



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

El grupo de Poincaré y sus representaciones unitarias:

Las representaciones de espín continuo

Autor: Carles Manuel Martorell Argemí

Tutor/es: Mariano A. del Olmo, María Antonia Lledó, Fernando Gómez-Cubillo

Resumen

En 1939, E. Wigner presentó uno de sus artículos más significativos en el que trataba la clasificación de las partículas relativistas elementales como un problema puramente matemático: un problema de clasificación de representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré. Esta idea motiva el trabajo presente que aborda dos objetivos: estudiar el grupo de Poincaré y obtener la clasificación de sus representaciones; y profundizar en un conjunto de representaciones muy particulares, las representaciones de espín continuo. Estas representaciones fueron desechadas por el mismo Wigner debido a que, aparentemente, no podían relacionarse con ninguna partícula física; no obstante, en la actualidad han adquirido cierta relevancia por su posible relación con las Teorías de Campos.

Índice general

1. Introducción: Origen y caracterización del problema	1
1.1. La conexión entre Teoría de la Relatividad y Teoría de Grupos	2
1.2. Partículas de espín continuo	6
1.3. Esquema del trabajo	8
2. Preliminares matemáticos	11
2.1. Teoría de grupos	12
2.1.1. Primeras definiciones de grupos	12
2.1.2. Subgrupos, clases laterales y subgrupo invariante	13
2.1.3. Comentarios sobre grupos localmente compactos	13
2.2. Teoría de representaciones	14
2.2.1. Definición de representación	14
2.2.2. Lema de Schur	15
2.2.3. Inducción de representaciones. Técnica de Mackey	17
2.3. Grupos de Lie	19
2.3.1. Definición de grupo de Lie	19
2.3.2. Álgebra de Lie	20
2.3.3. Constantes de estructura	22
2.3.4. Operador de Casimir	22

2.4. Grupos matriciales de Lie	23
2.4.1. Definición y primeros ejemplos	23
2.4.2. Representaciones de grupos matriciales	25
2.5. Tres ejemplos de representaciones	26
2.5.1. Grupo $SO(2)$	26
2.5.2. Grupo $SO(3)$	26
2.5.3. Grupo Euclídeo $E(2)$	28
3. Estudio sobre el grupo de Poincaré	33
3.1. Primeras nociones sobre Relatividad Especial	33
3.1.1. El espacio de Minkowski	33
3.1.2. Las transformaciones de Lorentz	36
3.2. Grupo propio de Lorentz	38
3.2.1. Definición y primeras propiedades	38
3.2.2. Construcción del grupo propio de Lorentz	40
3.2.3. Álgebra de Lie del grupo propio de Lorentz	42
3.3. Grupo de Poincaré	43
3.3.1. Definición	43
3.3.2. Álgebra de Lie del grupo de Poincaré	45
3.3.3. Órbitas y grupos pequeños de Poincaré	47
4. Representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré	55
4.1. Comentarios matemáticos	55
4.1.1. Primer y segundo operador de Casimir	55
4.1.2. Representaciones inducidas para el grupo de Poincaré	57
4.2. Representación para partícula másica: órbita de tipo-tiempo	57

4.2.1.	Caracterización de la representación de tipo-tiempo	57
4.2.2.	Forma explícita de la representación de tipo-tiempo	58
4.3.	Representación para partícula de masa nula: órbita de tipo-luz	63
4.3.1.	Caracterización de la representación de tipo-luz	63
4.3.2.	Las simetrías internas: espín y helicidad	66
4.3.3.	Forma explícita de la representación de espín discreto	67
4.3.4.	Forma explícita de la representación de espín infinito	70
4.4.	Otras representaciones: órbita de tipo espacio y órbita degenerada	73
4.4.1.	Representación para partícula taquiónica: órbita de tipo-espacio	73
4.4.2.	Representación del vacío: órbita degenerada	73
5.	Contracción de grupos	75
5.1.	Introducción a la Contracción de Inönü-Wigner	75
5.2.	Contracción de $SO(3)$ en $E(2)$	78
5.2.1.	Interpretación geométrica	78
5.2.2.	La representación de masa nula como límite másico	79
6.	Conclusiones	83

Índice de cuadros

2.1. Clasificación de los grupos pequeños del Grupo Euclídeo y de sus representaciones inducidas	30
3.1. Órbitas asociadas al grupo de Poincaré descritas por su ecuación, forma geométrica e interpretación física.	49
3.2. Grupos pequeños asociados a cada órbita del grupo de Poincaré	51



Índice de figuras

1.1. Representación gráfica de las simetrías internas para dos partículas (con masa no nula y nula, respectivamente) en su sistema de referencia característico.	4
2.1. Órbitas para el espacio de momentos asociado al grupo Euclídeo. Las órbitas toman dos formas, como esferas #1 $p^2 = r^2$ o como órbita degenerada #2	29
3.1. Representación tridimensional de las órbitas para el espacio de momentos asociado al grupo de Poincaré (2 + 1)-dimensional.	48
4.1. Diagrama de representaciones unitarias e irreducibles para los casos a) representaciones másicas, b) representaciones de espín finito y c) espín continuo	65
4.2. Diagrama que representa los dos estados de quiralidad, f_R –dextrógiro– y f_L –levógiro–, para partículas de masa nula que son, a su vez, estados de helicidad bien definida.	69
4.3. Representación visual de la variable “auxiliar” ξ como elemento de \mathbb{S}^1 . El ángulo θ es la parametrización angular de dicha variable.	71
4.4. Visualización de la descomposición de la función de onda de espín continuo como torre de estados de helicidad bien definida.	72
5.1. Representación de la acción de las rotaciones espaciales sobre el plano tangente de la esfera. Imagen extraída de [9]	78

Capítulo 1

Introducción: Origen y caracterización del problema

En 1939, E. Wigner presentó uno de sus artículos más significativos, [39], en el que trataba la clasificación de las partículas elementales relativistas como un problema puramente matemático: un problema de clasificación de representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré. Esta forma de abordar el problema constituía una nueva manera de estudiar la física: reducir problemas físicos a problemas puros de teoría de grupos. No es casual que se considere uno de los primeros éxitos de la física matemática o física teórica.

Esta perspectiva motiva el estudio realizado en este trabajo, el cual plantea dos objetivos: estudiar el grupo de Poincaré y obtener la clasificación de sus representaciones de tal manera que permita clasificar las partículas elementales relativistas; y profundizar en un conjunto de representaciones muy particulares del grupo de Poincaré, las representaciones de espín continuo. Estas representaciones fueron desechadas por el mismo Wigner debido a que, aparentemente, no podían relacionarse con ninguna partícula física; no obstante, en la actualidad han adquirido cierta relevancia por su posible relación con las Teorías de Campos. Conviene notar que este trabajo constituye la continuación del Trabajo de Fin de Grado (TFG) de Matemáticas, *Una introducción a la teoría de representaciones unitarias de grupos localmente compactos*, en el que se trató con profundidad la Teoría de Representaciones de grupos.

En este primer capítulo se introducen los conceptos más relevantes para este trabajo con la intención de presentar una perspectiva general. En §1.1 se ve la relación entre el grupo de Poincaré y las simetrías espacio-temporales partiendo de los principios fundamentales de la Relatividad Especial y la axiomatización de la Mecánica Cuántica. Es decir, a partir de la descripción cuántica de un sistema relativista recuperar de forma natural la estructura de grupo de Poincaré. Esta relación permite abordar el punto clave y también punto de partida del trabajo: la vinculación entre representaciones unitarias e irreducibles del grupo y las partículas elementales. La importancia de esta relación subyace en que establece el puente que permite llevar el problema de la clasificación de partículas a un problema de clasificación de representaciones del grupo de Poincaré.

En §1.2 se introducen las representaciones de espín continuo, cuyo estudio fue desestimado por los motivos ya indicados. En esta sección se establecen las ideas fundamentales que permiten

reinterpretar estas representaciones como límite de representaciones másicas. En §1.3 se realiza un esquema del trabajo.

1.1. La conexión entre Teoría de la Relatividad y Teoría de Grupos

La naturaleza del espacio-tiempo

La naturaleza absoluta del espacio y del tiempo constituye la hipótesis fundamental de la Mecánica Newtoniana. Sin embargo, el conocimiento empírico del mundo físico apunta en otra dirección: desde mediados del siglo XIX se ha puesto de manifiesto una realidad más sofisticada donde espacio y tiempo constituyen una unidad física (el *espacio-tiempo*). Esto conforma el pilar fundamental de la Teoría de la Relatividad de Einstein.

En este texto se restringe el análisis a la **Relatividad Especial**; con mayor precisión, el objeto de estudio será la **partícula libre**¹ en movimiento en el espacio-tiempo vacío. Dentro de este marco, la naturaleza del espacio-tiempo es tal que verifica los dos principios fundamentales de la Relatividad: i) que la velocidad de la luz en el vacío es constante para todo sistema inercial de referencia, ii) las leyes físicas deben ser equivalentes para todos los sistemas inerciales de referencia. Geométricamente, estos principios se pueden reinterpretar como leyes de simetría en el espacio de Minkowski (espacio plano \mathbb{R}^4 con métrica lorentziana). Es decir, estableciendo que todos los puntos del espacio-tiempo son equivalentes desde el punto de vista físico, unos respecto a otros (simetría de traslación, o propiedad de *homogeneidad*); que todas las direcciones espacio-temporales son iguales, sin que exista una dirección privilegiada (simetría de rotación, tanto espacial como espacio-temporal *-boost de Lorentz-*, o propiedad de *isotropía*). Estas propiedades se engloban bajo el nombre de simetrías espacio-temporales, y establecen la noción fundamental del trabajo. No obstante, antes de tratar la forma de estas conviene puntualizar qué se entiende por simetría.

Simetrías en Mecánica Cuántica

El estado físico de un sistema cuántico queda descrito por una función de onda ψ . El conjunto de estados físicos del sistema generan un espacio lineal, un espacio de Hilbert \mathcal{H} complejo, equipado con un producto interno $\langle \phi, \psi \rangle$. Este estado físico se suele tomar normalizado, es decir, $\langle \psi, \psi \rangle = 1$. Esto equivale a tomar la proyección en forma de *rayos* sobre el espacio de Hilbert de tal manera que toda función de onda ϕ que se diferencie por producto por una constante, como $\phi = \alpha\psi$, representa el mismo estado físico; es decir, ϕ y ψ pertenecen al mismo rayo. El estado físico se asocia a este rayo [36].

Una **simetría** es una transformación del estado del sistema, de su función de onda, que no cambia la naturaleza física de este. Se puede entender como un cambio de punto de vista de tal manera que las leyes de la naturaleza no cambian bajo la transformación [37]. Un ejemplo de ello son las rotaciones o traslaciones del sistema de referencia: para la partícula libre, la física

¹Entendiéndose por partícula libre aquel sistema físico sobre el cual no actúa ninguna fuerza externa significativa para el observador.

debe ser la misma si se considera la partícula bajo cualquier sistema de referencia. En particular, las probabilidades de transición del sistema físico no cambian: si $\{\phi_n\}$ es el conjunto de posibles resultados experimentales para el sistema, entonces

$$\mathcal{P}(\phi \longrightarrow \phi_n) = \mathcal{P}(\phi' \longrightarrow \phi'_n) \text{ que se expresa como } \langle \phi, \phi_n \rangle = \langle \phi', \phi'_n \rangle \quad (1.1)$$

donde la tilde ($'$) denota la función de onda transformada.

De este modo, las transformaciones de simetría actúan como operadores sobre el espacio de funciones de onda enviando estados del sistema en estados del sistema: si T representa la transformación de simetría tal que $\psi \xrightarrow{T} \psi'$, entonces se puede encontrar un operador $U(T)$ sobre \mathcal{H} que verifique

$$U(T)\psi = \psi' \quad (1.2)$$

La exigencia de preservar la condición (1.1) limita la naturaleza del operador: el operador debe ser i) o unitario y lineal o ii) antiunitario y antilineal². Este resultado se conoce en la literatura [36] como **Teorema de Wigner**. El conjunto de todas las transformaciones de simetría del sistema físico, denotado por \mathcal{T} , tiene estructura de grupo; esta estructura se manifiesta en los operadores de la siguiente manera,

$$U(T_1)U(T_2) = e^{i\omega(T_2, T_1)}U(T_1T_2)$$

donde T_1 y T_2 son transformaciones de \mathcal{T} y ω es un parámetro real vinculado a ambas transformaciones (es más, $\omega : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ como función es llamado *sistema de factores*). De aquí se puede diferenciar entre,

1. Si $\omega = 0$, entonces los operadores heredan la estructura de grupo de las transformaciones. Se dice entonces que se tiene una **representación**.
2. Si $\omega \neq 0$, existe una fase que difiere de la unidad. Se habla entonces de **representación proyectiva** o representación salvo factor multiplicativo.

En este texto se restringe el trabajo a representaciones del tipo 1. Conviene notar que el segundo tipo aparecen en la forma de representación simple/doble-evaluada, verificando $U(T_1)U(T_2) = \pm U(T_1T_2)$, en el estudio del grupo de Lorentz (fruto del recubrimiento universal del grupo). Sin embargo, no se incidirá demasiado en ello.

Simetrías en Relatividad Especial y su conexión con el Grupo de Poincaré

En el marco de la Relatividad Especial, la invarianza espacio-temporal de las leyes físicas da lugar a una simetría entre sistemas de coordenadas. En particular, si la función de onda ψ describe una partícula libre relativista, entonces existirá una correspondencia entre todas las funciones de onda que describen el mismo estado en diferentes sistemas de referencia lorentzianos. Por tanto, si O es el sistema de referencia inicial, y O' otro sistema de referencia,

$$\begin{array}{ccc} O & \xrightarrow{T} & O' \\ \psi & \longmapsto & \psi' = U(T)\psi \end{array} \quad (1.3)$$

²En Mecánica Cuántica se suele trabajar con operadores unitarios; no obstante, existen operadores antiunitarios y antilineales, como ejemplo, los operadores vinculados a las transformaciones de Paridad e Inversión Temporal

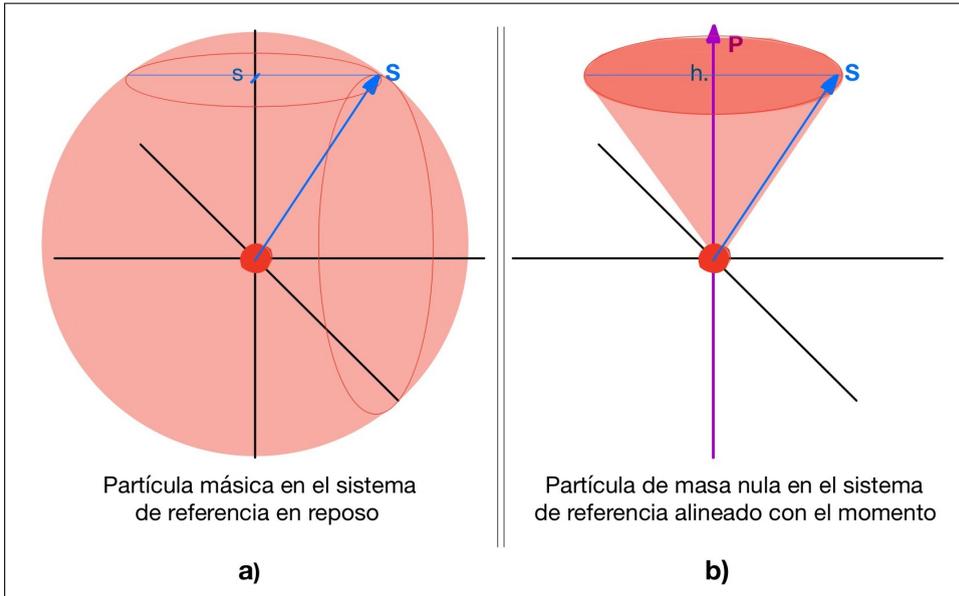


Figura 1.1: Representación gráfica de las simetrías internas para dos partículas (con masa no nula y nula, respectivamente) en su sistema de referencia característico. En a), el vector \mathbf{S} denota el momento angular intrínseco; la proyección sobre el eje vertical se denota por s , espín. El grupo de simetrías de \mathbf{S} es el grupo de rotaciones en el espacio, $SO(3)$, representado por la esfera roja. En b), el vector \mathbf{P} denota el momento lineal de la partícula (tipo-luz). La proyección de \mathbf{S} sobre \mathbf{P} se denota por h , helicidad. El grupo de simetrías es el grupo de rotaciones en el plano (en torno a \mathbf{P}), $SO(2)$, representado por el cono rojo.

La condición (1.1) se debe verificar puesto que la descripción física del sistema no puede depender del sistema de referencia. De este modo, a través del Teorema de Wigner, se concluye que el conjunto de transformaciones que conectan distintos sistemas de coordenadas, las transformaciones espacio-temporales, forman un grupo. Este grupo es el **Grupo de Poincaré** o **grupo inhomogéneo de Lorentz**.

El punto principal y más importante del trabajo es la **vinculación de las representaciones del grupo de Poincaré con las partículas elementales relativistas**. Una primera aproximación, para asentar ideas, se basa en las siguientes consideraciones: i) fijado un estado inicial para una partícula libre, este estado se puede asociar con cualquier otro estado de la partícula relacionado por una transformación del grupo de Poincaré; ii) para dicha partícula, existen parámetros invariantes bajos las transformaciones anteriores que permiten caracterizar a la partícula (y a la representación).

En particular, el estado de una **partícula másica** (esto es, con masa en reposo no nula) puede siempre relacionarse con el estado donde la partícula está en reposo. Para esta partícula existen dos invariantes: uno másico (es decir, la masa en reposo; pues siempre se puede relacionar el estado de la partícula con dicho estado en reposo), y otro de espín (relacionado con las simetrías de rotación –en el espacio– del momento angular intrínseco de la partícula, ver Figura 1.1.a). Masa y espín caracterizan a la representación asociada. En efecto, la representación que transforma estados de una partícula de masa m y espín s , cada uno visto en un sistema de referencia distinto, está caracterizada por dichos parámetros. Otro ejemplo interesante es el caso de **partículas de masa nula**, para las que no existe transformación tal que deje a la partícula en reposo, pues su velocidad es la de la luz.

En este caso solo se podrá asociar con un sistema de referencia que siga la dirección de traslación de la partícula. En este sistema de referencia, las simetrías relacionadas con el momento angular intrínseco tomarán la forma de rotación en torno al eje de movimiento, distinguiéndose así del caso de partícula másica³ (ver Figura 1.1.b). Estas restricciones obligan a la representación asociada a tomar una forma totalmente diferente en comparación con las representaciones de partículas másicas. Se concluye que cada partícula libre relativista estará asociada con una representación del grupo de Poincaré que la caracteriza en la transformación.

Con las consideraciones anteriores se puede dar un razonamiento quizá más matemático. Siguiendo los razonamientos de Weinberg [36, §2.5], una partícula libre relativista con función de onda $\psi_{p,\sigma}$ está caracterizada por su cuádrimomento p y un índice σ que denota la simetría interna de la partícula (p. ej. el espín), que además, se asume como discreto (quizá infinito). La acción de una transformación T del grupo de Poincaré se puede escribir como combinación lineal de estados transformados $\psi_{p'\sigma'}$,

$$U(T)\psi_{p\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma\sigma'}(T)\psi_{p'\sigma'} \quad (1.4)$$

donde p' no es más que la transformación del cuádrivector bajo el cambio de sistema de referencia, y $D_{\sigma\sigma'}$ los elementos de matriz de la transformación de índices. A través de una sutil combinación lineal de $\psi_{p\sigma}$ se pueden escoger los índices σ de tal manera que la matriz $D_{\sigma\sigma'}$ diagonalice en bloques, donde cada bloque corresponde a una representación irreducible de $U(T)$. De manera natural se identifica los estados de la partícula con las componentes de estas representaciones irreducibles.

El párrafo anterior permite definir la noción de **partícula elemental** relativista como aquella que se identifica con una representación irreducible y unitaria del grupo de Poincaré. Se concluye así con el punto fundamental: la clasificación de las representaciones unitarias e irreducibles del grupo permiten clasificar también las partículas elementales; resultado conocido como **programa de Bargmann-Wigner** en referencia al artículo conjunto de V. Bargmann y E. P. Wigner [1]. Insistiendo en esta idea, la relación entre representación unitaria e irreducible y partícula elemental permite reescribir el problema de clasificar las partículas elementales como un problema puramente matemático, como problema de teoría de grupos, que equivale a la clasificación de las representaciones del grupo inhomogéneo de Lorentz.

Todo ello se puede resumir del modo siguiente: «por un lado, las leyes de la Mecánica Cuántica implican que las simetrías cuánticas se correspondan con representaciones unitarias del grupo de simetría asociado al espacio de Hilbert de estados físicos. Es más, si las traslaciones temporales son subgrupo uniparamétrico del grupo de simetría, entonces la ecuación de Schrödinger es básicamente una representación unitaria de dicho grupo. Por otro lado, el principio de relatividad dicta que toda isometría del espacio-tiempo sea simetría del sistema físico. Todo junto, esto implica que las ecuaciones de onda relativistas y lineales puedan ser identificadas con representaciones unitarias del grupo de isometría» [3].

