción de la medida de Lebesgue basada en las medidas exteriores o de las funciones medibles-Lebesgue basada en las funciones simples [Zaa53]). Es claro que p tal y como está construido es invariante bajo traslaciones en T .

Teselamos \mathbb{R}^2 con copias de T ; $T_{0,0} = T$, $T_{0,1} = [0,1) \times [1,2)$, $T_{1,0} = [1,2) \times [0,1)$, \dots de manera que $T_{i,j} = \tau_{i,j}(T)$. Si $S \subset \mathbb{R}^2$ es acotado, entonces S es la unión finita de conjuntos del tipo $S_{i,j} = S \cap T_{i,j}$. Definimos μ^* :

$$\mu^*(S) := \sum_{i,j} Ix_{i,j};$$

$$x_{i,j}(\mathbf{t}) := 1, \text{ si } \mathbf{t} \in \tau_{i,j}^{-1}(S_{i,j}), \quad x_{i,j}(\mathbf{t}) = 0, \text{ si } \mathbf{t} \notin \tau_{i,j}^{-1}(S_{i,j})$$

Siendo evidente así, que si S es medible Lebesgue, también lo serán $S_{i,j}$ y $x_{i,j}$ y entonces $\mu^*(S) = m(S)$ puesto que por definición, μ^* es finita aditiva.

Sea ahora C la circunferencia de radio 1 con centro en el origen. La discusión anterior implica la existencia de un funcional (H) en C que extiende la medida de Lebesgue, coincidiendo con esta en las funciones medibles Lebesgue y que es invariante bajo rotaciones de C .

Sea ρ_t la rotación de la circunferencia que lleva el punto $(1,0)$ al punto $t \in C$. Para cada $S \subset \mathbb{R}^2$ acotado, definimos $f_S : C \rightarrow \mathbb{R}$ como $f_S = \mu^*(\rho_t^{-1}(S))$ y definamos $\mu' := Hf_S$. Tomando S medible Lebesgue, también lo será $\rho_t^{-1}(S)$ y por tanto $f_S(t) = m(S)$, por tanto constante y $\mu'(S) = Hf_S = m(S)$. Es finita aditiva porque μ^* lo es, y lineal debido a que lo es H .

Veamos que μ' es invariante bajo traslaciones (basta con observar que las traslaciones son un subgrupo normal del grupo de movimientos en el plano), tenemos que para todo conjunto S acotado contenido en el plano, $t \in C$ y traslación τ ,

$$f_{\tau(S)}(t) = \mu^*(\rho_t^{-1}\tau(S)) = \mu^*(\rho_t^{-1}\tau\rho\rho^{-1}(S)) = \mu^*(\rho^{-1}(S)) = f_S$$

puesto que μ^* es invariante bajo traslaciones y $\rho_t^{-1}\tau\rho$ es una traslación dado que las traslaciones forman un subgrupo normal de los movimientos rígidos en el plano. La invarianza bajo las rotaciones en el plano es consecuencia de la invarianza H bajo las rotaciones en C .

Para tener que μ' es invariante bajo todos los movimientos rígidos del plano, nos basta comprobar que es invariante bajo las reflexiones. Para ello construimos μ , que mantiene la invarianza bajo las traslaciones y rotaciones. Para cada $S \subset \mathbb{R}^2$ acotado, sea

$$\mu(S) := \frac{1}{2}\mu'(S) + \frac{1}{2}\mu'(\sigma S)$$

donde σ es una reflexión en \mathbb{R}^2 teniendo una recta como eje de reflexión. La invarianza bajo las reflexiones también es consecuencia de que forman un subgrupo normal de los movimientos rígidos del plano

□

Ahora, fijémonos que en dimensión tres o superior no es posible, por el Teorema de Banach-Tarski 3.2.2. De existir una medida finitamente aditiva μ en \mathbb{R}^3 para la cual todos los acotados son medibles, que coincida con la medida de Lebesgue en los conjuntos medibles Lebesgue, tendríamos que, siendo $B, D, B_1, B_2, B_3, B_4, \tau$ y σ como en 3.2.2

$$\begin{aligned} m(B) &= \mu(B) = \mu(D \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \\ &= \mu(D) + \mu(B_1) + \mu(B_2) + \mu(B_3) + \mu(B_4) \\ &= \mu(D) + \mu(\tau B_1) + \mu(B_2) + \mu(B_3) + \mu(\sigma B_4) \\ &= \mu(D \cup \tau B_1 \cup B_2) + \mu(B_3 \cup \sigma B_4) \\ &= \mu(B) + \mu(B) = 2m(B), \end{aligned}$$

llegando a que $m(B) = 2m(B)$ y ningún número real distinto de cero cumple tal ecuación y sabemos que $m(B)$ no es cero. Por lo tanto el problema no tiene solución para dimensión tres o superior.

