



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

**Modelización matemática de curvas
experimentales en regímenes estacionarios y
dinámicos de memristores**

Autora: Cristina Santa Cruz González

Tutor: Salvador Dueñas Carazo

“Me gustaría agradecer a mi tutor Salvador Dueñas Carazo por haberme guiado en la realización de este Trabajo de Fin de Grado a pesar de las dificultades imprevistas derivadas del confinamiento por el COVID-19. Gracias por resolverme las dudas que me iban surgiendo así como sugerirme nuevos caminos para mejorar los resultados en la parte experimental”.

“También, quiero agradecer a mis padres y hermanos por su constante apoyo, sobre todo en los momentos difíciles, durante todo mi período de formación en la Universidad que se culmina con la presentación de este TFG”.

Índice general

Introducción	7
1. Fundamento teórico	9
1.1. Memristor y sistemas memristivos	9
1.2. El memristor de HP	13
1.3. Huellas de identidad	15
1.4. Clasificación	17
1.4.1. Memristor con conducción por filamentos	18
1.4.2. Memristor de barrera	22
2. Modelos matemáticos	25
2.1. Variables de estado	25
2.2. Modelo lineal	26
2.3. Modelo de memdiodo de E. Miranda	28
3. Análisis del modelo de memdiodo (E. Miranda)	33
3.1. Recopilación de datos	33
3.2. Verificación del modelo	36
3.3. Conclusiones	43
4. Mejora del modelo de memdiodo	45
4.1. Influencia de cada variable de estado	45
4.2. Variación de V^- y η^-	48
4.3. Propuesta de mejora	52
4.4. Conclusiones	58
4.5. Aplicaciones en el futuro	60
Apéndice A: Código Matlab	63
A.1. Cálculo de la corriente según el modelo de memdiodo	63
A.2. Ajuste de los parámetros del modelo de memdiodo	65
A.3. Determinación del cambio de lazo	67
Bibliografía	69

Introducción

El memristor es un dispositivo descubierto hace 50 años que pronostica un desarrollo enorme dentro del campo de la electrónica. Considerado como el cuarto elemento con el que completar una serie de relaciones matemáticas, ha sido ampliamente estudiado en los últimos años destacando el trabajo de Leon Chua, quien lo descubrió y formuló el primer modelo matemático con el que se pudo predecir su funcionamiento, y Enrique Miranda. Este último ha desarrollado el denominado modelo de memdiodo, siendo uno de los más reconocidos por la comunidad científica en la actualidad. En este TFG estudiaremos tanto los orígenes de estos nuevos dispositivos como la formulación de distintos modelos matemáticos, prestando especial interés en el de E. Miranda.

Para el mejor entendimiento de este trabajo es recomendable tener conocimientos previos adquiridos en la asignatura de “Electrónica”.

El trabajo se estructura en cuatro capítulos. El primero se basa en una introducción teórica de los memristores. Inicialmente, se explica el origen de estos dispositivos para luego exponer sus principales características y realizar distintas clasificaciones.

El segundo capítulo se centra en modelos matemáticos existentes en la literatura, haciendo especial hincapié en el modelo de memdiodo desarrollado por E. Miranda en su artículo [11], con los que se ha intentado explicar el comportamiento experimentalmente observado de estos dispositivos.

En el tercer capítulo se analiza detalladamente el modelo de memdiodo descrito en el capítulo anterior. Para ello, se realizan una serie de experimentos en los laboratorios del Departamento de Electrónica y Electricidad de la UVA. Mediante la resolución de problemas no lineales de mínimos cuadrados, utilizando el programa de Matlab, se consiguen determinar los parámetros desconocidos presentes en este modelo con los que minimizar las discrepancias con los datos experimentales.

Finalmente, en el cuarto capítulo se propone y analiza una mejora del modelo de memdiodo preestablecido y se hace un resumen de las múltiples aplicaciones que pueden llegar a desempeñar estos nuevos dispositivos en un futuro próximo.

De forma complementaria, se incluye en el Apéndice A los códigos de Matlab utilizados tanto para la determinación de los parámetros desconocidos presentes en el modelo de memdiado, como para la realización de las distintas simulaciones descritas en el Capítulo 4.

En Valladolid, a 15 de julio de 2020.

Capítulo 1

Fundamento teórico

En este primer capítulo haremos una pequeña introducción sobre los memristores y sistemas memristivos, explicando cómo surge el concepto de memristor y las principales características por los que se identifican. Además, haremos una clasificación de estos dispositivos.

1.1. Memristor y sistemas memristivos

Memristor es un neologismo que básicamente significa una resistencia con memoria (memristor = memory resistor). En 1971, el profesor Leon Chua predice la existencia de un cuarto elemento pasivo, pues no produce energía, básico de un circuito con el que se podría completar un ciclo de relaciones matemáticas entre las cuatro variables eléctricas fundamentales: corriente eléctrica (I), potencial o voltaje (V), carga eléctrica (q) y flujo magnético (ϕ). Hasta ese momento, las relaciones entre estas variables se podían expresar a través de 3 ecuaciones diferenciales diferentes, cada una con una constante de proporcionalidad que correspondía a la configuración usada por uno de los siguientes elementos pasivos:

- **Resistor o resistencia:** componente pasivo que se opone al flujo eléctrico entre dos puntos de un circuito produciendo calor (efecto Joule). Define la relación entre diferencia de potencial y corriente

$$dV = R dI, \quad (1.1)$$

donde R es la resistencia.

- **Inductor o bobina:** dispositivo pasivo capaz de almacenar energía en forma de campo magnético a través del proceso de autoinducción. Con él se define la relación entre flujo y corriente

$$d\phi = L dI, \quad (1.2)$$

donde L es la inductancia.

- **Capacidad o condensador:** componente pasivo que almacena energía sustentando un campo eléctrico. Con él se define la relación entre carga y diferencia de potencial

$$dq = CdV, \tag{1.3}$$

donde C es la capacidad.

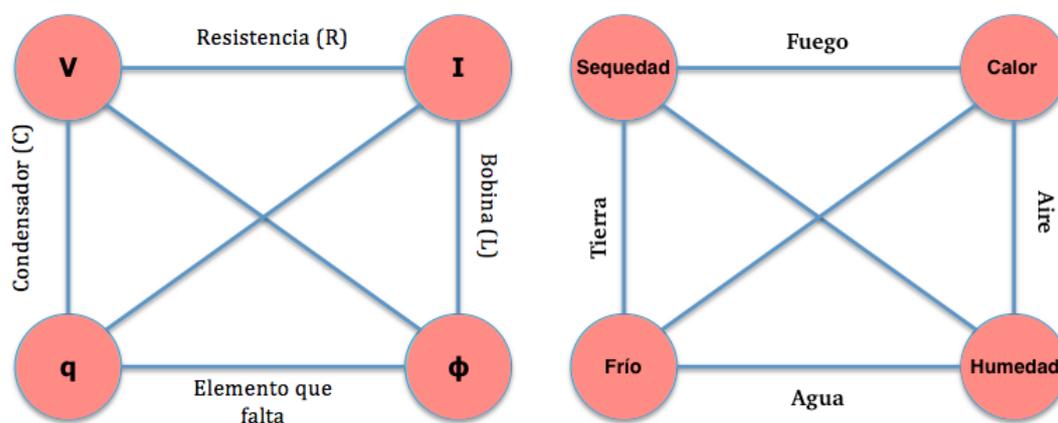
Por otra parte, de acuerdo a las leyes de Faraday, el voltaje es la derivada temporal del flujo

$$d\phi = Vdt \tag{1.4}$$

y la corriente se define como la derivada temporal de la carga

$$dq = Idt. \tag{1.5}$$

De esta forma, como se refleja en la Figura 1.1, faltaba un elemento para completar la simetría conceptual entre las variables y los elementos pasivos de un circuito. Incluso si se compara, como hizo Chua, este modelo con la teoría de la materia de Aristóteles se observan las mismas relaciones. En ese caso, los cuatro elementos fundamentales eran el agua, la tierra, el aire y el fuego y las propiedades fundamentales la humedad, la sequedad, el frío y el calor.



(a) Relaciones entre elementos de un circuito (b) Relaciones de Aristóteles sobre la materia

Figura 1.1: Esquemas de relaciones matemáticas

Luego este cuarto elemento pasivo de un circuito eléctrico, con el que se va a poder relacionar la carga y el flujo, es el que denominó Chua, en su artículo “*Memristor. The Missing Circuit Element*” [1], como memristor. En este artículo se distinguen dos tipos de memristores, los que están controlados por la carga y lo que están controlados por el flujo.

- Memristor controlado por la carga:

$$M(q) = \frac{d\phi(q)}{dq} = \frac{d\phi(q)/dt}{dq/dt} = \frac{V(t)}{I(t)}, \quad (1.6)$$

donde simplemente hemos aplicado las relaciones (1.4) y (1.5).

- Memristor controlado por el flujo:

$$W(q) = \frac{dq(\phi)}{d\phi} = \frac{I(t)}{V(t)}. \quad (1.7)$$

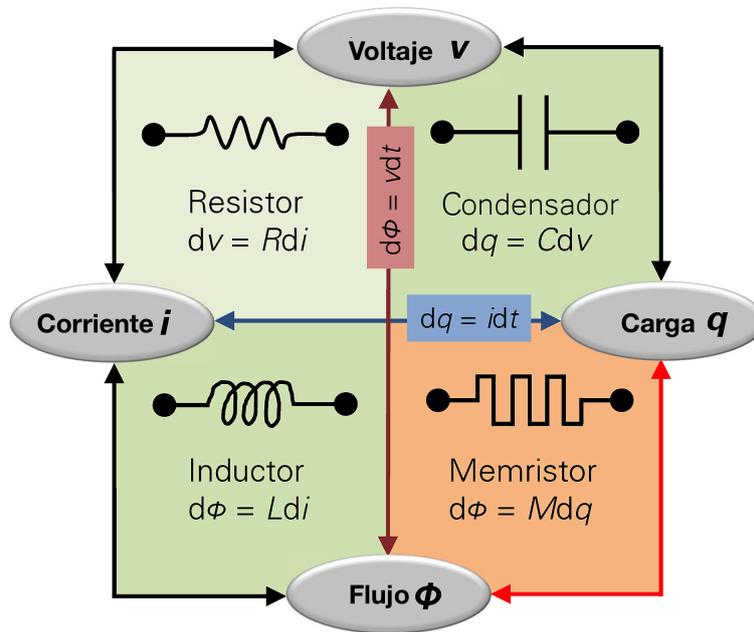


Figura 1.2: Los cuatro elementos pasivos básicos de un circuito eléctrico: resistencia, condensador, bobina y memristor.

Cinco años más tarde, en 1976, Chua y su estudiante Kang publicaron otro artículo en el que definían una clase de dispositivos denominados sistemas memristivos [2]. Las ecuaciones genéricas con las que se describían de manera teórica, pues aún no existían, estos nuevos dispositivos eran

$$\begin{cases} y(t) = g(x, u, t) u(t) \\ \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \end{cases} \quad (1.8)$$

donde f y g son funciones continuas.

$u(t)$ es la señal de entrada.

$y(t)$ es la señal de salida.

x es el conjunto de variables de estado que describen al dispositivo.

Ejemplo 1.1. → Sistema memristivo controlado por corriente

$$\begin{cases} u(t) := I(t) \\ y(t) := V(t) \end{cases}$$

→ Sistema memristivo controlado por voltaje

$$\begin{cases} u(t) := V(t) \\ y(t) := I(t) \end{cases}$$

❖ Definición

El **memristor** es una resistencia con memoria o un elemento resistivo capaz de variar el valor de su resistividad en función de la corriente eléctrica que circula a través de él y de la que ha circulado en el pasado. Con esta cualidad es capaz de almacenar información al mantener este valor de resistividad incluso cuando la corriente ha dejado de circular por él repentinamente, es decir, posee una memoria no volátil. Esta propiedad lo ha convertido en un importante objeto de estudio entre cuyas aplicaciones se encuentran las memorias no volátiles, las redes neuronales o los circuitos lógicos.

Aplicando las relaciones que postuló Chua se definen:

❖ La **memristencia** como

$$M(q) = \frac{d\phi}{dq} \tag{1.9}$$

cuyas unidades son el ohmio (Ω) o Wb/C .

❖ La **memductancia** como

$$W(\phi) = \frac{dq}{d\phi} \tag{1.10}$$

cuyas unidades son el siemens o mho (\mathcal{U}).

Como hemos dicho, el memristor es una resistencia con memoria que depende de la cantidad de carga eléctrica que ha fluido y en qué dirección a través de ella. La diferencia clave entre los memristores y las resistencias es esta dependencia con la carga. Si la carga fuera constante entonces, aplicando la ley de Ohm, obtendríamos

$$M(q) = \frac{V(t)}{I(t)} = R(t). \tag{1.11}$$

Sin embargo, si la carga variase con el tiempo provocando cambios significativos en la memristencia (la cual dejaría de ser constante) entonces se rompería la relación lineal entre el voltaje y la corriente dejando de ser cierta la relación de equivalencia anterior. Luego la novedad que incorpora el memristor reside en sus propiedades no lineales. Como dijo Chua en una entrevista en el diario El País

“La resistencia siempre ofrece el mismo nivel de dificultad al paso de la corriente; el memristor no, ya que varía según sea la cantidad de electricidad y la dirección del flujo: en una dirección, aumenta la resistencia; en la otra, disminuye”. [3]

Además, una de las propiedades fundamentales de estos dispositivos es la llamada **propiedad de no volatibilidad**, la cual consiste en que cuando el suministro de energía eléctrica es desconectado, el memristor es capaz de mantener el valor de su resistencia más reciente, aquella que alcanzó cuando la corriente aún circulaba a través de él, sin necesidad de que se haya tenido que gastar una energía para mantener dicho valor.

1.2. El memristor de HP

Cuando Chua postuló la existencia del memristor lo hizo aportando una demostración matemática de su existencia, pero en aquel momento no existía todavía ningún dispositivo que explicara esta teoría. No fue hasta 2008 cuando en el laboratorio de Hewlett-Packard (HP) el grupo de científicos R. Stanley Williams, Dmitri B. Strukov, Gregory S. Snider y Duncan R. Stewart consiguieron diseñar a escala nanométrica este nuevo dispositivo, publicando sus resultados en la revista Nature [4] junto con el primer modelo básico con el que explicaban su funcionamiento.

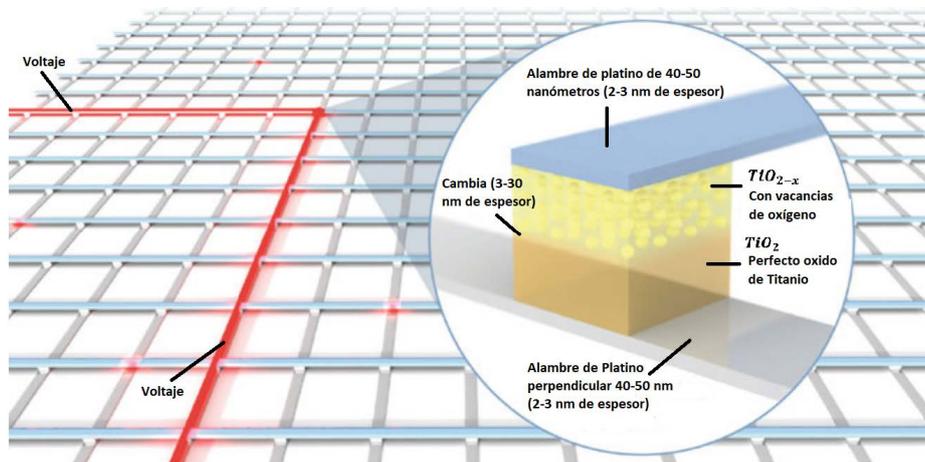


Figura 1.3: Estructura del memristor construido en los laboratorios de HP.[5]

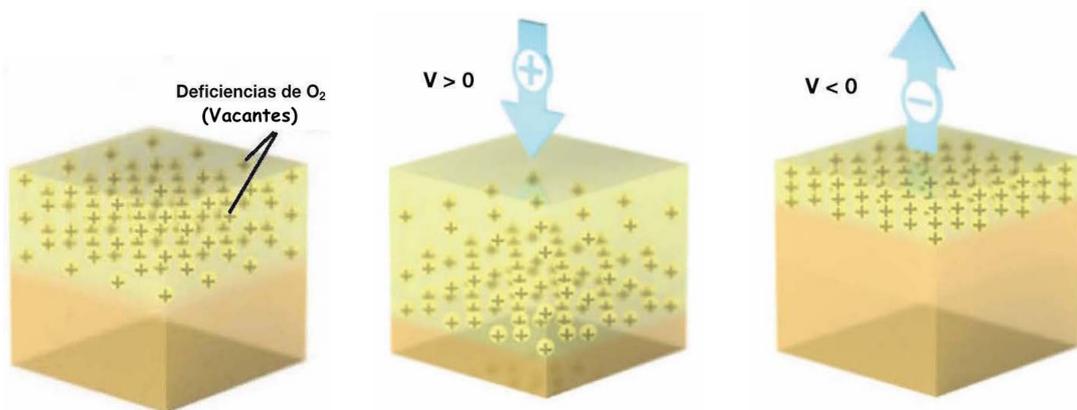
Como se explica en [5], el primer dispositivo construido tenía la estructura de un sandwich, es decir, dos electrodos conductores de platino como panes entre los cuales se encontraban tres capas: una de dióxido de platino, luego una película densa de sólo una molécula de espesor (moléculas especialmente diseñadas) y por último, una capa de 2-3 nm de titanio. Sin embargo, después de haber aplicado distintos potenciales al dispositivo, su estructura interna había cambiado. Ésta

ahora consistía en que debajo de la capa de moléculas en vez de dióxido de platino había platino puro, y por encima de dicha capa había dióxido de titanio. Pero además, en esta capa de titanio se podían distinguir a su vez dos subcapas. Una, la más próxima a la capa de moléculas, poseía una distribución estequiométrica del TiO_2 (es decir, una relación 2:1 de oxígeno:titanio), y sin embargo, en la otra había un déficit de entre el 2-3 % de oxígeno. Esta última subcapa la denotaron como TiO_{2-x} donde x valía alrededor de 0,05.

En resumen, los átomos de oxígeno habían migrado a través de las moléculas desde la capa de óxido de platino uniéndose al titanio, sin provocar un cambio significativo en las moléculas de la capa intermedia. Por este motivo, y corroborándolo con experimentos posteriores, se llegó a la conclusión que esta monocapa era insignificante en el experimento, pudiéndose eliminar.

Lo realmente importante, clave para entender el proceso de cambio de estado, era la bicapa formada por las dos diferentes especies de dióxido de titanio. Por una parte, la capa TiO_2 es aislante, mientras que la capa TiO_{2-x} es conductora gracias a que las vacantes de oxígeno son donadoras de electrones. Además, estas vacantes poseen carga positiva, lo que les permite moverse libremente por el dióxido de titanio cuando se aplica una diferencia de potencial entre los electrodos.

Con esta estructura se puede explicar el proceso de cambio de estado, como se muestra en la Figura 1.4. Al aplicar un voltaje positivo en el electrodo superior las vacantes (positivas) son repelidas, desplazándose hacia la capa inferior aislante de TiO_2 transformándola a su paso en TiO_{2-x} . Esto conlleva un incremento de la conductividad que se denomina estado On. Si por el contrario, aplicamos un voltaje negativo, las vacantes serán atraídas por el electrodo superior provocando una reducción de la capa conductora y, por lo tanto, un aumento de la aislante, es decir, de TiO_2 . Esto es lo que se denomina estado Off.



(a) Sin aplicar voltaje (b) Aplicando voltaje positivo (c) Aplicando voltaje negativo

Figura 1.4: Cambios en la estructura interna del memristor según el voltaje. [5]

Luego el cambio de estado del dispositivo, es decir, el cambio en su resistencia se produce por el flujo simultáneo de electrones y vacantes de oxígeno. Sin embargo, este cambio no se produce a cualquier voltaje sino que tiene que ser lo bastante grande para poder inducir este flujo de partículas. En esto se basa la ya mencionada propiedad de no volatilidad, pues el valor de la resistencia de un memristor se mantendrá constante, es decir, las vacantes de oxígeno permanecerán absolutamente inmóviles, mientras no se aplique un voltaje suficientemente elevado. Esta propiedad refleja el gran beneficio que estos dispositivos presenta para almacenar información (memoria) sin que sea necesario un consumo constante de energía, pues aun cuando se anula totalmente el voltaje aplicado a los electrodos, el valor de la resistencia se mantiene constante.

1.3. Huellas de identidad

Para que un dispositivo sea considerado un memristor es necesario que cumpla ciertas propiedades que se conocen como marcas o huellas de identidad (finger-prints). Son al menos tres las necesarias que se deben cumplir según se afirma en [6], [7] y [8].

1. La primera huella de identidad de un memristor es el ciclo de histéresis pellizcado o estrangulado que aparece al representar la corriente frente al voltaje para cualquier señal periódica. Como dijo Chua “Si se pellizca, es un memristor”. Además este ciclo de histéresis siempre debe pasar por el origen de coordenadas ($V=0, I=0$) independientemente de la amplitud y la frecuencia de la señal de entrada, como se observa en la siguiente gráfica.

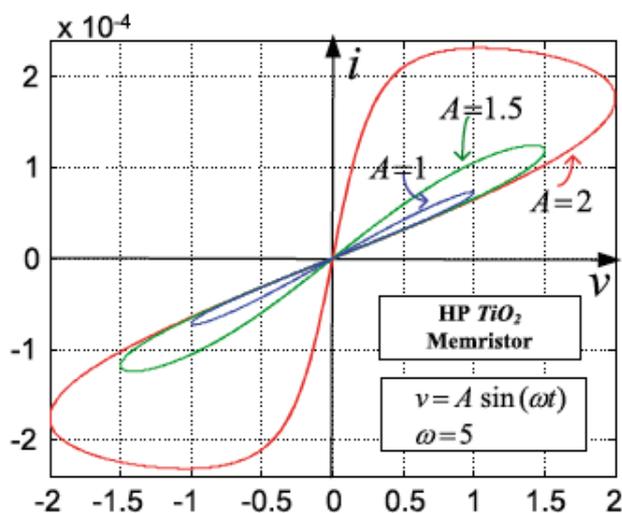


Figura 1.5: Lazos de histéresis estrangulados característicos de los memristores. [8]

2. El área del lazo de histéresis debe disminuir a medida que la frecuencia w de la señal periódica de entrada aumenta, siempre y cuando esta frecuencia supere la denominada frecuencia crítica. Esto se puede observar en la siguiente figura.