³En este caso, el parámetro asociado a esta simetría se conoce por helicidad, distinguiéndolo del espín.

1.2. Partículas de espín continuo

Clasificación de las representaciones del grupo de Poincaré

El estudio del grupo de Poincaré y la clasificación de sus representaciones unitarias e irreducibles fue llevado a cabo por E. Wigner en 1939 en el artículo [39]. Este trabajo mostró que solo existen cuatro tipos de representaciones unitarias e irreducibles del grupo. Estas representaciones se denotan como:

1. **Representaciones másicas** asociadas a la órbita de tipo-tiempo, cuyo grupo pequeño es $SO(3)$.
2. **Representaciones de masa nula** asociadas a la órbita de tipo-luz, cuyo grupo pequeño es el grupo euclídeo $E(2)$. Debido a la estructura interna de este grupo, se dividen a su vez en dos tipos de representaciones:
 - a) **Representaciones de espín finito**, inducidas por el subgrupo $SO(2)$ de $E(2)$.
 - b) **Representaciones de espín continuo**, inducidas por todo $E(2)$.
3. **Representaciones taquiónicas** asociadas a la órbita de tipo-espacio, cuyo grupo pequeño es el grupo propio de Lorentz de dimensión 3, $SO^+(1, 2)$.
4. **Representaciones** asociadas a la **órbita degenerada**, $\{0\}$. El grupo pequeño es el grupo propio de Lorentz $SO^+(1, 3)$.

Dos de ellas describen partículas másicas y sin masa con espín y helicidad bien definida, 1. y 2.a respectivamente. Sin embargo, la Naturaleza no parece utilizar las otras dos tipologías⁴: una describe partículas con momento de tipo-espacio, es decir, taquiones que se mueven más rápido que la luz, y la otra representación que describe partículas sin masa y con un número infinito de estados de helicidad (2.b) [15]. Estas últimas estarán en el foco de atención de este trabajo.

Definición y propiedades exóticas

Bajo una perspectiva matemática, las representaciones de espín continuo surgen de manera natural del estudio del grupo de Poincaré, asociadas a las órbitas de cuadrimento de tipo-luz. Están caracterizadas por dos parámetros (invariantes): la masa, que toma un valor nulo $m = 0$; y una constante Θ que toma valores en los números reales positivos (y tal que para $\Theta = 0$ se obtiene las representaciones de masa nula con espín finito –vinculadas a partículas sin masa, como el fotón–). No obstante, las partículas de espín continuo, asociadas a estas representaciones, han sido desechadas en la literatura debido a dos **propiedades “exóticas”** [2]:

1. Se caracterizan por un parámetro continuo, Θ , con dimensión de masa a pesar de ser partículas de masa nula.

⁴Las representaciones de órbita degenerada se asocian con el vacío y no representan estados de partícula elemental, por ello, no se tienen en cuenta.

2. Poseen infinitos grados de libertad por punto espacio-temporal.

La primera propiedad es el origen del (malogrado) nombre de *espín continuo*. Ciertamente, el espín de la partícula (realmente, la helicidad) toma valores discretos pero no acotados; por tanto, no es continuo, pero sí infinito. Este fenómeno explica la segunda propiedad. Con mayor precisión, se puede describir esta partícula como una torre infinita (pero numerable) de estados con helicidad bien definida, que son mezclados por transformaciones de Lorentz. Bajo esta perspectiva, la onda asociada para dicha partícula se corresponde en cada punto como una suma infinita de ondas de helicidad definida (i.e. infinitos grados de libertad).

En conclusión, el estudio de estas representaciones ha sido relegado a un segundo plano debido al poco interés que suscitaba. Las partículas asociadas, de espín continuo, fueron rechazadas del elenco de partículas físicas presentes en la Naturaleza. Sin embargo, el estudio profundo de las nuevas Teorías de Cuerdas, Supercuerdas o Teoría M han devuelto el interés entorno a estas representaciones [4], [30], [31], [32]. Conviene notar que estas teorías necesitan del estudio de la dinámica de partículas de espín elevado, y de su interacción [29]; las representaciones de espín continuo se presentan, en este contexto, como límite de representaciones de espín finito. En definitiva, estas representaciones toman un papel importante como herramienta de estudio de interacciones de espín elevado.

La reinterpretación de las representaciones de espín continuo como caso límite de representaciones másicas motiva su estudio en este trabajo. La intención será buscar el contenido físico de estas como caso límite de partículas másicas y espín elevado.

Partículas de espín continuo como límite masa-espín

La manera usual de construir las representaciones de masa nula, que engloba tanto las representaciones de espín continuo como las representaciones de espín finito, consiste en relacionarlas con las representaciones másicas como caso límite de estas. Desde una perspectiva matemática, la construcción de este límite se da bajo el **mecanismo de contracción de grupos** (es decir, como proceso que lleva al grupo pequeño de las representaciones másicas al grupo pequeño de representaciones de masa nula), introducido en 1953 por E. Wigner y E. Inönü [14]. Físicamente, la contracción se da como límite de masa nula de tal manera que:

1. Para una representación de masa m y espín s , el límite $m \mapsto 0$ permite obtener la **representación de espín finito**.
2. Para una representación de masa m y espín s , bajo el doble límite $m \mapsto 0$, $s \mapsto \infty$ y $ms \mapsto \Theta \neq 0$ se obtiene una **representación de espín continuo** (con parámetros $m = 0, \Theta$).

Esta conexión, vía proceso contractivo, permite establecer una nueva perspectiva para las representaciones de espín continuo. Por un lado, permite reinterpretar el contenido físico de la representación: se establece la **partícula de espín continuo como límite de partículas másicas energéticas** ($E \gg m$) y de **espín elevado** ($s \gg 1$). Por otro lado, permite construir la ecuación de onda de espín continuo a partir de ecuaciones de onda másicas (vía la construcción de Kaluza-Klein

[15]). Esta construcción ofrece una descripción de la partícula como **torre infinita de estados de helicidad bien definida**, donde Θ queda como constante de acoplamiento entre los distintos estados de helicidad [3].

1.3. Esquema del trabajo

Una vez introducido y caracterizado el problema en las secciones anteriores queda señalar el esquema a abordar para este trabajo. De primera mano, se plantean dos objetivos, estos son:

- Estudiar el grupo de Poincaré y obtener la clasificación de sus representaciones unitarias e irreducibles de tal manera que se pueda obtener una clasificación de las partículas elementales relativistas. Además, dar la ecuación de onda de dichas partículas.
- Estudiar las representaciones de espín continuo con la intención de entender su posición actual en la física moderna, así como ver su contenido físico a través de la contracción de grupos.

Para ello el esquema de trabajo se estructura de la siguiente manera:

1. En el capítulo §2 *Preliminares matemáticos*, se establece la base matemática para abordar los capítulos siguientes. Esto es, la introducción de la Teoría de Grupos y la Teoría de Representaciones (primera y segunda sección), estudio de grupos de Lie y grupos matriciales de Lie (cuarta y quinta sección), y la introducción de tres ejemplos de representaciones: representaciones del grupo $SO(2)$, $SO(3)$ y del euclídeo $E(2)$. Esta última sección es fundamental ya que dos de los grupos tratados ($SO(3)$ y $E(2)$) toman el papel de grupo pequeño para el grupo de Poincaré (representaciones másicas y de masa nula, respectivamente). Este capítulo es un resumen del TFG de Matemáticas, en el cual se trataba con mayor profundidad estos aspectos teóricos.
2. En el capítulo §3 *Estudio sobre el grupo del Poincaré*, se estudia con detalle el grupo inhomogéneo de Lorentz. En una primera sección se introduce las nociones fundamentales de Relatividad Especial, como es el espacio de Minkowski o las transformaciones de Lorentz que permitirán, a su vez, fijar la notación utilizada. En la segunda sección, se describe el grupo propio de Lorentz, o grupo homogéneo. Este grupo está asociado con las simetrías, sin considerar traslaciones espacio-temporales, del espacio de Minkowski. La tercera sección profundiza en el caso general, el grupo de Poincaré.
3. El capítulo §4 *Representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré* está dividido en cuatro secciones: en la primera se introduce la definición de primer y segundo operador de Casimir; en las tres siguientes se estudia paso a paso las representaciones másicas, de masa nula y las asociadas a la órbita de tipo-espacio y órbita degenerada. Para las representaciones másicas y de masa nula se añade la obtención de las ecuaciones de onda asociadas a cada tipo de representación.
4. En el capítulo §5 *Contracción de grupos* se introduce la contracción de Inönü-Wigner con la intención de estudiar la vinculación entre las representaciones de espín continuo con las

representaciones másicas a través del doble límite masa-espín. Este capítulo establece el marco teórico que respalda dicha relación; además, concede una nueva perspectiva física a las representaciones de espín continuo.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

La intención de este capítulo es introducir todos los conceptos matemáticos antes de abordar el estudio en profundidad del grupo de Poincaré y sus implicaciones físicas. Se presenta como resumen del contenido ya tratado en el TFG de Matemáticas [24].

La primera sección introduce los elementos básicos de la teoría de grupos, notas que se apoyan en el texto de Humphreys [13]. En el último apartado se discute la definición de grupo localmente compacto, siendo este la forma más general de introducir la teoría de representaciones. Esta parte está apoyada principalmente en el texto de Folland [6] y en el de Varadarajan [35].

En la segunda sección se establecen las primeras definiciones de la Teoría de Representaciones así como sus resultados principales (como son los Lemmas de Schur). En el último apartado se esboza la técnica de representaciones inducidas y se introduce el Método de Mackey que es el elemento clave a la hora de abordar la clasificación de las representaciones del grupo de Poincaré. Los dos primeros apartados se apoyan en las notas de Tung [34]. El apartado de inducción está basado en el texto de Folland [6].

En la tercera y cuarta sección se tratan, respectivamente, los grupos de Lie y los grupos matriciales de Lie. Conviene notar que estos últimos son los grupos más comunes en el ámbito de la Física (grupo de rotaciones en el espacio o en el plano, grupo de Lorentz, etc.). Los libros de referencia son el texto de Gilmore [9], el texto de Hall [11] y el de Lee [19].

En la última sección se exponen tres ejemplos de grupos y sus respectivas representaciones unitarias e irreducibles: $SO(2)$, $SO(3)$ y grupo Euclídeo $E(2)$. Los dos últimos tomarán el papel de grupo pequeño para las órbitas másicas y de masa nula, respectivamente, del grupo de Poincaré.

2.1. Teoría de grupos

2.1.1. Primeras definiciones de grupos

Definición 2.1.1. Un conjunto G es **grupo** si existe una operación de grupo $G \times G \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto xy$, llamada **producto**, tal que

- a) Es **asociativo**: es decir, se verifica $x(yz) = (xy)z$, para toda terna x, y, z de elementos del grupo.
- b) Hay elemento **identidad**: existe un elemento e del grupo tal que $ex = xe = x$ para todo $x \in G$.
- c) Hay **inverso**: para todo elemento x del grupo existe un elemento x^{-1} tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

El **orden** del grupo G es el número de elementos que contiene, que puede ser tanto finito como infinito. Se dice que el grupo es **abeliano** o **conmutativo** si se verifica que $xy = yx$ para cualquier par de elementos $x, y \in G$.

Por otro lado, se define un **homomorfismo** de grupos como una aplicación $f : G \longrightarrow H$ entre dos grupos tal que respeta el producto de grupo, es decir, $f(xy) = f(x)f(y)$. Además, se dice que los dos grupos son **isomorfos** si el homomorfismo es biyectivo.

En este texto, los grupos tratados serán grupos de Lie, grupos infinitos cuyas operaciones del grupo son diferenciables (la diferenciabilidad se consigue dándole al grupo una estructura de variedad diferenciable –como se verá en §2.3–). A continuación se introducen dos ejemplos de grupos (de Lie) que tendrán un interés en el desarrollo posterior del trabajo: el grupo de rotaciones en el plano y el grupo de traslaciones.

Ejemplo 2.1.2 (Rotaciones en el plano. Grupo $SO(2)$). Un grupo muy sencillo y de gran interés es el grupo vinculado a las rotaciones en el plano, denotado por $SO(2)$. Este grupo se puede escribir como

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ con } \theta \in [0, 2\pi), \quad (2.1)$$

es decir, como una matriz de rotación en el plano. La operación del grupo está dada como producto matricial verificándose $R(\theta)R(\phi) = R(\theta + \phi)$. El elemento identidad es $R(0) = I$, matriz identidad. Y el inverso está dado como $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$. Es, además, grupo abeliano.

Ejemplo 2.1.3 (Grupo de traslaciones). Sobre el espacio afín \mathbb{R}^n se considera un punto fijo \mathbf{x}_0 . Una traslación por el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se escribe como $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}$. Si se traslada nuevamente por \mathbf{w} , se tiene $\mathbf{x}''_0 = \mathbf{x}'_0 + \mathbf{w} = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$; no es más que la traslación del punto inicial por el vector $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

Se concluye que el conjunto de traslaciones en \mathbb{R}^n forma un grupo dado por la suma de vectores n -dimensionales. Se relaciona con el grupo aditivo (y abeliano) $(\mathbb{R}^n, +)$. Este grupo tendrá un papel fundamental dentro del grupo de Poincaré y grupo Euclídeo.

2.1.2. Subgrupos, clases laterales y subgrupo invariante

Definición 2.1.4. Se dice que un subconjunto H del grupo G es **subgrupo de G** si la restricción del producto del grupo al subconjunto H verifica los axiomas de grupo (Definición 2.1.1).

Dado un subgrupo H del grupo G y $x \in G$, se define la **clase lateral por izquierda** (o derecha) de H al conjunto

$$xH = \{xh : h \in H\} \text{ (respectivamente, } Hx = \{hx : h \in H\}) \quad (2.2)$$

Dos clases laterales son o iguales o disjuntas; es más, determinan una partición del grupo G .

Por otro lado, se dice que un subgrupo H de G es **normal** a G si verifica: $x^{-1}hx \in H$ para $h \in H$ y cualquier $x \in G$. Para los subgrupos normales las clases laterales por izquierda y por derecha coinciden. Es más, el conjunto de clases laterales por izquierda (o por derecha) forman un grupo bajo la operación $(xH)(yH) = (xyH)$. Es decir, para todo elemento xh_1 y yh_2 para las clases laterales, $xh_1yh_2 = xyy^{-1}h_1yh_2 = xyh$ que pertenece a (xhH) . De este modo, se tiene un mecanismo para construir nuevos grupos a través del cociente por subgrupos normales. Este resultado es un punto fundamental para el desarrollo de la teoría de representaciones (en particular para la inducción de representaciones).

2.1.3. Comentarios sobre grupos localmente compactos

Antes de introducir la teoría de representaciones se hace una pausa necesaria para discutir la idea de *grupo localmente compacto*. En la bibliografía más matemática se construye toda la teoría de representaciones en torno a este tipo de grupos¹. ¿Por qué? La respuesta recae en considerar el grupo más general que permita construir una teoría de representaciones. Para el caso de grupos finitos no se encuentra ningún problema, pero sin embargo, cuando se consideran grupos infinitos se hace necesario pedirle una estructura topológica (localmente compacto).

Entrando en detalle, bajo la premisa de introducir nociones (aun no tratadas, pero que serán estudiadas con detalle más adelante) de la teoría de representaciones, se puede asegurar que:

1. Para un grupo finito siempre se puede encontrar una representación irreducible y unitaria. Se escoge una representación finito-dimensional (p. ej. la representación regular [34, §3.7]): por un lado, si la matriz de representación es reducible, se restringe a un subespacio que haga de la representación irreducible; por otro lado, toda representación puede hacerse unitaria (es posible construir un producto interno tal que haga unitaria la representación [34, Th. 3.3]).
2. Para un grupo de Lie, como ejemplo de grupo infinito (como es el caso del grupo Euclídeo o el grupo de Poincaré), no se puede garantizar que las representaciones unitarias e irreducibles sean finito-dimensionales. Es más, la construcción de representaciones unitarias no es trivial y necesita de la definición de una medida (una integral sobre el grupo) que sea invariante bajo la acción del grupo.

¹Véase las referencias mencionadas en la introducción del capítulo, [6] o [35].

Los detalles previos hacen necesario que al considerar el grupo más general para definir la teoría de representaciones se exija una estructura que permita hablar de continuidad (espacio topológico) y de tal manera que permita construir una medida invariante (conocida como medida de Haar), esto es, pedir que el espacio topológico sea localmente compacto.

Históricamente este estudio fue llevado a cabo, de manera general, por Mackey [21, 22, 23]. Los detalles están tratados en el TFG de Matemáticas; los textos de referencia son el texto de Deitmar [5], Folland [6] y Varadarajan [35]. A continuación se dan las dos definiciones básicas para cerrar el apartado.

Definición 2.1.5. Un **grupo topológico** es un grupo G equipado con una topología bajo la cual las operaciones del grupo son continuas. Estas operaciones son

$$G \times G \longrightarrow G : (x, y) \longmapsto xy$$

$$G \longrightarrow G : x \longmapsto x^{-1}$$

Un grupo **localmente compacto** es un grupo topológico cuyo espacio topológico asociado es localmente compacto; es decir, si para todo punto $x \in G$ existe un $K \subset V$ compacto que contenga un entorno del punto.

2.2. Teoría de representaciones

2.2.1. Definición de representación

Definición 2.2.1. Sea G un grupo, \mathcal{H} espacio de Hilbert y $U(\mathcal{H})$ espacio de operadores lineales sobre el espacio de Hilbert. Una **representación** del grupo es un homomorfismo $\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$, esto es, $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$ para cualquier $x, y \in G$.

Al espacio de Hilbert \mathcal{H} se le conoce como **espacio de representación** del grupo. Por otro lado, se llama **dimensión de la representación** a la dimensión del espacio de Hilbert, no necesariamente finita. Además, se dice que la representación es **fiel** si el homomorfismo π es inyectivo, si no, se dice que es **degenerada**.

Ejemplo 2.2.2 (Representación del grupo $SO(2)$). El grupo $SO(2)$ se ha definido en el Ejemplo 2.1.2 en su forma matricial, como rotación en el plano. Sin embargo, esto no es más que una representación del grupo. En efecto, bajo esta representación el grupo $SO(2)$ actúa como un operador de rotación sobre el espacio \mathbb{R}^2 .

Este ejemplo permite dar una idea de la relación entre grupo y representación del grupo: el grupo es un conjunto abstracto de elementos con ciertas propiedades (p. ej. $SO(2)$); una representación

del grupo no es más que una manera de escribir o *representar* el grupo sobre un espacio vectorial o Hilbert (en el ejemplo, el conjunto de rotaciones en el plano).

Dos representaciones π y π' son **equivalentes** si existe un operador S sobre el espacio de representación tal que

$$\pi'(x) = S\pi(x)S^{-1}, \text{ para todo } x \in G$$

Se puede dar la siguiente interpretación: dos representaciones equivalentes son la misma representación en distinta base del espacio, siendo S el cambio de base. La transformación que lleva una representación π a otra $S\pi S^{-1}$ se llama **transformación de semejanza**.

Definición 2.2.3.

- Sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ subespacio cerrado. Se dice que \mathcal{M} es **subespacio invariante respecto a π** si para todo $x \in G$ se tiene $\pi(x)(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Además, se dice que \mathcal{M} es **irreducible** o **propio** si no posee subespacios invariantes, no triviales, respecto a π .
- Una representación π sobre \mathcal{H} es **reducible** si admite un subespacio invariante $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ no trivial. Si no, se dice que la representación es **irreducible**.

La restricción de la representación π a un subespacio invariante $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ se conoce como **subrepresentación** y se denota como $\pi^{\mathcal{M}}$, esto es,

$$\pi^{\mathcal{M}} : G \longrightarrow U(\mathcal{M}) \text{ y tal que } \pi^{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}} \text{ para } x \in G$$

Se dice que la representación es **unitaria** si el operador $\pi(x)$ es unitario en \mathcal{H} para todo $x \in G$. Esto es, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno del espacio de Hilbert, entonces

$$\langle \pi(x)u, \pi(x)v \rangle = \langle u, v \rangle, \text{ para } u, v \in \mathcal{H} \text{ y } \forall x \in G$$

Si para cada subespacio invariante \mathcal{M} , respecto a la representación, el complemento ortogonal de \mathcal{M} es también espacio invariante entonces se dice que la representación es **completamente reducible**. Para representaciones unitarias, se verifica que toda representación reducible lo es completamente.

2.2.2. Lema de Schur

Los resultados más importantes de la teoría son los llamados *lemas de Schur*, que ofrecen una potente herramienta para caracterizar representaciones irreducibles y unitarias.

Teorema 2.2.4 (Lemas de Schur).