4.1. La recta y el plano

Veamos ahora qué implica que el problema de la medida tenga solución para la medida finita aditiva en el plano y la recta desde el punto de vista de la equidescomposición. Las referencias para esta sección son principalmente [TW19b], [Wag93] y [MMS14].

Teorema 4.1.1. Si tenemos dos conjuntos acotados del plano, equivalentes por descomposición finita y medibles Lebesgue, sus medidas coinciden.

Demostración. Sean A y B los conjuntos del enunciado, al ser equivalentes por descomposición finita, existen conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n y B_1, B_2, \dots, B_n

tales que:

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^n B_k, \\ A_k &\cong B_k, \quad 1 \leq k \leq n, \\ A_k \cap A_l &= \emptyset = B_k \cap B_l, \quad 1 \leq k < l \leq n. \end{aligned}$$

Como los conjuntos A_k y B_k son congruentes para todo k entre 1 y n , tenemos que de ser los A_k medibles $m(A_k) = m(B_k)$ para k entre 1 y n , además como sabemos que A sí que es medible y que de no ser los A_k medibles, al ser acotados existe una extensión de la medida de Lebesgue (en una medida finita aditiva) 4.0.4, y que los A_k y B_k forman particiones de A y B respectivamente, podemos tomar

$$m(A) = m(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n m(A_k) = \sum_{k=1}^n m(B_k) = m(\cup_{k=1}^n B_k) = m(B)$$

Teniendo por tanto que si son medibles, han de tener la misma medida. \square

El recíproco del teorema anterior no es cierto. Si dos conjuntos tienen la misma medida, esto no implica que sean equivalentes por equidescomposición. Esto se deduce directamente del 2.0.14, dos conjuntos de puntos A y B donde uno sea nunca denso y el otro no, pueden tener la misma medida de Lebesgue aunque no sean equivalentes por descomposición finita; por ejemplo el conjunto $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $\{0\}$. El siguiente lema nos sirve de preámbulo para ver que bajo ciertas condiciones, sí que se cumple.

Podemos establecer un teorema para \mathbb{R} análogo al lema 3.2.1, reemplazando el término *segmento* por *punto*. La demostración la haríamos de la misma manera que la demostración anterior, haciendo desaparecer un punto de un circunferencia (por ejemplo, de \mathbb{S}^1) y luego llevando la circunferencia (menos un punto distinto al que hemos quitado) mediante un homeomorfismo a un segmento de \mathbb{R} contenido en un subconjunto de \mathbb{R} de interior no vacío.

Teorema 4.1.2. Si dos polígonos A y B tienen el mismo área, entonces $A =_f B$.

Demostración. Veamos que dos polígonos A y B con el mismo área, son equivalentes por descomposición excepto los bordes [Wag93]. Para probar esto, veremos que cualquier polígono es equivalente a un cuadrado con su misma área y de esta manera, se tendrá por transitividad que dos polígonos cualquiera de igual área son equivalentes.

Tomemos un triángulo de base b y altura h , tenemos que su área es $b \cdot h/2$, que es la misma área de un rectángulo de lados a y b si se toma $a = h/2$.

Si trazamos una recta paralela a la base del triángulo b y que corte a h en dos mitades iguales, tendremos que esa misma recta corta a los otros dos lados del triángulo en dos mitades iguales. Por lo cual, podemos decir que las dimensiones del triángulo son base b , altura $h = 2a$ y lados $2c$ y $2d$ (suponiendo que no es rectángulo, en ese caso podemos decir que $d = a$). De esta manera, esta recta que corta al triángulo en dos, dividiéndolo en un trapecio T_b y en otro triángulo, cuya altura es a , dividiendo ese triángulo en dos triángulos rectángulos (si es que no lo es ya), obtenemos otros dos de altura a e hipotenusas c y d respectivamente. Entonces, mediante sendos movimientos (rotación+traslación) podemos ver que estos triángulos (llámemoslos T_c y T_d), quitando los bordes, son congruentes con otros dos pertenecientes a una partición del rectángulo de lados a y b (R_{ab}). Teniendo una partición del del triángulo