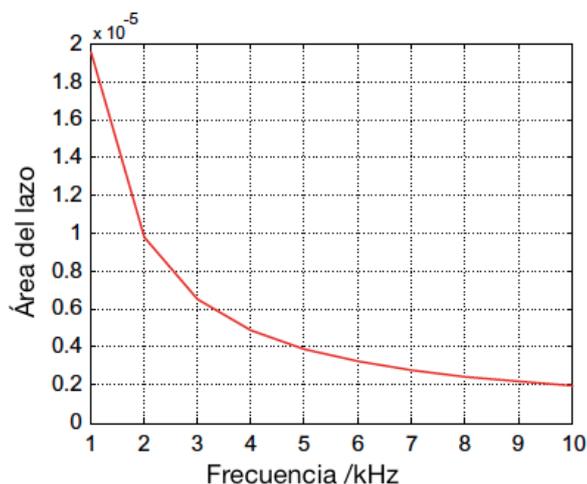


Figura 1.6: Disminución del área del lazo al aumentar la frecuencia. [7]

3. El lazo de histéresis degenera en una línea recta cuando la frecuencia de la señal de entrada es muy elevada. Es decir, cuando la frecuencia tiende a infinito el área disminuye tanto que converge a una línea recta que pasa por el origen y cuya pendiente depende de la amplitud y forma de la señal de entrada. Por lo tanto, a frecuencias muy elevadas el dispositivo se comportará como una resistencia lineal.

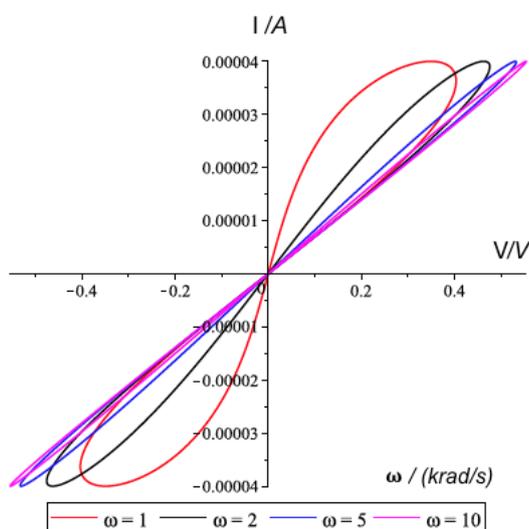


Figura 1.7: Cambios que sufren los ciclos de histéresis de los memristores en función de la frecuencia de la señal de entrada. [9]

1.4. Clasificación

Como hemos mencionado anteriormente, los memristores son dispositivos en los que se pueden diferenciar dos estados principales. Estos son:

- **Estado On o estado de baja resistencia** (LRS: low resistance state). La conducción en este estado viene determinada a través de la ley de Ohm.
- **Estado Off o estado de alta resistencia** (HRS: high resistance state). Los procesos por los que se produce la conducción en este estado no están claramente determinados. Entre los modelos con los que se suele explicar dicha conducción están el efecto túnel, el efecto túnel asistido con trampas, el efecto túnel Nordheim (FN), la emisión Schottky, la emisión Poole-Frenkel y la conducción de espacio de carga limitada [10].

Según el voltaje aplicado entre los extremos del memristor se puede conseguir cambiar de un estado a otro. Al proceso de pasar de HRS a LRS se le denomina proceso de formación (set process) y al proceso contrario el de destrucción (reset process). Dependiendo de cómo se produzca el cambio de esta resistividad del memristor se distinguen:

1. **Modo unipolar (o no polar)**: cuando los voltajes necesarios para pasar de un estado a otro poseen la misma polaridad, aunque tengan distinta magnitud.
2. **Modo bipolar**: cuando los voltajes que producen los cambios poseen distinta polaridad.

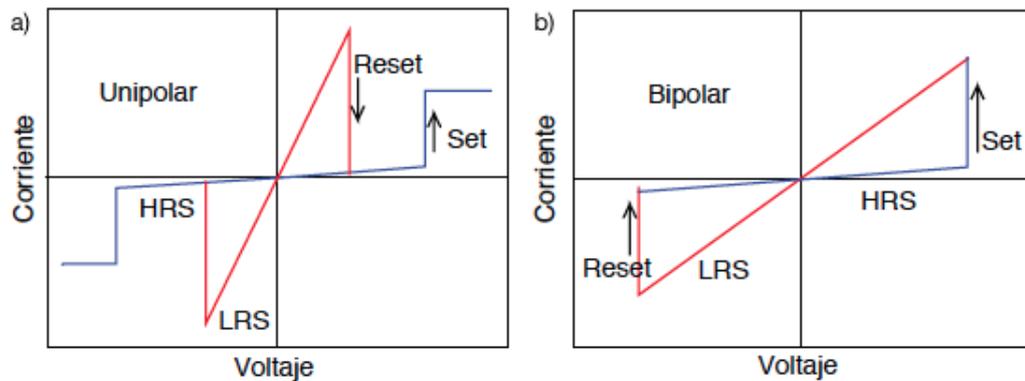


Figura 1.8: Características I-V de los memristores operando en: modo unipolar (a) y modo bipolar (b). Estas gráficas han sido tomadas de [10].

Los memristores de los que hablaremos en el resto del trabajo funcionarán en modo bipolar.

Por otra parte, dependiendo de la ubicación donde se produzca el cambio de estado en los memristores distinguiremos, como se hace en [10], entre memristores con conducción por filamentos y de tipo barrera.

1.4.1. Memristor con conducción por filamentos

El cambio de estado en estos tipos de memristores se basa en la formación y ruptura de filamentos conductores (CFs) en la capa aislante. Dentro de este tipo se pueden clasificar, dependiendo de la composición química de dichos CFs, en memristores de cambio de valencia (VCM) y en memristores de metalización electroquímica (ECM).

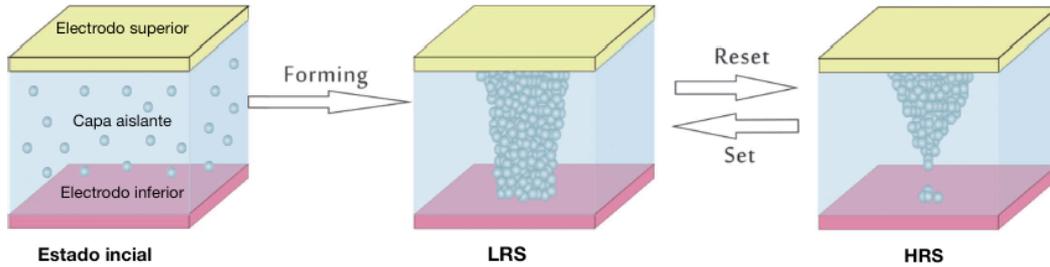


Figura 1.9: Esquema del cambio de estado (HRS \leftrightarrow LRS) en los memristores de conducción por filamentos.

* VCM

En estos tipos de memristores el material que se usa como capa aislante suele ser un óxido metálico (MO_x), aunque si fuera otro tipo de material la explicación sería similar. Cuando a estos dispositivos se le aplica un voltaje adecuado el efecto del campo eléctrico y de la temperatura provoca el movimiento de los aniones, hacia uno de los electrodos, resultando en la formación o destrucción de los CFs. Ya que, como hemos dicho, el aislante es un óxido metálico, serán los aniones de oxígeno, o lo que es lo mismo las vacantes formadas por la ausencia de átomos de oxígeno, los que se consideran la especie móvil. Los defectos existentes en la capa aislante serán los que formen la vía de difusión de estos iones. Por lo tanto, cuando aplicamos un voltaje elevado, creando un campo eléctrico intenso en la capa aislante ($\vec{E} \gg 10^6$ V/cm), se provoca una aceleración de los aniones/vacantes siendo su velocidad de deriva

$$v = \pm \mu E e^{E/E_0}, \quad (1.12)$$

donde E_0 es el campo característico del átomo móvil concreto y μ es la movilidad de los aniones.

Por otra parte, el efecto Joule, que existe debido a las fugas de calor de la corriente, también participa en la aceleración de los aniones pudiendo ser incluso el factor predominante.

Durante el **proceso de formación** (set process), pares de O^{2-} -vacantes son formados en el aislante por ionización por impacto conforme a la reacción



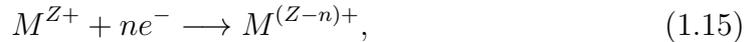
donde se ha denotado por O a un átomo de oxígeno cualquiera, O^{2-} al anión de oxígeno resultante y V_0^{2+} a la vacante que se forma por la ausencia del oxígeno en la posición donde se encontraba éste inicialmente.

Los aniones, movidos por el campo eléctrico y el calentamiento Joule existentes, se desplazan hacia el ánodo donde se produce la reacción de oxidación



liberándose el oxígeno en forma de burbujas (denotadas por $O_2 \uparrow$) que se pueden observar visualmente en el electrodo que funcione como ánodo.

Al mismo tiempo que los aniones se desplazan hacia el ánodo, las vacantes se acumulan cerca del cátodo formando así una región deficiente en oxígeno que se va alargando desde el cátodo hacia el ánodo. Estas vacantes son ocupadas por cationes metálicos que son capaces de atrapar electrones procedentes del cátodo a través de la reacción



donde M^{Z+} representa un catión metálico.

Y es esta reducción del estado de valencia de los cationes metálicos lo que provoca que el óxido aislante se vuelva cada vez más conductor. En este proceso se van creando los denominados filamentos conductores (CFs) que partiendo del cátodo van creciendo hacia el ánodo inicialmente con forma cónica para después tomar una forma más dendrítica y finalmente formar una columna que conecte los dos electrodos. Este proceso se puede observar en la imagen TEM (microscopía de transmisión de electrones) de la Figura 1.11.

En resumen, el movimiento aniónico provoca un cambio de valencia de los cationes metálicos que conlleva una conmutación de la resistencia del óxido metálico del memristor. Por eso, estos dispositivos se denominan memristores de cambio de valencia (VCM).

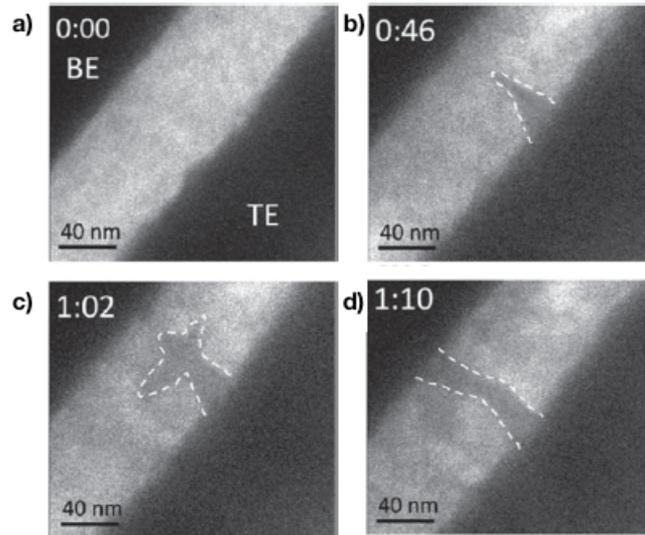


Figura 1.10: Imagen tomada a través de un TEM en la que se observa la formación de los filamentos conductores en un memristor tipo VCM. [10]

El **proceso de destrucción** de filamentos (reset process) se basa en el retorno de los aniones de oxígeno hacia el cátodo, posicionándose en las vacantes existentes en la región CF, es decir, en la región donde existen filamentos conductores, destruyéndolos. La reacción que se produce ahora es



En el caso de memristores bipolares, el movimiento de los aniones es debido principalmente al campo eléctrico en el aislante, que dependerá del voltaje aplicado a los electrodos. Sin embargo, en el caso de los memristores unipolares el efecto dominante se cree que es el térmico, el efecto Joule provocado por la gran densidad de corriente en los CFs, lo que conlleva cambios termoquímicos en los átomos vecinos los cuales al descomponerse proporcionan los aniones de oxígeno. En estos casos, la ruptura de los filamentos se produce desde un punto central (hot spot) extendiéndose hacia el ánodo. En verdad, una vez rota la columna de CFs el proceso de reset en estos dispositivos se basa en una competición entre la destrucción de los filamentos, debido a que los aniones O^{2-} ahora son atraídos al ánodo para aniquilar las vacantes existentes en éste, y la creación de filamentos, pues al desplazarse los aniones hacia el ánodo van a dejar a su vez vacantes cerca del cátodo que favorecen la formación de nuevos filamentos.

Cabe señalar que la dirección de crecimiento y la localización donde se produce la ruptura de los CFs depende del óxido que forme el memristor.

- **Los óxidos de tipo p:** son en los que los CFs se forman del ánodo hacia el cátodo y el cambio de estado se produce en el cátodo.

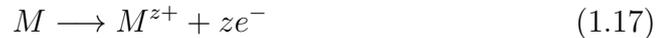
- **Los óxidos de tipo n:** son en los que los CFs se crean desde el cátodo hacia el ánodo. En ellos el cambio de estado se produce en el ánodo.

* ECM

A estos dispositivos también se les denomina sólidos de memoria electrolítica, puentes conductores RAM, celdas de metalización programable o interruptores atómicos. A diferencia de los VCM, en estos memristores los cationes metálicos, generalmente procedentes de los electrodos, son la especie móvil.

El **proceso de formación** de este tipo de memristores se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Al aplicar un voltaje positivo a uno de los electrodos se produce una reacción de oxidación descrita por



2. Los cationes metálicos migran hacia el cátodo movidos por el campo eléctrico existente y por la diferencia de gradiente.
3. En el cátodo se produce la reducción



lo que provoca la creación de filamentos conductores, compuestos por átomos metálicos, desde el cátodo hacia el ánodo.

Para producir el proceso inverso (**proceso de destrucción**), simplemente se aplica un voltaje opuesto al aplicado anteriormente, lo que provoca que los CFs se disuelvan.

Sobre el transporte de electrones a través de los CFs podemos decir que está cuantizado en múltiples niveles cuánticos, donde se ha podido demostrar que la conductancia (G) varía como

$$G = nG_0 = n \frac{2e^2}{h}, \quad (1.19)$$

siendo G_0 la conductancia que existiría si el CF estuviera formado por una única cadena de átomos ($G_0 \approx 78\mu S$).

Esto se puede deducir gracias a las gráficas de conductancia (G) frente a voltaje (V) que se obtienen tanto en la formación como en la destrucción de CFs. En ellas, como se muestra en la Figura 1.11, aparece una variación escalonada de la conductancia que se puede entender como la creación sucesiva de nuevos filamentos conductores completos que unen los dos electrodos del memristor.

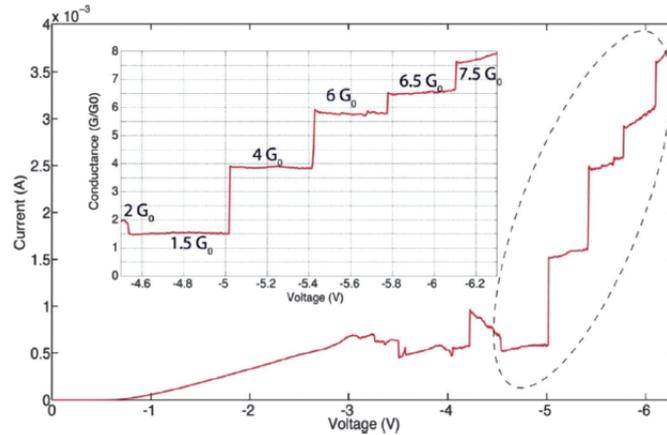


Figura 1.11: Característica I-V y cuantización de la conductancia de un memristor SiOx durante el proceso de formación de CFs. [10]

1.4.2. Memristor de barrera

Al igual que en los memristores de conducción por filamentos (o del memristor HP descrito en la Sección 1.2) estos memristores poseen una estructura de sandwich con una capa aislante entre dos electrodos. Vamos a describir los dos tipos más habituales.

❖ Los memristores de barrera tipo Schottky:

Por lo general, mientras que en una de las superficies que separa el metal del óxido de estos dispositivos existe un contacto óhmico, en la otra superficie se forma la denominada barrera Schottky. Al igual que ocurre en un diodo Schottky la barrera está determinada por la distribución del potencial, es decir, por la región de vaciamiento (los portadores de carga de dicha zona han sido desplazados normalmente debido al campo eléctrico existente). Por lo tanto, el cambio de estado en estos dispositivos dependerá de la altura y la anchura de esta barrera.

Uno de los mecanismos propuestos para explicar este cambio es la redistribución de las vacantes de oxígeno (o de los aniones O^-). Si a un memristor cuyo aislante es un óxido de tipo n le aplicamos un voltaje negativo al electrodo de la izquierda, como se muestra en la Figura 1.12, las vacantes se irán acumulando en la superficie entre el electrodo y el aislante incrementando la densidad donadora (que en el caso del óxido de tipo n son las vacantes) de esta región y por consiguiente disminuyendo la región de agotamiento. Esto provoca el cambio de HRS a LRS. Si, por el contrario, aplicáramos un voltaje positivo a dicho electrodo las vacantes migrarían en sentido contrario disminuyendo la densidad donadora y alcanzando así el estado HRS. Con óxidos de tipo p el proceso se explica de forma análoga.

Otro mecanismo que produciría un cambio en la altura de la barrera de Schottky es la aparición de “trampas” para los portadores de carga en la capa aislante.

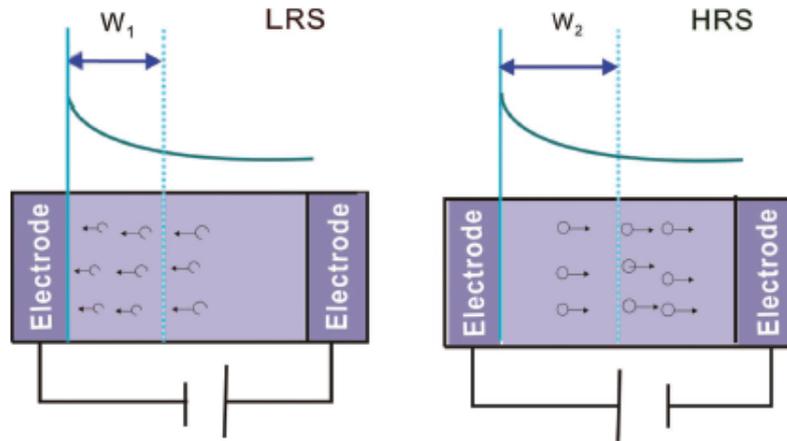


Figura 1.12: Cambios de la barrera Schottky al redistribuirse las vacantes de oxígeno. Se han denotado por W_1 y W_2 al grosor de la región de agotamiento en cada caso. [10]

❖ Los **memristores de barrera tipo unión de túnel ferroeléctrico:**

Estos memristores están formados por una capa ultrafina de ferroeléctrico (grosor de unos nanómetros) entre los dos electrodos. En ellos existe el denominado gigante túnel de electrorresistencia cuya altura y anchura varía según el voltaje aplicado sobre los dos electrodos, lo que puede provocar el cambio entre los estados HRS y LRS. Generalmente, la barrera ferroeléctrica posee distinta altura según la polarización, como se observa en la siguiente imagen, por lo que un cambio en la polaridad del voltaje puede producir el cambio de estado.

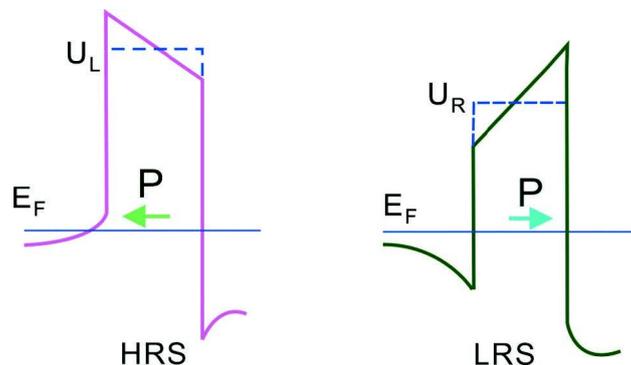


Figura 1.13: Asimetría de la barrera ferroeléctrica en función del signo de la polarización aplicada. [10]

Capítulo 2

Modelos matemáticos

En este capítulo se describen distintas modelizaciones matemáticas con las que se ha tratado de describir el funcionamiento de los memristores de conducción por filamentos, prestando especial interés en el proceso de cambio de estado. En primer lugar se describen las variables de estado para luego detallar el modelo de deriva límite, un modelo sencillo que nos servirá como introducción, para posteriormente describir el modelo de Enrique Miranda, descrito en su artículo [11], siendo actualmente uno de los más aceptado por la comunidad científica.

2.1. Variables de estado

En primer lugar, como introdujimos en la Sección 1.1, la relación entre el voltaje y la corriente para cualquier memristor se puede expresar como

$$V = M(x_1, x_2, \dots, x_n)I, \quad (2.1)$$

donde M es la memristencia y x_i son las denominadas variables de estado. Estas variables están determinadas a partir de n ecuaciones diferenciales, conocidas como ecuaciones de estado, cuya expresión general es

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, I) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

En los memristores en los que existe una única variable de estado ésta suele ser la carga eléctrica (q). Estos memristores reciben el nombre de memristores ideales y en ellos la ecuación de estado es

$$\frac{dx(t)}{dt} = I(t). \quad (2.3)$$

De forma más genérica, las ecuaciones de estado según Chua (ver [10]) se pueden expresar como

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^m (a_j x^j) + \sum_{k=1}^n (b_k I^k) + \sum_{f,g=1}^{p,r} (c_{fg} x^f I^g), \quad (2.4)$$

siendo a_j, b_k y c_{fg} parámetros que varían según el modelo y el ciclo de histéresis del memristor.

Ejemplo 2.1. Si elegimos los parámetros

$$\begin{cases} a_j = 0 & j = 1, 2, \dots, m \\ b_1 = 1, \quad b_k = 0 & k = 2, 3, \dots, n \\ c_{fg} = 0 & f = 1, 2, \dots, p \quad g = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

entonces tendremos un memristor ideal.

Ejemplo 2.2. Si elegimos los parámetros

$$\begin{cases} a_j = 0 & j = 1, 2, \dots, m \\ b_1 = \mu \frac{R_{ON}}{D^2}, \quad b_k = 0 & k = 2, 3, \dots, n \\ c_{fg} = 0 & f = 1, 2, \dots, p \quad g = 1, 2, \dots, r \end{cases}$$

conseguimos la ecuación de estado

$$\frac{dx}{dt} = \mu \frac{R_{ON}}{D^2} I \quad (2.5)$$

que se obtendrá en el modelo lineal (2.8).