1. Sea π representación irreducible y unitaria del grupo G sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} y sea A operador arbitrario sobre el espacio de Hilbert. Si el operador A conmuta con todos los operadores $\pi(g)$, $\forall g \in G$, es decir $A\pi(g) = \pi(g)A$, entonces A es un múltiplo de la identidad, $A = \lambda \text{Id}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Sea π, π' dos representaciones unitarias e irreducibles del grupo G con espacios de representación $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$, respectivamente. Sea $A : \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}$ transformación lineal tal que $A\pi'(g) = \pi(g)A$, $\forall g \in G$. Entonces, o (i) $A = 0$ o (ii) \mathcal{H} y \mathcal{H}' son isomorfos y ambas representaciones son equivalentes.

Una consecuencia inmediata del teorema se da en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.5. *Las representaciones unitarias e irreducibles de los grupos abelianos son unidimensionales.*

Ejemplo 2.2.6 (Representaciones irreducibles de las traslaciones). En este primer ejemplo se escoge el grupo de traslaciones sobre la recta real, asociado con el grupo abeliano $(\mathbb{R}, +)$. Por el corolario anterior, sus representaciones irreducibles y unitarias deben ser unidimensionales.

Una manera sencilla de definir una representación es tomar la función

$$\xi(x) = e^{i\xi x}, \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}$. En efecto, esta aplicación $\xi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (T, \times)$ es homomorfismo de grupos, donde $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Esta representación unitaria e irreducible recibe el nombre de **carácter** del grupo.

El punto interesante está en que se puede definir una operación natural para estos caracteres; es decir, si $\xi, \chi \in \mathbb{R}$ la suma está bien definido pues $e^{i(\xi+\chi)x} = e^{i\xi x} e^{i\chi x}$, y por tanto, $\xi(x)\chi(x) = (\xi + \chi)(x)$. Esto permite construir un grupo sobre los caracteres; es más, este grupo es, ni más ni menos, que $(\mathbb{R}, +)$. La construcción del grupo de caracteres no es algo casual, es un resultado compartido por todos los grupos abelianos. Este conjunto de caracteres recibe el nombre de **grupo dual** y es abeliano.

De manera natural se puede extender este resultado al grupo de traslaciones de \mathbb{R}^n , denotado por $(\mathbb{R}^n, +)$. El grupo dual es $(\mathbb{R}^n, +)$ y los caracteres se escriben como

$$\xi(x) = e^{i\xi x}, \text{ con } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

Comentario 2.2.7 (Grupo dual de un grupo abeliano). Sea G grupo abeliano (y de manera general, grupo localmente compacto). Entonces, se denota por \hat{G} al **grupo dual** cuyos elementos son los caracteres del grupo G , es decir, sus representaciones unitarias e irreducibles. Los caracteres se suelen denotar como $\xi \in \hat{G}$ y la evaluación como

$$\langle x, \xi \rangle \equiv \xi(x), \text{ para } x \in G \tag{2.4}$$

El estudio de los caracteres es el tema principal de la teoría de grupos abelianos. Una consecuencia inmediata de la teoría es la generalización de la transformada de Fourier que permite relacionar funciones sobre el grupo con funciones sobre el grupo dual. El texto de referencia es el libro de Deitmar [5].

2.2.3. Inducción de representaciones. Técnica de Mackey

La obtención de representaciones para grupos que no son ni compactos ni abelianos no suele ser algo sencillo o evidente, prueba de ello es la clasificación de las representaciones del grupo de Poincaré, o del grupo Euclídeo. Una manera de obtener estas representaciones es inducir las a través de representaciones unitarias e irreducibles de subgrupos. En esta subsección se introducirá escuetamente los resultados necesarios para tratar el grupo euclídeo y el grupo de Poincaré. Un estudio más profundo, para grupos localmente compactos se puede ver en los textos de Folland [6, §6] o de Varadarajan [35, §6].

El **mecanismo de inducción** se basa en la *extensión* de representaciones unitarias e irreducibles de un subgrupo $H \subset G$ a todo el grupo G . En detalle, para $\sigma : H \rightarrow \mathcal{H}_\sigma$ representación unitaria e irreducible de H (con \mathcal{H}_σ es el espacio de representación de σ), se construye un espacio de funciones continuas de soporte compacto sobre el grupo G , \mathcal{F}_0 , y tal que las funciones verifican $f(x\xi) = \sigma^{-1}(\xi)f(x)$ para $x \in G$ y $\xi \in H$. Entonces, la acción natural del grupo G sobre \mathcal{F}_0 está dada por

$$L : G \rightarrow U(\mathcal{F}_0) : [L(x)f](y) = f(x^{-1}y) \text{ para } x, y \in G. \quad (2.5)$$

Se puede construir un producto interno en este espacio de tal manera que la traslación anterior sea unitaria. Entonces, la extensión (o *compleción*) $\mathcal{F}_0 \mapsto \mathcal{F}$ a un espacio de Hilbert lleva consigo una extensión de la traslación a una representación (ahora sí) unitaria del grupo G sobre \mathcal{F} . Esta representación recibe el nombre de **representación inducida** y se denota por $\text{Ind}(\sigma)$.

Método de Mackey

El **método de Mackey** no es más que la aplicación del mecanismo de inducción sobre un tipo de grupo muy particular, el producto semidirecto, de tal manera que se puede garantizar una obtención completa de las representaciones irreducibles del grupo vía inducción.

Definición 2.2.8. Un grupo topológico G se dice que es **producto semidirecto** de N y H subgrupos cerrados, si N es normal en G y la aplicación $N \times H \rightarrow G : (n, h) \mapsto nh$ es un homeomorfismo. Se denota como

$$G = N \rtimes H.$$

De este modo, cada elemento de G puede escribirse de forma única como nh y la ley del grupo toma la forma de

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1[h_1n_2h_1^{-1}], h_1h_2). \quad (2.6)$$

Sea $G = N \rtimes H$ grupo tal que N es abeliano, y además, normal a G . El grupo dual del grupo abeliano N se denota por \hat{N} (ver Comentario 2.2.7, donde se ha tratado esta noción). Sobre este grupo dual se puede definir una **acción**² del grupo G de la siguiente manera

$$G \times \hat{N} \longrightarrow \hat{N} : (x, \nu) \longmapsto x\nu, \text{ dada por } \langle n, x\nu \rangle \equiv \langle x^{-1}nx, \nu \rangle \quad (2.7)$$

En efecto, el grupo G envía al elemento ν de \hat{N} en el elemento $x\nu$ de \hat{N} . Este elemento $x\nu$, como homomorfismo de grupos que es, está bien definida por su evaluación (puesto que N es normal, $x^{-1}nx \in N$).

La acción del grupo sobre el dual permite definir ciertos conjuntos de interés: el grupo *estabilizador*, la *órbita* o el *grupo pequeño*³.

Definición 2.2.9.

1. Para cada $\nu \in \hat{N}$, se llama **estabilizador** o **grupo de isotopía** de ν a

$$G_\nu = \{x \in G : x\nu = \nu\}.$$

2. Se denota por O_ν a la **órbita** de ν por G ,

$$O_\nu = \{x\nu : x \in G\}.$$

3. Se define el **grupo pequeño** (*little group*) H_ν como

$$H_\nu = G_\nu \cap H.$$

El resultado principal es conocido como **teorema de Mackey** que establece una clasificación completa de las representaciones unitarias e irreducibles de G en función de las representaciones inducidas.

Teorema 2.2.10 (de Mackey). *Sea $G = N \rtimes H$. La inducción de representaciones se efectúa a través de los siguientes pasos:*

1. *Se fija un elemento de $\nu \in \hat{N}$ del espacio dual y se escoge una representación irreducible y unitaria ρ del grupo pequeño, H_ν .*
2. *Se construye una representación del estabilizador G_ν del carácter ν : $(\nu\rho) : G_\nu \longrightarrow U(\mathcal{H}_\rho)$ tal que $(\nu\rho)(nh) = \langle n, \nu \rangle \rho(h)$.*

²La acción de un grupo G sobre un conjunto S se define como una aplicación $G \times S \longrightarrow S$ tal que $(x, s) \longmapsto xs$. De una manera más intuitiva, la acción explica cómo actúa el grupo sobre un conjunto de tal manera que para el par (x, s) el elemento x envía s en xs , otro elemento del grupo.

³El estabilizador también se conoce como *grupo pequeño*, sin embargo, en este texto se utiliza la acepción dada (más restrictiva) que es la usual en teoría de representaciones.

3. Por el mecanismo de inducción se obtiene una representación del grupo $\text{Ind}(\nu\rho) : G \longrightarrow U(\mathcal{H}_\rho)$ a través de la representación del estabilizador.

Entonces, el teorema afirma que toda representación unitaria e irreducible del grupo es equivalente a una representación construida de esta forma, caracterizada por (ν, ρ) ; es más, dos representaciones inducidas $\text{Ind}(\nu\rho)$ y $\text{Ind}(\nu'\rho)$ son equivalente si y solo si los caracteres pertenecen a la misma órbita.

En virtud del teorema, para un grupo producto semidirecto basta obtener todas las órbitas y los grupos pequeños asociados a cada una; de esta manera, todas las representaciones unitarias e irreducibles del grupo quedan caracterizadas por (ν, ρ) , siendo ν un representante de cada órbita y ρ una representación unitaria e irreducible del grupo pequeño H_ν .

2.3. Grupos de Lie

Los grupos de Lie tienen un papel relevante en Matemáticas y Física ya que ponen en conjunción dos ámbitos importantes de ambas disciplinas: la geometría y el álgebra. Por un lado, los grupos de Lie se construyen sobre una variedad diferenciable que les dota del carácter geométrico; por otro lado, la estructura de grupo proporciona a la variedad del carácter algebraico. La riqueza en propiedades ha hecho de la Teoría de Lie una rama útil y fecunda en una gran variedad de campos de la Física; ejemplos de ello son los grupos compactos $SU(2)$, $SO(3)$ que aparecen en la Mecánica Cuántica, el grupo Euclídeo $E(3)$ o el grupo de Galileo, dentro de la Mecánica Clásica; o el grupo de Lorentz homogéneo y el grupo de Poincaré en las teorías relativistas clásicas y cuánticas, y en concreto como grupos asociados a las partículas relativistas.

2.3.1. Definición de grupo de Lie

El primer aspecto a considerar es el carácter geométrico del grupo de Lie, esto es, definir el concepto de variedad diferenciable. Una **variedad diferenciable** n -dimensional es un espacio topológico M tal que,

1. Existe un conjunto de **cartas** denotadas por $(\phi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$ de la variedad. Esto es, para U_α abierto de M , y V_α abierto de \mathbb{R}^n la aplicación $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ es homeomorfismo, con $\phi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$.
2. Que exista un **atlas** de la variedad, es decir, un conjunto de cartas que recubran completamente a M : $M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$.
3. Que los homeomorfismos $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, entre abiertos en \mathbb{R}^n , sean isomorfismos diferenciables. Esto concede la *diferenciabilidad* a la variedad.

De manera concisa, una variedad diferenciable es aquella que se puede identificar, localmente (pero para todos sus puntos, de ahí la exigencia del atlas), con abiertos del espacio \mathbb{R}^n [19, §1.3]. La dimensión de la variedad se define como la dimensión del espacio \mathbb{R}^n .

El siguiente aspecto a tratar es cómo dotar a la variedad de estructura de grupo. Esto implica construir un producto entre elementos de la variedad y una aplicación de inversión. No obstante, puesto que el conjunto de elementos posee estructura diferenciable se pide, además, que estas operaciones sean diferenciables.

Definición 2.3.1. Un **grupo de Lie** es una variedad M diferenciable con estructura de grupo y tal que las operaciones de grupo son diferenciables,

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G : (x, y) \mapsto xy \\ G &\longrightarrow G : x \mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

En conclusión, desde otra perspectiva⁴, un grupo de Lie es, en particular, un grupo cuyos elementos dependen *continuamente* de ciertos parámetros, y además, sus operaciones son diferenciables. Con mayor profundidad, esto es, para una carta (ϕ, U, V) , se puede describir los elementos del abierto $U \subset M$ según la parametrización $\phi^{-1}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in V$.

2.3.2. Álgebra de Lie

La variedad de un grupo de Lie suele tener una estructura complicada que se aleja de la forma lineal; sin embargo, se puede restringir el trabajo en un entorno de la identidad de tal manera que se pueda aproximar los elementos del grupo por elementos en el espacio tangente en la identidad. Debido a la estructura diferenciable, el espacio tangente contiene suficiente información del grupo como para suponer una buena aproximación. Esta idea se conoce como **linealización** [9] y motiva la definición siguiente, de álgebra de Lie.

Definición 2.3.2. Un **álgebra de Lie compleja finita-dimensional** es un espacio vectorial \mathfrak{g} complejo de dimensión finita junto a una aplicación $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, conocida como **corchete de Lie**, que verifica:

1. $[\cdot, \cdot]$ es bilineal.
2. $[\cdot, \cdot]$ es antisimétrica (*skew-symmetric*): $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo elemento $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. y verifica la identidad de Jacobi, para $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

⁴Quizá una perspectiva más común en la literatura física, [9].

Además, se define un **homomorfismo de álgebras de Lie** como una aplicación $\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ entre dos álgebras de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$ y $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}})$ tal que respeta su estructura de corchete, es decir, $[\Phi(X), \Phi(Y)]_{\mathfrak{h}} = \Phi([X, Y]_{\mathfrak{g}})$.

Cada grupo de Lie se podrá asociar a su álgebra de Lie definida sobre el espacio tangente en la identidad a través del proceso de linealización. Una forma de entender esta asociación es a través del argumento de linealización de Gilmore [9].

La idea es construir el álgebra de Lie linealizando el grupo de Lie, esto es, expandiendo en serie de Taylor la parametrización de un elemento en un entorno de la unidad de tal manera que se pueda vincular con el espacio tangente. Conviene notar que el grupo de Lie es homogéneo, en el sentido de que todo punto es localmente semejante a cualquier otro punto de la variedad diferenciable y por tanto es válido tomar la expansión en un único entorno, entorno a la unidad, debido a las propiedades algebraicas de este elemento. Para comprender el significado de la homogeneidad basta ver que todo entorno V de un punto $x \in G$ se puede llevar por traslación a un entorno de otro punto $y \in G$; para ello, se toma la multiplicación por yx^{-1} por izquierda de tal manera que $V \longmapsto yx^{-1}V$ es entorno de y . Además, ambos entornos son homeomorfos debido a las propiedades de continuidad del producto y la inversión de elementos.

Por tanto, se considera $\phi(\mathbf{x})$ parametrización de un elemento entorno a la identidad, e . Es decir, esto equivale a escoger una carta (ϕ^{-1}, U, V) , con $\phi^{-1} : U \subset G \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ y tal que $e \in U$. Si se supone que $\phi(0) = e$, y por tanto, que V es un entorno de 0, entonces la expansión puede escribirse como

$$\phi(\delta\mathbf{x}) = e + \sum_i \delta x_i \frac{\partial \phi(0)}{\partial x_i} + \mathcal{O}(\delta^2\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

Donde $\mathcal{O}(\delta^2\mathbf{x})$ denota el resto de los términos, como *O de Landau*. Si se redefinen $M_i \equiv \frac{\partial \phi(0)}{\partial x_i}$, estos se pueden identificar con los vectores generadores del espacio tangente [19]. Luego, la linealización se puede representar como

$$\phi(\mathbf{x}) \longmapsto e + \sum \delta x_i M_i \quad (2.9)$$

Los elementos del álgebra serán las combinaciones lineales de los generadores M_i con el corchete de Lie dado por $[X, Y] = XY - YX$ para X, Y elementos del álgebra. Conviene notar que los elementos del álgebra son operadores (campos de vectores evaluados en la identidad), y por tanto, está bien definida la composición XY o YX ⁵.

Comentario 2.3.3 (Aplicación exponencial). Cabría preguntarse si es posible invertir la linealización, es decir, dado un elemento del álgebra de Lie se puede recuperar un elemento del grupo. La respuesta es afirmativa siempre que se considere un entorno de la identidad; la aplicación que lleva al elemento del álgebra en el grupo se conoce como **aplicación exponencial**.

Para motivar su expresión, se considera un operador X del álgebra y un parámetro real ϵ . Por el proceso de linealización, se puede encontrar un elemento del grupo, en un entorno de la identidad, tal que se identifique con $(e + \epsilon X)$. Si se quiere desplazar este punto lejos de la identidad puede multiplicarse k -veces por sí mismo $(e + \epsilon X)^k$; en particular, el límite siguiente también es elemento

⁵Se puede hacer una construcción más rigurosa de esta parte: dotar al espacio tangente en la identidad de estructura de álgebra de Lie a partir del álgebra de campos de vectores invariantes por traslación por izquierda (ver, por ejemplo, [19, §5.4]). Se ha preferido omitir todos estos detalles en pos de una construcción más intuitiva.

del grupo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(e + \frac{1}{k}X\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \equiv \exp(X) \quad (2.10)$$

Por tanto, con este proceso se pueden obtener elementos del grupo a través de elementos del álgebra. No obstante, conviene notar que solo se verifica para un entorno de la identidad y que, salvo ciertas excepciones, no se puede extender a todo el grupo.

2.3.3. Constantes de estructura

La idea de los párrafos anteriores ha sido linealizar el grupo de Lie G definiendo así el álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada al grupo. Puesto que esta linealización es local el álgebra solo admite propiedades locales del grupo, no globales. No obstante, el álgebra permite caracterizar bien al grupo; una manera de hacerlo es especificando la acción del corchete de los elementos del álgebra.

Puesto que el álgebra de Lie se ha construido sobre el espacio tangente, su dimensión es la misma que la del espacio tangente en la identidad. Por ser espacio vectorial, puede escogerse una base de n operadores. Sea $\{X_i : i = 1, \dots, n\}$ base, debido a la superposición lineal, basta especificar el corchete de los n -elementos del álgebra para caracterizarla,

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k \quad (2.11)$$

donde se ha tomado el criterio de sumación de Einstein sobre los índices k . Las constantes C_{ij}^k se llaman **constantes de estructura** y determinan completamente la estructura del álgebra de Lie [9].

2.3.4. Operador de Casimir

Un **operador de Casimir**, C , es un elemento distinguido del centro del álgebra universal envolvente⁶ del álgebra de Lie, y por tanto, conmuta con todos los elementos del grupo [11, §10.2]. Si se consideran representaciones unitarias e irreducibles del grupo entonces, en virtud del Lema de Schur 2.2.4, el operador de Casimir toma la forma de múltiplo de la identidad, es decir, $C = \lambda \text{Id}$.

Esta característica es importante, pues permite clasificar representaciones unitarias e irreducibles de un grupo a través de los autovalores del operador de Casimir, es decir, de λ . Por ejemplo, permite obtener las representaciones del grupo $SO(3)$, obtener las representaciones del grupo euclídeo $E(2)$ o del grupo de Poincaré.

⁶El álgebra universal envolvente, denotada por $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, del álgebra de Lie \mathfrak{g} es el álgebra más general que contiene a \mathfrak{g} . Se construye como el cociente del álgebra tensorial $\otimes \mathfrak{g}$ por el ideal bilateral \mathcal{I} minimal que contiene a todos los elementos de la forma $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ con $X, Y \in \mathfrak{g}$; es decir, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \equiv \otimes \mathfrak{g} / \mathcal{I}$. Para más detalles consultar [11, §9.2]

2.4. Grupos matriciales de Lie

2.4.1. Definición y primeros ejemplos

Los grupos de Lie que más aparecen en Física son los grupos matriciales, es decir, aquellos grupos que pueden expresarse en forma de matrices (grupo de rotaciones tanto en el espacio como en el plano, grupo de Lorentz, etc.)

Se define el **grupo lineal general**, $GL(n; \mathbb{C})$, como el grupo de matrices complejas, invertibles y $n \times n$ dimensionales.

Definición 2.4.1. $G \subset GL(n; \mathbb{C})$ es **grupo matricial de Lie** si es subgrupo de $GL(n; \mathbb{C})$ y además verifica que, para toda sucesión de matrices $\{A_n\}$ de G y tal que converja en A , entonces o $A \in G$ o A es no invertible (y por tanto, $A \notin GL(n; \mathbb{C})$).