$$T = T_c \cup T_b \cup T_d =_f R_{ab}.$$

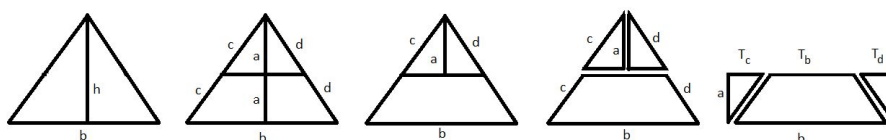


Figura 4.1: Descomposición de un triángulo a un rectángulo

Para convertir un rectángulo en un cuadrado podemos suponer que si sus lados son a y b , $a < b < 4a$. De no ser así, podemos dividir este rectángulo en dos iguales de lados a y $b/2$ y convertirlo en otro de lados $2a$ y b , repitiendo este proceso cuantas veces fuesen necesarias para llegar a la suposición anterior. En el caso de que $b = 4a$, mediante el proceso descrito ya se llegaría a un cuadrado de área $ab = 4a^2$.

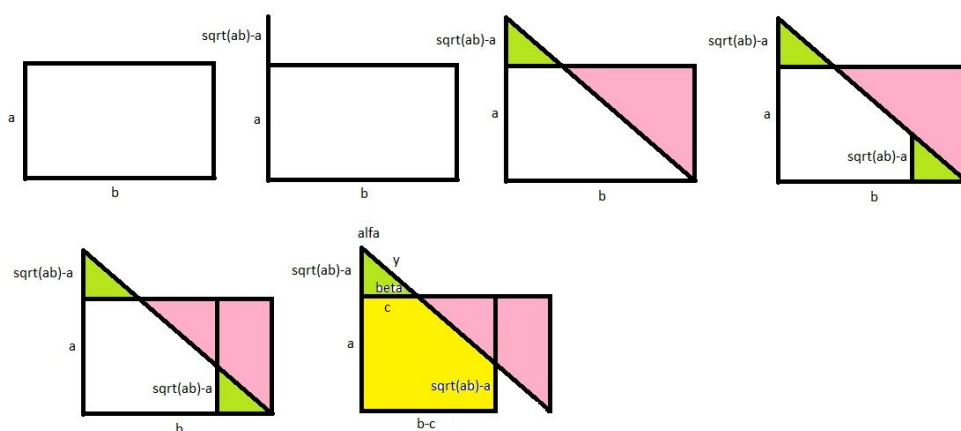
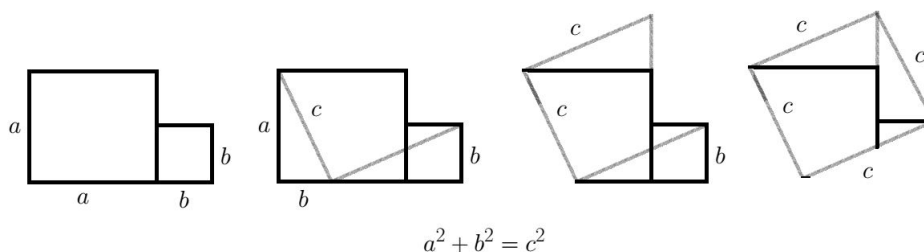


Figura 4.2: Descomposición de un rectángulo a un cuadrado

Ahora bien, en el caso de que $a < b < 4a$, como se muestra en la figura 4.2, se aumenta el lado a hasta llegar a una longitud igual a \sqrt{ab} . Trazándose una recta desde el nuevo vértice del lado \sqrt{ab} hasta el vértice contrario del lado opuesto del que se hizo la extensión, obteniendo de esta manera una “psuedodiagonal”. A continuación se traza una recta paralela a los lados a , de manera que de su corte con la “pseudodiagonal” trazada resulte un triángulo igual en dimensiones al obtenido mediante la extensión. Si se quita este último triángulo el área de la figura se mantiene igual a ab . Para obtener un cuadrado de lado \sqrt{ab} basta con desplazar el triángulo grande resultante de los cortes con las rectas (el lado $b - c$ de la figura 4.2 tiene que valer \sqrt{ab} debido a que el área se mantiene invariante).

