
Simetrías del oscilador armónico en el plano



Universidad de Valladolid

Grado en Física

Sergio Salamanca Pita

Tutor: Dr. Javier Negro Vadillo

1. Resumen

En este trabajo desarrollamos un método de factorización para Hamiltonianos unidimensionales basado en una generalización de los operadores escalera. Con esto se pretende calcular las simetrías del sistema oscilador armónico isótropo bidimensional. Empleamos este método tanto dentro del formalismo clásico como el ámbito de la mecánica cuántica, lo que nos permite obtener las expresiones explícitas de las trayectorias del sistema así como el espectro energético y de estados ligados respectivamente.

2. Abstract

In this Thesis we have developed a method based on generalized ladder operators that allows us to factorize the Hamiltonian of one-dimensional systems. It is intended to help us determine the symmetries of the dimensional isotropic harmonic oscillator. Applying this procedure to both Classical and Quantum Mechanics theory allows us to determine the explicit expressions for the trajectory of the system as well as the energy and wave function spectrum respectively.

Índice

1. Resumen	1
2. Abstract	1
3. Introducción	3
4. Factorización de Hamiltonianos	4
5. Partícula libre unidimensional	9
5.1. Serie trigonométrica	9
5.2. Serie hiperbólica	10
5.3. Serie parabólica	11
6. Oscilador armónico unidimensional	12
7. Sistemas multidimensionales	13
8. Tensor de Fradkin	14
9. El oscilador cuántico plano	15
10. Separación en coordenadas polares	17
10.1. Factorizaciones del oscilador radial	18
11. Factorizaciones y simetrías	21
11.1. Estados generados por las simetrías	24
11.2. Funciones propias	26
12. Oscilador clásico plano	27
13. Conclusiones	30
Bibliografía	31

3. Introducción

Este trabajo de fin de grado trata de la aplicación del método de factorización para calcular las simetrías del oscilador isotrópico en el plano dentro de los formalismos de la mecánica cuántica y de la mecánica clásica.

En principio, el método de factorización se usa para resolver algunos sistemas sencillos de una dimensión que se describen en mecánica cuántica mediante la ecuación de Schrödinger estacionaria. De hecho ya fueron utilizados en los comienzos por Dirac y Schrödinger, y un trabajo exhaustivo sobre este método puede encontrarse en el artículo de Infeld y Hull [1]. Hay varios libros y monografías más modernos sobre el método y sus variadas aplicaciones, por ejemplo véase el de Cooper et al [2].

Lo que no es tan frecuente es la aplicación del método de factorización para calcular simetrías de sistemas en varias dimensiones y este es el objeto del presente trabajo mediante el ejemplo del oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones.

Como sabemos, este sistema cuántico tiene simetría rotacional en torno al eje perpendicular al plano y situado en el origen de fuerzas. También es simétrico respecto a reflexiones con respecto al eje x , por ejemplo. Esto significa que un valor de la energía E_n , tendrá funciones propias caracterizadas por al menos dos valores propios del momento angular ℓ y $-\ell$, siendo ℓ un valor entero: $\psi_\ell^n, \psi_{-\ell}^n$. Por lo tanto estas dos simetrías (una continua y la otra discreta) implican que cada nivel de energía tiene una degeneración doble (salvo cuando el nivel es el de un estado propio de momento angular nulo). Lo que realmente sucede con este sistema es que en cada nivel, la energía viene dada por: $E_n = n + 1$, $n = 0, 1, \dots$ y cada uno de estos niveles posee un espacio vectorial propio V_n de dimensión $n + 1$, incluyendo los estados propios con momento angular $\ell, \ell - 2, \ell - 4, \dots, -\ell$, siendo el momento angular máximo $\ell = n$.

En otras palabras la degeneración es mayor que la que se puede explicar mediante las dos simetrías antes mencionadas y además el momento angular toma valores de dos en dos. Nuestro objetivo es calcular las simetrías (escondidas) que expliquen totalmente la degeneración de cada nivel. Para hallar las simetrías desconocidas seguiremos un procedimiento no estándar, utilizando coordenadas polares, para poner de manifiesto el momento angular y sus variaciones. En los trabajos clásicos de Demkov [3] y Fradkin [4, 5] se utilizan las coordenadas cartesianas y el lector podrá apreciar las diferencias con nuestro punto de vista. En particular, además de utilizar el método de factorización, encontraremos simetrías complejas que nos permitirán calcular una base dentro de cada espacio de degeneración, formada por *todas* las funciones propias mencionadas antes: $\psi_\ell^n, \psi_{\ell-2}^n, \dots, \psi_{-\ell}^n$. En el oscilador plano clásico, dichas simetrías complejas nos dan una fase que nos mide, la inclinación de las órbitas elípticas.

La organización del trabajo es la siguiente. En la primera sección se desarrollará un método general de factorización para Hamiltonianos unidimensionales, que nos permite encontrar sistemas vinculados al inicial, este vínculo permite relacionar las funciones de onda de los sistemas mediante la aplicación de los operadores de factorización, de forma que el espectro de soluciones del sistema inicial queda completamente determinado conociendo los estados fundamentales de los sistemas asociados, transformando así el problema de partida en un conjunto de problemas más simples.

En la siguiente sección ilustraremos la competencia de este método con un ejemplo de sistema invariante de forma. En este tipo de sistemas el potencial asociado mantiene la estructura del sistema de partida,

de forma que pueden resolverse de inmediato por método de inducción.

Tras esto nos centraremos en el oscilador armónico. La siguiente sección será donde analizaremos el oscilador armónico unidimensional, sistema invariante de forma. La resolución de este sistema es clave para el posterior análisis del oscilador isotópico bidimensional, ya que como describiremos en la quinta sección, nos beneficiaremos de las simetrías del sistema para descomponer las funciones de onda del sistema empleando los operadores simetría.

Veremos dos métodos de separación, primero emplearemos los tensores clásicos de Demkov [3] y Fradkin [4, 5] para descomponer en dos osciladores unidimensionales independientes, de lo que obtendremos el espectro de funciones y energías.

Tras esto, consideraremos el operador momento angular, lo que nos permitirá separar el sistema en coordenadas polares así como calcular una simetría no trivial del sistema, que emplearemos en última instancia para obtener la degeneración energética del sistema así como los estados propios del mismo.

Por último, pasaremos al caso clásico y calcularemos las funciones de la mecánica clásica asociadas a nuestros operadores cuánticos ya obtenidos y con ellas, las orbitas que puede describir el sistema.

4. Factorización de Hamiltonianos

El Hamiltoniano es un operador diferencial de segundo orden, por lo que nuestro objetivo en esta sección será describir un método que permita encontrar dos operadores de primer orden que factoricen el sistema.

Partimos del Hamiltoniano de la ecuación de Schrödinger:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{xx} + V(x) \quad (4.1)$$

en donde $\partial_{xx} \equiv \frac{d^2}{dx^2}$ es la derivada segunda en x , $V(x)$ el potencial, y en lo sucesivo usaremos unidades tales que la constante de Planck \hbar y la masa m tomarán el valor $\hbar = 2m = 1$. Entonces la ecuación estacionaria de Schrödinger se escribe:

$$H\psi(x) = (-\partial_{xx} + V(x))\psi(x) = E\psi(x) \quad (4.2)$$

Conociendo una función de onda, en particular el estado fundamental ψ_0 con energía E_0 del sistema (si existe), podremos calcular el potencial del mismo:

$$V(x) = \frac{\Psi_0''(x)}{\Psi_0(x)} + E_0 \quad (4.3)$$

Por simplicidad, estableceremos el origen de energías en E_0 . Utilizaremos la notación siguiente

$$\begin{aligned} \text{Estado fundamental de } H_0 : & \quad \Psi_0^0 & \text{Energía } E_0^0 \\ \text{Estados excitados de } H_0 : & \quad \Psi_0^n & \text{Energías } E_0^n \end{aligned} \quad (4.4)$$

Supongamos que conocemos el espectro discreto E_0^n y las funciones propias ψ_0^n del hamiltoniano de partida H_0 . Vamos a ver que mediante el método de factorización podemos construir una sucesión de hamiltonianos $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ cuyos espectros y funciones propias se pueden calcular a partir de las de H_0 .

Definiremos los operadores A^+ , A^- creación y aniquilación respectivamente de la siguiente manera:

$$H_0 = A_0^+ A_0^- = \partial_{xx} + V_0(x); \quad A_0^\pm = (\mp \partial_x + W_0(x)) \quad (4.5)$$

Donde $W(x)$ denominado superpotencial, es una función que define completamente la factorización y satisface:

$$V_0(x) = W_0^2(x) - W_0'(x) \quad (4.6)$$

Podemos expresar el superpotencial en función del estado fundamental del sistema, teniendo en cuenta que A_0^- elimina el estado fundamental de H_0

$$A_0^- \Psi_0^0 = 0 \quad (4.7)$$

Sustituyendo en (4.7) la expresión en (4.5) de A_0^- , vemos que

$$W_0(x) = -\frac{\Psi_0^{0'}}{\Psi_0^0} \quad (4.8)$$

Podemos ahora construir un Hamiltoniano H_1 asociado al inicial H_0 conmutando nuestros operadores en (4.5),

$$H_1 := A_0^- A_0^+ = \partial_{xx} + V_1(x) \quad (4.9)$$

El potencial del hamiltoniano resultante es:

$$V_1(x) = W_0^2(x) + W_0'(x) \quad (4.10)$$

Estos hamiltonianos representan sistemas vinculados (entrelazados) por medio de los operadores creación y aniquilación A_0^\pm de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} H_1 A_0^- &= A_0^- A_0^+ A_0^- = A_0^- H_0 \\ H_0 A_0^+ &= A_0^+ A_0^- A_0^+ = A_0^+ H_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Estas relaciones de entrelazamiento conducen a relaciones entre los estados de estos sistemas. Supongamos que Ψ_0^n es una función propia de H_0 con valor propio E_0^n :

$$H_0 \Psi_0^n = A^+ A^- \Psi_0^n = E_0^n \Psi_0^n \quad (4.12)$$

Entonces la aplicación de A_0^- sobre esta función verifica

$$H_1(A_0^- \Psi_0^n) = A_0^- A_0^+ A_0^- \psi_0^n = E_0^n (A_0^- \Psi_0^n) \quad (4.13)$$

Este resultado nos indica que la función de onda $A_0^- \psi_0^n$ es un estado propio de H_1 con energía E_0^n (la aplicación del operador A_0^- no varía la energía de nuestra función de onda).