La traducción de la teoría de Lie al lenguaje matricial es inmediata: el álgebra de Lie asociada es un espacio vectorial sobre $GL(n; \mathbb{C})$ donde el corchete de Lie toma la forma de conmutador matricial, $[X, Y] = XY - YX$. Es más, la aplicación exponencial se convierte en la exponencial matricial $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

Ejemplo 2.4.2 (Grupo unitario especial). El **grupo unitario especial** se define como el grupo matricial $SU(n)$ de matrices unitarias y con determinante unidad,

$$SU(n) = \{A \in GL(n; \mathbb{C}) : AA^+ = \text{Id y } \det(A) = 1\}. \quad (2.12)$$

El álgebra asociada se construye de la siguiente manera: basta tomar una curva en torno a la identidad, es decir, $Q(t) \in SU(2)$ tal que $Q(0) = \text{Id}$ y $\left. \frac{d}{dt} Q(t) \right|_{t=0} = A$. Obsérvese que esta curva puede tomarse como $Q(t) = e^{tA}$. Diferenciando $\text{Id} = Q^+(t)Q(t)$,

$$0 = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Q^+ \right) Q(0) + Q^+(0) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Q \right) = A^+ + A. \quad (2.13)$$

Que implica la condición $A^+ = -A$. Por otro lado, ya que $\det(e^{tA}) = e^{\text{tr}(A)}$, donde $\text{tr}(A)$ denota la traza de A , entonces

$$\left. \frac{d}{dt} \det(Q(t)) \right|_{t=0} = \text{tr}(A) = 0, \quad (2.14)$$

ya que $\det(Q(t)) = 1$. Se concluye que el álgebra de $SU(2)$ es

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in GL(2; \mathbb{C}) : A^+ = -A \text{ y } \text{tr}(A) = 0\}. \quad (2.15)$$

De mayor interés es el caso $n = 2$, que se identifica con el grupo de rotaciones de espín. Una base del álgebra está formada por las matrices

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

No obstante, la forma más común de dar la base es en la forma de **matrices de Pauli**,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Los factores de estructura están dados por las relaciones de conmutación

$$[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ijk} \tau_k. \quad (2.18)$$

Con ϵ_{ijk} el tensor de Levi-Civita, o tensor totalmente antisimétrico.

Ejemplo 2.4.3 (Grupo ortogonal especial). El **grupo ortogonal especial** se define como el grupo $SO(n)$ de matrices ortogonales con determinante unidad,

$$SO(n) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}) : AA^T = \text{Id y } \det(A) = 1\} \quad (2.19)$$

donde A^T denota la matriz traspuesta de A . Como se puede observar, guarda bastante semejanza con el grupo $SU(n)$, donde se sustituye la matriz adjunta por la traspuesta. Por tanto, aplicando el mismo razonamiento del ejemplo anterior se puede encontrar la condición sobre el álgebra

$$\mathfrak{so}(n) = \{A \in GL(n; \mathbb{R}) : A^T = -A\} \quad (2.20)$$

La condición de traza nula está incluida en $A^T = -A$ ya que exige que la diagonal de la matriz sea nula.

Hay dos casos de interés para el propósito de este trabajo, $n = 2$ y $n = 3$.

- El caso $n = 2$ es el grupo de rotaciones en el plano. Por las condiciones impuestas sobre el álgebra $\mathfrak{so}(2)$ el generador más sencillo solo puede ser

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

En este caso el grupo es abeliano y conexo, luego la aplicación exponencial es sobreyectiva; de este modo, los elementos del grupo $SO(2)$ pueden expresarse en función de este generador según $A = e^{\theta J}$, para $\theta \in [0, 2\pi)$. Un cálculo sencillo sobre las potencias del generador demuestra que

$$e^{\theta J} = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Y por tanto se recupera el elemento del grupo como matriz de rotación. En la literatura física [26] al generador infinitesimal J se le vincula con el **operador momento angular** de las rotaciones en el plano.

- El caso $n = 3$ se relaciona con las rotaciones en el espacio. Una base está dada por los generadores

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

En este caso las reglas de conmutación son $[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$. Es interesante observar que se obtienen los mismos factores de estructura que para el álgebra de $SU(2)$; es más, se puede construir un isomorfismo $\mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$. Esto sugiere una relación interesante entre ambos grupos (puede consultarse [6, §6.7]): se verifica que

$$SO(3) \cong SU(2)/\{\pm \text{Id}\} \tag{2.24}$$

a través de la acción de la aplicación adjunta. Es decir, $SU(2)$ **recubre doblemente** a $SO(3)$ ⁷.

Desde una perspectiva física, los generadores infinitesimales $\{J_i\}$ se relacionan con los **operadores de momento angular** respecto a cada eje. De este modo, la relación anterior sugiere tomar $SU(2)$ como generador de momento angular; de este modo, a este momento angular se le denomina **espín**.

2.4.2. Representaciones de grupos matriciales

Se puede definir una **representación** sobre un grupo matricial de Lie como un homomorfismo $G \rightarrow GL(V)$ con V espacio vectorial de dimensión finita. De la misma manera, se puede definir una representación del álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre $GL(V)$. Las propiedades de representaciones descritas en subsecciones anteriores se aplican de manera natural sobre los grupos de Lie y álgebras de Lie.

Es de interés la siguiente proposición que identifica de manera única la representación del grupo matricial de Lie con la representación del álgebra de Lie asociada.

Proposición 2.4.4. *Sea G grupo matricial de Lie, \mathfrak{g} su álgebra de Lie, $\Pi : G \rightarrow GL(V)$ representación de G finito-dimensional. Entonces, existe una única representación $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow GL(V)$, que actúa sobre el mismo espacio V , dada por*

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}$$

para todo elemento $X \in \mathfrak{g}$. Además, la representación π puede obtenerse según

$$\pi(X) = \left. \frac{d}{dt} \Pi(e^{tX}) \right|_{t=0}$$

que verifica

$$\pi(AXA^{-1}) = \Pi(A)\pi(X)\Pi(A)^{-1}$$

para $X \in \mathfrak{g}$ y $A \in G$.

Para finalizar el apartado se mencionan varios resultados de interés sobre representaciones,

⁷Sin entrar en mayor detalle, el recubrimiento doble del grupo $SO(3)$ implica que existen dos clases distintas de representaciones para este grupo. Desde una perspectiva física, cada clase se puede asociar con un tipo de partícula: **fermiónica** o **bosónica** [7, §3.5]

Proposición 2.4.5.

1. Si G es grupo matricial de Lie conexo, la representación Π del grupo es irreducible si y solo si π es irreducible.
2. Si G es grupo matricial de Lie compacto entonces toda representación finito-dimensional es completamente reducible.

2.5. Tres ejemplos de representaciones

2.5.1. Grupo $SO(2)$

El grupo $SO(2)$ es el grupo de las rotaciones en el plano (Ejemplo 2.1.2). Por ser grupo abeliano y compacto las representaciones reducen completamente en representaciones irreducibles unidimensionales (Corolario 2.2.5), denotadas por $\pi_m(\theta)$, donde m es un valor que caracteriza a la representación y $\theta \in [0, \pi)$ el ángulo que parametriza la rotación. Si se exige la unitariedad de las representaciones, entonces la única opción es que la representación unitaria e irreducible tome la forma de

$$\pi_m(\theta) = e^{im\theta} \tag{2.25}$$

En efecto, $\pi_m(\theta)\pi_m(\phi) = \pi_m(\theta + \phi)$. No obstante, se debe verificar $\pi_m(\theta + 2\pi) = \pi_m(\theta)$ ya que toda rotación en un ángulo de $\theta + 2\pi$ equivale a una rotación en θ . Esta ecuación implica que el valor m sea entero. Se concluye,

Proposición 2.5.1. *Las representaciones irreducibles y unitarias del grupo $SO(2)$ están dadas por,*

$$R(\theta) \in SO(2) \longmapsto \pi_m = e^{im\theta}, \quad m \in \mathbb{Z} \tag{2.26}$$

2.5.2. Grupo $SO(3)$

El grupo $SO(3)$ es el grupo de rotaciones en el espacio, es conexo y compacto. En este caso, las representaciones unitarias e irreducibles no pueden obtenerse de una manera tan sencilla como en el caso anterior. Se puede abordar de dos maneras, o calculando las representaciones del espacio recubridor y trasladarlas a este grupo (siguiendo el texto de Folland [6] y Deitmar [5]) o trabajando con el álgebra de Lie del grupo. Esta segunda opción es la común en la literatura física debido a su significado físico. A continuación se muestra el resultado (la construcción puede verse en cualquier texto de Mecánica Cuántica; aquí se recomienda el texto de Tung [34, §7] o el texto de Hall [12, §17], que incide mejor en el contenido de la teoría de grupos).

Proposición 2.5.2. *Las representaciones irreducibles del álgebra $\mathfrak{so}(3)$ están caracterizadas por un autovalor de momento angular j , entero positivo o semientero positivo; la dimensión de la representación es $2j + 1$. La representación de los generadores se puede especificar de la siguiente manera, donde se escriben los elementos de matriz,*

$$\begin{cases} (J_1)_{mm'} = -\frac{1}{2}\sqrt{(j-m)(j+m')}\delta_{mm'+1} + \frac{1}{2}\sqrt{(j-m')(j+m)}\delta_{mm'-1} \\ (J_2)_{mm'} = \frac{i}{2}\sqrt{(j-m)(j+m')}\delta_{mm'+1} + \frac{i}{2}\sqrt{(j-m')(j+m)}\delta_{mm'-1} \\ (J_3)_{mm'} = m\delta_{mm'} \end{cases} \quad (2.27)$$

escritos en una base ortonormal bajo la cual diagonaliza la representación de J_3 . Los índices m, m' toman los valores en $\{-j, 1-j, \dots, j-1, j\}$.

Además, el operador $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ es operador de Casimir tal que

$$(J^2)_{mm'} = j(j+1)\delta_{mm'} \quad (2.28)$$

Para obtener la representación del grupo bastaría con utilizar la Proposición 2.4.4. Otra forma común de dar la representaciones es en términos de los armónicos esféricos (ver [5]), que es la representación sobre el espacio de funciones de cuadrado integrable, o espacio L^2 .

Ejemplo 2.5.3 (La representación irreducible de $j = \frac{1}{2}$). El ejemplo más sencillo está dado por la representación de $j = \frac{1}{2}$. El espacio de representación tiene dimensión 2 y la representación de los generadores toma la forma

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y } J_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

Con cierta sorpresa se recuperan las matrices de Pauli, de la forma $J_k = \frac{\sigma_k}{2}$. Como ya se comentó, el álgebra $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{so}(3)$ son isomorfos.

Ejemplo 2.5.4. La representación irreducible de $j = 1$ Este es el segundo caso más sencillo de representación del grupo $SO(3)$. En este caso el espacio es 3-dimensional y los generadores toman la forma

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

Comentario 2.5.5 (Diferencia entre autovalores semienteros y enteros). La existencia de dos tipos de autovalores del momento angular, semientero o entero, tiene su origen en el doble recubrimiento del grupo (recubrimiento dado por $SU(2)$). Sin entrar en detalle, la naturaleza de cada tipo de autovalor puede verse en el siguiente ejemplo: si se supone una rotación de ángulo 2π entorno al eje z (por simplicidad), entonces la matriz de rotación toma la forma de $R(2\pi) = e^{2\pi J_3}$; en función del valor de j para la representación se tiene

$$\text{si } j = 1/2 \mapsto R_{j=1/2}(2\pi) = -I, \quad \text{si } j = 1 \mapsto R_{j=1}(2\pi) = I$$

Por tanto, para la representación $j = 1$ (y para cualquier representación entera) una rotación 2π opera como una rotación total en el espacio de representaciones; mientras que, por otro lado, para

$j = 1/2$ (y también para toda representación semientera) opera cambiando la orientación (como rotación en ángulo π). La identidad se consigue con una rotación de ángulo 4π .

Por sorprendente que parezca, esta es la naturaleza del *espín* de partículas elementales: como electrones (espín $1/2$), bosones gauge (espín 1), etc. . Esta naturaleza obliga a considerar estas representaciones, tanto semienteras como enteras, para explicar el comportamiento de las *simetrías internas* de estas partículas. Por ello, el grupo $SU(2)$ se conoce como grupo de espín. El libro de Folland [7, §3.5] o el libro de Varadarajan [35, §9.4] profundizan en ello.

2.5.3. Grupo Euclídeo $E(2)$

El grupo euclídeo es sin duda el grupo más interesante desde un punto de vista formal. Por un lado, puesto que no es ni abeliano ni compacto necesita del método de Mackey (§2.2.3) para obtener sus representaciones a través del mecanismo de inducción; por otro lado, la forma del grupo euclídeo es semejante a la del grupo de Poincaré, y por tanto, será útil investigar este grupo como paso preliminar, preparatorio. En estas líneas se exponen los resultados principales.

Definición 2.5.6. El **grupo euclídeo** $E(n)$ se define como el grupo de movimientos rígidos en \mathbb{R}^n , es decir, el grupo formado por traslaciones y rotaciones en el espacio.

Los elementos del grupo se denotan por (R, a) , con $R \in SO(n)$ y $a \in \mathbb{R}^n$. La **acción** natural del grupo, sobre el espacio afín \mathbb{R}^n , está dada por

$$(R, a)x = Rx + a, \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.31)$$

Nótese que se ha identificado el grupo de traslaciones con el grupo aditivo $(\mathbb{R}^n, +)$. La acción anterior permite asociar el grupo euclídeo con el subgrupo de $GL(n + 1; \mathbb{R})$ siguiente

$$(R, a) \equiv \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & R & & \vdots \\ & & & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R \in SO(n) \text{ y } a \in \mathbb{R}^n. \quad (2.32)$$

De la forma matricial se desprende de manera natural las **leyes del grupo**,

$$\begin{cases} (R, a)(T, b) = (RT, a + Rb) \\ (R, a)^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1}a) \end{cases} \quad (2.33)$$

Respecto a la forma, el grupo euclídeo es producto semidirecto de las rotaciones con las traslaciones; es decir, $E(n) = SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$. El subgrupo de traslaciones toma el papel de grupo normal y abeliano. De este modo, se puede utilizar la metodología de Mackey para clasificar todas las representaciones irreducibles del grupo.

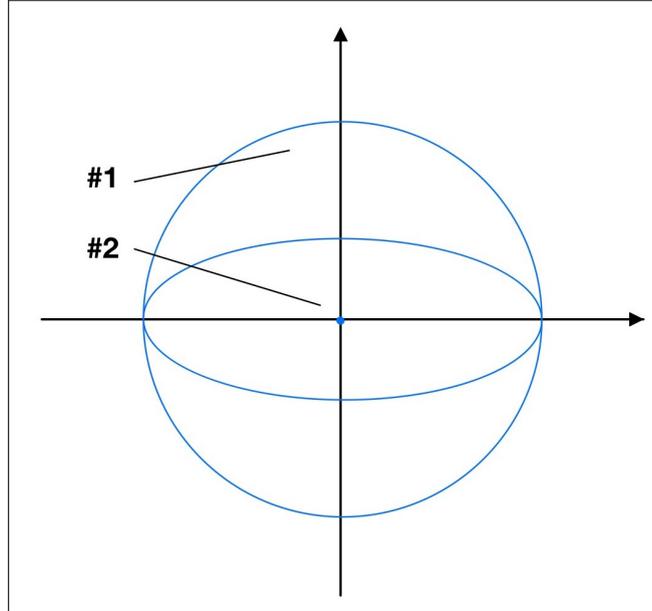


Figura 2.1: Órbitas para el espacio de momentos asociado al grupo Euclídeo. Las órbitas toman dos formas, como esferas #1 $p^2 = r^2$ o como órbita degenerada #2

Órbitas y grupos pequeños

El grupo dual del subgrupo de traslaciones se identifica con \mathbb{R}^n y recibe el nombre de **espacio de momentos**. La **acción** del grupo sobre el espacio de momentos puede tomarse como

$$(R, b)p = Rp \tag{2.34}$$

Es decir, la acción del grupo puede definirse como la acción natural de las rotaciones de $SO(n)$ sobre el espacio de momentos. Las traslaciones no afectan al grupo dual.

Las **órbitas** del espacio de momentos están caracterizadas por $r \in [0, \infty)$ y toman la forma de

$$O_r = \{p : p^2 = r^2\} \tag{2.35}$$

En efecto, para un elemento p del espacio de momentos, su órbita se define como $O_p = \{(R, b)p : (R, b) \in E(n)\} = \{Rp : R \in SO(n)\}$. Ahora bien, ya que las rotaciones son unitarias, presevan la norma euclídea; por tanto, la órbita queda descrita por la esfera $(Rp)^2 = p^2 = r^2$, con $r \in [0, \infty)$.

De este modo, existen dos tipos de órbitas (ver Tabla 2.1 y Figura 2.1):

1. **Órbita no degenerada**, esfera en el espacio de momentos con radio $r > 0$, en la Figura, representada por #1.

El grupo pequeño asociado es isomorfo a $SO(n - 1)$. En efecto, escogiendo el representante de la órbita $p = (1, 0, \dots, 0)^T$ los elementos del grupo pequeño son aquellos que verifican la ecuación $Rp = p$, explícitamente

$$\begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \cdots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se llega a que los únicos elementos de $SO(n)$ que dejan invariante al elemento deben ser las rotaciones que no involucran al primer elemento. Estas rotaciones forman un subgrupo identificado con $SO(n - 1)$. Se puede probar que las representaciones inducidas a partir de esta órbita son infinito-dimensionales [3].

2. **Órbita degenerada** con $r = 0$. Coincide con el origen, $\{0\}$, denotado por # 2. El grupo pequeño es, por tanto, todo $SO(n)$. De este modo, las representaciones inducidas se pueden asociar directamente con las representaciones unitarias e irreducibles del grupo $SO(n)$; son por tanto finito-dimensionales [3].

Tipo de órbita	grupos pequeños asociado	Representación inducida
Esfera de radio $r > 0$	$SO(n - 1)$	Infinito-dimensionales
Origen, con $r = 0$	$SO(n)$	Finito-dimensionales

Cuadro 2.1: Clasificación de los grupos pequeños del Grupo Euclídeo y de sus representaciones inducidas

Caso particular E(2)

El grupo euclídeo $E(2)$ es el grupo asociado a las rotaciones y traslaciones en el plano y tomará el papel de grupo pequeño para el grupo de Poincaré; este es el motivo de su estudio particular.

Posee estructura de grupo matricial de Lie de dimensión 3, bajo la identificación de los elementos con las matrices afines (2.32). El álgebra asociada estará construida por el generador infinitesimal del subgrupo de rotaciones de $SO(2)$, denotado por J , y los generadores del subgrupo de traslaciones, P_1, P_2 :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Las reglas de conmutación están dadas por

$$\begin{cases} [P_1, P_2] = 0 \\ [J, P_k] = \epsilon_{km} P_m \end{cases} \quad (2.37)$$

con ϵ_{km} el tensor antisimétrico de dimensión 2.

Se puede construir un operador de Casimir sobre el álgebra de $E(2)$. Se define como $P^2 = P_1^2 + P_2^2$ (la prueba es sencilla utilizando las reglas de conmutación anterior). Sobre la órbita $p^2 = r^2$ el operador diagonaliza tomando p^2 como autovalor. Este operador ayudará a clasificar las representaciones inducidas.

Las representaciones irreducibles y unitarias inducidas se clasifican según la órbita,

- **Órbita degenerada**, $r = 0$. El grupo pequeño es $SO(2)$. De este modo, las representaciones inducidas se identifican directamente con las representaciones del grupo pequeño. Son por tanto unidimensionales, pero no fieles.

Desde el punto de vista del álgebra de Lie, el operador de Casimir P^2 se anula (tiene por autovalor 0). Por tanto, las representaciones se caracterizan por el par $(0, m)$, con $m \in \mathbb{Z}$, y se denotan como $\pi_{0,m}$.

- **Órbita no degenerada**, con $r > 0$. El grupo pequeño es $SO(1) = \{\text{Id}\}$. En este caso son fieles e infinito-dimensionales. Una manera de escribir la representación de manera explícita es trabajando con el álgebra, como se hizo para el caso $SO(3)$. Se puede probar que los generadores infinitesimales toman la siguiente forma [34, §9.2], donde se representan los elementos de matriz,

$$\begin{cases} (J)_{mm'} = m\delta_{mm'} \\ (P_1)_{mm'} = -\frac{i}{2}p\delta_{mm'+1} + \frac{i}{2}p\delta_{mm'-1} \\ (P_2)_{mm'} = -\frac{1}{2}p\delta_{mm'+1} - \frac{1}{2}p\delta_{mm'-1} \end{cases} \quad (2.38)$$

donde $m \in \mathbb{Z}$ y $p = +\sqrt{r}$ que se escoge en su rama positiva. La base del espacio (espacio infinito-dimensional, pues m no está acotado) es aquella que diagonaliza J .

El operador de Casimir P^2 diagonaliza bajo el autovalor $p^2 = r^2$. Por tanto, las representaciones del grupo quedan caracterizadas por este valor $p^2 = r$.

Capítulo 3

Estudio sobre el grupo de Poincaré

En este capítulo se estudia en profundidad el grupo de Poincaré, definido como el grupo de simetrías espacio-temporales en el marco de la Relatividad Especial. En la primera sección se introducen las nociones fundamentales de la Relatividad Especial: el espacio de Minkowski, como la forma matemática del espacio-tiempo; y las transformaciones de Lorentz, como transformaciones de simetría. En la segunda y tercera sección se estudian en profundidad el grupo propio de Lorentz y el grupo de Poincaré, respectivamente. Para este último grupo se dará de manera explícita las órbitas y los grupos pequeños (así como su interpretación física). La obtención de las representaciones se hará en el siguiente capítulo.

