Universidad de Valladolid
Facultad de Ciencias

Trabajo Fin de Grado

Grado en Física

Espacios de Hilbert equipados, armónicos hiperesféricos y el grupo SO(4)

Autor: Miguel Quintana Renedo

Tutores: Manuel Gadella Urquiza y Mariano A. del Olmo Martínez

Índice general

Introducción

El presente trabajo es una continuación de investigaciones previas realizadas por miembros del grupo de Física Teórica de nuestra Universidad, en las que se establecen relaciones entre Grupos y Algebras de Lie, bases ortonormales en espacios de Hilbert separables de dimensión infinita y lo que en física cuántica se denominan *bases continuas*, funciones especiales y equipaciones de espacios de Hilbert. También se buscan aplicaciones a situaciones físicas concretas.

En el primero de estos trabajos previos [1], se definían equipaciones de $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R}^+)$ mediante las funciones de Hermite (espacio de Schwartz) y funciones de Laguerre, respectivamente, de tal manera que estas equipaciones hagan continuos los operadores que representan a elementos de las álgebra de Lie del grupo de Heisenberg y $su(1,1)$, respectivamente. Las bases continuas se generan mediante los autovectores generalizados de elementos significados del álgebra (tales como los operadores posición y momento para el grupo de Heisenberg). *En todos los modelos estudiados*, se manejan dos representaciones de las equipaciones de los espacios de Hilbert, una concreta generada por las funciones especiales bajo estudio y otra abstracta que es la que ayuda a definir las llamadas bases continuas. Este primer ejemplo puede ser útil para modelizar la Teoría de la Señal a partir de la *Transformación Fractal de Fourier* [5]

Un segundo trabajo estudia la continuidad de los elementos del álgebra de Lie $so(3)$ en equipaciones del espacio de Hilbert $L^2(S^2, d\Omega)$ basadas en las propiedades de los armónicos esféricos. Sin embargo, las equipaciones construidas no hacen continuos los generadores de las variables angulares, los cuales son continuos en el espacio de Hilbert $L^2(S^2, d\Omega)$. No obstante, pueden construirse funciones relevantes de dichos operadores que verifican buenas propiedades de continuidad con respecto a la equipación [3].

Dejando aparte algunos ejemplos más sencillos [4, 6], se ha extendido el formalismo a representaciones del álgebra de Lie de $su(1,1) \oplus su(1,1)$ sobre equipaciones construídas mediante funciones de Zernike en el círculo [7] (con posibles aplicaciones a sistemas ópticos) y $su(2,2)$ y equipaciones sobre funciones de Jacobi [8].

En un trabajo reciente [9] se han soluciones de Yang-Mills para el caso del campo electromagnético que son proporcionales a armónicos hiperesféricos. Este trabajo usa el espacio de Hilbert generado por los armónicos hiperesféricos como soporte de representaciones del álgebra de Lie $so(4)$. Esto nos sugiere la extensión del esquema anterior con otros grupos al grupo $SO(4)$, pues ya existe una motivación de tipo físico. Las soluciones encontradas en [9] sugieren la topología que debe de darse al equipamiento del espacio de Hilbert generado por los armónicos hiperesféricos. Con esta topología algunos elementos del álgebra $so(4)$, relevantes para [9] resultan ser operadores continuos.

Aquí termina el presente TFG, que tendrá pronta continuidad en el análisis de las equipaciones construidas, en particular, cuales son los elementos de del álgebra envolvente que son continuos con las equipaciones estudiadas. Preveemos que, al igual que en el caso de $so(3)$, no todos los elementos del álgebra envolvente van a ser continuos por nuestras topologías, pero si lo van a ser algunos elementos de la base y funciones de aquellos elementos de la base que no sean continuos mediante las equipaciones.

El TFG está organizado como sigue:

- En un primer capítulo se explica el concepto de **equipamientos de espacios de Hilbert** (rigged Hilbert spaces), se muestran ejemplos y se describen algunas de sus aplicaciones.

- En el capítulo 2 se introduce el concepto de **armónicos hiperesféricos** y se estudian algunas de sus propiedades, como las relaciones de ortogonalidad (imprescindible no solamente para definir un espacio de Hilbert formado por dichas funciones, sino también para construir las equipaciones) o sus relaciones con los polinomios de Gegenbauer.

- Finalmente, en el tercer Capítulo construimos las **topologías** que hacen continuas a las transformaciones utilizadas en [9]. Nótese que estas transformaciones no quedaban claramente definidas, cosa que hemos realizado en el presente TFG.

Capítulo 1

Equipaciones de espacios de Hilbert

El punto de partida es un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita y separable sobre el cuerpo complejo. En particular, ésto significa que los conjuntos ortonormales completos, que por un abuso de lenguaje se llaman también *bases ortonormales*, de $\mathcal{H}$ tienen una cardinalidad infinita numerable.

1.1. Algunos ejemplos

Sea Φ un subespacio vectorial denso en $\mathcal{H}$. En primer lugar, Φ hereda la topología de la norma en $\mathcal{H}$, por lo que es un subespacio topológico de $\mathcal{H}$ y por ende un espacio vectorial topológico. Pero queremos dotar a Φ de una topología estrictamente más fina que dicha topología heredada. Hay varias maneras de hacerlo. La más sencilla es la de dotar a Φ de una familia numerable de seminormas, de tal manera que una de ellas sea la norma heredada de $\mathcal{H}$, y considerar la topología inducida en Φ por esta familia de seminormas. Al incluir la vieja norma, nos estamos asegurando que la topología en Φ va a ser más fina que la heredada de $\mathcal{H}$, de tal manera que la inyección canónica

$$i : \Phi \longmapsto \mathcal{H} \qquad i(\varphi) \in \mathcal{H} \quad \forall\, \varphi \in \Phi, \tag{1.1}$$

sea continua. Al exigir que el número de seminormas sea, al menos, numerable estamos buscando asegurar que la topología en Φ sea estrictamente más fina que la topología normada heredada de $\mathcal{H}$. Vamos a presentar unos ejemplos.

Espacio de Schwartz

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de funciones $f(x) : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ verificando las siguientes propiedades:

I Si $f(x) \in \mathcal{S}$, entonces admite derivadas continuas en todos los puntos y a todos los órdenes, es decir, $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

II Toda función $f(x) \in \mathcal{S}$ y todas sus derivadas a todos los órdenes tieneden a cero en el infinito más rápidamente que el inverso de cualquier polinomio, es decir:

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^n\, D^m\, f(x)| = 0\,, \qquad D^m = \frac{d^m}{dx^m}\,, \tag{1.2}$$

con $n, m = 0, 1, 2, \ldots$.

Por su parte $\mathcal{S}$ tiene las siguientes propiedades [10]:

1. $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo complejo. Se le denomina *espacio de Schwartz* o espacio de funciones de decrecimiento rápido.

2. Toda función $f(x) \in \mathcal{S}$ es de cuadrado integrable, de tal manera que $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$.

3. $\mathcal{S}$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ con la topología de la norma, heredada de $L^2(\mathbb{R})$.

4. Sabemos que las funciones normalizadas de Hermite, $H_n(x)$, forman una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$, de tal manera que si $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, entonces:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, H_n(x)\,, \tag{1.3}$$

   donde la serie converge en el sentido de la norma. Recordemos que

$$||f(x)||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\,, \tag{1.4}$$

   donde las integrales se consideran en el sentido de Lebesgue.

   Pues bien, resulta que para toda $f(x) \in \mathcal{S}$ se verifica que:

$$||f||_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{2p}\, |a_n|^2 < \infty\,, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{1.5}$$

   Las $||f||_p$ para todo $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ y $p = 0, 1, 2, \ldots$ resultan ser un sistema de normas en $\mathcal{S}$.

5. Las normas (1.5) determinan la topología en $\mathcal{S}$. Según ésto, una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ en $\mathcal{S}$ converge en esta topología hacia una función $f(x) \in \mathcal{S}$ si para todo $p = 0, 1, 2, \ldots$

$$||f_n(x) - f(x)||_p \longmapsto 0\,. \tag{1.6}$$

Una sucesión de Cauchy se define de manera análoga. Obviamente, poniendo $p = 0$ vemos que si $f_n(x) \longmapsto f(x)$ en $\mathcal{S}$, también lo hace en $L^2(\mathbb{R})$, pero el recíproco no puede ser cierto, de tal manera que la topología en $\mathcal{S}$ es estrictamente más fina que la heredada de $L^2(\mathbb{R})$.

Conviene añadir que existen al menos otras dos colecciones distintas de normas que nos dan la misma topología [10], pero que no vamos a entrar en ellas aquí.

6. Como curiosidad diremos que la transformación de Fourier de $f(x) \in \mathcal{S}$

$$(\mathcal{F}f)(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \tag{1.7}$$

está bien definida y es una función en $\mathcal{S}$ [11]. Además la transformación de Fourier, $\mathcal{F}$, es una aplicación biyectiva del espacio de $\mathcal{S}$ en sí mismo, que es continua y con inversa continua en $\mathcal{S}$. También puede extenderse a una *aplicación unitaria* en $L^2(\mathbb{R})$.

7. La topología en $\mathcal{S}$ tiene algunas propiedades. Por ejemplo $\mathcal{S}$ es metrizable y completo, es decir, un espacio de Fréchet. También es nuclear y, por lo tanto un espacio de Montel [12, 14]. Los espacios de Montel conservan propiedades de los espacios vectoriales topológicos de dimensión finita, aunque sus dimensiones sean infinitas. Por ejemplo, en un espacio de Montel, la bola unidad es compacta. Esta propiedad no existe en los espacios de Hilbert de dimensión infinita.

8. Finalmente comentemos que podemos considerar el subespacio, $\mathcal{S}(\Delta)$, del espacio de Schwartz $\mathcal{S}$, de todas aquellas funciones con soporte en un intervalo, Δ, finito o infinito, de la recta real $\mathbb{R}$. El espacio $\mathcal{S}(\Delta)$ tiene las mismas propiedades que $\mathcal{S}$, excepto que sea invariante mediante la transformación de Fourier $\mathcal{F}$.

Espacio de distribuciones

Vamos a suponer que $\Delta \equiv [-n, n]$, para cualquier valor de $n = 1, 2, \dots,$ y tengamos los espacios $\mathcal{S}[-n, n]$, para todo $n = 1, 2, \dots$. Obviamente,

$$\mathcal{S}[-1,1] \subset \mathcal{S}[-2,2] \subset \cdots \subset \mathcal{S}[-n,n] \subset \dots . \tag{1.8}$$

Se verifica que la inyección canónica

$$\mathcal{S}[-n,n] \longmapsto \mathcal{S}[-n-k, n+k]\,, \tag{1.9}$$

es continua para todas las duplas de número naturales n, k. Se puede entonces definir el *límite inductivo estricto* de los espacios $\mathcal{S}[-n, n]$ en su unión

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}[-n,n]\,. \tag{1.10}$$

Algunas de las propiedades de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ son:

1. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo complejo $\mathbb{C}$. Sus vectores son funciones del espacio de Schwartz de *soporte compacto*. La sucesión de intervalos, $[-n,n]$, podríamos haberla escogido de otra manera, a condición que fuera una sucesión expansiva (un intervalo contenido en el siguiente) y que su unión fuera todo $\mathbb{R}$, de tal manera que el resultado final fuera exactamente el mismo.

2. $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ no es un espacio de Fréchet, pues no es metrizable. Es un espacio de tipo **LF**, que significa *límite inductivo estricto de espacios de Fréchet*, lo que significa que su topología es la más fina que hace continuas a las inyecciones

$$i : \mathcal{S}\,[-n,n] \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{1.11}$$

de espacios de Frechet. Pese a ello, hay algunas propiedades que tiene en común con los espacios metrizables, como que la topología puede ser caracterizada secuencialmente, es decir, mediante las sucesiones convergentes gracias a los Teoremas de Dieudonné-Schwartz [14, 15].

3. Toda función en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es una función de Schwartz y de soporte compacto, y por lo tanto está en $L^2(\mathbb{R})$. Pero además $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, y la inyección canónica $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto L^2(\mathbb{R})$ continua.

4. Todo límite inductivo estricto de espacios nucleares es nuclear [12]. Entonces $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es nuclear y, por lo tanto, Montel.

Transformada de Fourier

La transformación de Fourier de una función de Schwartz de soporte compacto es también una función de Schwartz que no se anula en ningún intervalo de la recta real y que además admite una prolongación analítica a una función *entera*, o lo que es lo mismo, holomorfa (analítica) en todo el plano complejo; exponencialmente acotada en el infinito [11]. Vamos a definir

$$\mathcal{Z}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}[\mathcal{D}(\mathbb{R})]\,, \tag{1.12}$$

es decir, que toda función de $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ es la transformada de Fourier de una función de Schwartz de soporte compacto. Esta aplicación (transformada de Fourier, al fin y al cabo) es inyectiva, por lo que tenemos una aplicación biyectiva $\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{Z}(\mathbb{R})$. Entre las propiedades de $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$, entresacamos:

1. Si $f(z) \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$, su restricción a la recta real, $f(x)$, es una función de Schwartz. Desde este punto de vista, $\mathcal{Z}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$.
2. $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$.
3. Debido a la propiedad de biyectividad, podemos transportar la topología de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$, por lo que este último sería un espacio vectorial topológico de tipo LF. También nuclear y Montel.
4. La aplicación canónica $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto L^2(\mathbb{R})$ es continua.

Conclusión.- Si $\mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R})$, entonces tres posibles elecciones de Φ son $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{Z}(\mathbb{R})$. Estos espacios admiten una clara generalización si en lugar de elegir funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, utilizamos funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$. Las propiedades son equivalentes. En todos los casos Φ es denso en $\mathcal{H}$ y la aplicación canónica continua.

1.2. Espacios de Hilbert equipados

Un espacio *localmente convexo* es aquél en el que todo punto tienen un sistema fundamental de entornos convexo. En nuestro caso estamos trabajando con espacios vectoriales topológicos luego, esto es equivalente a que la propiedad se verifique en el origen. Un espacio vectorial topológico es localmente convexo si y sólo si su topología puede ser inducida por una familia de seminormas.

Vamos a analizar unas ternas de espacios vectoriales topológicos localmente convexos, en las cuales ya tenemos las dos primeras componentes, Φ y $\mathcal{H}$. La tercera es $\Phi^\times$, el espacio *antidual* de Φ.
Una aplicación *antilineal* $F : \Phi \longmapsto \mathbb{C}$ es aquella en la cual para todos $\varphi, \psi \in \Phi$ y todo par α, β de números complejos, verifica:

$$F(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha^*\, F(\varphi) + \beta^*\, F(\psi)\,, \tag{1.13}$$

donde la estrella significa conjugación compleja. Una aplicación $F : \Phi \longmapsto \mathbb{C}$ es continua si $F^{-1}(O)$ es un abierto en Φ para todo abierto $O \subset \mathbb{C}$. En el caso que Φ fuera metrizable, F sería continuo si para toda sucesión convergente de vectores en Φ, $\varphi_n \longmapsto \varphi$, se verifica que $F(\varphi_n) \longmapsto F(\varphi)$ en $\mathbb{C}$. La propiedad de antilinealidad de F, nos añade un muy interesante criterio de continuidad [10]:

Teorema 1.1. *Dada una aplicación antilineal (o lineal) F de un espacio vectorial localmente convexo Φ en $\mathbb{C}$; si existen un número positivo $C > 0$ y k de las seminormas, $p_i(-)$, que definen la topología en Φ, tales que, para todo $\varphi \in \Phi$, se verifica que:*

$$|F(\varphi)| \leq C \{p_{i_1}(\varphi) + p_{i_2}(\varphi) + \cdots + p_{i_k}(\varphi)\} . \tag{1.14}$$

entonces la aplicación F es continua.