Si tenemos dos cuadrados de distinta área, por el Teorema de Pitágoras se tiene que existe una partición de la unión de ambos, de manera que si el lado de uno de ellos es a y el del otro es b , la unión es equivalente por equidescomposición finita a un único cuadrado de lado $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Figura 4.3: Llevando dos cuadrados a uno

Por lo anterior y teniendo además que cualquier polígono puede triangularse, tenemos que dos polígonos cualesquiera, que tengan la misma área, son equivalentes por equidescomposición finita. Es decir, podemos descomponerlos en la misma cantidad de polígonos respectivamente congruentes, sin puntos interiores en común. Sean A_1, A_2, \dots, A_n y B_1, B_2, \dots, B_n los interiores de esas partes, teniendo que

$$\bigcup_{k=1}^n A_k =_f \bigcup_{k=1}^n B_k.$$

Como los conjuntos

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k \text{ y } B \setminus \bigcup_{k=1}^n B_k$$

están compuestos por un número finito de segmentos, podemos concluir, aplicando el lema anterior, que

$$\bigcup_{k=1}^n A_k =_f \bigcup_{k=1}^n A_k \cup \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = A$$

y de manera similar

$$\bigcup_{k=1}^n B_k =_f B.$$

Por lo anterior y por la transitividad de la equivalencia por descomposición finita, obtenemos que $A =_f B$. \square

De los resultados anteriores es inmediato el siguiente corolario.

Teorema 4.1.3. Teorema de Bolyai-Gerwien Para que dos polígonos sean equivalentes por descomposición finita, es necesario y suficiente que tengan la misma área.

Demostración. Este teorema resulta de la combinación del teorema 4.1.1 aplicado a polígonos y del teorema 4.1.2 \square

Capítulo 5

Generalización de la Paradoja de Banach-Tarski

Como se ha visto en el capítulo anterior, en \mathbb{R}^1 y \mathbb{R}^2 sí que se puede extender la medida de Lebesgue a todos los conjuntos acotados si suavizamos las condiciones de σ -aditividad y pedimos que simplemente sea una función finitamente aditiva, mientras que para dimensión superior esto no es posible debido a que se cumple la paradoja de Banach-Tarski, y afirmar lo contrario sería negar la existencia de los conjuntos no medibles. En este capítulo veremos las principales diferencias que se dan en cuanto a la descomposición finita entre los espacios \mathbb{R}^1 y \mathbb{R}^2 y los de mayor dimensión. Las referencias para este capítulo son [BT24] [MMS14].

5.1. Espacio de dimensión tres

En esta sección, veremos cómo se comporta la descomposición en \mathbb{R}^3 , llegando así a una versión generalizada de la paradoja de Banach-Tarski, pudiéndose extender los resultados obtenidos a espacios de dimensión superior. Como utilizaremos bolas en las demostraciones, la manera más sencilla de generalizar los resultados a dimensiones superiores, será trabajar con las mismas pero manteniendo el resto de coordenadas acotadas.

Podemos reformular 3.2.2 en términos de la equidescomposición finita, quedando de la siguiente manera.

Lema 5.1.1. *Paradoja de Banach-Tarski.* Toda bola B en \mathbb{R}^3 contiene dos subconjuntos disjuntos A_1 y A_2 de manera que $B =_f A_1$ y $B =_f A_2$.

Demostración. La demostración no difiere mucho de las ya dadas. Lo que hacemos es notar que por ejemplo, si los conjuntos $B_0 := D \cup \{\mathbf{0}\}, B_1, B_2, B_3, B_4$

son los mismos que en 3.2.2; llamando $A_1 = B_0 \cup B_1 \cup B_2$ y $A_2 = B_3 \cup B_4$, estos cumplen la hipótesis del teorema y además $B =_f A_1$ y $B =_f A_2$. \square

Lema 5.1.2. Sean B_1 y B_2 bolas congruentes, entonces $B_1 =_f B_1 \cup B_2$.

