



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

**Representación de Fock-Bargmann y  
Espacios de Hilbert de Funciones Analíticas  
en Mecánica Cuántica**

***Autor:** Jesús Dueñas Pamplona*

***Tutor:** Luis Miguel Nieto Calzada*

*Departamento de Física Teórica, Atómica y Óptica*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Oscilador armónico cuántico . . . . .	7
<b>2. El espacio de Fock-Bargmann</b>	<b>11</b>
2.1. Estados coherentes . . . . .	11
2.1.1. Producto y continuidad . . . . .	12
2.1.2. Resolución de la identidad . . . . .	13
2.1.3. Saturación de la desigualdad de incertidumbre de Heisemberg . . . . .	14
2.1.4. Evolución temporal de estados coherentes . . . . .	15
2.2. Introducción al espacio de Fock-Bargmann . . . . .	16
2.3. Construcción del espacio de Fock-Bargmann . . . . .	19
2.3.1. Producto interno . . . . .	19
2.3.2. La transformación integral $\langle \bar{z} x \rangle$ . . . . .	22
2.3.3. Representaciones gráficas de estados coherentes . . . . .	23
2.4. Propiedades del espacio de Fock-Bargmann . . . . .	27
2.4.1. Algunas desigualdades . . . . .	28
2.4.2. Vectores principales . . . . .	29
2.4.3. Operadores lineales y continuos . . . . .	29
2.4.4. Vuelta al espacio de estados . . . . .	30
2.4.5. Orden y tipo de las funciones enteras . . . . .	31
<b>3. Aplicaciones</b>	<b>35</b>
3.1. El oscilador armónico cuántico . . . . .	35
3.2. Modelos de Rabi . . . . .	36
3.3. Modelo de Jaynes-Cummings . . . . .	38
3.4. Modelo de Rabi de un solo fotón . . . . .	41
3.4.1. La ecuación confluyente de Heun . . . . .	41
3.4.2. La obtención del espectro . . . . .	45
3.4.3. Representación e interpretación del espectro . . . . .	50
3.5. Modelo de Rabi de dos fotones . . . . .	53
<b>4. Otros espacios de Hilbert de funciones analíticas</b>	<b>55</b>
4.1. Espacios de Bergman . . . . .	55
4.1.1. Resultados . . . . .	56
4.1.2. Aplicación del núcleo de Bergman . . . . .	57
4.2. Espacios de Hardy y aplicaciones . . . . .	58
<b>5. Conclusiones</b>	<b>61</b>



# Resumen

Desde mediados del pasado siglo, la utilización de distintos espacios de funciones para hacer representaciones en Mecánica Cuántica ha ido cobrando mayor relevancia. Este trabajo presenta un compendio de los resultados fundamentales concernientes al espacio y la representación de Fock-Bargmann, la cual se podrá interpretar en términos de estados coherentes. Gracias a ella, se pueden representar las funciones de onda de cuadrado integrable como funciones enteras, simplificando muchos cálculos y procedimientos. Además, se presenta también una serie de aplicaciones de esta representación al cálculo de espectros de diversos hamiltonianos, especialmente una a familia de ellos, que describen la interacción de la radiación con un sistema de dos niveles, los llamados modelos de Rabi. Para acabar, se aportará una vista general de otros espacios de Hilbert de funciones analíticas que tienen relevancia en Mecánica Cuántica.

**Palabras clave:** Fock-Bargmann, espacios de Hilbert, funciones analíticas, estados coherentes, modelos de Rabi.

# Abstract

From the 1950s, a large variety of function spaces have found increasing relevance in quantum mechanical representations. This work summarizes some fundamental results concerning Fock-Bargmann space and representation, which may be constructed by means of coherent states. In this way, wavefunctions, which are square integrable functions, can be depicted as entire functions. In some cases, the calculation of energy levels is considerably simplified by Fock-Bargmann representation. Moreover, a series of quantum hamiltonians are presented and their spectra are found. Particular attention is paid to a family of models, called Rabi models, arising from the interaction of radiation with a two-level system. Finally, an overview of other Hilbert spaces of analytic functions is shown.

**Keywords:** Fock-Bargmann, Hilbert spaces, analytic functions, coherent states, Rabi models.



# Capítulo 1

## Introducción

Los albores de una nueva rama de la ciencia moderna comenzaron a fraguarse en 1900 cuando Max Planck (1858-1947), hoy considerado padre y precursor de la teoría cuántica, propuso lo que él entendió como una astucia matemática para dar explicación al espectro de radiación del cuerpo negro. Sin embargo, el mismo Planck fue reacio a creer que aquel artificio de considerar cuantos de energía  $\hbar\omega$  diera respuesta a la verdadera naturaleza de la radiación.

Pocos años más tarde, en 1905, Albert Einstein (1879-1955) dio explicación al efecto fotoeléctrico, fenómeno que había intrigado a la comunidad científica por decenas de años, utilizando los mismos cuantos de energía que habían sido introducidos por Planck. Este nuevo acercamiento a la naturaleza de la luz le valió el premio Nobel en 1921. Paso a paso, la idea de que los intercambios de energía se efectuaban en forma de pequeños paquetes se fueron asentando en la física, pareciendo un enfoque cada vez más natural.

Los aportes de físicos y matemáticos como Erwin Schrödinger (1887-1961), Louis de Broglie (1892-1987), Werner Heisenberg (1901-1976) o John von Neumann (1903-1957) fueron contribuyendo progresivamente a la consolidación de la nueva teoría, y junto con los aportes de David Hilbert (1862-1943) y Paul Dirac (1902-1984) supusieron su formalización y unificación. En esta nueva concepción la idea de medida y de la perturbación asociada a la medida en un sistema físico cobraron un papel fundamental.

En este trabajo presentamos herramientas, de carácter profundamente matemático, dentro de esta teoría cuántica, que dan capacidad para abordar cierto tipo de problemas, de forma especial los relacionados con hamiltonianos provenientes de la interacción entre luz y materia. Se trata de espacios de funciones analíticas que surgieron a partir de los trabajos de Valentine Bargmann (1908-1989) [1], Vladimir Fock (1898-1974) [16], Stephan Bergman (1895-1977) [2], Max Schiffer (1911-1997) [2], Peter L. Duren (1935) [10, 11] o Godfrey H. Hardy (1877-1947) [19] a lo largo especialmente de la etapa comprendida entre los años 1950 y 1970.

Dado que los espacios de Hilbert habían mostrado ya ser la herramienta eficaz con la cual tratar los problemas que surgían de la emergente física cuántica, muchos de los trabajos antes mencionados se propusieron continuar en esa línea de buscar nuevos espacios de Hilbert que pudieran dar respuesta a diversidad de preguntas que iban surgiendo sucesiva-

mente. Este enfoque y el interés que acarreó desembocaron en la creación de los espacios de Fock-Bargmann, y en la aplicación en la teoría cuántica de todo lo concerniente a los entonces novedosos espacios de Bergman o los espacios de Hardy<sup>1</sup>.

Respecto a la estructura del presente documento, hacemos a continuación un pequeño inciso indicando el contenido de los distintos capítulos. En el Capítulo 2 se presentarán los espacios de Fock-Bargmann, espacios de Hilbert de funciones analíticas que surgen de forma natural al considerar los elementos del espacio de estados como generados por superposición de estados resultantes de aplicar  $n$  veces el operador de creación sobre el ket vacío. Esta representación ofrece la posibilidad de trasladar mediante una isometría los problemas del espacio de estados a un espacio de funciones analíticas que permite resolver de forma más sencilla algunos problemas. En este capítulo se presentarán sus principales propiedades matemáticas y se introducirán los *estados coherentes*, que, como se verá en detalle, están profundamente relacionados.

En el Capítulo 3 se presentarán algunas aplicaciones del formalismo de Fock-Bargmann. Además de resolver el oscilador armónico cuántico, se presentarán ciertos modelos llamados modelos de Rabi, que reflejan interacción entre radiación y sistemas de dos niveles. El objetivo de presentar estos modelos es dar una idea clara de las posibilidades de aplicar el espacio de Fock-Bargmann a problemas concretos en Mecánica Cuántica. Las distintas secciones se centrarán en el cálculo del espectro de los hamiltonianos de estos modelos.

Finalmente, en el Capítulo 4 se presentarán de forma muy resumida otros espacios de funciones analíticas que tienen aplicaciones en Mecánica Cuántica, como son los espacios de Bergman y los espacios de Hardy, junto con algunos ejemplos de sus aplicaciones. Esta exposición está rematada por el Capítulo 5, en el que se presentan unas conclusiones a modo de resumen del trabajo.

A continuación, se darán algunas definiciones, muy comunes en el lenguaje del análisis funcional, para aquellos que no estén familiarizados con ellas, debido a que se utilizarán frecuentemente a lo largo de todo el trabajo.

Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado que es completo respecto de su norma. Que un espacio sea completo quiere decir que toda sucesión de Cauchy<sup>2</sup> es convergente a un elemento del espacio. Esto ha de entenderse en el sentido de que dicho espacio no tiene agujeros (no en el sentido topológico), es decir, que cuando nos acercamos debidamente hacia algo que parece estar en el espacio, esto, de hecho, está en el espacio. Esta propiedad es origen de muchas muy buenas propiedades matemáticas y, además, resulta muy natural en muchas áreas de la física, en las que se opera bajo la hipótesis de medio continuo, es decir, que el medio llena todo el espacio en el que está; y que hace que se puedan emplear los números reales  $\mathbb{R}$  (espacio de Banach por excelencia) para definir el espacio y las propiedades físicas. Sin embargo, donde se quiere poner el énfasis en este trabajo es que los espacios que serán completos serán los espacios de funciones analíticas con los que se trabajará, es decir, no hay ‘huecos’ entre las funciones.

---

<sup>1</sup>Terminología acuñada por Frigyes Riesz, que continuó los trabajos de Hardy sobre funciones de variable compleja y estos espacios en concreto.

<sup>2</sup>Se dice que una sucesión de elementos de un espacio normado,  $\{x_n\}$ , es de Cauchy si para todo  $\epsilon > 0$  existe algún  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m, n > n_0$  se verifique que  $\|x_m - x_n\| < \epsilon$ .



Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial con producto interno que es de Banach con respecto de la norma que induce dicho producto interno  $\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle}$ . En el espacio de funciones de onda cuánticas esta norma no toma otra forma que la integral de la densidad de la probabilidad de presencia de la partícula, de forma que el requerimiento para ser una función de onda físicamente aceptable es ser de cuadrado integrable. Habitualmente se trabaja con funciones de onda normalizadas cuando se está trabajando con una sola partícula. Los espacios de Hilbert están en posesión de un teorema, *el Teorema de Representación de Riesz*, el cual es el que permite identificar de forma natural los kets y los bra que se utilizan habitualmente en cuántica. En conclusión, el espacio de Hilbert en el que se suele trabajar con las funciones de onda<sup>3</sup> es  $L^2(\Omega)$ , es decir, el espacio de funciones de cuadrado integrable en un dominio  $\Omega$ .

Los *espacios de Hilbert* en los que se centra este trabajo son aquellos en los que sus elementos son *funciones analíticas*, es decir, funciones de variable compleja que admiten un desarrollo en serie de potencias alrededor de cada punto de un determinado dominio. Esta definición se puede demostrar equivalente en cierto modo a la de *funciones holomorfas*, que habitualmente se utiliza para referirse a funciones que son derivables en el sentido complejo en un dominio determinado. Entre las notables propiedades de estas ya conocidas funciones está la de ser infinitamente derivables. Aunque la costumbre me lleva a denominar estas funciones como holomorfas, a lo largo de todo el trabajo las denominaré, salvo error, como analíticas, ya que esta es la denominación que se les da más habitualmente en los textos relacionados con Mecánica Cuántica.

Con este trabajo se pretende elaborar un documento que permita extender los conocimientos de Mecánica Cuántica de un alumno de los últimos cursos del grado en Física, a la vez que se aporta una vista general sobre herramientas matemáticas que están siendo utilizadas para resolver problemas físicos en temas de investigación de actualidad.

## 1.1. Oscilador armónico cuántico

A continuación, se presenta un breve resumen del tratamiento habitual del oscilador armónico cuántico, como se puede encontrar en [8]. Este tratamiento, que se supone conocido de los cursos de Mecánica Cuántica del Grado, cimienta la base sobre la que se sustentará la posterior construcción del espacio de Fock-Bargmann.

En mecánica clásica, la ecuación de conservación de la energía de una partícula de masa  $m$  sometida a un potencial armónico unidimensional de frecuencia propia  $\omega$ ,  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ , es la suma de la energía cinética  $T$  y la potencial  $V$ , de forma que se puede escribir como

$$E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2, \quad (1.1)$$

---

<sup>3</sup>Es conocido que  $L^2(\Omega)$  es insuficiente para representar ciertos elementos relevantes en mecánica cuántica, como las ondas libres o las deltas de Dirac. Para subsanar estas carencias hace falta considerar espacios de Schwartz y tripletes de Gelfand [5], pero estos no son el objetivo de este trabajo.

donde  $p$  es el momento lineal de la partícula y  $x$  su posición.

En mecánica cuántica, las magnitudes posición y momento lineal son sustituidos respectivamente por los operadores<sup>4</sup> posición,  $\hat{X}$ , y momento,  $\hat{P}$ . De estos operadores es conocida su relación de conmutación

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar. \quad (1.2)$$

Este proceso de cuantización, a partir de la expresión (1.1), conduce a la expresión del hamiltoniano del oscilador armónico cuántico

$$\mathcal{H}_h = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{X}^2. \quad (1.3)$$

Para trabajar de forma más cómoda con este hamiltoniano se introducen dos operadores adimensionales,  $X$  y  $P$ , proporcionales a los anteriores  $\hat{X}$  y  $\hat{P}$ , que permitirán escribir el hamiltoniano de forma más homogénea. Estos son

$$X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{X}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{P}. \quad (1.4)$$

A partir del Capítulo 2 se prescindirá totalmente de los operadores  $\hat{X}$  y  $\hat{P}$  y se trabajará únicamente con los adimensionales  $X$  y  $P$ . Gracias a (1.2) se comprueba rápidamente el valor de la relación de conmutación entre estos dos nuevos operadores:

$$[X, P] = \left[ \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{X}, \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{P} \right] = \frac{1}{\hbar} [\hat{X}, \hat{P}] = i. \quad (1.5)$$

El hamiltoniano (1.3) queda expresado en función de estos nuevos operadores como

$$\mathcal{H}_h = \frac{m\hbar\omega}{2m} P^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} X^2 = \frac{\hbar\omega}{2} (X^2 + P^2). \quad (1.6)$$

El paso clave que permite expresar muy cómodamente las soluciones de este hamiltoniano es introducir dos nuevos operadores, llamados *operador creación* y *operador aniquilación*. Estos operadores son

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (X - iP), \quad (\text{creación}) \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + iP). \quad (\text{aniquilación}) \quad (1.7)$$

Se comprueba inmediatamente que  $a$  y  $a^+$  son operadores mutuamente adjuntos. Esto implica que no son observables, ya que no son operadores hermíticos. A partir de (1.5) y (1.7), utilizando las propiedades de las relaciones de conmutación, se obtiene

$$[a, a^+] = \frac{1}{2} [X + iP, X - iP] = \frac{i}{2} [P, X] - \frac{i}{2} [X, P] = -i[X, P] = 1. \quad (1.8)$$

Para escribir el hamiltoniano en términos de  $a$  y  $a^+$  se invierte (1.7), sumando y restando, obteniendo

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^+ + a), \quad P = \frac{i}{\sqrt{2}} (a^+ - a). \quad (1.9)$$

---

<sup>4</sup>Quizá es más habitual en algunos textos encontrar denotados los operadores posición y momento como  $X$  y  $P$ , pero en este trabajo se reservará esa notación para los operadores adimensionalizados, ya que serán los que se utilicen una vez superada esta sección.

Entonces, a partir de (1.6) y (1.9) se escribe el hamiltoniano del oscilador armónico cuántico como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_h &= \frac{\hbar\omega}{4} \left( (a^+)^2 + a^2 + a^+a + aa^+ - (a^+)^2 - a^2 + a^+a + a^+a \right) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} (a^+a + aa^+),\end{aligned}\tag{1.10}$$

y de aquí, utilizando (1.8) en la forma  $aa^+ = 1 + a^+a$ , se puede escribir

$$\mathcal{H}_h = \hbar\omega \left( a^+a + \frac{1}{2} \right).\tag{1.11}$$

Para escribir este hamiltoniano de forma más compacta se introduce el operador número  $N$ , que es un operador hermítico,

$$N = a^+a.\tag{1.12}$$

De esta forma, utilizando (1.11) y (1.12), se tiene que

$$\mathcal{H}_h = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right).\tag{1.13}$$

Así pues, los autovectores<sup>5</sup> de  $\mathcal{H}_h$  y del operador número son los mismos. Por tanto, resolver el problema de autovalores del operador número equivale a resolver el problema de autovalores del oscilador armónico cuántico. En [8] se puede encontrar una demostración de las ya conocidas propiedades del espectro de  $N$ , que no presentamos aquí para no extendernos en esta sección preliminar de contenidos ya estudiados en el Grado:

- Los autovalores de  $N$  son números enteros no negativos. De esta forma, el espectro del hamiltoniano armónico cuántico (1.13) es discreto y está compuesto de los autovalores  $\hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$
- Los autoestados son no degenerados, y, por tanto, se pueden etiquetar como  $|n\rangle$ , siendo  $n$  el autovalor de  $N$  asociado. Estos estados suelen denominarse *estados número* y forman una base ortonormal del espacio de estados.
- La acción de los operadores  $a$  y  $a^+$  sobre los estados números viene dada por

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle.\tag{1.14}$$

Esto explica los nombres de los operadores, correspondiendo su acción a la creación y aniquilación de un cuanto de energía.

- Aplicando reiteradas veces (1.14) se obtiene

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle,\tag{1.15}$$

por lo que todos los autovectores pueden construirse a partir de  $|0\rangle$ , que suele denominarse *estado vacío*, por aplicación del operador de creación. Esto conduce a que,

---

<sup>5</sup>Cuando se diga únicamente *autovectores*, nos estaremos refiriendo a autovectores o autofunciones por la derecha. Diremos que  $|\varphi\rangle$  es un autovector por la derecha de un operador lineal  $A$  con autovalor  $\lambda$  si  $A|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$ , y que lo es por la izquierda si  $\langle\varphi|A = \langle\varphi|\lambda$ . Estos dos conceptos coinciden para operadores hermíticos.

como  $|n\rangle$  forma una base del espacio de estados, cualquier ket pueda escribirse como una combinación lineal de ellos,

$$|\psi\rangle = b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle + b_2 |2\rangle + \dots = \left( c_0 + c_1 a^+ + c_2 (a^+)^2 + \dots \right) |0\rangle. \quad (1.16)$$

Estos resultados serán suficientes para poder desarrollar la teoría del siguiente capítulo.

## Capítulo 2

# El espacio de Fock-Bargmann

### 2.1. Estados coherentes

En el contexto del tratamiento del oscilador armónico cuántico unidimensional y como requerimiento previo para poder presentar el espacio de Fock-Bargmann, debemos introducir un conjunto de estados denominados *estados coherentes*. Se trata de los estados propios del operador de aniquilación  $a$ , el cual se introdujo en (1.7). A priori, es de esperar que estos estados sean importantes en la teoría relacionada con el oscilador armónico, dado el papel que juega el operador de aniquilación. Podremos comprobar su importancia en los desarrollos posteriores. En general, se puede encontrar más información al respecto en la fuente bibliográfica principal de esta sección, “*Coherent States in Quantum Physics*”, [18], de J.P. Gazeau.

En primer lugar, se va a buscar la representación de los estados propios del operador aniquilación  $a$  en la base de los estados número  $|n\rangle$  del oscilador armónico cuántico. Consideremos un ket general  $|z\rangle$  expresado como superposición de estados número

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_n |n\rangle, \quad (2.1)$$

e impongamos la condición de que sea autoestado del operador de aniquilación con autovalor  $z \in \mathbb{C}$ ,  $a|z\rangle = z|z\rangle$ . De esta forma obtenemos, utilizando (1.14),

$$a|z\rangle = a \sum_{n=0}^{\infty} A_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \sqrt{n+1} |n\rangle = z \sum_{n=0}^{\infty} A_n |n\rangle, \quad (2.2)$$

de donde se obtiene la recurrencia  $A_{n+1} = zA_n/\sqrt{n+1}$ . Por tanto, salvo multiplicación por una constante, los estados coherentes vienen dados por

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.3)$$

Estos son los denominados *estados coherentes de Schrödinger*. Sin embargo, cabe destacar que estos estados que acabamos de escribir no están normalizados. Aunque parecería procedente tratar únicamente con los estados normalizados, los estados coherentes de Schrödinger son los que hacen surgir de forma natural la construcción del espacio de Fock-Bargmann,

y por eso cobrarán su importancia en este trabajo. Los *estados coherentes estándar*, que sí están normalizados, como comprobaremos a continuación, vienen dados por

$$|z\rangle_{st} = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.4)$$

Estos son también denominados *estados coherentes de Glauber*. A continuación, demostraremos algunas de sus propiedades, reduciéndonos sólo a las más importantes y que sirven para sostener el razonamiento posterior, ya que los estados coherentes presentan una abundantísimo abanico de útiles propiedades. Con un argumento como el de (2.2) se llega fácilmente a que, en cambio, el operador  $a^+$  no tiene autovectores por la derecha, ya que se obtiene que todos los coeficientes de la serie han de anularse.

### 2.1.1. Producto y continuidad

Utilizando las expresiones (2.3) y (2.4) se halla fácilmente cuánto vale el producto escalar de dos estados coherentes. En primer lugar, para los estados coherentes de Schrödinger se tiene

$$\langle z_1|z_2\rangle = \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}_1^m}{\sqrt{m!}} \langle m| \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{z}_1 z_2)^n}{n!} = \exp(\bar{z}_1 z_2). \quad (2.5)$$

Esto garantiza, además, la convergencia en norma de la serie (2.3), asegurando que  $|z\rangle$  está bien definido. Para los estados coherentes estándar se tiene que

$${}_{st}\langle z_1|z_2\rangle_{st} = e^{-(|z_1|^2+|z_2|^2)/2} \langle z_1|z_2\rangle = \exp\left(\bar{z}_1 z_2 - \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2}\right). \quad (2.6)$$

Otro elemento relacionado con el producto es el módulo de dicho producto al cuadrado, que en mecánica cuántica se sabe que toma el valor de la probabilidad de transición entre los estados. Para los estados de Schrödinger, a partir de (2.5) se tiene

$$|\langle z_1|z_2\rangle|^2 = \exp(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) = \exp(2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)). \quad (2.7)$$

Esta expresión revela con claridad que los estados coherentes no son una familia ortogonal. Esto no supone ningún problema, pero implica tener más cuidado al operar. Para los estados coherentes estándar se puede escribir, análogamente, a partir de (2.6):

$$|{}_{st}\langle z_1|z_2\rangle_{st}|^2 = \exp\left(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 - |z_1|^2 - |z_2|^2\right) = \exp\left(-|z_1 - z_2|^2\right). \quad (2.8)$$

Como es de esperar, se obtiene la misma conclusión sobre la ortogonalidad al tratarse de estados proporcionales a los anteriores. Sin embargo, esta expresión nos muestra, además, que la familia de estados coherentes estándar están de hecho normalizados, como se había indicado previamente, mientras que (2.7) muestra que los de Schrödinger no lo están. De (2.5) se deduce, además, que  $|\langle z|z\rangle| = \exp(|z|^2)$ .