Se puede realizar un calculo análogo a partir de las funciones de onda de H_1

$$H_1 \Psi_1^n = A_0^- A_0^+ \Psi_1^n = E_1^n \Psi_1^n \quad (4.14)$$

y al aplicar A_0^+ obtenemos los estados propios de H_0 ,

$$H_1(A_0^+ \Psi_1^n) = A_0^+ A_0^- A_0^+ \Psi_1^n = E_1^n (A_0^+ \Psi_1^n) \quad (4.15)$$

Con lo que vemos que tanto las energías como las funciones de onda están conectadas (casi) uno a uno,

$$E_0^0 = 0 \quad A_0^- : \Psi_0^0 = 0$$

$$E_0^{n+1} = E_1^n \quad \begin{cases} A_0^- : \Psi_0^{n+1} & \longrightarrow & \Psi_1^n = A_0^- \Psi_0^{n+1} \\ A_0^+ \Psi_1^n = \Psi_0^{n+1} & \longleftarrow & \Psi_n^1 : A_0^+ \end{cases} \quad (4.16)$$

Esta relación uno a uno se rompe para el estado fundamental del sistema de partida, ya que

$$A_0^- \Psi_0^0 = 0 \quad (4.17)$$

De esta ecuación podemos ver explícitamente que no existe ninguna función de onda Ψ_1 asociada al estado fundamental del sistema de partida, por lo que nos damos cuenta de que el estado fundamental Ψ_1^0 de H_1 debe estar asociado con el primer estado excitado Ψ_0^1 de nuestro sistema de partida (salvo normalización):

$$\Psi_1^0 := A_0^- \Psi_0^1$$

Lo que nos permite en ultima instancia factorizar nuestro Hamiltoniano H_1 y encontrar unos operadores creación y aniquilación para este Hamiltoniano:

$$H_1 = A_1^+ A_1^- + E_1^0 = A_1^+ A_1^- + E_1^0 \quad (4.18)$$

Ya que la notación para H_1 es idéntica a la del Hamiltoniano de partida, podemos ahora repetir el proceso y buscar un Hamiltoniano asociado a H_1 que denotaremos H_2 tal que:

$$H_2 := A_1^- A_1^+ + E_1^0 = H_1 + 2W_1' \quad (4.19)$$

Es obvio ver que las ecuaciones mencionadas anteriormente para el par $H_0 - H_1$ se cumplen para $H_1 - H_2$. Y lo que es mas importante, podemos aplicar este método de forma recursiva para encontrar todos los

H_n asociados de forma enésima con nuestro sistema de partida.

$$\begin{aligned}
H_n &= A_n^+ A_n^- + E_n^0; & H_n \Psi_n^m &= E_0^{m+n} \Psi_n^m \\
H_n &= A_{n-1}^- A_{n-1}^+ + E_{n-1}^0 & & \\
\Psi_n^m &= \prod_{i=0}^{m-1} (E_{m+i+1}^0 - E_{m+i}^0)^{-\frac{1}{2}} A_{m-1}^- \dots A_0^- \Psi_{n+m-1}^0 \\
V_n(x) &= V_0(x) + 2 \sum_i^{n-1} W_i'(x)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Este nuevo sistema se encuentra vinculado con el sistema de partida ya que podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
H_1 A^- \Psi_0^n &= A^- H \Psi_0^n \\
H A^+ \Psi_1^k &= A^+ H_1 \Psi_1^k
\end{aligned}$$

Por lo que los operadores escalera nos relacionan las funciones de onda de ambos sistemas ya que $A_0^- \Psi_0^n$ es un estado propio de H_1 con energía E_0^n y $A_0^+ \Psi_1^k$ es un estado propio de H_0 con energía E_1^k .

Con lo que podemos ver que tanto las energías como las funciones de onda están conectadas uno a uno.

$$\begin{aligned}
E_1^n &= E_0^{n+1}; \\
\Psi_1^n &= [E_{n+1}^0]^{-\frac{1}{2}} A_0^- \Psi_0^{n+1} \\
\Psi_0^{n+1} &= [E_n^1]^{-\frac{1}{2}} A_0^+ \Psi_1^n
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Esta relación uno a uno se rompe para el estado fundamental del sistema de partida, ya que este estado es aniquilado por el operador A^- por lo que el estado fundamental de H_1 debe estar asociado con el primer estado fundamental de nuestro sistema de partida, por lo que ψ_0^1 es el estado fundamental para H_1 . Esto implica que la notación para nuestro Hamiltoniano asociado es la misma que para el Hamiltoniano de partida. Lo que nos permite en última instancia factorizar nuestro Hamiltoniano H_1 y encontrar unos operadores creación y aniquilación para este Hamiltoniano.

$$H_1 = A_1^+ A_1^- + E_0^1 = A_1^+ A_1^- + E_0^1 \tag{4.23}$$

Ya que la notación para H_1 es idéntica a la del Hamiltoniano de partida, podemos ahora repetir el proceso y buscar un Hamiltoniano asociado a H_1 que denotaremos H_2 tal que:

$$H_2 = A_1^- A_1^+ + E_1 = H_1 + 2W_1' \tag{4.24}$$

Es obvio ver que las ecuaciones mencionadas anteriormente para el par $H - H_1$ se cumplen para $H_1 - H_2$. Y lo que es más importante, podemos aplicar este método de forma recursiva para encontrar todos los H_n

asociados de forma enésima con nuestro sistema de partida. Las funciones de onda

$$\begin{aligned}
 H_n &= A_n^+ A_n^- + E_n; & H_n \Psi_n^m &= E_0^{m+n} \Psi_n^m \\
 H_n &= A_{n-1}^- A_{n-1}^+ + E_{n-1}^0 & V_n(x) &= V(x) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} W_i'(x) \\
 \Psi_n^m &= \prod_{i=0}^{m-1} (E_0^{m+i+1} - E_0^{m+i})^{-\frac{1}{2}} A_{m-1}^+ \dots A_0^+ \Psi_{n+m-1}^0
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

De forma que conociendo el estado fundamental de los sistemas H_n , podemos conocer los estados del sistema de partida empleando los operadores A^\pm .

Podemos resumir gráficamente las conclusiones de este método:

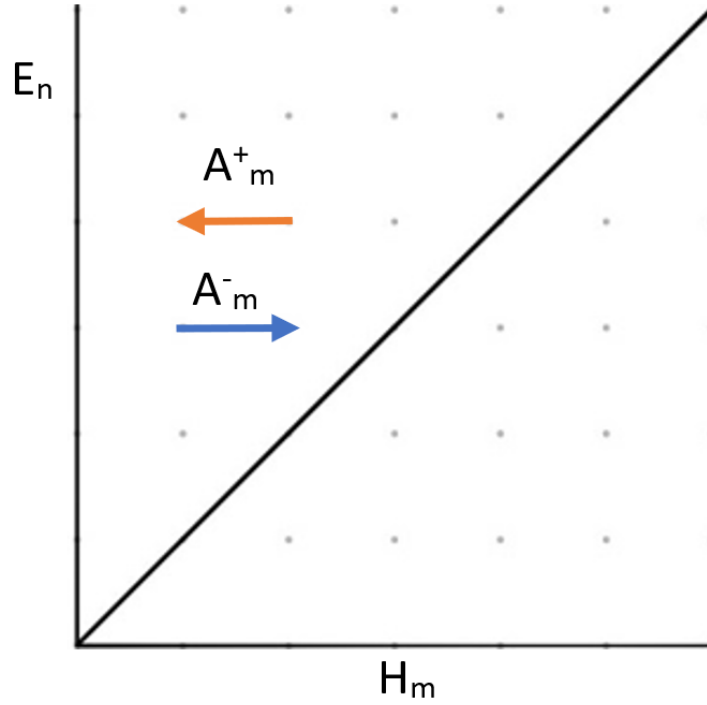


Figura 1: Acción de los operadores de factorización A^\pm .

Donde la coordenada horizontal denota el numero del sistema en el que nos encontramos, la coordenada vertical la energía del estado. De forma que los puntos de coordenadas (n, m) , representan las funciones de onda Ψ_m^{m-n} . Con esta notación, es muy sencillo ver explícitamente la acción de nuestros operadores sobre las funciones de onda, perdiéndose solamente la información sobre la normalización de las mismas.

5. Partícula libre unidimensional

En esta sección aplicaremos el método desarrollado anteriormente, para resolver el problema de la partícula libre para diferentes valores de energía.

$$H_0 = -\partial_{xx}$$

Nota: en esta sección cambiaremos la notación: en vez de E_0^n, Ψ_0^n pondremos E_n^0, Ψ_n^0 , etc.

Este sistema posee tres tipos de estados según el signo de la energía del sistema.

$$\begin{aligned} H\Psi_n &= E_n\Psi_n \\ E_n^0 > 0 &\Rightarrow \Psi_n^0 = a \cos nx + b \sin nx; \quad E_n^0 = n^2 \\ E_n^0 = 0 &\Rightarrow \Psi_n^0 = ax + b; \quad E_n^0 = 0 \\ E_n^0 < 0 &\Rightarrow \Psi_n^0 = a \cosh nx + b \sinh nx; \quad E_n^0 = -n^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por lo que consideraremos cada una de estas series por separado.