2.2. Modelo lineal

Para predecir el comportamiento de una gran variedad de memristores Williams expone el denominado **modelo de deriva límite** (Ver [10] p.738). Como se explicó en el memristor de HP (Sección 1.2), en la capa aislante de un memristor se pueden distinguir dos zonas, la conductora y la resistiva o aislante. La conductora es una región rica en vacantes de oxígeno o en átomos metálicos (dependiendo del tipo de memristor), mientras que la región resistiva tiene ausencia o escasez de estos portadores de carga. El espesor de estas regiones varía según el voltaje aplicado, lo que implica el cambio en la resistencia total del dispositivo. Si denotamos por D al espesor de la capa intermedia entre los dos electrodos en su totalidad y w al de la región conductora, podremos calcular la resistencia total del memristor como si tuvieramos una combinación en serie de dos resistencias (R_{ON} y R_{OFF}) a las que le aplicamos la ley de Ohm.

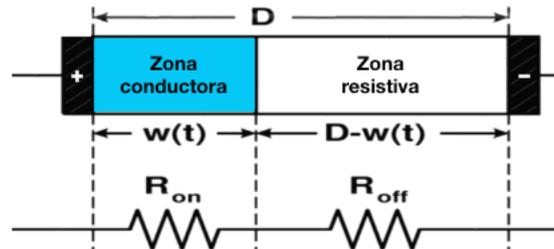


Figura 2.1: Equivalencia entre un memristor y dos resistencias en serie.

Luego tenemos

$$V(t) = [R_{ON}\lambda(t) + R_{OFF}(1 - \lambda(t))]I(t). \quad (2.6)$$

En verdad, R_{ON} y R_{OFF} corresponden a la resistencia mínima y máxima, respectivamente, que puede tener el memristor. En (2.6) hemos introducido la variable de estado $\lambda(t) = w(t)/D \in [0, 1]$. Esta variable es muy importante pues nos indica el estado interno en el que se encuentra el memristor. Los casos límites son

$$\begin{cases} \text{Si } \lambda(t) = 0 \Rightarrow R_{total} = R_{OFF} \\ \text{Si } \lambda(t) = 1 \Rightarrow R_{total} = R_{ON} \end{cases} \quad (2.7)$$

Es decir, cuando λ sea cero la capa intermedia será totalmente aislante, no existiendo ningún filamento conductor completo, luego la resistencia del memristor será máxima (estado HRS). Por el contrario, cuando λ sea 1 la capa intermedia será totalmente conductora quedando unidos los dos electrodos del memristor a través de diversos filamentos conductores. En este caso la resistencia total es la mínima posible (estado LRS).

El cambio en la variable de estado viene determinado por la siguiente ecuación

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\mu R_{ON} I(t)}{D^2}, \quad (2.8)$$

que se deduce usando que la velocidad de difusión es $v = \mu E$, donde el campo eléctrico se puede expresar como $E = V/D = R_{ON}I(t)/D$, y sabiendo que

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{1}{D} \frac{dw(t)}{dt}.$$

Esta ecuación es la misma que se obtuvo en el Ejemplo 2.2.

Resolviendo (2.8) se obtiene

$$\lambda(t) = \mu \frac{R_{ON}}{D^2} q(t) \quad (2.9)$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (2.6) conseguimos expresar la resistencia total en función de la carga como

$$R(q) = \frac{V(t)}{I(t)} = \frac{\mu R_{ON}^2 q(t)}{D^2} + R_{OFF} \left(1 - \frac{\mu R_{ON} q(t)}{D^2} \right). \quad (2.10)$$

En los casos en los que $R_{ON} \ll R_{OFF}$ se suele utilizar la aproximación

$$R(q) \approx R_{OFF} \left(1 - \frac{\mu R_{ON} q(t)}{D^2} \right). \quad (2.11)$$

Este modelo también es conocido por **modelo de deriva lineal** debido a la utilización de un valor constante para la movilidad de los iones (μ). Con esto, se supone que la velocidad en la anchura de la región conductora es linealmente proporcional a la corriente.

Sin embargo, la suposición anterior no es correcta de forma general, lo que suele conllevar errores en los cálculos, sobre todo en las zonas límite. A nivel nanoscópico, unos pequeños voltios de diferencia pueden generar un campo eléctrico muy intenso lo que implica que el transporte iónico no sea lineal. Una solución para este problema podría ser la utilización de una función ventana, $F_p(\lambda)$, que multiplicando a la ecuación (2.8) pudiera tener en cuenta esta falta de linealidad.

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\mu R_{ON} I(t)}{D^2} F_p(\lambda(t)) \quad (2.12)$$

La función ventana utilizada por Williams en [10] es

$$F_p(\lambda) = \frac{w(D-w)}{D^2} = \lambda(t)(1-\lambda(t)), \quad (2.13)$$

la cual verifica que $F_p(0) = 0$ y $F_p(1) = 0$, lo que nos indica el movimiento no lineal de los iones en los límites.

Este modelo ha tenido gran éxito para describir diversos memristores como por ejemplo los contruidos a base de Al/TiO_x/W, Pt/TiO_x/TiO_y/Pt o Pt/α-IGZO/Pt, como se explica en [10] p.739.

Otra función ventana que se ha utilizado con éxito, según [7] p.622, es

$$F_p(\lambda) = 1 - (2\lambda - 1)^{2p}, \quad (2.14)$$

donde p es un número entero con el que se marca la no linealidad.

2.3. Modelo de memdiodo de E. Miranda

Este modelo, desarrollado por Enrique Miranda en [11], trata de explicar el comportamiento de los memristores intentando evitar los problemas que surgían en el modelo lineal, que no se pueden esquivar ni siquiera cambiando la función ventana. Entre los principales problemas estaba el asumir que el transporte de los iones es lineal. Por este motivo, E. Miranda utiliza una aproximación totalmente distinta. En vez de considerar una relación estrictamente lineal entre I-V, independientemente del estado del memristor, utiliza una modelo más complejo en el que, teniendo que encontrar unos parámetros adecuados, consigue incluir un cambio en la relación I-V siendo lineal-exponencial cuando el memristor está en estado de alta resistencia (HRS) y lineal cuando está en estado de baja resistencia (LRS).

Las dos ecuaciones fundamentales en las que se basa el modelo de memdiodo son

$$\text{i)} \quad I = \text{sgn}(V)[(\alpha R)^{-1}W\{\alpha R I_0(\lambda)e^{\alpha(|V|+RI_0(\lambda))}\} - I_0(\lambda)] \quad (2.15)$$

donde $W :=$ es la función de Lambert,
 $\text{sgn} :=$ nos indica el signo,
 α, R y $I_0 :=$ son parámetros del modelo (variables de estado),
 y

$$\text{ii)} \quad \frac{d\lambda}{dt} = g(\lambda)\text{max}(0, \dot{V}) + h(\lambda)\text{min}(0, \dot{V}) \quad (2.16)$$

donde $\lambda :=$ es la variable de estado interno del memristor ($\lambda \in (0, 1)$),
 $\dot{V} :=$ es la derivada temporal de V ,
 g y $h :=$ son funciones que describiremos más adelante.

Para deducir la primera ecuación (2.15) Miranda asemeja el memristor a un diodo conectado en serie con una resistencia R . Esto justifica el nombre del modelo (memdiodo= diodo con memoria). Como sabemos que la corriente de un diodo se puede expresar como

$$I = I_0 (e^{\alpha V_D} - 1), \quad (2.17)$$

y al ponerlo en serie con una resistencia R el voltaje aplicado se va a repartir entre ambos dispositivos, $V = V_D + V_R = V_D + IR$, entonces se deduce que

$$I = I_0(\lambda) (e^{\alpha(V-IR)} - 1), \quad (2.18)$$

donde α es un parámetro que depende del mecanismo de conducción específico que se produzca en el memristor. Estos mecanismos normalmente son el efecto túnel, la barrera Schottky, el puente electroquímico o el punto de contacto cuántico. Además, Miranda incluye la siguiente ecuación con la que trata de explicar cómo cambia la amplitud del diodo I_0 en función del estado interno del memristor

$$I_0(\lambda) = I_{0max}\lambda + I_{0min}(1 - \lambda). \quad (2.19)$$

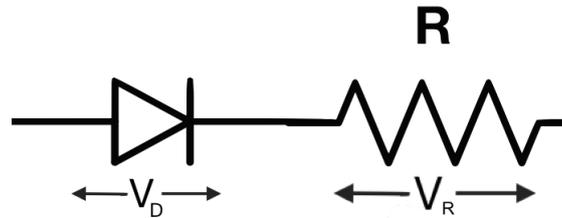


Figura 2.2: Equivalencia de un memristor y un diodo en serie con una resistencia.

Al resolver la ecuación (2.18) obtenemos

$$I = (\alpha R)^{-1} W\{\alpha R I_0(\lambda) e^{\alpha(V+RI_0(\lambda))}\} - I_0(\lambda) \quad (2.20)$$

donde sólo nos servirá la rama positiva de la solución, pues es su forma la que se asemeja al comportamiento observado experimentalmente en los memristores. Como se necesita una solución que sirva independientemente del voltaje aplicado, sea positivo o negativo, se incluye el signo y el valor absoluto del voltaje en la expresión (2.20). Con esto, se llega a la primera ecuación fundamental (2.15)

$$I = \text{sgn}(V)[(\alpha R)^{-1} W\{\alpha R I_0(\lambda) e^{\alpha(|V|+RI_0(\lambda))}\} - I_0(\lambda)]$$

Cabe mencionar que esta ecuación verifica la primera huella de identidad de los memristor: los ciclos de histéresis resultantes son pellizcados pues $I(V = 0) = 0$. Además, en la práctica, la función de Lambert W no se evalúa directamente sino que se usa una aproximación con la que simplificar los complejos cálculos. La más utilizada es la de Hermite-Padé cuya expresión es

$$W(x) \approx \ln(1+x) \left(1 - \frac{\ln(1+\ln(1+x))}{2+\ln(1+x)} \right). \quad (2.21)$$

Para deducir la segunda ecuación fundamental de este modelo, (2.16), es necesario asumir que la conducción se realiza a través de múltiples canales paralelos (filamentos conductores o defectos) que atraviesan la capa aislante del memristor. Miranda describe la conducción a través de estos canales como si existiera en ellos una distribución gaussiana del voltaje,

$$f(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^\pm}} e^{-\frac{(V-V^\pm)^2}{2\sigma^\pm{}^2}}, \quad (2.22)$$

siendo V^\pm y $\sigma^\pm{}^2$ el voltaje medio y la varianza en la creación/destrucción de los canales.

Por lo tanto, los procesos de formación y destrucción de canales, después de varias aproximaciones que se encuentran detalladas en [11], se expresan con las curvas

$$\Gamma^\pm(V) = [1 + e^{-\eta^\pm(V-V^\pm)}]^{-1}, \quad (2.23)$$

donde $\eta^\pm = 1,702/\sigma^\pm$.

Este parámetro, η^\pm , describe la rapidez del cambio de estado tanto en la formación (Γ^+) como en la destrucción (Γ^-) de los canales, como se puede observar en la Figura 2.3. Además, su signo nos indica el sentido, positivo (en sentido de las agujas del reloj) o negativo (en sentido contrario), de los ciclos de histéresis. Adicionalmente, haciendo la inversa de (2.23) obtenemos

$$\Gamma^{\pm-1}(\lambda) = V^\pm + \frac{1}{\eta^\pm} \ln \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right). \quad (2.24)$$

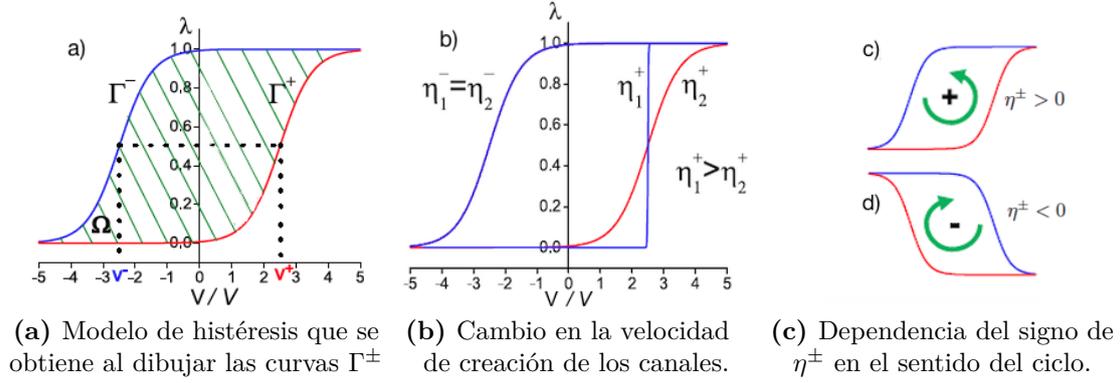


Figura 2.3: Ciclos de histéresis que representan el cambio de la variable de estado interno del memristor λ en función del voltaje. [11]

En el caso de que $\lambda \in \Gamma^+$, se puede deducir la ecuación dinámica de creación de los múltiples canales simplemente derivando la ecuación (2.23), con lo que se obtiene

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\Gamma^+}{dt} = \frac{d\Gamma^+}{dV} \frac{dV}{dt} = \lambda(1 - \lambda)\eta^+ \dot{V}. \quad (2.25)$$

Es de destacar que en este modelo la función ventana de Strukov $\lambda(1 - \lambda)$ aparece directamente en la ecuación de estado, cosa que no ocurría en el modelo lineal donde había que añadirla de manera artificiosa.

Por otra parte, denotando por Ω a la región acotada por las curvas Γ^+ y Γ^- , Miranda añade la siguiente hipótesis sobre cualquier punto en el interior de dicha región

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad \forall S \in \Omega. \quad (2.26)$$

Con esta hipótesis afirma que no se genera ni se destruye ningún canal mientras el voltaje aplicado al memristor no sea lo suficientemente grande como para lograr alcanzar los límites de la región, es decir, alcanzar las curvas Γ^+ o Γ^- con las que se describe los cambios de estado. Esta condición es muy importante pues en base a ella se puede justificar la propiedad de memoria que poseen los memristores. Esta propiedad consiste en mantener constante el valor del estado interno del memristor λ , incluso cuando el voltaje se anule completamente, hasta que no se aplique un voltaje suficientemente elevado con el que variar dicho estado. Por este motivo, en la Figura 2.4 aparecen líneas horizontales que, partiendo y terminando en las curvas Γ^+ y Γ^- , describen los distintos valores constantes que va tomando λ en la región Ω .

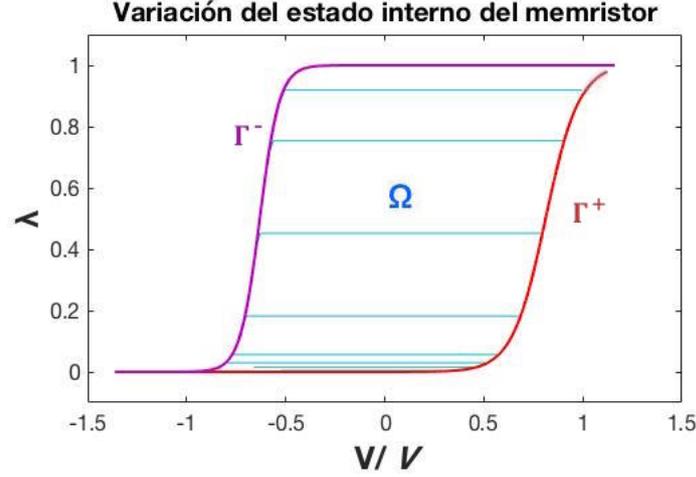


Figura 2.4: Variación del estado interno del memristor según el modelo de memdiodo donde se muestra la región Ω acotada por las curvas Γ^+ y Γ^- .

Para describir de forma general la ecuación de estado, sin imponer que $\lambda \in \Gamma^+$ como hacíamos anteriormente, Miranda emplea la denominada ecuación diferencial de tipo Duhem

$$\frac{d\lambda}{dt} = g(\lambda)\max(0, \dot{V}) + h(\lambda)\min(0, \dot{V}) \quad (2.27)$$

con

$$\begin{cases} g(\lambda) = \eta^+ \lambda(1 - \lambda)H[V - \Gamma^{+^{-1}}(\lambda)] \\ f(\lambda) = \eta^- \lambda(1 - \lambda)H[\Gamma^{-^{-1}}(\lambda) - V] \end{cases} \quad (2.28)$$

y donde H denota la función escalón de Heaviside definida como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

La ecuación (2.27) corresponde a la segunda ecuación fundamental del modelo de memdiodo. Al incluir en dicha expresión las funciones máximo y mínimo, se consigue incluir la dirección de la señal de entrada aplicada al memristor. Sin embargo, estas funciones generan graves problemas desde un punto de vista matemático pues pueden conllevar, en la mayoría de los casos, a resultados discontinuos, cosa físicamente inexplicable ya que los cambios de estados se entienden como graduales, ya sea por medio de la creación o destrucción de los canales. Para evitar este problema se utiliza, como se explica en [11], la siguiente fórmula recursiva

$$\begin{cases} \lambda_t = \min\{\Gamma^-[V_t], \max\{\lambda_0, \Gamma^+[V_t]\}\} \\ \lambda_0 = \lambda(V(t_0)) \end{cases} \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (2.30)$$

denotando por λ_t y V_t a los valores discretizados de $\lambda(t)$ y $V(t)$ respectivamente. Con esta fórmula se completa las expresiones del modelo de memdiodo.

Capítulo 3

Análisis del modelo de memdiodo (E. Miranda)

En este capítulo analizaremos la validez del modelo de memdiodo de E. Miranda, descrito en el capítulo anterior, aplicándolo a unos datos recopilados previamente en el laboratorio. Con la utilización del programa Matlab e implementando un método para resolver problemas de mínimos cuadrados, seremos capaces de determinar los parámetros desconocidos (variables de estado) del modelo que mejor ajusten a los datos obtenidos experimentalmente. Posteriormente, haremos un análisis de los resultados encontrados.

3.1. Recopilación de datos

El memristor que se utilizará en la parte experimental posee una estructura MIM (metal-aislante-metal) de TiN/Ti/HfO₂/W. Este dispositivo ha sido construido en el Instituto de Microelectrónica de Barcelona (IMB-CNM) donde los electrodos se fabricaron por medio de pulverización catódica por magnetron (magnetron sputtering) y la capa intermedia de 10 nm de espesor de HfO₂ se depositó con la técnica ALD (atomic layer deposition) a 225°C. Una vez colocadas las distintas capas se aplicó la tensión de polarización al electrodo superior, TiN/Ti, quedando el inferior, W, conectado a tierra, siendo el área total resultante del dispositivo de unos 5x5 μm^2 .

Con este dispositivo, en los laboratorios del Departamento de Electricidad y Electrónica de la Universidad de Valladolid (UVA), se procedió a realizar dos experimentos cuyos resultados servirán de base para el análisis que haremos posteriormente en este capítulo. El proceso de recopilación de datos consistió en aplicar dos señales de entrada diferentes, una sinusoidal con amplitud creciente (señal I) en el primer experimento y otra sinusoidal con amplitud decreciente (señal II) en el segundo, al memristor de HfO₂ de 10 nm bipolar durante unos 239.9 s, registrándose en 2400 ocasiones el voltaje y la corriente que atravesaba al memristor

así como el tiempo en el que se tomaba cada dato. Cabe señalar que en el memristor utilizado la conducción de la corriente se entiende que se realiza a través de diversos filamentos conductores (CFs) que se van creando y destruyendo según el voltaje aplicado.

A continuación, se muestran las gráficas experimentales resultantes al aplicar las dos señales de entrada elegidas.

✦ Primer experimento

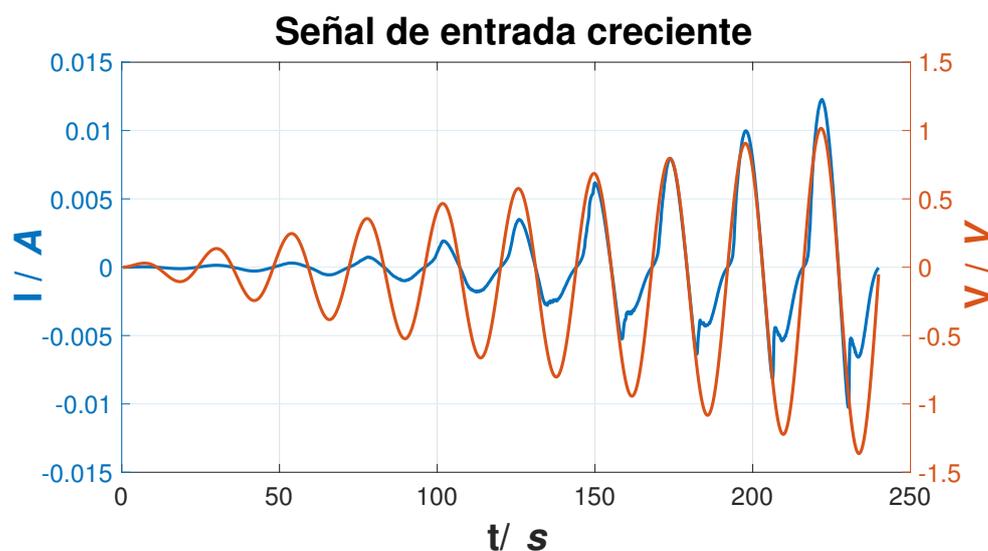


Figura 3.1: Variación del voltaje y la corriente en el memristor durante el transcurso del primer experimento. La señal de entrada es sinusoidal creciente.