De aquí se desprende también que la familia de estados es función continua del parámetro  $z$  en el plano complejo. Utilizando (2.5), lo vemos en primer lugar para los estados coherentes de Schrödinger, para ello la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \||z_1\rangle - |z_2\rangle\|^2 &= (\langle z_1| - \langle z_2|)(|z_1\rangle - |z_2\rangle) \\ &= e^{|z_1|^2} + e^{|z_2|^2} - 2\text{Re}\langle z_1|z_2\rangle \\ &= \exp(|z_1|^2) + \exp(|z_2|^2) - 2\text{Re}\exp(\bar{z}_1 z_2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

De aquí que si se denota  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  se tiene

$$\| |z_1\rangle - |z_2\rangle \|^2 = \exp(|z_1|^2) + \exp(|z_2|^2) - 2 \exp(x_1x_2 + y_1y_2) \cos(x_1y_2 - x_2y_1), \quad (2.10)$$

y esta expresión tiende a 0 cuando  $z_2 \rightarrow z_1$ , dado que entonces  $\exp(x_1x_2 + y_1y_2) \rightarrow \exp(|z_1|^2)$ ,  $\exp(|z_2|^2) \rightarrow \exp(|z_1|^2)$  y  $\cos(x_1y_2 - x_2y_1) \rightarrow 1$ , y esto es lo que se quería ver. Por lo tanto, el producto escalar de estados coherentes de Schrödinger tiene una expresión muy sencilla; y, además, dicha familia de estados tiene la buena propiedad de ser función continua del parámetro.

De forma análoga a (2.9) y (2.10), se obtiene la continuidad para los estados coherentes estándar, utilizando (2.6). De aquí que

$$\begin{aligned} \| |z_1\rangle_{st} - |z_2\rangle_{st} \|^2 &= 2 \left( 1 - \exp\left(-\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2}\right) \operatorname{Re} \exp(\bar{z}_1 z_2) \right) \\ &= 2 \left( 1 - \exp\left(-\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2}\right) \exp(x_1x_2 + y_1y_2) \cos(x_1y_2 - x_2y_1) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Haciendo tender  $z_2 \rightarrow z_1$  como en (2.10) resulta en que la expresión (2.11) tiende hacia 0, y, por tanto, la familia de estados coherentes estándar es también función continua del parámetro. Esto era de esperar, ya que el reescalado entre las dos familia de estados coherentes que estamos manejando es una función continua de  $z$ ,  $e^{-|z|^2/2}$ .

### 2.1.2. Resolución de la identidad

Aunque los estados coherentes no sean ortogonales entre sí, disponen de una propiedad de representación que los hace extremadamente útiles. Se trata de una *resolución de la identidad* o *relación de cierre*. Cabe destacar que las dos familias de estados coherentes que hemos presentado tienen relaciones de cierre respecto de distintas medidas en el plano complejo<sup>1</sup>. En primer lugar, comprobemos que los estados coherentes estándar tienen una relación de cierre en la medida de Lebesgue usual. Usando (2.4),

$$\int_{\mathbb{C}} |z\rangle_{st} \langle z| \frac{1}{\pi} dz = \sum_{n,m=0}^{\infty} |n\rangle \langle m| \int_{\mathbb{C}} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \frac{\bar{z}^m}{\sqrt{m!}} \frac{1}{\pi} \exp(-|z|^2) dz. \quad (2.12)$$

Para conseguir la expresión buscada se efectúa la integral del lado derecho de (2.12), pasando a coordenadas polares,  $z = \rho e^{i\theta}$ , con  $\rho \in (0, \infty)$  y  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,

$$\int_{\mathbb{C}} z^n \bar{z}^m \exp(-|z|^2) dz = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \int_0^{\infty} \rho^{n+m+1} e^{-\rho^2} d\rho. \quad (2.13)$$

Se comprueba inmediatamente que la primera integral del lado derecho se anula si  $n \neq m$  y vale  $2\pi$  si  $n = m$ , y la segunda se encuentra en tablas de integrales, siendo igual a  $n!/2$ . Por tanto se puede escribir que

$$\int_{\mathbb{C}} |z\rangle_{st} \langle z| \frac{1}{\pi} dz = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = I, \quad (2.14)$$

<sup>1</sup>Póngase atención en que el dominio donde vive la variable  $z$  que parametriza la familia de estados coherentes es el plano complejo, y por tanto la resolución de la identidad ha de integrarse allí, en  $z \in \mathbb{C}$ .

donde  $I$  es el operador identidad en el espacio de estados. Este cálculo permite determinar con facilidad cuál es la medida que da la relación de cierre para los estados coherentes de Schrödinger. Partiendo de (2.14) y teniendo en cuenta la relación que mantienen (2.3) y (2.4), podemos escribir

$$I = \int_{\mathbb{C}} |z\rangle_{st} \langle z| \frac{1}{\pi} dz = \int_{\mathbb{C}} |z\rangle \langle z| \frac{e^{-|z|^2}}{\pi} dz = \int_{\mathbb{C}} |z\rangle \langle z| d\mu(z). \quad (2.15)$$

En consecuencia, se ha obtenido la forma de la medida que permite construir una resolución de la identidad para los estados coherentes de Schrödinger, que es

$$d\mu(z) = \frac{e^{-|z|^2}}{\pi} dz. \quad (2.16)$$

El hecho de que los estados coherentes de Schrödinger sean los preferibles para realizar la construcción del espacio de Fock-Bargmann hace que cobre gran importancia la medida que acabamos de presentar, como se verá más adelante.

### 2.1.3. Saturación de la desigualdad de incertidumbre de Heisemberg

Otra propiedad interesante es que los estados coherentes saturan la desigualdad de incertidumbre de Heisemberg. Son, de esta manera, los estados cuánticos que tienen un comportamiento más parecido a estados clásicos. Esto hace que sean muy útiles en muchas aplicaciones. Se va a calcular  $(\Delta X)(\Delta P)$  para los estados coherentes estándar, porque estos están normalizados. Se recuerda que la definición  $\Delta A$  de la *dispersión de un observable*  $A$  en un estado  $|\varphi\rangle$  es

$$(\Delta A)^2 = \langle \varphi | A^2 | \varphi \rangle - (\langle \varphi | A | \varphi \rangle)^2. \quad (2.17)$$

Teniendo en cuenta que, por ser funciones propias del operador aniquilación, y usando (1.8) para la última de las expresiones que se va a calcular,

$$\begin{aligned} {}_{st}\langle z | a | z \rangle_{st} &= z, & {}_{st}\langle z | a^+ | z \rangle_{st} &= \bar{z}, & {}_{st}\langle z | a^+ a | z \rangle_{st} &= |z|^2, \\ {}_{st}\langle z | a a^+ | z \rangle_{st} &= {}_{st}\langle z | a^+ a + 1 | z \rangle_{st} &= |z|^2 + 1, \end{aligned} \quad (2.18)$$

se pueden calcular los siguientes valores esperados para los operadores  $X$  y  $P$  adimensionales que se introdujeron en (1.4). Entonces, se calcula por un lado para el operador de posición,

$${}_{st}\langle z | X | z \rangle_{st} = \frac{1}{\sqrt{2}} {}_{st}\langle z | a + a^+ | z \rangle_{st} = \sqrt{2} \operatorname{Re} z, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} {}_{st}\langle z | X^2 | z \rangle_{st} &= \frac{1}{2} {}_{st}\langle z | a^2 + (a^+)^2 + a a^+ + a^+ a | z \rangle_{st} \\ &= \frac{1}{2} (z^2 + \bar{z}^2 + 1 + 2|z|^2) = 2(\operatorname{Re} z)^2 + \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

y, por otro lado, para el operador de momento,

$${}_{st}\langle z | P | z \rangle_{st} = \frac{i}{\sqrt{2}} {}_{st}\langle z | a^+ - a | z \rangle_{st} = \sqrt{2} \operatorname{Im} z, \quad (2.21)$$



$$\begin{aligned} {}_{st}\langle z|P^2|z\rangle_{st} &= -\frac{1}{2} {}_{st}\langle z|a^2 + (a^+)^2 - aa^+ - a^+a|z\rangle_{st} \\ &= \frac{1}{2} \left( -z^2 - \bar{z}^2 + 1 + 2|z|^2 \right) = 2(\operatorname{Im} z)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se han calculado, por tanto, todos los elementos involucrados en el cálculo de las dispersiones que aparecen en la desigualdad de Heisemberg. De esta forma, se puede escribir

$$(\Delta X)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = 2(\operatorname{Re} z)^2 + \frac{1}{2} - 2(\operatorname{Re} z)^2 = \frac{1}{2}, \quad (2.23)$$

$$(\Delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = 2(\operatorname{Im} z)^2 + \frac{1}{2} - 2(\operatorname{Im} z)^2 = \frac{1}{2}. \quad (2.24)$$

De aquí se obtiene

$$(\Delta X)(\Delta P) = \sqrt{(\Delta X)^2(\Delta P)^2} = \frac{1}{2}. \quad (2.25)$$

Téngase de nuevo en cuenta que se están utilizando operadores  $X$  y  $P$  adimensionalizados, (1.4), es decir, premultiplicados adecuadamente por constantes para que el hamiltoniano tome la forma (1.6). En caso de utilizar los operadores posición y momento usuales,  $\hat{X}$ ,  $\hat{P}$ , habría que tener en cuenta estas constantes y, por ello, se obtendría

$$(\Delta \hat{X})(\Delta \hat{P}) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{m\hbar\omega} (\Delta X)(\Delta P) = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.26)$$

la expresión habitual de saturación de la desigualdad de incertidumbre de Heisemberg.

En conclusión, se tiene que los estados coherentes estándar saturan la desigualdad de incertidumbre de Heisemberg. Esta es una de las propiedades más importantes de este tipo de estados, y, de hecho, es la que da lugar a muchas familias de estados coherentes generalizados, que cumplen esta propiedad pero no necesariamente las otras que se han expuesto.

Otro hecho relevante que se desprende de esta deducción es la luz que arroja sobre la interpretación de los estados coherentes en sí mismos. Las componentes real y compleja de  $z \in \mathbb{C}$  en un estado coherente  $|z\rangle$  no son otra cosa que los valores esperados de posición (2.19) y momento (2.21) en dicho estado de incertidumbre mínima divididos entre  $\sqrt{2}$ . Esto lleva a visualizar los estados coherentes como las funciones de onda más concentradas que pueden existir en torno a un punto con igual incertidumbre en posición y momento. En caso de que se permita que las incertidumbres en posición y momento sean diferentes surgen los llamados *estados coherentes comprimidos o alargados*, que no se tratarán en este trabajo.

#### 2.1.4. Evolución temporal de estados coherentes

Otra propiedad relevante de los estados coherentes es que son una familia cerrada por el operador de evolución temporal del oscilador armónico cuántico. Esto quiere decir que la evolución temporal de un estado coherente  $|z\rangle$  por el hamiltoniano  $\mathcal{H}_h = \hbar\omega(N + 1/2)$ , (1.13), siendo  $N = a^+a$  el operador número (1.12), seguirá siendo un estado coherente. Lo comprobamos a continuación teniendo en cuenta que en el caso del oscilador armónico cuántico el operador de evolución temporal es  $U(t) = e^{-i\mathcal{H}_h t/\hbar}$ ,

$$e^{-\frac{i\mathcal{H}_h t}{\hbar}} |z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-i\omega t} z)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} |e^{-i\omega t} z\rangle. \quad (2.27)$$

Por tanto, al evolucionar temporalmente los estados coherentes cambian de fase y de argumento, pero siguen siendo estados coherentes. Se observa que tras transcurrir un lapso de tiempo  $\Delta t = 2\pi/\omega$  el estado coherente vuelve a estar en el estado que estaba antes de transcurrir ese intervalo temporal salvo una fase global que no afecta al significado físico. Además, si se denota  $|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} |e^{i\omega t} z\rangle$  se puede observar que por (2.5) se tiene

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle e^{i\omega t} z | e^{i\omega t} z \rangle = \exp(|z|^2), \quad (2.28)$$

es decir, que su norma no se modifica con la evolución temporal.

En definitiva, los estados coherentes no sólo son una familia cerrada por la evolución temporal, sino que, además, sus órbitas en  $\mathbb{C}$  son circulares y cerradas, tal y como se ilustra en la Figura 2.1.

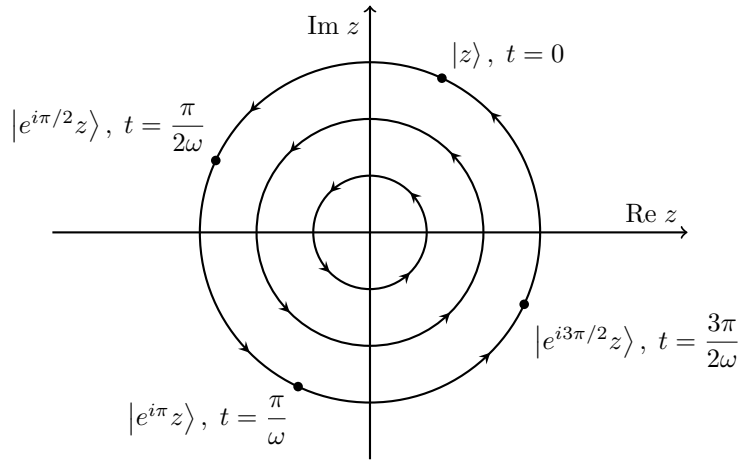


Figura 2.1: Órbitas de evolución temporal de estados coherentes  $|z\rangle$  en el plano complejo.

También es destacable el hecho de que a partir de (2.20) y (2.22) se puede encontrar el valor esperado del hamiltoniano del oscilador armónico cuántico (1.6) como

$${}_{st}\langle z | \mathcal{H}_h | z \rangle_{st} = \frac{\hbar\omega}{2} {}_{st}\langle z | X^2 + P^2 | z \rangle_{st} = \frac{\hbar\omega}{2} (2|z|^2 + 1), \quad (2.29)$$

observándose que el valor esperado de la energía depende únicamente del módulo de  $z$ . Esto indica que aunque la energía de los estados coherentes no está bien definida, es decir, no son autofunciones del hamiltoniano; sin embargo, el valor esperado de la energía es constante en el tiempo, ya que las órbitas cerradas de la Figura 2.1 son de valor esperado de la energía constante. Esta propiedad ayuda a acercar estos estados al comportamiento clásico de las partículas.

Algunas otras propiedades de los estados coherentes se desprenderán al ir construyendo el espacio de Fock-Bargmann.

## 2.2. Introducción al espacio de Fock-Bargmann

La idea de construir un espacio de funciones en el cual el tratamiento de ciertos sistemas cuánticos resultara más natural que en el propio espacio de funciones de onda de cuadrado

integrable usual surge de la sucesión histórica de avances en el estudio del oscilador armónico cuántico. En virtud del criterio histórico se ha tratado de organizar la subsiguiente exposición, con intención de que resulte más ilustrativa.

En 1949, con su artículo “*La seconde quantification*” [9], Paul Dirac introduce tanto la notación ketorial como los operadores creación y aniquilación para construir la usual factorización del hamiltoniano del oscilador armónico que permite hallar sus estados propios, utilizando técnicas introducidas por Fock [16]. La búsqueda de una forma de tratar el oscilador armónico cuántico más sencilla que los desarrollos en serie de los polinomios de Hermite condujo a una representación, la de Fock-Bargmann [1], que permitió tratar de forma más asequible otros muchos problemas de la Mecánica Cuántica.

En la Sección 1.1 se introdujeron los operadores creación  $a^+$  y aniquilación  $a$  de (1.7), los cuales van a ser las herramientas imprescindibles de la construcción del espacio de Fock-Bargmann. Teniendo en cuenta (1.16), cualquier ket  $|\varphi\rangle$  se puede representar como

$$|\varphi\rangle = \left( c_0 + c_1 a^+ + c_2 (a^+)^2 + \dots \right) |0\rangle. \quad (2.30)$$

La idea fundamental sobre la que descansa la representación de Fock es la expresión anterior. Para llegar a la construcción final se ha de trabajar en una base de estados propios del operador aniquilación  $a$ . Como los operadores  $a$  y  $a^+$  no son hermíticos, sus autovalores por la derecha (de haberlos) serán complejos, y sólo los hay para  $a$ , como ya hemos visto en (2.2).

En la Sección 2.1 se introdujeron varias familias de estados propios del operador aniquilación, pero todavía no sabemos cuál de ellas es la que nos ayudará a construir el espacio en cuestión. Se tiene que para todas ellas se verifica

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad \langle z|a^+ = \bar{z}\langle z|, \quad (2.31)$$

luego realizando la sustitución  $z \rightarrow \bar{z}$  se tiene

$$a|\bar{z}\rangle = \bar{z}|\bar{z}\rangle, \quad \langle \bar{z}|a^+ = z\langle \bar{z}|. \quad (2.32)$$

De esta forma, proyectando la expresión (2.30) por la izquierda sobre  $\langle \bar{z}|$  se obtiene

$$\langle \bar{z}|\varphi\rangle = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots) \langle \bar{z}|0\rangle, \quad (2.33)$$

y, por tanto, se pueden representar los elementos del espacio de estados por medio de funciones de variable compleja

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \quad (2.34)$$

que en definitiva, por (2.33), se corresponden con el cociente  $\langle \bar{z}|\varphi\rangle / \langle \bar{z}|0\rangle$ . Por sencillez de las expresiones involucradas, se decide utilizar los estados coherentes de Schrödinger, ya que para estos  $\langle \bar{z}|0\rangle = 1$ , ver (2.3), y, por tanto, dicha función de variable compleja se puede expresar simplemente como

$$\langle \bar{z}|\varphi\rangle = \varphi(z). \quad (2.35)$$

Si se tomaran los estados coherentes normalizados o estándar, por (2.4), se podría escribir  ${}_{st}\langle \bar{z}|0\rangle = \exp(-|z|^2/2)$ , y, en consecuencia, se tendría  ${}_{st}\langle \bar{z}|\varphi\rangle = \exp(-|z|^2/2)\varphi(z)$ . Esta

elección conduciría, sin duda, a los mismos resultados, pero complicaría la escritura de las expresiones, y, por tanto, no es conveniente. Queda así patente el motivo por el que introducimos unos estados coherentes no normalizados, como son los de Schrödinger, y es que van a ayudar a hacer la notación más sencilla y compacta.

De esta forma, se ha asociado a cada ket una función de variable compleja  $\varphi(z)$ . Esta función, como se ha visto, se puede escribir como un desarrollo en serie de potencias, por lo que estamos ante una función analítica. Además, como se sabe por la construcción de los estados coherentes en (2.2) que existen autovectores por la derecha de  $a$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , se puede efectuar el procedimiento anterior para cualquiera de esos  $z$ , y, por lo tanto, la serie debe converger para todo  $z \in \mathbb{C}$ . De aquí se deduce que para que  $\varphi(z)$  pueda representar a un ket con sentido físico tiene que ser analítica en todo el plano complejo, es decir, ha de ser una función entera.

Otro punto importante va a ser encontrar la acción de los operadores creación y aniquilación sobre en representación de estados coherentes. Por la definición de  $|z\rangle$  como autofunción por la derecha de  $a$  con autovalor  $z$ , lo cual conlleva por (2.32) que  $|\bar{z}\rangle$  es autofunción por la izquierda de  $a^+$  con autovalor  $z$ , se tiene directamente

$$\langle \bar{z} | a^+ | \varphi \rangle = z \langle \bar{z} | \varphi \rangle = z \varphi(z). \quad (2.36)$$

Por otro lado, para encontrar la acción de  $a$  sobre las funciones enteras de (2.35) se utiliza la resolución de la identidad (2.15) y la expresión para el producto escalar de estados coherentes de Schrödinger (2.5), obteniendo

$$\varphi(z) = \langle \bar{z} | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \langle \bar{z} | \omega \rangle \langle \omega | \varphi \rangle d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{C}} \exp(z\omega) \langle \omega | \varphi \rangle d\mu(\omega). \quad (2.37)$$

A continuación, derivamos (2.37) respecto de  $z$ , ya que se tiene regularidad suficiente como para introducir la derivada dentro de la integral,

$$\frac{d\varphi}{dz}(z) = \int_{\mathbb{C}} \omega \exp(z\omega) \langle \omega | \varphi \rangle d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{C}} \langle \bar{z} | a | \omega \rangle \langle \omega | \varphi \rangle d\mu(\omega) = \langle \bar{z} | a | \varphi \rangle. \quad (2.38)$$

En conclusión, se tiene

$$\langle \bar{z} | a | \varphi \rangle = \frac{d}{dz} \langle \bar{z} | \varphi \rangle = \frac{d\varphi}{dz}(z). \quad (2.39)$$

En definitiva, el espacio de Fock-Bargmann consistirá en el conjunto de todas las funciones enteras  $\varphi(z)$  que representan de esta forma kets con sentido físico, atendiendo al razonamiento anterior. En la sección posterior se dotará a este espacio de producto interno (que esté de acuerdo con el producto interno en el espacio habitual de los ket), para que alcance la estructura de espacio de Hilbert. El motivo para querer darle esta estructura es, evidentemente, que le permita describir las mismas propiedades físicas que podían ser descritas en el espacio de funciones de onda inicial.

A continuación, se procede a una descripción matemática un poco más detallada que permita comprender con mayor profundidad las propiedades de este espacio. Las primeras cuestiones que deben preocuparnos son la forma que toma el producto interno cuando consideramos dicha representación y cómo se hace de forma concreta el cambio entre la representación usual de coordenadas y la representación de Fock-Bargmann.

## 2.3. Construcción del espacio de Fock-Bargmann

Se procede, entonces, a la construcción del espacio de Fock-Bargmann, es decir, a dotar de producto interno coherente con el de las funciones de onda de cuadrado integrable a las funciones analíticas antes descritas y a describir el resto de propiedades matemáticas que hacen eficiente el uso de esta representación para resolver problemas cuánticos. La construcción de este espacio se puede encontrar en [1], traducándose esta en las siguientes páginas a notación ketorial, de forma que resulte más asequible para estudiantes de grado.

El paso que se requiere a continuación de forma natural es comprobar si las familias de estados coherentes son adecuadas para construir este espacio de funciones, es decir, si su resolución de la identidad (2.15) sirve para representar el producto usual que las funciones de variable compleja han de heredar del espacio de funciones de onda de cuadrado integrable. Para ello, consideraremos que la familia adecuada verifica una *resolución de la identidad* o *relación de cierre* respecto de cierta medida  $\mu$  en el plano complejo:

$$\int_{\mathbb{C}} |\bar{z}\rangle \langle \bar{z}| d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} |\bar{z}\rangle \langle \bar{z}| d\mu(\bar{z}) = \int_{\mathbb{C}} |z\rangle \langle z| d\mu(z) = I, \quad (2.40)$$

donde  $I$  es el operador identidad en el espacio de estados. Las igualdades anteriores se tienen por la simetría del dominio de integración. Se buscará una medida de Lebesgue pesada:  $d\mu(z) = \rho(x, y) dx dy = \rho(x, y) dz$  siendo  $z = x + iy$  y  $\rho(x, y)$  una función real positiva. A continuación, se determinará la expresión adecuada de dicha medida en el espacio de funciones para que su producto interno sea el mismo que el del espacio de kets, que toma la forma de la medida de Lebesgue pesada por una función. Una vez hallada la medida, comparando con la medida de la resolución de la identidad (2.15) se verá que es adecuada.