5.1. Serie trigonométrica

En este caso, consideraremos los estados con energía positiva. De soluciones conocidas:

$$\Psi_n^0 = a \cos(n+1)x + b \sin(n+1)x; \quad E_n^0 = (n+1)^2 \quad n \in \mathbb{N} \cup 0 \tag{5.2}$$

Por simplicidad, emplearemos la función seno, que verifica las condiciones de contorno

$$\sin(n+1)x = 0 \quad \text{en } x = 0, \pi$$

El superpotencial en este caso es

$$W_0 = -\frac{\dot{\Psi}_1^0}{\Psi_1^0} \Rightarrow -\frac{\cos x}{\sin x} \tag{5.3}$$

Lo que nos permite construir el primer hamiltoniano asociado.

$$H_1 = -\partial_{xx} + \frac{2}{\sin^2 x}$$

Para factorizar este sistema, necesitamos conocer al menos el estado fundamental del mismo que obtendremos empleando la relación entre las funciones de onda de los distintos hamiltonianos.

$$\Psi_n^1 = A_0^- \Psi_n^0 = \left(\partial_x - \frac{\cos x}{\sin x}\right) \sin(n+1)x; \quad \Psi_0^1 = \sin^2 x$$

Conociendo el estado fundamental de nuestro Hamiltoniano, podemos calcular superpotencial del sistema asociado.

$$W_1'(x) = -2\frac{\cos x}{\sin x}$$

Lo que nos permite repetir el proceso y calcular tantos sistemas asociados como se desee. Propondremos una estructura general para los sistemas H_n

$$\begin{aligned} \Psi_0^n &= \sin^{n+1} x; & E_m^n &= (n+m+1)^2 \\ V_n &= \frac{(n+1)n}{\sin^2 x}; & W_n &= -(n+1) \frac{\cos x}{\sin x} \end{aligned} \quad (5.4)$$

que demostraremos por inducción.

Veamos que el sistema propuesto es valido:

$$H_n \Psi_0^n = (n+1) \sin^{n-1}(x) (\sin^2(x) - n \cos^2(x)) + \frac{(n+1)n}{\sin^2 x} \sin^{n+1} = (n+1)^2 \sin^{n+1} x$$

Estado propio de H_n con la energía propuesta. Veamos ahora el superpotencial del sistema:

$$W_n = -\frac{\dot{\Psi}_0^n}{\Psi_0^n} = -(n+1) \frac{\cos x}{\sin x}$$

Por lo que el sistema propuesto cumple las condiciones necesarias. Calcularemos ahora el potencial del siguiente sistema asociado:

$$V_{n+1} = V_n + 2W_n' = \frac{(n+1)n}{\sin^2 x} + \frac{2(n+1)}{\sin^2 x} = \frac{(n+2)(n+1)}{\sin^2 x}$$

Que se corresponde con la estructura propuesta, y ya que determinando el potencial del sistema el resto de funciones quedan determinadas, podemos concluir que los sistemas asociados cumplen la estructura propuesta.

5.2. Serie hiperbólica

Veremos ahora el sistema para valores negativos de energía. Tomamos las soluciones

$$\Psi_n^0 = \cosh(n+1)x \quad (5.5)$$

que no tienen puntos singulares en \mathbb{R} y que tienden a cero en $x \rightarrow \pm\infty$. En este caso, de las dos soluciones que tenemos para el sistema, trabajaremos con la función coseno para evitar así las posibles divergencias en el origen.

Con esto, calcularemos el superpotencial asociado al sistema, y con él, en ultima instancia los Hamiltonianos socios del mismo.

$$W_0 = -\frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow H_1 = H_0 + 2W_0' = -\partial_{xx} - \frac{2}{\cosh^2 x} \quad (5.6)$$

Propondremos una estructura similar al caso anterior.

$$\begin{aligned} \Psi_0^n &= \cosh^{n+1} x & E_m^n &= -(n+m+1)^2 \\ V_n &= \frac{n(n+1)}{\cosh^2 x}; & W_n &= -\frac{(n+1) \sinh x}{\cosh x} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Comprobamos la validez del sistema.

$$\begin{aligned} H_n \Psi_0^n &= -(n+1)^2 \cosh^{n+1} x \\ W_n &= -\frac{\Psi_0^{n'}}{\Psi_0^n} = -(n+1) \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned}$$

Tras esto, calculamos el siguiente sistema asociado:

$$H_{n+1} = H_n + 2W_n' = -\partial_{xx} - \frac{n(n+1)}{\cosh^2 x} - 2\frac{n+1}{\cosh^2 x} = -\partial_{xx} - \frac{(n+1)(n+2)}{\cosh^2 x} \quad (5.8)$$

Con esto, podemos afirmar que la estructura propuesta para este sistema son correctos.

5.3. Serie parabólica

El caso de energía nula es un poco diferente, ya que todas las funciones de onda tanto del sistema original como los asociados, poseen la misma energía.

$$H_0 \Psi_0^0 = 0 \Rightarrow \Psi_0^0 = Ax + B \quad (5.9)$$

Los parámetros A, B pueden reabsorberse realizando tanto un cambio de escala como una traslación en la coordenada x . Conociendo el estado fundamental del sistema, calcularemos el potencial y el sistema asociado.

$$W_0 = -\frac{1}{x} \Rightarrow H_1 = -\partial_{xx} + \frac{2}{x}$$

Propondremos la misma ley de transformación que en los casos anteriores.

$$\begin{aligned} \psi_0^n &= x^{n+1} & E_a^b &= 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{N} \\ V_n &= \frac{(n+1)n}{x^2}; & W_n &= -\frac{n+1}{x} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Comprobamos la estructura:

$$\begin{aligned} H_n \psi_0^n &= -(n+1)nx^{n-1} + \frac{(n+1)n}{x^2} x^{n+1} = 0 \\ W_n(x) &= -\frac{\Psi_0^n}{\Psi_0^n} = -\frac{n+1}{x} \end{aligned}$$

Calculamos el sistema asociado:

$$H_{n+1} = H_n + 2W'_n = -\partial_{xx} + \frac{(n+1)n}{x^2} + 2\frac{n+1}{x^2} = -\partial_{xx} + \frac{(n+2)(n+1)}{x^2} \quad (5.11)$$

Que cumple con la estructura propuesta.

Con esto, hemos comprobado que la partícula libre para cualquier valor de la energía es un sistema invariante de forma ya que todos los sistemas asociados al mismo mantienen la misma estructura. Y es aquí donde radica la utilidad de este método ya que para este tipo de sistemas el cálculo del estado fundamental y los operadores escalera es inmediato para cualquier H_n , al poseer un potencial de estructura análoga al sistema inicial, lo que nos permite desplazarnos entre sistemas para calcular así el espectro de estados del sistema de partida.

6. Oscilador armónico unidimensional

Consideraremos el Hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional.

$$H_0 = -\partial_{xx} + \frac{1}{4}\omega^2 x^2 \quad (6.1)$$

Calcularemos el superpotencial del sistema:

$$\frac{1}{4}\omega^2 x^2 = W_0^2 - W_0' + \lambda \Rightarrow W_0 = \pm \frac{\omega}{2}x; \quad \lambda = \frac{\omega}{2}$$

Estas dos factorizaciones no son independientes ya que dan lugar a los mismos operadores escalera:

$$A^\pm = \mp \partial_x + \frac{\omega}{2}x$$

Un cambio en el signo de x simplemente intercambia el superíndice de nuestros operadores de factorización. Por definición, nuestro operador A^- aniquila el estado fundamental del sistema, de energía $\frac{\omega}{2}$. Emplearemos esto para seleccionar el signo del superpotencial ya que esta función de onda debe ser renormalizable. Veamos que funciones son aniquiladas por los operadores A^\pm

$$\begin{aligned} A^- \rightarrow (\partial_x + \frac{\omega}{2}x)\Psi_- = 0 &\rightarrow \Psi_- = e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \\ A^+ \rightarrow (-\partial_x + \frac{\omega}{2}x)\Psi_+ = 0 &\rightarrow \Psi_+ = e^{\frac{1}{4}\omega x^2} \end{aligned}$$

Solo la primera ecuación es renormalizable por lo que debemos seleccionar el signo positivo para el superpotencial. Con esto, el estado fundamental del sistema es de la forma:

$$\Psi_0 = e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} \quad (6.2)$$

Conociendo el valor del superpotencial, podemos expresar el Hamiltoniano del sistema como:

$$H = A^+ A^- + \frac{\omega}{2}$$

La simplicidad de este sistema radica en la linealidad del mismo, ya que al calcular su sistema asociado:

$$H_1 = H_0 + 2W'_0 = H_0 + \omega \quad (6.3)$$

Nos encontramos con el sistema de partida con un desplazamiento energético. Esto implica que la aplicación reiterada del operador A^+ al estado fundamental del Hamiltoniano da lugar a los distintos estados excitados del sistema.

$$HA^+ = A^+ A^- A^+ = A^+(H + \omega)$$

De esta forma multiplicando ambos terminos por un estado del Hamiltoniano, el estado $A^+\Psi_n$ es solución para nuestro sistema con energía $E_n + \omega$, al ser este nuevo estado uno propio del sistema, podemos volver a multiplicar por el operador creación para así encontrar el siguiente estado excitado.

$$\Psi_{n+1} \propto A^+ \Psi_n \Rightarrow \Psi_n \propto (A^+)^n e^{-\frac{1}{4}\omega x^2}; \quad E_n = (n + \frac{1}{2})\omega \quad (6.4)$$

Conociendo la expresión de los estados empleando los operadores escalera, buscamos ahora una expresión polinómica. Para ello emplearemos los polinomios de Hermite h_n que se definen por:

$$h_n(z) = (2z - \partial_z)^n \cdot 1$$

Expresión similar a nuestros operadores creación:

$$\Psi_n \propto (A^+)^n e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} = (-\partial_x + \frac{\omega}{2}x)^n e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} = e^{-\frac{1}{4}\omega x^2} (-\partial_x + \omega x)^n \cdot 1$$

Con lo que podemos expresar los estados del sistema sin normalizar como:

$$\Psi_n(x) \propto h_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right) e^{-\frac{1}{4}\omega x^2}; \quad E_n = \omega(n + \frac{1}{2}) \quad (6.5)$$

De forma que el problema queda completamente resuelto. Veremos ahora el oscilador armónico isotrópico bidimensional.