Si bien $C > 0$ y las $p_{i_j}(-)$ no son únicas, si son las mismas $\forall\, \varphi \in \Phi$. La demostración es muy similar al mismo criterio restringido a espacios normados, donde hay una única seminorma: la norma. En el caso de aplicaciones lineales éste criterio también es válido.

En el presente contexto, un *funcional* en Φ es *una aplicación antilineal y continua* de Φ en $\mathbb{C}$.

Es muy fácil demostrar que el conjunto de los funcionales en Φ forman un *espacio vectorial* sobre el cuerpo complejo que se suele denotar como $\Phi^{\times}$.

Normalmente, a la acción de un funcional $F \in \Phi^{\times}$ en un vector $\varphi \in \Phi$ se la denota como $F(\varphi)$. No obstante, por seguir la notación de Dirac de la Mecánica Cuántica, lo haremos como

$$F(\varphi) \equiv \langle \varphi | F \rangle , \qquad \forall\, \varphi \in \Phi , \;\; \forall\, F \in \Phi^{\times} . \tag{1.15}$$

En lo sucesivo entenderemos los motivos del cambio de notación propuesto en (1.15). Comencemos por analizar un importante ejemplo.

Sea $\psi \in \mathcal{H}$ un vector cualquiera del espacio de Hilbert y definamos F_ψ como:

$$\langle \varphi | F_\psi \rangle := \langle \varphi | \psi \rangle , \qquad \forall\, \varphi \in \Phi , \tag{1.16}$$

donde $\langle - | - \rangle$ es el *producto escalar* en $\mathcal{H}$. Por compatibilidad con la notación de Dirac, siempre lo consideraremos lineal por la derecha y antilineal por la izquierda.

Vamos a ver que F_ψ es un funcional, para cualquier vector $\psi \in \mathcal{H}$. La antilinealidad es evidente. En cuanto a la continuidad, la demostraremos usando el teorema 1.1. En efecto: Fijemos $\psi \in \mathcal{H}$. Para todo $\varphi \in \Phi$, a consecuencia de la desigualdad de Schwarz, se tiene que

$$|\langle \varphi | F_\psi \rangle| = |\langle \varphi | \psi \rangle| \leq ||\psi||\, ||\varphi|| = C\, ||\varphi|| , \tag{1.17}$$

con $C := ||\psi||$. Como la inyección canónica $\Phi \longmapsto \mathcal{H}$ es continua, resulta que la norma es una seminorma continua en Φ. Aplicando (1.15), la continuidad de F_ψ queda demostrada.

La clave de esta continuidad reside en la continuidad de la inyección de Φ en $\mathcal{H}$. La propiedad que más útil hace a un espacio de Hilbert es el hecho de que existe una biyección natural entre sus elementos y los de su dual topológico, es decir, la aplicación (1.15) es continua si vemos φ como elemento de $\mathcal{H}$, por el hecho de ser $\mathcal{H}$ de Hilbert. Que la inyección sea continua hace que (1.15) sea una composición de aplicaciones continuas, la inyección y la natural entre φ y ψ, lo que hace que sea continua también.

Tenemos una aplicación $\mathcal{H} \longmapsto \Phi^\times$, que nos lleva $\psi \in \mathcal{H}$ a $F_\psi \in \Phi^\times$. Esta aplicación es obviamente inyectiva, lo cual es consecuencia de la identificación biyectiva de $\mathcal{H}$ con su propio dual. Luego tenemos una aplicación inyectiva de $\mathcal{H}$ en $\Phi^\times$, que no puede ser sobreyectiva porque la topología en Φ es estrictamente más fina que la topología de la norma en $\mathcal{H}$.

Si bien es un abuso de lenguaje, es habitual identificar el vector ψ con el funcional F_ψ, con lo que tendríamos que $\mathcal{H} \subset \Phi^\times$. Al espacio antidual $\Phi^\times$ le podemos definir una topología cualquiera compatible con el par dual $\{\Phi, \Phi^\times\}$: fuerte, McKey o débil. Aunque para algunas aplicaciones se puede usar la topología fuerte, nosotros usaremos la débil. Sus seminormas se definen de la siguiente manera: Cada $\varphi \in \Phi$ nos define una seminorma como

$$p_\varphi(F) := |\langle \varphi | F \rangle| \,, \qquad \forall\, F \in \Phi^\times \,, \tag{1.18}$$

lo que desemboca en que la convergencia en $\Phi^\times$ sea la convergencia puntual, entendiendo que ahora los puntos son los vectores de Φ, que suelen ser funciones. Es interesante notar que $\mathcal{H}$ es denso en $\Phi^\times$ y que la inyección canónica $\psi \longmapsto F_\psi$ es continua. Al triplete

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times \,, \tag{1.19}$$

se le llama: *espacio de Hilbert equipado* (rigged Hilbert space (RHS)), terna de Gelfand o *equipación* del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En lo sucesivo, usaremos la abreviatura RHS.

Hemos definido equipaciones de espacios de Hilbert con espacios localmente convexos, un caso particular de estos son los *espacios de Banach*, espacios vectoriales normados y completos. Podemos equipar $\mathcal{H}$ de manera que Φ sea un espacio normado (en general de Banach) y $\Phi^\times$ su dual, necesariamente de Banach. Algunos autores exigen que Φ sea reflexivo, es decir que $\Phi \approx (\Phi^\times)^\times$ cuando en $\Phi^\times$ usemos la topología fuerte. Un ejemplo lo tendríamos cuando Φ fuera el espacio W_1^2 de las funciones $f(x) : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)\, |f(x)|^2 \, dx < \infty \,, \tag{1.20}$$

en el sentido de Lebesgue. Su dual puede escribirse como el espacio de funciones $f(x) : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ con

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-1}\, |f(x)|^2 \, dx < \infty \,, \tag{1.21}$$

que denotamos como W_{-1}^2. Éstos son espacios de Banach y duales el uno del otro. Podemos escribir que:

$$W_1^2 \subset L^2(\mathbb{R}) \subset W_{-1}^2 \,. \tag{1.22}$$

Las inyecciones canónicas son continuas. Pero además obsérvese que se puede construir toda una secuencia de espacios contenidos los unos en los otros:

$$\cdots \subset W_2^2 \subset W_1^2 \subset L^2(\mathbb{R}) \subset W_{-1}^2 \subset W_{-2}^2 \subset \dots \tag{1.23}$$

Por ejemplo, las funciones en W_n^2 han de satisfacer

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^n \, |f(x)|^2 \, dx < \infty \,, \tag{1.24}$$

1.3. Operadores lineales

Definimos un *operador lineal* como una aplicación lineal, A, entre un subespacio denso de $\mathcal{H}$, al que llamaremos *dominio del operador*, $\mathcal{D}(A)$ y el propio $\mathcal{H}$. Si el operador es continuo, automáticamente entenderemos que su dominio es todo $\mathcal{H}$, puesto que una aplicación lineal y continua en $\mathcal{D}(A)$ se puede extender de forma única a una aplicación continua y lineal en $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$.

Dado un operador lineal $A : D(A) \to \mathcal{H}$, el *operador adjunto* de A es un operador, $A^\dagger$ que para un vector $\psi \in \mathcal{H}$ cumple:

$$\langle A^\dagger \psi, \varphi \rangle = \langle \psi, A\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(A) \tag{1.25}$$

Supondremos de ahora en adelante siempre que el dominio de A es denso y que el dominio del adjunto es denso.

Teorema 1.2. *Sea A un operador en $\mathcal{H}$ con dominio denso $\mathcal{D}(A)$. Sea $\mathcal{D}(A^\dagger)$ el dominio del adjunto, $A^\dagger$, de A y supongamos que:*

I $\Phi \subset \mathcal{D}(A^\dagger)$.

II $A^\dagger \Phi \subset \Phi$*, es decir que para todo* $\varphi \in \Phi$*, tenemos que* $A^\dagger \varphi \in \Phi$.

III $A^\dagger$ *es continuo en* Φ.

Entonces A puede extenderse a un operador continuo en $\Phi^\times$, mediante la siguiente fórmula de dualidad (duality formula):

$$\langle A^\dagger \varphi | F \rangle = \langle \varphi | AF \rangle \,, \qquad \forall\, \varphi \in \Phi \,, \ \forall\, F \in \Phi^\times \,. \tag{1.26}$$

Hemos usado el mismo símbolo para A y su extensión al antidual $\Phi^\times$. Por los dos primeros supuestos del teorema, A en $\Phi^\times$ está bien definido. La propia linealidad de A implica la linealidad de su extensión a $\Phi^\times$. Para ver que AF está bien definido como elemento de $\Phi^\times$, para todo $F \in \Phi^\times$, escribamos para un $\varphi \in \Phi$ *fijo*:

$$|\langle \varphi | AF \rangle| = |\langle A^\dagger \varphi | F \rangle| = p_{A^\dagger \varphi}(F) \,, \qquad \forall\, F \in \Phi^\times \tag{1.27}$$

y usemos (1.15). Para ver que A es continuo en $\Phi^\times$, al menos con respecto a la topología débil en $\Phi^\times$, usemos el siguiente resultado [10]:

Teorema 1.3. *Sea A una aplicación lineal o antilineal de un espacio vectorial topológico localmente convexo Φ a sí mismo. A es continua si y sólo si para toda seminorma $p_i(-)$ continua en Φ, y por lo tanto de las que define su topología, existe una constante $C > 0$ y k seminormas continuas en Φ tales que para todo $\varphi \in \Phi$,*

$$p_i(A\varphi) \leq C\left\{p_{i_1}(\varphi) + p_{i_2}(\varphi) + \cdots + p_{i_k}(\varphi)\right\}. \tag{1.28}$$

Aquí C, k y las seminormas dependen de la elección de $p_i(-)$, pero no de φ.

La demostración de la continuidad débil de A en $\Phi^\times$ es una reescritura de la ecuación (1.27) y del teorema 1.1. Sea $\varphi \in \Phi$. Tomemos la seminorma:

$$p_\varphi(AF) = |\langle\varphi|AF\rangle| = p_{A^\dagger\varphi}(F)\,, \qquad \forall\, F \in \Phi^\times\,. \tag{1.29}$$

Todo lo escrito arriba tiene una muy fácil reescritura si el operador A fuera simétrico o Hermítico en Φ, es decir $A = A^\dagger$ en Φ.

Lo presentado hasta este punto no es aún suficiente para establecer las bases matemáticas rigurosas de la formulación de Dirac de la Mecánica Cuántica, una tarea llevada a cabo por varios autores [16–24]. Presentamos ahora sus ingredientes básicos.

Supondremos de ahora en adelante siempre que el dominio de A es denso y que el dominio del adjunto es denso, lo que se consigue cuando, por ejemplo, el operador A es cerrable (se puede extender a un operador cerrado) [10]. Diremos que cierto $F \in \Phi^\times$ es un *autovector generalizado* de un cierto operador A con *autovalor generalizado* $\lambda \in \mathbb{C}$, si $A^\dagger$ está definido en todo Φ y además

$$\langle A^\dagger\varphi|F\rangle = \lambda\,\langle\varphi|F\rangle\,, \qquad \forall\,\varphi \in \Phi\,. \tag{1.30}$$

Si añadimos la hipótesis que $A^\dagger\Phi \subset \Phi$, entonces gracias al teroema 1.2 A puede extenderse a un operador lineal en $\Phi^\times$, y ahora (1.26) nos dice que $\langle A^\dagger\varphi|F\rangle = \langle\varphi|AF\rangle$. Bajo estas circunstancias, los conceptos de autovector y autovalor generalizados son autovectores y autovalores ordinarios en $\Phi^\times$, es decir $AF = \lambda\, F$.

Ya estamos en condiciones de enunciar el Teorema fundamental de la expansión de un operador autoadjunto en términos de sus autovalores generalizados, debido a Gelfand y Maurin [17].

Teorema 1.4 (Gelfand-Maurin). *Sea A un operador autoadjunto con dominio $\mathcal{D}(A)$ en un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita $\mathcal{H}$. Entonces existe un RHS $\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$ y una medida μ en los borelianos de la recta real $\mathbb{R}$, con soporte en el espectro de A, $\sigma(A)$, tales que:*

I $\Phi \subset \mathcal{D}(A)$ *y* $A\Phi \subset \Phi$.

II *Para todo $\lambda \in \sigma(A)$, salvo quizá un conjunto de medida μ nula, existe un autovector generalizado*[1] $|\lambda\rangle$, *tal que* $A|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$.

III *Para todo par de vectores $\varphi, \psi \in \Phi$ y todo entero no negativo $n = 0, 1, 2, \ldots$, tenemos la siguiente descomposición espectral:*

$$\langle\varphi|A^n\psi\rangle = \int_{\sigma(A)} \lambda^n\,\langle\varphi|\lambda\rangle\langle\lambda|\psi\rangle\,d\mu(\lambda)\,. \tag{1.31}$$

Algunas observaciones sobre el teorema de Gelfand-Maurin

- Cabe recordar que un operador es autoadjunto cuando es hermítico y además el domino de su operador adjunto coincide con el suyo propio.

- La descomposición espectral que nos ofrece el teorema es realmente equivalen a la que nos da el cálculo integral [26, 27]

- Por $\langle\varphi|\lambda\rangle$ entendemos la acción del funcional $|\lambda\rangle$ en el vector $\varphi \in \Phi$. Además $\langle\lambda|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda\rangle^*$, donde la estrella significa conjugación compleja.

- Es usual escribir la ecuación (1.31) eliminando los vectores arbitrarios $\varphi, \psi \in \Phi$, de tal manera que resultaría:

$$A^n = \int_{\sigma(A)} \lambda^n\,|\lambda\rangle\langle\lambda|\,d\mu(\lambda)\,. \tag{1.32}$$

- Para $n = 0$ tendríamos una descomposición de la identidad:

$$I = \int_{\sigma(A)} |\lambda\rangle\langle\lambda|\,d\mu(\lambda) \tag{1.33}$$

  que conocemos como relación de cierre o clausura.

- En el Teorema de Gelfand y Maurin, el espacio de los vectores test Φ puede escogerse nuclear [12].

Consideramos ahora un ejemplo con un conocido operador.

Sea X el operador multiplicación en $L^2(\mathbb{R})$,

$$[Xf](x) = xf(x), \qquad \forall f(x) \in \mathcal{D}(Xs) \tag{1.34}$$

.

[1] Usamos esta notación a fin de acercarnos a la notación usada por Dirac [25].

Este dominio es muy simple, está formado por aquellas funciones $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ tales que $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Para ver que $\mathcal{D}(Q)$ no es todo $L^2(\mathbb{R})$, vamos a construir una función que esté en $L^2(\mathbb{R})$ y no en $\mathcal{D}(Q)$. Esta función es:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1\,, \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1\,. \end{cases} \tag{1.35}$$

En efecto, $xf(x) \notin L^2(\mathbb{R})$. El operador multiplicación X posee las siguientes propiedades:

I Es autoadjunto en $\mathcal{D}(X)$ con espectro *absolutamente continuo* igual a la recta real, $\sigma(X) \equiv \mathbb{R}$. Se puede ver que , X es cerrado sin extensiones cerradas y no acotado.