### 2.3.1. Producto interno

En primer lugar, como se acaba de indicar, se procede a determinar la medida  $\mu$  en el plano complejo  $\mathbb{C}$  que dé el producto escalar usual entre dos kets. Escribiendo el producto interno introduciendo la resolución de la identidad (2.40) se tiene

$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{C}} \langle f|\bar{z}\rangle \langle \bar{z}|g\rangle d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) d\mu(z). \quad (2.41)$$

Como se ha dicho antes, se busca una medida de la forma  $d\mu(z) = \rho(x, y) dx dy = \rho(x, y) dz$  siendo  $z = x + iy$  y  $\rho(x, y)$  una función real positiva. Para ello, se utiliza de nuevo la resolución de la identidad (2.40), esta vez involucrando al operador  $a$ , introduciéndola en dos posiciones distintas, la primera vez entre  $\langle f|$  y  $a$ , y la segunda entre  $a$  y  $|g\rangle$ ,

$$\langle f|a|g\rangle = \int_{\mathbb{C}} \langle f|\bar{z}\rangle \langle \bar{z}|a|g\rangle d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \langle f|a|\bar{z}\rangle \langle \bar{z}|g\rangle d\mu(z). \quad (2.42)$$

A continuación, se trabaja con cada una de las dos igualdades que aparecen en (2.42) separadamente, utilizando la acción de los operadores  $a$  y  $a^+$ , (2.36) y (2.39). Téngase en cuenta que, usando el concepto de derivada de Wirtinger<sup>2</sup>, la derivada parcial respecto de

<sup>2</sup> En el plano complejo,  $\mathbb{C}$ , se definen las derivadas de Wirtinger como los operadores diferenciales siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.43)$$

$z$  tiene sentido también cuando se aplica a funciones no analíticas pero que son derivables respecto de su parte real y su parte imaginaria. Esto se utiliza en la primera manipulación de (2.44) para hacer aparecer la derivada parcial respecto de  $z$  del peso de la medida, utilizando la regla de derivación del producto para la derivada de Wirtinger:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \langle f|\bar{z} \rangle \langle \bar{z}|a|g \rangle d\mu(z) &= \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} \frac{\partial g}{\partial z}(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} \frac{\partial g}{\partial z}(z) \rho(x, y) dz \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{f} g \rho) dz - \int_{\mathbb{C}} \bar{f} g \frac{\partial \rho}{\partial z} dz - \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} g \rho dz. \end{aligned} \quad (2.44)$$

El tercer sumando de la última igualdad de (2.44) se cancela debido a que  $f(z)$  es una función analítica, y, por tanto,  $\bar{f}(z)$  es antianalítica, llevando a que su parcial respecto de  $z$  sea 0. Además, suponiendo que las funciones no crecen demasiado rápido en el infinito se puede considerar que se anula también el primer término. Esto es razonable porque las funciones que se quiere representar en este espacio son funciones de onda, es decir, funciones complejas de cuadrado integrable; por lo que es de esperar que sean de cuadrado integrable también según el producto que se busca en el espacio de funciones analíticas, y, por tanto, que no crezcan demasiado deprisa en el infinito.

Para la otra igualdad de (2.42), a través de (2.36), se puede escribir

$$\int_{\mathbb{C}} \langle f|a|\bar{z} \rangle \langle \bar{z}|g \rangle d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \bar{z} \overline{f(z)} g(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \bar{z} \overline{f(z)} g(z) \rho(x, y) dz, \quad (2.45)$$

y, por tanto, la condición sobre la medida  $\mu(z)$  que nos va a permitir encontrarla es que se verifique la igualdad entre el sumando que no se anula de (2.44) y (2.45):

$$- \int_{\mathbb{C}} \bar{f} g \frac{\partial \rho}{\partial z} dz = \int_{\mathbb{C}} \bar{z} \bar{f} g \rho dz. \quad (2.46)$$

Esto sugiere<sup>3</sup> que debe cumplirse

$$- \frac{\partial \rho}{\partial z} = \bar{z} \rho. \quad (2.47)$$

Expresando la ecuación anterior en términos de  $x$  e  $y$ ,  $z = x + iy$ , y teniendo en cuenta la expresión de la parcial respecto de  $z$ , que viene dada por la derivada de Wirtinger (2.43), en la nota a pie de página 2, se tiene

$$- \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} - i \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = (x - iy) \rho, \quad (2.48)$$

de donde, recordando que se está buscando  $\rho(x, y)$  real positiva, se pueden separar las ecuaciones correspondientes a parte real y compleja, resultando en

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -2x\rho, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = -2y\rho. \quad (2.49)$$

Gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann se tiene que, para funciones analíticas,  $\partial/\partial z$  se corresponde con la derivada compleja y  $\partial/\partial \bar{z}$  se anula, y al contrario para funciones antianalíticas. A efectos,  $z$  y  $\bar{z}$  actúan como variables independientes. Se tiene regla de derivación del producto usual. Se puede encontrar más información en [29].

<sup>3</sup>La ecuación (2.47) es suficiente pero no necesaria para que se cumpla la condición (2.46), pero como tan sólo se quiere encontrar una medida que describa adecuadamente el producto interno del espacio de Fock-Bargmann no debemos preocuparnos demasiado de este asunto, ya que no necesitamos probar que la medida que encontramos es la única viable. Lo que sí que podemos pensar con esta elección es que estamos tomando, sin duda, la medida más sencilla posible que satisface nuestras necesidades.

De la primera ecuación de (2.49) se desprende que  $\rho(x, y) = A(y) \exp(-x^2)$ , y de la segunda que  $\rho(x, y) = B(x) \exp(-y^2)$ , por lo que, necesariamente, siendo  $c$  una constante, se tiene que

$$\rho(x, y) = c \exp(-x^2 - y^2) = c \exp(-\bar{z}z) = c \exp(-|z|^2). \quad (2.50)$$

Esta es la expresión definitiva que asumiremos que tiene el peso para la medida de Lebesgue que define el producto interno del espacio de Fock-Bargmann. Efectivamente, se comprueba que la medida obtenida es la de la resolución de la identidad (2.15) de los estados coherentes de Schrödinger, por lo que tomamos  $c = 1/\pi$  para que encaje con la medida buscada, (2.16).

De esta forma, se puede definir de forma definitiva el espacio de Fock-Bargmann como el espacio de funciones enteras, es decir, analíticas en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ , que tienen norma finita, por la norma

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle}, \quad (2.51)$$

dada por el producto (2.41)

$$\langle f|g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) e^{-|z|^2} dz, \quad \langle f|f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dz. \quad (2.52)$$

### Ejemplos

A continuación, a modo ilustrativo, presentamos una serie de funciones enteras habituales y comprobamos si estas van a pertenecer o no al espacio de Fock-Bargmann, es decir, si tienen norma finita según el producto interno que se acaba de calcular. Se ha de comprobar que

$$\pi \|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dz < \infty. \quad (2.53)$$

**Ejemplo 1:** En primer lugar probaremos con polinomios. Gracias a la desigualdad triangular basta con probar con los monomios. Tomando  $f(z) = z^n$ , para ellos la expresión anterior se puede escribir

$$\pi \|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |z|^{2n} e^{-|z|^2} dz = 2\pi \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-r^2} dr = \pi n! < \infty. \quad (2.54)$$

Por tanto, los monomios están en el espacio de Fock-Bargmann, y, como se indicó antes, por la desigualdad triangular están también todos los polinomios.

**Ejemplo 2:** Las otras funciones elementales que vamos a mencionar ahora son las exponenciales  $f(z) = e^{\alpha z^n}$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Para ellas se tiene

$$\pi \|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha z^n}|^2 e^{-|z|^2} dz = \int_{\mathbb{C}} r e^{2r^n \operatorname{Re}(\alpha e^{i\theta n}) - r^2} dr d\theta \leq 2\pi \int_0^\infty r e^{2r^n |\alpha| - r^2} dr. \quad (2.55)$$

La cota que se acaba de presentar asegura que  $f(z) = e^{\alpha z^n}$  pertenece al espacio de Fock-Bargmann en el caso que  $n < 2$  o bien si  $n = 2$  y  $|\alpha| < 1/2$ . Sin embargo esta cota no permite garantizar nada para  $n > 2$ , habría que hacer un detalle más fino. No lo hacemos aquí porque en vista de los argumentos que se desarrollarán posteriormente quedará claro que tanto para  $n > 2$  como para  $n = 2$  y  $|\alpha| > 1/2$  estas funciones no están en el espacio de Fock-Bargmann.

Para acabar, al igual que la conclusión obtenida antes para los monomios permitió deducir que los polinomios tenían que pertenecer al espacio de Fock-Bargmann, la actual discusión sobre la exponencial sirve para asegurar que funciones trigonométricas y trigonométricas hiperbólicas del tipo  $\sin(\alpha z^n)$ ,  $\cos(\alpha z^n)$ ,  $\sinh(\alpha z^n)$  o  $\cosh(\alpha z^n)$  pertenecen al espacio de Fock-Bargmann bajo las mismas restricciones sobre  $n$  y  $\alpha$  que para las exponenciales, ya que se pueden escribir como combinaciones lineales de ellas.

### 2.3.2. La transformación integral $\langle \bar{z}|x\rangle$

Ahora, se quiere determinar cuál es la forma de la transformación  $\langle \bar{z}|x\rangle$  que relaciona para un ket dado  $|f\rangle$  la función en representación de Fock-Bargmann  $\langle \bar{z}|f\rangle$  con la función en representación de coordenadas usuales  $\langle x|f\rangle$ . Para evitar la confusión con la notación se denotará  $\psi(x) = \langle x|f\rangle$ , mientras que, como ya se ha visto en (2.35), para la función entera se tendrá  $f(z) = \langle \bar{z}|f\rangle$ . La transformación buscada, al introducir la resolución de la identidad para la coordenada<sup>4</sup>  $x$ , viene dada por

$$f(z) = \langle \bar{z}|f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle \bar{z}|x\rangle \langle x|f\rangle dx = \int_{\mathbb{R}} \langle \bar{z}|x\rangle \psi(x) dx. \quad (2.57)$$

Para obtener  $\langle \bar{z}|x\rangle$  se considera  $\langle \bar{z}|a^+|x\rangle$  y se aplica el operador, recordando la definición (1.7), hacia cada uno de los dos lados, obteniendo

$$z \langle \bar{z}|x\rangle = \langle \bar{z}|a^+|x\rangle = \langle \bar{z}|\frac{X - iP}{\sqrt{2}}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x + \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle \bar{z}|x\rangle. \quad (2.58)$$

Análogamente, se procede con  $\langle \bar{z}|a|x\rangle$ , escribiendo

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle \bar{z}|x\rangle = \langle \bar{z}|a|x\rangle = \langle \bar{z}|\frac{X + iP}{\sqrt{2}}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle \bar{z}|x\rangle. \quad (2.59)$$

De esta forma, se pueden separar las derivadas parciales respecto de cada una de las variables de las ecuaciones (2.58) y (2.59), obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle \bar{z}|x\rangle = (z\sqrt{2} - x) \langle \bar{z}|x\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial z} \langle \bar{z}|x\rangle = (x\sqrt{2} - z) \langle \bar{z}|x\rangle. \quad (2.60)$$

Integrando la primera ecuación de (2.60) se obtiene  $\langle \bar{z}|x\rangle = A(z) \exp(zx\sqrt{2} - x^2/2)$ , e integrando la segunda  $\langle \bar{z}|x\rangle = B(x) \exp(zx\sqrt{2} - z^2/2)$ , de forma que, siendo  $C$  una constante, podemos escribir

$$\langle \bar{z}|x\rangle = C \exp\left(zx\sqrt{2} - (z^2 + x^2)/2\right), \quad (2.61)$$

además, conjugando (2.61) y haciendo el remplazo  $z \rightarrow \bar{z}$  se tiene que  $\langle x|z\rangle = \langle \bar{z}|x\rangle$ . De nuevo, la elección de la constante no será arbitraria, sino que estará supeditada a la elección de estados coherentes que hemos tomado. Démonos cuenta que lo que acabamos de calcular no es otra cosa que la representación en coordenadas  $x$  de los estados coherentes que veníamos utilizando. Por ello, para calcular la constante basta recurrir a la expresión

<sup>4</sup>Conviene recordar que  $|x\rangle$  son los kets propios de  $X$ , no de  $\hat{X}$ . Esto conduce a que

$$\langle \varphi|X|x\rangle = x \langle \varphi|x\rangle, \quad \langle \varphi|P|x\rangle = -i \frac{\partial}{\partial x} \langle \varphi|x\rangle. \quad (2.56)$$



(2.5) y efectuar las operaciones de la manera que sigue, introduciendo la resolución de la identidad o relación de cierre para la coordenada  $x$ ,

$$\begin{aligned}\langle z|z\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \langle z|x\rangle \langle x|z\rangle dx = \int_{\mathbb{R}} |C|^2 \exp\left(\sqrt{2}(z+\bar{z})x - x^2 - \frac{z^2+\bar{z}^2}{2}\right) dx \\ &= |C|^2 \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(x - \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \exp\left(\frac{(z+\bar{z})^2}{2} - \frac{z^2+\bar{z}^2}{2}\right) dx \\ &= |C|^2 \exp(|z|^2) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(x - \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)^2\right) dx = \sqrt{\pi} |C|^2 \exp(|z|^2),\end{aligned}\quad (2.62)$$

donde la última integral se ha efectuado dando por conocida la integral de una gaussiana. Por otro lado, como (2.5) indica que  $\langle z|z\rangle = \exp(|z|^2)$ , comparando con (2.62), se tiene  $|C| = 1/\sqrt[4]{\pi}$ , que es el valor que buscábamos salvo una fase que elegimos igual a 0,  $C = \pi^{-1/4}$ . Este mismo procedimiento se podría repetir de forma análoga en el caso de más dimensiones.

Queda definido, por tanto, el procedimiento expreso (2.57) para convertir las funciones de onda usuales en funciones enteras del espacio de Fock-Bargmann sin necesidad de recurrir a series de potencias, sino a partir del núcleo integral (2.61). Esto es uno de los elementos clave de esta representación, ya que supone una forma asequible, analíticamente o numéricamente dependiendo del caso, de representar las funciones de onda. Por otro lado, queda completa la representación en coordenadas de los estados coherentes de Schrödinger de la forma

$$\langle \bar{z}|x\rangle = \langle x|z\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left(zx\sqrt{2} - \frac{z^2+x^2}{2}\right). \quad (2.63)$$

Dotados de estos resultados podemos pasar a hacer alguna representación gráfica de los estados coherentes.

### 2.3.3. Representaciones gráficas de estados coherentes

A partir de la expresión para  $\langle x|z\rangle$  que se acaba de obtener se puede hacer alguna representación gráfica más ilustrativa de cómo son los estados coherentes, ya que esa expresión se corresponde precisamente con su representación en coordenadas. Introduciremos a continuación un nuevo concepto, que es conocido como *transformada de Wigner* o *distribución de quasiprobabilidad de Wigner*. La referencia principal que usaremos para enunciar los resultados será [17] de G. Folland, aunque el artículo histórico que lo introdujo fue [34], de E.P. Wigner. Dada una función de onda en una dimensión espacial  $f(x)$ , se define la función de Wigner asociada a ella como la siguiente función en el espacio de fases  $(x, p)$ ,

$$f_W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} e^{-2ip\xi/\hbar} f(x+\xi) \overline{f(x-\xi)} d\xi. \quad (2.64)$$

En primer lugar, ha de justificarse la introducción de esta construcción un tanto extraña. La necesidad que conduce a ella es que el principio de incertidumbre de Heisenberg impone un límite a la precisión con la que posición y momento pueden determinarse en un estado, por lo que no tiene sentido hablar de función de distribución conjunta de esas variables, ya que si existiera se podrían determinar con arbitraria precisión probabilidades de que la

partícula esté en un rango de posiciones y momentos arbitrariamente pequeños. Por esta razón, Wigner trató de crear la herramienta más parecida a una distribución de probabilidad conjunta que se pudiera, dando con esta transformación.

En [17] se atribuye a Bruijn una muy sugerente interpretación de lo que hace realmente la distribución de quasiprobabilidad de Wigner. Dice que, siendo  $f(t)$  la función que representa la amplitud de vibración en un punto del espacio por el que pasa una onda acústica, y, siendo  $\hat{f}(\omega)$ , su transformada de Fourier temporal, esta representa la síntesis de la vibración a partir de frecuencias puras. Sin embargo, en una partitura musical no está plasmada ni  $f$  ni  $\hat{f}$ , sino una “gráfica” (partitura) que muestra simultáneamente tiempos y frecuencias. Por eso Bruijn llamó amigablemente a  $f_W(t, \omega)$  la “partitura musical” de la función  $f(t)$ .

La propiedad clave que hace que dicha distribución sea representativa es que si se integra únicamente en el momento o en la posición, se obtiene la función de distribución en el otro espacio. Esto se prueba a partir de (2.64) haciendo el cambio de variables  $u = x + \xi$ ,  $v = x - \xi$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_W(x, p) dx &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2ip\xi/\hbar} f(x + \xi) \overline{f(x - \xi)} d\xi dx \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ipu/\hbar} f(u) \overline{e^{-ipv/\hbar} f(v)} du dv \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipu/\hbar} f(u) du \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipv/\hbar} f(v) dv \right)^* = |\hat{f}(p)|^2, \end{aligned} \quad (2.65)$$

donde con  $\hat{f}(p)$  se ha denotado la transformada de Fourier que se utiliza normalmente en Mecánica Cuántica, y que no es otra cosa que la representación en el espacio de momentos,

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx/\hbar} f(x) dx. \quad (2.66)$$

Ahora, si se integra  $f_W(x, p)$  sobre el espacio de momentos se tiene, utilizando que la transformada inversa de Fourier de una onda libre es una delta de Dirac,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_W(x, p) dp &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}} f(x + \xi) \overline{f(x - \xi)} \int_{\mathbb{R}} e^{-2ip\xi/\hbar} dp d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi) f(x + \xi) \overline{f(x - \xi)} d\xi = |f(x)|^2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Una vez que se dispone de esta herramienta<sup>5</sup> y de su interpretación razonable, se puede proceder a hacer algunas gráficas. Además, los cálculos que acabamos de hacer nos indican perfectamente quién debe ser la función  $f(x)$  para representar nuestras funciones de onda: la representación en coordenadas  $x$ . No debe llamar la atención que  $f_W(x, p)$  pueda tomar valores negativos en ciertos casos, aunque no lo hará en el que presentaremos a continuación, ya que lo que tiene interpretación física es su ‘proyección’ (integral) sobre los ejes  $x$  o  $p$ , que ya hemos visto en (2.65) y (2.67) que no pueden ser negativos.

<sup>5</sup>Las demostraciones (2.65) y (2.67) presentan alguna sutileza matemática en la que no fijaremos la atención. En principio no tenemos garantizada la convergencia absoluta de  $\int_{\mathbb{R}} f_W(x, p) dx$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f_W(x, p) dp$ , pero como esto se puede solucionar favorablemente lo pasaremos por alto.

Consideremos un estado coherente de Schrödinger  $|z\rangle$ , y sea  $\psi(x) = \langle x|z\rangle$ , cuyo valor viene dado por (2.63). De esta forma, usando (2.64) pero teniendo en cuenta que las coordenadas que se están utilizando a lo largo de todo el trabajo están adimensionalizadas (lo que conduce a la desaparición de las  $\hbar$ ), tenemos

$$\begin{aligned}\psi_W(x, p) &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2ip\xi} \exp\left(z\sqrt{2}(x+\xi) - z^2/2 - (x+\xi)^2/2\right) \\ &\quad \times \exp\left(\bar{z}\sqrt{2}(x-\xi) - \bar{z}^2/2 - (x-\xi)^2/2\right) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2ip\xi} \exp\left(\sqrt{2}x(z+\bar{z}) + \sqrt{2}\xi(z-\bar{z}) - \frac{z^2+\bar{z}^2}{2} - x^2 - \xi^2\right) d\xi.\end{aligned}\quad (2.68)$$

Para simplificar la expresión anterior se recurre a agrupar cuadrados, teniendo que es igual a la siguiente expresión

$$\psi_W(x, p) = \frac{e^{|z|^2}}{\pi^{3/2}} e^{-\left(x - \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)^2} e^{-\left(p + i\frac{z-\bar{z}}{\sqrt{2}}\right)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\xi - \frac{z-\bar{z}}{\sqrt{2}} + ip\right)^2} d\xi. \quad (2.69)$$

De las cuatro exponenciales que aparecen en la factorización (2.69) las tres primeras no dependen de  $\xi$ , y la cuarta es una integral gaussiana con un desplazamiento complejo, que vale  $\sqrt{\pi}$ , de forma que se tiene que

$$\psi_W(x, p) = \frac{e^{|z|^2}}{\pi} \exp\left[-\left(x - \sqrt{2} \operatorname{Re} z\right)^2\right] \exp\left[-\left(p - \sqrt{2} \operatorname{Im} z\right)^2\right] \quad (2.70)$$

De esta forma, ya se puede proceder a hacer las siguientes representaciones gráficas. Dada la forma de (2.70), se observa que el factor  $e^{|z|^2}$  proviene de que se ha hecho el cálculo con los estados coherentes de Schrödinger, que no están normalizados. Si se hubiera hecho con los estados coherentes estándar simplemente no hubiera aparecido ese término. Como era de esperar en vista de (2.19) y (2.21), los términos que aparecen restando a  $x$  y a  $p$  son los valores esperados de la posición y momento adimensionales.

Estos cálculos van a poder ilustrar las órbitas descritas en la Figura 2.1 aún mejor, ya que nos van a permitir dibujarlas en el espacio de fases. Eso es justamente lo que hacemos a continuación. Por sencillez, se toma el estado coherente  $|\sqrt{2}\rangle_{st}$  y se le hace evolucionar conforme dice la ecuación (2.27). De esta forma, si el estado a  $t = 0$  es  $|z = \sqrt{2}\rangle_{st}$  sucesivamente irá pasando por los estados  $|z = \sqrt{2}i\rangle_{st}$  para  $t = \pi/(2\omega)$ ,  $|z = -\sqrt{2}\rangle_{st}$  para  $t = \pi/\omega$ ,  $|z = -\sqrt{2}i\rangle_{st}$  para  $t = 3\pi/(2\omega)$  y finalmente volverá a  $|z = \sqrt{2}\rangle_{st}$  a tiempo  $t = 2\pi/\omega$ .