La primera sección se ha apoyado en las notas del libro de Weinberg [38] y el libro de Tung [34]. Para la segunda y tercera sección se ha utilizado el texto de Kim [16] y Folland [6], [7].

3.1. Primeras nociones sobre Relatividad Especial

3.1.1. El espacio de Minkowski

El primer paso es establecer el marco matemático de la Relatividad Especial, es decir, la traducción a lenguaje matemático del formalismo de esta teoría. La construcción de este marco parte de establecer qué es matemáticamente el espacio-tiempo, como lugar donde ocurren los fenómenos físicos. Así, se puede definir el **espacio-tiempo** como un **espacio afín cuatridimensional**, denotado por \mathcal{M} , y cuyo espacio vectorial asociado es \mathbb{R}^4 . Sobre este espacio \mathcal{M} se establecen las siguientes definiciones:

- Los elementos del espacio afín \mathcal{M} se llaman **eventos** y se denotan por $x \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$, donde

$$\begin{cases} x^0 = ct & \text{coordenada temporal} \\ x^i, i = 1, 2, 3 & \text{coordenadas espaciales} \end{cases}.$$

Para denotar las coordenadas se utiliza la notación tensorial (más compacta) x^μ : $\mu = 0, 1, 2, 3$. El convenio de índices es el siguiente: los índices griegos (μ, ν, \dots) toman valores

de $0, \dots, 3$; los índices latinos (i, j, k, \dots) solo toman los valores $1, 2, 3$. Es decir, representan únicamente coordenadas espaciales. Otra manera compacta de escribir un evento es $x \equiv (x^0, \mathbf{x})^T$, donde \mathbf{x} es un vector tridimensional $(x^1, x^2, x^3)^T$.

- Fijar un **sistema de referencia** equivale a fijar un origen O del espacio afín y una base vectorial de \mathbb{R}^4 . De aquí se deduce que un cambio de sistema de referencia se escribe como una transformación

$$x' = Ax + b$$

con x coordenadas del evento en el primer sistema de referencia, x' coordenadas de dicho evento en el segundo sistema de referencia, A matriz de cambio de base y $b = O' - O$ desplazamiento del origen. En la notación tensorial se escribe

$$(x')^\mu = A^\mu_\nu x^\nu + b^\mu,$$

con A^μ_ν elementos de matriz de A .

Se consideran dos eventos x_1, x_2 de \mathcal{M} . La diferencia entre ellos define un **cuadrivector** (un elemento del espacio vectorial \mathbb{R}^4)

$$x^\mu = x_1^\mu - x_2^\mu$$

La **longitud** del cuadrivector se define como

$$|x|^2 = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 = c^2 t^2 - (\mathbf{x})^2 \quad (3.1)$$

Esto permite dar la noción de **intervalo** entre eventos, como distancia espacio-temporal entre dos sucesos. Esto es, para $x, y \in \mathcal{M}$ se define el intervalo como

$$s(x, y) = |x - y| = \sqrt{(c^2 t^2 - (\mathbf{x})^2)} \quad (3.2)$$

El punto importante de esta definición recae en lo siguiente. La ecuación del frente de ondas de una señal de luz, emitida desde el origen en tiempo $t = 0$, verifica la sencilla ecuación $|x|^2 = 0$. El conjunto de eventos que verifican esta ecuación se conoce como **cono de luz**.

Nota. Para no cargar la notación, de ahora en adelante, se trabaja con el convenio de las unidades naturales, es decir, $c = 1$ y $\hbar = 1$.

Por otro lado, en términos más matemáticos, la definición anterior permite definir un producto interno y una métrica.

Definición 3.1.1. Sobre el espacio vectorial \mathbb{R}^4 se define el **producto interno lorentziano** como un *semi-producto* interno dado por: si $x, y \in \mathbb{R}^4$,

$$\langle x, y \rangle = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^3 x_i y_i = x_\mu y^\mu$$

En la última expresión se ha utilizado el convenio de sumación de Einstein con la notación tensorial de cuadvectores: $x_\mu y^\mu$. Otra forma de definir este producto interno es a través del **tensor métrico**, que actúa como aplicación bilineal. El tensor métrico se puede escribir como:

- en la notación matricial, como una matriz diagonal

$$G = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

- en la notación tensorial, los elementos de matriz de G se denotan por $g_{\mu\nu}$ tal que

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -1, \quad g_{33} = -1 \text{ y el resto } 0$$

Se reescribe el producto lorentziano como

$$\langle x, y \rangle = x^T G y, \text{ en la notación matricial}$$

$$\langle x, y \rangle = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \text{ en la notación tensorial.}$$

El producto lorentziano define una “métrica”¹, llamada *métrica de Minkowski* sobre el espacio vectorial \mathbb{R}^4 , dada por $|x|^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$. El espacio afín \mathcal{M} equipado con esta métrica define el marco matemático del espacio-tiempo relativista, el **espacio de Minkowski**.

Definición 3.1.2. Se define el **espacio de Minkowski** como el espacio afín \mathcal{M} cuyo espacio vectorial asociado es \mathbb{R}^4 , equipado con la métrica de Minkowski. Es decir, el intervalo entre dos eventos x, y está dada como

$$s(x, y) = \sqrt{g_{\mu\nu} (x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu)}$$

Una vez definido el espacio de Minkowski el siguiente paso es estudiar la traducción matemática de los principios de la Relatividad Especial. No obstante, antes de nada, conviene hacer los siguientes comentarios.

Comentario 3.1.3 (Semi-producto interno). El producto lorentziano no define una norma sino una semi-norma. De ahí que se señale como semi-producto interno. En efecto, se puede encontrar $x \in \mathbb{R}^4 : x \neq 0$ y $|x| = x_\nu x^\nu = 0$, que no es más que el cono de luz.

De la misma manera, la *métrica* de Minkowski no define una métrica, en su sentido estricto, sino una pseudo-métrica (no es definida positiva).

Comentario 3.1.4 (Notación tensorial). La escritura tensorial no es solo una notación, sino posee mayor sutileza. De forma compacta diferencia entre elementos vectoriales, definidos sobre \mathbb{R}^4 , y elementos del dual, $(\mathbb{R}^4)^*$; también establece una conexión entre ambos tipos de objetos [38]. En detalle, sea $\{(e_i)^\mu : i = 0, \dots, 4\}$ una base del espacio vectorial \mathbb{R}^4 , escrita en la notación tensorial.

¹Realmente define una pseudo-métrica, por no ser definida positiva. En un comentario posterior se explica de manera más precisa.

Se puede construir la base del espacio dual, $(\mathbb{R}^4)^*$, asociada a la base anterior a través de tensor métrico según

$$(e_i)_\mu = g_{\mu\nu}(e_i)^\nu$$

En efecto, por las propiedades del tensor, como aplicación bilineal, $\{(e_i)_\mu\}$ define una base del dual. Nótese que la base de este espacio se escribe con índices abajo; mientras que la base primera se escribe con índices arriba. Esta idea permite dar la siguiente interpretación de índices: las componentes de los elementos del espacio vectorial, los cuadvectores, se denotan con índices arriba lo que se conoce como **notación contravariante**; los objetos del dual se denotan con índices abajo, lo que se conoce como **notación covariante**. Además, la métrica establece una forma natural de *transformar* objetos contravariantes en covariantes, y viceversa,

$$\begin{cases} x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \\ x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu \end{cases}, \quad (3.3)$$

donde la métrica toma la misma forma, es decir, $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Conviene notar que los objetos contravariantes pueden identificarse como vectores $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$, mientras que los objetos covariantes toman la forma de vectores traspuestos, $x_\mu \equiv (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$, donde el signo $(-)$ es debido a la transformación por la métrica. De este modo, se puede reinterpretar el convenio de sumación de Einstein como un producto covariante-contravariante² $x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu}x^\nu x^\mu$.

Esta idea se puede extender a todo tipo de objetos que trabajen sobre el espacio vectorial o el dual. Por ejemplo, las aplicaciones lineales (las matrices) toman la siguiente forma,

$$x' = Ax \longrightarrow (x')^\mu = A^\mu_\nu x^\nu$$

En efecto, basta ver que cada coordenada $(x')^\mu$ se puede escribir como producto interno entre la fila μ -ésima y el vector transformado. Esta columna tendrá forma covariante denotada por $(A^\mu)_\nu$, donde μ hace referencia a la columna y ν es el índice que recorre las coordenadas.

3.1.2. Las transformaciones de Lorentz

Los dos principios fundamentales de la Relatividad Especial son: (i) la velocidad de la luz en el vacío es constante para cualquier sistema de referencia inercial, (ii) las leyes físicas deben ser las mismas para todo sistema de referencia. La traducción matemática de estos principios (es decir, la traducción *geométrica* sobre el espacio de Minkowski) se consigue al considerar los siguientes dos puntos.

1. Se restringen las transformaciones entre sistemas de referencias de tal manera que las transformaciones verifiquen unas condiciones muy particulares. Se consideran dos sistemas de referencia, denotados por $\mathcal{R} \equiv (O, \{(e_i)^\mu\})$ y $\mathcal{R}' \equiv (O', \{(e'_i)^\mu\})$, donde O, O' representa el origen para cada sistema de referencia y $\{(e_i)^\mu\}, \{(e'_i)^\mu\}$ la base en \mathbb{R}^4 . Entonces, se exige que la transformación entre

$$\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$$

²Debido a esta observación el producto interno puede definirse directamente como $\langle x, y \rangle = x_\mu y^\mu$. Quizá resulte extraño expresarlo como “producto” de dos objetos de espacios distintos, uno cuadvector y otro elemento del dual, sin embargo está justificado por el Teorema de Representación de Riesz [5, Th. B.2.1] que permite definir unívocamente una función del dual tal que $\phi_x(\cdot) = \langle x, \cdot \rangle$, para $x \in \mathbb{R}^4$ fijo pero arbitrario. Esta función ϕ_x coincide con x_μ .

conserva la métrica de Minkowski, i.e. el intervalo espacio-temporal entre eventos. En detalle, si la transformación se escribe como

$$\begin{cases} x' = \Lambda x + b \\ (x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + b^\mu \end{cases}, \text{ o} \quad \text{en notación tensorial.} \quad (3.4)$$

entonces para $x, y \in \mathbb{R}^4$ cuadvectores se debe verificar:

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle = \langle \Lambda x, \Lambda y \rangle.$$

Es decir, la matriz Λ debe preservar el producto interno lorentziano. Al conjunto de estas transformaciones se les llama *transformaciones Lorentz*.

Físicamente esta condición implica (i). En efecto, la ecuación del frente de onda de una señal luminosa se escribe como el cono de luz $|x|^2 = 0$ para el primer sistema de referencia; aplicando la transformación, ya que esta preserva el intervalo espacio-temporal, la ecuación se seguirá escribiendo como $|x'|^2 = 0$. Al comparar ambas expresiones se llega a la conclusión de que la velocidad de la luz es idéntica en ambas.

2. En segundo lugar, se establece que todo objeto con contenido físico transforma entre dos sistemas de referencia mediante una transformación Lorentz. Es decir,

$$\begin{cases} \Phi(x') = \Phi(x) & \text{para una función escalar} \\ (A')^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) & \text{para una función vectorial, contravariante.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Esta reescritura de las leyes físicas, conocida como *forma covariante*, permite establecer el principio (ii). No obstante, no se quiere profundizar más en esto; para mayor detalle, consultar [38] [34].

Los dos puntos anteriores permiten reconsiderar la teoría de la Relatividad Especial desde una perspectiva geométrica³. Es decir, permiten reescribir los principios en torno a las transformaciones de Lorentz: la física de un sistema físico será **invariante** bajo transformaciones de Lorentz; o equivalentemente, existe una **simetría** del sistema físico asociada con el cambio de sistemas de referencia bajo estas transformaciones.

Inciendo más en la idea, desde la perspectiva geométrica, la Relatividad Especial de Einstein generaliza las propiedades de isotropía y homogeneidad del espacio 3-dimensional (propiedades sobre las que se asienta la invarianza de la Mecánica Newtoniana) para introducir la componente temporal. Dicho de otra manera, «el principio básico de la Teoría de la Relatividad es que existe una simetría fundamental entre las tres dimensiones espaciales y la dimensión temporal que se manifiesta de forma directa en la conservación de la velocidad de la luz en todos los sistemas de referencia» [34, pg. 173]

En las secciones siguientes se estudiará en profundidad las simetrías de la Relatividad Especial, esto es, las transformaciones de Lorentz dadas por

$$x' = \Lambda x + b. \quad (3.6)$$

El primer caso a estudiar son las llamadas **transformaciones de Lorentz homogéneas**, que verifican $b = 0$, i.e. no hay traslación del origen (es más, si se toma el origen como $O = 0$ se pueden

³Esto es una realización práctica del Programa de Erlangen de Felix Klein escrito en 1872. Una traducción en inglés del manuscrito original en alemán puede verse en [17]

identificar con automorfismos del espacio vectorial \mathbb{R}^4). Estas transformaciones forman un grupo, el **grupo de Lorentz**. El segundo caso son las **transformaciones de Lorentz no homogéneas**, con $b \neq 0$, y por tanto contiene traslaciones del origen. También posee estructura de grupo y recibe el nombre de **grupo de Poincaré**. Este último será el grupo principal, pues contiene todas las simetrías para el espacio de Minkowski.

3.2. Grupo propio de Lorentz

Como ya se introdujo antes, en esta sección se estudian las transformaciones de Lorentz homogéneas, es decir, las que no consideran traslaciones. Si se identifica el origen $O = 0$, entonces se puede entender la transformación como un automorfismo de \mathbb{R}^4 (equipado con la métrica de Minkowski),

$$\begin{cases} x' = \Lambda x & \text{en notación matricial} \\ (x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu & \text{en notación tensorial} \end{cases} \quad (3.7)$$

tal que preserva el producto lorentziano.

El conjunto de transformaciones homogéneas posee estructura de grupo, el grupo de Lorentz, cuya acción natural sobre \mathbb{R}^4 es la dada por (3.7).

3.2.1. Definición y primeras propiedades

Definición 3.2.1. El **grupo de Lorentz**, denotado por $O(1, 3)$, es el grupo de transformaciones lineales de \mathbb{R}^4 que preservan el producto interno lorentziano.

Bajo la definición anterior se puede **caracterizar** los elementos del grupo de la siguiente manera: si $\Lambda \in O(1, 3)$, entonces $\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle = \langle x, y \rangle$. Matricialmente esto es

$$(\Lambda x)^T G (\Lambda y) = x^T G y \text{ que equivale a } x^T (\Lambda^T G \Lambda) y = x^T G y.$$

Puesto que $x, y \in \mathbb{R}^4$ son arbitrarios se verifica

$$\Lambda^T G \Lambda = G. \quad (3.8)$$

La expresión anterior caracteriza matricialmente los elementos del grupo de Lorentz. Si Λ^μ_ν son los elementos de matriz de Λ , donde los índices μ identifican la fila y ν la columna, la igualdad anterior se expresa como

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\lambda = g_{\sigma\lambda}. \quad (3.9)$$

Comentario 3.2.2. La ecuación anterior es la condición de ortogonalidad particularizada con la métrica de Minkowski. Por tanto, el grupo $O(1, 3)$ toma el mismo papel que el grupo ortogonal $O(4)$ sobre la métrica euclídea. Obsérvese que en el grupo de Lorentz $O(1, 3)$ el primer número denota la dimensión temporal y el segundo la dimensión espacial.

Con la expresión (3.8) puede probarse de manera sencilla que $O(1, 3)$ tiene estructura de **grupo**. En efecto, la identidad I como matriz 4×4 verifica la expresión. Por otro lado, si $\Lambda, \Sigma \in O(1, 3)$ entonces

$$(\Sigma\Lambda)^T G (\Sigma\Lambda) = (\Lambda^T \Sigma^T) G (\Sigma\Lambda) = \Lambda^T (\Sigma^T G \Sigma) \Lambda = \Lambda^T G \Lambda = G.$$

Y por último, dado Λ elemento del grupo, se encuentra que el inverso toma la forma

$$\Lambda^{-1} = G \Lambda^T G.$$

Para probarlo,

$$\Lambda^{-1} \Lambda = G \Lambda^T G \Lambda = G G = I$$

y

$$\Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda G \Lambda^T G = (\Lambda^T G \Lambda)^T G = G G = I.$$

En esta última expresión se ha utilizado la simetría de G ($G^T = G$).

En este punto se quiere profundizar en la **forma de los elementos** de $O(1, 3)$. Si se observa con mayor detenimiento la ecuación (3.8) se concluye:

1. Esta impone 16 condiciones sobre los elementos Λ^μ_ν . Sin embargo 6 de ellas son redundantes; en efecto, obsérvese que (3.9), $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\lambda = g_{\sigma\lambda}$, es invariante bajo permutación de índices $\sigma \longleftrightarrow \lambda$. Luego, con una cuenta sencilla, solo existirán 10 restricciones impuestas por la expresión anterior. Se concluye que los elementos del grupo de Lorentz están determinados por $16 - 10 = 6$ **parámetros libres**.
2. Por otro lado, calculando el determinante en la expresión (3.8) se llega a $\det \Lambda = \pm 1$, puesto que el determinante de Λ^T coincide con Λ .
3. Además, si en (3.9) se impone $\sigma = \lambda = 0$ se llega a

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1,2,3} (\Lambda^i_0)^2 \geq 1.$$

Se puede asegurar que el signo de Λ^0_0 es o positivo o negativo en cada componente conexa (por continuidad de Λ^0_0).

Las notas previas dan una forma muy precisa de los elementos del grupo de Lorentz; es más, se puede asegurar que $O(1,3)$ se divide en 4 componentes conexas (no conectadas entre sí). Estas componentes están determinadas por los homomorfismos no triviales

$$O(1, 3) \longrightarrow \{+1, -1\} : \Lambda \longmapsto \det \Lambda$$

$$O(1, 3) \longrightarrow \{+1, -1\} : \Lambda \longmapsto \text{signo}(\Lambda^0_0)$$

En efecto, puesto que los homomorfismos anteriores son continuos y su imagen posee dos componentes desconectadas se concluye que el grupo de Lorentz es no conexo con cuatro componentes no conectadas, la intersección de la contraimagen de los anteriores homomorfismos.

Por otro lado, se pueden construir los subgrupo de Lorentz a través de los homomorfismos anteriores. No obstante, solo uno de ellos, el *grupo propio de Lorentz* se corresponde con una única componente conexa: la componente conexa de la identidad. Este subgrupo será el objeto de estudio en las páginas siguientes.

Definición 3.2.3 (Los subgrupos de Lorentz).

1. **Grupo de Lorentz especial** $SO(1, 3)$ como el núcleo del homomorfismo $\det(\Lambda)$. Se define, a su vez, el **grupo ortocrono de Lorentz** $O^+(1, 3)$ como el núcleo del homomorfismo $\text{signo}(\Lambda_0^0)$.
2. **Grupo propio de Lorentz** como $SO^+(1, 3) = SO(1, 3) \cap O^+(1, 3)$. Es decir, la componente conexa de la identidad en $O(1, 3)$.

A pesar de que solo interesará la componente conexa de la identidad, el grupo propio de Lorentz, merece la pena hacer un comentario respecto a las demás componentes.

Comentario 3.2.4 (Reflexiones espaciales y temporales). Las demás componentes conexas del grupo de Lorentz (sin considerar el grupo propio) están relacionadas con reflexiones tanto temporales como espaciales. Se tienen que tener en cuenta estas componentes cuando se trabaja con las llamadas *simetrías discretas*. Estas simetrías están ligadas a propiedades de partículas elementales como paridad o inversión espacial o reversibilidad temporal. Un estudio más profundo se puede encontrar en [16, §III.6].

3.2.2. Construcción del grupo propio de Lorentz

El grupo $SO^+(1, 3)$ puede expresarse en términos de dos conjuntos de matrices: **rotaciones espaciales** y **boosts de Lorentz**. Es más, se probará que los productos entre rotaciones espaciales y boosts construyen todos los elementos del grupo.

- **Rotaciones espaciales.** Es el conjunto de rotaciones que solo afectan a la parte espacial. Los elementos del conjunto se denotan por $\Lambda_r(\theta, \phi, \psi)$ con

$$\Lambda_r(\theta, \phi, \psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

donde R es una rotación 3×3 con ψ la cantidad rotada y (θ, ϕ) la dirección del eje de rotación. Es interesante observar que es subgrupo de $SO^+(1, 3)$ e isomorfo a $SO(3)$.

- **Boosts de Lorentz.** Es el conjunto de transformaciones particulares de espacio-tiempo que se corresponde con un cambio de referencia entre dos sistemas que se mueven a velocidad relativa $v = \tanh(\xi)$ en una misma dirección. El boost en la dirección del eje z , para un valor $\xi \in \mathbb{R}$, se denota por $\Lambda_b(z, \xi)$ con

$$\Lambda_b(z, \xi) = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & \sinh \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Así descrito, el boost es una transformación espacio-temporal en el plano (t, z) . Un boost general en la dirección (θ, ϕ) se escribe como,

$$\Lambda_b(\theta, \phi, \xi) = \Lambda_r(\theta, \phi, 0)\Lambda_b(z, \xi)[\Lambda_r(\theta, \phi, 0)]^{-1}. \quad (3.12)$$

Para ver esta transformación basta con observar que las rotaciones $\Lambda_r(\theta, \phi, 0)$ actúan como cambio de base de tal manera que envían el eje z en el eje (θ, ϕ) . Así se obtiene la expresión anterior.