II El dominio $\mathcal{D}(X)$ contiene al espacio de Schwartz $\mathcal{S}$. Obviamente, si $f(x) \in \mathcal{S}$, entonces $[Xf](x) = xf(x) \in \mathcal{S}$, el espacio de Schwartz es invariante frente a la acción de X. Si tomamos $\mathcal{S}$ como dominio de X, entonces en dicho dominio X es esencialmente autoadjunto. Ésto significa que X es simétrico (Hermítico), es decir que

$$\langle f|Xg\rangle = \langle Xf|g\rangle\,, \qquad \forall f(x), g(x) \in \mathcal{S}\,,$$

y que tiene una y sólo una extensión autoadjunta. Notemos que, como X no está acotado, esta relación no significa que X sea autoadjunto. Sólo significa que $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{D}(X^\dagger)$ y que para toda función $f(x) \in \mathcal{D}(X)$, $[Xf](x) \equiv [X^\dagger f](x) \equiv xf(x)$, es decir, que el adjunto $X^\dagger$ extiende a X: $X \prec X^\dagger$. Un operador simétrico, A es autoadjunto si y sólo si $A = A^\dagger$. Para ver que X es esencialmente autoadjunto (e.s.a.) en $\mathcal{S}$ usemos el siguiente resultado [10]:

Teorema 1.5. *Sea A un operador simétrico en $\mathcal{H}$ con dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en $\mathcal{H}$. Entonces A es e.s.a. en $\mathcal{D}(A)$ si los espacios $(A^\dagger \pm iI)\varphi$ son densos en $\mathcal{H}$ cuando φ recorre $\mathcal{D}(A^\dagger)$. Aquí I es el operador identidad en $\mathcal{H}$.*

Como X extiende a $X^\dagger$ (i.e. $X \prec X^\dagger$) cuando el dominio de X es $\mathcal{S}$, entonces el adjunto $X^\dagger$ es también el operador multiplicación, de hecho, resulta que $\mathcal{D}(X^\dagger) \equiv \mathcal{D}(X)$, tal y como lo definimos antes. Consideremos ahora

$$(X^\dagger \pm iI)f(x) = (x \pm i)f(x)\,, \qquad \forall\, f(x) \in \mathcal{S}\,. \tag{1.36}$$

Vamos a ver que las aplicaciones $X^\dagger \pm iI$ son biyecciones en el espacio de Schwartz (son obviamente inyectivas). Para todo $f(x) \in \mathcal{S}$, las funciones

$$\frac{f(x)}{x \pm i} \in \mathcal{S}\,. \tag{1.37}$$

Pero entonces,

$$(X^\dagger \pm iI)\,\frac{f(x)}{x \pm i} = (x \pm i)\,\frac{f(x)}{x \pm i} = f(x)\,. \tag{1.38}$$

Pero como $f(x)$ es una función arbitraria en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, aplicando el teorema 1.5, resulta que X es e.s.a. en $\mathcal{S}$. Este comentario es oportuno, aunque no esté directamente relacionado con el Teorema de Gelfand y Maurin. Pero observemos que $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times$ es un RHS. Justo el RHS que conviene para la aplicación de dicho Teorema. No es difícil demostrar que X es continuo en $\mathcal{S}$, por lo que puede extenderse a un operador continuo en $\mathcal{S}^\times$ este antidual es conocdido como el *espacio de las distribuciones temperadas*, el espacio de los funcionales antilineales continuos en $\mathcal{S}$.

III Según el Teorema de Gelfand y Maurin, existe un RHS y una medida μ en $\sigma(X)$ para los cuales se verifica (1.31). Como dijimos antes, el RHS es, en nuestro caso, $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times$. Como es constumbre, vamos a llamar $|x\rangle$ al autovector de X con autovalor $x \in \mathbb{R}$, $X|x\rangle = x\,|x\rangle$. De esta manera, y siguiendo la notación (1.32), nos queda:

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,|x\rangle\langle x|\,d\mu(x)\,. \tag{1.39}$$

Si bien no lo vamos a demostrar, el hecho que el espectro de X coincida con la recta real y sea absolutamente continuo, implica que la medida μ sea absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. De aquí que, debido al Teorema de Radon-Nykodym, exista una función densidad $\rho \geq 0$, tal que $d\mu(x) = \rho(x)\,dx$. Para cada (o casi para cada) $x \in \mathbb{R}$, redefinamos $|x\rangle$ como $\rho(x)\,|x\rangle$ (es decir llamemos de nuevo $|x\rangle$ a $\rho(x)\,|x\rangle$). Entonces, (1.39) quedaría como

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} x\,|x\rangle\langle x|\,dx\,. \tag{1.40}$$

Unos resultados similares[2] se obtienen también para el operador derivación $P = -id/dx$.

[2]Con la salvedad que la determinación del dominio $\mathcal{D}(P)$ de autoadjunción de P es mucho más técnica.

1.4. Aplicaciones

Ya hemos visto la definición y alguna aplicación de los RHS en la teoría matemática necesaria para la elaboración sistemática de la Mecánica Cuántica. Pero las dos grandes aplicaciones de los RHS provienen de su utilidad en la construcción de los estados de Gamow, que describen procesos que decaen exponencialmente en Mecánica Cuántica, lo cual aproxima en un amplio intervalo de valores del tiempo a las resonancias o estados cuánticos inestables, y también en la representación de grupos y semigrupos de Lie. En el presente trabajo iniciaremos una contribución a dicha representación de grupos, en cuanto a los semigrupos, hay algo hecho, pero queda mucho por hacer. En líneas generales, RHS se han utilizado para [28]:

1. Proporcionar un significado riguroso a la formulación de Dirac de la Mecánica Cuántica, tal y como mencionamos anteriormente.

2. Encontrar un significado matemático riguroso para los vectores de Gamow, vectores estado para los procesos resonantes en Mecánica Cuántica [29–31].

3. Extender la Mecánica Cuántica con el objetivo de acomodar el carácter irreversible de ciertos procesos tales como los procesos de decaimiento de átomos y partículas [32]. Esto también incluye el llamado formalismo de la Mecánica Cuántica con irreversibilidad temporal (*Time Irreversible Quantum Mechanics*) [33].

4. Proporcionar un contexto apropiado para la descomposición espectral de los operadores de Koopman y Frobenius-Perron, que resultan relevantes en ciertos sistemas caóticos, en términos de las resonancias de Pollicot-Ruelle [34], que son singularidades del espectro de potencias (*power spectrum*).

5. Extender el formalismo de Mecánica Estadística con el objetivo de introducir ciertos estados generalizados y estructuras singulares con ellos relacionados. Para ello se utilizan los espacios de Liouville equipados (*Rigged Liouville Spaces (RHS)*) [35].

6. Definir algunos elementos que aparecen en la Teoría Axiomática de Campos Cuántica, tales como el funcional de Wightman, las álgebras de Borchers y estados generalizados [36, 37].

7. Tratar con problemas físicos que requieran el uso de distribuciones.

8. Describir el Ruido Blanco y otros procesos estocásticos [38].

9. Algunas ecuaciones en derivadas parciales admiten soluciones en términos de funciones generalizadas. Ver por ejemplo [14].

Los RHS permiten el uso simultáneo de bases discretas (conjuntos ortonormales completos en espacios de Hilbert) y bases continuas, que serían los funcionales de tipo $|\lambda\rangle$, descritos anteriormente. En el contexto de las representaciones de álgebras de Lie en RHS, se pueden conseguir espacios de vectores test Φ sobre los cuales los elementos del álgebra y del álgebra envolvente sean continuos, en algunos casos no todo el álgebra es continuo, pero si funciones relevantes de sus generadores. En este contexto, los espacios de vectores test admiten representaciones en términos de espacios de funciones especiales. De esta manera, bases discretas y continuas, representaciones de álgebras de Lie mediante operadores continuos y funciones especiales, son diferentes aspectos del formalismo de las equiparaciones de espacios de Hilbert.

Desde este punto de vista, se han analizado diversos grupos para los cuales se han construido representaciones tales que los elementos del álgebra envolvente sean continuos, como dijimos antes hay algunas matizaciones. En algunos casos el operador continuo no es un generador del álgebra, sino una función del mismo. En general, usamos dos RHS, uno abstracto y el otro una representación concreta del anterior que es donde juegan un importante papel las funciones especiales. Vamos a enunciar brevemente los ejemplos estudiados hasta la fecha por el grupo de Valladolid:

1. El ejemplo más sencillo y más pedagógico parte de SO(2) como grupo [4]. Aquí las series de Fourier juegan un papel esencial. Un espacio de Hilbert soporte de representaciones irreducibles de $SO(2)$ sería $L^2[0, 2\pi]$, cuyas funciones pueden escribirse en términos de series de Fourier como:

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\phi} \,. \tag{1.41}$$

   El espacio Φ de funciones test está formada por aquellas de la forma (1.41) que satisfacen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+i|^{2p} \, |a_n|^2 < \infty \,, \qquad p = 0, 1, 2, \dots \,. \tag{1.42}$$

   Para $p = 0$ tenemos la condición para que (1.41) pertenezca al espacio de Hilbert $L^2[0, 2\pi]$. Las raíces cuadradas de (1.42) nos dan las seminormas (en este caso normas) que nos definen la topología en Φ que es metrizable, Fréchet y nuclear. Además de la base ortonormal en $L^2[0, 2\pi]$, se construye una base continua de funcionales $|\phi\rangle \in \Phi^\times$, $\phi \in [0, 2\pi]$, de tal manera que cada $h \equiv |h\rangle \in \Phi$ pueda escribirse en términos de esta base continua como

$$|h\rangle = \int_0^{2\pi} \phi \, |\phi\rangle \, d\phi \,. \tag{1.43}$$

Esto significa que para todo $g \in \Phi$ tenemos que

$$\langle g|h\rangle = \int_0^{2\pi} \phi \, \langle g|\phi\rangle \, d\phi \,, \tag{1.44}$$

con

$$\langle g|\phi\rangle^* = \langle \phi|g\rangle = g(\phi) \,, \tag{1.45}$$

expresión que define los funcionales $|\phi\rangle$ para casi todo (en el sentido de la medida de Lebesgue) $\phi \in [0, 2\pi]$. Además en Φ el generador infinitesimal de $SO(2)$, y por lo tanto el generador del álgebra $so(2)$, J, es un operador continuo.

2. A partir de este caso se han estudiado modelos más complicados incluyendo grupos de Lie no triviales. En [5], se parte del grupo de Weyl-Heisenberg y se usan espacios de funciones generados por funciones de de Hermite y Laguerre, pero lo más interesante son las descomposiciones de RHS standard como suma directa de RHS obtenidos a través de la llamada Transformación Fractal de Fourier. Detalles y discusión en [5]. En [3], el grupo estudiado es el $SO(3)$. Vemos el primer ejemplo en el cual los generadores angulares del álgebra no son continuos en Φ y si lo son ciertas funciones de los mismos que los substituyen. Justamente, estos generadores, están representados mediante operadores continuos en $L^2(S^2, d\Omega)$, que es el espacio de Hilbert que soporta la representación. Aquí S^2 es la esfera hueca unidad sumergida en $\mathbb{R}^3$ (variedad bidimensional) y $d\Omega$ es la restricción de la medida de Lebesgue en S^2. La construcción de Φ se realiza jugando con las bases de armónicos esféricos de la misma manera que habíamos utilizado la base $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}\}$ en $L^2[0, 2\pi]$.

3. Otros casos estudiados han sido, de menor a a mayor complejidad: $SU(2)$ [6], el grupo $SU(1,1) \otimes SU(1,1)$ y su relación con las funciones de Zernike en el disco unidad en el plano, estas funciones se están utilizando en óptica clásica [7], y finalmente, el espacio de de Sitter $SO(3,2)$ y sus representaciones en RHS formadas por funciones de Jacobi [8]. Este último ejemplo tiene una complejidad mucho mayor a los anteriores [8]. En estos modelos, no solamente construimos equipaciones de espacios de Hilbert como lo hicimos en $SO(2)$, sino también otras equipaciones en forma de series de funciones uniformemente convergentes. Recopilaciones resumidas de estos trabajos están en [1, 39, 40].

En el presente TFG vamos a iniciar un programa similar utilizando el grupo $SO(4)$. Las funciones que, usaremos son los armónicos hiperesféricos, los cuales nos van a generar un espacio de Hilbert y una equipación del mismo adecuado a nuestros intereses. Estudiaremos la continuidad de algunos operadores de interés en Física que se obtienen de un análisis adecuado de las aplicaciones discutidas en [9].

Capítulo 2

Armónicos hiperesféricos

Es bien sabido que en física cuántica, en problemas en los que se ven envueltos potenciales centrales nos es muy útil separar la variable radial de las angulares. En estos casos sabemos que la solución de la parte radial de la ecusción de Schrodinger nos lleva a la representación en armónicos esféricos, unas funciones definidas sobre S_2 con propiedades bien conocidas. Generalizaremos en este capítulo esas funciones a espacios de cualquier dimensión. Introducimos los armónicos hiperesféricos, a partir de los cuales definiremos un espacio de Hilbert. Buenas referencias para este tema son [41] y [42].

2.1. Polinomios Armónicos

Un *polinomio homogéneo* de grado n en d variables $p_n(\mathbf{x})$ es un polinomio que cumple la siguiente propiedad:

$$p_n(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^n p_n(\mathbf{x}), \tag{2.1}$$

es fácil ver que un polinomio p_n es homogeneo de grado n si y sólo si:

$$\sum_{j=1}^{d} x_j \frac{\partial p_n}{\partial x_j} = n p_n. \tag{2.2}$$

Esta relación se conoce como la *relación de Euler*. Evidentemente cada polinomio homogéneo de grado n está formado por una combinación lineal de monomios de grado n. Por lo tanto, la dimensión del espacio vectorial de polinomios homogeneos de grado n coincidirá con el número de monomios de este tipo que es:

$$\binom{n+p-1}{n} = \frac{(n+p-1)!}{n!\,(p-1)!} \tag{2.3}$$

Situándonos en el espacio euclídeo d-dimensional; el operador *Laplaciano* generalizado se define de la siguiente forma:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2}. \tag{2.4}$$

Definimos también el hiperradio:

$$r^2 = {x_1}^2 + \cdots + {x_d}^2. \tag{2.5}$$

Dado p_n, un polinomio homogéneo de grado n y k un entero; se puede probar que:

$$\Delta(r^k p_n) = k(k+d+2n-2)r^{k-2}p_n + r^k \Delta p_n.$$

Esta identidad nos hace sospechar que el Laplaciano actúa de forma distinta sobre la componente radial que sobre el resto del polinomio; para comprobarlo nos centramos en los polinomios homogéneos, que además cumplen la ecuación de Laplace $\Delta h_n = 0$ a los que se denomina *polinomios armónicos*. De lo anterior fácilmente podemos deducir que si h_n es un polinomio armónico de grado n, entonces cumple:

$$\Delta(r^k h_n) = k(k+d+2n-2)r^{k-2}h_n. \tag{2.6}$$

Cualquier polinomio homogéneo p_n se puede escribir como una suma de de polinomios armónicos multiplicados por potencias pares del hiperradio. Esta descomposición se conoce como *descomoposición canónica de un polinomio homogéneo*:

$$p_n = h_n + r^2 h_{n-2} + r^4 h_{n-4} + \cdots . \tag{2.7}$$

Aplicando repetidamente el operador Δ a ambos lados de la ecuación anterior y con ayuda de (2.6) obtenemos la siguiente igualdad:

$$\Delta^l p_n = \sum_{k=l}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(2k)!!}{(2k-2l)!!} \frac{(d+2n-2k-2)!!}{(d+2n-2k-2l-2)!!} r^{2k-2l} h_{n-2k}, \tag{2.8}$$

donde

$$j!! := \begin{cases} j(j-2)\cdots 4 \times 2 \quad si \quad j \quad par, \\ j(j-2)\cdots 3 \times 1 \quad si \quad j \quad impar. \end{cases} \tag{2.9}$$

Evidentemente (2.8) se anula cuando l supera la mitad de n. Sin embargo, los casos en que no se anula forman un sistema de ecuaciones resoluble. Despejando en este sistema podemos identificar los h_λ en (2.7):

$$h_\lambda = \frac{(d+2\lambda-2)!!}{(n-\lambda)!!(d+n+\lambda-2)!!}\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^j(d+2\lambda-2j-4)!!}{(2j)!!(d+2\lambda-4)!!}r^{2j}\Delta^{j+\frac{1}{2}(n-\lambda)}f_n. \tag{2.10}$$

Se puede definir un operador, O_λ, que asigne a cada polinomio homogéneo de grado n, p_n, su componente h_λ en la descomposición canónica de la siguiente manera:

$$O_\lambda\left[p_n\right] = h_\lambda, \tag{2.11}$$

haciendo, además que sea nulo si λ es par y n impar o viceversa.