7. Sistemas multidimensionales

El tratamiento descrito anteriormente solo puede emplearse en el caso de sistemas unidimensionales, por lo que nuestro objetivo en el estudio de sistemas de dimensión mayor, será beneficiarnos de posibles simetrías del sistema que nos permitan simplificar el problema.

Un operador S es una simetría del sistema si este conmuta con nuestro Hamiltoniano

$$[H, S] = 0 \quad (7.1)$$

Esto implica que la acción de estos operadores no modifica los valores propios del Hamiltoniano lo que nos permite encontrar una base de estados comunes:

$$H\Psi = E\Psi, \quad S\Psi = \lambda\Psi$$

Por lo que $S\Psi$ es un estado propio del Hamiltoniano y al mismo tiempo las funciones de onda del Hamiltoniano son estados propios de la simetría. Por lo que conocer los estados propios de la simetría es de gran ayuda ya que las funciones propias del Hamiltoniano se pueden buscar en el subespacio propio V_λ de cada valor propio λ de S .

El número máximo de simetrías que puede tener un sistema queda determinado por la dimensión n del mismo, siendo $2n - 1$ el número máximo de simetrías independientes, incluyendo el propio Hamiltoniano como una de ellas.

Podemos clasificar los sistemas teniendo en cuenta el número de simetrías independientes, s , que posean en tres categorías:

- Sistemas integrables $s = n$
- Sistemas superintegrables $s > n$
- Sistemas máximalmente superintegrables $s = 2n - 1$

Esta descomposición por simetrías no es única, ya que para un mismo sistema podemos encontrar varios conjuntos de simetrías independientes. En nuestro caso, estudiaremos el oscilador armónico isotrópico bidimensional que es un sistema superintegrable de $n = 2$ dimensiones. Comentaremos a continuación brevemente el punto de vista de Fradkin en coordenadas cartesianas y más adelante desarrollaremos el nuestro propio en coordenadas polares.

8. Tensor de Fradkin

En este caso trabajaremos con coordenadas cartesianas donde el Hamiltoniano puede escribirse como:

$$H = -\partial_{xx} + \frac{1}{4}\omega^2 x^2 - \partial_{yy} + \frac{1}{4}\omega^2 y^2 \quad (8.1)$$

Definiremos el tensor de Fradkin como:

$$A_{ij} = -\partial_{ij} + \frac{1}{4}\omega^2 x_i x_j \quad (8.2)$$

Es inmediato comprobar que cada una de las componentes de este hamiltoniano se corresponde con una simetría del sistema

$$[A_{ij}, H] = 0$$

Por otro lado, sabemos que estas cuatro simetrías no son independientes, ya que en este caso el número máximo de simetrías independientes es 3.

Consideraremos el conjunto de simetrías independientes $\{H, A_{xx}, A_{xy}\}$. Ya que las cuatro componentes del tensor, al ser simétrico solo son independientes tres, que puede reducirse a dos teniendo en cuenta que la traza de este tensor se corresponde con el Hamiltoniano del sistema.

Emplearemos los elementos de la diagonal como simetría del sistema. Estos operadores se corresponden con el Hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional en esa dirección del que conocemos su solución, por lo que podemos resolver el sistema completo de inmediato ya que las soluciones del sistema total deben ser proporcionales a los estados propios de ambos sistemas. Con lo que la solución genérica del sistema será de la forma:

$$\Psi_{n,m}(x, y) = X_n(x)Y_m(y)$$

Donde estas funciones se corresponden con estados propios del oscilador armónico unidimensional. Por tanto:

$$H\Psi_{n,m}(x, y) = (H_x + H_y)\Psi_{n,m}(x, y) = (E_n + E_m)\Psi_{n,m}(x, y) \quad (8.3)$$

Con lo que estas funciones son estados propios del Hamiltoniano total. Por lo que este sistema debe cumplir:

$$\Psi_{n,m}(x, y) \propto h_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}x\right) h_m\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}y\right) e^{-\frac{1}{4}\omega(x^2+y^2)}; \quad E_{n,m} = E_n + E_m = \omega(n + m + 1) \quad (8.4)$$

Esta simetría nos permite por tanto resolver de forma sencilla el problema. Sin embargo, esta separación no es única del oscilador isotópico, por lo que analizaremos el problema considerando una simetría única de este tipo de sistemas. Para ello, consideraremos el operador momento angular.

9. El momento angular y el oscilador cuántico plano

El momento angular J es una magnitud pseudo-vectorial que en Mecánica Clásica, se define mediante el producto vectorial $J = R \times P$ donde R es el vector posición de nuestra partícula mientras que P su momento lineal.

Ya que estamos trabajando en un sistema bidimensional, la única componente no nula será J_z ,

$$J_z = xp_y - yp_x \quad (9.1)$$

Veamos el operador asociado a esa función:

$$J_z = x(-i\hbar\partial_y) - y(-i\hbar\partial_x) \quad (9.2)$$

Realizando un cambio a coordenadas polares, podemos identificar el significado físico de este operador,

$$J_z = -i\hbar\partial_\theta \quad (9.3)$$

que de corresponde a una rotación en la coordenada angular.

Al tratarse de una variación angular, este operador será una simetría de todos los sistemas con independencia angular. Es decir, para un sistema bidimensional genérico:

$$H = -\partial_{rr} - \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} + V(r, \theta) = -\partial_{rr} - \frac{1}{r}\partial_r + \frac{J_z^2}{r^2} + V(r, \theta)$$

Es inmediata la condición que debe cumplir el sistema para conmutar con el momento angular.

$$[H, J_z] = [V, J_z] = i\partial_\theta V \quad (9.4)$$

Con lo que podemos concluir que todos los sistemas bidimensionales que posean un potencial que no dependa de la variable angular, conmutan con el momento angular, lo que nos permite resolver ese sistema en coordenadas polares separables.

En concreto en este caso trabajaremos con un potencial de la forma:

$$V(r) = \frac{1}{4}\omega^2 r^2$$

Al ser este operador una simetría del sistema nos interesa conocer las funciones propias y autovalores del Momento angular ya que los estados Ψ de nuestro Hamiltoniano cumplen:

$$HJ_z\Psi = J_zH\Psi = EJ_z\Psi \quad (9.5)$$

Con lo que $J_z\Psi$ también es un estado propio del sistema con la misma energía que la función de partida, por lo que:

$$J_z\Psi \propto \Psi$$

La proporcionalidad de los estados nos permite factorizar las soluciones del sistema:

$$\Psi_{n,\ell}(r, \theta) = R_\ell^n(r)\Theta_\ell(\theta); \quad H\psi_{n,\ell} = E_n\psi_{n,\ell} \quad (9.6)$$

donde Θ_ℓ son las funciones propias del Momento angular tales que:

$$J_z\Theta_\ell = \ell\Theta_\ell \quad (9.7)$$

Estas funciones de onda angulares deben mantener una periodicidad sobre la variable angular, $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$, debido al significado físico de nuestra coordenada angular. Esta condición determina en última instancia los posibles autovalores del Momento angular:

$$\Theta_\ell(\theta) = e^{i\ell\theta}; \quad \ell_\ell = \ell; \quad \forall \ell \in \mathbb{Z} \quad (9.8)$$

Podemos definir unos operadores J_\pm que nos permitan variar el valor del Momento angular,

$$J_\pm = e^{\pm i\theta}, \quad J_\pm \Theta_\ell = \Theta_{\ell \pm 1} \quad (9.9)$$

Veamos ahora como conmutan estos operadores:

$$[J_z, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad J^2 J_\pm = J_\pm (J \pm 1)^2$$

10. Separación en coordenadas polares

Emplearemos estos resultados para resolver el sistema.

$$H\Psi_{n,\ell} = HR_\ell^n \Theta_\ell = E_n \Psi_{n,\ell} \quad (10.1)$$

La separación de variables, nos permite separar el problema anterior en dos problemas conectados:

$$\left(-\partial_{rr} - \frac{1}{r}\partial_r + \frac{J_z^2}{r^2} + \frac{1}{4}\omega^2 r^2\right)R_\ell^n(r)\Theta_\ell(\theta) = E_n R_\ell^n(r)\Theta_\ell(\theta) \quad (10.2)$$

El problema angular queda completamente resuelto al conocer el valor del momento angular. Lo que nos permite obtener la ecuación que debe satisfacer la parte radial de nuestra función

$$\left(-\partial_{rr} - \frac{1}{r}\partial_r + \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{1}{4}\omega^2 r^2\right)R_\ell^n(r) = E_n R_\ell^n(r) \quad (10.3)$$

Con lo que podemos definir el Hamiltoniano radial:

$$H_\ell = -\partial_{rr} - \frac{1}{r}\partial_r + \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \quad (10.4)$$

Para emplear el método de factorización mencionado anteriormente debemos realizar una descomposición sobre nuestra función de onda radial que nos permita eliminar las derivadas de primer orden, para ello emplearemos una función auxiliar f para pasar a una nueva función $u_\ell^n(r)$,

$$R_\ell^n(r) = f(r)u_\ell^n(r) \quad (10.5)$$

Realizamos unas consideraciones previas:

$$\begin{aligned}\partial_r(R) &= (\partial_r f)u + f(\partial_r u) \\ \partial_{rr}(R) &= (\partial_{rr} f)u + 2(\partial_r f)(\partial_r u) + f(\partial_{rr} u)\end{aligned}$$

Sustituyendo en el hamiltoniano, considerando solo los términos diferenciales obtenemos:

$$(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r)R(r) = (\ddot{f} + \frac{1}{r}\dot{f})u + (2\dot{f} + \frac{1}{r}f)\dot{u} + f\ddot{u} \quad (10.6)$$

Por lo que imponiendo la condición

$$2\dot{f} + \frac{1}{r}f = 0$$

que nos permite eliminar las derivadas de primer orden sobre u , determina la función auxiliar

$$f = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Con esto hemos transformado el problema en:

$$\overline{H}_\ell u_\ell^n(r) = E_n u_\ell^n(r)$$

en donde \overline{H}_ℓ :

$$\overline{H}_\ell = -\partial_{rr} + \frac{1}{r^2}(\ell^2 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \quad (10.7)$$

ya no tiene términos con la derivada primera en r .