Proposición 3.2.5 (Propiedades).

1. Las rotaciones espaciales verifican $\Lambda_r^T = \Lambda_r^{-1}$.
2. Los boosts de Lorentz son simétricos, es decir, $\Lambda_b^T = \Lambda_b$.
3. Todo elemento de $SO^+(1, 3)$ se escribe como $\Lambda_r(\alpha, \beta, 0)\Lambda_b(z, \xi)[\Lambda_r(\theta, \phi, \psi)]^{-1}$

Demostración. La primera propiedad se establece de manera directa bajo el isomorfismo con el grupo $SO(3)$, pues la representación matricial de este grupo tiene la propiedad de ortogonalidad ($R^T = R^{-1}$) y por tanto se hereda de manera natural consiguiendo $\Lambda_r^T = \Lambda_r^{-1}$.

Para la segunda propiedad basta ver que

$$\begin{aligned} [\Lambda_b(\theta, \phi, \xi)]^T &= [\Lambda_r(\theta, \phi, 0)\Lambda_b(z, \xi)[\Lambda_r(\theta, \phi, 0)]^{-1}]^T \\ &= ([\Lambda_r(\theta, \phi, 0)]^{-1})^T \Lambda_b(z, \xi)^T [\Lambda_r(\theta, \phi, 0)]^T \\ &= \Lambda_b(\theta, \phi, \xi) \end{aligned}$$

Donde se ha utilizado la propiedad 1 y la simetría del boost $\Lambda_b(z, \xi)$.

Para la última propiedad se parte de la ecuación $(\Lambda_0^0)^2 - \sum_{i=1,2,3}(\Lambda_0^i)^2 = 1$ para un elemento Λ . Esta ecuación sugiere la parametrización,

$$\begin{cases} \Lambda_0^0 = \cosh \xi \\ \Lambda_0^1 = \sinh \xi \sin \beta \cos \alpha \\ \Lambda_0^2 = \sinh \xi \cos \beta \cos \alpha \\ \Lambda_0^3 = \sinh \xi \sin \alpha \end{cases}$$

con $0 \leq \xi$ y $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$. Ahora, se escoge $t = (1, 0, 0, 0)$ cuadvivector temporal, de tal manera que $(\Lambda t)^\mu = \Lambda^\mu_\nu t^\nu = \Lambda^\mu_0$. Además, si se aplica sobre un boost de Lorentz en la dirección z se tiene que $\Lambda_b(z, \xi)t = (\cosh \xi, 0, 0, \sinh \xi)$ y por tanto se llega a $\Lambda_r(\alpha, \beta, 0)\Lambda_b(z, \xi)t = \Lambda_0^\mu$ al multiplicar por la rotación $\Lambda_r(\alpha, \beta, 0)$. De aquí se concluye,

$$\Lambda^{-1}\Lambda_r(\alpha, \beta, 0)\Lambda_b(z, \xi)t = t.$$

La igualdad anterior establece que la transformación considerada deja invariante al elemento temporal t . No obstante, solo el subgrupo de las rotaciones espaciales deja invariante a dicho elemento y por tanto debe verificarse $\Lambda^{-1}\Lambda_r(\alpha, \beta, 0)\Lambda_b(z, \xi) = \Lambda_r(\theta, \phi, \psi)$, o

$$\Lambda = \Lambda_r(\alpha, \beta, 0)\Lambda_b(z, \xi)[\Lambda_r(\theta, \phi, \psi)]^{-1}$$

□

La última propiedad de la proposición anterior establece la descomposición de todo elemento del grupo propio de Lorentz como producto de rotaciones y boost. Es más, si se toma la definición de boost general (3.12) se tiene que $\Lambda = \Lambda_b(\alpha, \beta, \xi)\Lambda_r$, producto de un boost por una rotación.

3.2.3. Álgebra de Lie del grupo propio de Lorentz

Como subgrupo cerrado de $GL(4; \mathbb{R})$ tiene estructura de grupo matricial de Lie, con dimensión 6. Es no compacto (puesto que los boost de Lorentz no están acotados). Por tanto, en un entorno de la identidad se pueden escribir los elementos del grupo como

$$\Lambda = \exp \left\{ -i(\theta^i L_i + \eta^i K_i) \right\} \quad (3.13)$$

donde L_i son los generadores infinitesimales de las rotaciones y K_i los generadores infinitesimales de los boosts de Lorentz. Cada generador toma la forma

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} & K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Las reglas de conmutación asociadas al álgebra de Lie del grupo propio de Lorentz son

$$\begin{cases} [L_i, L_j] &= i\epsilon^{ijk} L_k \\ [L_i, K_j] &= i\epsilon^{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= -i\epsilon^{ijk} L_k \end{cases} \quad (3.15)$$

Comentario 3.2.6. Sobre las reglas de conmutación, (3.15), se pueden hacer los siguientes comentarios: la primera conmutación indica que los elementos generados por L_i forma un subgrupo del grupo propio de Lorentz. La segunda y tercera conmutación establecen que el conjunto de boosts no forman subgrupo y se mezclan con elementos generados por L_i .

Se pueden escribir los generadores del grupo propio de Lorentz de una forma más compacta, como $\{M_{\mu\nu}\}$ tal que

$$\begin{cases} L_i = \epsilon^{ijk} M_{kj} \\ K_i = M_{0i} \end{cases} \quad (3.16)$$

Así se concluye el estudio del grupo propio de Lorentz. A continuación se tratará el grupo inhomogéneo de Lorentz o grupo de Poincaré.

3.3. Grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré es el grupo de transformaciones inhomogéneas sobre el espacio de Minkowski, es decir, aquellas dadas por

$$\begin{cases} x' = \Lambda x + b & \text{en notación matricial} \\ (x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + b^\mu & \text{en notación tensorial} \end{cases} \quad (3.17)$$

y tales que preservan el producto lorentziano. Es decir, son transformaciones del grupo de Lorentz junto a traslaciones espacio-temporales⁴.

La definición del grupo y sus primeras propiedades, así como el estudio de su forma, se corresponderá al primer apartado de la subsección. En un segundo apartado se estudiará el álgebra asociada al grupo de Poincaré. En el último apartado se estudian las órbitas y los grupos pequeños. Este estudio será necesario de cara a la obtención de las representaciones unitarias e irreducibles (puesto que el grupo no es ni abeliano ni compacto, se hace necesario utilizar la metodología de Mackey para obtener estas representaciones).

3.3.1. Definición

Definición 3.3.1. Se define el **grupo de Poincaré** \mathcal{P} o **grupo de Lorentz inhomogéneo** al grupo de traslaciones espacio-temporales junto al grupo propio de Lorentz cuya acción sobre el espacio de Minkowski está dada por

$$x \mapsto x' = (\Lambda, b)x \equiv \Lambda x + b$$

donde (Λ, b) denota un elemento del grupo con $\Lambda \in SO^+(1, 3)$ y $b \in \mathbb{R}^4$ cuadrivector de traslación.

De esta manera, la representación del grupo puede expresarse como transformaciones afines en el espacio \mathbb{R}^4 . En detalle, con notación contravariante, se tiene $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + b^\mu$. De forma explícita, la representación afín de (Λ, b) posee forma de matriz 5×5 ,

$$(\Lambda, b) = \begin{pmatrix} & & & & b^0 \\ & & & & b^1 \\ & & \Lambda & & b^2 \\ & & & & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

La asociación de los elementos del grupo de Poincaré con la representación afín permitirá deducir de manera sencilla las propiedades que siguen a este texto. En primer lugar, se tiene que tanto las transformaciones propias de Lorentz como el conjunto de traslaciones espacio-temporales forman subgrupo para el grupo de Poincaré. Más detalladamente:

⁴Las traslaciones espacio-temporales preservan el producto lorentziano. Si $x, y \in \mathcal{M}$, el cuadrivector definido como diferencia $x - y$ es invariante por traslación: $x' - y' = (x + b) - (y + b) = x - y$. Luego, la traslación preserva el producto lorentziano.

- **Traslaciones:** es el subgrupo de elementos $\{I, b\}$ que toman la forma,

$$\begin{pmatrix} & & & b^0 \\ & & & b^1 \\ & I & & b^2 \\ & & & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto de estos elementos forma un subgrupo que es isomorfo a $(\mathbb{R}^4, +)$, grupo aditivo.

- **Grupo propio de Lorentz:** se puede definir como el conjunto $\{(\Lambda, 0)\}$ de elementos del grupo que toman la forma

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & \Lambda & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este conjunto es subgrupo y es isomorfo al grupo propio de Lorentz, y por tanto, hereda sus propiedades como grupo.

Bajo las consideraciones previas es fácil hallar las **leyes del grupo**, es decir, la forma que toman las operaciones de producto e inversión de elementos.

Proposición 3.3.2 (Leyes del grupo). *Para el grupo de Poincaré se verifican las siguientes leyes:*

$$\begin{cases} (\Lambda, a)(\Sigma, b) = (\Lambda\Sigma, a + \Lambda b) \\ (\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \end{cases} \quad (3.19)$$

Demostración. Como se ha comentado antes, basta tomar la forma matricial de los elementos del grupo y calcular el producto como producto matricial: se llega de forma sencilla a la expresión $(\Lambda, a)(\Sigma, b) = (\Lambda\Sigma, a + \Lambda b)$. Para la segunda ley, se define el elemento $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ (que está bien definido por ser Λ invertible). De esta manera,

$$(\Lambda, a)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (I, a - \Lambda[\Lambda^{-1}a]) = (I, 0)$$

De la misma manera se tiene que $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)(\Lambda, a) = (I, 0)$. Se concluye que $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ es el inverso de (Λ, a) . \square

El siguiente paso es profundizar en la relación entre ambos subgrupos del grupo de Poincaré. En este sentido, el grupo de Poincaré es producto semidirecto del grupo propio de Lorentz y el grupo de traslaciones, de la misma manera que el grupo euclídeo es producto semidirecto de traslaciones y rotaciones. La siguiente proposición enmarca esta idea.

Proposición 3.3.3. \mathcal{P} es producto semidirecto de las traslaciones en \mathbb{R}^4 y $SO^+(1, 3)$. Esto es,

$$\mathcal{P} = SO^+(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$$

Demostración. En primer lugar, el subgrupo de traslaciones es abeliano y normal al grupo de Poincaré. La primera afirmación es clara debido a la relación del subgrupo con el grupo $(\mathbb{R}^4, +)$, la segunda parte se puede comprobar de manera sencilla utilizando las leyes del grupo,

$$(\Lambda, b)^{-1}(I, a)(\Lambda, b) = (\Lambda, b)^{-1}(\Lambda, a + b) = (I, -\Lambda^{-1}a)$$

Esto demuestra que el subgrupo es normal para el grupo de Poincaré. Por otro lado, por definición del grupo de Poincaré, todo elemento del grupo se puede caracterizar como (Λ, b) y por tanto se tiene una biyección $SO^+(1, 3) \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{P}$ natural. Considerando la naturaleza del grupo de traslaciones, la conclusión es inmediata: el grupo de Poincaré es producto semidirecto de ambos subgrupos. □

3.3.2. Álgebra de Lie del grupo de Poincaré

Por ser subgrupo cerrado de $GL(5, \mathbb{R})$ se le puede dotar de estructura de grupo matricial de Lie. Su álgebra tiene dimensión 10 (donde 6 parámetros son aportados por el grupo propio de Lorentz y otros 4 por las traslaciones) y sus generadores son los generadores del grupo propio de Lorentz junto a los generadores de las traslaciones. A continuación se da la notación de los dos tipos de generadores y su forma explícita,

- **Generadores de las traslaciones:** Se denotan por $\{P_\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ y toman la forma

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una traslación finita se podrá escribir como $(I, a) = \exp(-ia^\mu P_\mu)$. Las traslaciones espaciotemporales toman un papel importante dentro de la física, se puede probar que los generadores P_μ están relacionados con el cuadrivector del sistema físico considerado [26].

- **Generadores del subgrupo propio de Lorentz:** Se denotan por $\{M_{\mu\nu}\}$ tomando la misma forma que los generadores del grupo propio de Lorentz (3.16), ya tratados en la subsección anterior. Como matrices 5×5 toman la forma

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por tanto, $\{M_{\mu\nu}, P_\mu\}$ son los generadores del álgebra de Lie de \mathcal{P} y actúan como tensores covariantes. Además, verifican las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{cases} [P_\nu, P_\mu] &= 0 \\ [P_\mu, M_{\lambda\sigma}] &= i(P_\lambda g_{\mu\sigma} - P_\sigma g_{\mu\lambda}) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\lambda\sigma}] &= i(M_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} - M_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda} + M_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - M_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) \end{cases} \tag{3.21}$$

Esta estructura de álgebra se asemeja a la estructura para $E(3)$ sustituyendo el tensor totalmente antisimétrico ε^{klm} por la métrica. Si se distingue de forma explícita los dos tipos de generadores $\{L_i, K_i\}$ para el grupo propio de Lorentz entonces la relación es más clara: las reglas de conmutación anteriores quedan descritas por las expresadas en (3.15) junto con

$$\begin{cases} [P_n, P_m] &= 0 \\ [P^0, P_m] &= 0 \\ [P^0, J_n] &= 0 \\ [P_m, J_n] &= i\varepsilon^{mnl} P_l \\ [P_m, K_n] &= i\delta_{mn} P^0 \\ [P^0, K_n] &= iP_n \end{cases} \tag{3.22}$$

Siguiendo los comentarios de la bibliografía [34, Chapter 10], muchas de estas relaciones resultan familiares al compararlas con $E(3)$. Las demás ponen de manifiesto nuevas relaciones: las rotaciones son invariantes por traslación temporal P^0 y las traslaciones espaciales y los boosts de Lorentz conmutan si se efectúan en ejes perpendiculares pero se mezclan si lo hacen en el mismo eje.

3.3.3. Órbitas y grupos pequeños de Poincaré

En los apartados anteriores se ha definido el grupo de Poincaré y se han dado sus propiedades principales; queda ver la forma de las órbitas y de los grupos pequeños de cara a estudiar las representaciones. La idea que subyace es la de utilizar la metodología de Mackey (§2.2.3) para inducir representaciones a partir de los grupos pequeños. Por la forma del grupo de Poincaré, como producto semidirecto $\mathcal{P} = SO^+(1,3) \ltimes \mathbb{R}^4$, se puede utilizar esta herramienta matemática, que permite hablar de órbitas y grupos pequeños. Los detalles se dan a continuación.

Detalles matemáticos

En primer lugar, el grupo de Poincaré \mathcal{P} es producto semidirecto del grupo de traslaciones \mathbb{R}^4 y de $SO^+(1,3)$, $\mathcal{P} = SO^+(1,3) \ltimes \mathbb{R}^4$. El grupo de traslaciones es subgrupo normal y abeliano respecto a \mathcal{P} . Por tanto, se puede asociar un grupo dual al grupo de traslaciones bajo la identificación $\hat{\mathbb{R}}^4 \cong \mathbb{R}^4$ (ver el Ejemplo 2.2.6). Su función característica asociada se denota como

$$\langle x, p \rangle = e^{ip_\mu x^\mu}$$

donde p es el elemento del espacio dual, conocido como **espacio de momentos**, en el cual se ha tomado el producto interno lorentziano.

En segundo lugar, se puede definir una **acción** del grupo de Poincaré sobre el espacio de momentos; esta acción permitirá definir las órbitas del grupo y los grupos pequeños asociados. En detalle, para p elemento del espacio de momentos y $(\Lambda, b) \in \mathcal{P}$, la acción del grupo de Poincaré sobre el grupo dual se representa por $(\Lambda, b)p$ que viene determinada por la evaluación del elemento del espacio de momentos sobre $a \in \mathbb{R}^4$, traslación,

$$\langle a, (\Lambda, b)p \rangle = \langle (\Lambda, b)^{-1}a(\Lambda, b), p \rangle = \langle (\Lambda, b)^{-1}(Id, a)(\Lambda, b), p \rangle.$$

Al utilizar la ley del grupo,

$$\langle (Id, \Lambda^{-1}a), p \rangle = \langle \Lambda^{-1}a, p \rangle = \langle a, \Lambda p \rangle.$$

Donde en la última igualdad se ha utilizado la representación contragradiente⁵ de Λ sobre el grupo dual. De esta manera, la acción del grupo se puede tomar como

$$(\Lambda, a)p = \Lambda p \tag{3.23}$$

donde p se escribe como cuadrivector en \mathbb{R}^4 . Es decir, la acción sobre el grupo dual puede tomarse como la acción del grupo propio de Lorentz sobre los elementos del espacio de momentos.

Tras estos detalles se pueden obtener ya las órbitas y los grupos pequeños asociados al grupo de Poincaré. Para mayor profundización se dejan los textos de Folland [6] y [7].

⁵Dada una representación $\pi : G \rightarrow U(\mathcal{H})$, la representación contragradiente de π es una representación de G definida sobre el espacio dual de \mathcal{H} (ver Comentario 2.39 del TFG de Matemáticas). En este caso particular, la acción contragradiente de Λ sobre \mathbb{R}^4 se corresponde con Λ^{-1} sobre el espacio de momentos.

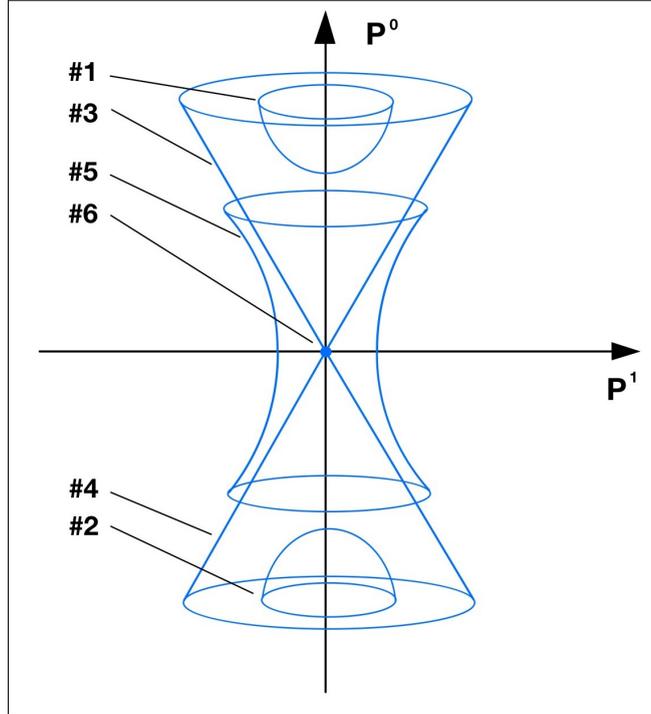


Figura 3.1: Representación tridimensional de las órbitas para el espacio de momentos asociado al grupo de Poincaré $(2 + 1)$ -dimensional. En el eje vertical se representa la coordenada p^0 mientras que en el eje horizontal la coordenada p^1 (el eje p^2 no se ha representado con la intención de tener un dibujo más claro).

Órbitas del grupo de Poincaré

Se define la **órbita** del elemento $p \in \mathbb{R}^4$ del espacio de momentos como

$$O_p = \{(\Lambda, a)p : (\Lambda, a) \in \mathcal{P}\}.$$

A la luz de los comentarios previos sobre la acción, la órbita de p queda descrita por

$$\{\Lambda p : \Lambda \in SO^+(1, 3)\};$$

y puesto que el grupo propio de Lorentz preserva el producto interno lorentziano, se concluye que la órbita de p está descrita por una hipersuperficie sobre el espacio de momentos

$$(\Lambda p)^2 = p^2 = m^2 \quad (3.24)$$

con $m^2 \in \mathbb{R}$ fijo. La ecuación anterior describe 6 tipos de hipersuperficie sobre el espacio de momentos (dotado con el producto interno lorentziano)[16]. En la Figura 3.1 se ha añadido una representación de dichas órbitas.

- Órbitas de tipo-tiempo:** Las órbitas #1 y #2 tienen la forma de cuadrivectores de tipo-tiempo para el producto interno lorentziano: para $m^2 > 0$ se tiene la ecuación de un hiperboloide de dos hojas,

$$(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

La hoja superior (#1) se asocia con valores $p^0 > 0$ y la inferior (#2) con $p^0 < 0$.

- **Órbitas de tipo-luz:** Las órbitas #3 y #4 toman la forma de dos conos de luz. La ecuación asociada es

$$(p^0)^2 = \mathbf{p}^2$$

donde se ha escogido $m^2 = 0$.