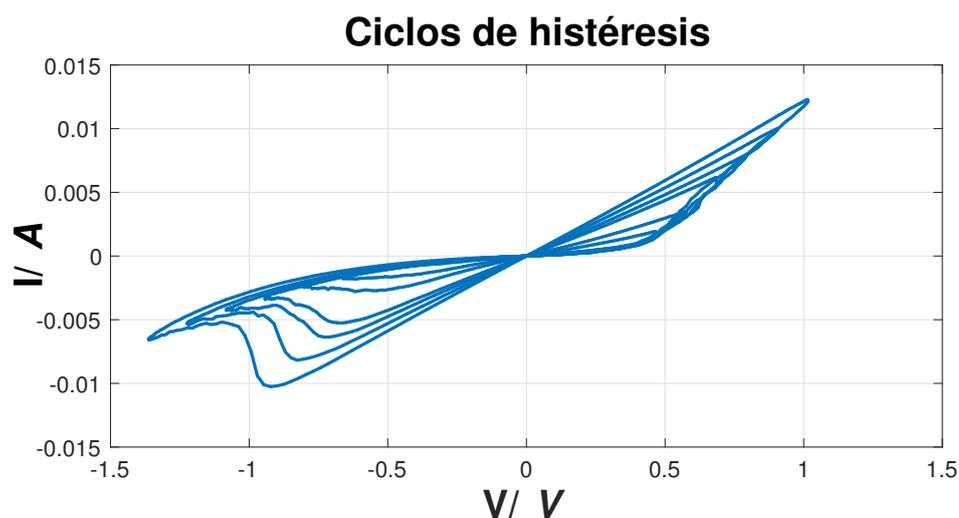


Figura 3.2: Relación Voltaje-Corriente experimental al aplicar la señal I.

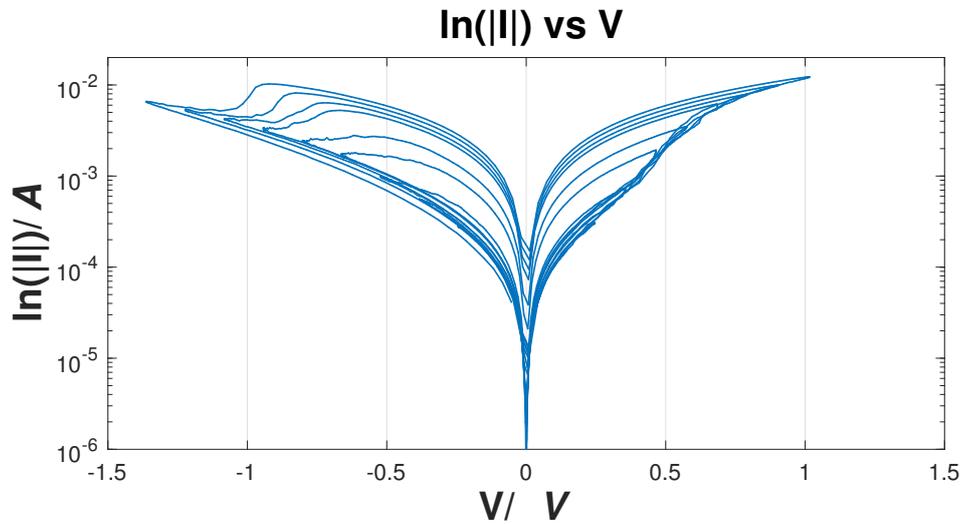


Figura 3.3: Relación Voltaje-Corriente experimental al aplicar la señal I tomando la corriente en escala logarítmica.

✦ Segundo experimento

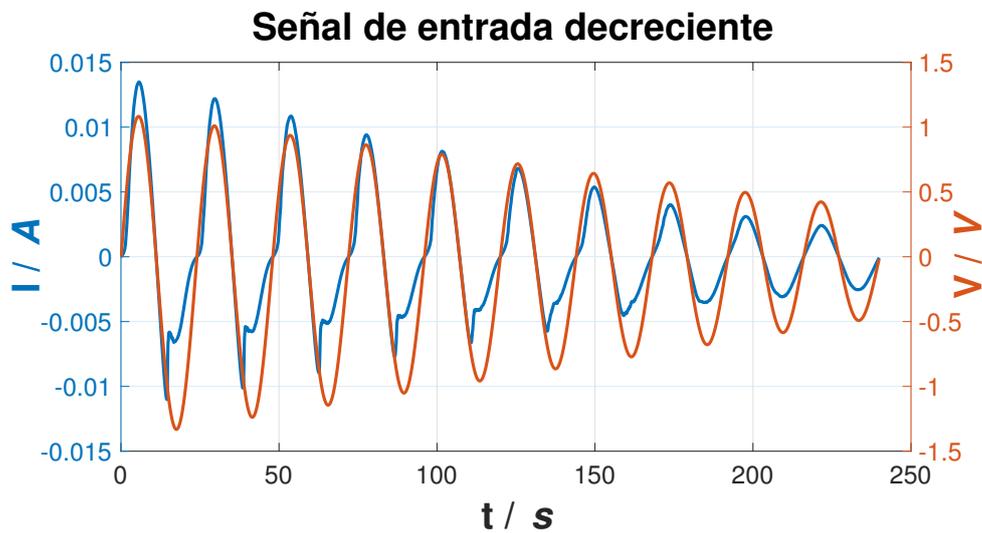


Figura 3.4: Variación del voltaje y la corriente en el memristor durante el transcurso del segundo experimento con señal de entrada sinusoidal decreciente.

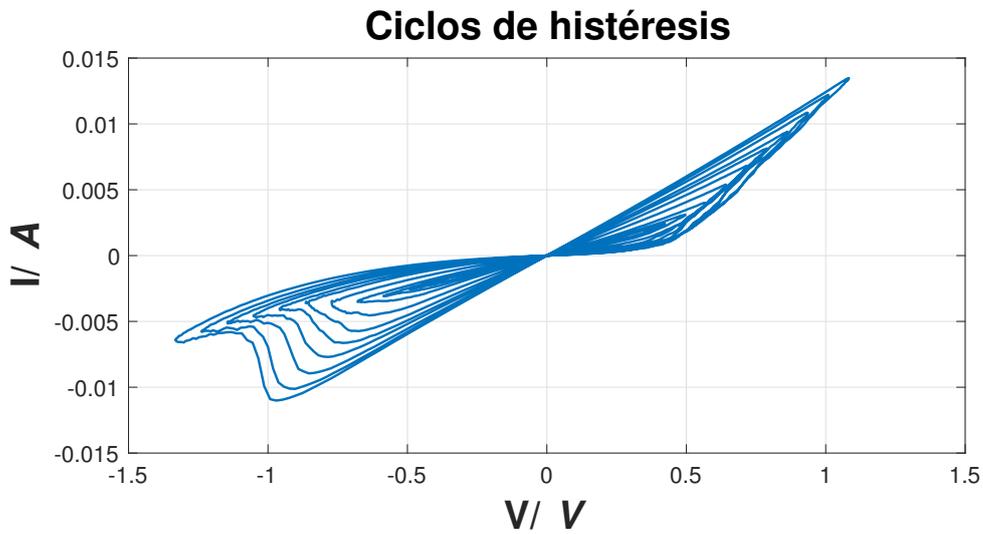


Figura 3.5: Relación Voltaje-Corriente experimental al aplicar la señal II.

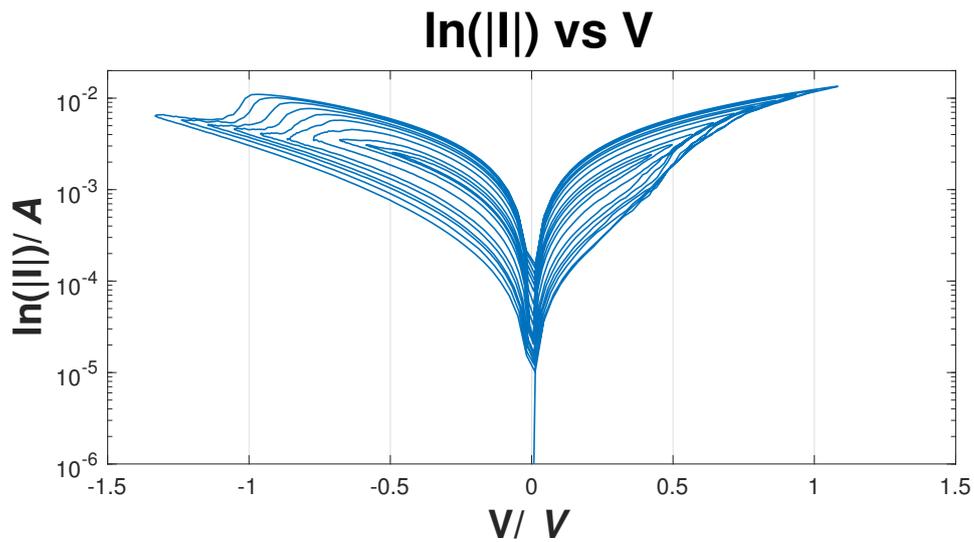


Figura 3.6: Relación Voltaje-Corriente experimental al aplicar la señal II tomando la corriente en escala logarítmica.

3.2. Verificación del modelo

En este apartado, comprobaremos la validez que tiene el modelo de memdiado de E. Miranda para deducir la corriente que atraviesa al memristor a partir del voltaje experimental, comparando los resultados proporcionados por el modelo con los obtenidos experimentalmente. Por lo tanto, en primer lugar es necesario calcular la corriente según el modelo. Este proceso se realizará a través del código

del Programa 1 que aparece en el Apéndice A. Sin embargo, para poder ejecutarlo es necesario determinar previamente las variables de estado que intervienen en el modelo, parámetros cuyo valores son desconocidos, además de fijar la condición inicial del estado interno del memristor λ_0 . Esta condición inicial la consideraremos en los dos experimentos igual a cero, es decir, que inicialmente el memristor se encuentra en estado HRS.

De las ecuaciones (2.15)-(2.30) con las que se definió en la Sección 2.3 el modelo de memdiado, se concluye que existen 8 variables de estado que hay que determinar. Estas variables, junto con la notación empleada en los distintos programas de Matlab del Apéndice A, son las siguientes:

- El voltaje medio de creación $V^+ \rightarrow$ se denota por **vp**.
- La velocidad de creación $\eta^+ \rightarrow$ se denota por **np**.
- El voltaje medio de destrucción $V^- \rightarrow$ se denota por **vm**.
- La velocidad de destrucción $\eta^- \rightarrow$ se denota por **nm**.
- La resistencia del memristor $R \rightarrow$ se denota por **R**.
- El parámetro de determinación del mecanismo de conducción física específico del memristor utilizado $\alpha \rightarrow$ se denota por **a**.
- La corriente máxima que atraviesa al memristor \rightarrow se denota por **imax**.
- La corriente mínima que atraviesa al memristor \rightarrow se denota por **imin**.

Como hemos dicho, estas variables que se deben imponer inicialmente son desconocidas, por lo que el siguiente proceso a realizar es encontrar los valores que minimizen las discrepancias con los resultados experimentales. Esto es equivalente a resolver un problema no lineal de mínimos cuadrados cuya función objetivo es

$$f(x) = \|r(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{2400} r_i^2(x), \quad (3.1)$$

con

$$r_i(x) = I_{exp}(i) - I_{modelo}(i), \quad (3.2)$$

donde $I_{exp}(i)$ es el i -ésimo valor de la corriente recopilado durante un experimento e $I_{modelo}(i)$ es la componente i -ésima resultante al ejecutar la función de Matlab $I(\mathbf{np}, \mathbf{nm}, \mathbf{vp}, \mathbf{vm}, \mathbf{a}, \mathbf{R}, \mathbf{imax}, \mathbf{imin}, \mathbf{V})$ que aparece en el Programa 1.

Es decir, debemos minimizar la suma de los cuadrados de los residuos $r_i(x)$, que son las diferencias entre las corrientes para cada tiempo de registro, en un problema de gran dimensión.

Existen distintos métodos con los que se podría resolver un problema no lineal de mínimos cuadrados. Los más utilizados son el método de Gauss-Newton amortiguado, el método de Levenberg-Marquardt o el método de Quasi-Newton, los cuales se encuentran perfectamente descritos en libros como [12] y [13] y han sido estudiados en detalle en el TFG de Matemáticas [14], analizando la robustez y convergencia así como las ventajas e inconvenientes que presenta la utilización de cada método según el problema que se quiera ajustar. En el problema concreto que ahora estamos estudiando, ajustar el modelo de memdiado a unas curvas experimentales obtenidas en el laboratorio, hemos decidido utilizar el método de Levenberg-Marquardt debido a la complejidad de las fórmulas que presenta el modelo así como la exactitud de los valores que precisamos. Además, este método posee la ventaja de que su algoritmo se encuentra entre las herramientas preestablecidas de Matlab. Por lo tanto, este procedimiento de determinación de los mejores parámetros, con los que conseguir reducir al máximo las discrepancias, dentro de los límites de tolerancia que hemos impuesto, se encuentra descrito en el Programa 2 del Apéndice A. En él, será necesario introducir ocho valores iniciales como variables de estado para empezar el proceso de búsqueda. Cuanto más próximos sean estos valores iniciales a los buscados, más rápido y preciso será el resultado obtenido.

Los resultados encontrados tras ejecutar varias veces el Programa 2, mejorando los parámetros iniciales introducidos, se han recogido en la siguiente tabla.

	$V+/V$	$\eta+/V^{-1}$	$V-/V$	$\eta-/V^{-1}$
Experimento I	0,81196652	11,92156687	-0,63099599	20,28290385
Experimento II	0,99697151	8,05603987	-0,42929402	10,05393047

	α/V^{-1}	R/Ω	I_{max}/A	I_{min}/A
Experimento I	4,07713109	74,76791879	0,01486760	0,00020335
Experimento II	5,91649173	74,50115922	0,02166648	0,00004179

Tabla 3.1: Los mejores valores determinados, mediante el Programa 2, para las variables de estado del modelo de memdiado.

Cabe señalar que los valores de los parámetros recogidos en la Tabla 3.1 podrían ser mejorados ligeramente, ya que en el Programa 2 se han impuesto una serie de criterios de tolerancia, como el número máximo de iteraciones o la diferencia

de paso entre iteraciones consecutivas, que determinan cuando acaba el bucle de búsqueda y se podrían utilizar otras combinaciones.

Los errores obtenidos utilizando los parámetros de la Tabla 3.1 son:

- En el experimento I:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{absoluto} &= 0,00082834 \text{ A} \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ A} \\ \varepsilon_{relativo} &= 0,03097019 \approx 3\%\end{aligned}$$

- En el experimento II:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{absoluto} &= 0,00127891 \text{ A} \approx 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ A} \\ \varepsilon_{relativo} &= 0,02463943 \approx 2\%\end{aligned}$$

Estos error han sido calculados, de la misma forma que en los problemas de mínimos cuadrados, empleando la norma euclídea

$$\varepsilon_{absoluto} = \|r(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^m [I_{exp}(i) - I_{modelo}(i)]^2, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{relativo} = \frac{\varepsilon_{absoluto}}{\|I_{exp}\|_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^m [I_{exp}(i) - I_{modelo}(i)]^2}{\|I_{exp}\|_2^2}, \quad (3.4)$$

donde se ha denotado por $\|I_{exp}\|_2^2$ a la norma euclídea del vector que almacena los valores registrados de la corriente eléctrica experimentalmente observada ($\|I_{exp}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m [I_{exp}(i)]^2$) y m es igual al número de datos recopilados, es decir, $m = 2400$.

A priori podemos decir que todos los parámetros encontrados, recogidos en la Tabla 3.1, poseen valores dentro de los márgenes esperados si seguimos el razonamiento físico de E. Miranda. Sin embargo, para poder hacer un mejor análisis de los resultados será necesaria una representación gráfica donde se pueda visualizar tanto lo conseguido aplicando los valores de la Tabla 3.2 a los parámetros del modelo de memdiado, como los resultados reales obtenidos en el laboratorio. Todo esto también se consigue a través del Programa 2 del Apéndice A cuyas gráficas resultantes se muestran en las Figuras 3.7 y 3.8.

✦ Primer experimento

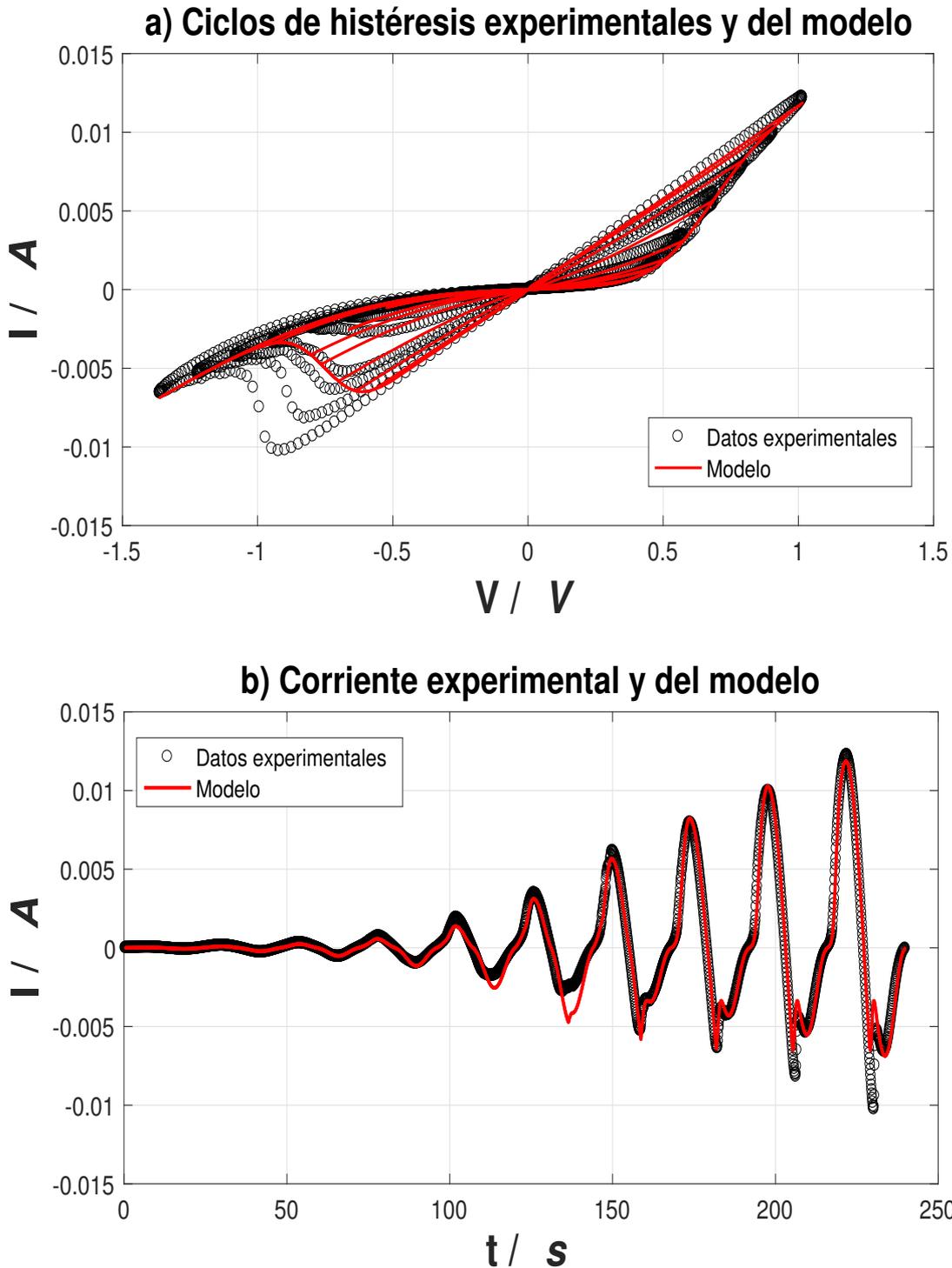


Figura 3.7: Comparativa de los datos recopilados en el primer experimento con los obtenidos mediante el modelo de memdiado de E. Miranda utilizando los parámetros de la Tabla 3.1 correspondientes a dicho experimento.

✦ Segundo experimento

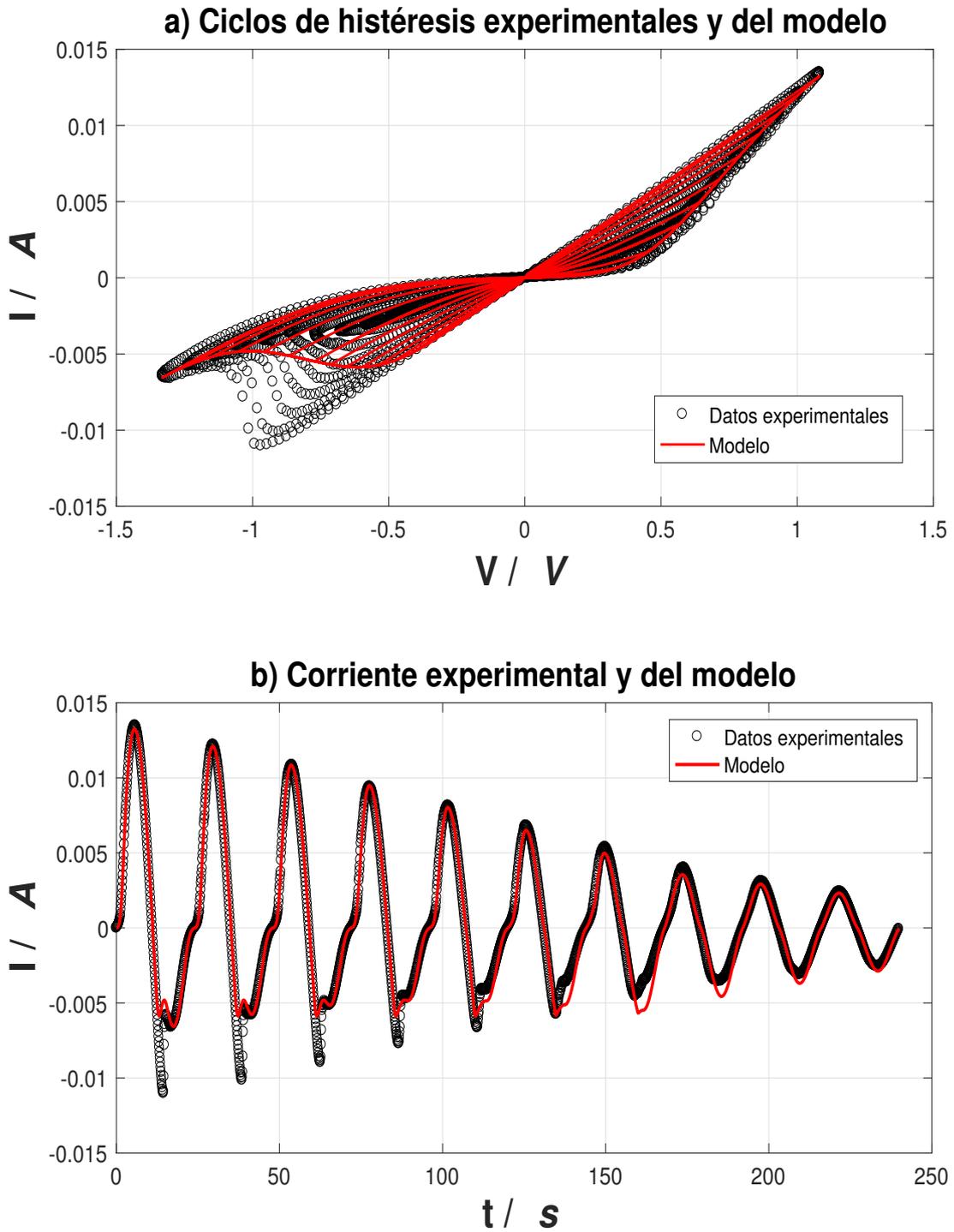


Figura 3.8: Comparativa de los datos recopilados en el segundo experimento con los obtenidos mediante el modelo de memdiado de E. Miranda utilizando los parámetros de la Tabla 3.1 correspondientes a dicho experimento.