Se puede observar en la Figura 2.2 como el estado coherente estándar en la representación de Wigner da vueltas periódicamente alrededor del origen de coordenadas al evolucionar temporalmente de acuerdo con la expresión

$$\psi_W(t)(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp\left[-\left(x - \sqrt{2} \operatorname{Re}(ze^{i\omega t})\right)^2\right] \exp\left[-\left(p - \sqrt{2} \operatorname{Im}(ze^{i\omega t})\right)^2\right]. \quad (2.71)$$

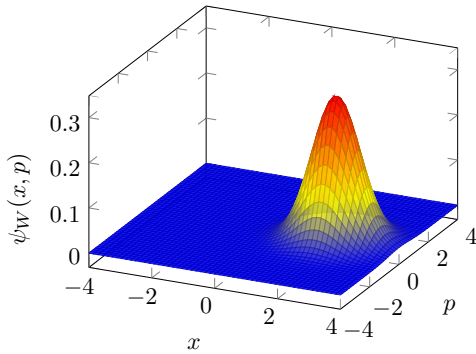
Resulta también ilustrativo ver qué formas toman las representaciones en coordenadas de estos estados. Como es de esperar, se trata de gaussianas. A partir de (2.63) se obtiene

$$|\langle x|z\rangle|^2 = \frac{1}{\pi^{1/2}} \exp\left(2\sqrt{2}x \operatorname{Re} z - x^2 - (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\right), \quad (2.72)$$

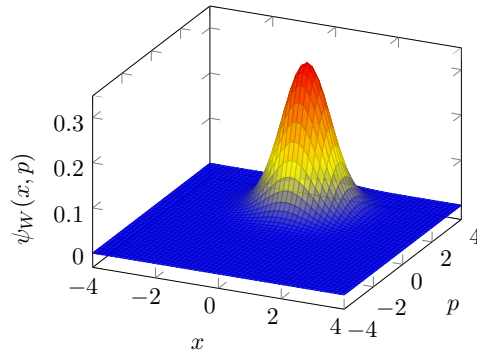
y, por tanto, premultiplicando por el factor  $e^{-|z|^2}$ , que es el factor de normalización que diferencia a los estados coherentes estándar (2.4) de los de Schrödinger (2.3), elevado al cuadrado, se obtiene:

$$|\langle x|z\rangle_{st}|^2 = \frac{1}{\pi^{1/2}} \exp\left(2\sqrt{2}x \operatorname{Re} z - x^2 - 2(\operatorname{Re} z)^2\right). \quad (2.73)$$

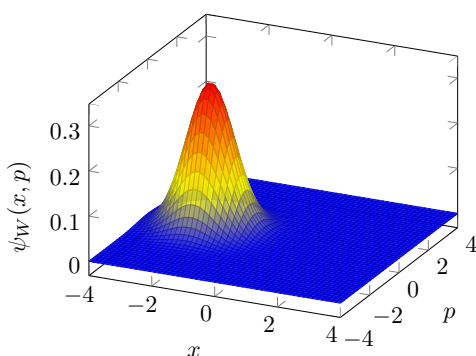
Esto es lo que se hace en la Figura 2.3 a partir del estado inicial  $|z = -2\rangle_{st}$ , cuya evolución temporal viene dada explícitamente por la sustitución  $z \rightarrow ze^{i\omega t}$  en (2.73). Se elije representar  $|\langle x|z\rangle_{st}|^2$ , es decir, esa magnitud para estados coherentes estándar, ya que es para estos para los que esta magnitud tiene sentido físico como densidad de probabilidad de presencia. Cabe destacar que las magnitudes involucradas en la representación (salvo el tiempo) son adimensionales, por lo que la carencia de unidades está justificada. Por otro lado, se ha preferido indicar el estado coherente  $|z = 2\rangle_{st}$  en vez de  $|2\rangle_{st}$  para evitar la posible confusión con los estados número.



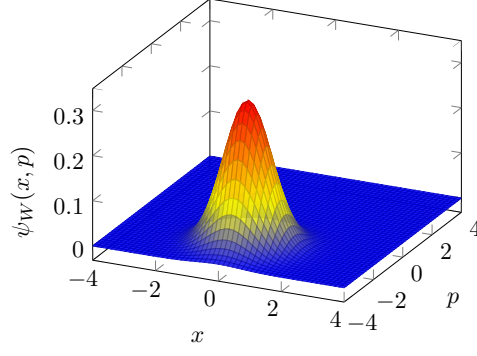
(a) Estado coherente  $|z = \sqrt{2}\rangle_{st}$ , en  $t = 0$ .



(b) Estado coherente  $|z = \sqrt{2}i\rangle_{st}$ , en  $t = \pi/(2\omega)$ .



(c) Estado coherente  $|z = -\sqrt{2}\rangle_{st}$ , en  $t = \pi/\omega$ .



(d) Estado coherente  $|z = -\sqrt{2}i\rangle_{st}$ , en  $t = 3\pi/(2\omega)$ .

Figura 2.2: Representación de la distribución de quasiprobabilidad de Wigner para la evolución temporal del estado coherente que en  $t = 0$  es  $|z = \sqrt{2}\rangle_{st}$ .

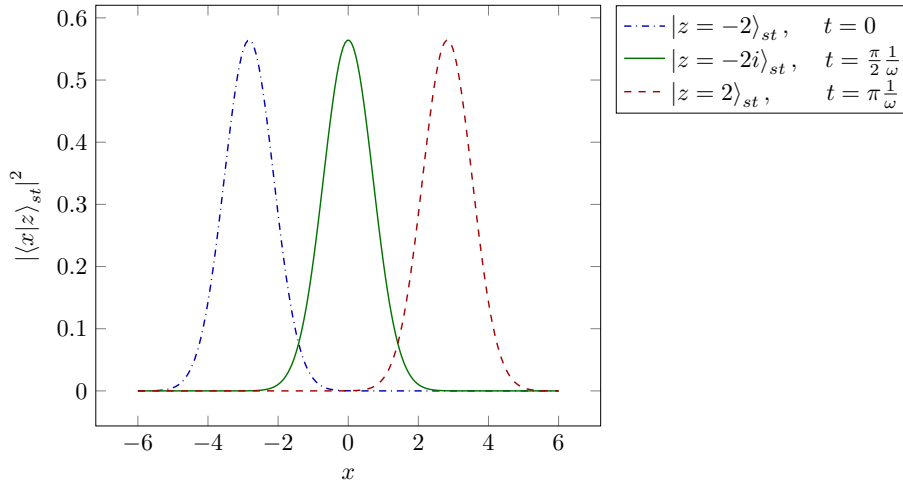


Figura 2.3: Evolución temporal del estado coherente que en  $t = 0$  toma la forma  $|z = -2\rangle_{st}$  en representación de coordenadas  $x$ .

## 2.4. Propiedades del espacio de Fock-Bargmann

En vista de la exposición precedente se puede definir el espacio de Fock-Bargmann como el conjunto de funciones analíticas enteras  $f(z)$  que tienen norma finita, siendo la norma la definida por el producto interno en (2.52). En primer lugar, cabe preguntarse cómo se puede expresar el producto interno en función de los coeficientes del desarrollo en serie de la función analítica. Considérense entonces las funciones enteras  $f(z)$  y  $g(z)$ ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n. \quad (2.74)$$

Al efectuar el producto nos va a aparecer la misma integral que ya se trató al calcular la resolución de la identidad de  $|z\rangle\langle z|$  en (2.13), y la cual evaluamos directamente porque ya la hemos calculado. Haciendo el cambio requerido a coordenadas polares  $z = \rho e^{i\theta}$  se puede escribir, a partir de (2.52),

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle &= \int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)} g(z) \frac{e^{-|z|^2}}{\pi} dz = \frac{1}{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{a}_n b_m \int_{\mathbb{C}} \bar{z}^n z^m e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{a}_n b_m \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta \int_0^{\infty} \rho^{n+m+1} e^{-\rho^2} d\rho = \sum_{n=0}^{\infty} n! \bar{a}_n b_n, \end{aligned} \quad (2.75)$$

que es la expresión que se quería hallar. Disponiendo de esta expresión cabe preguntarse por conjuntos ortonormales que ayuden a describir adecuadamente este espacio. A primera vista surge que el conjunto de funciones

$$u_n(z) = \langle \bar{z}|u_n \rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \quad (2.76)$$

son efectivamente ortogonales entre sí y, además, están normalizados, como se puede comprobar a partir de (2.75):

$$\langle u_n | u_m \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l!}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \delta_{ln} \delta_{lm} = \delta_{nm}, \quad (2.77)$$

donde  $\delta_{nm}$  representa la función delta de Kronecker, que vale 1 cuando  $n = m$  y es idénticamente nula en el resto de casos.

Además de lo anterior, se tiene que si todos los elementos de este conjunto son ortogonales a un elemento del espacio entonces todos sus coeficientes tienen que anularse y, por tanto, forman de hecho un conjunto *ortonormal y completo*. Este conjunto hace el papel de una base en el sentido hilbertiano usual del espacio, y se van a poder describir los elementos de dicho espacio en términos de este conjunto.

### 2.4.1. Algunas desigualdades

A partir de la expresión del producto interno que se ha obtenido en función de los coeficientes (2.75) se pueden deducir algunas desigualdades muy útiles que deben verificar las funciones del espacio de Fock-Bargmann. El primer ejemplo de ello es

$$|f(z)|^2 = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right|^2 \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \right)^2 \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} n! |a_n|^2 \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|^2}{n!} \right) = \|f\|^2 e^{|z|^2}, \quad (2.78)$$

donde la última de las desigualdades de la cadena anterior se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz. De forma similar se obtiene una desigualdad para la derivada de cualquier función del espacio de Fock-Bargmann,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n \right|^2 \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |a_{n+1}| |z^n| \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! |a_{n+1}|^2 \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) |z^n|^2}{n!} \right) \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} n! |a_n|^2 \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|^2}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{|z^n|^2}{n!} \right) \\ &\leq \|f\|^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|^2}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^{n+1}|^2}{n!} \right) = \|f\|^2 (1 + |z|^2) e^{|z|^2}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Continuando con este procedimiento se podrían conseguir cotas para derivadas de órdenes superiores.

Este tipo de cotas son muy habituales en espacios de Hilbert de funciones analíticas, y arrojan consecuencias como que la convergencia en norma implica convergencia puntual. Esta se obtiene a partir de (2.78), aplicándola en la diferencia de dos funciones del espacio:

$$|f(z) - g(z)| \leq e^{|z|^2/2} \|f - g\|. \quad (2.80)$$

Sin embargo, la consecuencia más importante de la desigualdad (2.78) es que hace que el espacio de funciones analíticas con ese producto interno sea un subespacio cerrado del espacio de funciones de variable compleja de cuadrado integrable, y por tanto, herede la propiedad de ser espacio de Hilbert. Además, la desigualdad (2.80) también asegura que la evaluación de funciones analíticas del espacio de Fock-Bargmann en cualquier  $z \in \mathbb{C}$  es una función continua como función de  $f$ , es decir, que estamos ante lo que se denomina un *espacio de Hilbert con núcleo reproductivo* [12], que es como se llaman usualmente los espacios de Hilbert en los que el funcional de evaluación es continuo. Precisamente la transformación  $\langle z|\omega\rangle$  que se describirá en el apartado siguiente es la que hace la función de núcleo integral del funcional de evaluación.

### 2.4.2. Vectores principales

Los estados coherentes  $|z\rangle$  son muchas veces llamados vectores principales en el lenguaje de los espacios de Fock-Bargmann, y gracias a la notación ketorial es muy sencillo darse cuenta que representan efectivamente funciones analíticas y cómo se relacionan entre ellos. Utilizando (2.5), y siendo  $\omega \in \mathbb{C}$  se tiene la siguiente representación en serie de potencias:

$$\langle \omega|z\rangle = e^{\bar{\omega}z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{\omega}^n z^n}{n!}. \quad (2.81)$$

Cabe además destacar que  $\langle \omega|z\rangle$  además de tratarse de una función analítica como función de  $z$ , es antianalítica como función de  $\omega$ . Por tanto, retomando el comentario anterior sobre espacios de Hilbert con núcleo reproductivo, esa exponencial  $e^{\bar{\omega}z}$  es la sencilla forma que toma el núcleo integral del funcional de evaluación. Esto no es otra cosa que (2.37), es decir,

$$f(z) = \langle \bar{z}|f\rangle = \int_{\mathbb{C}} \langle \bar{z}|\bar{\omega}\rangle \langle \bar{\omega}|f\rangle d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{\omega}z} f(\omega) d\mu(\omega). \quad (2.82)$$

### 2.4.3. Operadores lineales y continuos

Cabe a continuación preguntarse cómo actúan y se representan los operadores lineales y continuos que estamos acostumbrados a ver trabajar sobre el espacio de kets en la representación de Fock-Bargmann. Con la ayuda de los estados coherentes de Schrödinger se van a poder ver como transformaciones integrales. Sea  $A$  un operador en el espacio de estados. Veamos cuál es la representación de Fock-Bargmann del estado transformado de  $|f\rangle$  y de  $\langle f|$ , utilizando la resolución de la identidad (2.40),

$$\langle z|A|f\rangle = \int_{\mathbb{C}} \langle z|A|\bar{\omega}\rangle \langle \bar{\omega}|f\rangle d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{C}} \langle z|A|\bar{\omega}\rangle f(\omega) d\mu(\omega), \quad (2.83)$$

$$\langle f|A|z\rangle = \int_{\mathbb{C}} \langle f|\bar{\omega}\rangle \langle \bar{\omega}|A|z\rangle d\mu(\omega) = \int_{\mathbb{C}} \langle \bar{\omega}|A|z\rangle \overline{f(\omega)} d\mu(\omega). \quad (2.84)$$

El siguiente paso es preguntarse por la naturaleza del núcleo de las transformaciones que han quedado plasmadas en las ecuaciones anteriores:  $\langle z|A|\bar{\omega}\rangle$  o  $\langle \bar{\omega}|A|z\rangle$ .

Es claro que ambos son complejos conjugados. El segundo de ellos,  $\langle \bar{\omega}|A|z\rangle$ , si lo miramos bajo el lenguaje del espacio de Fock-Bargmann, nos dice que es el valor en el punto  $\omega$  de la función analítica que es representada por  $A|z\rangle$ . De esta forma, como  $A|z\rangle$  es un

elemento del espacio de Fock-Bargmann por ser el transformado de  $|z\rangle$  por  $A$ , se tiene que  $\langle \bar{\omega} | A | z \rangle$  es una función analítica de  $\omega$ . Si, en cambio, se mira a  $\langle z | A | \bar{\omega} \rangle$ , se deduce que este es función antianalítica de  $z$ , y por tanto  $\langle \bar{\omega} | A | z \rangle$  es función analítica de  $z$ , por ser su conjugado.

Se observa, además, que para el operador identidad, el núcleo integral se reduce al ya conocido  $\langle \bar{\omega} | z \rangle = e^{z\bar{\omega}}$ , (2.5). Inclusive, debido a que  $\|\langle z | A \rangle\|, \|A | z \rangle\|^2 < \infty$ , se tiene que las integrales siguientes son finitas:

$$\int_{\mathbb{C}} |\langle z | A | \bar{\omega} \rangle|^2 d\mu(\omega) = \|\langle z | A \rangle\|^2, \quad \int_{\mathbb{C}} |\langle \bar{\omega} | A | z \rangle|^2 d\mu(\omega) = \|A | z \rangle\|^2. \quad (2.85)$$

También es inmediato hallar el núcleo integral de la composición de dos operadores  $A$  y  $B$  introduciendo la resolución de la identidad (2.15):

$$\langle \omega | AB | \omega' \rangle = \int_{\mathbb{C}} \langle \omega | A | z \rangle \langle z | B | \omega' \rangle d\mu(z). \quad (2.86)$$

La condición de que un operador sea unitario  $AA^+ = A^+A = I$  queda traducida gracias a la expresión (2.86) como

$$\int_{\mathbb{C}} \langle \omega | A | z \rangle \overline{\langle \omega' | A | z \rangle} d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \overline{\langle z | A | \omega \rangle} \langle z | A | \omega' \rangle d\mu(z) = \langle \omega | \omega' \rangle = e^{\bar{\omega}\omega'}. \quad (2.87)$$

Estos son los resultados principales sobre operadores lineales y continuos que deben destacarse en el espacio de Fock-Bargmann. Se observa que, una vez dotados de la adecuada notación ketorial, estos resultados parecen extraordinariamente sencillos.

#### 2.4.4. Vuelta al espacio de estados

Para acabar la consideración teórica del espacio de Fock-Bargmann hay que dar cuenta de cómo devolver las funciones enteras al espacio de estados coordinado usual, ya que es de presuponer que la utilidad de este espacio es que algunos cálculos mecanocuánticos se realizan con mucha mayor facilidad en él. Es, por lo tanto, de vital importancia tener capacidad de retorno al espacio de estados coordinado para poder hacer uso de él. Como es natural, en virtud de lo anterior se considera para un estado  $|f\rangle$  con función de onda en representación de coordenadas  $\psi(x)$ ,

$$\psi(x) = \langle x | f \rangle = \int_{\mathbb{C}} \langle x | \bar{z} \rangle \langle \bar{z} | f \rangle d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \langle x | \bar{z} \rangle f(z) d\mu(z). \quad (2.88)$$

Sin embargo, por desgracia, la cosa no acaba ahí. La convergencia de la integral que aparece no está asegurada porque  $\langle x | \bar{z} \rangle$  no es el conjugado de una función analítica del espacio de Fock-Bargmann. Por suerte, esto se puede arreglar considerando un límite que, a priori, no conmuta con la integral

$$\psi(x) = \langle x | f \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_{\mathbb{C}} \langle x | \bar{z} \rangle f(\lambda z) d\mu(z), \quad (2.89)$$

donde el límite en  $\lambda$  ha de entenderse como límite en el sentido de la norma del espacio de Fock-Bargmann de funciones analíticas. Este resultado no es inmediato, y requiere de algo más de maquinaria de la que hemos desarrollado en el presente trabajo. Para el lector



interesado, la prueba puede encontrarse en el artículo original de Bargmann [1], teniendo en cuenta los cambios de notación que hay entre el artículo y este trabajo, que se deben a tratar de presentar los resultados con la notación ketorial habitual de estados coherentes.

Si se definen de esta manera operadores entre los espacios de funciones involucrados

$$f \xrightarrow{\mathcal{A}} \psi \xrightarrow{\mathcal{A}^{-1}} f,$$

se tiene, además de que  $\mathcal{A}$  es una isometría, que  $\mathcal{A}$  es un operador unitario, es decir, que  $\mathcal{A}^{-1}$  es su operador adjunto. También se puede definir el operador  $\mathcal{A}$ , en vez de a partir de (2.89), mediante la expresión siguiente, donde el límite tiene el mismo significado que acaba de explicarse:

$$\psi(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{|z| \leq \sigma} \langle x | \bar{z} \rangle f(z) d\mu(z), \quad (2.90)$$

la cual puede ser más útil a la hora de computar las funciones involucradas. Esta expresión, que aquí se presenta sin prueba, se puede encontrar en [1].

### 2.4.5. Orden y tipo de las funciones enteras

Existen dos características de las funciones enteras, el orden y el tipo, que son de mucha utilidad para trabajar con el espacio de funciones que se ha introducido en este capítulo. Es por ello que dedicamos esta última sección a sus definiciones y formas de calcularlos. Su interés será manifiesto en el capítulo siguiente. El crecimiento de una función entera es descrito por dos parámetros  $(\rho, \sigma)$ , los cuales, en definitiva, describen cómo es el comportamiento de la función en cuestión en un entorno del infinito. El primero de estos números,  $\rho$ , es denominado el orden de la función entera. El segundo,  $\sigma$ , es denominado el tipo de la función. Si se define

$$M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|, \quad (2.91)$$

entonces el orden y el tipo de la función vienen dados por [4, 26, 31]

$$\rho = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(R)}{\ln R}, \quad \sigma = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln M(R)}{R^\rho}. \quad (2.92)$$

Cuando se dispone de las expresiones de las funciones analíticas en función de los coeficientes de sus desarrollos en serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (2.93)$$

las expresiones anteriores resultan poco útiles, y resulta mejor considerar las siguientes expresiones, que son equivalentes:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln(1/|a_n|)}, \quad \sigma = \frac{1}{e^\rho} \lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n|^{\rho/n}. \quad (2.94)$$

Cabe resaltar que este concepto no es específico de los espacios de funciones analíticas que se utilizan en mecánica cuántica, sino que es una propiedad general de las funciones enteras que tiene gran relevancia en múltiples ámbitos del análisis en variable compleja [4, 26, 31]. Expresado en un lenguaje más intuitivo, decir que una función entera tiene orden  $\rho$  y es de tipo  $\sigma$  quiere decir que su comportamiento para  $z$  con módulo suficientemente grande es

equivalente a  $\exp(\sigma |z|^\rho)$ .

Es sencillo construir funciones enteras que tengan orden  $\rho$  y tipo  $\sigma$  a partir de sus desarrollos en serie. Considérese una función entera cuyo desarrollo en serie venga dado por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\sigma e \rho}{n} \right)^{n/\rho} z^n. \quad (2.95)$$

Para ellas se verifica fácilmente que su orden y su tipo son

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{\ln(1/|a_n|)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{(n/\rho)(\ln n - \ln \sigma e \rho)} = \rho, \quad \frac{1}{e \rho} \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sigma e \rho}{n} = \sigma. \quad (2.96)$$

A continuación, estableceremos una relación de orden en los pares  $(\rho, \sigma)$  que permite comparar entre sí las distintas funciones enteras. Se dirá que el crecimiento de una función dado por  $(\rho, \sigma)$  es mayor que  $(\rho_0, \sigma_0)$  si  $\rho > \rho_0$  o si  $\rho = \rho_0$  y  $\sigma > \sigma_0$ . Se dirá que es menor si no es igual ni mayor.

Las funciones que pertenecen al espacio de Fock-Bargmann poseen una interesante propiedad en lo que respecta a su orden y tipo, la cual ayudará a caracterizar funciones de onda válidas en numerosas aplicaciones. Resulta que todas las funciones enteras que pertenecen a este espacio tienen crecimiento menor o igual que  $(2, 1/2)$ . Lo comprobamos a continuación. En el apartado de desigualdades se obtuvo el resultado (2.78), que puede reescribirse así:

$$|f(z)| \leq \|f\| e^{|z|^2/2}. \quad (2.97)$$

Esto lleva a que  $M(R) \leq \|f\| e^{R^2/2}$ , luego

$$\rho = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(R)}{\ln R} \leq \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln (\|f\| e^{R^2/2})}{\ln R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln (\ln \|f\| + R^2/2)}{\ln R} = 2. \quad (2.98)$$

Ahora bien, si el orden de una función es 2 entonces veamos que su tipo tiene que ser menor o igual que  $1/2$ . Para ello, recordemos la expresión obtenida para la norma de los elementos del espacio de Fock-Bargmann en términos de los coeficientes de su desarrollo en serie (2.75),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |a_n|^2 < \infty. \quad (2.99)$$

Por tanto, por el criterio de convergencia de la raíz<sup>6</sup> tiene que verificarse que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} |a_n|^{2/n} \leq 1. \quad (2.100)$$

Finalmente, aplicando la fórmula de Stirling<sup>7</sup> se tiene que equivalentemente ha de verificarse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n|^{2/n} \leq e. \quad (2.102)$$

<sup>6</sup>Dada una serie de números reales  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , si se define  $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ , entonces si  $\lambda < 1$  la serie converge absolutamente y si  $\lambda > 1$  la serie diverge.

<sup>7</sup>La fórmula de Stirling viene dada por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1, \quad (2.101)$$

que habitualmente se expresa con la equivalencia  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  para  $n$  suficientemente grande.