- **Órbita de tipo-espacio:** La órbita #5 tiene la forma de hiperboloide de una hoja. La ecuación que describe esta hipersuperficie es

$$(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

donde $m^2 < 0$. Describe por tanto vectores de tipo-espacio.

- **Origen:** La última órbita es la órbita degenerada, #6, dada por el origen: $\{0\}$.

Comentario 3.3.4 (Una interpretación física de las órbitas). El espacio de momentos del grupo de Poincaré está asociado con el espacio de cuatrimomentos posibles para el sistema físico de una partícula libre. Es más, cada órbita se identificará con una tipología de partícula libre en su capa de masa (*on-shell*, es decir, verificando $p^2 = m^2$ con m masa en reposo de la partícula).

Bajo esta interpretación, la **órbita de tipo-luz** se corresponde con una *partícula sin masa*, como un fotón o un neutrino⁶; la **órbita de tipo-tiempo** se corresponde con una *partícula másica*, como un electrón. Además, la existencia de dos hojas para la órbita de tipo tiempo puede asociarse con la distinción entre partícula y antipartícula en el marco de la Teoría Cuántica de Campos (donde la antipartícula se corresponde con la solución negativa de la ecuación de onda relativista, y por tanto se asocia con la hoja inferior).

Por otro lado, las **órbitas de tipo-espacio** y la **órbita degenerada** se suelen identificar con una *partícula taquiónica* (partícula superlumínica) y con el *vacío*, respectivamente. [2].

La identificación de partículas libres con órbitas del grupo de Poincaré es de suma importancia y es la antesala a la construcción de ecuaciones de onda a través de las representaciones asociadas a cada órbita. La conclusión de este apartado se resume en el Cuadro 3.1.

Órbitas del grupo de Poincaré			
Nombre	Definición	Forma	Partícula asociada
Tipo-tiempo	#1 y #2: $p^2 = m^2$ con $m^2 > 0$	Hiperboloide de dos hojas	Partícula másica
Tipo-luz	#3 y #4: $p^2 = 0$	Cono de luz	Partícula sin masa
Tipo-espacio	#5: $p^2 = m^2$ con $m^2 < 0$	Hiperboloide de una hoja	Partícula taquiónica
Origen	#6: $\{0\}$	Origen	Vacío

Cuadro 3.1: Órbitas asociadas al grupo de Poincaré descritas por su ecuación, forma geométrica e interpretación física.

⁶Es cierto que actualmente se considera al neutrino una partícula másica, como puso de manifiesto el premio Nobel de 2015 al proyecto de Super-Kamiokande (dirigido por T. Kajita) y el SNO (dirigido por A. McDonald) por “el descubrimiento de las oscilaciones de neutrinos, que muestra que los neutrinos tienen masa” [33]. Sin embargo, con una intención puramente didáctica se puede considerar, siguiendo la bibliografía, que el neutrino no posee masa.

Grupos pequeños del grupo de Poincaré

Dado un elemento p del espacio de momentos se define el **grupo pequeño** de p como

$$H_p = G_p \cap SO^+(1, 3).$$

Es decir, la intersección del estabilizador con el subgrupo propio de Lorentz. Para cada órbita solo interesará calcular el grupo pequeño asociada a un único representante, el elemento más sencillo de la órbita; por la teoría de representaciones inducidas, y en virtud del Teorema de Mackey 2.2.10, se establece una equivalencia entre las representaciones inducidas por elementos de la misma órbita. Este será el criterio seguido en la siguiente clasificación.

- **Grupo pequeño para la órbita de tipo-tiempo:** Se escoge el representante de la órbita $(\pm m, 0, 0, 0)^T$. Los elementos del grupo pequeño serán aquellos que verifiquen la ecuación matricial $\Lambda p = p$, cuya solución será

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde R representa una rotación espacial 3×3 . En efecto, la condición de invarianza implica en primer lugar que $\Lambda_0^0 = 1$. Utilizando $(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum (\Lambda_i^0)^2 = 1$ se llega a que $\Lambda_i^0 = 0$. Y con el mismo argumento, también $\Lambda_0^i = 0$. De este modo solo habrá componente espacial, R , para el elemento del grupo propio de Lorentz que tendrá que tomar la forma de rotación espacial.

Se concluye que el grupo pequeño para las órbitas de tipo tiempo es isomorfo a $SO(3)$. Los generadores infinitesimales del grupo serán los generadores asociados con las rotaciones espaciales, L_1, L_2, L_3 .

- **Grupo pequeño para la órbita de tipo-luz:** La identificación del grupo pequeño es más complicada que en el caso anterior. El representante se escoge como $(\pm\omega, \omega, 0, 0)^T$ con $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Y para el análisis siguiente se fija como $p = (1, 1, 0, 0)^T$, representante del cono superior (el razonamiento es el mismo si se escoge $(-1, 1, 0, 0)^T$, para el cono inferior). Sea Λ un elemento del grupo pequeño H_p , y por tanto, verifica $\Lambda p = p$. Este elemento puede escribirse en función de un elemento del álgebra, es decir, de la forma $\Lambda = e^{iAt}$, con A elemento del álgebra $\mathfrak{so}^+(1, 3)$ y $t \in \mathbb{R}$. En término de la base del álgebra, cuyos generadores infinitesimales están descritos en (3.14), se tiene que

$$A = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + b_1 K_1 + b_2 K_2 + b_3 K_3, \quad \text{para } a_i, b_i \in \mathbb{R}. \quad (3.25)$$

Si se considera una transformación infinitesimal de parámetro δt , el elemento Λ puede escribirse según $\Lambda \simeq I + i\delta t A + \mathcal{O}(\delta t^2)$. De este modo, hasta primer orden en δt ,

$$e^{iA\delta t} p \simeq (1 + i\delta t A)p = p$$

La ecuación anterior equivale a $Ap = 0$. De forma más explícita,

$$Ap_l = \begin{pmatrix} 0 & ib_1 & ib_2 & ib_3 \\ ib_1 & 0 & -ia_3 & -ia_2 \\ ib_2 & ia_3 & 0 & -ia_1 \\ ib_3 & ia_2 & ia_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ib_1 \\ ib_1 \\ i(a_3 + b_2) \\ i(a_2 + b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

de donde se obtiene que

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -a_3, \quad b_3 = -a_2.$$

Es decir, A debe ser un elemento de la forma

$$A = a_1 L_1 + a_2(L_2 - K_3) + a_3(L_3 - K_2) = a_1 L_1 + a_2 N_1 + a_3 N_2.$$

Los generadores infinitesimales del grupo pequeño son $\{L_1, N_1, N_2\}$ donde L_1 es el generador de las rotaciones en el plano (x_2, x_3) . De forma explícita,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Además, verifican las reglas de conmutación

$$\begin{cases} [N_1, N_2] = 0 \\ [N_1, L_1] = -iN_2 \\ [N_2, L_1] = iN_1 \end{cases} \quad (3.27)$$

que coincide con las relaciones de conmutación dadas para el álgebra de Lie asociada al grupo euclídeo $E(2)$ (ver §2.5.3).

- **Grupo pequeño de la órbitas de tipo-espacio:** En este caso se escoge como representante $(0, 0, 0, m)^T$. Los elementos de $SO^+(1, 3)$ que dejan invariante al representante son los boosts respecto a los ejes x e y y las rotaciones entorno al eje z . Se concluye que el grupo pequeño es isomorfo a $SO^+(1, 2)$. Los generadores del álgebra son $\{K_1, K_2, L_3\}$.
- **Grupo pequeño del origen:** En este caso solo existe un elemento de la órbita, el origen, que es invariante bajo cualquier transformación del grupo de Lorentz. De esta manera, el grupo pequeño está asociado con todo $SO^+(1, 3)$.

Un resumen de esta clasificación se da en el Cuadro 3.2.

Grupos pequeños del grupo de Poincaré	
Órbita tipo tiempo	$SO(3)$
Órbita de tipo luz	$E(2)$
Órbita de tipo espacio	$SO^+(1, 2)$
Origen	$SO^+(1, 3)$

Cuadro 3.2: Grupos pequeños asociados a cada órbita del grupo de Poincaré

Operadores de Pauli-Lubanski

Como último apartado, se introduce un conjunto de operadores sobre el álgebra envolvente universal de Poincaré conocidos como **operadores de Pauli-Lubanski**. Estos operadores forman

base del grupo pequeño para las distintas órbitas del grupo de Poincaré y toman un papel importante como *segundo operador de Casimir*. La idea es introducir estas nociones para utilizarlas en la siguiente subsección.

Definición 3.3.5. Los operadores de Pauli-Lubanski se definen como

$$W^\lambda = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} M_{\mu\nu} P_\sigma$$

donde P^μ son los generadores de traslación y $M_{\mu\nu}$ los generadores del grupo propio de Lorentz.

Las propiedades fundamentales se enmarcan en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.6. Los operadores W^μ de Pauli-Lubanski verifican,

$$\begin{cases} W^\lambda P_\lambda = 0 \\ [W^\lambda, P^\mu] = 0 \\ [W^\lambda, M^{\mu\nu}] = i(W^\mu g^{\lambda\nu} - W^\nu g^{\mu\lambda}) \\ [W^\lambda, W^\sigma] = i\varepsilon^{\lambda\sigma\mu\nu} W_\mu P_\nu \end{cases} \quad (3.28)$$

Demostración. La primera ecuación establece que $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} M_{\mu\nu} P_\lambda P_\sigma = 0$. En efecto, esto es así puesto que los índices $(\lambda\sigma)$ son antisimétricos para el tensor $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ mientras que son simétricos para el producto $P_\lambda P_\sigma$. De la misma manera, se verifica la segunda ecuación.

La tercera y la cuarta igualdad se consiguen trabajando con la definición del W^μ y las reglas de conmutación de los generadores del grupo de Poincaré. Lo interesante está en que la tercera igualdad establece que los operadores de Pauli-Lubanski transforman bajo $M^{\mu\nu}$ como cuadvectores. \square

Como ya se enunció, los operadores independientes de Pauli-Lubanski generan un álgebra que coincide con el álgebra del grupo pequeño para la órbita dada [34, Th. 10.13]. Si p es representante de la órbita, entonces $W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} M_{\mu\nu} p_\sigma$ es la forma del operador cuando se restringe al grupo pequeño (pues p_μ toma el papel de autovalor para P_μ).

Como ejemplo, para el grupo pequeño $SO(3)$ se toma como representante de la órbita $(m, 0, 0, 0)^T$. De esta manera se tiene,

$$\begin{cases} W^0 = 0 \\ W^i = \frac{m}{2} \varepsilon^{ijk} M_{jk} = \frac{m}{2} L^i \end{cases} \quad (3.29)$$

Los términos W^i coinciden con los generadores L^i del grupo pequeño $SO(3)$ (multiplicados por el factor de masa).

Otro ejemplo, para el grupo pequeño $E(2)$ se toma como representante $(\omega, \omega, 0, 0)^T$ con $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{cases} W^0 = W^1 = \omega L_1 \\ W^2 = \omega(M_{13} - M_{03}) = -\omega N_2 \\ W^3 = \omega(-M_{12} + M_{02}) = \omega N_1 \end{cases} \quad (3.30)$$

Los términos independientes recuperan el álgebra generada por el grupo pequeño $\{L_1, N_1, N_2\}$.

Para la órbita de tipo-espacio, con representante $(0, 0, 0, m)^T$ se obtiene

$$\begin{cases} W^0 = mL_3 \\ W^1 = mM_{20} = mK_2 \\ W^3 = mM_{10} = mK_1 \end{cases}$$

Se concluye que los operadores (independientes) de Pauli-Lubanski construyen el álgebra de Lie del grupo pequeño asociada a la órbita dada. Este hecho será relevante para la sección siguiente.

Capítulo 4

Representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré

En esta sección se obtendrá la clasificación completa de las representaciones unitarias e irreducibles del grupo de Poincaré. Esta construcción está garantizada por la teoría de representaciones inducidas, tratada en la sección §2.2.3. El sentido físico se alcanzará a través de la teoría de Operadores de Casimir, introducida en §2.3.4.

En una primera sección se introducen algunos preliminares matemáticos que ofrecen las herramientas necesarias para el trabajo posterior; es decir, se introducen los operadores de Casimir del grupo de Poincaré y se particulariza la inducción de representaciones para este grupo. La primera parte está basada en el texto de Tung [34] y la segunda, en el libro de Folland [6].

La segunda y la tercera sección estudian de manera minuciosa las representaciones másicas (vinculadas a la órbita de tipo-tiempo) y masa nula (asociada a la órbita de tipo-luz –que contiene las representaciones de espín continuo–), respectivamente. En cada una de ellas se obtienen las ecuaciones de onda para las partículas asociadas (ec. de Klein-Gordon, ec. de Dirac, etc.). El artículo original de Wigner y Bargmann [1], así como los libros de Kim [16], Varadarajan [35] y Folland [7] forman la bibliografía básica de estas secciones. Para las representaciones de espín continuo se han utilizado los artículos de Beakert [2] [3] [4], además de otros artículos especificados en esta parte.

En la última sección se completa la clasificación de las representaciones del grupo con las asociadas a las órbitas de tipo-espacio y la órbita degenerada.

4.1. Comentarios matemáticos

4.1.1. Primer y segundo operador de Casimir

Un **operador de Casimir** es aquel operador del álgebra recubridora universal del álgebra de Lie que conmuta con todos los elementos del grupo. En virtud del Lema de Schur 2.2.4, cuando

se consideran representaciones unitarias e irreducibles del grupo el operador de Casimir toma la forma de múltiplo de la identidad. Por tanto, permite caracterizar cada representación irreducible en función de dicho parámetro. En el caso presente, con dimensión $1 + 3$, se deben escoger dos operadores de Casimir para caracterizar completamente cada representación unitaria e irreducible¹.

Proposición 4.1.1 (Primer y Segundo operador de Casimir). *Para la caracterización del grupo de Poincaré se utilizan los siguientes operadores de Casimir que son llamados, respectivamente, **primer y segundo operador de Casimir**,*

$$P^2 = P_\mu P^\mu \quad W^2 = W_\mu W^\mu \quad (4.1)$$

donde P^μ es el generador infinitesimal de las traslaciones y W^μ el vector de Pauli-Lubanski (Definición 3.3.5).

Demostración. Tanto P_μ y W_μ conmutan con todos los operadores de traslación, por las reglas de conmutación mencionadas anteriormente. Por otro lado, ambos toman la forma de cuadrivector bajo transformaciones de Lorentz, luego sus contracciones W^2 y P^2 toman la forma de escalares para estas transformaciones. De este modo, son invariantes. \square

Si se fija una órbita, dada por la hipersuperficie $p^2 = m^2$ con p elemento de la órbita, entonces **los autovalores de los operadores de Casimir pueden dar una clasificación de las representaciones inducidas por el grupo pequeño asociado a la órbita**. En detalle, por un lado el operador P_μ , como generador infinitesimal de traslaciones, posee como autovalor p_μ al restringirse sobre la órbita. Por tanto, P^2 toma el valor de m^2 . Por otro lado, $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} M_{\lambda\nu} p_\sigma$ cuando se restringe sobre la órbita. De este modo, $W^2 = -\frac{m^2}{4}L^2$ donde L^2 es la contracción de los generadores del grupo propio de Lorentz restringidos a la órbita. Para la órbita de tipo-tiempo y tipo-luz L^2 tomará un valor fijo (quizá discreto o continuo) permitiendo la caracterización a través de este segundo operador.

Para estas dos órbitas, tipo-tiempo y tipo-luz, se puede dar una interpretación física (como se hizo en el Comentario 3.3.4) de estos dos operadores de Casimir.

Comentario 4.1.2 (Interpretación física de los operadores de Casimir). Las órbitas de tipo-tiempo y tipo-luz se asociaron respectivamente con partículas *on-shell* con masa y sin masa. Siguiendo con esta identificación, al introducir los operadores de Casimir, estos toman un significado preciso. Por un lado, el autovalor de P^2 (denotado por m^2) asigna la masa m a la órbita asociada; por otro lado, los autovalores de W^2 asignan un valor a la estructura interna de la partícula, esto es, definen el *espín* o *helicidad* [16, §III.5].

¹Conviene notar que para dimensiones mayores se necesitan más operadores de tal manera que la clasificación se convierte en un problema técnicamente pesado. Para evitar este problema se pueden construir metodologías más generales [3].

4.1.2. Representaciones inducidas para el grupo de Poincaré

El **Teorema de Mackey** 2.2.10 puede aplicarse al grupo de Poincaré y obtener la **clasificación completa** de las representaciones unitarias e irreducibles del grupo a partir de las representaciones inducidas por los grupos pequeños asociados a cada tipo de órbita.

Desde la perspectiva de la Teoría de Grupos, el desarrollo general (ver [7, §4.4]) es el siguiente: se fija un elemento $p \in \mathbb{R}^4$ del espacio de momentos, con O_p su órbita y H_p su grupo pequeño asociado. Entonces, en virtud del Teorema, para cada representación unitaria e irreducible σ del grupo pequeño H_p se tiene una representación inducida $\pi_{m,\sigma}$, unitaria e irreducible, para dicha órbita (con $m = +\sqrt{p^2}$). Si se complementa con la teoría de operadores de Casimir, apartado previo, se tiene una clasificación general de todas las representaciones caracterizadas por los autovalores de P^2 y W^2 .

Desde una perspectiva más física, se puede construir representaciones inducidas sobre el espacio de **funciones de onda** (ver [35, §9]), evaluadas sobre el espacio de momentos. De forma explícita, para la órbita O_p la representación inducida $\pi_{m,\sigma}$ toma la **forma general** [1]

$$[\pi_{m,\sigma}(\Lambda, b)]f(p) = e^{-ip_\mu b^\mu} D(\Lambda, p) f(\Lambda^{-1}p) \quad (4.2)$$

donde $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^N$ es la función de onda restringida a la órbita O_p y $D(\Lambda, p)$ es un operador que actuará como una representación unitaria e irreducible del grupo pequeño. El punto interesante es que a través de la forma explícita de la función de onda se puede obtener la ecuación de onda de la partícula asociada.

Con las base matemática anterior se puede abordar la obtención de las representaciones unitarias e irreducibles del grupo para cada órbita particular. Para cada una de ellas, en un primer apartado, se caracterizará de forma general las representaciones asociadas; en un segundo apartado, se dará la forma explícita de cada representación y cada función de onda asociada, además de su ecuación de onda.

4.2. Representación para partícula máscica: órbita de tipo-tiempo

4.2.1. Caracterización de la representación de tipo-tiempo

La **metodología de Mackey** establece que para la órbita de tipo-tiempo, cuyo grupo pequeño es $SO(3)$, la representación inducida se construye a partir de una representación σ unitaria e irreducible del grupo pequeño, cuya dimensión es $2s + 1$, con $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. De esta manera, la representación inducida queda caracterizada por el par (m, s) , donde $m > 0$ es el parámetro asociado a la hipersuperficie $p^2 = m^2$ y s el parámetro asociado a la representación σ .

Desde una perspectiva más física, los **operadores de Casimir** para la órbita toman la forma de

$$\begin{cases} P^2 = m^2 > 0 \\ W^2 = -\frac{m^2}{4} L^2 \end{cases} \quad (4.3)$$

Bajo la interpretación de la órbita como partícula física (Comentario 4.1.2) se llega a las siguientes conclusiones:

1. El operador P^2 asigna a la representación inducida $\pi_{m,s}$ la masa $m > 0$.
2. El segundo operador de Casimir está caracterizado por los autovalores de L^2 , operador de Casimir de $SO(3)$ (ver 2.5.2), que toman los valores $s(s+1)$ con $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

Por otro lado, ya que el grupo pequeño se ha obtenido bajo el sistema de partícula en reposo, el grupo $SO(3)$ se asocia de manera natural con las simetrías del momento angular *intrínseco* de la partícula. Estas simetrías se clasifican según el parámetro s , parámetro de **espín**. Por tanto, el segundo operador de Casimir asigna a la representación el espín de la partícula.

Se concluye que la representación inducida queda bien caracterizada por (m, s) , donde m es la masa y s el espín. Conviene mencionar que la representación obtenida puede asociarse con las siguientes ecuaciones de onda para partículas másicas: para los casos con espín bajo, $s = 0, 1/2, 1$, se corresponde a las ecuaciones de Klein-Gordon, Dirac y Proca respectivamente [1].

4.2.2. Forma explícita de la representación de tipo-tiempo

En el apartado anterior se ha obtenido una clasificación de las representaciones másicas desde una perspectiva general, sin incidir en la forma de cada una de ellas. El objetivo de este apartado es estudiar la forma particular de cada una y obtener la ecuación de onda (con el mismo espíritu que Bargmann y Wigner [1]).