10.1. Factorizaciones del oscilador radial

A continuación, factorizaremos este Hamiltoniano (10.7) empleando el método descrito en la primera sección.

Buscamos por tanto un par de operadores de la forma:

$$\overline{A}_\ell^\pm = (\mp \partial_r + \overline{W}_\ell) \quad (10.8)$$

tales que nos permitan factorizar el hamiltoniano como:

$$\overline{H}_\ell = \overline{A}_\ell^+ \overline{A}_\ell^- + \overline{\lambda}_\ell \quad (10.9)$$

Sustituyendo las igualdades anteriores obtenemos la condición que debe cumplir el superpotencial del sistema.

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{r^2}(\ell^2 - \frac{1}{4}) + V(r) = \overline{W}_\ell^2 - \overline{W}_\ell' + \overline{\lambda}_\ell \quad (10.10)$$

Emplearemos un superpotencial de prueba de la forma:

$$W_\ell = \frac{a_\ell}{r} + c_\ell r$$

Sustituimos en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}(a_k^2 + a_k) &= \frac{1}{r^2}(\ell^2 - \frac{1}{4}) \rightarrow a_\ell = \pm\ell - \frac{1}{2} \\ c^2 r^2 &= \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \rightarrow c = \pm\frac{\omega}{2} \\ -2ac + c &= \lambda_\ell = c(-2a + 1) = \pm\omega(\mp\ell + 1)\end{aligned}$$

Esto resulta en cuatro posibles factorizaciones para el sistema

$$\begin{aligned}\overline{A}_\ell^\pm &= (\mp\partial_r + \frac{(\ell-\frac{1}{2})}{r} + \frac{w}{2}r); \quad \overline{\lambda}_\ell^A = -w(\ell - 1) \\ \overline{B}_\ell^\pm &= (\mp\partial_r + \frac{(\ell-\frac{1}{2})}{r} - \frac{w}{2}r); \quad \overline{\lambda}_\ell^B = w(\ell - 1) \\ \overline{C}_\ell^\pm &= (\mp\partial_r - \frac{(\ell+\frac{1}{2})}{r} + \frac{w}{2}r); \quad \overline{\lambda}_\ell^C = w(\ell + 1) \\ \overline{D}_\ell^\pm &= (\mp\partial_r - \frac{(\ell+\frac{1}{2})}{r} - \frac{w}{2}r); \quad \overline{\lambda}_\ell^D = -w(\ell + 1)\end{aligned}\tag{10.11}$$

Estas cuatro factorizaciones no son independientes ya que se puede establecer la siguiente relación entre operadores:

$$\begin{aligned}\overline{A}_{\ell+1}^+ &= (-\partial_r + \frac{\ell+\frac{1}{2}}{r} + \frac{w}{2}r) = -(\partial_r - \frac{\ell+\frac{1}{2}}{r} - \frac{w}{2}r) = -(\overline{D}_\ell^-) \\ \overline{B}_{\ell+1}^+ &= (-\partial_r + \frac{\ell+\frac{1}{2}}{r} - \frac{w}{2}r) = -(\partial_r - \frac{\ell+\frac{1}{2}}{r} + \frac{w}{2}r) = -(\overline{C}_\ell^-)\end{aligned}$$

Por lo que solo es necesario considerar un operador de cada igualdad anterior. Trabajaremos con el par $(\overline{A}, \overline{C})$. Si analizamos estos operadores, podemos ver que:

$$A_\ell^\pm = C_{-\ell}^\pm; \quad \lambda_\ell^A = \lambda_{-\ell}^C$$

De forma que estas dos factorizaciones se encuentran relacionadas. El origen de esta relación se debe a la independencia de nuestro Hamiltoniano respecto a una inversión en la coordenada angular.

Reescribiremos las factorizaciones anteriores empleando los operadores (A^\pm, C^\pm) :

$$\begin{aligned}\overline{H}_\ell &= \overline{A}_\ell^+ \overline{A}_\ell^- + \overline{\lambda}_\ell^A = \overline{A}_{\ell+1}^- \overline{A}_{\ell+1}^+ + \overline{\lambda}_{\ell+1}^A - \omega \\ \overline{H}_\ell &= \overline{C}_\ell^+ \overline{C}_\ell^- + \overline{\lambda}_\ell^C = \overline{C}_{\ell-1}^- \overline{C}_{\ell-1}^+ + \overline{\lambda}_{\ell-1}^C - \omega\end{aligned}\tag{10.12}$$

Aplicando e estos operadores al Hamiltoniano del sistema tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\overline{A}_\ell^- \overline{H}_\ell &= (A_\ell^- \overline{A}_\ell^+ + \overline{\lambda}_\ell^A) \overline{A}_\ell^- = (\overline{H}_{\ell-1} + \omega) \overline{A}_\ell^- \\ \overline{C}_\ell^- \overline{H}_\ell &= (\overline{C}_\ell^+ \overline{C}_\ell^- + \overline{\lambda}_\ell^C) \overline{C}_\ell^- = (\overline{H}_{\ell+1} + \omega) \overline{C}_\ell^-\end{aligned}\tag{10.13}$$

De forma que podemos ver el efecto que tienen sobre las funciones de onda,

$$\overline{A}_\ell^- \overline{H}_\ell u_\ell^n = E_n (\overline{A}_\ell^- u_\ell^n) = (\overline{H}_{\ell-1} + \omega) \overline{A}_\ell^- u_\ell^n\tag{10.14}$$

Con lo que $\overline{A}_\ell^- u_\ell^n$ es un estado propio de $H_{\ell-1}$ con autovalor asociado $E_n - \omega$ con lo que podemos afirmar

que el espectro de energías del sistema es lineal.

Podemos realizar un planteamiento análogo empleando los operadores $(\bar{A}_\ell^\pm, \bar{C}_\ell^\pm)$, que resulta en una variación tanto de E como de ℓ .

$$\begin{aligned}\bar{A}_{\ell+1}^+ \bar{H}_\ell &= (\bar{A}_{\ell+1}^+ \bar{A}_{\ell+1}^- + \bar{\lambda}_{\ell+1}^A - \omega) \bar{A}_{\ell+1}^+ = (\bar{H}_{\ell+1} - \omega) \bar{A}_{\ell+1}^+ \\ \bar{C}_{\ell-1}^+ \bar{H}_\ell &= (\bar{C}_{\ell-1}^+ \bar{C}_{\ell-1}^- + \bar{\lambda}_{\ell-1}^C - \omega) \bar{C}_{\ell-1}^+ = (\bar{H}_{\ell-1} - \omega) \bar{C}_{\ell-1}^+\end{aligned}\quad (10.15)$$

Una forma sencilla de recoger estos resultados es ilustrar gráficamente el efecto de nuestros operadores sobre las funciones de onda del sistema.

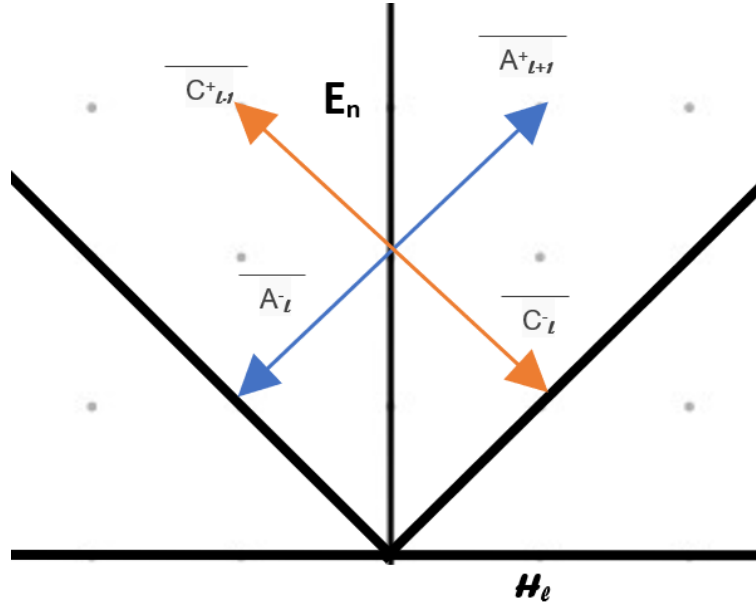


Figura 2: Acción de los operadores de factorización A^\pm, C^\pm .

Emplearemos ahora las propiedades de los operadores $(\bar{A}_\ell^\pm, \bar{C}_\ell^\pm)$ para calcular explícitamente el resto de simetrías del sistema total.