Aunque de forma general los resultados obtenidos utilizando el modelo de Miranda son bastante buenos, sobre todo en el proceso de formación de filamentos (set process), existen serias discrepancias en el proceso de destrucción (reset process), pues en los períodos de mayor amplitud no se consiguen alcanzar los valores más negativos de la corriente. Además, los valores de los parámetros obtenidos, expuestos en la Tabla 3.1, no nos indican ningún tipo de similitud entre ambos experimentos, resultado sorprendente considerando que se ha utilizado el mismo memristor por lo que cabría esperar que al menos los parámetros α y R fueran iguales en ambos casos. Por este motivo, realizamos una pequeña modificación del Programa 1 imponiendo valores fijos para dichos parámetros, iguales al promedio de los obtenidos en cada experimento (Tabla 3.1) y resolvemos de nuevo los dos problemas de mínimos cuadrados para determinar el valor de las restantes variables de estado. Los parámetros encontrados con esta modificación se recogen en la Tabla 3.2 donde podemos observar que los nuevos valores no difieren mucho de los presentados en la Tabla 3.1.

	V+/V	$\eta+/V^{-1}$	V-/V	$\eta-/V^{-1}$
Experimento I	0,84146960	11,22256015	-0,61213747	19,57182728
Experimento II	0,98199081	8,05358511	-0,44134991	10,05245246

	α/V^{-1}	R/ Ω	I _{max} /A	I _{min} /A
Experimento I	4,99681141	74,63453900	0,01291762	0,00009815
Experimento II	4,99681141	74,63453900	0,02605930	0,00009614

Tabla 3.2: Los mejores valores determinados, mediante el Programa 2, para las variables de estado del modelo de E. Miranda considerando que se está usando el mismo memristor, es decir, que α y R deben ser iguales en los dos experimentos.

Los errores al utilizar estos nuevos parámetros, respecto a lo experimental, son

- En el experimento I:

$$\varepsilon_{absoluto} = 0,00083757A \approx 8 \cdot 10^{-4} A$$

$$\varepsilon_{relativo} = 0,03131555 \approx 3\%$$

- En el experimento II:

$$\varepsilon_{absoluto} = 0,00128920 A \approx 1,3 \cdot 10^{-3} A$$

$$\varepsilon_{relativo} = 0,02483780 \approx 2\%$$

Aunque estos parámetros posean unos errores algo mayores que los obtenidos con los de la Tabla 3.1, los consideraremos más correctos al tener un mayor sentido físico dentro del modelo.

3.3. Conclusiones

En base a los resultados obtenidos en la sección anterior, podemos afirmar que el modelo de memdiado consigue reproducir la estructura de lazos de histéresis típica de los memristores, cumpliendo con la primera huella de identidad descrita en la Sección 1.3 de los denominados lazos estrangulados. Sin embargo, el modelo presenta serias limitaciones a la hora de reproducir las corrientes negativas experimentalmente observadas en los lazos de mayor área. Múltiples estudios, como el realizado en [15], han demostrado que existe una asimetría entre el proceso de formación de canales, que en nuestro caso de memristor bipolar ocurre a corrientes positivas, y el proceso de destrucción de canales, que ocurre a corrientes negativas. Esta asimetría también se puede observar en los datos recopilados en los dos experimentos (Figuras 3.2 y 3.5). Sin embargo, en el modelo de memdiado de E. Miranda no se incluye esta asimetría lo que provoca que aparezcan serias discrepancias con lo experimental, especialmente en la zona de reset, cuando analizamos lazos de distintas áreas a la vez.

Por otra parte, otra limitación que presenta este modelo es que no incluye una dependencia con la frecuencia, impidiendo que se puedan cumplir la segunda y tercera huellas de identidad de los memristores, con las que se afirma que al aumentar la frecuencia los lazos de histéresis se hacen cada vez más estrechos convergiendo a una línea recta (como vimos en la Sección 1.3). En nuestros experimentos hemos utilizado siempre la misma frecuencia, pero en el caso de que la hubiéramos variado, dejando el resto de parámetros externos fijos, los resultados, aunque seguramente serían distintos a los obtenidos en la sección anterior (Figuras 3.7 y 3.8), nunca lograrían reflejar este cambio del área con la frecuencia. Un artículo que estudia esta dependencia es [16] donde se propone la sustitución de λ por una nueva variable de estado interno del memristor, denotada por Λ , en la ecuación (2.19). Esta nueva variable posee una dependencia temporal dada por

$$\tau \frac{d\Lambda}{dt} + \Lambda = \lambda(V), \quad (3.5)$$

donde τ es el tiempo característico de respuesta transitoria.

La solución de la ecuación diferencial (3.5) se puede expresar como

$$\Lambda(t) = e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \left[\int_{t_0}^t \frac{\lambda(V)}{\tau} e^{s/\tau} ds + A \right], \quad (3.6)$$

siendo A la constante dada por la condición inicial $\Lambda(t_0)$.

Otro parámetro que no tiene en cuenta el modelo de memdiodo es la temperatura. Sin embargo, a diferencia de otros parámetros, el efecto que provoca el cambio en la temperatura depende directamente de las particularidades presentes en cada dispositivo, como por ejemplo los materiales que lo constituyen, lo que hace casi imposible incorporar de forma general una relación de dependencia con la temperatura en el modelo matemático. Un estudio que analiza esta dependencia en el caso de utilizar un memristor de HfO_2 se encuentra en [17].

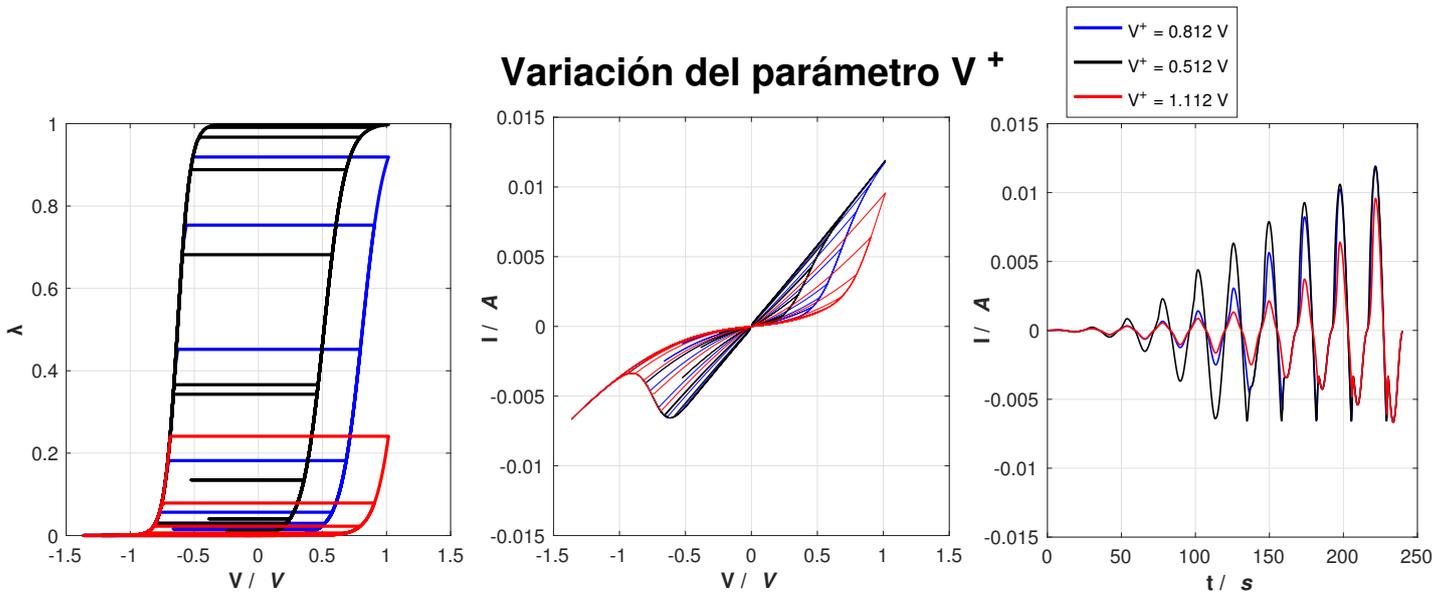
Capítulo 4

Mejora del modelo de memdiado

En este capítulo proponemos una mejora del modelo de memdiado en base a los resultados obtenidos en la Sección 3.2 del capítulo anterior y la realización de una serie de simulaciones, cuyos resultados se recogen en este capítulo, utilizando los códigos de los Programas 1, 2 y 3 que aparecen en el Apéndice A.

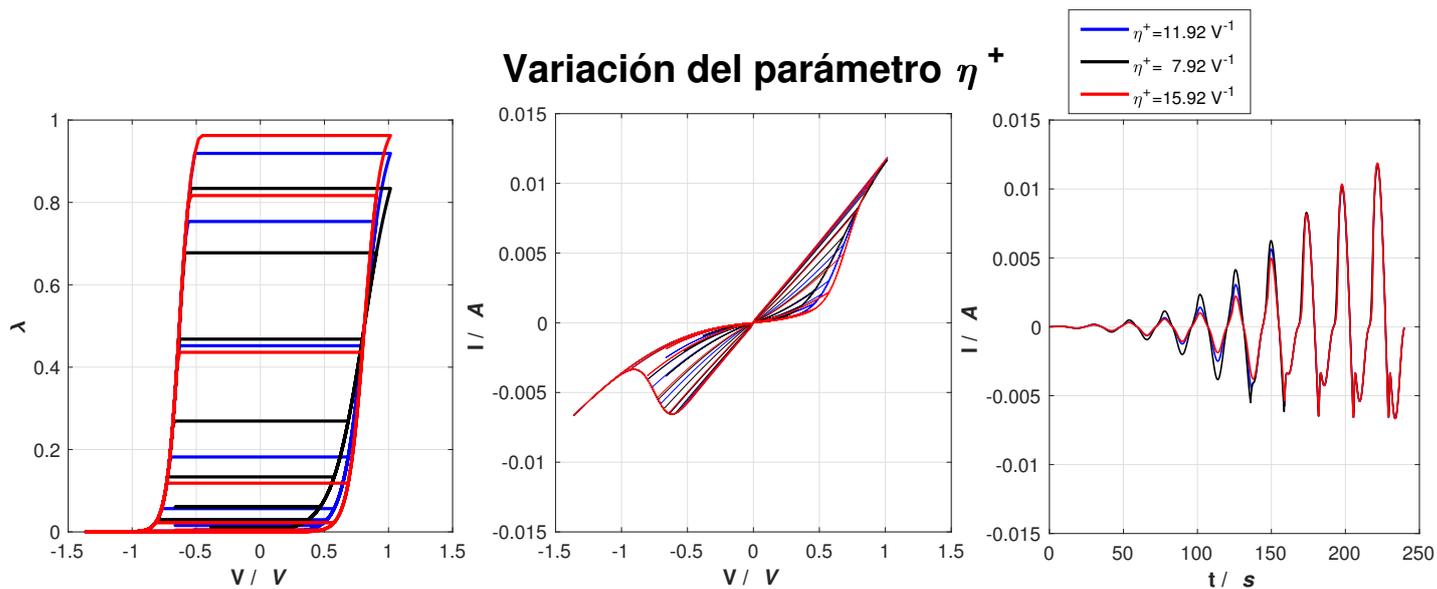
4.1. Influencia de cada variable de estado

En primer lugar, vamos a tratar de analizar más detenidamente qué ocurre en el proceso de destrucción de los filamentos (reset process), pues en él es donde se encontraban las mayores discrepancias (ver Figuras 3.7 y 3.8). Para ello, inicialmente analizamos cómo influye cada uno de los parámetros del modelo de E. Miranda en la variación de los estados internos del memristor así como en la construcción de los lazos de histéresis y en la variación de la corriente con el tiempo.