Demostración. Sean A_1 y A_2 como en el lema anterior:

$$B_1 =_f A_1, B_1 =_f A_2,$$

$$A_1 \cup A_2 \subset B_1 \text{ y } A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Por la hipótesis de este lema,

$$B_2 =_f A_2.$$

Entonces el corolario ?? implica la existencia de un conjunto E contenido en A_2 y tal que

$$E =_f B_2 - B_1.$$

De acuerdo a lo anterior y a la proposición 2.0.5, se concluimos que

$$B_1 \cup E =_f B_1 \cup (B_2 - B_1) = B_1 \cup B_2,$$

$$A_1 \cup B \subset B_1 \subset B_1 \cup B_2.$$

Entonces por el corolario 2.0.9,

$$B_1 =_f B_1 \cup B_2.$$

\square

Lema 5.1.3. Si A es un conjunto acotado de interior no vacío en \mathbb{R}^3 , existe una bola B totalmente contenida en A de manera que $A =_f B$.

Demostración. Como A es de interior no vacío, esto implica la existencia de una bola B totalmente contenida en A , sea esta la del enunciado. Como también es un conjunto acotado, lo podemos descomponer en n subconjuntos, no necesariamente disjuntos

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k,$$

cada uno de los cuales cumplen que existe una bola B_k congruente con B de manera que $A_k \subset B_k$. Por el lema anterior,

$$B =_f B \cup B_k, 1 \leq k \leq n,$$

que, acorde con la proposición 2.0.10, implica que

$$B =_f B \cup \bigcup_{k=1}^n B_k.$$

Por otro lado, se obtiene por la hipótesis de este lema, que

$$B \subset A \subset B \cup \bigcup_{k=1}^n B_k.$$

Implicando directamente por el corolario 2.0.9 que $A =_f B$. □

Teorema 5.1.4. Paradoja de Banach-Tarski generalizada. Si dos conjuntos arbitrarios A_1 y A_2 , contenidos en un espacio euclídeo de dimensión tres, son acotados y tienen interior no vacío, entonces $A_1 =_f A_2$.

Demostración. Sean B_1 y B_2 esferas contenidas en A_1 y A_2 , podemos asumir por los resultados anteriores que son equivalentes por descomposición finita

$$B_1 =_f B_2,$$

en virtud del lema 5.1.3, obtenemos

$$A_1 =_f B_1, \quad A_2 =_f B_2.$$

De acuerdo con el teorema 2.0.4, que $A_1 =_f A_2$. □

Podemos observar que dos bolas con diferentes radios son equivalentes por descomposición finita, mientras que, dos círculos son equivalentes solo cuando tienen la misma área 4.1.1, es decir, sus radios son iguales. Como se ha visto esta diferencia entre espacios de dimensión mayor o igual que tres y de espacios de dimensión menor, se debe esencialmente al hecho de que el problema de la medida no tiene solución en el primer caso y sí en el segundo.

5.2. La esfera

En esta sección veremos que \mathbb{S}^2 y las esferas en general se comportan como \mathbb{R}^3 desde el punto de vista de la equidescomposición.

Lema 5.2.1. Si A y B son conjuntos situados en la superficie de la misma esfera, A tiene interior no vacío (con respecto a la topología de la esfera) y B está compuesto por un número finito de arcos y círculos, entonces

$$A =_f A \cup B.$$

Demostración. La prueba es completamente análoga a la del lema 3.2.1. \square

Lema 5.2.2. Si polígonos esféricos A y B , situados en la superficie de la misma esfera, tienen igual área, entonces $A =_f B$.

Demostración. La demostración está basada en el lema anterior y no difiere de la del teorema 4.1.2; una vez se usa el hecho de que dos polígonos esféricos, situados en la superficie de la misma esfera y de igual área, son equivalentes por descomposición finita. Esto se puede ver fácilmente puesto que se cumple en el plano y se puede realizar una isometría de la esfera al plano de manera que se trabajará con conjuntos congruentes que cumplen la dicha propiedad. \square

Como mismo hemos escrito un análogo de la *Paradoja de Banach-Tarski* para la equidescomposición, podemos escribir uno para la *Paradoja de Hausdorff*

Lema 5.2.3. Paradoja de Hausdorff Una esfera S , puede descomponerse en dos subconjuntos disjuntos, A_1 y A_2 de manera que $S =_f A_1$ y $S =_f A_2$.