En conclusión, por la definición del tipo de una función entera en función de los coeficientes de su desarrollo en serie se obtiene

$$\sigma = \frac{1}{2e} \lim_{n \rightarrow \infty} n |a_n|^{2/n} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.103)$$

que es lo que se quería obtener. Téngase en cuenta que esta condición es necesaria pero no es suficiente para garantizar la pertenencia al espacio de Fock-Bargmann.

Por otro lado, se tiene que toda función entera de orden estrictamente menor que 2 pertenece al espacio de Fock-Bargmann. Esto se desprende directamente de la definición de orden de una función (2.91), ya que supone que si  $f(z)$  es de orden  $\rho$  para cada  $\epsilon > 0$  existe una constante  $C > 0$  tal que

$$M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)| < Ce^{R^{\rho+\epsilon}}. \quad (2.104)$$

Con esta desigualdad se puede acotar el cuadrado de la norma de la función (2.52), de forma que se puede escribir, pasando a polares  $z = \rho e^{i\theta}$ ,

$$\|f\|^2 = |\langle f|f \rangle| = 2 \int_0^\infty r M(r)^2 e^{-r^2} dr = 2C^2 \int_0^\infty r e^{2r^{\rho+\epsilon} - r^2} dr, \quad (2.105)$$

de forma que si  $\rho < 2$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\rho + \epsilon < 2$ , luego la integral converge, y, por tanto, hace que  $f$  pertenezca al espacio de Fock-Bargmann.



## Capítulo 3

# Aplicaciones

Este capítulo está dedicado a mostrar algunas aplicaciones del espacio de Fock-Bargmann. En las diversas secciones se calcularán espectros de ciertos hamiltonianos relevantes en Física. Se irán abordando en orden de dificultad creciente, partiendo del oscilador armónico cuántico hasta llegar a problemas de investigación actual, como el hamiltoniano de Rabi de dos fotones, ilustrándose así la vigencia de las herramientas que proporciona el espacio de Fock-Bargmann.

### 3.1. El oscilador armónico cuántico

En (1.11) se expuso que el hamiltoniano armónico cuántico toma la forma

$$\mathcal{H}_h = \hbar\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (3.1)$$

Este paradigmático ejemplo es capaz de ilustrar la simplificación que puede suponer aplicar las herramientas desarrolladas en el Capítulo 2. Se van a buscar los kets  $|f\rangle$  propios del hamiltoniano con energía  $E = \hbar\omega E'$ . Por un lado, utilizando (2.36) y (2.39) se puede escribir

$$\langle \bar{z} | \frac{\mathcal{H}_h}{\hbar\omega} | f \rangle = \langle \bar{z} | a^+ a | f \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{z} | f \rangle = z \langle \bar{z} | a | f \rangle + \frac{f(z)}{2} = z \frac{df}{dz}(z) + \frac{f(z)}{2}. \quad (3.2)$$

De esta forma, la ecuación diferencial a resolver es

$$z \frac{df}{dz}(z) = \left( E' - \frac{1}{2} \right) f(z), \quad (3.3)$$

la cual es de variables separadas, y se puede reescribir como

$$d(\log f) = \left( E' - \frac{1}{2} \right) d(\log z), \quad (3.4)$$

y, por tanto, lleva a que, siendo  $C$  una constante, las soluciones sean de la forma

$$f(z) = C z^{E' - \frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Como para pertenecer al espacio de Fock-Bargmann se requiere que estas sean funciones enteras, la condición necesaria y suficiente que se debe aplicar sobre (3.5) será que el exponente

de  $z$  sea entero, conduciendo a las conocidas energías

$$E = \hbar\omega E' = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Los estados propios correspondientes a estas energías son los monomios  $Cz^n$ , que, por tanto, son las representaciones, una vez normalizados, en el espacio de Fock-Bargmann de los estados número  $|n\rangle$ .

### 3.2. Modelos de Rabi

El modelo de Rabi fue propuesto por Isidor Isaac Rabi (premio Nobel de Física en 1944 por el descubrimiento de la resonancia magnética atómica) en 1936, en plenos albores de la física cuántica, para describir la interacción entre un campo electromagnético de una sola frecuencia, por ejemplo, el confinado en una cavidad, y un sistema de dos niveles, presumiblemente un átomo. Este modelo ha vuelto a recibir especial atención desde los años 2000 [7, 24, 25], ya que contiene los fundamentos más sencillos de la interacción entre luz y materia.

Para introducir el hamiltoniano buscado se necesitan las matrices de Pauli, que vienen dadas por las expresiones habituales:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

junto con las de las matrices de subir y bajar niveles  $\sigma_+$  y  $\sigma_-$ :

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

En el proceso de cuantización del campo electromagnético, como se puede encontrar en [23, 32], se encuentra que el hamiltoniano total puede ser descrito como superposición de osciladores armónicos de distintas frecuencias. Esto conduce a que, en la descripción del sistema interaccionante antes mencionada, al tratarse de una cavidad con una única frecuencia posible, el campo electromagnético pueda ser descrito por el hamiltoniano (3.1). El hamiltoniano total que regirá la evolución del sistema estará compuesto por el hamiltoniano de cada uno de los dos sistemas por separado:  $\hbar\omega a^\dagger a$  para el fotón<sup>1</sup> de frecuencia  $\omega$  que interacciona con el sistema,  $(\hbar\omega_0/2)\sigma_z$  para el sistema de dos niveles atómicos<sup>2</sup>, más un término de acople  $\Delta\mathcal{H}$ . El espacio de estados global donde se trabaja de aquí en adelante es el producto tensorial del espacio de estados fotónicos correspondientes a un oscilador armónico por el espacio de estados del sistema de dos niveles atómico.

$$\mathcal{H}_R = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \Delta\mathcal{H}. \quad (3.9)$$

Para obtener la expresión del término de acople se requiere utilizar las expresiones cuantizadas del campo electromagnético y del operador dipolo eléctrico. En [23, 32] se puede

<sup>1</sup>No se considera el término  $\hbar\omega/2$  que debería aparecer sumando al hamiltoniano del oscilador armónico porque, al ser una constante, no añade dificultad a la resolución. Esta constante deberá ser añadida a las energías propias que se obtengan.

<sup>2</sup>La magnitud  $\hbar\omega_0$  representa la separación energética entre los dos niveles del sistema.

encontrar la expresión final, que viene dada por

$$\Delta\mathcal{H} = \hat{g}(\sigma^- + \sigma^+)(a + a^+), \quad (3.10)$$

donde  $\hat{g}$  es una constante con dimensiones de energía que mide la intensidad del acoplamiento entre el fotón y el sistema de dos niveles. Haciendo  $\hat{g} = 0$  se obtendría el hamiltoniano para el caso en el que ambos sistemas no interaccionan. El hamiltoniano completo es el denominado *modelo de Rabi* y queda expresado como

$$\mathcal{H}_R = \hbar\omega a^+ a + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hat{g}(\sigma^- + \sigma^+)(a + a^+). \quad (3.11)$$

Para operar de forma más cómoda con el hamiltoniano (3.11) se trabajará con este dividido<sup>3</sup> entre  $\hbar\omega$ , renombrando las constantes como  $\delta = \frac{\omega_0/\omega}{2}$  y  $g = \hat{g}/(\hbar\omega)$ , de forma que

$$H_R = a^+ a + \delta \sigma_z + g \sigma_x (a + a^+). \quad (3.12)$$

Merece la pena destacar que las constantes  $\delta$  y  $g$  son adimensionales. Este hamiltoniano es habitualmente difícil de tratar de forma exacta, y es por ello que Jaynes y Cummings [20] propusieron una simplificación a través de la denominada *aproximación de onda rotante* (RWA). Esta aproximación supone despreciar en el hamiltoniano los términos que oscilan rápidamente, que son los que tienen mayor contribución cuando la frecuencia del campo electromagnético aplicado está alejada de la frecuencia de resonancia del sistema de dos niveles, y se corresponden con  $\sigma_+ a^+$  y  $\sigma_- a^-$ . De esta forma, a partir de (3.11), el *hamiltoniano de Jaynes-Cummings* queda expresado como

$$\mathcal{H}_{JC} = \hbar\omega a^+ a + \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hat{g}(\sigma_+ a + \sigma_- a^+), \quad (3.13)$$

y, de nuevo, al dividir entre  $\hbar\omega$  para adimensionalizar y renombrar las constantes podemos escribir

$$H_{JC} = a^+ a + \delta \sigma_z + g(\sigma_+ a + \sigma_- a^+). \quad (3.14)$$

En esta aproximación los términos que quedan en el hamiltoniano de acople o interacción se pueden entender perfectamente como los dos procesos de resonancia típicos de un sistema de dos niveles: la absorción (aniquilación) de un fotón pasando el sistema de dos niveles al nivel de mayor energía y la emisión (creación) de un fotón pasando el sistema de dos niveles al nivel de menor energía.

En último lugar en este capítulo se presentará el *modelo de Rabi de dos fotones*. Este modelo se corresponde a la interacción de un sistema de dos niveles, de nuevo presumiblemente atómico, con un estado entrelazado de dos fotones. La deducción del hamiltoniano es análoga a la anterior, sólo es que ahora el campo eléctrico que aparece en el término de acople se corresponde a un campo asociado a un estado de dos fotones:

$$H_{2R} = a^+ a + \delta \sigma_z + g \sigma_x \left( (a^+)^2 + a^2 \right). \quad (3.15)$$

---

<sup>3</sup>Esto no origina problemas porque  $\omega \neq 0$ , ya que  $\omega = 0$  supondría la ausencia de campo electromagnético. Operacionalmente es lo mismo que hacer  $\hbar\omega = 1$ , pero conceptualmente es más correcto. De esta forma, se denotará con  $\mathcal{H}$  los hamiltonianos originales frente a los que están divididos entre  $\hbar\omega$ , que se denotarán por  $H$ , y los cuales son adimensionales.

Este tipo de procesos tienen importancia en física del estado sólido [3]. En este modelo, si se aplicase la aproximación de onda rotante emergerían en el término de acople los dos procesos que resultan característicos: la absorción de dos fotones junto con el paso del átomo al nivel energético superior y la emisión de dos fotones junto con el retorno o desexcitación del átomo al nivel menos energético.

### 3.3. Modelo de Jaynes-Cummings

El siguiente modelo que vamos a tratar por medio de representación de Fock-Bargmann es el hamiltoniano (3.14) de Jaynes-Cummings,

$$H_{JC} = a^+ a + \delta \sigma_z + g (\sigma_+ a + \sigma_- a^+), \quad (3.16)$$

ya que es el más sencillo de los tres presentados en la anterior sección, al contar con la aproximación de onda rotante (RWA). En representación de Fock-Bargmann cada una de las dos componentes se corresponderá con una función analítica,  $\langle \bar{z} | \varphi_1 \rangle = \varphi_1(z)$ ,  $\langle \bar{z} | \varphi_2 \rangle = \varphi_2(z)$ . Las autofunciones serán un producto tensorial correspondiendo a las dos componentes del sistema de dos niveles, y  $\langle \bar{z} | f \rangle$  se corresponderá con la función analítica  $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$  que tiene por componentes a las anteriores:

$$|f\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + |\varphi_2\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(z) = \langle \bar{z} | f \rangle = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) \\ \varphi_2(z) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Análogamente a como se hizo con el oscilador armónico, se trata de escribir la ecuación de autovalores en la representación de Fock-Bargmann, esta vez con (3.16),

$$\langle \bar{z} | H_{JC} | f \rangle = z \frac{df}{dz}(z) + \delta \sigma_z f(z) + g \left( \sigma_+ \frac{df}{dz}(z) + \sigma_- z f(z) \right) = E f(z), \quad (3.18)$$

lo cual se puede escribir directamente en forma de sistema como

$$\begin{cases} z \frac{d\varphi_1}{dz}(z) + (\delta - E)\varphi_1(z) + g \frac{d\varphi_2}{dz}(z) = 0, \\ z \frac{d\varphi_2}{dz}(z) - (\delta + E)\varphi_2(z) + g z \varphi_1(z) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Para resolver el sistema se puede despejar  $\varphi_1(z)$  de la segunda ecuación de (3.19), obteniendo

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{gz} \left( z \frac{d\varphi_2}{dz}(z) - (\delta + E)\varphi_2(z) \right) = -\frac{1}{g} \frac{d\varphi_2}{dz}(z) + \frac{\delta + E}{gz} \varphi_2(z). \quad (3.20)$$

Para introducir (3.20) en la primera ecuación de (3.19) hace falta calcular su derivada, que es

$$\frac{d\varphi_1}{dz}(z) = -\frac{1}{g} \frac{d^2\varphi_2}{dz^2}(z) + \left( \frac{\delta + E}{g} \right) \frac{z \frac{d\varphi_2}{dz}(z) - \varphi_2(z)}{z^2}. \quad (3.21)$$

De esta forma, sustituyendo (3.20) y (3.21) en la primera ecuación de (3.19) se obtiene la ecuación diferencial que hay que resolver,

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2\varphi_2}{dz^2}(z) + \left( \frac{\delta + E}{g} \right) \frac{z \frac{d\varphi_2}{dz}(z) - \varphi_2(z)}{z^2} - \frac{\delta - E}{gz} \frac{d\varphi_2}{dz}(z) + \frac{\delta^2 - E^2}{gz^2} \varphi_2(z) + \frac{g}{z} \frac{d\varphi_2}{dz}(z) = 0, \quad (3.22)$$



la cual se puede reescribir como

$$\frac{d^2\varphi_2}{dz^2}(z) - \left(\frac{2E + g^2}{z}\right) \frac{d\varphi_2(z)}{dz} + \left(\frac{\delta + E - \delta^2 + E^2}{z^2}\right) \varphi_2(z) = 0. \quad (3.23)$$

La teoría de este tipo de ecuaciones diferenciales en el plano complejo puede encontrarse en [15, 21, 33]. En esta ecuación, se comprueba que  $z = 0$  es un punto singular regular<sup>4</sup>, y, de hecho, es el único. Bastará imponer que las soluciones de la ecuación indicial<sup>5</sup> sean números naturales para conseguir funciones enteras solución. La ecuación indicial resulta

$$\lambda^2 - (2E + g^2 + 1)\lambda + (E + \delta)(E - \delta + 1) = 0. \quad (3.27)$$

De esta forma, las raíces de la ecuación indicial (3.27) son

$$\lambda = \frac{2E + g^2 + 1 \pm \sqrt{(2E + g^2 + 1)^2 - 4(E + \delta)(E - \delta + 1)}}{2}. \quad (3.28)$$

Ahora, se procede a despejar la energía, asumiendo que  $\lambda = n \in \mathbb{N}$  para buscar soluciones que sean analíticas en todo el plano complejo. Para ello, se puede escribir,

$$\begin{aligned} (2n - (2E + g^2 + 1))^2 &= (2E + g^2 + 1)^2 - 4(E + \delta)(E - \delta + 1), \\ \Rightarrow n^2 - n(2E + g^2 + 1) &= -(E + \delta)(E - \delta + 1), \end{aligned} \quad (3.29)$$

y de esta forma se llega a la ecuación de segundo grado

$$E^2 + (1 - 2n)E + (n^2 - n - ng^2 - \delta^2 + \delta) = 0. \quad (3.30)$$

Los posibles valores de  $E$  son

$$E_{n+} = n - \frac{1}{2} + \sqrt{ng^2 + \left(\delta - \frac{1}{2}\right)^2}, \quad E_{n-} = n - \frac{1}{2} - \sqrt{ng^2 + \left(\delta - \frac{1}{2}\right)^2}. \quad (3.31)$$

De esta forma, podemos comprobar cómo varía el espectro al cambiar los parámetros adimensionales  $g$  y  $\delta$ . Además, se observa fácilmente que al hacer  $g \rightarrow 0$  se obtiene el espectro

<sup>4</sup>Dada una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2f}{dz^2}(z) + p(z)\frac{df}{dz}(z) + q(z)f(z) = 0, \quad (3.24)$$

se dice que un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  es un *punto regular* si  $p(z)$  y  $q(z)$  son analíticas en un entorno de dicho punto, se dice que es un *punto singular* si no es regular, se dice que es un *punto regular singular* si  $(z - z_0)p(z)$  y  $(z - z_0)^2q(z)$  son analíticas en un entorno de dicho punto y se dice que es un *punto irregular* si es singular pero no es regular singular.

<sup>5</sup>Al probar soluciones para la ecuación (3.24) de la forma

$$f(z) = (z - z_0)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (3.25)$$

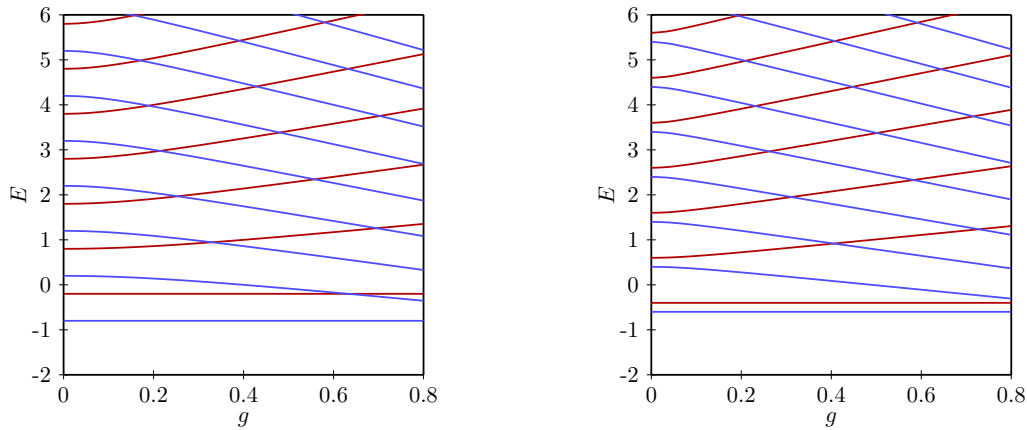
en un entorno de un punto regular singular  $z_0 \in \mathbb{C}$  se obtiene que  $\lambda$  debe de ser solución de la ecuación siguiente,

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0, \quad (3.26)$$

que es llamada *ecuación indicial*, y donde  $p_0$  y  $q_0$  son el término de orden 0 de los desarrollos en serie en torno a  $z_0$  de  $(z - z_0)p(z)$  y  $(z - z_0)^2q(z)$  respectivamente. Este método es conocido como *método de Frobenius*.

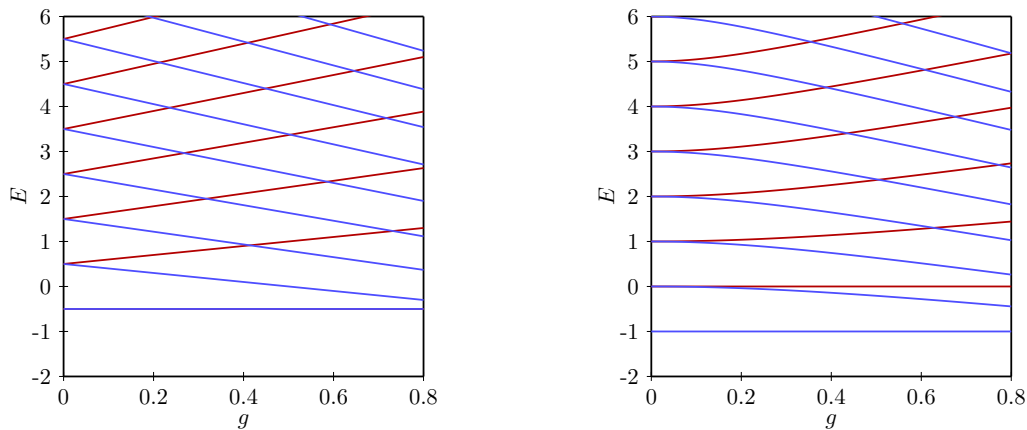
del oscilador armónico más la contribución  $\sigma_z \delta$  del sistema de dos niveles, que es lo que se espera obtener en el caso desacoplado. Recordamos de nuevo que para obtener la energía real habría que multiplicar (3.31) por  $\hbar\omega$  y añadir la energía del estado vacío fotónico. Por simplicidad, representaremos (3.31), ya que las magnitudes involucradas son adimensionales.

En las siguientes figuras se representa para distintos valores de  $\delta$  la evolución de los niveles conforme se varía la constante de acoplamiento  $g$ . Se observa que para distintos valores de  $\delta$  se produce desplazamiento de los puntos donde se cortan los niveles energéticos.



(a) Representación del espectro (3.31) con  $\delta = 0.2$  y  $g$  variando entre 0 y 0.8. En -rojo el correspondiente a  $E_{n+}$  y en -azul a  $E_{n-}$ . (b) Representación del espectro (3.31) con  $\delta = 0.4$  y  $g$  variando entre 0 y 0.8. En -rojo el correspondiente a  $E_{n+}$  y en -azul a  $E_{n-}$ .

Figura 3.1: Espectro de  $H_{JC}$  como función del acoplamiento.



(a) Representación del espectro (3.31) con  $\delta = 0.5$  y  $g$  variando entre 0 y 0.8. En -rojo el correspondiente a  $E_{n+}$  y en -azul a  $E_{n-}$ . (b) Representación del espectro (3.31) con  $\delta = 1$  y  $g$  variando entre 0 y 0.8. En -rojo el correspondiente a  $E_{n+}$  y en -azul a  $E_{n-}$ .

Figura 3.2: Espectro de  $H_{JC}$  como función del acoplamiento en casos resonantes.

En la Figura 3.2 se muestran casos resonantes, es decir, en los que las frecuencias del fotón son múltiplos enteros de la frecuencia del sistema de dos niveles. En estos casos, cuando no hay acoplamiento  $g = 0$  se tiene que a partir de cierto nivel estos son dos veces degenerados y es el acoplamiento el que rompe la degeneración.