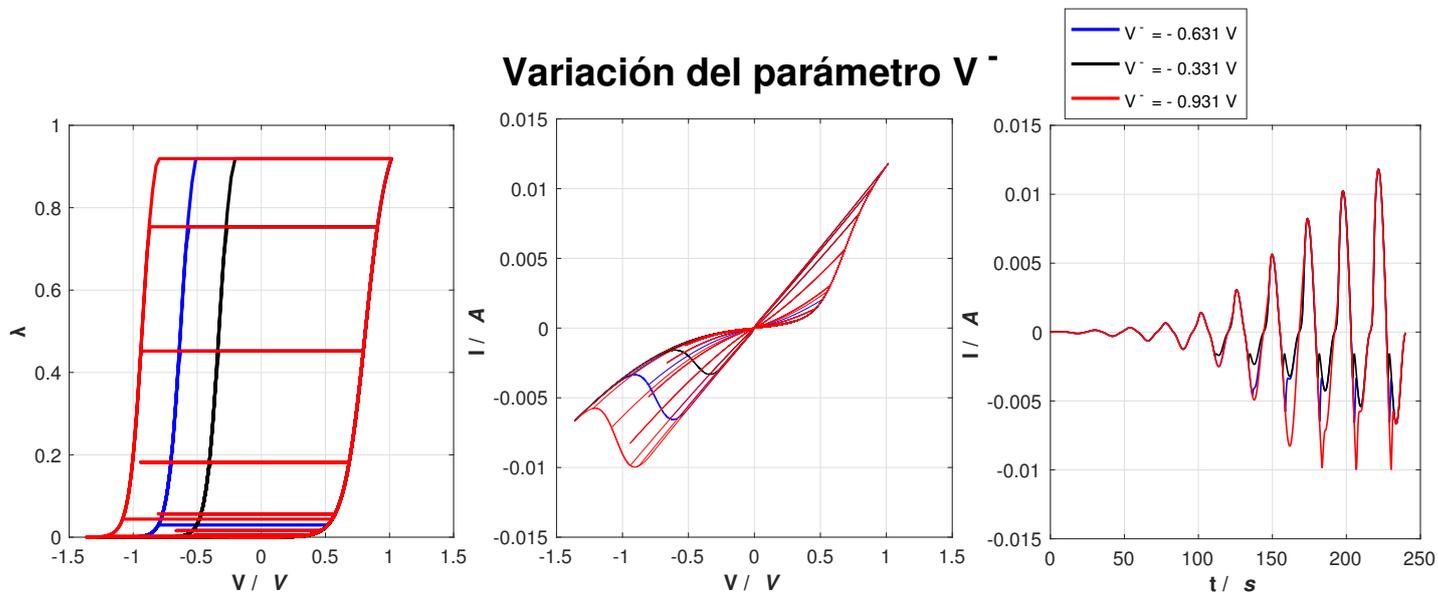


4.1 INFLUENCIA DE CADA VARIABLE DE ESTADO

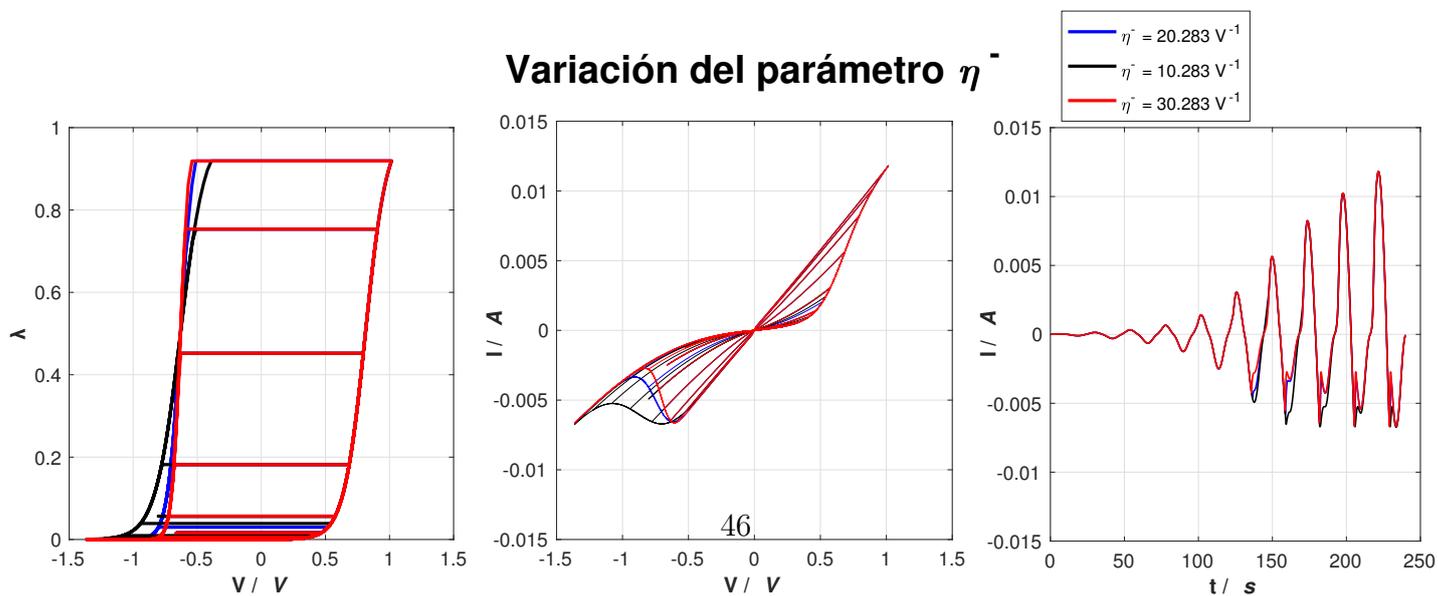
Variación del parámetro η^+



Variación del parámetro V^-

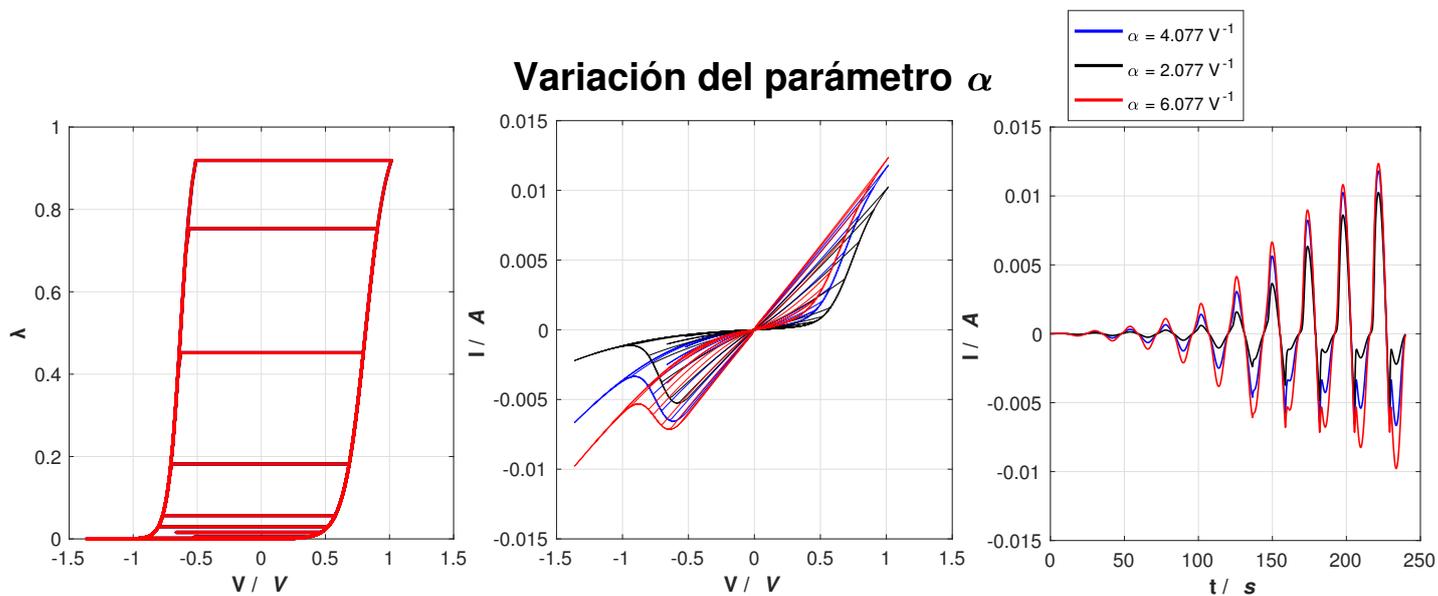


Variación del parámetro η^-

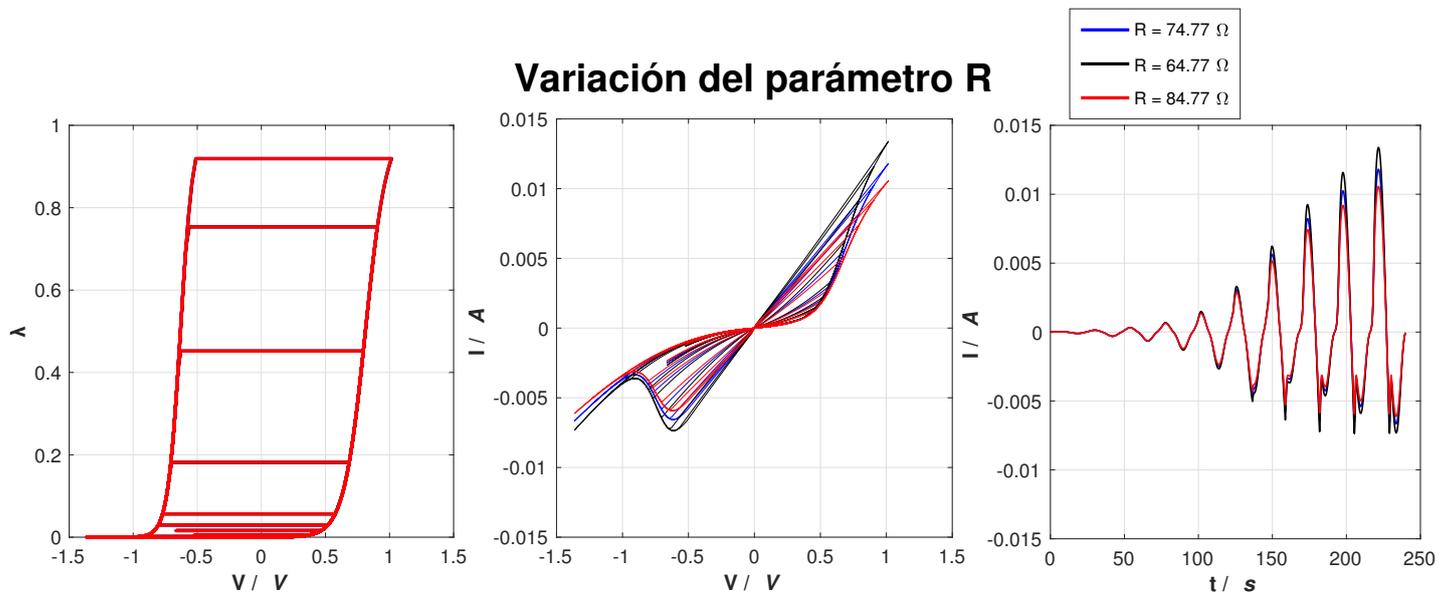


4.1 INFLUENCIA DE CADA VARIABLE DE ESTADO

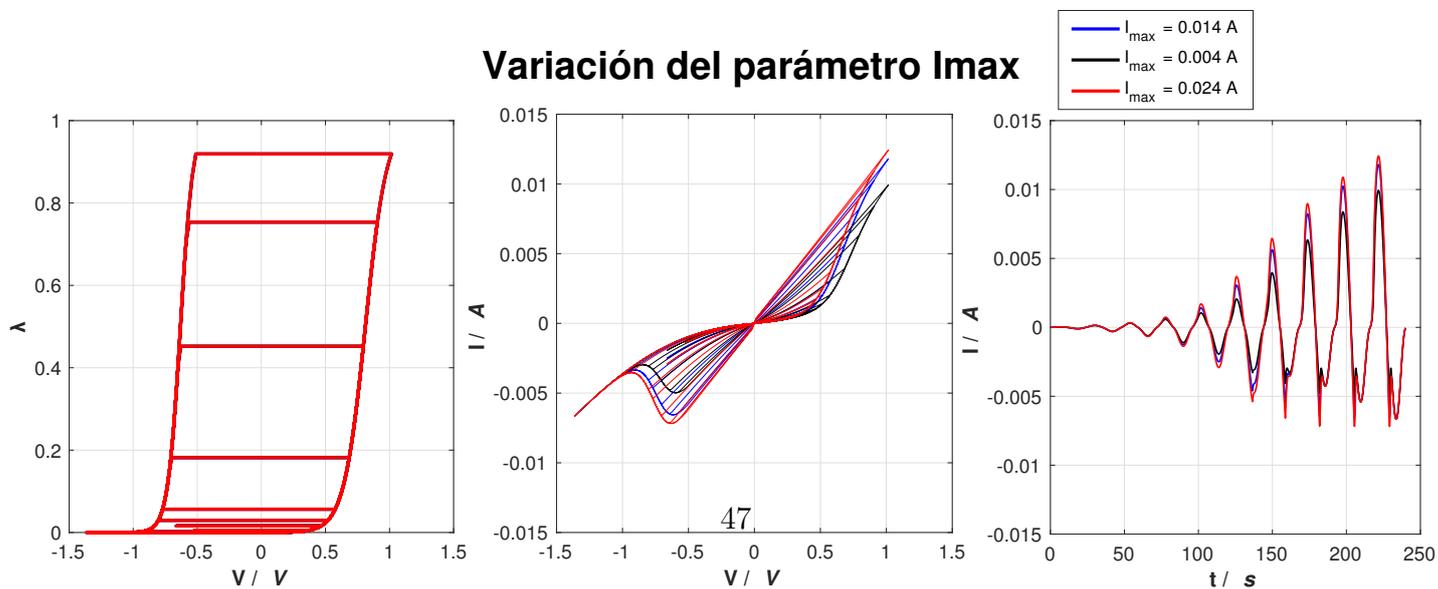
Variación del parámetro α



Variación del parámetro R



Variación del parámetro I_{\max}



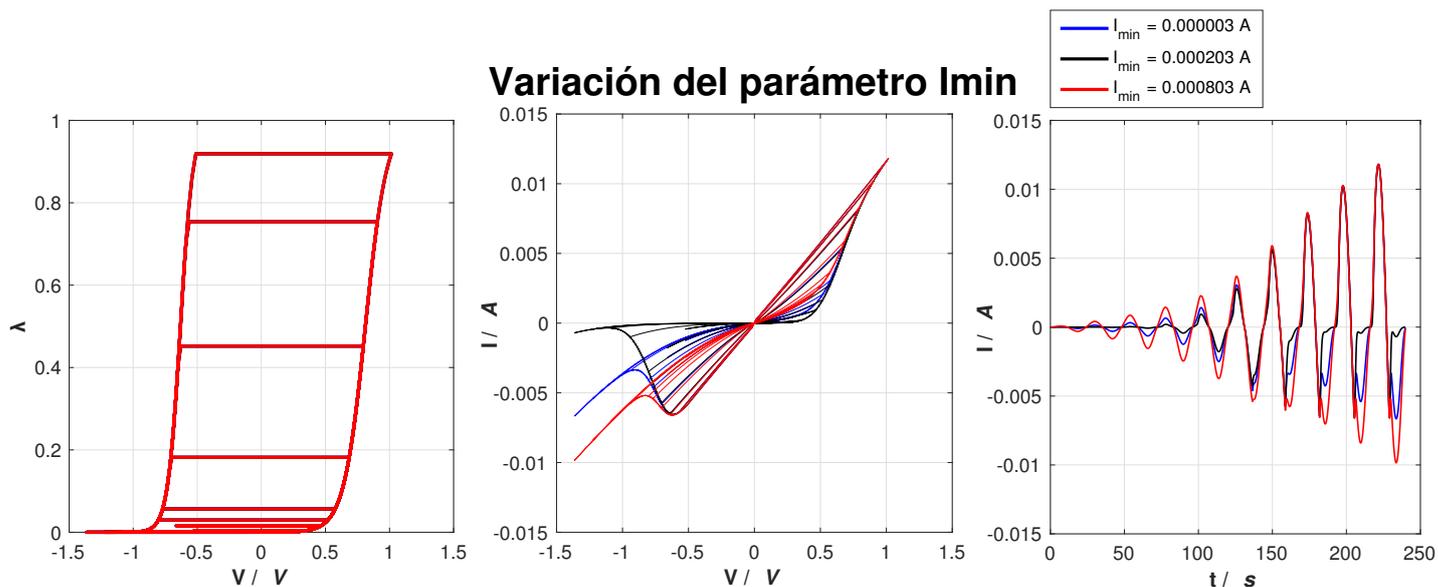


Figura 4.1: Repercusión que tiene la variación de un único parámetro en el modelo de memdiodo de E. Miranda, dejando el resto de parámetros fijos.

De las gráficas anteriores podemos deducir consecuencias muy importantes como por ejemplo que la variación de los valores de las variables de estado α , R , I_{\max} e I_{\min} provocan cambios significativos tanto en el proceso de formación como en el de destrucción, pero no influyen para nada en la variación de los estados internos del memristor. Sin embargo, la variación de los parámetros del voltaje medio (V^{\pm}) y la velocidad de cambio (η^{\pm}) principalmente influyen en uno de los procesos, dejando el otro prácticamente idéntico. Estos también provocan cambios en los estados internos del memristor, siendo lo esperado pues son los parámetros con los que se determinan las curvas de creación (Γ^+) y de destrucción (Γ^-) de los filamentos conductores. Por este motivo, cabría pensar que el principal problema del modelo de E. Miranda está en considerar que los valores de los parámetros V^- y η^- , que son los que realmente influyen en el cambio de la parte reset de los lazos, son constantes.

4.2. Variación de V^- y η^-

Como hemos deducido en la sección anterior, el problema del modelo de memdiodo podría estar en que los valores de V^- y η^- no fueran constantes sino que variaran de alguna forma, permitiendo cambiar su valor según el lazo. Por lo tanto, la cuestión que debemos resolver ahora es descubrir de qué manera varían estos parámetros.

Para estudiar esta variación, determinaremos los parámetros V^- y η^- que mejor ajusten la parte de reset de cada uno de los lazos del primer experimento, dejando el resto de variables de estado fijas. Los resultados obtenidos, tanto gráficos como numéricos, se muestran a continuación donde nos hemos ayudado del Programa 3 que aparece en el Apéndice A para determinar los datos correspondientes a cada uno de los lazos.

	η^- / V^{-1}	V^- / V	$\epsilon_{\text{absoluto}} / A$	$\epsilon_{\text{relativo}}$	λ inicial	λ final
Lazo I	19,57182728	-0,61213747	5,07503E-07	0,10878873	0,00036694	0,00036694
Lazo II	19,57182728	-0,61213747	5,94494E-07	0,03346537	0,00125363	0,00125363
Lazo III	19,57182728	-0,61213747	1,59822E-06	0,02829950	0,00428690	0,00428690
Lazo IV	19,57182728	-0,61213747	4,13766E-05	0,20362633	0,01456641	0,01456641
Lazo V	10,98737685	-0,25819080	2,19514E-06	0,00482295	0,04832097	0,00250722
Lazo VI	16,42838009	-0,55214292	3,20452E-06	0,00291919	0,14850682	0,00162517
Lazo VII	15,05932783	-0,59719126	4,69553E-06	0,00294558	0,37464066	0,00066521
Lazo VIII	21,51026358	-0,75630730	9,58087E-06	0,00404111	0,67296861	0,00006514
Lazo IX	33,33582031	-0,91477854	1,39928E-05	0,00409497	0,87606118	0,00004423

Tabla 4.1: Parámetros η^- y V^- que mejor ajustan a cada lazo tomando únicamente los voltajes negativos y dejando fijos el resto de parámetros con los siguiente valores: $\eta^+ = 11,22256015 V^{-1}$, $V^+ = 0,84146960 V$, $\alpha = 4,99681141 V^{-1}$, $R = 74,63453900 \Omega$, $I_{\text{max}} = 0,01291762 A$, $I_{\text{min}} = 9,815 \cdot 10^{-5} A$. También se incluyen los errores absolutos y relativos así como los estados internos que alcanza el memristor tanto al inicio como al final de cada lazo.

En base a los resultados obtenidos, cabe señalar que en los cuatro primeros lazos, al ser tan bajos los voltajes aplicados, no se consigue destruir ningún canal (filamento conductor) pues no se logra alcanzar la curva de cambio de estado Γ^- . Esto se puede deducir fijándose en el valor del estado interno del memristor λ al inicio y al final de cada lazo, recogido en la Tabla 4.1. Por este motivo, en estos lazos los valores de η^- y V^- no van a influir en el ajuste, siendo los valores registrados en la Tabla 4.1 los que se habían impuesto como parámetros iniciales en el Programa 2. Estos parámetros iniciales corresponden a los determinados al analizar todos los lazos a la vez, recogidos en la Tabla 3.2. Por este motivo, los resultados relevantes serán los obtenidos a partir del lazo V.

A continuación mostraremos, en las Figuras 4.2 y 4.3, las gráficas resultantes de aplicar los valores de los parámetros de la Tabla 4.1 al modelo de memristor para cada uno de los lazos. Estas se construyen con ayuda del Programa 1.

Parte reset de los lazos de histéresis del Experimento I

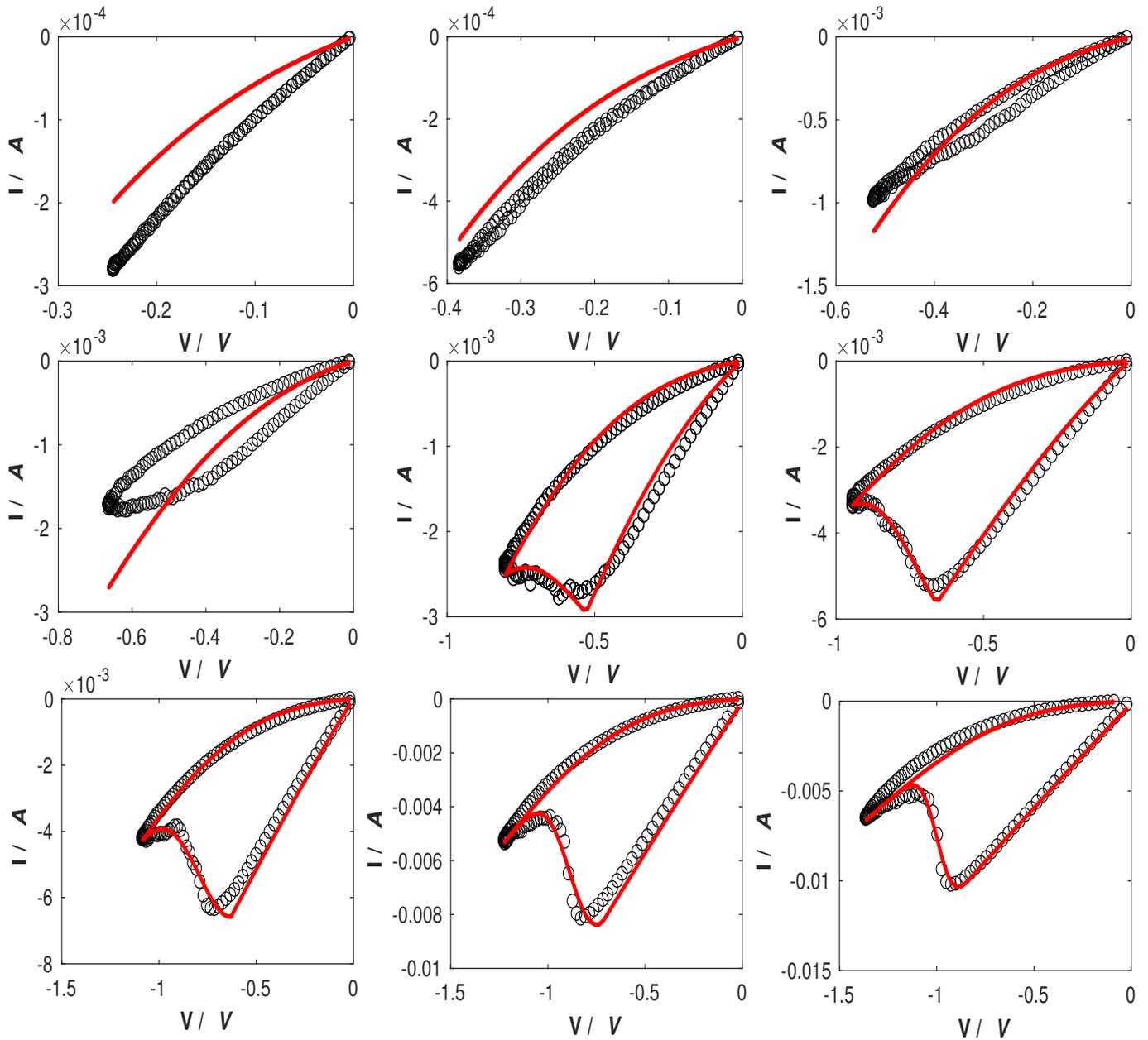


Figura 4.2: Ajustes del proceso de destrucción de filamentos conductores (reset process) para cada uno de los lazos de histéresis obtenidos en el primer experimento. Para realizar estos ajustes se ha utilizado el Programa 1 introduciendo los parámetros de la Tabla 4.1.

Corriente negativas de cada lazo en el Experimento I

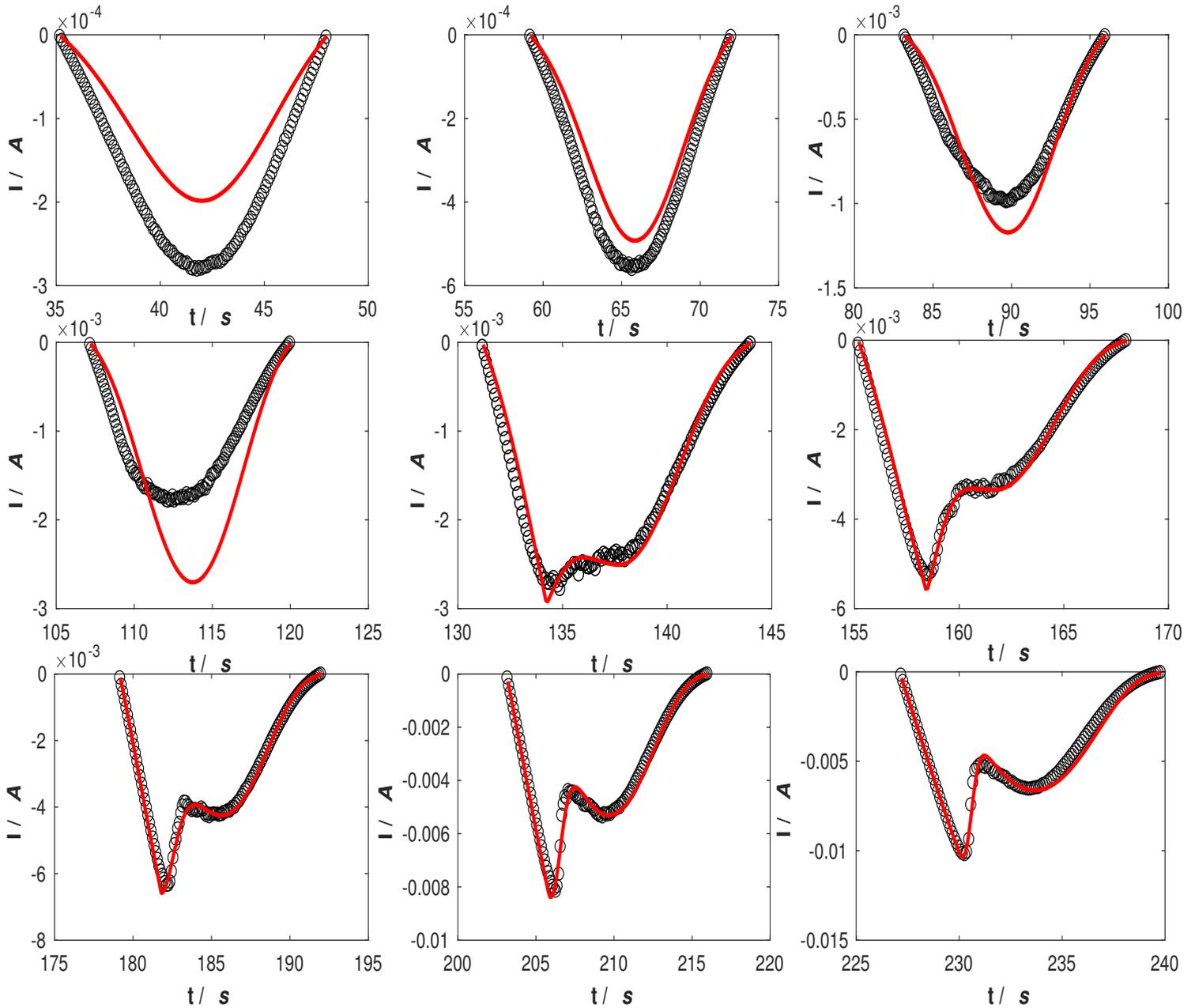


Figura 4.3: Ajustes de las corrientes negativas presentes en cada uno de los lazos obtenidos en el primer experimento. Para realizar estos ajustes se ha utilizado el Programa 1 introduciendo los parámetros de la Tabla 4.1.

De esta forma, analizando uno a uno los lazos de histéresis, el ajuste utilizando el modelo de memdiado mejora considerablemente con respecto al realizado usando los datos recogidos de todos los lazos a la vez, pese a que las primeras gráficas

presentan mayores diferencias visuales debido a las corrientes extremadamente pequeñas que se ajustan. Luego esto nos lleva a confirmar que el modelo de memdiado de E. Miranda es bastante fiable a la hora de ajustar cada lazo de histéresis de forma individual y el problema se encuentra cuando se analizan todos los lazos a la vez usando valores fijos para los parámetros V^- y η^- , independientemente del lazo.

4.3. Propuesta de mejora

Finalmente, en base a los resultados obtenidos en la sección anterior, Tabla 4.1, podemos afirmar que los parámetros V^- y η^- no son constantes sino que van variando, presumiblemente con una dependencia lineal con el tiempo. Por este motivo, la mejora que proponemos en este TFG se basa en sustituir en el modelo de memdiado de E. Miranda lo siguiente

$$\begin{aligned} V^- &= cte \xrightarrow{\text{se reemplazar por}} V^-(t) = a \cdot \frac{t}{170} + b \\ \eta^- &= cte \xrightarrow{\text{se reemplazar por}} \eta^-(t) = c \cdot \frac{t}{170} + d \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde t es el tiempo experimental y a, b, c y d son los nuevos parámetros del modelo, es decir, se añaden dos nuevas variables de estado respecto al modelo original.

Esto, aunque supone un aumento en la complejidad del modelo (pues ahora tenemos 10 variables de estado), conlleva una disminución considerable de los errores con respecto a lo experimental como se muestra a continuación donde, gracias a la modificación (4.1) implementada en los Programas 1 y 2, se han obtenido los siguientes resultados.

	V^+ / V	η^+ / V^{-1}	V^- / V		η^- / V^{-1}	
			a	b	c	d
Experimento I	0,86691655	9,27145544	-0,77446125	0,17571045	5,75920481	12,51818560
Experimento II	0,90882294	7,28666691	0,52233506	-1,00256653	-13,88075740	27,15588748

	α / V^{-1}	R / Ω	I_{max} / A	I_{min} / A	$\epsilon_{absoluto} / A$	$\epsilon_{relativo}$
Experimento I	4,41891680	74,39639720	0,01610119	0,00013260	0,00008978	0,00335681
Experimento II	3,67531689	71,99456387	0,02092493	0,00027620	0,00016135	0,00310847

Tabla 4.2: Parámetros del modelo determinados al resolver un nuevo problema de mínimos cuadrados incorporando la propuesta de mejora (4.1) al modelo de memdiado de E. Miranda.

La representación gráfica de los resultados obtenidos con la mejora (4.1) se muestran a continuación.