Demostración. Partiendo de los conjuntos C, S_1, S_2, S_3, S_4 de 3.1.3 y tomando $A_1 = C \cup S_1 \cup S_2$ y $A_2 = S_3 \cup S_4$, se tiene que A_1 y A_2 cumplen las hipótesis del enunciado y que $S =_f A_1$ y $S =_f A_2$. \square

Con la ayuda del corolario 2.0.7, este lema se generaliza fácilmente por inducción de la siguiente manera:

Lema 5.2.4. Sea n un natural cualquiera, la superficie S de cualquier esfera se puede descomponer en n subconjuntos disjuntos A_1, \dots, A_n de manera que $S =_f A_k$ para todos $1 \leq k \leq n$.

Lema 5.2.5. Sea n un natural cualquiera y la superficie S de una esfera es descompuesta en 2^n polígonos esféricos congruentes B_1, B_2, \dots, B_{2^n} sin puntos interiores comunes, entonces $S =_f B_1$.

Demostración. Sean

$$B'_1 = B_1, B'_k = B_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} B_l, 2 \leq k \leq 2^n.$$

De esta manera obtenemos una descomposición de S en 2^n subconjuntos disjuntos:

$$S = \bigcup_{k=1}^{2^n} B'_k.$$

Como cada conjunto B_k con $1 \leq k \leq 2^n$ contiene puntos interiores (con respecto a la topología de la superficie de la esfera) y el conjunto $B_k \setminus B'_k$ está compuesto por un número finito de arcos, se concluye, de acuerdo al lema 5.2.1, que

$$B'_k =_f B'_k \cup (B_k \setminus B'_k) = B_k.$$

De esto deducimos inmediatamente, de acuerdo con la hipótesis del teorema, que

$$B'_1 =_f B'_k \text{ con } 1 \leq k \leq 2^n.$$

Por otro lado, conforme con el lema anterior, sea

$$S = \bigcup_{k=1}^{2^n} A_k$$

una descomposición de la esfera S en subconjuntos disjuntos de manera que

$$S =_f A_k, \Rightarrow A_1 =_f A_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Teniendo por tanto que $\{A_k\}_{k=1}^n$ y $\{B'_k\}_{k=1}^{2^n}$ cumplen las condiciones del corolario 2.0.12, por lo cual $A_1 =_f B'_1$, implicando entonces que $S =_f B_1$. \square

Lema 5.2.6. Si el conjunto A situado en la superficie de una esfera, no es un conjunto frontera, entonces $A =_f S$. [MMS14]

Demostración. El área de una esfera de radio ρ es $4\pi\rho^2$. Dividiendo la esfera primero en dos partes iguales, se obtienen dos casquetes de área $2\pi\rho^2$, estos dos casquetes pueden ser divididos a su vez en otras dos partes, obteniendo cuatro conjuntos de área $\pi\rho^2$. Siguiendo este procedimiento un total de n veces, obtenemos 2^n polígonos esféricos cuyas áreas son iguales a $4\pi\rho^2/2^n$ y además es claro que estos polígonos son congruentes. Descomponemos S en 2^n polígonos congruentes sin puntos interiores en común:

$$S = \bigcup_{k=1}^{2^n} B_k.$$

De acuerdo con el lema anterior, obtenemos que

$$S =_f B_1.$$

Los polígonos esféricos A_1 y B_1 tienen el mismo área, se puede concluir, aplicando el lema 5.2.2, que

$$A_1 =_f B_1.$$

De lo anterior es claro que $S =_f A_1$. Por otro lado, tenemos que

$$A_1 \subset A \subset S.$$

Conforme al corolario 2.0.9, llegamos a que $A =_f S$. \square

El lema 5.2.6 hace que la prueba del teorema 5.2.7 sea evidente;

Teorema 5.2.7. Si los conjuntos A y B , están situados en la superficie de la misma esfera y no son conjuntos frontera (su interior no es vacío), se tiene que $A =_f B$.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos introducido el concepto de la equidescomposición o equivalencia por descomposición finita y la hemos desarrollado de tal que manera que se ha llegado a la Paradoja de Banach-Tarski, viendo que no solo esta ocurre en \mathbb{R}^3 o los espacios euclídeos de dimensión mayor, sino también en la superficie de la esfera. Como hemos visto esta equivalencia nos permite relacionar conjuntos de distintas medidas. Si dos conjuntos son equivalentes por equidescomposición, su medida se mantiene siempre que los conjuntos involucrados en la descomposición sean medibles, de lo contrario se llegan a descomposiciones paradójicas.