2.2. Momento angular generalizado

El momento angular es una magnitud conservada en muchos sistemas físicos. Cuando esto sucede en física cuántica en el caso 3-dimensional, es decir, cuando el momento angular conmuta con el Hamiltoniano total del sistema, se suele utilizar una base de armónicos esféricos en 3 dimensiones, precisamente porque estas funciones tienen momento angular bien definido. Esta situación se da en sistemas invariantes bajo rotaciones, recordemos que el momento angular es el generador de las rotaciones. De aquí viene su interés por generalizarlo a sistemas d-dimensionales, que sean invariantes ante rotaciones en dicho espacio.

Definimos el operador momento angular generalizado, Λ^2 como sigue:

$$\Lambda^2 = \sum_{s>t}^{d}\Lambda_{s,t}^2 \qquad \Lambda_{s,t} = -i\left(x_s\frac{\partial}{\partial x_t} - x_t\frac{\partial}{\partial x_s}\right)$$

Sustituyendo y haciendo los cálculos se puede demostrar que el Laplaciano generalizado también se escribe de la siguiente manera en función del Laplaciano

$$\Delta = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\Lambda^2. \tag{2.12}$$

De forma análoga a como se definen las coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$, se pueden definir las *coordenadas esféricas generalizadas* en el espacio euclídeo de d dimensiones:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}, \\
\phi &= \tan^{-1}(x_2/x_1), \\
\theta_1 &= \tan^{-1}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}/x_3\right), \\
\theta_2 &= \tan^{-1}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}/x_4\right), \\
&\vdots \\
\theta_{d-2} &= \tan^{-1}\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2}/x_d\right).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

La transformación inversa es la siguiente:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\,\sin(\theta_{d-2})\,\sin(\theta_{d-3})\cdots\sin(\theta_3)\,\sin(\theta_2)\,\sin(\theta_1)\,\cos(\phi), \\
x_2 &= r\,\sin(\theta_{d-2})\,\sin(\theta_{d-3})\cdots\sin(\theta_3)\,\sin(\theta_2)\,\sin(\theta_1)\,\sin(\phi), \\
x_3 &= r\,\sin(\theta_{d-2})\,\sin(\theta_{d-3})\cdots\sin(\theta_3)\,\sin(\theta_2)\,\cos(\theta_1), \\
x_4 &= r\,\sin(\theta_{d-2})\,\sin(\theta_{d-3})\cdots\sin(\theta_3)\,\cos(\theta_2), \\
&\vdots \\
x_d &= r\,\cos(\theta_{d-2}).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Una vez hemos introducido estas coordenadas podemos ver que Λ únicamente actúa sobre las coordenadas angulares. Es decir, si tenemos una función de la forma $R(r)\Theta(\mathbf{u})$ donde R es la parte radial y $\mathbf{u}$ la parte angular se puede ver que $\Lambda_{s,t}R(r)\Theta(\mathbf{u}) = R(r)\Lambda_{s,t}\Theta(\mathbf{u})$.

Un *armónico hiperesférico* es una función que sólo depende de las variables angulares y es propia de Λ^2. Vamos a ver que si evaluamos un polinomio armónico en la esfera S^{d-1}, es decir, si lo restringimos a sus variables angulares; resulta ser un armónico esférico. En efecto, sea h_λ un polinomio armónico de grado λ entonces podemos definir:

$$Y_\lambda(\mathbf{u}) := r^{-\lambda} h_\lambda. \tag{2.15}$$

Así definido, es claro que Y_λ es función sólo de las variables angulares, $\mathbf{u}$ y por lo tanto, $\frac{\partial}{\partial r}Y_\lambda(\mathbf{u}) = 0$. Si aplicamos el operador Δ a $h_\lambda = r^\lambda Y_\lambda$ y utilizamos 2.12 y (2.6) tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta h_\lambda &= \left(\tfrac{1}{r^{d-1}}\tfrac{\partial}{\partial r} r^{d-1}\tfrac{\partial}{\partial r} - \tfrac{1}{r^2}\Lambda^2\right) r^\lambda Y_\lambda \\
0 &= \left(\lambda(\lambda + d - 2) - \Lambda^2\right) r^{\lambda-2} Y_\lambda,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

lo que implica que

$$\Lambda^2 Y_\lambda = \lambda(\lambda + d - 2) Y_\lambda, \tag{2.17}$$

luego Y_λ es una función propia del operador momento angular con autovalor asociado $\lambda(\lambda + d - 2)$. Para un valor fijo de λ existen diferentes armónicos linealmente independientes entre sí, que son autofunciones de Λ^2 con el autovalor $\lambda(\lambda+d-2)$. Para etiquetar los diferentes armónicos asociados al mismo autovalor de Λ^2 utilizamos el subíndice μ, de forma que las funciones $Y_{\lambda,\mu}$ son propias de Λ^2.

Sea h_λ un polinomio armónico de grado λ en d variables. Consideramos los monomios que lo forman y que no contienen a x_d, a su suma la llamamos $\tilde{h}_\lambda$. A la suma de los monomios que contienen únicamente factores lineales en x_p dividida entre x_p la llamamos $\tilde{h}_{\lambda-1}$, a la suma de los que contengan únicamente factores cuadráticos en x_p dividida entre x_p^2 la denotamos por $\tilde{h}_{\lambda-2}$ y así sucesivamente. Podemos por lo tanto expresar h_λ como sigue:

$$h_\lambda = \sum_{j=0}^{\lambda} x_d^j \tilde{h}_{\lambda-j}, \tag{2.18}$$

donde los polinomios $\tilde{h}_\nu$ son homogeneos de grado ν en las $d-1$ variables restantes. Aplicamos ahora el operador Laplaciano resultando

$$0 = \Delta h_\lambda = \sum_{j=2}^{\lambda} j(j-1) x_p^{j-2}\, \tilde{h}_{\lambda-j} + \sum_{j=0}^{\lambda} x_p^j \tilde{\Delta}\tilde{h}_{\lambda-j}, \tag{2.19}$$

donde $\tilde{\Delta}$ es el operador Laplaciano en $d-1$ dimensiones. Reorganizando los términos y definiendo $\tilde{h}_{-1} = \tilde{h}_{-2} = 0$, la relación queda

$$\sum_{j=0}^{\lambda} x_p^j \left[(j+2)(j+1)\tilde{h}_{\lambda-j-2} + \tilde{\Delta}\tilde{h}_{\lambda-j}\right]. \tag{2.20}$$

Podemos ver la expresión anterior como un polinomio en x_p y puesto que los monomios x_p^l forman una base, todos los términos que los acompañan deben ser nulos.

$$\begin{aligned} 2\tilde{h}_{\lambda-2} + \tilde{\Delta}\tilde{h}_\lambda &= 0, \\ 6\tilde{h}_{\lambda-3} + \tilde{\Delta}\tilde{h}_{\lambda-1} &= 0, \\ &\vdots \\ \tilde{\Delta}\tilde{h}_1 &= 0, \\ \tilde{\Delta}\tilde{h}_0 &= 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Esto define una relación recursiva que los $\tilde{h}_\nu$ deben cumplir, de forma que una vez fijados $\tilde{h}_\lambda$ y $\tilde{h}_{\lambda-1}$ el resto de polinomios, y por lo tanto h_λ quedan determinados. Por (2.3) sabemos la dimensión del espacio de polinomios armónicos de grado λ y $\lambda - 1$ en $d - 1$ variables. Por lo tanto, el número de coeficientes que hay que fijar para determina h_λ es:

$$\binom{d+\lambda-2}{\lambda} + \binom{d+\lambda-3}{\lambda-1}, \tag{2.22}$$

Sirviéndonos de la igualdad

$$\binom{k}{l} = \frac{k}{l}\binom{k-1}{l-1}, \tag{2.23}$$

la expresión (2.22) queda

$$\frac{d+\lambda-2}{n}\binom{\lambda+d-3}{\lambda-1} + \binom{\lambda+d-3}{\lambda-1} = \frac{2\lambda+d-2}{\lambda}\binom{\lambda+d-3}{\lambda-1}. \tag{2.24}$$

Acabamos de probar que el número de polinomios armónicos linealmente independientes de grado λ es

$$N(\lambda) = \frac{2\lambda+d-2}{\lambda}\binom{\lambda+d-3}{\lambda-1}. \tag{2.25}$$

Puesto que cada polinomio armónico de grado λ genera un armónico esférico con autovalor asociado $\lambda(\lambda+d-2)$, $N(\lambda)$ es también el número de armónicos esféricos linealmente independientes asociados a dicho autovalor en d dimensiones. Por lo tanto, si encontramos un conjunto de $N(\lambda)$ armónicos independientes podremos escribir cualquier polinomio que sea autofunción de Λ como combinación lineal de elementos de ese conjunto. Como Λ^2 no actúa sobre el radio también se verifica:

$$\Lambda^2 h_\lambda = \lambda(\lambda+d-2)h_\lambda. \tag{2.26}$$

2.3. Integración en la hiperesfera

De forma análoga a como se define el diferencial de ángulo sólido en 3 dimensiones se puede definir el *diferencial de ángulo sólido* en d dimensiones, $d\Omega_d$, como sigue:

$$dx_1\, dx_2 \cdots dx_d = r^{d-1} dr\, d\Omega_d, \tag{2.27}$$

cuya expresión explícita utilizando las coordendas (2.13) es:

$$d\Omega_d = \sin(\theta_1)\, \sin^2(\theta_2) \cdots \sin^{d-2}(\theta_{d-2})\, d\theta_1\, d\theta_2 \cdots \theta_{d-2}\, d\phi, \tag{2.28}$$

Podemos evaluar la integral en la hiperesfera

$$S^{d-1} = \{(x_1, \ldots, x_d) \,:\, x_1^2 + \cdots + x_d^2 = 1\} \tag{2.29}$$

del ángulo sólido por medio de la integración de varias funciones gaussianas obteniendo el siguiente resultado:

$$\Omega_d := \int_{S^{d-1}} d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \tag{2.30}$$

para las primeras dimensiones tiene valor:

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= 2\pi, \\ \Omega_3 &= 4\pi, \\ \Omega_4 &= 2\pi^2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

La integración con respecto a $d\Omega_d$ introduce de forma natural un producto interno entre los polinomios restringidos a S^{d-1}:

$$\langle g, f \rangle = \int_{S^{d-1}} g^* f d\Omega_d. \tag{2.32}$$

Vamos a ver que con este producto interno dos armónicos hiperesféricos de diferente grado Y_λ y $Y_{\lambda'}$ son ortogonales. Para ello partiremos del teorema de la divergencia para vectores en d dimensiones, [43], cuya fórmula aplicada a la bola unidad para una magnitud vectorial $A(x)$ es:

$$\int_{B^p} \nabla \cdot A(x) d^d x = \int_{S^{p-1}} A(\xi) \cdot \xi d\Omega_d. \tag{2.33}$$

Si lo aplicamos al vector $h_\lambda \nabla h_{\lambda'} - h_{\lambda'} \nabla h_\lambda$ obtenemos:

$$\int_{B^p} \nabla \cdot (h_\lambda \nabla h_{\lambda'} - h_{\lambda'} \nabla h_\lambda) \, d^d x = \int_{S_{p-1}} (h_\lambda \nabla h_{\lambda'} - h_{\lambda'} \nabla h_\lambda)(\xi) \cdot \xi d\Omega_d. \tag{2.34}$$

Gracias a la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (h_\lambda \nabla h_{\lambda'}) = \nabla h_\lambda \cdot \nabla h_{\lambda'} + h_\lambda \Delta h_{\lambda'} \tag{2.35}$$

y al hecho de que los h_λ son armónicos, el primer término de (2.34) se anula. Por otra parte, podemos utilizar (2.2) para ver:

$$h_\lambda \nabla h_{\lambda'} = h_\lambda \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial h_{\lambda'}}{\partial \xi_i} \xi_i = \lambda' h_\lambda h_{\lambda'}, \tag{2.36}$$

por lo que nos queda:

$$(\lambda' - \lambda) \int_{S^{p-1}} h_\lambda h_{\lambda'} d\Omega_d = 0. \tag{2.37}$$

Por lo tanto, si son armónicos de distinto grado ($\lambda \neq \lambda'$), la integral debe anularse. Los armónicos esféricos que hemos definido no dejan de ser la restricción de polinomios armónicos a la hiperesfera en d dimensiones, luego hemos probado la ortogonalidad de los armónicos como queríamos.

Haciendo $\lambda' = 0$ en (2.37) deducimos que la integral sobre la esfera de un polinomio armónico de grado positivo es siempre nula. Ésto nos permite evaluar la integral sobre la esfera de cualquier polinomio homogéneo f_n mediante su proyección canónica.

$$\int_{S^{d-1}} f_n d\Omega_d = \int \left(h_n + r^2 h_{n-2} + r^4 h_{n-4} + \cdots\right) d\Omega_d = h_0 \int_{S^{d-1}} d\Omega_d, \quad (2.38)$$

donde h_0 viene dado por (2.10), además, si n es impar la integral siempre se anula.

2.4. Polinomios de Gegenbauer

Una vez introducido un producto interno entre polinomios es natural buscar familias de polinomios ortogonales. Existen numerosas familias de este tipo con diferentes propiedades y aplicacianos como son los polinomios de Hermite, Legendre, Jacobi o Chebyshev. Introduciremos en esta sección una familia polinomios que juegan un papel análogo al de los polinomios de Legendre en los armónicos esféricos en S_2.

Consideramos dos vectores en el espacio d-dimensional, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ y sus vectores unitarios $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{r}$ y $\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{x}'}{r'}$. Podemos escribir el “potencial newtoniano” como:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d-2}} = \frac{1}{\text{máx}\{r, r'\}^{d-2}(1 + \epsilon^2 - 2\epsilon \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')^{\alpha}}, \quad (2.39)$$

donde $\alpha = d/2 - 1$ y $\epsilon = \frac{\text{mín}\{r,r'\}}{\text{máx}\{r,r'\}}$.