Busquemos primero combinaciones de nuestros operadores que mantengan la energía del sistema,

$$\begin{aligned}\bar{A}_{\ell-1}^- \bar{C}_{\ell-1}^+ \bar{H}_\ell &= \bar{A}_{\ell-1}^- (\bar{H}_{\ell-1} - \omega) \bar{C}_{\ell-1}^+ = \bar{H}_{\ell-2} \bar{A}_{\ell-1}^- \bar{C}_{\ell-1}^+ \\ \bar{C}_{\ell+1}^- \bar{A}_{\ell+1}^+ \bar{H}_\ell &= \bar{C}_{\ell+1}^- (\bar{H}_{\ell+1} - \omega) \bar{A}_{\ell+1}^+ = \bar{H}_{\ell+2} \bar{C}_{\ell+1}^- \bar{A}_{\ell+1}^+\end{aligned}\quad (10.16)$$

De esta forma, estos operadores que hemos encontrado, modifican el valor de ℓ , manteniendo la energía

del sistema. Definimos los operadores:

$$\begin{aligned}\overline{S}_\ell^- &= \overline{A}_{\ell-1}^- \overline{C}_{\ell-1}^+ \\ \overline{S}_\ell^+ &= \overline{C}_{\ell+1}^- \overline{A}_{\ell+1}^+\end{aligned}$$

Que podemos expresar de forma explícita:

$$\begin{aligned}\overline{S}_\ell^+ &= (-\partial_{rr} - 2\frac{\ell-1}{r}\partial_r - \frac{(\ell-\frac{1}{2})(\ell-\frac{5}{2})}{r^2} + \frac{1}{4}\omega^2 r^2) \\ \overline{S}_\ell^- &= (-\partial_{rr} + 2\frac{\ell+1}{r}\partial_r - \frac{(\ell+\frac{1}{2})(\ell+\frac{5}{2})}{r^2} + \frac{1}{4}\omega^2 r^2)\end{aligned}\tag{10.17}$$

11. Las factorizaciones y simetrías en el espacio total

Los operadores que hemos encontrado actúan sobre el espacio de las funciones u_ℓ^n , en esta sección nos encargaremos de encontrar operadores análogos que actúen sobre el espacio total del sistema.

Para ello, debemos recordar la transformación realizada sobre el problema:

$$\Theta_\ell(\theta)f(r)\overline{H}_\ell f(r)^{-1}R_\ell^n(r) = H\Theta_\ell(\theta)R_\ell^n(r)\tag{11.1}$$

Realizaremos un tratamiento análogo sobre los operadores $(\overline{A}_\ell^\pm, \overline{C}_\ell^\pm)$, para ello debemos tener en cuenta que estos operadores modifican el valor del momento angular, como podemos en el esquema anterior.

Por lo que, teniendo en cuenta estos efectos, definimos los operadores (A^\pm, C^\pm) que actúan sobre la función de onda total de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Theta_{\ell-1}f\overline{A}_\ell^- f^{-1}\Theta_{-\ell} &= A^- \\ \Theta_{\ell+1}f\overline{A}_{\ell+1}^+ f^{-1}\Theta_{-\ell} &= A^+ \\ \Theta_{\ell+1}f\overline{C}_\ell^- f^{-1}\Theta_{-\ell} &= C^- \\ \Theta_{\ell-1}f\overline{C}_{\ell-1}^+ f^{-1}\Theta_{-\ell} &= C^+\end{aligned}\tag{11.2}$$

Gracias a la sencilla estructura de las funciones Θ_ℓ y f , podemos calcular de forma inmediata los operadores del espacio total. Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$\begin{aligned}A^\pm &= e^{\pm i\theta}(\mp\partial_r + \frac{J_z}{r} + \frac{\omega}{2}r) \\ C^\pm &= e^{\mp i\theta}(\mp\partial_r - \frac{J_z}{r} + \frac{\omega}{2}r)\end{aligned}\tag{11.3}$$

Calculemos los conmutadores de estos operadores:

$$\begin{aligned}[A^+, A^-] &= \omega \\ [C^+, C^-] &= \omega \\ [A^\pm, C^\pm] &= 0\end{aligned}\tag{11.4}$$

Conociendo la expresión de estos operadores en el espacio total, nos preguntamos si se mantienen las propiedades de sus análogos en el espacio reducido.

Estos operadores nos permiten factorizar el Hamiltoniano total del sistema:

$$\begin{aligned} H &= A^+ A^- + \omega - \omega J_z \\ H &= C^+ C^- + \omega + \omega J_z \end{aligned} \quad (11.5)$$

Que podemos expresar el Hamiltoniano como una combinación lineal de las dos posibles factorizaciones como:

$$H = \frac{1}{2}(A^+ A^- + C^+ C^-) + \omega \quad (11.6)$$

El término ω se corresponde con la energía umbral del sistema.

Calculamos los conmutadores de nuestros operadores con nuestro Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} [H, A^\pm] &= \pm \omega A^\pm \\ [H, C^\pm] &= \pm \omega C^\pm \end{aligned} \quad (11.7)$$

De forma que estos operadores mantienen las propiedades del sistema reducido, modificando el valor del momento angular así como la energía.

Emplearemos ahora estas reglas de conmutación para verificar que los operadores \bar{S}^\pm calculados anteriormente se corresponden con simetrías del sistema.

$$[H, S^\mp] = [H, A^- C^+] = [H, A^-] C^+ + A^- [H, C^+] = 0 \quad (11.8)$$

Nos interesa ahora calcular explícitamente estos operadores:

$$S^\pm = A^\pm C^\mp = e^{\pm i 2\theta} \left(-\partial_{rr} \pm \frac{(2J_z - 1)}{r} \partial_r - \frac{J_z(J_z \pm 2)}{r^2} + \frac{1}{4} \omega^2 r^2 \right) = e^{\pm i 2\theta} \left(H \pm 2 \frac{J_z - 1}{r} \partial_r - 2 \frac{J_z(J_z \pm 1)}{r^2} \right) \quad (11.9)$$

Nos interesa ahora calcular los conmutadores de los operadores S^\pm con el momento angular.

$$[S^+, S^-] = 2\omega^2 J_z; \quad [J_z, S^\pm] = \pm 2S^\pm \quad (11.10)$$

Ya que redefiniendo estos operadores de la forma:

$$L_\pm = \frac{S^\pm}{\omega\sqrt{2}}; \quad L_z = \frac{J_z}{2}$$

Obtenemos las reglas de conmutación estándar características del grupo de rotación $SO(3)$.

$$[L_z, L_\pm] = \pm L_\pm; \quad [L_+, L_-] = 2L_z \quad (11.11)$$

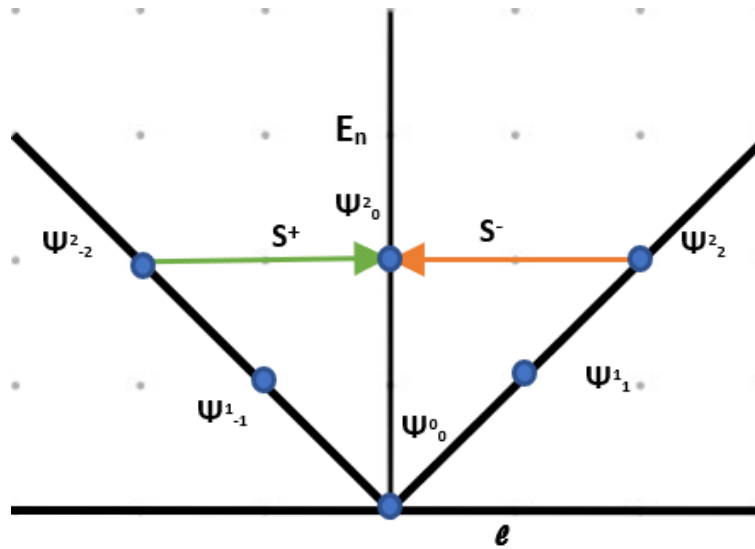
Para resumir, en este caso hemos encontrado el conjunto de simetrías $\{H, J_z, S^\pm\}$ funcionalmente independientes. Que estudiando la independencia lineal de estos operadores obtenemos :

$$\begin{aligned} S^+ + S^- &= 2A_{yy} - 2A_{xx} \\ S^+ - S^- &= 4iA_{xy} \end{aligned}$$

De forma que las simetrías obtenidas por los diferentes métodos no son funcionalmente independientes. Resultado trivial ya que hemos obtenido por ambos métodos 3 operadores independientes que se corresponde con el número máximo de simetrías funcionalmente independientes que puede poseer el sistema. Como vimos con los operadores análogos en el sistema reducido, estos operadores modifican el momento angular de nuestra función de onda en dos unidades manteniendo la energía del sistema. Podemos por tanto, emplear este operador para encontrar las funciones de onda del sistema con la misma energía, ya que:

$$S^- \Psi_{n,\ell} \propto \Psi_{n,\ell-2} \quad (11.12)$$

Que podemos ilustrar gráficamente de la forma:



Nos beneficiaremos de esta propiedad para calcular el espectro de estados del sistema en la sección siguiente.

11.1. Estados generados por las simetrías

En este apartado emplearemos los operadores (A^\pm, C^\pm) para calcular las funciones de onda del sistema, para ello primero haremos un inciso sobre nuestros operadores

$$\begin{aligned} A^\pm(r, \theta) &= e^{\pm i\theta} \left(\mp \partial_r - \frac{i}{r} \partial_\theta + \frac{\omega}{2} r \right) \\ C^\pm(r, \theta) &= e^{\mp i\theta} \left(\mp \partial_r + \frac{i}{r} \partial_\theta + \frac{\omega}{2} r \right) \end{aligned} \quad (11.13)$$

Podemos ver que tras realizar un cambio de coordenadas tal que $\theta' = -\theta$ estos operadores son análogos, ya que $A^\pm(r, \theta) = C^\pm(r, -\theta)$. Por lo que solo consideraremos los operadores C^\pm ya que para el caso A^\pm solo debemos realizar el cambio de coordenadas anterior. Esta propiedad también se extiende a nuestras simetrías S^\pm ya que $S^+(r, \theta) = S^-(r, -\theta)$.

Es conveniente considerar los estados aniquilados por los operadores A^\pm, C^\pm ya que estos mismos estados serán aniquilados por nuestras simetrías S .

$$S^\pm \psi = A^\pm C^\mp \psi = C^\mp A^\pm \psi = 0$$

De tal forma que nuestras simetrías aniquilan los mismos estados que los operadores A^\pm, C^\pm . Realizando un cálculo de los estados aniquilados por cada uno de estos operadores llegamos a la conclusión de que solo los estados aniquilados por los operadores A^-, C^- tienen significado físico al ser los únicos de cuadrado integrable.