La medida ha estado presente a lo largo de todo el trabajo, desde el principio hablando de las isometrías o los movimientos rígidos en el espacio. Y es que como hemos llegado a ver, la Paradoja de Banach-Tarski implica directamente que el problema General de la Medida no tiene solución, no existe una medida para la cuál todos los conjuntos acotados sean medibles, esto es así para cualquier espacio.

La manera de eliminar la paradoja es eliminar el axioma de elección y tomar como axioma que todos los conjuntos son medible Lebesgue, pero esto nos lleva también a resultados tan paradójicos o más que el que estamos tratando en este trabajo. En [TW19a] se puede ver que aceptando todos los conjuntos acotados como medibles Lebesgue podemos llegar a la paradoja de la división (*the division paradox*) que nos dice que en el espacio cociente \mathbb{R}/\mathbb{Q} hay más elementos que en \mathbb{R} : $|\mathbb{R}| < |\mathbb{R}/\mathbb{Q}|$, donde $|X|$ representa el cardinal del conjunto X (la cantidad de elementos que lo componen). Por lo que deshacernos de la paradoja nos lleva a resultados quizás aún más paradójicos y no nos proporciona ningún beneficio, obligándonos a deshacernos de resultados ya conocidos y fundamentales para otras áreas.

Por lo tanto, siendo el axioma de elección un elemento tan importante para las matemáticas modernas, permitiendo resultados tan significativos

como puede ser el Teorema de Hahn-Banach o la existencia de Clausuras Algebraicas para todos los cuerpos, eliminar este axioma debido simplemente a la Paradoja de Banach Tarski sería un despropósito. Ya otro tema sería tratarlo desde un punto de vista filosófico.

Bibliografía

- [Ban23] Stefan Banach. Sur le problème de la mesure. *Fundamenta Mathematicae*, 4:7–33, 1923.
- [Ban24] Stefan Banach. Un théorème sur les transformations biunivoques. *Fundamenta Mathematicae*, 1(6):236–239, 1924.
- [Bil12] Patrick Billingsley. *Probability and Measure Anniv.* John Wiley & Sons, 2012.
- [BL98] G Bachman and Narici Lawrence. *Functional Analysis.* Dover Publications Inc., 1998.
- [BT24] Stefan Banach and Alfred Tarski. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, 6(1):244–277, 1924.
- [Bur95] J. Burgos. *Cálculo infinitesimal de varias variables.* McGraw-Hill, 1995.
- [Coh13] Donald L. Cohn. *Measure Theory.* Springer-Verlag GmbH, 2013.
- [Hal78] Paul R. Halmos. *Measure Theory.* Springer New York, 1978.
- [Ham89] A. G. Hamilton. *Logic for Mathematicians.* Cambridge University Press, 1989.
- [Kle02] Stephen Cole Kleene. *Mathematical Logic.* Dover Publications Inc., 2002.
- [Kur24] Casimir Kuratowski. Une propriété des correspondances biunivoques. *Fundamenta Mathematicae*, 6:240–243, 1924.
- [Lan10] Joseph Landin. *An Introduction to Algebraic Structures (Dover Books on Mathematics).* Dover Publications, 2010.

- [Mas72] William S. Massey. *Introducción de la topología algebraica*. Reverté, 1972.
- [MMS14] Andrew McFarland, Joanna McFarland, and James T. Smith, editors. *Alfred Tarski*. Springer New York, 2014.
- [Nat64] I. P. Natanson. *Theory of Funtions of a Real Variable*. Frederick Ungar Publishing Co., 1964.
- [Rot99] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer New York, 1999.
- [Tao91] Terrance Tao. The banach-tarski paradox. *Mathematics Subject Classification*, 1991.
- [TW19a] Alan D. Taylor and Stan Wagon. A paradox arising from the elimination of a paradox. *The American Mathematical Monthly*, 126(4):306–318, apr 2019.
- [TW19b] Grzegorz Tomkowicz and Stan Wagon. *The Banach-Tarski Paradox*. Cambridge University Press, 2019.
- [Wag93] Stan Wagon. *The Banach-Tarski Paradox (Encyclopedia of Mathematics and its Applications)*. Cambridge University Press, 1993.
- [Wil04] Stephen Willard. *General Topology*. Dover Publications Inc., 2004.
- [Zaa53] A. Zaanen. *Linear analysis: Measure and integral, Banach and Hilbert space, linear integral equations*. Interscience Publishers Inc., 1953.