Si calculamos la serie de Taylor en ϵ de la expresión anterior, el coeficiente que acompaña a ϵ^λ, $C_\lambda^\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')$ se denomina *polinomio de Gegenbauer*. Por como hemos definido C_λ^α tenemos:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d-2}} = \frac{1}{\text{máx}\{r, r'\}^{d-2}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \epsilon^\lambda C_\lambda^\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'). \quad (2.40)$$

Se puede demostrar que la expresión para los polinomios es la siguiente:

$$C_\lambda^\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') = \sum_{t=0}^{\lfloor \lambda/2 \rfloor} \frac{(-1)^t (\alpha)_{\lambda-t} (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')^{\lambda-2t}}{t!(\lambda - 2t)!}, \quad (2.41)$$

donde

$$(\alpha)_j = \frac{(\alpha + j - 1)!}{(\alpha - 1)!}. \quad (2.42)$$

Como el operador Δ debe comportarse igual en cualquier sistema de coordenadas; lo calculamos en uno en el que $\mathbf{x}' = 0$ y vemos que es nulo:

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} = \left(\frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}r^{d-1}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{1}{r^{d-2}} = 0. \tag{2.43}$$

En cualquier sistema de coordenadas, en los puntos tales que $r < r'$; si escribimos la función como en (2.40) podemos obtener:

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{d-2}} = \frac{1}{r'^{d+\lambda-2}}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\Delta\left(r^{\lambda}C_{\lambda}^{\alpha}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\right) \tag{2.44}$$

Como vale para todos los valores posibles de r, se tiene que anular cada término de la serie. Además, evidentemente $\frac{\partial}{\partial r}C_{\lambda}^{\alpha}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}') = 0$, como sabemos que Λ conmuta con r si aplicamos (2.6) a r^{λ} (1 es un armónico de grado 0) obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta\left(r^{\lambda}C_{\lambda}^{\alpha}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\right) &= \left(\tfrac{1}{r^{d-1}}\tfrac{\partial}{\partial r}r^{d-1}\tfrac{\partial}{\partial r} - \tfrac{1}{r^2}\Lambda^2\right)r^{\lambda}C_{\lambda}^{\alpha} \\ 0 &= \left(\lambda(\lambda+d-2)-\Lambda^2\right)r^{\lambda-2}C_{\lambda}^{\alpha},\end{aligned} \tag{2.45}$$

dividiendo entre $r^{\lambda-2}$, podemos ver que los polinomios de Gegenbauer son funciones propias de Λ con autovalor $\lambda(\lambda+d-2)$ y en consecuencia se pueden escribir como combinación lineal de armónicos hiperesféricos. Supongamos que los $Y_{\lambda,\mu}$ forman una base.

$$C_{\lambda}^{\alpha}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}') = \sum_{\mu}a_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}')Y_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}) \tag{2.46}$$

Puesto que los polinomios C_{λ}^{α} son función del producto escalar $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'$ y éste se conserva bajo las rotaciones, también se debe conservar el valor del polinomio. Si R es una rotación d-dimensional, es decir, un elemento de $SO(d)$, se tiene que:

$$R\,C_{\lambda}^{\alpha}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}') = C_{\lambda}^{\alpha}(R^{-1}\mathbf{u}\cdot R^{-1}\mathbf{u}') = C_{\lambda}^{\alpha}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'). \tag{2.47}$$

Si a un armónico esférico, $Y_{\lambda,\mu}$, se le aplica la misma rotación, R, sigue siendo un autovector de Λ, luego, se puede escribir como combinación lineal de armónicos con el mismo λ:

$$Y_{\lambda,\mu}(R^{-1}\mathbf{u}) = \sum_{\nu}Y_{\lambda,\nu}(\mathbf{u})D_{\mu,\nu}^{\lambda}(R), \tag{2.48}$$

aquí $D_{\mu,\mu'}^{\lambda}(R)$ es una matriz asociada a la rotación R. Como los armónicos esféricos rotados siguen formando un sistema ortonormal la transformación D^{λ} es unitaria, y por lo tanto:

$$\sum_{\mu}D_{\alpha,\mu}^{\lambda *}(R)D_{\nu,\mu}^{\lambda}(R) = \delta_{\alpha,\mu}(R). \tag{2.49}$$

Operando con (2.46), (2.47) y (2.48) tendremos:

$$\sum_{\mu} a_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}') \sum_{\nu} Y_{\lambda,\nu}(\mathbf{u}) D^{\lambda}_{\nu,\mu} = \sum_{\alpha} a_{\lambda,\alpha}(\mathbf{u}) Y_{\lambda,\alpha}(\mathbf{u}). \tag{2.50}$$

Dado que los armónicos $Y_{\lambda,\mu}$ forman una base, podemos igualar sus coeficientes a ambos lados de la expresión, posteriormente utilizando que D^{λ} es una transformación unitaria y despejando obtenemos la ley de transformación de los $a_{\lambda,\mu}$, que resulta ser la inversa de (2.48) como era de esperar:

$$a_{\lambda,\mu}(R^{-1}\mathbf{u}') = \sum_{\mu''} a_{\lambda,\mu''}(\mathbf{u}) D^{\lambda *}_{\mu'',\mu}(R). \tag{2.51}$$

Podemos ver, tomando los complejos conjugados, que $Y_{\lambda,\mu}(\mathbf{u})$, (2.48), y $a^{*}_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}')$, (2.51), se transforman de la misma forma para cualquier R. Ésto solo puede darse si:

$$a_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}') = K_{\lambda} Y^{*}_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}'), \tag{2.52}$$

donde K_{λ} es una constante de proporcionalidad. Por lo tanto, podemos escribir los polinomios de Gegenbauer de la siguiente forma:

$$C^{\alpha}_{\lambda}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') = K_{\lambda} \sum_{\mu} Y^{*}_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}') Y_{\lambda,\mu}(\mathbf{u}) \tag{2.53}$$

Este resultado anterior es conocido como el teorema de adición (*addition theorem*). La constante de proporcionalidad se puede calcular y queda [42]:

$$K_{\lambda} = \frac{(d-2)\Omega_d}{d+2\lambda-2}. \tag{2.54}$$

2.5. Base estándar de armónicos

Vamos a ver como se generara un conjunto ortonormal de armónicos hiperesféricos en d dimensiones a partir de uno en $d-1$ dimensiones.

Denotamos por $\tilde{h}_s$ a un polinomio armónico de grado s en $d-1$ dimensiones y descomponemos el Laplaciano en dos partes, una que actúa en las primeras $d-1$ variables y la otra en la última:

$$\Delta = \tilde{\Delta} + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}. \tag{2.55}$$

Con está definición, $\tilde{\Delta}\tilde{h}_s = 0$. Fiajdo $\tilde{h}_s$, el polinomio $f_n = x_d^{n-s}\tilde{h}_s$ es un polinomio homogéneo de grado n. Vamos a utilizar (2.10) para ver cual es la componente armónica de mayor grado que contiene f_n. Para ello primero vemos el resultado de aplicar el Laplaciano k veces con $k \leq (n-s)/2$. Teniendo en cuenta que $\tilde{\Delta} f_n = 0$, obtenemos:

$$\Delta^k f_n = \left(\frac{\partial^{2k}}{\partial x_d^{2k}} + \tilde{\Delta}^{2k}\right) x_d^{n-s}\tilde{h}_s = \frac{(n-s)!}{(n-s-2k)!} x_d^{n-s-2k}\tilde{h}_s. \tag{2.56}$$

Ahora sí, aplicando (2.10) con $\lambda = n$ y teniendo en cuenta que si $k > (n-s)/2$ entonces $\Delta^k f_n = 0$, obtenemos la componente armónica h_n:

$$h_n = \frac{(n-s)!}{(d+2n-4)!!} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-s}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (d+2n-2k-4)!!}{(2k)!!(n-s-2k)!} r^{2k} x_d^{n-s-2k} \tilde{h}_s, \qquad (2.57)$$

reordenando la expresión anterior, llegamos a

$$h_n = r^{n-s} \tilde{h}_s \frac{(n-s)!}{(d+2n-4)} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-s}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (d+2n-2k-4)!!}{(2k)!!(n-s-2k)!} \left(\frac{x_d}{r}\right)^{n-s-2k}, \qquad (2.58)$$

de modo que, podemos reescribir (2.41) de la siguiente forma:

$$C_\lambda^\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') = \sum_{k=0}^{\lfloor \lambda/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (d+2\lambda-2k-4)!!(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')^{\lambda-2k}}{(2k)!!(\lambda-2k)!(d-4)!!}. \qquad (2.59)$$

Comparando esta última expresión con (2.57) reescribimos la proyección de f_n como:

$$h_n = r^{n-s} \tilde{h}_s \frac{(n-s)!(d+2s-4)!!}{(d+2n-4)!!} C_{n-s}^{\alpha+s} \left(\frac{x_d}{r}\right) \qquad (2.60)$$

En (2.15) definimos los armónicos hiperesféricos a partir de polinomios armónicos. Si denotamos por $\tilde{r}$ el hiperradio e y por $\tilde{\mathbf{u}}$ las variables angulares, ambos en $d-1$ dimensiones, podemos tomar un polinomio armónico, $\tilde{h}_l$, de grado l y su armónico hiperesférico asociado:

$$Y_{l,\mu} = \tilde{r}^{-l} \tilde{h}_l \qquad (2.61)$$

Utilizando (2.60) y sin tener en cuenta las constantes podemos escribir un polinomio armónico de grado λ en d dimensiones de la siguiente forma:

$$h_\lambda = r^{\lambda-l} C_{\lambda-l}^{\alpha+l} \left(\frac{x_d}{r}\right) \tilde{h}_l. \qquad (2.62)$$

Ahora aplicando (2.15) obtenemos el armónico que buscábamos:

$$Y_{\lambda,l,\mu}(\mathbf{u}) := \left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^l C_{\lambda-l}^{\alpha+l} \left(\frac{x_d}{r}\right) Y_{l,\mu}(\tilde{\mathbf{u}}) \qquad (2.63)$$

Podemos escribir explícitamente una base ortonormal para los armónicos hiperesféricos en d dimensiones como sigue:

$$Y_{\mu_1,\ldots,\mu_{d-1},m}(\theta_1,\ldots,\theta_{d-2},\phi) = e^{im\phi} \prod_{j=1}^{d-2} C_{\mu_j-\mu_{j+1}}^{\alpha_j+\mu_j+1} (\cos(\theta_j)) \sin(\theta_j)^{\mu_j+1} \qquad (2.64)$$

De las relaciones (2.13) y (2.14) es fácil deducir que

$$\tilde{r}/r = \sin(\theta_{d-2}), \qquad x_d/r = \cos(\theta_{d-2}). \tag{2.65}$$

Por lo visto en (2.63) de un armónico en $d-1$ dimensiones obtenemos uno en d sin introducir dependencias en las variables propias del espacio d-dimensional. Por lo tanto, los armónicos esféricos siguen siendo autovectores del operador Λ^2_{d-1} (momento angular generalizado en $d-1$ dimensiones). Gracias a esto los armónicos no son sólo ortogonales si tienen diferente grado, es decir, diferente autovalor para Λ^2, sino que también lo son si tienen diferente autovalor para algún Λ^2_i; una base con estas propiedades es *una base estándar* de armónicos esféricos. En definitiva, hemos construído una base ortogonal de armónicos hiperesféricos, multiplicando por las constantes adecuadas podremos obtener una ortonormal.

2.6. Bases no estándar

Para determinados problemas físicos esta base puede no ser la más adecuada. Por ejemplo, puede ser más conveniente utilizar una que respete la simetría del problema. A continuación vamos a esbozar la construcción de una base general de este tipo.

Supongamos que queremos trabajar en un espacio de dimensión d, separado en dos subespacios de dimensiones d_1 y d_2, evidentemente $d_1 + d_2 = d$. Las variables en cada espacio serán $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ respectivamente y en el espacio total $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Definimos las variables radiales:

$$\begin{array}{rcl} r_1^2 &=& \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1, \\ r_2^2 &=& \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2, \\ r^2 &=& \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = r_1^2 + r_2^2. \end{array} \tag{2.66}$$

Los Laplacianos en cada subespacio los representaremos por Δ_1 y Δ_2, de forma que el Laplaciano total será $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$. Supongamos que tenemos dos polinomios armónicos $h_{l_1}(\mathbf{x}_1)$ y $h_{l_2}(\mathbf{x}_2)$, uno en cada subespacio. Para construir un polinomio homogéneo de grado λ en el espacio total f_{λ,l_1,l_2} tenemos que multiplicar por potencias de los radios de la siguiente forma:

$$f_{\lambda,l_1,l_2} = r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} h_{l_1}(\mathbf{x}_1) h_{l_2}(\mathbf{x}_2), \tag{2.67}$$

Con la condición de $\beta_1 + \beta_2 + l_1 + l_2 = \lambda$. Proyectando con (2.10) obtenemos un polinomio armónico en el espacio total h_{λ,l_1,l_2}. A partir de él ya sabemos como construir los armónicos que necesitamos, que en este caso serán autofunciones del momento angular generalizado de cada subespacio y del total.

2.7. Armónicos hiperesféricos en 4-D

Particularizaremos lo expuesto hasta ahora al caso de 4 dimensiones en el que nos centraremos en el resto del trabajo. Las coordenadas esféricas generalizadas expuestas en (2.13) se reducen en cuatro dimensiones a:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}, \\
\phi &= \tan^{-1}(x_2/x_1), \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}/x_3\right), \\
\chi &= \tan^{-1}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}/x_4\right).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

La relación inversa, equivalente a (2.14) se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\sin(\chi)\sin(\theta)\cos(\phi), \\
x_2 &= r\sin(\chi)\sin(\theta)\sin\phi, \\
x_3 &= r\sin(\chi)\cos(\theta), \\
x_4 &= r\cos(\chi).
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Son bien conocidos los armónicos esféricos en tres dimensiones, $Y_{l,m}(\theta,\phi)$. Si multiplicamos por las potencias adecuadas de $r_{(3)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ para obtener polinomios armónicos en tres dimensiones:

$$\tilde{h}_l \sim r_{(3)}^l Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{2.70}$$

Para obtener polinomios armónicos en 4 dimensiones de grado λ nos basta con multiplicar $\tilde{h}_l$ por $x_4^{\lambda-l}$. Para obtener la componente canónica de este nuevo polinomio h_λ aplicamos (2.60) a $x^{\lambda-l}\tilde{h}_l$ y resulta ser proporcional a:

$$r_{(4)}^{\lambda-l}\, r_{(3)}^l\, \tilde{h}_l C_{\lambda-l}^{1+l}\left(\frac{x_4}{r_{(4)}}\right), \tag{2.71}$$

donde evidentemente $r_{(4)} = \sqrt{r_{(3)}^2 + x_4^2}$. De lo que se deduce fácilmente que

$$1 = \frac{r_{(3)}^2}{r_{(4)}^2} + \cos^2(\chi) \tag{2.72}$$

y por lo tanto

$$\sin(\chi) = \frac{r_{(3)}}{r_{(4)}}. \tag{2.73}$$

Ahora dividiendo entre $r_{(4)}^\lambda$ obtenemos los armónicos esféricos en 4 dimensiones:

$$Y_{\lambda,l,m} = \sin^l(\chi)\, C^{1+l}_{\lambda-l}(\cos(\chi))\, Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{2.74}$$

Estos armónicos son los de la base estándar, sin embargo en lo sucesivo utilizaremos una base de armónicos no estándar, la base utilizada en [9] y que explicamos a continuación.

Buscamos una base de armónicos esféricos en 4 dimensiones cuyos elementos sean vectores propios de de los generadores de $SU(2) \times SU(2)$.