Por último, también quedan determinados los estados propios asociados a cada nivel energético. La recurrencia que presentan [15, 21, 33] para obtener la serie solución implica, debido a que en este caso (3.23) presenta  $zp(z)$  y  $z^2q(z)$  constantes se vuelve trivial, implicando que dado  $E_{n+}$  o  $E_{n-}$  la solución de (3.23) es proporcional a

$$\varphi_2(z) = z^n. \quad (3.32)$$

Introduciendo esto en la segunda ecuación de (3.19) se obtiene la otra componente, y de esta manera se obtienen los autovectores asociados a cada autovalor

$$f(z) = \begin{pmatrix} \frac{E_{n\pm} - n - \delta}{g} z^{n-1} \\ z^n \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

En esta expresión ya está patente que las autofunciones pertenecen al espacio de Fock-Bargmann, ya que se trata de monomios. Utilizando la ecuación (2.75) se normaliza fácilmente la expresión, obteniendo

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)!} \sqrt{n + \left(\frac{E_{n\pm} - n - \delta}{g}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{E_{n\pm} - n - \delta}{g} z^{n-1} \\ z^n \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Volviendo a la notación de kets, conociendo que los monomios normalizados (2.76) se corresponden con los estados número gracias a lo visto en la Sección 3.1, se puede escribir

$$|E_{n\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + n \left(\frac{g}{E_{n\pm} - n - \delta}\right)^2}} |n-1\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \left(\frac{E_{n\pm} - n - \delta}{g}\right)^2}} |n\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

## 3.4. Modelo de Rabi de un solo fotón

### 3.4.1. La ecuación confluyente de Heun

A continuación se va a presentar el modelo de Rabi de un único fotón, utilizando el hamiltoniano adimensional que se ha presentado en (3.12). La fuente bibliográfica principal de esta sección es el artículo [25]. Dado

$$H_R = a^+a + \delta\sigma_z + g(\sigma^- + \sigma^+)(a + a^+), \quad (3.36)$$

procedamos a escribir las ecuaciones diferenciales en representación de Fock. En este caso, será más sencillo tratar el sistema tras llevar a cabo una transformación unitaria que desacople parcialmente las ecuaciones. Se toma la siguiente

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_z + \sigma_x). \quad (3.37)$$

De aquí que el nuevo hamiltoniano  $\hat{H}_R$ , el transformado de  $H_R$  (3.36) por la transformación  $U$  (3.37), quede expresado como

$$\hat{H}_R = U^+ H_R U = \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) (a^+ a + \delta \sigma_z + g \sigma_x (a + a^+)) (\sigma_z + \sigma_x). \quad (3.38)$$

Teniendo en cuenta las siguientes identidades se puede operar sobre el hamiltoniano (3.38) con mayor facilidad. Estas propiedades se desprenden directamente de las definiciones de las matrices de Pauli (3.7),

$$\sigma_x^2 = I, \quad \sigma_z^2 = I, \quad \sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z = i \sigma_y, \quad (3.39)$$

y, por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} (\sigma_z + \sigma_x) \sigma_z (\sigma_z + \sigma_x) &= (\sigma_z + \sigma_x) + \sigma_x (I - \sigma_x \sigma_z) = 2\sigma_x, \\ (\sigma_z + \sigma_x) \sigma_x (\sigma_z + \sigma_x) &= (\sigma_z + \sigma_x) + \sigma_z (I - \sigma_z \sigma_x) = 2\sigma_z, \\ (\sigma_z + \sigma_x) (\sigma_z + \sigma_x) &= \sigma_z^2 + \sigma_x^2 + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 2I. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Utilizando estas expresiones se puede reescribir el hamiltoniano  $\hat{H}_R$  (3.38) así:

$$\hat{H}_R = a^+ a + \delta \sigma_x + g \sigma_z (a + a^+). \quad (3.41)$$

En consecuencia, si se buscan autofunciones

$$|f\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + |\psi_2\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

entonces la ecuación diferencial  $\langle \bar{z} | \hat{H}_R | f \rangle = E \langle \bar{z} | f \rangle$  dada por (3.41) queda escrita, en virtud de (2.36) y (2.39), como

$$\begin{cases} (z + g) \frac{d\psi_1}{dz}(z) = (E - gz) \psi_1(z) - \delta \psi_2(z), \\ (z - g) \frac{d\psi_2}{dz}(z) = (E + gz) \psi_2(z) - \delta \psi_1(z). \end{cases} \quad (3.43)$$

El primer comentario importante es que [22] establece que el orden de las soluciones enteras de un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes racionales está acotado por el grado máximo de los coeficientes. Es por esto que las soluciones enteras de este sistema tienen necesariamente orden menor o igual que 1, y, por tanto, pertenecen al espacio de Fock-Bargmann.

Por otro lado, hay que intentar reescribir estas ecuaciones de la forma más tratable. En primer lugar, hay que juntar ambas dos ecuaciones para dar lugar a una ecuación de segundo orden, como se hizo con el sistema de ecuaciones diferenciales que se obtuvieron para el hamiltoniano de Jaynes-Cummings (3.19). De la primera ecuación de (3.43), se despeja  $\psi_2(z)$ ,

$$\psi_2(z) = \frac{E - gz}{\delta} \psi_1(z) - \frac{z + g}{\delta} \frac{d\psi_1}{dz}(z). \quad (3.44)$$

A continuación, al sustituir esta expresión en la segunda de las ecuaciones de (3.43) se obtiene

$$\begin{aligned} (z - g) \left( -g \psi_1(z) + (E - gz - 1) \frac{d\psi_1}{dz}(z) - (z + g) \frac{d^2\psi_1}{dz^2}(z) \right) &= \\ = (E + gz)(E - gz) \psi_1(z) - (E + gz)(z + g) \frac{d\psi_1}{dz}(z) - \delta^2 \psi_1(z), \end{aligned} \quad (3.45)$$

y esta se puede reescribir finalmente como

$$-(z-g)(z+g)\frac{d^2\psi_1}{dz^2}(z) + \left((E+gz)(z+g) + (E-gz-1)(z-g)\right)\frac{d\psi_1}{dz}(z) - \left(g(z-g) + (E+gz)(E-gz) - \delta^2\right)\psi_1(z) = 0. \quad (3.46)$$

Para poder analizar con mayor claridad sus puntos regulares singulares se va a efectuar un cambio de variable y de función incógnita. El objetivo del cambio de variable es llevar linealmente los dos puntos que van a ser regulares singulares,  $-g$  y  $g$  a los puntos 0 y 1. El objetivo de introducir el cambio de función incógnita es conseguir la forma final de una *ecuación de Heun confluyente*<sup>6</sup> [21, 30], y, por tanto, poder escribir las ecuaciones indiciales de forma inmediata. Siguiendo ese pensamiento se plantea

$$z = g(2y-1), \quad \psi_1(y) = \exp(2g^2y)v(y). \quad (3.50)$$

Estos cambios de variable e incógnita son perfectamente lícitos al estar buscando soluciones enteras de la ecuación diferencial en cuestión. Para sustituir ha de tenerse en cuenta que por la regla de la cadena se tienen las siguientes expresiones:

$$\frac{d\psi_1}{dz}(z) = \frac{1}{2g} \left(2g^2v(y) + v'(y)\right) \exp(2g^2y), \quad (3.51)$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dz^2}(z) = \frac{1}{4g^2} \left(4g^4v(y) + 4g^2v'(y) + v''(y)\right) \exp(2g^2y). \quad (3.52)$$

De esta forma, al tener en cuenta también que

$$z-g = 2g(y-1), \quad z+g = 2gy, \quad gz = g^2(2y-1), \quad (3.53)$$

la ecuación diferencial (3.46) toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned} & -4g^2y(y-1)\frac{1}{4g^2} \left(4g^4v(y) + 4g^2v'(y) + v''(y)\right) \\ & + \left((E+g^2(2y-1))2gy + (E-g^2(2y-1)-1)2g(y-1)\right)\frac{1}{2g} \left(2g^2v(y) + v'(y)\right) \\ & - \left(2g^2(y-1) + (E+g^2(2y-1))(E-g^2(2y-1)) - \delta^2\right)v(y) = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

<sup>6</sup> Se denominan ecuaciones de Heun generales a las ecuaciones de la forma

$$\frac{d^2f}{dz^2}(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-a}\right)\frac{df}{dz}(z) + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-z_0)}f(z) = 0, \quad (3.47)$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, q, z_0$  son parámetros complejos arbitrarios con las únicas restricciones de que  $z_0 \neq 0, 1$  y que los primeros cinco parámetros están relacionados por

$$\gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + 1. \quad (3.48)$$

Cuando en una ecuación de este tipo se hace  $z_0 \rightarrow \infty$  se obtiene una *ecuación confluyente de Heun*, que viene descrita por la forma

$$\frac{d^2f}{dz^2}(z) + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1}\right)\frac{df}{dz}(z) - \frac{q_1q_2(z-h)}{z(z-1)}f(z) = 0, \quad (3.49)$$

donde  $\gamma, \delta, q_1, q_2, h$  son parámetros complejos. Así como la ecuación de Heun general (3.47) es de *tipo Fuchsiano*, es decir, que todos sus puntos singulares son regulares singulares, no es así en la ecuación confluyente de Heun (3.49), ya que el  $\infty$  deja de ser regular singular y pasa a ser un punto irregular.

A continuación se reescribe la ecuación diferencial ordenando los términos como

$$\begin{aligned}
& -y(y-1)v''(y) + \\
& + (-4g^2y(y-1) + y(E + g^2(2y-1)) + (y-1)(E - g^2(2y-1) - 1))v'(y) \\
& + (-4g^4y(y-1) + 2g^2y(E + g^2(2y-1)) + 2g^2(y-1)(E - g^2(2y-1) - 1) \\
& \quad - 2g^2(y-1) - (E + g^2(2y-1))(E - g^2(2y-1)) + \delta^2)v(y) = 0.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Vamos a trabajar en primer lugar con el coeficiente de  $v'(y)$  en la ecuación (3.55), al que denotaremos por  $k_1$ :

$$\begin{aligned}
k_1 &= -4g^2y(y-1) + y(E + g^2(2y-1)) + (y-1)(E - g^2(2y-1) - 1) \\
&= -4g^2y(y-1) + y(E + g^2 + 2(y-1)g^2) + (y-1)(E + g^2 - 2yg^2 - 1).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Para continuar operando se van a realizar unos cambios de constantes que nos faciliten el trabajo porque agrupen expresiones que aparecen con frecuencia. Se introducen las nuevas constantes  $\alpha = 4g^2$  y  $\gamma = E + g^2$ . De esta forma, el término anterior  $k_1$  toma la forma:

$$k_1 = -\alpha y(y-1) + \gamma y + (\gamma-1)(y-1) = y(y-1) \left( -\alpha + \frac{\gamma}{y-1} + \frac{\gamma-1}{y} \right). \tag{3.57}$$

Para el coeficiente de  $v(y)$  en (3.55), que llamaremos  $k_0$ , usando astutamente  $1 = y - (y-1)$  y utilizando que aparecen algunos sumandos que aparecieron en  $k_1$  (3.57), se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
k_0 &= y(y-1)g^2 \left( -\alpha + 2\frac{\gamma}{y-1} + 2\frac{\gamma-1}{y} \right) - 2g^2(y-1) - E^2 + g^4(4y(y-1) + 1) + \delta^2 \\
&= y(y-1) \left( \frac{2\gamma g^2 + g^4 + \delta^2 - E^2}{y-1} + \frac{2(\gamma-1)g^2 - 2g^2 - g^4 - \delta^2 + E^2}{y} \right) \\
&= y(y-1) \left( \frac{2\gamma g^2 + g^4 + \delta^2 - (\gamma^2 - 2g^2\gamma + g^4)}{y-1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(\gamma-1)g^2 - 2g^2 - g^4 - \delta^2 + (\gamma^2 - 2g^2\gamma + g^4)}{y} \right) \\
&= y(y-1) \left( \frac{\gamma(4g^2 - \gamma) + \delta^2}{y-1} + \frac{\gamma^2 - 4g^2 - \delta^2}{y} \right).
\end{aligned} \tag{3.58}$$

De esta forma, sustituyendo (3.57) y (3.58) en (3.55), la ecuación diferencial queda expresada en la forma usual para las ecuaciones diferenciales de segundo orden como

$$v''(y) + \left( \alpha + \frac{1-\gamma}{y} - \frac{\gamma}{y-1} \right) v'(y) + \left( \frac{\gamma(\gamma-4g^2) - \delta^2}{y-1} + \frac{4g^2 + \delta^2 - \gamma^2}{y} \right) v(y) = 0. \tag{3.59}$$

Este tipo de ecuación diferencial, como se mencionó en el pie de página 6, es denominado *ecuación de Heun confluyente*, una ecuación diferencial similar a la hipergeométrica pero en la que el infinito no es un punto regular singular. En ella, tanto  $y = 0$  como  $y = 1$  son

puntos regulares singulares, mientras que el infinito es un punto irregular.

La teoría general para tratar este tipo de ecuaciones se puede encontrar en [15, 21, 33], aunque las peculiaridades de esta ecuación la hacen realmente complicada, y como muestra de ello [30] está dedicado únicamente a las ecuaciones diferenciales de Heun. El primer punto es conseguir los índices correspondientes a cada uno de los dos puntos regulares singulares. Gracias a que los términos que aparecen acompañando a  $v(y)$  sólo presentan polos de primer orden no hará falta más que tener en cuenta los términos que acompañan a  $v'(y)$ . Para el punto  $y = 0$  la ecuación indicial es  $F_1(\alpha) = \alpha^2 - \gamma\alpha$ , luego los índices o exponentes de este punto serán  $(\gamma, 0)$ .

Para el segundo punto regular singular,  $y = 1$ , se tiene la ecuación indicial  $F_2(\alpha) = \alpha^2 - (1 + \gamma)\alpha$ , luego se tienen índices o exponentes para este punto dados por  $(1 + \gamma, 0)$ . Ahora hay que recurrir a ciertos resultados de la teoría general. Para cada punto, si la diferencia entre los dos índices no es un número entero entonces está demostrado que existen dos soluciones locales distintas en un entorno de dicho punto (este entorno será en este caso un disco de radio unidad). A cada uno de los dos exponentes distintos queda asociada una solución local. Además, para exponentes enteros está garantizada la analiticidad de las mismas.

Juntando todos esos resultados se tiene que para  $\gamma > 0$  no entero se tendrán soluciones holomorfas o analíticas en un entorno de cada uno de los dos puntos regulares singulares, asociadas para ambos puntos al índice 0. En tal caso basta comprobar que esas dos series son de hecho la misma función (o proporcional) en el dominio intersección para comprobar que existe solución entera por continuación analítica. Esto se comprueba mediante la evaluación del wronskiano, para comprobar que se puede realizar la unión de ambas soluciones. De hecho, es suficiente con evaluarlo en un punto de la intersección. El caso en el que  $\gamma$  es entero es más difícil de analizar. La determinación completa del espectro de este hamiltoniano es un asunto complicado, lo cual puede entenderse echando un vistazo a [25], un artículo de 2014 relacionado con este tema. Lo que se acaba de presentar aquí no es más que la primera aproximación al problema.

De esta forma, queda descrito el procedimiento para encontrar la que, como afirma [25], es la mayor parte del espectro del hamiltoniano de Rabi (3.12). Sin embargo, como esta evaluación es a primera vista costosa, en la subsección siguiente se va a tratar de construir el espectro de forma explícita de una forma ligeramente distinta, pero en cuyo fondo descansa la misma idea del wronskiano de las dos soluciones en serie de potencias.

### 3.4.2. La obtención del espectro

En la línea que acaba de proponer, se van a presentar los resultados obtenidos por Braak en [7], que tienen un enfoque similar a los anteriores. Los resultados de Braak, de 2011, son previos a los anteriores que se han mostrado, y en cierta forma seminales, mostraron el procedimiento a seguir. Se ha elegido este modelo para acabar debido a que los wronskianos que hace falta computar para determinar el espectro son relativamente fácilmente calculables, y, por tanto, nos permitirán hacer algunas representaciones que nos den ideas más precisas del espectro, que es, en definitiva, nuestro objetivo. El hamiltoniano

que se va a tratar es el llamado *hamiltoniano de un sólo modo espín-bosón* (3.41), el cual es el que se obtuvo del modelo de Rabi (3.12) por la transformación unitaria típica (3.37)

$$\hat{H}_R = a^+a + \delta\sigma_x + g\sigma_z(a + a^+). \quad (3.60)$$

Para reescribir dicho hamiltoniano en la forma ‘más diagonal posible’ se utiliza una transformación unitaria similar a la que apareció en (3.37). Es llamada *transformación de Fulton-Gouterman*,  $\mathcal{U}$ . Siendo  $\hat{T}$  el operador de reflexión  $\hat{T}(f)(z) = f(-z)$  se define  $\mathcal{U}$  por

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \hat{T} & -\hat{T} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{T} \end{pmatrix} (\sigma_z + \sigma_x). \quad (3.61)$$

Esto lleva a que:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \mathcal{U}^+ \hat{H}_R \mathcal{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \hat{T} \\ 1 & -\hat{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^+a + g(a + a^+) & \delta \\ \delta & a^+a - g(a + a^+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \hat{T} & -\hat{T} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^+a + g(a + a^+) + \delta\hat{T} & 0 \\ 0 & a^+a + g(a + a^+) - \delta\hat{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde para efectuar ese cálculo matricial se ha tenido en cuenta que  $\hat{T}a^+a = a^+a\hat{T}$  mientras que  $\hat{T}a = -a\hat{T}$  y  $\hat{T}a^+ = -a^+\hat{T}$ .

Dada la expresión diagonal del hamiltoniano en (3.62) podemos tratar separadamente cada una de las componentes, como se hará a continuación. Considérese en primer lugar las autofunciones  $\psi$  para la primera de las componentes de este hamiltoniano,  $\hat{H}_+$ . Serán estas con las que se trabaje. Cabe destacar que el desacoplo no ha sido gratuito ya que a cambio se ha hecho aparecer  $\hat{T}$  en cada una de las ecuaciones, lo cual introduce inconvenientes que habrá que salvar. Como se ha mencionado, siendo  $f$  la autofunción de dos componentes

$$|f\rangle = |\psi\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + |\varphi\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Entonces la ecuación para la primera componente de  $\langle \bar{z} | \hat{H} | f \rangle = E \langle \bar{z} | f \rangle$ , a partir de (3.62),  $\langle \bar{z} | \hat{H}_+ | \psi \rangle = E \langle \bar{z} | \psi \rangle$ , se escribe como

$$(z + g) \frac{d}{dz} \psi(z) + (gz - E) \psi(z) + \delta \psi(-z) = 0. \quad (3.64)$$

Se practica a continuación una argucia para deshacerse del término que contiene  $\psi(-z)$ , considerando la solución de un sistema que se formulará a continuación en el que

$$\psi(z) = \xi(z), \quad \psi(-z) = \tilde{\xi}(z). \quad (3.65)$$

Estas dos funciones hacen referencia únicamente a la primera componente de  $|f\rangle$ , están obviamente relacionadas por  $\xi(z) = \tilde{\xi}(-z)$ , y son un mero artificio para el desarrollo posterior. De (3.64) y (3.65) se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que deben verificar estas funciones. Apréciese que la segunda de estas ecuaciones que se presentan a



continuación no es la misma ecuación que la que correspondería a la segunda componente de (3.62). Esta se obtiene al hacer la sustitución  $z \rightarrow -z$  en la primera,

$$\begin{cases} (z + g) \frac{d\xi}{dz}(z) + (gz - E)\xi(z) + \delta\tilde{\xi}(z) = 0, \\ (z - g) \frac{d\tilde{\xi}}{dz}(z) - (gz + E)\tilde{\xi}(z) + \delta\xi(z) = 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Se procede ahora a reagrupar las variables y cambiar las funciones incógnita para simplificar el cálculo. Como sólo se va a requerir probar series de potencias en el 0 basta considerar un cambio de variable que lleve el punto regular singular de  $-g$  al 0, bastará un desplazamiento sin escalado, ya que no hay necesidad de llevar  $g$  al 1. Para enfatizar que este cambio no es el mismo que (3.50), que condujo a la ecuación de Heun confluyente, se utilizarán otros nombres para las variables. Con este propósito se considera la variable  $\eta = z + g$ , la constante  $\gamma = E + g^2$  y se cambia de función incógnita a

$$\xi(\eta) = \exp(g(g - \eta))h(\eta), \quad \hat{\xi}(\eta) = \exp(g(g - \eta))\hat{h}(\eta). \quad (3.67)$$

De esta forma se reescribe (3.66) a través de (3.67) como

$$\begin{cases} \eta \left( -g h(\eta) + \frac{dh}{d\eta}(\eta) \right) + (g(\eta - g) - E)h(\eta) + \delta \hat{h}(\eta) = 0, \\ (\eta - 2g) \left( -g \hat{h}(\eta) + \frac{d\hat{h}}{d\eta}(\eta) \right) - (g(\eta - g) + E)\hat{h}(\eta) + \delta h(\eta) = 0, \end{cases} \quad (3.68)$$

el cual se puede escribir simplificadamente como

$$\begin{cases} \eta \frac{dh}{d\eta}(\eta) = \gamma h(\eta) - \delta \hat{h}(\eta), \\ (\eta - 2g) \frac{d\hat{h}}{d\eta}(\eta) = (\gamma - 4g^2 + 2g\eta) \hat{h}(\eta) - \delta h(\eta). \end{cases} \quad (3.69)$$

Ahora, se prueban soluciones en series de potencias en la primera ecuación de (3.69). Ya que la dependencia con la energía está codificada en  $\gamma = E + g^2$ , se pondrá explícitamente la dependencia de los coeficientes de los desarrollos en serie con  $\gamma$  y no con las otras constantes  $g$ ,  $\delta$ , que también aparecerán en las expresiones explícitas. Desarrollando en la variable  $\eta$  en torno al 0 se toman series del tipo

$$h(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\gamma)\eta^n, \quad \hat{h}(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n(\gamma)\eta^n. \quad (3.70)$$

De la primera de las ecuaciones del sistema (3.69) se obtiene la relación siguiente entre los coeficientes de ambas series:

$$nA_n(\gamma) = \gamma A_n(\gamma) - \delta K_n(\gamma) \quad \Rightarrow \quad A_n(\gamma) = K_n(\gamma) \frac{\delta}{\gamma - n}. \quad (3.71)$$

Si se pretende que las soluciones sean enteras hay que imponer que se anulen los términos para  $n$  negativo. Para lograrlo, se busca conseguir la ecuación de recurrencia que permite construir los coeficientes  $A_n(\gamma)$  y  $K_n(\gamma)$ . Con ese objetivo se sustituye (3.70) en la segunda ecuación del sistema (3.69), con vistas a extraer del sistema toda la información posible:

$$nK_n(\gamma) - 2g(n + 1)K_{n+1}(\gamma) = (\gamma - 4g^2) K_n(\gamma) + 2gK_{n-1}(\gamma) - K_n(\gamma) \frac{\delta^2}{\gamma - n}. \quad (3.72)$$

De esta forma, se puede reescribir la ecuación de recurrencia de los coeficientes como:

$$(n+1)K_{n+1}(\gamma) = \left( \frac{n}{2g} + \frac{1}{2g} \left( 4g^2 - \gamma + \frac{\delta^2}{\gamma - n} \right) \right) K_n(\gamma) - K_{n-1}(\gamma), \quad (3.73)$$

y de aquí, finalmente, se puede formular la recurrencia como:

$$nK_n(\gamma) = r_{n-1}(\gamma)K_{n-1}(\gamma) - K_{n-2}(\gamma), \quad (3.74)$$

donde los coeficientes  $r_n(\gamma)$  vienen dados por

$$r_n(\gamma) = 2g + \frac{1}{2g} \left( n - \gamma + \frac{\delta^2}{\gamma - n} \right). \quad (3.75)$$

Por tanto, al tomar en la solución ya sólo los términos que hacen de  $\psi(z)$  una función analítica se tienen dos posibles representaciones en serie de la solución al juntar (3.67), (3.70) y (3.71),

$$\xi(z) = \exp(-gz)h(\eta) = e^{-gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\gamma) \frac{\delta}{\gamma - n} (g+z)^n, \quad (3.76)$$

$$\xi(z) = \hat{\xi}(-z) = \exp(gz)\hat{h}(-z) = e^{gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\gamma) (g-z)^n, \quad (3.77)$$

que se corresponden precisamente a los desarrollos en serie alrededor de los dos puntos regulares singulares del sistema de ecuaciones diferenciales. Para evaluar los radios de convergencia de estas series se utiliza el Teorema de Poincaré-Perron<sup>7</sup> ([21], Apéndice B, Teoremas B.1 y B.2). Escribiendo a partir de (3.74) la recurrencia de los coeficientes de (3.76) en el formato del teorema se tiene

$$K_{n+1}(\gamma) = \frac{r_n(\gamma)}{(n+1)} K_n(\gamma) - \frac{1}{(n+1)} K_{n-1}(\gamma), \quad (3.80)$$

donde se obtiene, usando (3.75), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n(x)}{(n+1)} = \frac{1}{2g}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{(n+1)} \right) = 0. \quad (3.81)$$

<sup>7</sup>**Teorema. (Poincaré-Perron).** Sea  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión generada por la recurrencia siguiente

$$\begin{cases} x_{n+1} = A_n x_n + B_n x_{n-1}, & n \in \mathbb{Z}^+, \\ x_1 = A_0 x_0, \end{cases} \quad (3.78)$$

donde los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  tienen límites finitos  $A$  y  $B$  respectivamente cuando  $n \rightarrow \infty$  y, además, se tiene que  $B_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Siendo  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las raíces de la ecuación característica  $\lambda^2 = A\lambda + B$ , se asume que las raíces tienen distinto módulo, por ejemplo,  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ . Entonces existe un sistema fundamental de soluciones  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ , es decir, que la solución a la recurrencia es una combinación lineal de esas dos sucesiones, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lambda_1. \quad (3.79)$$

En estas condiciones el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}/x_n$  siempre existe y vale  $\lambda_2$  excepto cuando la solución es un múltiplo de  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ , en cuyo caso vale  $\lambda_1$ .