Por lo que considerando el operador C^- , recordamos que el Hamiltoniano del sistema se puede factorizar como:

$$H = C^+ C^- + \omega(J_z + 1) \quad (11.14)$$

De forma que un estado Ψ_ℓ^n que sea aniquilado por el operador C^-

$$C^- \Psi_{n,\ell} = 0 \quad (11.15)$$

haciendo uso de (11.14), será un estado propio del sistema con energía asociada $E_n = \omega(\ell + 1)$.

Estos estados poseen momento angular máximo, $n = \ell_{\max}$. Esta es la razón por la que estos estados son aniquilados por el operador C^- y por lo tanto por la simetría S^+ .

Nos interesa encontrar este tipo de estados ya que la aplicación posterior de los operadores S^\pm , nos permiten formar una base del espacio de todos los estados con la misma energía.

Resolvemos la ecuación anterior, teniendo en cuenta la descomposición en variables separadas de nuestras funciones de onda, de forma que la ecuación a resolver es:

$$\left(\partial_r - \frac{\ell}{r} + \frac{\omega}{2} r \right) R_\ell^n(r) = 0$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno:

$$\Psi(r = 0, \theta) = \Psi(r = 0), \quad \Psi(r \rightarrow \infty, \theta) = 0, \quad \Psi(r, \theta) = \Psi(r, \theta + 2\pi)$$

obtenemos los estados aniquilados:

$$\Psi_{\ell_{\max}}^{\ell_{\max}} = r^{\ell_{\max}} e^{i\ell_{\max}\theta - \frac{1}{4}\omega r^2}; \quad \forall \ell_{\max} \in \mathbb{N} \cup 0, \quad \ell_{\max} \equiv n \quad (11.16)$$

El calculo análogo con el operador A^- , nos da la función de onda con momento angular $\ell_{\min} = -\ell_{\max}$. Estos dos estados poseen la misma estructura para cualquier valor de n .

$$\begin{cases} \Psi_n^n = r^n e^{in\theta - \frac{1}{4}\omega r^2} \\ \Psi_{-n}^n = r^n e^{in\theta - \frac{1}{4}\omega r^2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup 0 \quad (11.17)$$

Podemos ver como la parte radial es idéntica para ambos estados, cambiando solo el estado propio del momento angular.

El resto de estados se deben calcular empleando los operadores S^\pm ya que podemos emplear estos operadores para modificar en dos unidades el valor del momento angular.

$$S^- \Psi_n^n \propto \Psi_{n-2}^n \quad (11.18)$$

La simetría que existe en el signo del momento angular, nos permite calcular la degeneración del sistema para cada valor de energía $E_n = \omega(n+1)$ fijo.

Si existe un estado con momento angular a , debe existir un estado análogo con momento angular $-a$, esto implica que tendremos una degeneración forma $g_n = 2n+1$ que estamos acostumbrados para el caso del operador L_z del grupo de rotaciones $SO(3)$, en nuestro caso $L_z = \frac{J_z}{2}$ por lo que para una energía E_n , el momento angular máximo asociado $L_{\max} = \frac{n}{2}$ por lo que la degeneración energética de nuestro sistema es $g_n = n+1$.

Para una energía dada, nuestros $n+1$ estados serán:

$$\Psi_{\ell=n-2a}^n = (S^-)^a \Psi_n^n; \quad a = 0, 1, \dots, n \quad (11.19)$$

Un planteamiento análogo puede hacerse empleando el operador S^+ , partiendo del estado Ψ_{-n}^n .

Veamos el caso genérico de la aplicación de este operador a las funciones Ψ_ℓ^n teniendo en cuenta la expresión para S^- en la que interviene el Hamiltoniano del sistema.

$$\Psi_{n-2}^n = S^- \Psi_n^n = (2n)r^{n-2} e^{i(n-2)\theta - \frac{1}{4}\omega r^2} (\omega r^2 - 2(n-1)) \quad (11.20)$$

Podemos reabsorber el termino $2n$ con la normalización de la función de onda. Por otro lado, teniendo en cuenta que $\Psi_b^a(r, \theta) = \Psi_{-b}^a(r, -\theta)$ nos permite reducir el problema del calculo de estados.

$$\Psi_{2-n}^n = (\omega r^2 - (n-1))r^{n-2} e^{i(2-n)\theta - \frac{1}{4}\omega r^2} \quad (11.21)$$

Veamos ahora ejemplos de las funciones de onda del sistema

11.2. Funciones propias

En este apartado calcularemos las funciones de onda de los casos $n = 0, 1, 2, 3$ y representaremos su parte radial. Al tratarse de los estados aniquilados o simplemente es necesario aplicar una vez nuestros operadores S , podemos calcular los estados de inmediato. Una representación gráfica puede verse en la figura Fig. 3.

$$\begin{aligned} \Psi_0^0 &= e^{-\frac{1}{4}\omega r^2} & \Psi_{\pm 1}^1 &= r e^{\pm i\theta - \frac{1}{4}\omega r^2} \\ \Psi_{\pm 2}^2 &= r^2 e^{\pm i2\theta - \frac{1}{4}\omega r^2} & \Psi_0^2 &= (\omega r^2 - 2) e^{-\frac{1}{4}\omega r^2} \\ \Psi_{\pm 3}^3 &= r^3 e^{\pm i3\theta - \frac{1}{4}\omega r^2} & \Psi_{\pm 1}^3 &= (\omega r^2 - 4) r e^{\pm i\theta - \frac{1}{4}\omega r^2} \end{aligned} \quad (11.22)$$

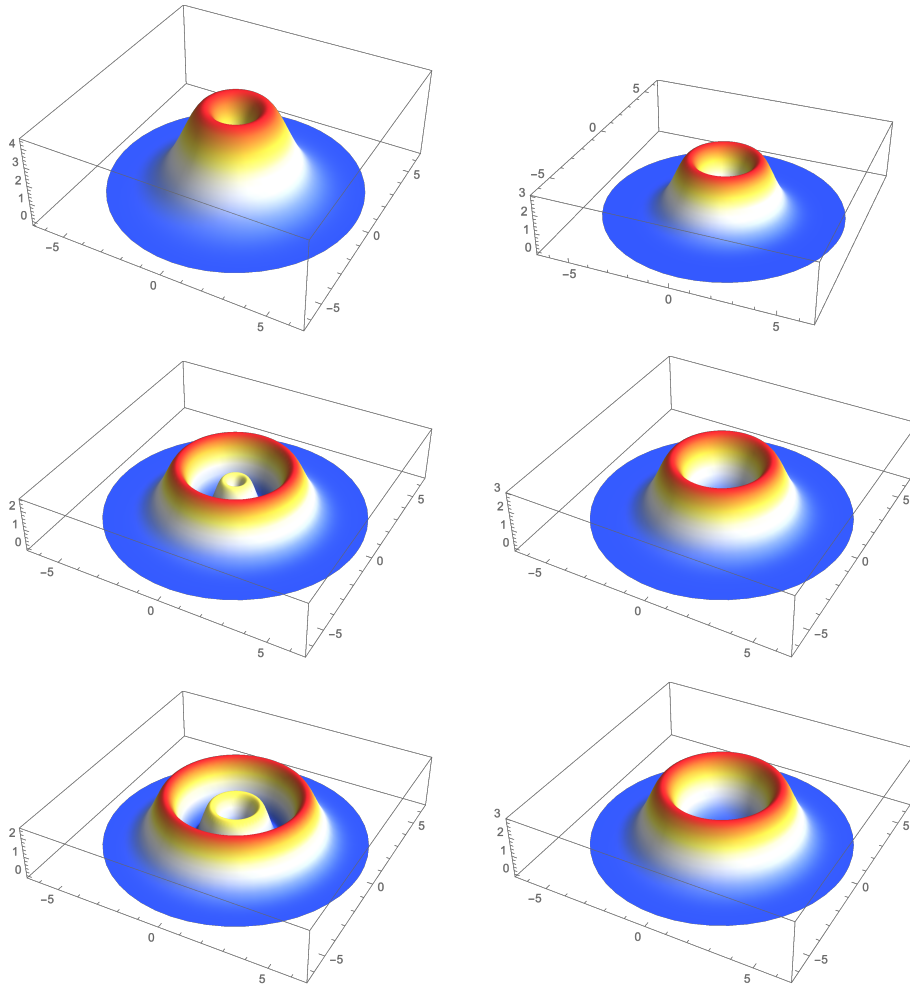


Figura 3: Gráficos para las densidades de onda para los estados Ψ_0^0 (arriba izda), $\Psi_{\pm 1}^1$ (arriba dcha); Ψ_0^2 (medio izda), $\Psi_{\pm 2}^2$ (medio dcha); $\Psi_{\pm 1}^3$ (bajo izda), $\Psi_{\pm 3}^3$ (bajo dcha).

12. Simetrías del oscilador clásico plano

En este apartado veremos el significado físico de nuestros operadores en el análogo clásico del desarrollo anterior.