Utilizaremos una parametrización diferente de la esfera. Consideramos las coordenadas usuales en $\mathbb{R}^4$, (x_1, x_2, x_3, x_4) y definamos las nuevas variables α y β.

$$\alpha x_1 + i x_2, \qquad \beta = x_3 + i x_4, \tag{2.75}$$

y sus conjugadas

$$\alpha^* = x_1 - i x_2, \qquad \beta^* = x_3 - i x_4, \tag{2.76}$$

todas ellas completan una base ortogonal en $\mathbb{R}^4$. En esta base los generadores del momento angular toman el siguiente aspecto:

$$\begin{aligned}
I_+ &= (\beta^*\partial\alpha^* - \alpha\partial_\beta)/\sqrt{2}, \\
I_3 &= (\alpha\partial_\alpha + \beta^*\partial_{\beta^*} - \alpha^*\partial_{\alpha^*} - \beta\partial_\beta)/2, \\
I_- &= (\alpha^*\partial_{\beta^*} - \beta\partial_\alpha)/\sqrt{2}, \\
J_+ &= (\beta\partial_{\alpha^*} - \alpha\partial_{\beta^*})/\sqrt{2}, \\
J_3 &= (\alpha\partial_\alpha + \beta\partial_\beta - \alpha^*\partial_{\alpha^*} - \beta^*\partial_{\beta^*})/2, \\
J_- &= (\alpha^*\partial_\beta - \beta^*\partial_\alpha)/\sqrt{2},
\end{aligned} \tag{2.77}$$

donde se ha utilizado el frecuente cambio de variable:

$$I_\pm = (I_1 \pm I_2)/\sqrt{2}, \qquad J_\pm = (J_1 \pm J_2)\sqrt{2}. \tag{2.78}$$

Con las coordenadas introducidas en (2.75) y (2.76) la esfera S_3, embebida en $\mathbb{R}^4$ se puede definir a través de la siguiente expresión:

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1 \tag{2.79}$$

De forma que una base de armónicos hiperesféricos, ya normalizada será:

$$Y_{j;m,n} = \sqrt{\frac{2j+1}{2\pi^2}}\sqrt{\frac{2^{j-m}(j+m)!2^{j-n}(j+n)!}{(2j)!(j-m)!(2j)!(j-n)!}}(I_-)^{j-m}(J_-)^{j-m}\alpha^{2j}, \tag{2.80}$$

tal y como se indica en (3.11) de [9]. Con esta elección de base, los operadores más relevante a la hora de estudiar el momento angular tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} I_3 Y_{j;m,n} = m Y_{j;m,n}, \qquad J_3 Y_{j;m,n} = n Y_{j;m,n}, \\ I^2 Y_{j;m,n} = J^2 Y_{j;m,n} = j(j+1) Y_{j;m,n}, \end{aligned} \tag{2.81}$$

donde los operadores I^2 y J^2, como acostumbramos, se definen como sigue

$$I^2 = I_3^2 + I_- I_+ + I_+ I_-, \qquad J^2 = J_3^2 + J_- J_+ + J_+ J_-. \tag{2.82}$$

Sabemos que el álgebra de Lie de $SO(4)$, es decir, $so(4)$ es isomorfo a $su(2) \oplus su(2)$. Además el álgebra $su(2)$ queda determinada por las relaciones de conmutación

$$[I_+, I_-] = 2\, I_3, \qquad [I_3, I_\pm] = \pm I_\pm \tag{2.83}$$

Vamos a ver si nuestros operadores las cumplen:

$$\begin{aligned} [I_+, I_-] = \tfrac{1}{2} \left[(\beta^* \partial \alpha^* - \alpha \partial_\beta)(\alpha^* \partial_{\beta^*} - \beta \partial_\alpha) - (\alpha^* \partial_{\beta^*} - \beta \partial_\alpha)(\beta^* \partial \alpha^* - \alpha \partial_\beta) \right] \\ \tfrac{1}{2}(\alpha \partial_\alpha + \beta^* \partial_{\beta^*} - \alpha^* \partial_{\alpha^*} - \beta \partial_\beta) = I_3, \end{aligned} \tag{2.84}$$

el segundo conmutador es:

$$\begin{aligned} [I_3, I_+] = \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\alpha \partial_\alpha + \beta^* \partial_{\beta^*} - \alpha^* \partial_{\alpha^*} - \beta \partial_\beta)(\beta^* \partial \alpha^* - \alpha \partial_\beta) \right. \\ \left. -(\beta^* \partial \alpha^* - \alpha \partial_\beta)(\alpha \partial_\alpha + \beta^* \partial_{\beta^*} - \alpha^* \partial_{\alpha^*} - \beta \partial_\beta) \right] \\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\beta^* \partial \alpha^* - \alpha \partial_\beta) = I_+, \end{aligned} \tag{2.85}$$

finalmente el tercero

$$\begin{aligned} [I_3, I_-] = \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\alpha \partial_\alpha + \beta^* \partial_{\beta^*} - \alpha^* \partial_{\alpha^*} - \beta \partial_\beta)(\alpha^* \partial_{\beta^*} - \beta \partial_\alpha) \right. \\ \left. -(\alpha^* \partial_{\beta^*} - \beta \partial_\alpha)(\alpha \partial_\alpha + \beta^* \partial_{\beta^*} - \alpha^* \partial_{\alpha^*} - \beta \partial_\beta) \right] \\ = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^* \partial_{\beta^*} - \beta \partial_\alpha) = -\, I_-. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Todos coinciden con las relaciones estándar expuestas en (2.83) salvo (2.84), sin embargo, esto se puede solventar sin más que multiplicar $I_\pm$ por $\sqrt{2}$. Por lo tanto, estos operadores $I_\pm$ e I_3 cierran un álgebra $su(2)_I$. Lo mismo ocurre con los $J_\pm$ y J_3, que por lo tanto cierran otro álgebra $su(2)_J$.

Además se puede comprobar que los operadores J_i y los I_i conmutan, por lo tanto juntos constituyen un álgebra suma directa de ambas $su(2) \oplus su(2)$ que ya hemos visto que es isomorfo al álgebra de Lie de $SO(4)$.

Capítulo 3

Topología en los espacios de hiperesféricos

Las soluciones descritas en [9] sugieren una equipación para el espacio de Hilbert que generan los armónicos esféricos descritos en el capítulo anterior. Con esta equipación los operadores asociados a las soluciones propuestas resultan ser continuos. Además en esta equipación resultan ser continuos los seis generadores del grupo de rotaciones $SO(4)$.

3.1. RHS generado por lo armónicos hiperesféricos

Definiremos a partir de los armónicos hiperesféricos un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$. Posteriormente lo equiparemos con un subespacio denso, Φ; que como veremos en la sección 3 hace continuos los operadores que generan las soluciones propuestas en [9].

Sean $Y_{j;m,n}$ los hiperarmónicos esféricos que se han discutido al final del Capítulo 2. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ generado por estos hiperarmónicos será el espacio vectorial de todas las series:

$$\mathcal{Y} := \sum_{j;m,n} a_{j;m,n} Y_{j;m,n} \,, \tag{3.1}$$

cuyos módulos al cuadrado convergen, es decir,

$$\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 < \infty. \tag{3.2}$$

Esta definición es coherente con el producto interno que se definió en (2.32) para el cual dos armónicos hiperesféricos distintos de nuestra base son ortogonales. Como es lógico la condición (3.2) es equivalente al hecho de que la norma que induce este producto interno

$$||\mathcal{Y}|| = \sqrt{\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2}, \tag{3.3}$$

sea finita. Evidentemente, dado otro vector $\mathcal{X} \in \mathcal{H}$ cuyos coeficientes en la expansión (3.1) denotamos por $b_{j;m,n}$ la expresión del producto interno es:

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m,n} a_{j;m,n}. \tag{3.4}$$

Las soluciones que en [9] se encuentran para potenciales de Yang-Mills [44] en el Gauge de Coulomb sugieren la siguiente equipación para $\mathcal{H}$. El subespacio denso en $\mathcal{H}$ que necesitamos, Φ, será el formado por las funciones de $\mathcal{H}$ cuyas seminormas $Q_{p,q}$, definidas a continuación son finitas:

$$(Q_{p,q}(\mathcal{Y}))^2 := \sum_{j;m,n} (j+|n|+1)^{2p} \, (j+|m|+1)^{2q} \, |a_{j;m,n}|^2 < \infty \,, \qquad p, q = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{3.5}$$

este subespacio es denso en $\mathcal{H}$. Lo comprobamos viendo que para cualquier función $\mathcal{Y} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m,n} a_{j;m,n} Y_{j;m,n}$ en $\mathcal{H}$ podemos considerar la sucesión de funciones en Φ, $\{\mathcal{Y}_i\}_{i=0}^{\infty}$ definidas como:

$$\mathcal{Y}_i = \sum_{j=0}^{i} \sum_{m,n} a_{j;m,n} Y_{j;m,n}, \tag{3.6}$$

que converge a $\mathcal{Y}$. Hemos visto que Φ es secuencialmente denso en $\mathcal{H}$ y, como este último es separable, denso.

Hemos construído por lo tanto una espacio de Hilbert y lo hemos equipado con un subespacio Φ denso en él.

3.2. Operadores REK

En [9], fórmulas (3.19) y (3.20), se denomina $X_\pm$ y X_3 a unas funciones construidas mediante los armónicos hiperesféricos. Nosotros vamos a usar esta notación para definir unos operadores relacionados con esta transformación. Las soluciones propuestas en este documento son de dos tipos diferentes.

Soluciones de tipo I

Vamos a comenzar con (3.19). Consideremos todos los vectores $\mathcal{Y}$ en Φ, es decir, aquellos $\mathcal{Y}$ que verifiquen (3.5). Sobre ellos definiremos lo que ahora van a ser **operadores** $X_\pm$ y X_3, de la siguiente forma:

$$X_+\mathcal{Y} := \sum_{j;m,n} a_{j;m,n}\,\sqrt{(j-n)(j-n+1)/2}\,e^{\pm 2(j+1)i\tau}\,Y_{j:m,n+1}\,, \tag{3.7}$$

$$X_-\mathcal{Y} := -\sum_{j;m,n} a_{j;m,n}\,\sqrt{(j+n)(j+n+1)/2}\,e^{\pm 2(j+1)i\tau}\,Y_{j;m,n-1}\,, \tag{3.8}$$

$$X_3\mathcal{Y} := \sum_{j;m,n} a_{j;m,n}\,\sqrt{(j+1)^2-n^2}\,e^{\pm 2(j+1)i\tau}\,Y_{j;m,n}\,; \tag{3.9}$$

donde los límites de los índices son $j \geq 0$, $m = -j, \ldots, j$ y $n = -j-1, \ldots, j+1$ y

$$Y_{j;m,-j-1} = Y_{j;m,j+1} = 0 \tag{3.10}$$

El parámetro $\tau \in (0, \pi)$ que aparece en las fases está ligado a la parametrización utilizada en [43] para describir la inclusión (*embedding* del 4-D espacio de de-Sitter en un espacio de Minkowski 5-D (1+4). Denominamos a estos operadores *rational electromagnetic knots* (REK).

Vamos a demostrar que estos operadores dejan Φ invariante, es decir, la imagen de Φ por ellos está contenida en el propio Φ.

Comenzaremos por X_+. Sea una función $\mathcal{Y} \in \Phi$ vamos a ver que su $X_+\mathcal{Y}$ cumple (3.5) y por lo tanto está contenida en Φ. Para ello analicemos sus seminormas:

$$(Q_{p,q}(X_+\mathcal{Y}))^2 = \frac{1}{2}\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 (j-n)(j-n+1)(j+|n+1|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2q}. \tag{3.11}$$

Tal y como hemos elegido n es obvio que $(j-n)(j-n+1) \geq 0$, además:

$$\begin{aligned}(j-n)(j-n+1)(j+|n+1|+1)^{2p} &\leq (j+|n|)(j+|n|+1)(j+|n|+2)^{2p} \\ &\leq 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)},\end{aligned} \tag{3.12}$$

por lo tanto, podemos acotar todas las seminormas de $X_+\mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned}(Q_{p,q}(X_+\mathcal{Y}))^2 &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j;m,n} 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}\,(j+|m|+1)^{2q}\,|a_{j;m,n}|^2 \\ &\leq 2^{2p-1}\,(Q_{p+1,q}(\mathcal{Y}))^2 < \infty.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Procedemos de manera idéntica con X_-. En las mismas condiciones que antes, evaluamos $(Q_{p,q}(X_-\mathcal{Y})^2$:

$$(Q_{p,q}(X_-\mathcal{Y}))^2 = \frac{1}{2}\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 (j+n)(j+n+1)(j+|n-1|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2q}. \tag{3.14}$$

De nuevo, gracias a la elección de n tenemos que $(j+n)(j+n+1) \geq 0$, por lo tanto todos los términos de la serie son positivos. Además se cumple:

$$\begin{aligned}(j+n)(j+n+1)(j+|n-1|+1)^{2p} &\leq (j+|n|)(j+|n|+1)(j+|n|+2)^{2p} \\ &\leq 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por lo que las seminormas de $X_-\mathcal{Y}$ son finitas:

$$\begin{aligned}(Q_{p,q}(X_-\mathcal{Y}))^2 &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j;m,n} 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}\,(j+|m|+1)^{2q}\,|a_{j;m,n}|^2 \\ &\leq 2^{2p-1}\,(Q_{p+1,q}(\mathcal{Y}))^2 < \infty.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Finalmente, vamos a ver que con X_3 ocurre lo mismo.

$$(Q_{p,q}(X_3\mathcal{Y}))^2 = \sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2\left[(j+1)^2-n^2\right](j+|n|+1)^{2p}\,(j+|m|+1)^{2q}. \tag{3.17}$$

Por la elección de n, sabemos que $(j+1)^2 - n^2 \geq 0$. Además,

$$(j+1)^2 - n^2 \leq (j+|n|+1)^2 \tag{3.18}$$

Por lo que de nuevo la seminorma queda acotada:

$$(Q_{p,q}(X_3\mathcal{Y}))^2 \leq (Q_{p+1,q}(\mathcal{Y}))^2 < \infty \tag{3.19}$$

Ya hemos visto que estos tres operadores dejan Φ invariante, las mismas acotaciones (3.13), (3.16) y (3.19) junto con el el teorema 1.3 nos permiten concluir que de hecho los tres operadores son continuos de Φ en sí mismo.

Los operadores $X_\pm$ y X_3 están definidos salvo una elección en la fase $e^{\pm 2(j+1)i\tau}$, por lo tanto no tenemos tres operadores sino 6. En el caso de X_3 ambos operadores son el adjunto formal el uno del otro.

Vamos a calcular los adjuntos formales de X_+. Buscamos un operador $X_+^\dagger$ tal que dadas dos funciones $\mathcal{Y} = \sum_{j;m,n} a_{j;m,n}Y_{j;m,n}$ y $\mathcal{X} = \sum_{j;m,n} b_{j;m,n}Y_{j;m,n}$ cumpla:

$$\langle X_+^\dagger\mathcal{X},\mathcal{Y}\rangle = \langle\mathcal{X}, X_+\mathcal{Y}\rangle \tag{3.20}$$

Puesto que la base de armónicos es una base ortonormal, el segundo término nos quedará:

$$\langle \mathcal{X}, X_+ \mathcal{Y} \rangle = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m,n+1} a_{j;m,n} \sqrt{(j-n)(j-n+1)/2} e^{\pm 2(j+1)i\tau}. \tag{3.21}$$

Suponemos que el operador adjunto actúa de la siguiente forma sobre $\mathcal{X}$:

$$X_+^\dagger \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} c_{j;m,n} Y_{j;m,n}, \tag{3.22}$$

por lo tanto, recordando que la base de armónicos es ortonormal e imponiendo (3.20) podemos deducir:

$$\sum_{j;m,n} c^*_{j;m,n} a_{j;m,n} = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m,n+1} a_{j;m,n} \sqrt{(j-n)(j-n+1)/2} e^{\pm 2(j+1)i\tau}, \tag{3.23}$$

de lo que podemos deducir el valor de los coeficientes

$$c^*_{j;m,n} = b^*_{j;m,n-1} \sqrt{(j-n)(j-n+1)/2}\, e^{\pm 2(j+1)i\tau}. \tag{3.24}$$

Por lo que finalmente el adjunto tendrá la forma:

$$X_+^\dagger \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} b_{j;m,n} \sqrt{(j-n)(j-n+1)/2}\, e^{\mp 2(j+1)i\tau} Y_{j;m,n-1} \tag{3.25}$$

Calcularemos ahora los adjuntos formales de X_-, de la misma forma que antes, buscamos un operador $X_-^\dagger$ que dadas las mismas funciones $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ cumpla:

$$\langle X_-^\dagger \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle \mathcal{X}, X_- \mathcal{Y} \rangle \tag{3.26}$$

El segundo término de la fórmula tiene la forma:

$$\langle \mathcal{X}, X_- \mathcal{Y} \rangle = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m,n-1} a_{j;m,n} \sqrt{(j+n)(j+n+1)/2}\, e^{\pm 2(j+1)i\tau}. \tag{3.27}$$

Suponemos de nuevo que el operador $X_-^\dagger$ tiene una forma genérica:

$$X_-^\dagger \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} c_{j;m,n} Y_{j;m,n}, \tag{3.28}$$

como (3.26) se tiene que cumplir, obtenemos:

$$\sum_{j;m,n} c^*_{j;m,n} a_{j;m,n} = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m,n-1} a_{j;m,n} \sqrt{(j+n)(j+n+1)/2}\, e^{\pm 2(j+1)i\tau}, \tag{3.29}$$

de lo que podemos obtener el valor de los coeficientes $c_{j;m,n}$ y por lo tanto, definir el operador:

$$X_-^\dagger \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} b_{j;m,n} \sqrt{(j+n)(j+n+1)/2}\, e^{\mp 2(j+1)i\tau} Y_{j;m,n+1} \tag{3.30}$$

Vamos a ver que tanto $X_+^\dagger$ como $X_-^\dagger$ tienen a Φ como subespacio invariante y además son operadores continuos de Φ en Φ.