✦ Primer experimento

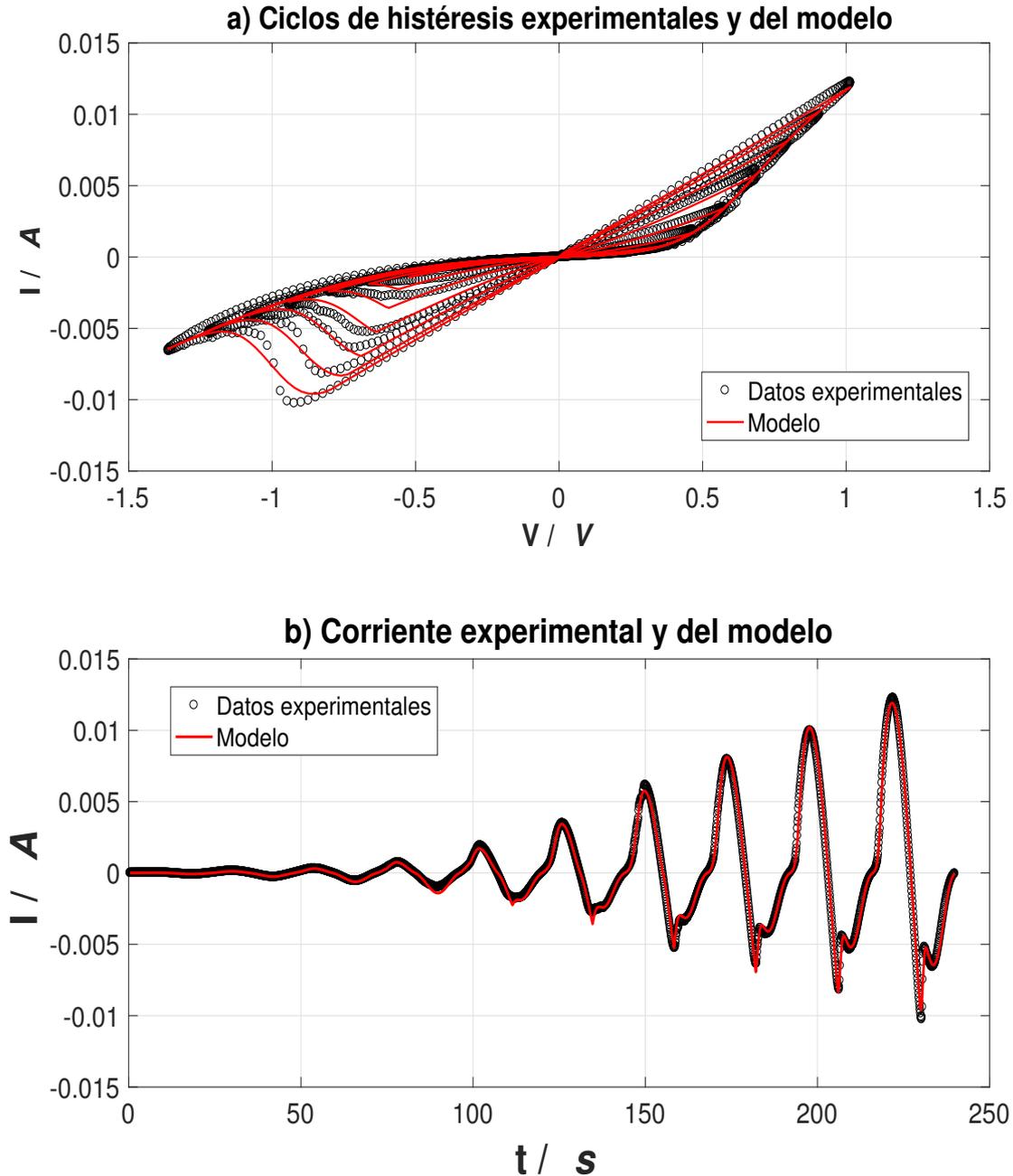


Figura 4.4: Comparativa de los datos recopilados en el primer experimento con los obtenidos mediante el modelo mejorado (que incorpora en el modelo de mendiado la condición (4.1)) utilizando los parámetros de la Tabla 4.2 correspondientes a dicho experimento.

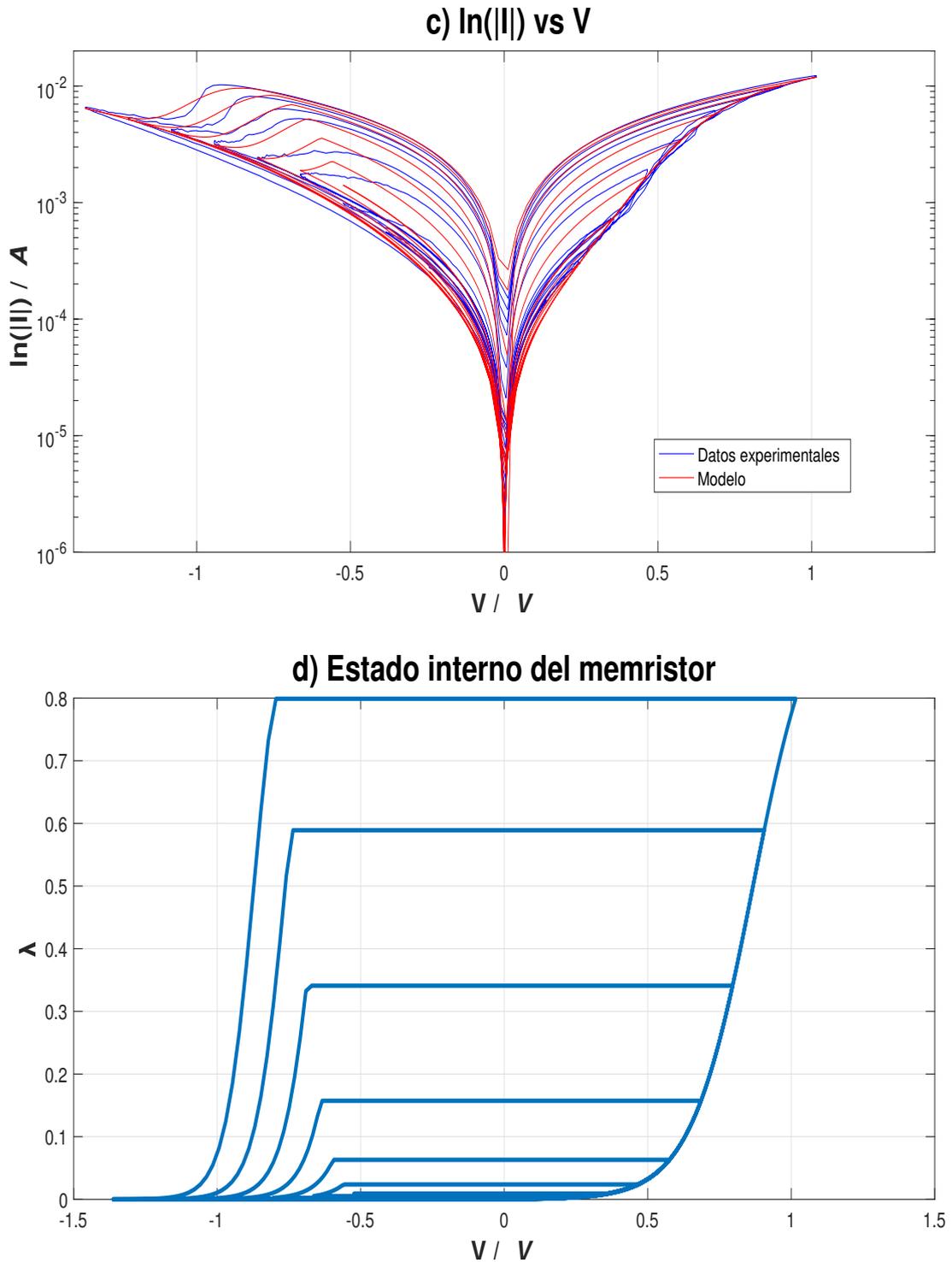


Figura 4.5: Representación gráfica de la corriente en función del voltaje, en escala logarítmica, así como de la variación del estado interno del memristor λ utilizando el modelo mejorado con los parámetros recogidos en la Tabla 4.2 correspondientes al primer experimento.

✦ Segundo experimento

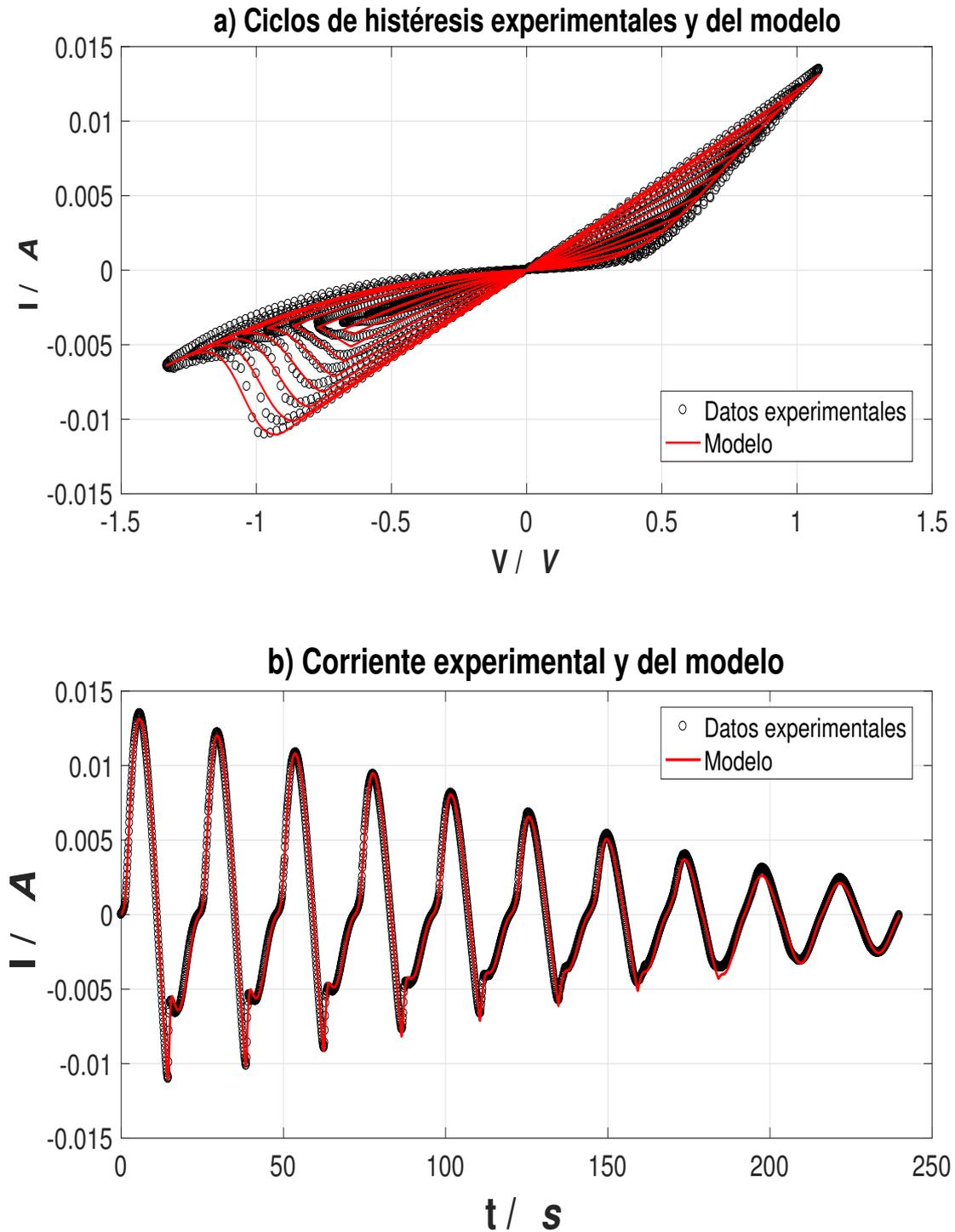


Figura 4.6: Comparativa de los datos recopilados en el segundo experimento con los obtenidos mediante el modelo mejorado (que incorpora en el modelo de memdiado la condición (4.1)) utilizando los parámetros de la Tabla 4.2 correspondientes a dicho experimento.

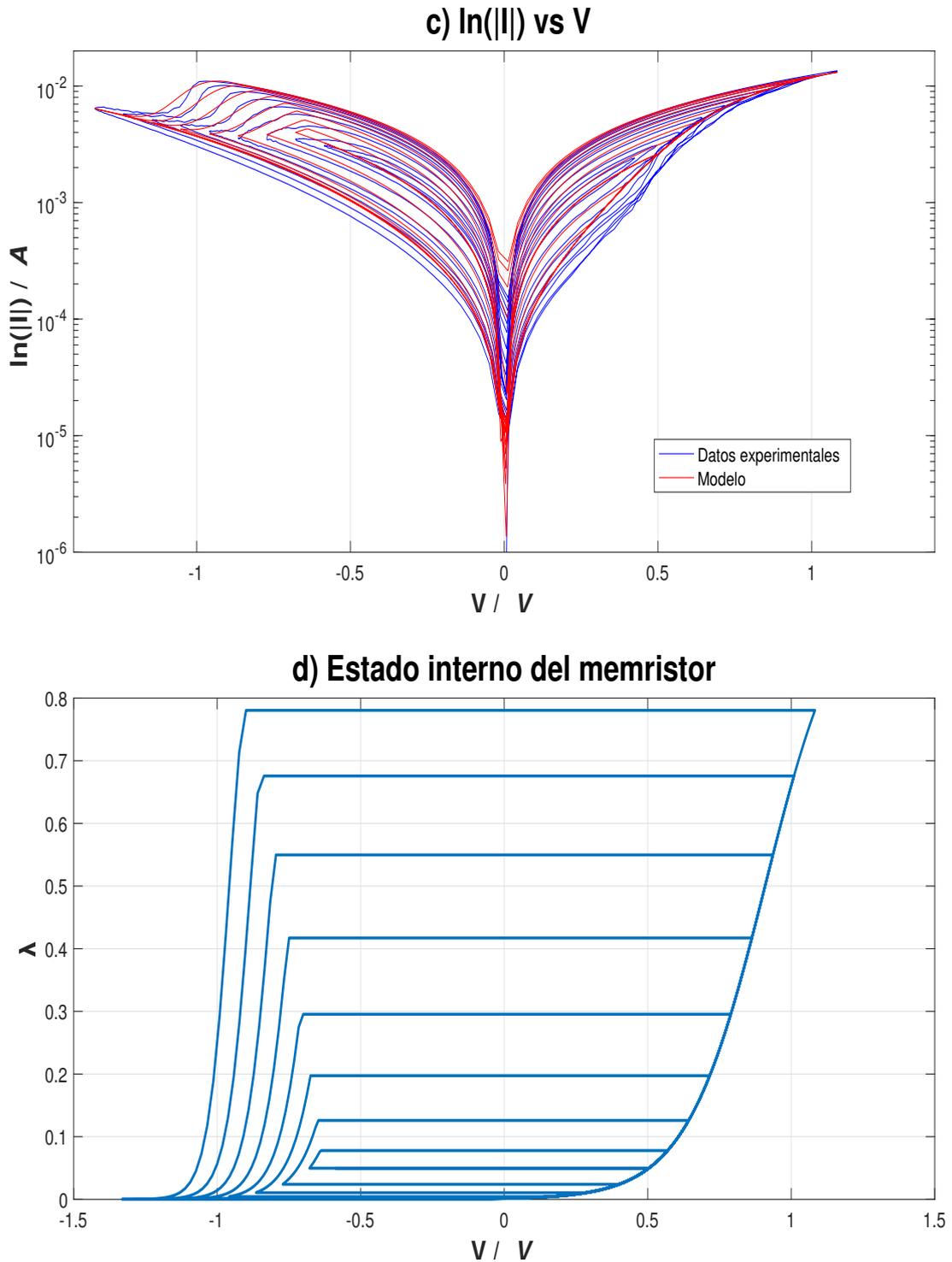


Figura 4.7: Representación gráfica de la corriente en función del voltaje, en escala logarítmica, así como de la variación del estado interno del memristor λ utilizando el modelo mejorado con los parámetros recogidos en la Tabla 4.2 correspondientes al segundo experimento.

Los errores resultantes al aplicar al modelo de memdiado la mejora (4.1), y así obtener los parámetros de la Tabla 4.2, son:

- En el experimento I:

$$\varepsilon_{absoluto} = 0,00008978A \approx 9 \cdot 10^{-5} A$$

$$\varepsilon_{relativo} = 0,00335681 \approx 0,3\%$$

- En el experimento II:

$$\varepsilon_{absoluto} = 0,00016135 A \approx 1,6 \cdot 10^{-4} A$$

$$\varepsilon_{relativo} = 0,00310847 \approx 0,3\%$$

Si comparamos estos errores con los obtenidos al utilizar el modelo de memdiado en su forma original (errores Capítulo 3) vemos que se han reducido en un 90 %. Esto nos confirma que realmente aplicando (4.1) se consigue una mejora considerable del modelo, como también se puede observar claramente a través de las gráficas de las Figuras 4.5-4.7.

Por otra parte, igual que se razonó en el capítulo anterior, se pueden buscar en este modelo mejorado los parámetros tales que se obtengan los mismos valores para α y R en los dos experimentos, cosa razonable pues se utilizó el mismo memristor en ambos casos. Para conseguir esto, modificamos el Programa 2 dejando fijos los valores para estos dos parámetros, siendo iguales al promedio de los obtenidos en la Tabla 4.2. Haciendo estas modificaciones se obtienen los siguientes resultados.

	$V+ / V$	$\eta+ / V^{-1}$	$V- / V$		$\eta- / V^{-1}$	
			a	b	c	d
Experimento I	0,82707180	9,71805881	-0,86560176	0,24887442	19,61163725	0,76592833
Experimento II	1,09540754	5,97237783	0,45338456	-0,86395425	-1,60014251	15,06622143

	α / V^{-1}	R / Ω	I_{max} / A	I_{min} / A	$\varepsilon_{absoluto} / A$	$\varepsilon_{relativo}$
Experimento I	4,04711685	73,19548054	0,01405695	0,00018230	0,00010320	0,00385840
Experimento II	4,04711685	73,19548054	0,03955008	0,00016176	0,00016726	0,00322241

Tabla 4.3: Los mejores valores determinados, mediante una pequeña variación del Programa 2, para las variables de estado presentes en el modelo mejorado considerando que se está usando el mismo memristor, es decir, que α y R deben ser iguales en los dos experimentos.

Los errores resultantes de usar los parámetros de la Tabla 4.3 son:

- En el experimento I:

$$\varepsilon_{absoluto} = 0,00010320A \approx 1,0 \cdot 10^{-4} A$$

$$\varepsilon_{relativo} = 0,00385840 \approx 0,4\%$$

- En el experimento II:

$$\varepsilon_{absoluto} = 0,00016726 A \approx 1,7 \cdot 10^{-4} A$$

$$\varepsilon_{relativo} = 0,00322241 \approx 0,3\%$$

Aunque estos valores para las variables de estado posean errores algo mayores que los obtenidos sin fijar ningún parámetros (Tabla 4.2), los consideraremos más correctos al tener un mayor sentido físico dentro del modelo. Además, es destacable que la mayoría de los parámetros determinados tienen valores bastante similares a los encontrados en la Tabla 4.2, a excepción de los parámetros c y d que sustituyen a la variable original η^- mediante la ecuación (4.1). Esto se puede entender como que en el primer experimento al disminuir la resistencia (R) y el parámetro del mecanismo de conducción (α) la velocidad de cambio de estado η^- aumenta más rápidamente a medida que pasa el tiempo, es decir, a medida que aumenta la amplitud del voltaje aplicado experimentalmente entre los electrodos del memristor. Sin embargo, en el segundo experimento al aumentar la resistencia y el parámetro del mecanismo de conducción, la velocidad de cambio de estado η^- disminuye más rápidamente a medida que la amplitud del voltaje aplicado va decreciendo. Desde el punto de vista físico, este comportamiento indica que cuando el filamento ha alcanzado un estado más alto durante el proceso de set, el filamento ha alcanzado un tamaño mayor, por lo que es necesario aplicar valores mayores de tensión durante el reset (V^-), y al mismo tiempo la disolución del filamento se produce más rápidamente (valores mayores de η^-).

4.4. Conclusiones

En este capítulo hemos hecho una serie de simulaciones y análisis que nos han sugerido una mejora del modelo de memristor de E. Miranda al incorporar las modificaciones recogidas en (4.1) en el modelo original. Los resultados encontrados al resolver de nuevo dos problemas de mínimos cuadrados, ahora para determinar las 10 variables de estado desconocidas con las que minimizar las discrepancias con los datos experimentales, confirman que esta modificación constituye efectivamente una mejora considerable del modelo. Analicemos ahora desde un punto de vista físico que significa esta modificación.

En primer lugar, hay que decir que en las ecuaciones (4.1) aparece un factor $1/170$ que no se incorpora en el valor de las pendientes del voltaje medio (V^-)

y la velocidad de cambio de estado (η^-) del proceso de destrucción de canales. Este factor realmente podría haberse incluido dentro de los valores de las variables de estado a y c . Sin embargo, hemos preferido usar estas notación para resaltar que en verdad, de forma general, no existe estrictamente esta dependencia lineal con el tiempo de los parámetros V^- y η^- , aunque en nuestros experimentos se haya comprobado que es cierta dicha relación. Si analizamos lo que ocurre desde una perspectiva más amplia, se puede llegar a la conclusión de que en verdad lo que influye es la velocidad de variación de la tensión de entrada aplicada en cada experimento. Como en nuestros dos experimentos esta velocidad de variación de la tensión de las señales de entrada presenta una dependencia lineal con el tiempo, esto provoca que también sea válida la relación temporal anteriormente citada. Luego, de forma general, lo que se logra con la mejora es incorporar dentro de las variables de estado V^- y η^- una dependencia con la velocidad de variación de tensión de la señal de entrada aplicada.

En el primer experimento, en base a los datos recopilados, se puede afirmar que la señal de entrada sigue la siguiente expresión

$$V(t) = \frac{t}{170} \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right), \quad (4.2)$$

donde $t/170$ es la amplitud del voltaje (velocidad de variación de la tensión). Es en esta amplitud donde se encuentra la relación lineal con el tiempo y lo que justifica la presencia del factor $1/170$ en las ecuaciones (4.1).