Aplicado los teoremas mencionados se tiene que la ecuación característica es  $\lambda(\lambda - \frac{1}{2g}) = 0$ , luego el radio de convergencia de la serie puede ser o bien  $2g$  o bien infinito. Para (3.77) se tiene, por (3.74), la recurrencia de sus coeficientes dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma - (n+1)} K_{n+1}(\gamma) = & \frac{\gamma - n}{\gamma - (n+1)} \frac{r_n(\gamma)}{(n+1)} \left( \frac{1}{\gamma - n} K_n(\gamma) \right) + \\ & - \frac{1}{(n+1)} \frac{\gamma - (n-1)}{\gamma - (n+1)} \left( \frac{1}{\gamma - (n-1)} K_{n-1}(\gamma) \right), \end{aligned} \quad (3.82)$$

cuyos coeficientes tienen los mismos límites que los anteriores y, por tanto, los mismos radios de convergencia. La única forma de que se defina una función entera es que la función global sea holomorfa tanto en  $z = g$  como en  $z = -g$ . Por ello, para tener una solución entera se requiere que ambas funciones coincidan idénticamente en el dominio de intersección de sus dominios de convergencia que se muestra en la Figura 3.3, ya que entonces su radio de convergencia tendrá que ser mayor que  $2g$ , luego  $\infty$ . Por lo tanto, retomando las expresiones (3.76) y (3.77), se tiene que  $\gamma = E + g^2$  pertenece al espectro si y sólo si en el dominio intersección se verifica que la diferencia de las dos expresiones mencionadas se anula

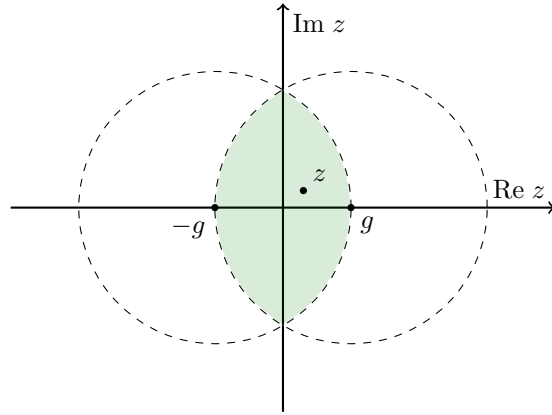


Figura 3.3: Dominios de convergencia garantizados de (3.76) y (3.77).

$$G_+(\gamma, z) = e^{gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\gamma) (g - z)^n - e^{-gz} \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\gamma) \frac{\delta}{\gamma - n} (g + z)^n = 0. \quad (3.83)$$

Además, es suficiente que esa condición se consiga en un punto, ya que en un entorno de cada punto ordinario existen dos soluciones distintas independientes, por lo que si se anulan en él coinciden y se trata de la misma solución en un entorno. Por tanto, si se verifica que  $G_+(\gamma, 0) = 0$  se tiene que ambos desarrollos en serie coinciden y además convergen en todo el plano complejo. Esta es precisamente la solución fundamental que el Teorema de Poincaré-Perron describe separadamente. Por tanto, la condición para que  $\gamma = E + g^2$  esté en el espectro será

$$G_+(\gamma) = G_+(\gamma, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\gamma) \left( 1 - \frac{\delta}{\gamma - n} \right) g^n = 0. \quad (3.84)$$

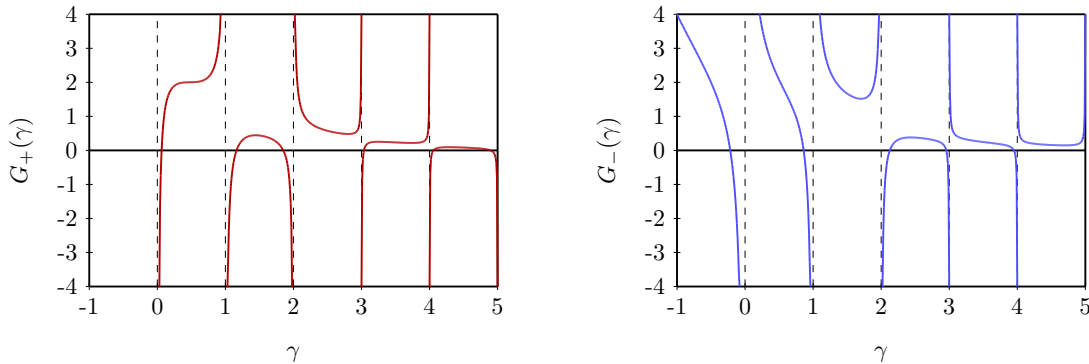
Pero cabe recordar que el caso que se ha tratado es el de la primera componente del hamiltoniano total  $\hat{H}$ , (3.62),  $\hat{H}_-$ . Procediendo análogamente se obtiene la condición de pertenencia al espectro asociado a la segunda componente de la diagonal de  $\hat{H}$  (no hace falta repetir todos los cálculos de nuevo, sólomente notar que hay que cambiar de signo a  $\delta \rightarrow -\delta$ ):

$$G_-(\gamma) = G_-(\gamma, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\gamma) \left( 1 + \frac{\delta}{\gamma - n} \right) g^n = 0. \quad (3.85)$$

Cabe destacar sin embargo, que no se han determinado así todos los autovalores del sistema en cuestión. En el artículo [7] se indica que existen algunos autovalores excepcionales que se corresponden con casos límite que se han ido desprendiendo del razonamiento. Su análisis es más complejo y, por ello, no se tendrá en cuenta. Esto es a lo que se refiere [25] cuando indica que con los resultados de Braak se creía ya conocido el espectro completo del hamiltoniano de Rabi. Estas energías que no están descritas por los cálculos que acaban de llevarse a cabo son precisamente las que Maciejewski quería enfatizar en el desarrollo que se llevó a cabo en la sección anterior, el cual permitía ir desgajando completamente todo el espectro sin dejar cabos sueltos; aunque en esta exposición hayamos obviado la parte más complicada.

### 3.4.3. Representación e interpretación del espectro

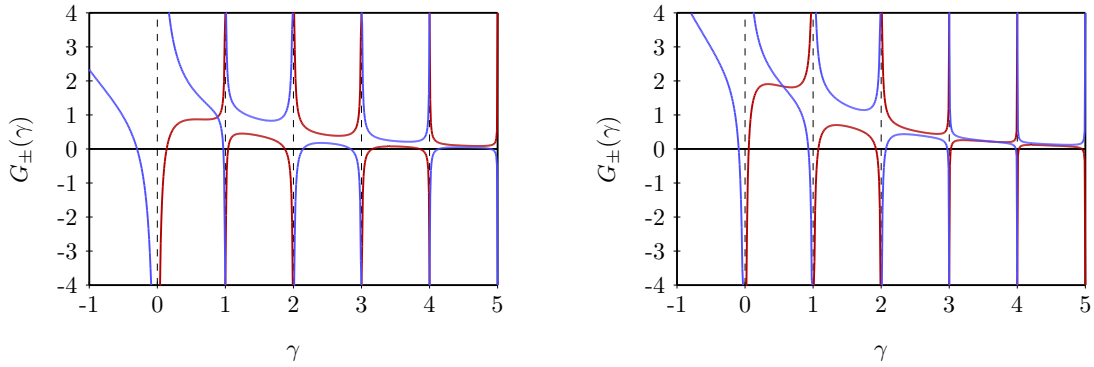
La representación de estas funciones que llevaremos a cabo a continuación nos va a proporcionar la información buscada sobre los niveles de energía del sistema físico que se está estudiando. En primer lugar, presentamos gráficas de las funciones  $G_+(\gamma)$  (3.84) y  $G_-(\gamma)$  (3.85) que acabamos de presentar. En ellas se aprecian claramente singularidades para valores enteros de  $\gamma$ , que son puntos que contribuyen a las partes del espectro que no se han analizado.



(a) Representación de la función  $G_+(\gamma)$  en el intervalo  $[1, 5]$  para parámetros  $\delta = 0.4$ ,  $g = 0.7$ . (b) Representación de la función  $G_-(\gamma)$  en el intervalo  $[1, 5]$  para parámetros  $\delta = 0.4$ ,  $g = 0.7$ .

Figura 3.4: Representación de las funciones  $G_+(\gamma)$  y  $G_-(\gamma)$  en el intervalo  $[1, 5]$  para parámetros  $\delta = 0.4$ ,  $g = 0.7$ .

Se ha representado tan sólo una parte de los posibles valores de  $\gamma$ . Ninguna de estas funciones está definida para valores de  $\gamma$  menores que  $-1$ , mientras que hacia el otro lado se puede prolongar el dominio indefinidamente, encontrándose más y más ceros sucesivamente. De esta forma, queda constatado que existen estados estacionarios de energía tan alta como se quiera, mientras que hay una cota inferior para la energía de estos estados. Esto es razonable dentro del modelo que estamos considerando, ya que con el campo externo se puede suministrar la cantidad de energía que se quiera.

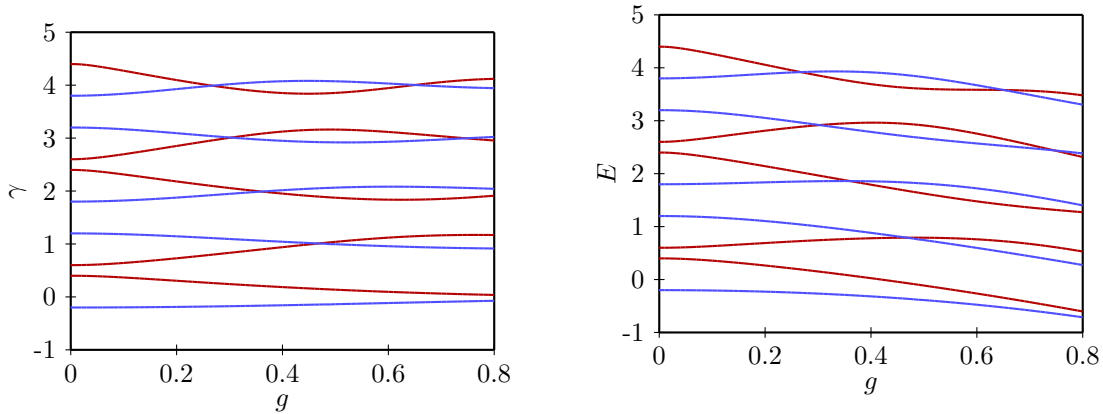


(a) Representación de las funciones  $G_+(\gamma)$  (-rojo) y  $G_-(\gamma)$  (-azul) en el intervalo  $[1, 5]$  para parámetros  $\delta = 0.4$ ,  $g = 0.5$ .

(b) Representación de las funciones  $G_+(\gamma)$  (-rojo) y  $G_-(\gamma)$  (-azul) en el intervalo  $[1, 5]$  para parámetros  $\delta = 0.2$ ,  $g = 0.7$ .

Figura 3.5: Representación de las funciones  $G_+(\gamma)$  y  $G_-(\gamma)$  en el intervalo  $[1, 5]$  para distintos parámetros.

Comparando las Figuras 3.4 y 3.5 se ilustra, aparentemente, una dependencia más bien débil entre los ceros de estas funciones con la variación del parámetro  $\delta$ , ya que continúan prácticamente en el mismo sitio. Esto implica que la relación entre las frecuencias propias del sistema y el campo externo va a marcar una dependencia débil sobre las energías de los estados estacionarios, lo cual puede resultar sorprendente.



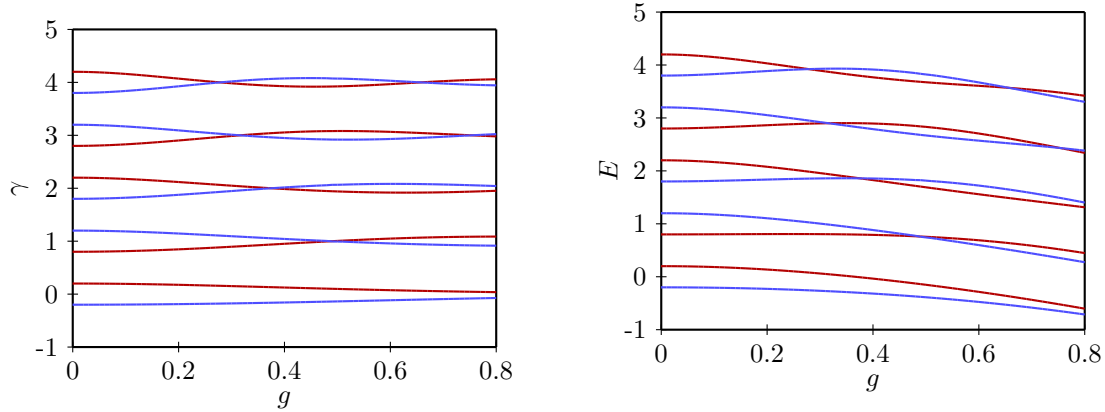
(a) Representación de los ceros de las funciones  $G_+(\gamma)$  (-rojo) y  $G_-(\gamma)$  (-azul) en el intervalo  $[1, 5]$  para parámetro  $\delta = 0.4$ , y distintos  $g$ .

(b) Representación del espectro de  $\hat{H}$  para parámetro  $\delta = 0.4$ , y distintos  $g$ . En -rojo las líneas que provienen de ceros de  $G_+(\gamma)$  y en -azul las de  $G_-(\gamma)$ .

Figura 3.6: Espectro de  $\hat{H}$  (3.62) como función del acoplamiento para  $\delta = 0.4$ .

Por otro lado, es destacable el hecho de que las representaciones se han realizado en función de magnitudes adimensionales, como también lo son las funciones  $G_{\pm}(\gamma)$ . De esta forma, la idea que dan las gráficas sobre el espectro es mucho más realista y nos hace no depender de las unidades.

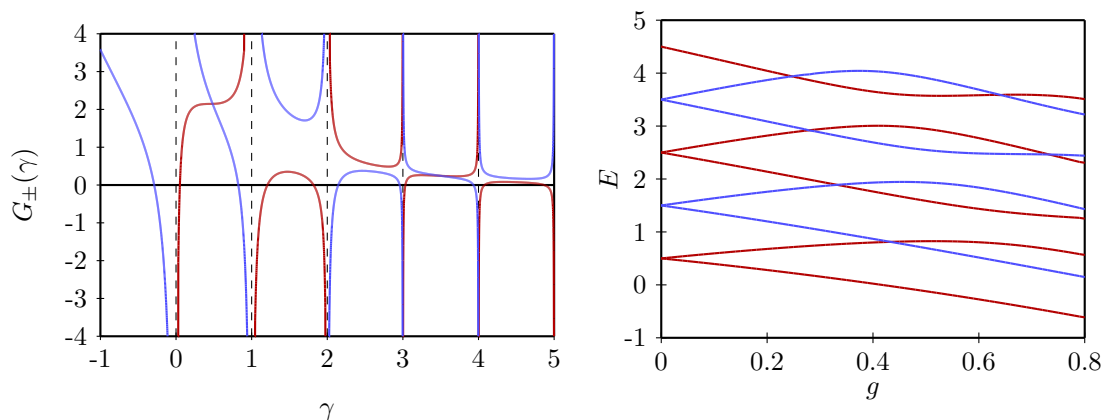
En la Figura 3.6 y la Figura 3.7, se presenta la dependencia de los ceros de las funciones anteriores, es decir, los elementos del espectro con la variable de acoplamiento. En estas gráficas se observan fenómenos curiosos de cruce de niveles. Además se verifica la particularidad de que los niveles de mismo signo no se cruzan entre sí, únicamente lo hacen los que provienen de ceros de  $G_+(\gamma)$  con los que provienen de ceros de  $G_-(\gamma)$ .



(a) Representación de los ceros de las funciones  $G_+(\gamma)$  (-rojo) y  $G_-(\gamma)$  (-azul) en el intervalo  $[1, 5]$  para parámetro  $\delta = 0.2$ , y distintos  $g$ .

(b) Representación del espectro de  $\hat{H}$  para parámetro  $\delta = 0.2$ , y distintos  $g$ . En -rojo las líneas que provienen de ceros de  $G_+(\gamma)$  y en -azul las de  $G_-(\gamma)$ .

Figura 3.7: Espectro de  $\hat{H}$  (3.62) como función del acoplamiento para  $\delta = 0.2$ .



(a) Representación de las funciones  $G_+(\gamma)$  (-rojo) y  $G_-(\gamma)$  (-azul) en el intervalo  $[1, 5]$  para parámetros  $\delta = 0.5$ ,  $g = 0.7$ .

(b) Representación del espectro de  $\hat{H}$  para parámetro  $\delta = 0.5$ , y distintos  $g$ . En -rojo las líneas que provienen de ceros de  $G_+(\gamma)$  y en -azul las de  $G_-(\gamma)$ .

Figura 3.8: Espectro de  $\hat{H}$  (3.62) como función del acoplamiento para  $\delta = 0.5$ , caso de resonancia.

En la Figura 3.7 presentamos las mismas gráficas que en Figura 3.6 para otro valor de  $\delta$ , comprobándose de nuevo que apenas hay variación de una a la otra. Estas gráficas son especialmente curiosas en la medida en la que presentan un fenómeno que es el contrario a uno que se presenta habitualmente, y es que un el término de acople pueda generar degeneración en lugar de reducirla. En Figura 3.8b se presenta el caso de resonancia en el que el acople rompe la degeneración existente. Comparando con la Figura 3.2b del hamiltoniano de Jaynes-Cummings, se observa su coincidencia para  $g$  pequeño, como es lógico al tratarse del mismo hamiltoniano al aplicar la aproximación de onda rotante.

Todas las representaciones del trabajo han sido realizadas utilizando R y TikZ.

### 3.5. Modelo de Rabi de dos fotones

El objetivo de la sección siguiente es únicamente delinear de forma general los resultados de A.J. Maciejewski y T. Stachowiak en su artículo [24]. El artículo es de 2017, lo que sirve para poner en relieve la actualidad del tema que se está tratando y la posibilidad de existencia de multitud de aplicaciones inexploradas en distintos ámbitos de la mecánica cuántica. El hamiltoniano a tratar, es (3.15),

$$H_{2R} = a^+ a + \delta \sigma_z + g \left( (a^+)^2 + a^2 \right) \sigma_x, \quad (3.86)$$

que se escribe explícitamente de forma que se aprecie mejor visualmente su estructura respecto al sistema de dos niveles como:

$$H_{2R} = \begin{pmatrix} a^+ a + \delta & g \left( (a^+)^2 + a^2 \right) \\ g \left( (a^+)^2 + a^2 \right) & a^+ a - \delta \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

En esta forma las expresiones que resultarían al hacer los cálculos no serían manejables debido a los términos de acople entre los dos niveles. Por tanto, el primer paso razonable que se dará será tratar de desacoplar al máximo (no se puede totalmente) las ecuaciones de ambos niveles. Para ello se considera la siguiente transformación unitaria:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

de forma que el hamiltoniano transformado de (3.87) por  $U$  será

$$\begin{aligned} \tilde{H} = U^+ H_{2R} U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^+ a + \delta & g \left( (a^+)^2 + a^2 \right) \\ g \left( (a^+)^2 + a^2 \right) & a^+ a - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^+ a + g \left( (a^+)^2 + a^2 \right) & \delta \\ \delta & a^+ a - g \left( (a^+)^2 + a^2 \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.89)$$

En consecuencia, se ha conseguido convertir el término no diagonal en una constante. Considerando, como en las secciones anteriores una autofunción

$$|f\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + |\psi_2\rangle \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

la ecuación de autovalores en representación de Fock-Bargmann,  $\langle \bar{z} | \tilde{H} | f \rangle = E \langle \bar{z} | f \rangle$  se puede escribir como el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} g \frac{d^2 \psi_1}{dz^2}(z) + z \frac{d\psi_1}{dz}(z) + (gz^2 - E)\psi_1(z) + \delta\psi_2(z) = 0, \\ g \frac{d^2 \psi_2}{dz^2}(z) - z \frac{d\psi_2}{dz}(z) + (gz^2 + E)\psi_2(z) - \delta\psi_1(z) = 0. \end{cases} \quad (3.91)$$

En este sistema de ecuaciones diferenciales se ponen de manifiesto las ideas principales que queremos analizar de este problema. La primera de ellas es que este sistema es mucho más fácil de resolver que el de Rabi de un sólo fotón (3.43), ya que aquí el coeficiente que acompaña a la derivada de mayor grado es una constante, luego todos los puntos salvo el  $\infty$ , el cual es irregular, son puntos regulares. Sin embargo, el criterio de [22] de que el orden de las soluciones enteras está acotado por el grado máximo de los coeficientes del sistema ahora ya no aporta inmediatamente la pertenencia al espacio de Fock-Bargmann, ya que hay coeficientes que son polinomios de segundo grado. Aquí es donde reside el problema a resolver en este modelo: aunque se puedan encontrar fácilmente las soluciones enteras de (3.91), es costoso saber si están o no en el espacio de Fock-Bargmann, y, por tanto, si esas funciones analíticas representan funciones de onda válidas o no.

Debido a que salvar estas dificultades es un problema técnicamente complicado, nos limitaremos a indicar el camino a seguir, que se puede encontrar ilustrado en [24]. El proceso, descrito en unas pocas líneas esquemáticas sería:

- Juntar las dos ecuaciones del sistema (3.91) en una sólo ecuación diferencial de cuarto orden. Comprobar que la simetría  $\tau f(z) = \sigma_x f(iz)$  conmuta con el hamiltoniano, y que, por tanto, se pueden buscar autofunciones que sean autofunciones también de dicha simetría. Simplificar la ecuación diferencial atendiendo a los posibles autovalores de la transformación  $\tau$ , que son  $\pm 1$  y  $\pm i$ .
- Hacer un desarrollo en serie de potencias e introducirlo en la ecuación diferencial de cada uno de los casos anteriores para obtener las ecuaciones de recurrencia que deben satisfacer los coeficientes de dichas series.
- Utilizar la transformada de Mellin (una transformada integral en el plano complejo) a partir de las ecuaciones de recurrencia obtenidas en el paso anterior para encontrar qué relaciones deben verificar las energías  $E$  para que las soluciones analíticas encontradas pertenezcan al espacio de Fock-Bargmann. Este paso es exigente técnicamente y se sale totalmente del propósito de este trabajo. El espectro se obtiene con la evaluación numérica de los ceros de un wronskiano.