Comenzaremos con $X_+^\dagger$, sea $\mathcal{Y} \in \Phi$, vamos a ver que $X_+^\dagger \mathcal{Y}$ también está en Φ viendo que las seminormas $Q_{p,q}$ están acotadas:

$$\Big(Q_{p,q}(X_+^\dagger \mathcal{Y})\Big)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j;m,n} |a_{j,m,n}|^2 (j-n)(j-n+1)(j+|n-1|+1)^{2p}(j+|2m|+1)^{2q}. \tag{3.31}$$

es fácil ver que

$$\begin{aligned}(j-n)(j-n+1)(j+|n-1|+1)^{2p} &\leq (j+|n|)(j+|n|+1)(j+|n|+2)^{2p} \\ &\leq 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)},\end{aligned} \tag{3.32}$$

Por lo tanto, podemos concluir:

$$\Big(Q_{p,q}(X_+^\dagger \mathcal{Y})\Big)^2 \leq 2^{2p-1} \left(Q_{p+1,q}(\mathcal{Y})\right)^2 \tag{3.33}$$

Lo que a su vez implica, tomando raíces cuadradas, por el teorema 1.3 que es una aplicación continua. Con $X_-^\dagger$ ocurre lo mismo:

$$\Big(Q_{p,q}(X_-^\dagger \mathcal{Y})\Big)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 (j+n)(j+n+1)(j+|n-1|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2q}. \tag{3.34}$$

Como se cumple

$$\begin{aligned}(j+n)(j+n+1)(j+|n+1|+1)^{2p} &\leq (j+|n|)(j+|n|+1)(j+|n|+2)^{2p} \\ &\leq 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}\end{aligned} \tag{3.35}$$

Por lo tanto, las seminormas de $X_-^\dagger \mathcal{Y}$ vuelven a quedar acotadas:

$$\Big(Q_{p,q}(X_+^\dagger \mathcal{Y})\Big)^2 \leq 2^{2p-1} \left(Q_{p+1,q}(\mathcal{Y})\right)^2. \tag{3.36}$$

Por lo tanto, sabemos que los operadores $X_\pm$, sus adjuntos formales $X_\pm^\dagger$ y los operadores X_3 que son adjuntos formales uno del otro, cumplen las condiciones del teorema 1.2 y por lo tanto pueden extenderse al antidual de Φ, $\Phi^\times$.

Soluciones de tipo II

Consideramos unos nuevos operadores según la ecuación (3.20) en [9]. En este caso $j \geq 1$, $m = -j, \ldots, j$ y $n = -j+1, \ldots, j-1$ y quedan definidos por:

$$Z_+\mathcal{Y} := -\sum_{j;m,n} a_{j;m,n} \sqrt{(j+n)(j+n+1)/2}\, e^{\pm 2ji\tau}\, Y_{j;m,n+1}\,, \tag{3.37}$$

$$Z_-\mathcal{Y} := \sum_{j;m,n} a_{j;m,n} \sqrt{(j-n)(j-n+1)/2}\, e^{\pm 2ji\tau}\, Y_{j;m,n-1}\,, \tag{3.38}$$

$$Z_3\mathcal{Y} := \sum_{j;m,n} a_{j;m,n} \sqrt{j^2-n^2}\, e^{\pm 2ji\tau}\, Y_{j;m,n}\,. \tag{3.39}$$

Vamos a ver que al igual que $X_\pm$ y X_3, estos operadores dejan Φ invariante. Evaluamos las seminormas de $Z_+\mathcal{Y}$ sabiendo que $\mathcal{Y} \in \Phi$.

$$(Q_{p,q}(Z_+\mathcal{Y}))^2 = \frac{1}{2}\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 (j+n)(j+n+1)(j+|n+1|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2q} \tag{3.40}$$

Gracias a la elección de n todos los sumandos son positivos. Puesto que

$$(j+n)(j+n+1) \leq (j+|n|+1), \tag{3.41}$$

podemos acotar:

$$\begin{aligned}(j+n)(j+n+1)(j+|n+1|+1)^{2p} &\leq (j+|n|+1)^2(j+|n|+2)^{2p} \\ &\leq 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Por lo tanto, las seminormas quedan acotadas en función de las de $\mathcal{Y}$ que sabemos que son finitas por pertenecer $\mathcal{Y}$ a Φ. Así

$$\begin{aligned}(Q_{p,q}(Z_+\mathcal{Y}))^2 &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}\,(j+|m|+1)^{2q} \\ &\leq 2^{2p-1}\,(Q_{p+1,q}(\mathcal{Y}))^2 < \infty.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Procedemos de manera similar para Z_-.

$$(Q_{p,q}(Z_-\mathcal{Y}))^2 = \frac{1}{2}\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 (j-n)(j-n+1)(j+|n-1|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2q}, \tag{3.44}$$

los términos de la serie siguen siendo todos positivos y

$$(j-n)(j-n+1) \leq (j+|n|)(j+|n|+1), \tag{3.45}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}(j-n)(j-n+1)(j+|n+1|+1)^{2p} &\leq (j+|n|+1)^2(j+|n|+2)^{2p} \\ &\leq 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Acotando las $Q_{p,q}(Z_-\mathcal{Y})$ como sigue:

$$\begin{aligned}(Q_{p,q}(Z_-\mathcal{Y}))^2 &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}\,(j+|m|+1)^{2q} \\ &\leq 2^{2p-1}\,(Q_{p+1,q}(\mathcal{Y}))^2 < \infty\end{aligned} \tag{3.47}$$

Finalmente, para el operador Z_3, veamos que $Z_3\mathcal{Y} \in \Phi$ siempre que $\mathcal{Y} \in \Phi$, luego Φ es invariante por Z_3. Efectivamente

$$(Q_{p,q}(Z_3\mathcal{Y}))^2 = \sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2\,[j^2-n^2]\,(j+|n|+1)^{2p}\,(j+|m|+1)^{2q} \tag{3.48}$$

Sabemos que para $-j \leq n \leq j$ se tiene

$$j^2-n^2 \geq 0, \qquad j^2-n^2 \leq (j+n+1)^2, \tag{3.49}$$

luego:

$$(Q_{p,q}(Z_3\mathcal{Y}))^2 \leq (Q_{p+1,q}(\mathcal{Y}))^2 < \infty \tag{3.50}$$

Estas sencillas acotaciones nos permiten ver la invariabilidad de Φ bajo la acción de Z_+, Z_- y Z_3. Además, si tomamos raíces cuadradas en (3.43), (3.47) y (3.50) la aplicación del teorema 1.3 nos hace ver que de hecho constituyen aplicaciones continuas de Φ en el mismo.

Igual que ocurría con los operadores $X_\pm$ y X_3, estos operadores están definidos salvo un signo en la fase.

Calculamos el adjunto formal de Z_+, es decir, un operador $Z_+^\dagger$ que dadas dos funciones de Φ, $\mathcal{X} = \sum_{j;m,n} b_{j;m,n}Y_{j;m,n}$ e $\mathcal{Y} = \sum_{j;m,n} a_{j;m,n}Y_{j;m,n}$ se cumpla:

$$\langle X_+^\dagger\mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle = \langle \mathcal{X}, X_+\mathcal{Y}\rangle \tag{3.51}$$

Gracias a la ortonormalidad de los armónicos esféricos podemos escribir el término de la derecha:

$$\langle \mathcal{X}, Z_+\mathcal{Y}\rangle = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m,n+1}a_{j;m,n}\sqrt{(j+n)(j+n+1)/2}\,e^{\pm(j+1)i\tau} \tag{3.52}$$

Descoponiendo $Z_+\mathcal{Y}$ en la base de armónicos hiperesféricos:

$$Z_+^\dagger \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} c_{j;m,n} Y_{j;m,n}, \tag{3.53}$$

dado que (3.20) se debe cumplir, podemos deducir:

$$\sum_{j;m,n} c^*_{j;m,n} a_{c;jm,n} = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m,n+1} a_{j;m,n} \sqrt{(j+n)(j+n+1)/2}\, e^{\pm 2ji\tau} \tag{3.54}$$

De lo que se puede extraer el valor de los conjugados de los coeficientes

$$c^*_{j;m,n} = b^*_{j;m,n-1} \sqrt{(j+n)(j+n+1)/2} e^{\pm 2ji\tau}, \tag{3.55}$$

quedando el adjunto con la forma explícita:

$$Z_+^\dagger \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} b_{j;m,n} \sqrt{(j+n)(j+n+1)/2}\, e^{\mp 2ji\tau} Y_{j;m,n-1}. \tag{3.56}$$

Calculamos también los adjuntos formales de Z_- de la misma forma que antes, buscamos unos operadores $Z_-^\dagger$ que dadas las funciones $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Phi$ cumplan:

$$\langle Z_-^\dagger \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle \mathcal{X}, Z_- \mathcal{Y} \rangle \tag{3.57}$$

El segundo término es:

$$\langle \mathcal{X}, Z_- \mathcal{Y} \rangle = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m,n-1} a_{j;m,n} \sqrt{(j-n)(j-n+1)/2}\, e^{\pm 2ji\tau}. \tag{3.58}$$

La expresión en coeficientes del operador adjunto $Z_-^\dagger$ será:

$$Z_-^\dagger \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} c_{j;m,n} Y_{j;m,n}. \tag{3.59}$$

Para que se verifique (3.57), se debe cumplir

$$\sum_{j;m,n} c^*_{j;m,n} a_{j;m,n} = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m,n-1} a_{j;m,n} \sqrt{(j-n)(j-n+1)/2}\, e^{\pm 2ji\tau}, \tag{3.60}$$

de lo que podemos obtener el valor de los coeficientes $c^*_{j;m,n}$ y por lo tanto de los $c_{j;m,n}$ y definir el operador:

$$Z_-^\dagger \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} b_{j;m,n} \sqrt{(j-n)(j-n+1)/2} e^{\mp 2ji\tau} Y_{j;m,n+1} \tag{3.61}$$

Resulta fácil ver que los operadores Z_3 son los adjuntos formales el uno del otro. Si ahora demostramos que los operadores $Z_\pm$ y $Z_\pm^\dagger$ cumplen las hipótesis del teorema (1.2), tendremos de nuevo unos operadores definidos en $\Phi^\times$. Para ver que dejan Φ invariante, tenemos que ver la imagen de una función $\mathcal{Y} \in \Phi$ está también en Φ, es decir que las cantidades $Q_{p,q}(Z^\dagger_\pm \mathcal{Y})$ son finitas. Comenzamos con $Z^\dagger_+$:

$$\Big(Q_{p,q}(Z^\dagger_+ \mathcal{Y})\Big)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 (j+n)(j+n+1)(j+|n-1|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2q}. \tag{3.62}$$

Ya sabemos que todos los sumandos son positivos. Puesto que

$$(j+n)(j+n+1) \leq (j+|n|+1), \tag{3.63}$$

podemos acotar:

$$\begin{aligned}(j+n)(j+n+1)(j+|n+1|+1)^{2p} &\leq (j+|n|+1)^2(j+|n|+2)^{2p} \\ &\leq 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}.\end{aligned} \tag{3.64}$$

Por lo tanto, las seminormas $Q_{p,q}(Z^\dagger_+ \mathcal{Y})$ quedan acotadas en función de las $Q_{p,q}(\mathcal{Y})$ que sabemos que son cantidades finitas por pertenecer $\mathcal{Y}$ a Φ.

$$\begin{aligned}\Big(Q_{p,q}(Z^\dagger_+ \mathcal{Y})\Big)^2 &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}\,(j+|m|+1)^{2q} \\ &\leq 2^{2p-1}\left(Q_{p+1,q}(\mathcal{Y})\right) < \infty.\end{aligned} \tag{3.65}$$

De la misma forma procedemos con $Z^\dagger_- \mathcal{Y}$.

$$\Big(Q_{p,q}(Z^\dagger_- \mathcal{Y})\Big)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 (j-n)(j-n+1)(j+|n+1|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2q}, \tag{3.66}$$

dados los valores que pueden tomar j y n se tiene que

$$(j-n)(j-n+1) \leq (j+|n|)(j+|n|+1), \tag{3.67}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}(j-n)(j-n+1)(j+|n+1|+1)^{2p} &\leq (j+|n|)(j+|n|+1)(j+|n|+2)^{2p} \\ &\leq 2^{2p}(j+|n|+1)^{2(p+1)}.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Acotando las seminormas de $\mathcal{Q}_{p,q}(Z^\dagger_- \mathcal{Y})$ como sigue:

$$\begin{aligned}\Big(Q_{p,q}(Z^\dagger_- \mathcal{Y})\Big)^2 &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j;m,n} 2^{2p}|a_{j;m,n}|^2(j+|n|+1)^{2(p+1)}\,(j+|m|+1)^{2q} \\ &\leq 2^{2p-1}\left(Q_{p+1,q}(\mathcal{Y})\right)^2 < \infty.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Igual que en los casos anteriores estas acotaciones y el teorema 1.3 nos bastan para probar que los operadores $Z_-^\dagger$ y $Z_+^\dagger$ son continuos de Φ en sí mismo. Tenemos por lo tanto que los operadores $Z_\pm$ y Z_3 y sus adjuntos formales $Z_\pm^\dagger$ y los propios Z_3 son continuos y cumplen las hipótesis del teorema de extensión 1.2 luego se pueden extender de forma continua a $\Phi^\times$.

3.3. Elementos del álgebra de $SO(4)$.

El álgebra envolvente de $SO(4)$ se puede ver como generada por los operadores expuestos en (2.77). De forma similar a lo que se hizo en [3] con $SO(3)$ se pretende analizar si estos generadores son continuos en las equipaciones construidas.

Por como se define la base de armónicos que utilizamos para construir estos espacios comenzaremos analizando I_- y J_-. Dado un armónico esférico $Y_{j;m,n}$, la acción de I_- sobre él será:

$$I_-Y_{j;m,n} = \sqrt{\frac{2j+1}{2\pi^2}}\sqrt{\frac{2^{j-m}(j+m)!2^{j-n}(j+n)!}{(2j)!(j-m)!(2j)!(j-n)!}}(I_-)^{j-m+1}(J_-)^{j-n}\alpha^{2j}, \tag{3.70}$$

comparamos esta expresión con la definición de $Y_{j;m-1,n}$

$$Y_{j;m-1,n} = \sqrt{\frac{2j+1}{2\pi^2}}\sqrt{\frac{2^{j-m+1}(j+m-1)!2^{j-n}(j+n)!}{(2j)!(j-m+1)!(2j)!(j-n)!}}(I_-)^{j-m+1}(J_-)^{j-n}\alpha^{2j}, \tag{3.71}$$

si dividimos ahora ambas expresiones entre sí, obtenemos una ecuación equivalente a:

$$I_-Y_{j;m,n} = \sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}}Y_{j;m-1,n} \tag{3.72}$$

Vamos a ver que este operador I_- deja invariante Φ y además es continuo como operador de Φ en el propio Φ. Para ello elegimos una función $\mathcal{Y} = \sum_{j;m,n} a_{j;m,n}Y_{j;m,n}$ contenida en Φ, es decir con $Q_{p,q}(\mathcal{Y}) < \infty$, para todo $p, q \in \mathbb{N}$. Comprobaremos ahora que $Q_{p,q}(I_-\mathcal{Y}) < \infty$. Efectivamente

$$(Q_{p,q}(I_-\mathcal{Y}))^2 = \frac{1}{2}\sum_{j;m,n}|a_{j;m,n}|^2(j+m)(j-m+1)(j+|n|+1)^{2p}(j+|m-1|+1)^{2q}, \tag{3.73}$$

podemos acotar cada factor $(j+m)(j-m+1)(j+|m-1|+1)^{2q}$ por

$$\begin{aligned}(j+m)(j-m+1)(j+|n-1|+1)^{2p} &\leq (j+|m|+1)^2(j+|m|+2)^{2q} \\ &\leq 2^{2q}(j+|m|+1)^{2(q+1)}.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Esto deja las seminormas acotadas y por lo tanto Φ es invariante por I_-:

$$\begin{aligned}\left(Q_{p,q}(I_-\mathcal{Y})\right)^2 &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2\, 2^{2p}\,(j+|n|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2(q+1)} \\ &\leq 2^{2q-1}\left(Q_{p,q+1}(\mathcal{Y})\right)^2 < \infty,\end{aligned} \tag{3.75}$$

además, si tomamos raíces en (3.75) en virtud del teorema 1.3 podemos concluir que es una aplicación continua de Φ en sí mismo.