Por lo tanto de forma general, si aplicamos una señal alterna a un memristor siguiendo la expresión

$$V(t) = V_0(t)\sin(\omega t), \quad (4.3)$$

donde se ha denotado por t al tiempo y ω a la frecuencia de dicha señal, entonces la mejora propuesta en este TFG se basa en sustituir

$$\begin{aligned} V^- &= cte \xrightarrow{\text{se reemplazar por}} V^-(t) = a \cdot V_0(t) + b \\ \eta^- &= cte \xrightarrow{\text{se reemplazar por}} \eta^-(t) = c \cdot V_0(t) + d \end{aligned} \quad (4.4)$$

en el modelo de memdiado.

Este razonamiento también justifica por qué en muchos estudios realizados en los últimos años, como los presentados en [11], no se detectaran este error. En ellos, la señal alterna de entrada utilizada poseía una amplitud constante, independiente del tiempo, por lo que no se conseguía un cambio en el área de los lazos de histéresis. Como nosotros en los experimentos hemos aplicado señales sinusoidales con amplitudes que iban variando con el tiempo, el área de los lazos crecía o decrecía siguiendo una dependencia temporal.

Por otra parte, cabe señalar que los valores encontrados para las nuevas variables a , b , c y d , recogidos en la Tabla 4.3, poseen el signo que cabría esperar, como veremos a continuación. La variable de estado a nos indica la variación en el voltaje medio de destrucción V^- en función del tiempo. Como en el primer experimento se utiliza una señal de entrada sinusoidal creciente, lo que hace que los lazos de histéresis sean cada vez más grandes, es presumible que la pendiente sea negativa, es decir, que el voltaje medio de destrucción sea cada vez más negativo, como se observa en los resultados encontrados (Tabla 4.3). Por el contrario, en el caso del segundo experimento, como se aplicó una señal sinusoidal decreciente, la pendiente debe ser positiva. Utilizando un razonamiento análogo se confirman que los signos de la variable c , determinados mediante la resolución del problema de mínimos cuadrados, concuerdan con lo esperado según la señal de entrada aplicada. Es decir, cuando aumentamos la amplitud de la señal sinusoidal de entrada el filamento conductor alcanza un tamaño mayor durante el proceso de formación (set process), por lo que será necesario aplicar valores mayores de tensión si se quiere destruir parte del filamento en el proceso de reset (mayores valores de V^-). Además, al mismo tiempo, la disolución del filamento se produce más rápidamente por lo que los valores de η^- se hacen mayores.

Por último, los valores de las variables b y d , coordenadas en el origen de los parámetros V^- y η^- , permiten conseguir siempre un valor negativo para el voltaje medio de destrucción (V^-) y uno positivo para la velocidad de cambio de estado (η^-), como se esperaba encontrar según el razonamiento expuesto en el modelo de memdiodo de E. Miranda.

4.5. Aplicaciones en el futuro

El descubrimiento de estos nuevos dispositivos denominados memristores abre una puerta a una de las mayores áreas innovadoras de aplicación en el campo de la electrónica: la inteligencia artificial. Entre sus principales ventajas se encuentran una capacidad de almacenar información con un consumo de energía muy bajo y una excelente compatibilidad con la tecnología CMOS (metal-óxido-semiconductor) con la que se construyen los circuitos integrados modernos como microprocesadores, memorias, microcontroladores, sensores de imagen, etc. Hasta ahora la tecnología desarrollada utiliza una lógica binaria, basada en combinaciones de ceros y uno. Con la aparición de este nuevo dispositivo analógico se rompe esta limitación abriendo la posibilidad de una infinidad de aplicaciones que se están estudiando en la actualidad por las más avanzadas empresas tecnológicas del mundo.

Algunas de las potenciales aplicaciones que tienen estos dispositivos son:

❖ Redes neuronales:

Se cree que el memristor al tener una gran capacidad de realizar tareas de procesamiento y almacenamiento sea la base para la construcción de un cerebro electrónico que pueda funcionar de forma análoga al cerebro de un mamífero. Lo que se quiere es reproducir el proceso de sinapsis, es decir, que ante un estímulo se registre una respuesta que varíe en función de la intensidad del estímulo. En el cerebro humano la transferencia de información entre neuronas se realiza a nivel del espacio sináptico mediante neurotransmisores liberados del axón hacia la dendrita donde la liberación de neurotransmisores es proporcional a la cantidad o intensidad de la información transmitida. Un proceso análogo ocurre en los memristores, donde el denominado proceso de potenciación corresponde a un impulso positivo de transferencia de información. Para correlacionar la intensidad del estímulo en los memristores nos fijamos en la creación de los filamentos conductores, donde no solo varía su número sino también el grosor de cada uno de los filamentos según el voltaje aplicado.

En 2009 mediante la construcción de un circuito electrónico compuesto de una red LC y un memristor se consiguió demostrar que al someter a este circuito a un tren de impulsos periódicos éste era capaz de aprender y anticipar el siguiente pulso, comportamiento similar al proceso de adaptación en organismo unicelulares. Por este motivo, también se incluye entre las posibles aplicaciones el reconocimiento de patrones.

Por otra parte, es destacable el software que se está desarrollando en la Universidad de Boston denominado MoNETA (Modular Neuronal Exploring Travelling Agent) con el que se trata de crear el primer modelo de redes neuronales a gran escala con el que implementar circuitos en todo el cerebro con el objetivo de alimentar a un robot usando un hardware memristivo.

La innovación de los memristores es que permite el almacenamiento y procesamiento de la información en el mismo lugar y al mismo tiempo. Además tienen capacidad de aprender y olvidar rutinas como hacen las neuronas. Un estudio más detallado de esta relación entre las redes neuronales y los memristores se encuentra en [10].

❖ Memorias:

El memristor es un dispositivo nanométrico capaz de reemplazar a las actuales memorias RAM, Flash o discos duros gracias a su capacidad de recordar información permanentemente sin necesidad de consumir energía, conmutar en nanosegundos y, según Williams estima, sustituir a 10 transistores con un sólo memristor. Es decir, los circuitos usando memristores serían mucho más compactos, pudiendo ser la base de los ordenadores del futuro. Además, estos dispositivos pueden alcanzar una velocidad de acceso de 90 nanosegundos, es decir, cien veces más rápido que la memoria Flash contemporánea con el uso de un 1 % de la energía equivalente y, dependiendo del material con el que esté construido,

puede tener una vida útil similar a la de un disco duro tradicional. En cuanto a su almacenamiento se estima que pueda alcanzar múltiples petabits de memoria por cm^2 , siendo un petabit similar a 128 Terabytes (1 terabyte es equivalente a 250.000 imágenes de 4MB).

❖ **Aplicaciones de lógica digital, procesamiento de señales y sistemas de control.**

❖ **Posibles tratamientos de enfermedades humanas:**

Se cree que sería posible tratar algunas enfermedades cerebrales mediante el empleo de implantes de circuitos con memristores. También se ha observado que cuando la sangre humana es expuesta a distintos voltajes, esta se comporta similar a los memristores durante unos 5 minutos. Durante ese tiempo, la sangre es capaz de cambiar su resistencia eléctrica en función del voltaje aplicado [18].

En resumen, el descubrimiento de los memristores pronostica la construcción de sistemas más robustos, con menos componentes en su interior y que consuman menos energía, y además aumentando la velocidad de procesamiento.

En este TFG nos hemos basado en estudiar el modelo de memdiode de E. Miranda, descrito en su artículo [11], proponiendo una mejora con la que incorporar una dependencia con la velocidad de variación de la tensión de la señal de entrada en dos de las variables de estado constantes del modelo original. Sin embargo, este modelo aún presenta varias carencias como la introducción de una dependencia con la frecuencia o con la temperatura, como se comentó en la Sección 3.3. De hecho, en un reciente artículo [19], publicado el 17 de Junio de 2020, E. Miranda expone una variación de su modelo original, denominada DMM (Dynamic Memdiode Model) con el que consigue incluir una dependencia con la frecuencia, pudiendo así cumplir con todas las huellas de identidad de los memristores descritas en la Sección 1.3.

Seguramente, tanto en nuestra propuesta de mejora, incorporada al modelo original del memdiode, como en el modelo DMM descrito en [19], existen aún modificaciones con las que poder perfeccionar los modelos, con el objetivo de alcanzar un modelo general con el que al realizar cualquier experimento, independientemente del memristor utilizado y la señal de entrada (crecientes, decrecientes, sinusoidales, cuadradas, discontinuas,...) se consiga describir perfectamente el funcionamiento de estos dispositivos. Pero para conseguir este propósito será necesario una amplia experimentación donde se vaya analizando y corrigiendo la influencia de cada una de las variables. Todo este trabajo será muy importante para el desarrollo de las aplicaciones sugeridas anteriormente en un futuro próximo.

Apéndice A: Código Matlab

A.1. Cálculo de la corriente según el modelo de memdiado

Mediante el primer programa de Matlab seremos capaces de calcular la corriente que atravesaría al memristor a partir de los voltajes experimentales, según el modelo de memdiado de E. Miranda. Los resultados obtenidos con este programa se han utilizado tanto para mostrar numérica y gráficamente, como para analizar las discrepancias entre los datos experimentales y los conseguidos con el modelo.

Programa 1: Corriente según el modelo de memdiado de E. Miranda

```
1  %Programa 1: Cálculo de la corriente según el modelo de ...
    memdiado de E. Miranda.
2  %Es necesario introducir np,nm,vp,vm,a,R,imax,imin
3  function [Intensidad]=I(y)
4      datos %tabla que almacena los datos experimentales del ...
        primer experimento.
5      %Variables de estado:
6      np=y(1); %Velocidad de creación
7      nm=y(2); %Velocidad de destrucción
8      vp=y(3); %Voltaje medio de creación
9      vm=y(4); %Voltaje medio de destrucción
10     a=y(5); %alpha (mecanismo de conducción del memristor)
11     R=y(6); %Resistencia
12     imax=y(7); %Corriente máxima que atraviesa al memristor
13     imin=y(8); %Corriente mínima que atraviesa al memristor
14     V=x(:,8); %Voltajes experimentales
15     %Condición inicial
16     L0=0; %Inicialmente el memristor está en estado HRS.
17
18 %Paso 1: Creamos las curvas de formación y destrucción de los ...
    filamentos conductores (CFs)
19     %gp --> Gamma+
20     %gm --> Gamma-
21     [gp, gm]=gamma(V, np, nm, vp, vm);
```

```

22 %Paso 2: Calculamos la variable de estado interno del ...
    memristor L(t)--> lambda(t)
23 L=zeros(length(V),1); %inicializamos el vector
24 for i=1:length(V)
25     L(i)=min(gm(i),max(L0,gp(i)));
26     L0=L(i);
27 end
28
29 %Paso 3: Calculamos la amplitud de corriente del diodo según ...
    el modelo Io
30 Io=ampli(L,imax,imin);
31 %Paso 4: Calculamos la corriente que atraviesa al memristor ...
    usando la aproximación de Hermite-Padé de la función de ...
    Lambert.
32 Intensidad=sign(V).*(1/(a*R)) ...
33     .*w(a.*R.*Io.*exp(a.*(abs(V)+R.*Io)))-Io);
34
35 %Representación gráfica de los resultados obtenidos
36
37 figure(1) %Lambda vs Voltaje
38 clf
39 plot(V,L)
40 xlabel('V')
41 ylabel('Lambda')
42 hold on
43 plot(V,gp)
44 plot(V,gm)
45
46 figure(2) %Corriente vs Voltaje
47 clf
48 plot(V,Intensidad,'red') %En rojo con las corrientes del modelo
49 hold on
50 plot(x(:,8),x(:,5),'blue') %En azul con las corrientes ...
    experimentales
51 xlabel('V')
52 ylabel('I')
53 legend('Modelo','Experimental')
54
55 figure(3) %Corriente vs tiempo
56 clf
57 plot(x(:,7),Intensidad,'red') %En rojo con las corrientes del ...
    modelo
58 hold on
59 plot(x(:,7),x(:,5),'blue') %En azul con las corrientes ...
    experimentales
60 xlabel('t')
61 ylabel('I')
62 legend('Modelo','Experimental')
63
64 figure(5) %ln(|Corriente|) vs Voltaje
65 clf
66 semilogy(x(:,8),abs(Intensidad),'red') %En ROJO LA DEL MODELO
    
```

```

67 hold on
68 semilogy(x(:,8),abs(x(:,5)),'blue') % en AZUL LA EXPERIMENTAL
69 xlabel('V')
70 ylabel('ln(abs(I))')
71 legend('Modelo','Experimental')
72 end
73
74 %Funciones auxiliares necesarias en la ejecución del modelo:
75
76 %Función Gamma
77 function [gp, gm]=gamma(V,np,nm,vp,vm)
78 gp=1./(1+exp(-np.*(V-vp)));
79 gm=1./(1+exp(-nm.*(V-vm)));
80 end
81 %Función Lambert W
82 function lambert=w(j)
83 lambert = log(1+j).*(1-(log(1+log(1+j))./(2+log(1+j))));
84 end
85 %I0(lambda)
86 function Io=ampli(L,imax,imin)
87 Io = imax.*L+imin.*(1-L);
88 end

```

A.2. Ajuste de los parámetros del modelo de memdiado

En el segundo programa de Matlab determinamos los parámetros que minimizan lo máximo posible las discrepancias de las corrientes conseguidas mediante el modelo de memdiado y las recogidas experimentalmente. Para ello, hacemos uso del método de mínimos cuadrados de Levenberg-Marquardt, que está implementado en la función `lsqnonlin` de Matlab. Una vez encontrados los valores de los parámetros, hemos procedido a visualizar los resultados a través de diferentes gráficas.

Programa 2: Ajuste de los parámetros del modelo de memdiado de E. Miranda

```

1 %Programa 2: Búsqueda de los parámetros del modelo de memdiado ...
  de E. Miranda con los que minimizar los errores con los ...
  datos experimentales.
2 datos; %tabla que almacena los datos experimentales del primer ...
  experimento.
3 %Valores inicial (p) y final (f) que tomamos para realizar el ...
  ajuste (estos valores se cambiarán para poder hacer el ...
  ajuste de solo uno de los lazos).
4 p=1;
5 q=2396;
6 V=x(p:q,8); %Voltajes experimentales

```

```

7 Iexp=x(p:q,5); %Corrientes experimentales
8 %Los parámetros desconocidos del modelo se recogen en el ...
   vector y en el siguiente orden: ...
   y0=[np0,nm0,vp0,vm0,a0,R0,imax0,imin0]
9 %Hay que dar un valor inicial a estos parametros los cuales ...
   deben ser razonables para conseguir que el método de ajuste ...
   sea bueno (que alcance el mínimo global del problema y no ...
   uno local).
10 %En el caso del primer experimento se han elegido:
11 y0=[12,20,0.81,-0.63,5,74.6,0.0148,0.0002];
12 [IntensidadMemristor,Io]=Intensidad1(y0); %Se calcula la ...
   corriente que atraviesa al memristor según el modelo.
13 %Para ello se utiliza el programa Intensidad1, que es idéntico ...
   al Programa 1 sin las gráficas.
14
15 %Calculamos el error inicial del modelo con respecto a los ...
   experimentos usando la norma al cuadrado (lo habitual en el ...
   problema de mínimos cuadrados):
16 r=x(p:q,5)-IntensidadMemristor;
17 f=(norm(r)^2)
18
19 %Usamos el método de Levenberg-Marquardt para determinar los ...
   parámetros que mejor ajusten al modelo (haciendo el error ...
   lo más pequeño posible).
20 fun=@(y) Intensidad1(y)-Iexp;
21 options.Algorithm='levenberg-marquardt';
22 options = optimoptions('lsqnonlin','Display','final');
23 %Aumentamos los valores de la tolerancia preestablecida en el ...
   algoritmo para encontrar una mejor precisión de los parámetros.
24 options.OptimalityTolerance=1e-35;
25 options.FunctionTolerance=1e-25;
26 options.StepTolerance=1e-25;
27 options.MaxFunctionEvaluations=500;
28 [z,resnorm]=lsqnonlin(fun,y0,[],[],options);
29 LevenbergCrec=[z,resnorm]; %Almacenamos la solución en este ...
   vector, tanto los parámetros como el mínimo error alcanzado ...
   entre el modelo y lo experimental.
30 IntFinal2=Intensidad1(z); %Corriente del modelo con los ...
   parámetro ajustados
31
32 %Gráficas:
33
34 figure(1) %(Corriente experimental vs Voltaje)+(Corriente ...
   modelo vs Voltaje)
35 clf
36 %Mediante círculos negros marcamos los resultados experimentales.
37 for i = 1:length(V) %Bucle con el que observar como se va ...
   pintando la gráfica.
38     plot(V(1:i),Iexp(1:i),'ko')
39     pause(0.000000001)
40 end
41 hold on
    
```

```

42 %Mediante una línea roja marcamos los resultados del modelo ...
    (Levenberg)
43 for i = 1:length(V)
44     plot(V(1:i),IntFinal2(1:i),'r-')
45     pause(0.0001)
46 end
47 xlabel('V')
48 ylabel('I')
49 title('Ciclos de histéresis experimentales y del modelo')
50 legend('Datos experimentales', 'Modelo')
51 hold off
52
53 figure(2) %Corriente vs tiempo
54 clf
55 plot(x(p:q,7),Iexp,'ko') %En círculos lo experimental
56 hold on
57 plot(x(p:q,7),IntFinal2,'r-') % en rojo el modelo
58 xlabel('t')
59 ylabel('I')
60 title('Corriente experimental y del modelo')
61 legend('Datos experimentales', 'Modelo')
62 hold off
    
```

A.3. Determinación del cambio de lazo

En este programa se determinan los datos experimentales (sus índices) que marcan el cambio de un lazo a otro. Esto lo conseguiremos analizando el cambio de signo del voltaje experimental.

Programa 3: Cambio de lazo con voltajes negativos

```

1 %Vamos a identificar los cambios de lazo analizando cuando el ...
    voltaje es negativo.
2 datos;
3 p=1;
4 q=2396;
5 V=x(p:q,8); %Voltajes
6 t=x(p:q,7); %Tiempos
7 j=1;
8 TN=[]; %Inicializamos el vector que contendrá los tiempos a ...
    los que el voltaje es negativo
9 for i=1:length(V)
10     if V(i)<=0
11         VN(j)=V(i);
12         TN(j,1)=t(i);
13         TN(j,2)=i; %para saber la fila de la tabla de datos ...
            original
14         j=j+1;
15     end
    
```

```
16 end
17 %Veamos cuando el cambio entre dos tiempos seguidos es mayor ...
    que 0,1s para saber el cambio de lazo:
18 k=1;
19 Salto=[];
20 for i=1:length(TN)-1
21     if TN(i+1,1)-TN(i,1)>0.2
22         Salto(k,1)=i+1; %índice del tiempo en la tabla de ...
            tiempos con solo voltajes negativos.
23         Salto(k,2)=TN(i+1,2); %índice del tiempo en la tabla ...
            datos original
24         Salto(k,3)=TN(i+1,1); %El tiempo original verdadero
25         k=k+1;
26     end
27 end
28 Salto
```

Bibliografía

- [1] L.O. Chua, *Memristor. The Missing Circuit Element*, IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol.18, No.5, pp.507-519, 1971.
- [2] L.O. Chua y S.M. Kang, *Memristive devices and systems*, Proceedings of the IEEE, Vol.64, No.2, pp.209-223, 1976.
- [3] J.C. Ambrojo, *El memristor existe; Chua lo sabía*, Reportaje: Ciencia, El País, 2009. Recuperado de https://elpais.com/diario/2009/03/05/ciberpais/1236221483_850215.html
- [4] D.B. Strukov, G.S. Snider, D.R. Stewart y R.S. Williams, *The missing memristor found*, Nature, Vol.453, pp.80-83, 2008.
- [5] R.S. Williams, *Memristors and Memristive Systems*, Editor Ronald Tetzlaff, Springer, New York, Capítulo 1: How We Found the Missing Memristor, pp.3-16, 2014.
- [6] A.G. Radwan y M.E. Fouda, *On the Mathematical Modeling of Memristor, Memcapacitor and Meminductor*, Studies in Systems, Decision and Control, Vol.26, Springer, pp.13-16, 2015.
- [7] L. Chua, G.C. Sirakoulis y A. Adamatzky, *Handbook of Memristor Networks*, Springer, Switzerland, pp.165-178, 2019.
- [8] H. Kim, M. Sah y S.Pr. Adhikari, *Pinched Hysteresis Loops is the Fingerprint of Memristive Devices*, 2012.
- [9] A. Naranjo, *Desarrollo de Modelos del Memristor para Aplicaciones en Circuitos Electrónicos*, Tesis de Maestría, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, pp.9-11, 2018.
- [10] S.G. Hu, S.Y. Wu, W.W. Jia, Q. Yu, L.J. Deng, Y.Q. Fu, Y. Liu, y T.P. Chen, *Review of Nanostructured Resistive Switching Memristor and Its Applications*, Nanoscience and Nanotechnology Letters, Vol.6, pp.729–757, 2014.
- [11] E. Miranda, *Compact Model for the Major and Minor Hysteretic I-V Loops in Nonlinear Memristive Devices*, IEEE Trans. Nanotechnol., Vol.14, No.5, pp.787–789, 2015.

-
- [12] A. Björck, *Numerical Methods for least squares problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [13] J. Nocedal y S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Second Edition, Springer, New York, 2006.
- [14] C. Santa Cruz González, *Métodos numéricos para problemas de mínimos cuadrados y ajuste de parámetros en modelos matemáticos de memristores*, Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Valladolid, 2020.
- [15] S. Dueñas, H. Castán, O.G. Ossorio y H. García, *Dynamics of set and reset processes on resistive switching memories*, Microelectronic Engineering, Vol.216, Universidad de Valladolid, 2019.
- [16] G.A. Patterson, J. Suñé y E. Miranda, *Voltage-Driven Hysteresis Model for Resistive Switching: SPICE Modeling and Circuit Applications*, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol.36, No.12, pp.2044-2051, 2017.
- [17] C. Walczyk et al., *Impact of temperature on the resistive switching behavior of embedded HfO₂-Based RRAM devices*, IEEE Transactions on Electron Devices, Vol.58, No.9, pp.3124–3131, 2011.
- [18] S.P. Kosta, Y.P. Kosta, M. Bhatele, Y.M. Dubey, A. Gaur, S. Kosta, J. Gupta, A. Patel y B. Patel, *Human blood liquid memristor*, International Journal of Medical Engineering and Informatics, Vol.3, pp.16-29, 2011.
- [19] E. Miranda y J. Sune, *Fundamentals and SPICE Implementation of the Dynamic Memdiode Model for Bipolar Resistive Switching Devices*, Junio 2020 (En prensa).