Para ello realizaremos la correspondencia estándar de operadores cuánticos y variables canónicas clásicas:

$$\begin{aligned}
 -i\partial_r &\rightarrow p_r \\
 -i\partial_\theta &\rightarrow p_\theta \equiv J_z
 \end{aligned}
 \tag{12.1}$$

Lo que nos permite (con cierto cuidado) expresar las funciones asociadas a nuestros operadores como:

$$\begin{aligned}
A^\pm &\rightarrow a^\pm = e^{\pm i\theta}(\mp i p_r + \frac{J_z}{r} + \frac{\omega}{2}r) \\
C^\pm &\rightarrow c^\pm = e^{\mp i\theta}(\mp i p_r - \frac{J_z}{r} + \frac{\omega}{2}r) \\
H &\rightarrow h = p_r^2 + \frac{J_z^2}{r^2} + \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \\
S^\pm = A^\pm C^\mp &\rightarrow s^\pm = a^\pm c^\mp = e^{\pm i2\theta}(p_r^2 \mp i \frac{2J_z p_r}{r} - \frac{J_z^2}{r^2} + \frac{1}{4}\omega^2 r^2)
\end{aligned} \tag{12.2}$$

Calculemos ahora los corchetes de Poisson de nuestras funciones para comprobar que se mantienen las propiedades descritas en los conmutadores cuánticos de los operadores asociados a nuestras funciones.

$$\begin{aligned}
\{a^+, a^-\} &= 2i\omega & \{a^\pm, c^\pm\} &= 0 \\
\{c^+, c^-\} &= 2i\omega & \{s^\pm, h\} &= 0 \\
\{s^\pm, J_z\} &= \pm 2is^\pm & \{s^+, s^-\} &= -4i\omega^2 J_z
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Vemos que las funciones s^\pm son constantes del movimiento. Una constante de movimiento a se caracteriza por:

$$\frac{da}{dt} = \{a, h\} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

En nuestro caso, las funciones s^\pm en efecto lo son ya que verifican $\{s^\pm, h\} = 0$ y no dependen explícitamente del tiempo.

Emplearemos estas constantes del movimiento para calcular la orientación de la trayectoria. Expresaremos esta constante compleja de la forma:

$$s^\pm = e^{\pm i2\theta}((H - \frac{2J_z^2}{r^2}) + i(\mp \frac{2J_z p_r}{r})) = q_0 e^{\pm 2i\theta_0} \tag{12.4}$$

Lo que nos permite despejar las ecuaciones para r y p_r como:

$$\begin{aligned}
E - \frac{2J_z^2}{r^2} &= q_0 \cos 2(\theta - \theta_0) \\
\frac{2J_z p_r}{r} &= q_0 \sin 2(\theta - \theta_0)
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Donde $q_0^2 = E^2 - \omega^2 J_z^2$, ya que el modulo de ambas funciones s^\pm es idéntico por lo que:

$$q_0^2 = s^+ s^- = a^+ a^- c^+ c^- = (E - \omega J_z)(E + \omega J_z) = E^2 - \omega^2 J_z^2 \geq 0$$

Lo que significa que un movimiento con energía E puede tener un momento angular máximo que viene dado por $J_z^{\max} = E/\omega$. Las fórmulas para las constantes de movimiento (12.4) nos permiten obtener

inmediatamente la trayectoria en forma polar $r(\theta)$ y el momento $p_r(\theta)$:

$$r(\theta) = \frac{J_z \sqrt{2}}{\sqrt{E - \sqrt{E^2 - \omega^2 J_z^2} \cos 2(\theta - \theta_0)}} \quad (12.6)$$

$$p_r(\theta) = \sqrt{\frac{E^2 - \omega^2 J_z^2}{E - \sqrt{E^2 - \omega^2 J_z^2} \cos 2(\theta - \theta_0)}} \sin 2(\theta - \theta_0) \quad (12.7)$$

Cada trayectoria queda fijada por los valores de las tres constantes de movimiento independientes: E , energía; ℓ , momento angular; y θ_0 , fase. Véase una ilustración de las trayectorias en las figuras Fig. 4-5.

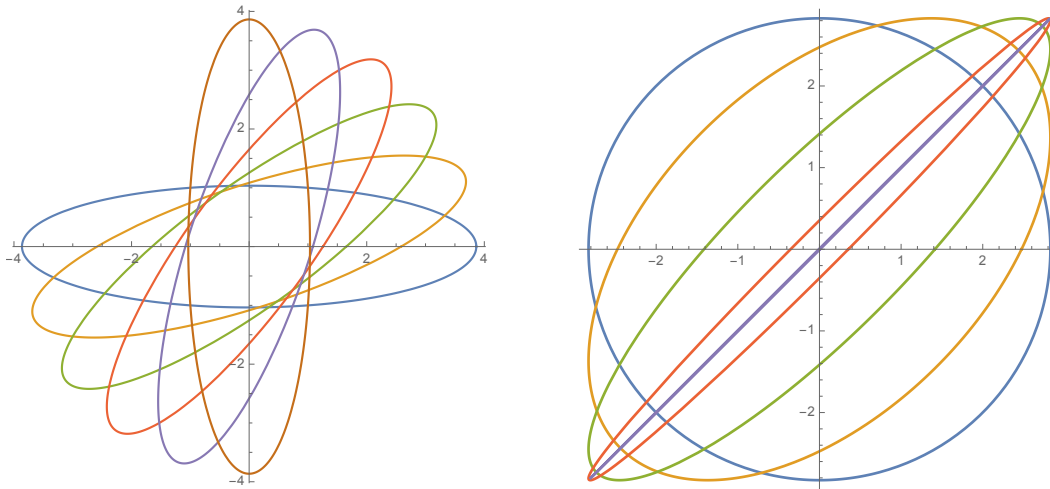


Figura 4: (Izquierda) Gráficos para las trayectorias, fijando los valores de $E = 4$ y $\ell = 2$ pero variando el ángulo θ_0 . (Derecha) Trayectorias fijadas por $E = 4$ y $\theta_0 = \pi/4$ pero variando el momento angular ℓ (y por tanto la excentricidad de 0 a 1).

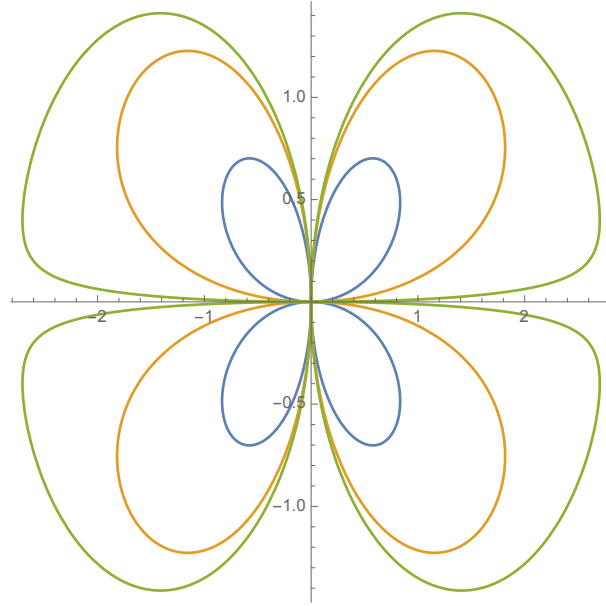


Figura 5: Trayectorias del momento p_r para $E = 4$, $\theta_0 = 0$ y distintos valores de $\ell = 3, 5, 2, 0, 5$.

13. Conclusiones

- Hemos desarrollado un método general que nos permite calcular operadores cuyo efecto sobre las funciones de onda del sistema es conocido, lo que nos permite simplificar significativamente el cálculo de las mismas.
- El método anterior nos permite factorizar este sistema por medio de dos familias de operadores A^\pm, C^\pm . Estas dos factorizaciones aparecen debido a la invariancia de nuestro Hamiltoniano respecto a una inversión en la variable angular. Ya que:

$$H(r, \theta) = H(r, -\theta); \quad A^\pm(\theta) = C^\pm(-\theta)$$

Por lo que el efecto de estos operadores sobre nuestras funciones de onda debe ser simétrico sobre la parte radial, siendo inversa su acción sobre el término angular. En última instancia es esta propiedad la que nos permite definir las simetrías S^\pm ya que partiendo de una factorización única, el único Operador que mantenga la energía de nuestros estados que podemos construir es el Hamiltoniano.

- En este caso, los operadores de simetría encontrados en la factorización angular $\{S^\pm, J_z\}$ forman un álgebra de Lie correspondiente al grupo $SO(3)$, asociado al grupo de rotaciones tridimensionales. Esta propiedad nos permite explicar la degeneración energética del sistema, así como los valores del momento angular permitidos para los estados del sistema.
- El método descrito anteriormente nos ha permitido calcular las expresiones de las funciones de onda

del sistema aplicando los operadores S^\pm :

$$\Psi_{n-2a}^n(r, \theta) = (S^-)^a r^n e^{in\theta - \frac{1}{4}\omega r^2}; \quad E_n = \omega(n+1); \quad \forall n, a \in \mathbb{N} \cup 0 \quad / \quad a \leq n; \quad (13.1)$$

De forma que el sistema queda completamente descrito conociendo el valor de la energía y el momento angular.

En el caso clásico, es necesaria una tercera constante del movimiento θ_0 para determinar la trayectoria, esta información no es necesaria para el caso cuántico ya que debido a la estructura de nuestra función de onda, una traslación en la variable angular se corresponde con un factor de fase que podemos eliminar al normalizar el sistema.

- Este trabajo sienta las bases para un posible estudio comparativo entre el sistema de Kepler-Coulomb y el oscilador armónico, ya que el método descrito nos permite analizar este nuevo sistema, que conocemos es superintegrable. El interés de esta comparativa reside en la gran similitud entre ambos sistemas.

Referencias

- [1] Infeld, L. and Hull, T. (1951) *The Factorization Method*, Rev.Mod. Phys., **23**, 21-68
- [2] Fred Cooper, Avinash Khare, Uday Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, 2001, World Scientific (Singapore)
- [3] Yu. N. Demkov, *Symmetry group of the isotropic oscillator*, Sov. Phys. JETP. **36** 63 (1959).
- [4] D. M. Fradkin, *Three-Dimensional Isotropic Harmonic Oscillator and SU(3)*, Am. J. Phys. **33** (1965), 207-211
- [5] D. M. Fradkin, *Existence of the Dynamic Symmetries o(4) and su(3) for All Classical Central Potential Problems*, Prog. Theor. Phys. **37** 798 (1967).