Vamos a tratar J_- de forma similar, comenzamos viendo como actúa sobre un armónico $Y_{j;m,n}$:

$$J_-Y_{j;m,n} = \sqrt{\frac{2j+1}{2\pi^2}}\sqrt{\frac{2^{j-m}(j+m)!2^{j-n}(j+n)!}{(2j)!(j-m)!(2j)!(j-n)!}}(I_-)^{j-m}(J_-)^{j-n+1}\alpha^{2j}, \tag{3.76}$$

podemos compararlo con la expresión de $Y_{j;m,n-1}$ llegando a la conclusión de que la acción de J_- sobre $Y_{j;m,n}$ es la siguiente

$$J_-Y_{j;m,n} = \sqrt{\frac{(j+n)(j-n+1)}{2}}Y_{j;m,n-1}. \tag{3.77}$$

Analizamos a continuación como actúa J_- sobre los elementos de Φ y veremos que los deja dentro del mismo subespacio, ergo Φ es un subespacio invariante de J_-. Sea $\mathcal{Y} \in \Phi$, la expansión en armónicos esféricos de $J_-\mathcal{Y}$ es:

$$J_-Y_{j;m,n} = \sum_{j;m,n} a_{j;m,n}\sqrt{\frac{(j+n)(j-n+1)}{2}}Y_{j;m,n-1}, \tag{3.78}$$

luego el valor de $\left(Q_{p,q}(J_-\mathcal{Y})\right)^2$ es:

$$\left(Q_{p,q}(J_-\mathcal{Y})\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j;m,n}|a_{j;m,n}|^2(j+n)(j-n+1)(j+|n|+1)^{2p}(j+|m-1|+1)^{2q}, \tag{3.79}$$

Resulta evidente que J_- se comporta igual que I_- intercambiando los papeles de m y n, luego podemos acotar

$$\left(Q_{p,q}(J_-\mathcal{Y})\right)^2 \leq 2^{2q+1}\left(Q_{p,q+1}(\mathcal{Y})\right)^2 \tag{3.80}$$

y hemos probado que Φ queda invariante y además, si tomamos raíces cuadradas en (3.80) podemos ver J_- induce una aplicación continua de Φ en sí mismo por el teorema 1.3.

Para tratar los operadores I_+ y J_+ utilizamos el hecho de que, tal y como están definidos en (2.78) son los adjuntos formales de I_- y J_- respectivamente. Utilizaremos este hecho para averiguar cual es su expresión extendida en coeficientes. Haremos el cálculo con $I_\pm$, puesto que con $J_\pm$ es idéntico sólo que intercambiando los papeles de m y n. El hecho de que sean adjuntos el uno del otro implica que si tenemos dos funciones $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}$, definidas como

$$\mathcal{Y} = \sum_{j;m,n} a_{j;m,n} Y_{j;m,n}, \qquad \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} b_{j;m,n} Y_{j;m,n} \tag{3.81}$$

se debe cumplir la conocida igualdad:

$$\langle I_+ \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle \mathcal{X}, I_- \mathcal{Y} \rangle \tag{3.82}$$

Puesto que los armónicos hiperesféricos son ortonormales podemos desarrollar el término de la derecha como sigue:

$$\langle \mathcal{X}, I_- \mathcal{Y} \rangle = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m-1,n} a_{j;m,n} \sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}} \tag{3.83}$$

Suponemos ahora que la acción de I_+ sobre $\mathcal{X}$ se puede escribir como:

$$I_+ \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} c_{j;m,n} Y_{j;m,n}, \tag{3.84}$$

por lo que si escribimos la igualdad (3.82) explícitamente nos queda la expresión

$$\sum_{j;m,n} c^*_{j;m,n} a_{j;m,n} = \sum_{j;m,n} b^*_{j;m-1,n} a_{j;m,n} \sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}}. \tag{3.85}$$

De esta última ecuación podemos despejar los coeficientes $c^*_{j;m,n}$ que se expresan como

$$c^*_{j;m,n} = \sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2}} b_{j;m-1,n}, \tag{3.86}$$

por lo que finalmente queda una expresión para I_+ de la forma siguiente

$$I_+ \mathcal{X} = \sum_{j;m,n} b_{j;m,n} \sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1}{2}} Y_{j;m+1,n}. \tag{3.87}$$

Ahora que conocemos la expresión de I_+ vamos a ver que también deja Φ invariante y además es continuo con la topología definida en el espacio de funciones test. Dada una función $\mathcal{Y} \in \Phi$, las seminormas de $I_+\mathcal{Y}$ tienen el valor:

$$(Q_{p,q}(I_+\mathcal{Y}))^2 = \sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 \frac{(j+m)(j-m+1)}{2}(j+|n|+1)^{2p}(j+|m+1|+1)^{2q}. \tag{3.88}$$

Gracias a la desigualdad

$$(j+m)(j-m+1)(j+|m+1|+1)^{2q} \leq 2^{2q)}(j+|m|+1)^{2(q+1)}, \tag{3.89}$$

podemos acotar las seminormas de $I_+\mathcal{Y}$ en función de las de $\mathcal{Y}$, que sabemos que son finitas, de modo que resulta

$$\begin{aligned}(Q_{p,q}(I_+\mathcal{Y}))^2 &\leq \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j;m,n} 2^{2q}|a_{j;m,n}|^2(j+|n|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2(q+1)} \\ &\leq 2^{2q-1}\left(Q_{p,q+1}(\mathcal{Y})\right)^2.\end{aligned} \tag{3.90}$$

De esta forma conseguimos probar que las seminormas de $I_+\mathcal{Y}$ son finitas, luego $I_+\mathcal{Y}$ está en Φ, es decir, I_+ deja Φ invariante. Además, de nuevo aludiendo al teorema 1.3 podemos afirmar que I_+ es un operador continuo de Φ.

De forma totalmente análoga se puede trabajar con J_+, con sólo intercambiar los papeles de m y n, llegando a exactamente las mismas conclusiones para este operador.

Finalmente comprobaremos la continuidad de I_3 en Φ, en (2.81) vimos como actúa I_3 sobre los armónicos hiperesféricos. Dada una función $\mathcal{Y}$ en Φ analizamos cual es el valor de las seminormas de $I_r\mathcal{Y}$,

$$(Q_{p,q}(I_3\mathcal{Y}))^2 = \sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2 m^2 (j+|n|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2q}, \tag{3.91}$$

evidentemente se tiene $m \leq (j+|m|+1)$, luego

$$(Q_{p,q}(I_3\mathcal{Y}))^2 \leq \sum_{j;m,n} |a_{j;m,n}|^2(j+|n|+1)^{2p}(j+|m|+1)^{2(q+1)} \leq (Q_{p,q+1}(\mathcal{Y}))^2 \tag{3.92}$$

Por tanto I_3 deja Φ invariante y es un operador continuo como consecuencia del teorema 1.3. Lo mismo ocurre con J_3.

Una vez llegados a este punto hemos probado que 6 generadores del álgebra de $SO(4)$ linealmente independientes I_3, $I_\pm$, J_3 y $J_\pm$, son todos continuos con la topología que hemos definido en la terna de Gelfand $\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$.

Conclusiones

Llegados a este punto podemos concluir:

- En el reciente trabajo [9] se encuentran soluciones a las ecuaciones de Maxwell en el Gauge de Coulomb *rational electromagnetic knots* vía ecuaciones de Yang-Mills en un espacio de de-Sitter 4-dimensional.
- Hemos formalizado la parte matemática de dicho trabajo.
- Las soluciones de *rational electromagnetic knots* son obtenidas por nosotros en forma de operadores (Operadores REK) sobre armónicos hiperesféricos.
- Hemos construido una equipación para el espacio de Hilbert de armónicos esféricos 4-dimensionales sobre la hiperesfera S^3.
- El espacio de funciones test de dicha equipación constituye un dominio denso, Φ, sobre el que los operadores REK que generan dichas soluciones son continuos y, de hecho, se pueden extender de forma continua al espacio dual $\Phi^\times$. De esta forma hemos proporcionado un marco matemático riguroso para los REK.
- El grupo de rotaciones $SO(4)$ es el grupo de simetría de la esfera S^3 y elementos de su álgebra de Lie $so(4)$ generan los armónicos hiperesféricos.
- Los operadores que generan el álgebra $so(4)$ también resultan ser continuos con la equipación construida para $\mathcal{H}$. De hecho el espacio sobre el que los operadores REK están definidos resulta ser invariante por las rotaciones en el espacio 4-dimensional.
- Un problema abierto es comprobar si los operadores REK están ligados de alguna forma a $so(4)$.
- Otra cuestión pendiente de estudiar es si todos los elementos del álgebra envolvente de $so(4)$ son también continuos con la equipación construida.

Bibliografía

[1] E. Celeghini, M. Gadella, M.A. del Olmo, Hermite Functions, Lie Groups and Fourier Analysis, *Entropy*, **20** (11) 816 (2018).

[2] E. Celeghini, M. Gadella, M.A. del Olmo, Applications of rigged Hilbert spaces in quantum mechanics and signal processing, *J. Math. Phys.*, **57**, 072105 (2016).

[3] E. Celeghini, M. Gadella, M.A. del Olmo, Spherical harmonics and rigged Hilbert spaces, *J. Math. Phys.*, **59** , 053502 (2018).

[4] E. Celeghini, M. Gadella, M.A. del Olmo, Lie algebra representations and rigged Hilbert spaces: The $SO(2)$ case, *Acta Polytechnica (Prag)*, **57**, 379-384 (2017).

[5] E. Celeghini, M. Gadella, M.A. del Olmo, Applications of rigged Hilbert spaces in quantum mechanics and signal processing, *J. Math. Phys.*, **57**, 072105 (2016).

[6] E. Celeghini, M. Gadella, M.A. del Olmo, $SU(2)$, associated Laguerre polynomials and rigged Hilbert spaces, *Quantum Theory and Symmetries with Lie Theory and Its Applications in Physics* Vol. 2. pp. 373 - 383. (Springer Nature) Verlag, 2018.

[7] E. Celeghini, M. Gadella, M.A. del Olmo, Zernike functions, rigged Hilbert spaces, and potential applications, *J. Math. Phys.*, **60**, 083508 (19pp) (2019).

[8] E. Celeghini, M. Gadella, M.A. del Olmo, Groups, Jacobi functions and rigged Hilbert spaces, *J. Math. Phys.*, **61**, 033508 (23pp) (2020).

[9] O. Lechtenberg, G. Zhilin, A new construction of rational electromagnetic knots, *Phys. Lett. A*, **382**, 1528-1533 (2018).

[10] M. Reed, B. Simon, *Functional Analysis* (Academic, New York, 1972).

[11] W. Rudin, *Functional Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1991).

[12] A. Pietsch, *Nuclear Locally Convex Spaces* (Springer, Berlin, 1972).

[13] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions* (Addison-Wesley, Reading, 1966).

[14] L. Hormander, *The Analysis of Partial Differential Equations I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, (Springer, Berlin, 1990).

[15] Vo-Khac-Khoan, *Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Dérivées Partielles* (Vuibert, Paris, 1972).

[16] K. Maurin, *General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups* (Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968).

[17] I.M. Gelfand, N. Vilenkin, *Generalized Functions: Applications to the Harmonic Analysis* (Academic, New York, 1964).

[18] A. Bohm, *The Rigged Hilbert Space and Quantum Mechanics*, Lecture Notes in Physics 78 (Springer: Berlin, 1978).

[19] J.E. Roberts, Rigged Hilbert spaces in quantum mechanics, *Com. Math. Phys.*, **2**, 98-119 (1966).

[20] J. P. Antoine, Dirac formalism and symmetry problems in quantum mechanics. I. General Dirac formalism, *J. Math. Phys.*, **10**, 53-69 (1969).

[21] O. Melsheimer, Rigged Hilbert space formalism as an extended mathematical formalism for quantum systems. I. General theory, *J. Math. Phys.*, **15**, 902-916 (1973).

[22] M. Gadella, F. Gómez, A unified mathematical formalism for the Dirac formulation of quantum mechanics, *Foundations of Physics*, **32**, 815-869 (2002).

[23] M. Gadella, F. Gómez, On the mathematical basis of the Dirac formulation of Quantum Mechanics, *Int. J. Theor. Phys.*, **42**, 2225-2254 (2003).

[24] M. Gadella, F. Gómez, Dirac formulation of Quantum Mechanics: Recent and new results, *Reports on Mathematical Physics*, **59**, 127-143, (2007).

[25] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, (Clarendon, Oxford, 1958).

[26] W.O. Amrein, J.M. Jauch, K.B. Sinha, *Scattering Theory in Quantum Mechanics*, (Benjamin, Reading, Ma, 1977).

[27] J.M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, New York, 1968).

[28] I.E. Antoniou, M. Gadella, Irreversibility, *Resonances and Rigged Hilbert Spaces, Irreversible Quantum Dynamics*, F. Benatti, R. Floreanini (eds). Lecture Notes in Physics, **622**, (Springer, Berlin, 2003), pp. 245-302.

[29] A. Bohm, Decaying states in the rigged Hilbert space formulation of quantum mechanics, J. Math. Phys., **21**,

[30] A. Bohm, M. Gadella, Dirac kets, Gamow Vectors and Gelfand Triplets, Springer Lecture Notes in Physics, 2813D2823 (1979).

[31] O. Civitarese, M. Gadella, Physical and Mathematical Aspects of Gamow States, *Phys. Rep.*, **396**, 41-113 (2004).

[32] I. Antoniou, I. Prigogine, Intrinsic irreversibility and integrability of dynamics, *Physica A*, **192**, 443-464 (1993).

[33] A. Bohm, M. Gadella, P. Kielanowski, Time asymmetric quantum mechanics, *SIGMA*, **7**, 086 (2011).

[34] M. Pollicott, Meromorphic extensions of generalised zeta functions, *Inventiones Mathematicae*, **85**, 147-164 (1986).

[35] I. Antoniou, M. Gadella, Z. Suchanecki, General properties of the Liouville operator, *Int. J. Theor. Phys.*, **37**, 1641-1654 (1998).

[36] N.N. Bogulubov, A.A. Logunov, I.T. Todorov, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*, (Benjamin, Reading, Ma, 1975).

[37] M. Gadella, A RHS for the free radiation field, *J. Math. Phys.*, **26**, 725-727, (1985).

[38] T. Hida, *Stationary Stochastic Process*, (Univ. Press. Princeton U.P, 1970).

[39] E. Celeghini, M. Gadella, M.A. del Olmo, Groups, special functions and rigged Hilbert spaces, *Axioms*, **8**, 89 (40pp) (2019).

[40] E. Celeghini, M. del Olmo, M.A. Velasco, Jacobi polynomials as $SU(2,2)$ unitary irreducible representation, *Integrability, Supersymmetry and Coherent States*, CRM Series in Mathematical Physics, edit by S. Kuru *et al.* (Springer Nature Switzerland AG, Cham, 2019), pp. 267D283.

[41] J. Avery, *Hyperspherical Harmonics and Generalized Sturmians* (Kluwer Academic Publishers, Dordrech, 2002).

[42] J. E. Avery, J. S. Avery *Hyperspherical Harmonics and their Physical Applications* (World Scientific, Singapore 2018).

[43] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1976).

[44] C.N Yang, R.L. Mills, Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, **96**, 191-195 (1954)