Las dificultades que presenta el tercer paso hacen que se haya tomado la decisión de presentar únicamente de manera esquemática los pasos para resolver el problema. Este proceso se puede encontrar adecuadamente desarrollado en [24].



## Capítulo 4

# Otros espacios de Hilbert de funciones analíticas

En este capítulo se mencionarán a título informativo otro par de espacios de Hilbert de funciones analíticas que tienen relevancia en Mecánica Cuántica, presentando algunas de sus aplicaciones. El objetivo de este capítulo es más bien el de ilustrar a vista de águila varias posibilidades sin entrar en detalle en ellas.

### 4.1. Espacios de Bergman

Los espacios de Bergman surgieron como una generalización en cierta manera de los espacios de Hardy que se van a mencionar en la siguiente subsección. Existen multitud de espacios de Bergman, pero sólo uno de ellos tiene la propiedad de ser un espacio de Hilbert, de hecho, es el que Bergman trató inicialmente en su artículo [2], y el que nos interesa en lo siguiente. Nos centraremos únicamente en alguna de las propiedades de este. Se puede encontrar un tratado extensivo de estos espacios en [11].

El espacio de Bergman del que hablaremos es un espacio de funciones analíticas en un dominio  $D \subset \mathbb{C}$  (con frontera suficientemente regular) y que son de cuadrado integrable en dicho dominio con la medida de Lebesgue. Por esta razón, el espacio de funciones analíticas (holomorfas, de ahí el subíndice  $h$ ) en  $D$  y de cuadrado integrable será denotado como  $L_h^2(D)$ . Es decir, estamos hablando de funciones de variable compleja analíticas que verifiquen:

$$\|f\| = \left( \int_D |f(z)|^2 dz \right)^{1/2} < \infty. \quad (4.1)$$

Esa norma dota al espacio de Bergman de estructura de espacio de Banach, y, en particular, de espacio de Hilbert. Una de las particularidades de este espacio es que entra dentro de los llamados *espacios de Hilbert con núcleo reproductivo*, la cual consiste en que el funcional de evaluación es lineal y continuo, es decir, que dispongan de una cota del tipo

$$|f(z)| \leq \Lambda(z) \|f\|, \quad (4.2)$$

donde  $\Lambda(z)$  es una función tal que la cota anterior se tiene para todos los elementos del espacio. Por el Teorema de Representación de Riesz, esto se puede traducir en que se va a poder dar una representación del valor de las funciones en cada punto del dominio  $D$  como

función de una integral en la que aparece un núcleo.

Este núcleo es llamado *núcleo de Bergman*, se denota por  $K(z, \xi)$  y verifica la propiedad de ser analítico en  $z$  y antianalítico en  $\xi$  (propiedad que nos recuerda a las propiedades de la Sección 2.4.2 de entre las que se han expuesto sobre los espacios de Fock-Bargmann en el Capítulo 2). En base a lo anterior, que se puede encontrar rigurosamente demostrado en la bibliografía [2, 11], se tiene la siguiente representación integral:

$$f(z) = \int_D K(z, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (4.3)$$

En su artículo seminal [2], Bergman aporta la forma concreta de este núcleo para el caso en el que  $D$  se trate del círculo unidad  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ :

$$K(z, \xi) = \frac{1}{\pi(1 - z\bar{\xi})^2}. \quad (4.4)$$

En todo caso, la propiedad que resultará más relevante en la aplicación en Mecánica Cuántica que vamos a presentar a continuación es que dada una base ortonormal  $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$  del espacio de Bergman (funciones analíticas de cuadrado integrable en el dominio  $D$ ) se verifica la propiedad de que

$$K(z, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(z) \overline{\phi_i(\xi)}. \quad (4.5)$$

Lo que se ha mencionado hasta ahora puede entenderse como resultados para una o más variables complejas (salvo (4.4), que es la forma específica del núcleo de Bergman cuando  $D$  es el disco unidad).

Una de las propiedades a resaltar sobre el núcleo de Bergman es la relación siguiente que presentan sus elementos diagonales:

$$K(z, z) = \sup \left\{ |f(z)|^2 : f \in L_h^2(D), \|f\| \leq 1 \right\}. \quad (4.6)$$

#### 4.1.1. Resultados

A continuación, presentamos un breve inciso sobre las pruebas de algunos de los resultados que se acaban de presentar. Sólo nos referiremos al caso más usual, que es en el que el dominio  $D$  es el círculo unidad  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . En el libro [10] se demuestra que para funciones analíticas se tiene que la integral

$$\int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|^p d\theta, \quad r \geq 0, \quad (4.7)$$

es una función no decreciente de  $r$ . Este es uno de los teoremas fundamentales de los espacios de Hardy, que es probado a partir de un resultado similar para funciones subarmónicas. De esta forma, comparando el valor de la integral para  $r = 0$  y un  $r \geq 0$  arbitrario

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|^p d\theta. \quad (4.8)$$

Si ahora se multiplica (4.8) por  $2\pi r$  y se integra  $r$  entre 0 y  $\delta$ , siendo  $r$  una variable independiente de  $z$  que va a ayudar a describir coordenadas polares en el plano complejo centradas en  $z$ , se obtiene

$$\pi\delta^2 |f(z)|^p = 2\pi \int_0^\delta |f(z)|^p r dr \leq \int_0^\delta \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|^p d\theta r dr = \|f\|_{L^p(D)}^p. \quad (4.9)$$

Este es el resultado fundamental (4.2) que antes se enunciaba, porque de él se desprenden varias de las propiedades fundamentales de los espacios de Bergman. En concreto demuestra a la vez que el espacio de Bergman  $L_h^p(D)$  es cerrado en  $L^p(D)$ , por lo que es un espacio de Hilbert con el producto interno heredado de  $L^p(D)$ ; y, por otro lado, enuncia que el funcional de evaluación es continuo, luego estamos ante un *espacio de Hilbert con núcleo reproductivo*. Y esto es precisamente lo que permite la existencia del pretendido núcleo de Bergman.

### 4.1.2. Aplicación del núcleo de Bergman

Aprovechando que los espacios de funciones de onda son, de hecho, espacios de funciones de cuadrado integrable, en ciertos casos puede resultar útil proyectar sobre espacios de Bergman a la hora de tratar de resolver problemas en mecánica cuántica. Esto es precisamente lo que describe C.L. Fefferman en su artículo [13], al que nos referimos en esta sección. Nos limitaremos a comentarlo de forma esquemática, dando la idea general.

En él toma un problema de la electrodinámica cuántica no relativista. Considera un conjunto de núcleos colocados en posiciones espaciales fijas, un conjunto de electrones no relativistas y un campo electromagnético. Se trata de un modelo general en el que se contempla la interacción usual entre radiación y materia en condiciones no relativistas.

Se considera el hamiltoniano  $H_{QED}$  de dicho sistema, que viene dado por la suma del hamiltoniano del campo electromagnético más el hamiltoniano electrónico, que incluye contribución dinámica y de Coulomb. No corresponde a este trabajo profundizar en la forma de este hamiltoniano, por lo que no se dará explícitamente. Se puede encontrar en [13].

El núcleo de Bergman aparece en este problema al tratar de probar una propiedad que es de extremada relevancia en muchos aspectos físicos, y que es la *H-estabilidad* de dicho hamiltoniano. Esta consiste en encontrar una cota inferior del tipo

$$\langle \psi | H_{QED} | \psi \rangle \geq -C \cdot (N + M), \quad (4.10)$$

es decir, que haya una cota inferior para las energías posibles del sistema como función del número de partículas involucradas (donde  $|\psi\rangle$  está normalizado). La constante  $C$  no debe depender ni de las posiciones de los núcleos ni de las cantidades de núcleos y electrones. Hay dos razones por las que la H-estabilidad es importante en un sistema físico:

1. La primera es que en el caso de que no se cumpliera, la energía del estado fundamental del sistema iría a  $-\infty$  más rápido que linealmente con el número de partículas involucradas en el sistema. Esto implicaría que el estado fundamental de un sistema de  $2N$  partículas tendría mucha menos energía que dos veces la del estado fundamental de un sistema de  $N$  partículas, lo cual haría que juntar cualquiera dos objetos macroscópicos debería liberar una gran cantidad de energía. La experiencia cotidiana nos dice que no es así, y que dicha dependencia a lo sumo lineal es necesaria.

2. La segunda razón es de origen termodinámico, y se trata del comportamiento de la función energía libre en el caso de que dicha hipótesis no se cumpliera, ya que el resto de magnitudes termodinámicas se pueden derivar a partir de ella. En el caso de que no se verificara la H-estabilidad se obtendría que la energía libre se haría infinita, provocando discontinuidades en las magnitudes termodinámicas implicadas.

Por suerte, la H-estabilidad se puede probar para este sistema, lo cual sirve de validación para el modelo físico. Como muestra [13], esto se hace a través del núcleo de Bergman, consiguiendo una cota superior para la densidad de presencia electrónica fabricada con la traza del núcleo en cuestión, gracias a la expresión (4.5).

## 4.2. Espacios de Hardy y aplicaciones

Nos limitaremos a comentar rápidamente algunas propiedades fundamentales de los espacios de Hardy. Para más información consúltese [10, 19]. En el apartado referido a espacios de Bergman ya se definió la cantidad

$$M_p(r, f) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad (4.11)$$

para  $1 < p < \infty$  y se comentó que uno de los resultados fundamentales de la teoría de Hardy es que dado  $f$  una función analítica en un disco dicha integral es no decreciente con  $r$ . En el caso  $p = \infty$  se define como

$$M_\infty(r, f) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|. \quad (4.12)$$

La definición de los espacios de Hardy nace de esta cantidad. Se dice que una función analítica  $f(z)$  pertenece al espacio de Hardy  $H^p$ , donde  $0 < p \leq \infty$ , si la cantidad  $M_p(r, f)$  permanece acotada cuando  $r \rightarrow 1$ . En consecuencia,  $H^\infty$  se identifica con el espacio de funciones analíticas acotadas en el disco unidad. Es fácil darse cuenta que estos espacios son subespacios de los espacios de Bergman (4.1). Estos espacios están en estrecha relación con las funciones armónicas, y los ceros de estas funciones determinan parte de su comportamiento, como también pasa en el caso del espacio de Fock-Bargmann, aunque no lo hayamos mencionado antes [31].

El principio de causalidad en Mecánica Cuántica implica que sólo se puede efectuar medidas sobre un estado cuántico una vez este ha sido preparado. Aunque parezca sorprendente, este es el punto de partida que ha conducido a utilizar los espacios de Hardy en Mecánica Cuántica. La idea que se presenta aquí de forma esquemática puede encontrarse desarrollada y concretada en el artículo “*The Marvelous Consequences of Hardy Spaces in Quantum Physics*” [6]. El fundamento de la teoría cuántica está en que la ecuación de Schrödinger rige la evolución de los estados ketoriales:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = H |\phi\rangle. \quad (4.13)$$

Sin embargo, bajo nuestra concepción usual, esta ecuación no parece tener preferencia por la evolución temporal en uno u otro sentido. El desarrollo histórico de la teoría cuántica

ha ido progresivamente buscando espacios adecuados donde hacer residir a los estados que son solución de (4.13), para ir pudiendo dar cuenta de diversas propiedades cuánticas. El espacio donde se trabaja normalmente es el espacio de funciones de cuadrado integrable, un espacio de Hilbert, que parecía tener las propiedades adecuadas para la manipulación de los kets. Sin embargo, dada la importancia que en teoría cuántica revisten los funcionales delta de Dirac, a los que no se puede dar cabida dentro de un marco de funciones de cuadrado integrable, surgió la necesidad de los *tripletes de Gelfand*, o *espacios de Hilbert equipados* [5], los cuales dotaban a las deltas de Dirac del espacio adecuado para trabajar y además eran capaces de dar nuevas propiedades.

En esta línea de ir aportando nuevos espacios donde resolver la ecuación de Schrödinger que puedan aportar nuevos aspectos, se utilizaron los espacios de Hardy; los cuales daban cuenta del principio de causalidad: no se pueden tomar medidas sobre un estado antes de que este sea preparado. De esta forma, ayudan a incorporar en cierta forma la flecha del tiempo en modelos de ciertos sistemas de la mecánica cuántica. Los estados iniciales (preparados) y finales (medidos) del experimento en cuestión viven en restricciones diferentes del espacio de Hardy.

Esto ha resultado muy útil en ciertas áreas de la mecánica cuántica, como se indica en el ya mencionado artículo [13], muy especialmente en las áreas que conciernen a la dispersión de ondas electromagnéticas clásicas, a la resonancia cuántica o fenómenos de desintegración. Este se trata de un campo muy activo de investigación en la actualidad.



## Capítulo 5

# Conclusiones

Las herramientas matemáticas que proporciona este trabajo, que no son otra cosa que la utilización de ciertos espacios de funciones analíticas en temas relacionados con Mecánica Cuántica, han supuesto un gran avance técnico desde su introducción a mediados del siglo pasado. Estas permiten abordar nuevos problemas, a la par que tratar de forma más clara problemas que ya se habían resuelto. Merece la pena enfatizar en este último caso, por ejemplo, el oscilador armónico cuántico, el cual se resolvió sin apenas esfuerzo en la Sección 1.3 al utilizar el formalismo de Fock-Bargmann, en comparación con el esfuerzo que supone resolverlo en serie de potencias, haciendo aparecer los polinomios de Hermite. También el modelo de Jaynes-Cummings puede ser abordado sin estas herramientas de forma asequible.

Los espacios de funciones enteras se han mostrado de especial utilidad, gracias a que los resultados de los que se dispone en el ámbito de la variable compleja son de extremada elegancia y potencia. Se pone de manifiesto cómo el desarrollo de herramientas matemáticas cada vez más sofisticadas refuerzan el avance de la Física, permitiendo realizar nuevas incursiones y exploraciones en la estructura de la naturaleza.

Se ha tratado de ilustrar con claridad los fundamentos esenciales de los espacios de Fock-Bargmann que permitieran trabajar con comodidad, pero sin sobreabundar en propiedades matemáticas que no se fueran a utilizar más tarde. En el proceso de construcción de este espacio de funciones enteras ha surgido de forma natural una familia de estados que resulta de extraordinaria importancia en física: los estados coherentes, ya que son los estados cuánticos que más se asemejan a estados clásicos; debido a la propiedad de saturación de la desigualdad de Heisenberg que se expuso. Se han presentado algunas de sus propiedades más importantes, permitiendo así desplegar las propiedades del espacio de Fock-Bargmann.

Además, en el trabajo se han explorado aplicaciones de los espacios de Fock-Bargmann a los modelos de Rabi, en las Secciones 3.3, 3.4 y 3.5, lo cual permite visualizar de forma clara la interrelación entre las distintas ramas de la Física: unas nutren de problemas, ideas y soluciones a las otras. Esta relación entre las distintas ramas de la Física que se ha manifestado también a lo largo de todo el Grado en Física supone una verdadera fuente de riqueza y de comunicación fructífera que conduce en pos de horizontes mayores. En el caso del modelo de Rabi confluyen la óptica, el electromagnetismo, la mecánica cuántica y la física del estado sólido para enunciar un problema de carácter fundamental y cuya solución repercute positivamente en todas ellas.

Otro hecho fundamental que se ha puesto de manifiesto a lo largo de este trabajo es cómo muchos problemas físicos son realmente más complicados de lo que pueda parecer a primera vista, y hace falta tratarlos con pausa. En este caso, el problema del espectro del modelo de Rabi parecía completamente cerrado tras los trabajos de Braak [7], y sin embargo ha continuado siendo fuente de estudio durante más tiempo. En [25] se puede encontrar la cronología histórica de los avances en este problema. Es sorprendente también la gran duración temporal que toma la resolución de ciertos problemas en Física, como el modelo de Rabi, que fue propuesto en 1936 y ha seguido siendo objeto de estudio en el presente siglo.

Finalmente, la rápida excursión ilustrativa a través de los espacios de Bergman, los espacios de Hardy y sus aplicaciones en el Capítulo 4 nos da una idea precisa de cómo de amplias pueden resultar las aplicaciones de la variable compleja y el análisis funcional en distintas partes de la mecánica cuántica y otras ramas de la Física.



# Bibliografía

- [1] Bargmann V., *On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform*, Commun. Pur. Appl. Math., Vol. XIV (1961), 187-214.
- [2] Bergman S., Schiffer M., *Kernel functions and conformal mapping*, Compos. Math. **8** (1951), 205-249.
- [3] Bertet P., Osnaghi S., Milman P., Auffeves A., Maioli P., Brune M., Raimond J. M., Haroche S., *Generating and probing a two-photon Fock state with a single atom in a cavity*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002), 143601.
- [4] Boas R.P., *Entire functions*, Academic Press, New York, 1954.
- [5] Bohm A., Gadella M., *Dirac Kets, Gamow Vectors and Gelfand Triplets*, Springer Lecture Notes in Physics **348**, Springer, Berlin Heidelberg, 1989.
- [6] Bohm A., Hai Viet Bui., *The Marvelous Consequences of Hardy Spaces in Quantum Physics*, in Kielanowski P., Bieliavsky P., Odziejewicz A., Schlichenmaier M., Voronov T. (Eds.) *Geometric Methods in Physics, XXX Workshop*, pp. 211-228, Springer, 2011.
- [7] Braak D., *On the integrability of the Rabi model*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011), 100401.
- [8] Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloe F., *Quantum Mechanics, Volume 1*, Wiley, New York, 1977.
- [9] Dirac P.A.M., *La Seconde Quantification*, Annales de l'institut Henri Poincaré, tome 11, no 1 (1949), 15-47.
- [10] Duren P.L., *Theory of  $H^p$  spaces*, Academic Press, London, 1970.
- [11] Duren P.L., Schuster A., *Bergman Spaces*, American Mathematical Society, 2004.
- [12] Durett G., *Course Notes. Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, Massachusetts Institute of Technology, [https://www.mit.edu/~9.520/scribe-notes/class03\\_gdurett.pdf](https://www.mit.edu/~9.520/scribe-notes/class03_gdurett.pdf), February 2010.
- [13] Fefferman C.L., *The Bergman Kernel in Quantum Mechanics*, in Komatsu G., Kuranishi M. (Eds.) *Analysis and Geometry in Several Complex Variables, Proceedings of the 40th Taniguchi Symposium*, pp. 39-58, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [14] Fernández D.J., Hussin V., Nieto L.M., *Coherent states for isospectral oscillator Hamiltonians*, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994), 3547-3564.

- [15] Gadella M., Nieto L.M., *Métodos matemáticos avanzados para ciencias e ingenierías*, Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid, 1991.
- [16] Fock V., *Generalization and Solution of the Dirac Statistical Equation*, Zs. Phys. **49** 339 (1928), 9-24.
- [17] Folland G.B., *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press, New Jersey, 1989.
- [18] Gazeau JP., *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley, Weinheim, 2009.
- [19] Hardy G.H., *The mean value of the modulus of an analytic function*, Proc. London Math. Soc., Volume s2-14, Issue 1 (1915), 269–277.
- [20] Jaynes E.T., Cummings F.W., *Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser*, Proc. IEEE **51** (1963), 89-109.
- [21] Kristensson G., *Second Order Differential Equations*, Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2010.
- [22] Laine I., *Nevalinna Theory and Complex Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.
- [23] Lambropoulos P., Petrosyan D., *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [24] Maciejewski A.J., Stachowiak T., *A novel approach to the spectral problem in the two photon Rabi model*, J. Phys. A Math. Theor. **50** (2017), 244003.
- [25] Maciejewski A.J., Przybylska M., Stachowiak T. *Full spectrum of the Rabi model*, Phys. Lett. A **378** (2014), 16-20.
- [26] Markusevich A.I., *Theory of Functions of a Complex Variable, Volume II*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- [27] Mohamadian T., Negro J., Nieto L.M., Panahi H., *Tavis-Cummings models and their quasi-solvable Schrödinger Hamiltonians*, Eur. Phys. J. Plus **134** (2019), 363.
- [28] Nieto L.M., *Coherent and Supercoherent States with Some Recent Applications*, in Rosas-Ortiz O., Carbajal M., Miranda O. (Eds.), *Cinvestav Advanced Summer School*, AIP Conf. Proc., Vol. 809 (2006), Melville, NY, 3-23.
- [29] Remmert R., *Theory of Complex Functions*, Springer, New York, 1991.
- [30] Ronveaux A. (Ed.), *Heun's Differential Equations*, Oxford University Press, 1995.
- [31] Vourdas A., *Analytic representation in quantum mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen. **29** (2006), 65-141.
- [32] Walls D.F., Milburn G.J., *Quantum Optics*, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
- [33] Whittaker E.T., Watson G.N., *A course in modern analysis*, third ed., Cambridge University Press, London, 1920.
- [34] Wigner E.P., *On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium*, Phys. Rev. **40** (1932), 749-759.

# Índice alfabético

- acción de  $a$  y  $a^+$  en representación de estados coherentes, 18
- aproximación de onda rotante, 37
- derivada de Wirtinger, 19
- dispersión de un observable, 14
- distribución de Wigner, 23
- ecuación de Heun confluyente, 43
- ecuación de tipo Fuchsiano, 43
- ecuación indicial, 39
- espacio
  - de Banach, 6
  - de Bergman, 55
  - de Fock-Bargmann, 19
  - de Hardy, 58
  - de Hilbert, 7
  - con núcleo reproductivo, 29, 55
- estado
  - coherente
    - comprimido o alargado, 15
    - de Glauber, 12
    - de Schrödinger, 11
    - estándar, 12
  - coherente,  $|z\rangle$ , 11
  - número,  $|n\rangle$ , 9
  - vacío,  $|0\rangle$ , 9
- funciones
  - analíticas, 7
- fórmula de Stirling, 32
- H-estabilidad, 57
- hamiltoniano de un sólo modo
  - espín-bosón, 46
- incertidumbre de Heisemberg, 14
- matrices de Pauli, 36
- modelo de Jaynes-Cummings, 37
- modelos de Rabi, 36
- método de Frobenius, 39
- núcleo integral de Fock-Bargmann, 22
- operador
  - aniquilación,  $a$ , 8
  - creación,  $a^+$ , 8
  - evolución temporal, 15
  - lineal en espacio de Fock-Bargmann, 29
  - número,  $N$ , 9
- operador de reflexión, 46
- orden de una función entera, 31
- oscilador armónico cuántico, 7, 35
- producto
  - escalar de estados coherentes, 12
  - interno de Fock-Bargmann, 19
- punto regular, 39
- punto regular singular, 39
- punto singular, 39
- relación de cierre, 13
- representación de Fock-Bargmann, 16
- resolución de la identidad, 13
- teorema
  - de Representación de Riesz, 7
- teorema de Poincaré-Perron, 48
- tipo de una función entera, 31
- transformación de Fulton-Gouterman, 46
- transformada de Wigner, 23
- vectores principales, 29