Antes de incidir en cada ejemplo particular, conviene notar cómo se transforma la ecuación (4.2): para la órbita O_p , tal que $p^2 = m^2$, la acción de la representación inducida sobre la función de onda es

$$[\pi_{m,s}(\Lambda, b)]f(p) = e^{-ip_\mu b^\mu} D(\Lambda, p) f(\Lambda^{-1}p) \quad (4.4)$$

donde D es una representación $(2s+1)$ -dimensional, unitaria e irreducible, de un elemento $R(\lambda, p)$ del grupo pequeño $SO(3)$ y tal que se escribe como $D(\Lambda, p) \equiv D[R(\Lambda, p)]$ (este elemento $R(\Lambda, p)$ es llamado *rotación de Wigner* y será tratado con mayor detalle en el Comentario 4.2.1). De esta manera, la acción de la representación $\pi_{m,s}$ es unitaria e irreducible.

Estas funciones de onda de partícula másica y espín s forman un espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable definidas sobre la órbita O_p y con medida invariante $\frac{1}{\omega_p} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$ (como se prueba en [7, pg. 10]), denotado por $L^2(O_p, \frac{1}{\omega_p} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3})$. Donde se ha tomado

$$\omega_p = +\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$$

y \mathbf{p} el trimomento asociado al cuadrivector p (nótese que ω_p no es más que la componente p_0 del cuadrimento, asociada a la energía de la partícula).

A través de la transformada de Fourier se puede vincular la función de onda sobre el espacio de momentos $f(p)$ con la función de onda sobre el espacio de posiciones, $\phi(t, \mathbf{x})$.

Comentario 4.2.1 (Rotación de Wigner). La intención de este comentario es dar la forma explícita del elemento $R(\Lambda, p)$, y por tanto, del operador $D(\Lambda, p)$ para la órbita de tipo-tiempo.

Para ello basta considerar el punto $p_m = (m, 0, 0, 0)^T$ de la órbita O_{p_m} . Si se considera un punto arbitrario p de la órbita O_{p_m} , siempre se puede encontrar una transformación de Lorentz que envíe p_m a p . En efecto, se puede razonar de la siguiente manera: se puede aplicar un boost $\Lambda_b(z, \xi)$ en la dirección z sobre p_m y luego aplicar una rotación $\Lambda_r(\alpha, \beta, 0)$ para llevarlo a p (recuérdese que esta notación se definió en §3.2.2). Es decir,

$$p = \Lambda_r(\alpha, \beta, 0)\Lambda_b(z, \xi)p_m \equiv H(p)p_m$$

donde se ha denotado con $H(p)$ a dicha transformación. Si se considera nuevamente una transformación $\Lambda \in SO^+(1, 3)$ general que lleve al punto p en $p' = \Lambda p$, entonces se puede encontrar nuevamente una transformación $H^{-1}(p')$ tal que $p_m = H^{-1}(p')p'$. Este proceso puede resumirse en

$$p_m \xrightarrow{H(p)} p \xrightarrow{\Lambda} p' \xrightarrow{H^{-1}(p')} p_m.$$

Se observa que el elemento $H^{-1}(p')\Lambda H(p) \equiv R(\Lambda, p)$ deja fijo al punto p_m , luego pertenece al grupo pequeño $SO(3)$ asociado a dicho punto. Es decir, es una rotación, denominada **rotación de Wigner** y es la que debe aparecer en la representación inducida (4.4): $D[R(\Lambda, p)] \equiv D(\Lambda, p)$, con D representación unitaria e irreducible de $SO(3)$ (se prefiere utilizar la notación $D(\Lambda, p)$ por ser más compacta). Para más detalles ver [34, pg. 193]

Ecuación de Klein-Gordon: partícula máscica con espín 0

El primer ejemplo a tratar es el caso más elemental. Puesto que la representación posee espín $s = 0$, la representación $D(\Lambda, p)$ tiene que ser trivial, $D \equiv 1$. Es decir, la ecuación de onda es una función escalar $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$. Además, transforma según

$$[\pi_{m,0}(\Lambda, b)]f(p) = e^{-ip_\mu b^\mu} f(\Lambda^{-1}p) \quad (4.5)$$

Si se denota la función por $f(\omega_p, \mathbf{p})$, separando la componente p^0 de las componentes \mathbf{p} , entonces se puede definir un producto interno invariante

$$\langle f, g \rangle = \int \bar{f}(\omega_p, \mathbf{p})g(\omega_p, \mathbf{p}) \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\omega_p} \quad (4.6)$$

Donde \bar{f} denota la conjugación compleja de f .

Para cada t fijo, se puede construir la transformada inversa de Fourier que envía funciones de onda $f(\omega_p, \mathbf{p})$ sobre el espacio de momentos en funciones de onda $\phi(t, \mathbf{x})$ sobre el espacio de posiciones (espacio denotado por $L^2(\mathbb{R}^3)$),

$$f(\omega_p, \mathbf{p}) \xrightarrow{\mathcal{TF}} \phi(t, \mathbf{x}) = \int \exp i(\omega_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{f(\omega_p, \mathbf{p})}{\sqrt{\omega_p}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (4.7)$$

Así se obtiene la función de onda ϕ sobre el espacio de posiciones \mathbf{x} .

La obtención de la ecuación de Klein-Gordon es directa a partir de las consideraciones previas. Para ello se considera el primer operador de Casimir P^2 que restringido a la órbita O_p , de tipo-tiempo, toma el valor $p^2 = m^2$; se considera a su vez el operador M , operador de masa, dado por $M f(p) = m f(p)$ (con $m = +\sqrt{p^2}$). A través de ambos operadores se puede construir otro Casimir de la forma $(P^2 - M^2)$, que restringido a la órbita O_p toma el valor 0. La evaluación del nuevo operador sobre la función de onda plantea la siguiente ecuación,

$$(P^2 - M^2)f(p) = 0, \text{ o, sobre la órbita } (p^2 - m^2)f(p) = 0 \quad (4.8)$$

que es la bien conocida condición *on-shell* (recuérdese que los operadores P_μ actúan como multiplicación por p_μ en el espacio de momentos, como se vio anteriormente). Es evidente que cuando $p \in \mathbb{R}^4$ no verifica la condición *on-shell*, y por tanto $p^2 \neq m^2$, entonces se obtiene $f(p) = 0$.

La ecuación (4.8) es la versión en el espacio de momentos de la ecuación de Klein-Gordon que se ha obtenido bajo la aplicación de los operadores de Casimir. Para recuperar dicha ecuación en el espacio de posiciones se debe aplicar la transformada de Fourier; téngase en cuenta que bajo esta transformada multiplicar por p^μ equivale a derivar por $i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial_\mu$. De este modo, la ecuación anterior se transforma en la ecuación de Klein-Gordon

$$(p^2 - m^2)f(p) = 0 \xrightarrow{\mathcal{TF}} (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(t, \mathbf{x}) \quad (4.9)$$

Comentario 4.2.2 (Principio de correspondencia). Recuérdese que se ha considerado en todo momento el convenio de unidades naturales, es decir, $c = 1$ y $\hbar = 1$. Si se restituyen las unidades se comprueba que la relación $p^\mu \leftrightarrow \partial^\mu$ se reescribe

$$p^0 = \frac{1}{c} E \rightarrow \frac{1}{c} i \hbar \partial_t, \quad \vec{p} \rightarrow -i \hbar \vec{\nabla}$$

que es precisamente el denominado *principio de correspondencia*.

Ecuación de Dirac: partícula másica con espín 1/2

Este caso no es tan sencillo como el anterior y necesita abordarse por otra vía, a través del **formalismo de Dirac** (ver [7, §4.2] o [36, §5.4]). Bajo este formalismo, las funciones de onda toman la forma de funciones espinoriales $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^4$, donde \mathbb{R}^4 es el espacio de momentos. Si $f \equiv (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$, entonces $(f_1, f_2) = -(f_3, f_4)$ (donde se restringe el espacio de momentos a la órbita positiva), que motiva la escritura de la imagen como dos copias $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$.

Antes de entrar en los detalles de la ecuación de Dirac conviene introducir algunas nociones respecto al formalismo. Una manera de construir representaciones del grupo propio de Lorentz que actúen sobre este espacio es la siguiente: se definen las matrices γ de Dirac en la **forma de Weyl**,

$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \text{ con } k = 1, 2, 3 \text{ y } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

con σ^k las matrices de Pauli (2.17). Estas matrices verifican

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I \quad (4.11)$$

y forman un álgebra de Clifford [35, §9.4]. En particular, si se toma el operador

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu], \text{ donde } \gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (4.12)$$

$\{S_{\mu\nu}\}$ **generan el álgebra de Lorentz**; y por tanto, pueden definir representaciones del grupo propio de Lorentz denotadas por $D(\Lambda)$ (es decir, tal que $D(\Lambda) = \exp(\theta^{\mu\nu} S_{\mu\nu})$). De este modo, se define la acción del grupo de Poincaré sobre una función f como

$$\pi(\Lambda, b)f(p) = e^{-ip_\mu b^\mu} D(\Lambda)f(\Lambda^{-1}p) \quad (4.13)$$

Antes de continuar, conviene introducir un comentario respecto al formalismo de Dirac que establecerá mayor precisión a lo ya tratado.

Comentario 4.2.3 (El grupo $SL(2; \mathbb{C})$ y el formalismo de Dirac). Con mayor precisión, la construcción y el estudio en profundidad de las representaciones de los estados de espín para partículas relativistas necesita de la teoría de álgebras de Clifford y sus representaciones. En particular, para el espacio de Minkowski, se debe tomar el grupo recubridor de $SO^+(1, 3)$ (el grupo $SL(2; \mathbb{C})$) para abordar la representación de espín, como puede verse en el texto de Varadarajan [35] o Folland [6]. De este modo, la representación de un elemento del grupo $A \in SL(2; \mathbb{C})$ se escribe directamente como

$$D(A) = \begin{pmatrix} (A^+)^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Esta forma sugiere entender la acción del grupo sobre las funciones espinoriales como la acción de dos copias de A , una sobre (f_1, f_2) conjugada-invertida (acción contragradiante), y la otra sobre (f_3, f_4) . Conviene notar que cuando se restringe dicha representación al grupo propio $SU(2)$ entonces se convierte en reducible. En efecto, al considerar un elemento $R \in SU(2)$, $R^{-1} = R^+$; luego, $D(R)$ toma la forma de dos copias del elemento R (en el Comentario 4.2.4 se trata también este asunto).

El argumento utilizado en las líneas siguientes omite el uso del grupo recubridor (así lo abordan Wigner y Bargmann [1]).

Una vez introducido el formalismo de Dirac, el siguiente paso es obtener la ecuación de onda. La idea es imponer la ecuación de Dirac² para el espacio de funciones, es decir,

$$p_\mu \gamma^\mu f(p) = m f(p) \quad (4.14)$$

tal que f toma valores en un entorno de la órbita O_p , $p^2 = m^2$. Conviene notar que al escoger el representante $p \equiv (m, 0, 0, 0)^T$ de la órbita la ecuación anterior se convierte en $\gamma^0 f = f$ que impone la restricción $(f_1, f_2) = -(f_3, f_4)$ recuperándose así la condición del primer párrafo.

El siguiente paso es demostrar dos afirmaciones: que la ecuación anterior es invariante por cambio de representante de la órbita (o lo que es lo mismo, por transformación de Lorentz) y, en segundo lugar, que se puede definir un producto interno invariante por transformaciones de Lorentz.

Sea $\Lambda \in SO^+(1, 3)$, entonces la acción del elemento del grupo sobre la ecuación de Dirac la transforma en

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1}p)_\mu \gamma^\mu D(\Lambda)f(\Lambda^{-1}p) &= p_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \gamma^\mu D(\Lambda)f(\Lambda^{-1}p) = p_\nu D(\Lambda) \gamma^\nu f(\Lambda^{-1}p) = \\ &= m D(\Lambda) f(\Lambda^{-1}p) \end{aligned} \quad (4.15)$$

²Una manera más profunda de abordar este apartado es utilizar la teoría de fibrados (como lo hacen Folland [7] y Varadarajan [35]), donde la imposición de la ecuación de Dirac no es más que la elección de una fibra en el punto p de la órbita. En este texto se intenta prescindir de estos razonamientos.

donde se ha utilizado la fórmula $D(\Lambda^{-1})\gamma^\mu D(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$ [7, §4.2] Por tanto, la ecuación se conserva por transformaciones de Lorentz.

En segundo lugar, se define el producto interno como

$$\langle f, g \rangle = \int f^+(\omega_p, \mathbf{p}) \gamma^0 g(\omega_p, \mathbf{p}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \omega_p} \quad (4.16)$$

Este producto interno es invariante bajo transformaciones de Lorentz. En efecto, bajo la aproximación ϵ infinitesimal, la transformación de ambas funciones puede tomarse como $(1 + i\epsilon S_{\mu\nu})f$ y $(1 + i\epsilon S_{\mu\nu})g$; para ver que $\langle (1 + i\epsilon S_{\mu\nu})f, (1 + i\epsilon S_{\mu\nu})g \rangle = \langle f, g \rangle$ basta probar

$$(1 + i\epsilon S_{\mu\nu})^+ f^+ \gamma^0 (1 + i\epsilon S_{\mu\nu})g = f^+ (\gamma^0 + i\epsilon(\gamma^0 S_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}^+ \gamma^0) + \mathcal{O}(\epsilon^2))g = f^+ \gamma^0 g$$

despreciando términos de orden ϵ^2 . Pero esto se verifica ya que S_{ij} es hermítica y conmuta con γ^0 , y $S_{0\nu}$ es antihermítica y anticonmuta con γ^0 [1].

Otra medida equivalente es la siguiente, sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ producto interno para el espacio de Hilbert \mathbb{C}^4 . Para $p \in \mathbb{R}^4$ fijo, se verifica

$$p_\mu \langle \gamma^\mu f(p), f(p) \rangle_p = m |f(p)|^2 \quad (4.17)$$

Ahora bien, $\langle \gamma^0 f(p), f(p) \rangle_p$ es real por ser γ^0 hermítica; $\langle \gamma^k f(p), f(p) \rangle_p$ es imaginario puro por ser γ^k anti-hermítica. Ya que el lado derecho de la ecuación de arriba es real, se debe verificar $p_k \langle \gamma^k f(p), f(p) \rangle_p = 0$ (con índice k contraído). Luego, se verifica

$$\langle \gamma_0 f(p), f(p) \rangle_p = \frac{m}{p_0} |f(p)|^2 \quad (4.18)$$

Con esto en mente, la norma sobre el espacio de funciones queda como

$$\|f\|^2 = \int |f(\omega_p, \mathbf{p})|^2 \frac{m}{\omega_p^2} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (4.19)$$

Nótese que la medida invariante ha quedado reescalada. Así pues, se puede definir la transformada de Fourier de la función $f(p)$ en el espacio de momentos para obtener la función de onda en el espacio de posición:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \exp i(\omega_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{\sqrt{m} f(\omega_p, \mathbf{p})}{\omega_p} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (4.20)$$

La condición de (4.14) se transforma bajo Fourier en la **ecuación de Dirac** para partícula libre:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi$$

Comentario 4.2.4 (*¿Es la ecuación de partículas másicas y espín 1/2?*). Merece la pena ver que realmente se ha conseguido una representación $\pi_{m,1/2}$ sobre el espacio de funciones, y por tanto, que coincide con la descripción de partícula másica de espín $s = 1/2$.

Para verlo, se considera el representante $p = (m, 0, 0, 0)^T$ cuyo grupo pequeño asociado es $SO(3)$. La representación del grupo pequeño toma la forma de

$$D(R) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\theta_i \sigma^i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\theta_i \sigma^i} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

donde R es rotación. En efecto, los generadores del álgebra restringidos al grupo pequeño toman la forma de $S_{ij} = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$, con $i \neq j$. Al exponenciar un elemento del álgebra se recupera la forma de $D(R)$.

Así pues, la acción de la representación sobre la función (para $p = (m, 0, 0, 0)^T$) se escribe como

$$D(R) \begin{pmatrix} (f_1, f_2)^T \\ (f_3, f_4)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\theta_i\sigma^i} (f_1, f_2)^T \\ e^{\frac{i}{2}\theta_i\sigma^i} (f_3, f_4)^T \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

El término $e^{\frac{i}{2}\theta_i\sigma^i}$ actúa como una rotación (recuérdese el Ejemplo 2.5.3 para la rotación con $j = 1/2$; esta rotación estaba generada por las matrices de Pauli en la forma $J_k = \frac{\sigma_k}{2}$). Por tanto, actúa como una representación del grupo $SO(3)$ ³.

Ecuación de Dirac general: partícula másica con espín elevado

Se puede generalizar el caso anterior para partículas con espín j semientero mayor que $1/2$. Para ello, se define $N = 2j$ y se generaliza las matrices γ para un N -espacio tensorial $\mathbb{C}^4 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^{4 \otimes N}$, tal que para $\nu = 1, \dots, N$ las matrices γ_ν^τ actúan sobre el espacio n -ésimo. Entonces, se puede hacer un juego parecido al caso anterior: el espacio de representación es un espacio de funciones f simétricas sobre $\mathbb{C}^{4 \otimes N}$ sobre las que se impone la restricción de (la ecuación de Dirac generalizada)

$$p_\tau \gamma_\nu^\tau t = mt \quad (4.23)$$

Esta expresión constituye un sistema de ecuaciones lineales acopladas. El estudio de este caso se puede encontrar en el texto de Varadarajan [35] o en el artículo original de Bargmann y Wigner [1].

4.3. Representación para partícula de masa nula: órbita de tipo-luz

4.3.1. Caracterización de la representación de tipo-luz

El grupo pequeño es $E(2)$ y la hipersuperficie asociada es $p^2 = 0$ con $p \neq 0$. Por la naturaleza del grupo euclídeo, la representación inducida tomará dos formas totalmente distintas según la representación del grupo pequeño que se escoja (ver subsección §2.5.3). Las representaciones irreducibles y unitarias del grupo pequeño pueden dividirse en dos grupos:

1. *Representaciones degeneradas*: construídas a partir del subgrupo $SO(2)$, finito-dimensionales.
2. *Representaciones no degeneradas*: inducidas por todo $E(2)$, infinito-dimensionales.

³Realmente actúa como una representación del grupo recubridor, $SU(2)$.

Desde una perspectiva más física, la partícula asociada se mueve con la velocidad de la luz, pues su masa es nula; no existe sistema de referencia que deje a la partícula en reposo. Consecuentemente, el grupo pequeño asociado no se reduce al grupo de rotaciones tridimensionales (como sí ocurría para el caso de partícula másica) y tomará la forma del grupo euclídeo. La naturaleza del grupo pequeño dará a las representaciones propiedades significativas; fruto de ello es la existencia de dos tipos de representaciones, *espín discreto* y *espín continuo*.

- **Representaciones de espín discreto/finito:** Están inducidas por las representaciones degeneradas de $E(2)$, son finito-dimensionales y, por tanto, triviales para las traslaciones. No son representaciones fieles. La representación inducida se denota por $\pi_{0,\lambda}$ y queda caracterizada por el valor $\lambda = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$, conocido como **helicidad**.

Si se estudian los autovalores de los operadores de Casimir restringidos al grupo pequeño se llega a

$$\begin{cases} P^2 = 0 \\ W^2 = -\omega^2(N_1^2 + N_2^2) = 0 \end{cases}$$

Donde los vectores de Pauli-Lubanski están dados en (3.30). A su vez, $N_1^2 + N_2^2 = 0$ ya que se corresponde con la representación degenerada de $E(2)$. Igual que para el caso másico, de aquí se extraen dos conclusiones:

1. El primer operador de Casimir asigna la masa $m = 0$ a la representación. De manera natural se vincula este tipo de representación con partículas de masa nula.
2. El segundo operador de Casimir se anula para cualquier representación del grupo pequeño. Por tanto, los dos operadores de Casimir no ayudan a clasificar las representaciones de espín discreto. Se puede solventar este problema si se escoge el autovalor de L_1 , generador del grupo pequeño $SO(2)$ (de $E(2)$) con valor $\lambda = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$ que recibe el nombre de **helicidad**.

Ya que la helicidad queda fijada por la representación degenerada (de $E(2)$) escogida, la helicidad toma el papel de invariante bajo transformaciones Lorentz.

Se concluye que la representación queda caracterizada por $(m = 0, \lambda)$, siendo esta una representación finito-dimensional. El nombre “espín finito/discreto” proviene de la acotación de la helicidad, es decir, la helicidad toma valores en un rango acotado (como el espín de partículas másicas). Esta representación se puede asociar con las ecuaciones de onda de masa nula: los casos de helicidad $\lambda = 0, \pm 1$ se corresponden con la ecuación escalar, la ecuación del neutrino y la de Maxwell [16].

- **Representaciones de espín infinito/ continuo:** Están inducidas por representaciones no degeneradas, son por tanto infinito-dimensionales. Son caracterizadas por el par $(m = 0, \Theta)$ con Θ número real positivo. Para verlo, basta tomar

$$\begin{cases} P^2 = 0 \\ W^2 = -\omega^2(N_1^2 + N_2^2) = -\omega^2\Theta^2 \end{cases}$$

donde Θ queda fijado por la representación no degenerada del subgrupo $E(2)$.

1. El primer operador de Casimir asigna la masa $m = 0$ a la representación.

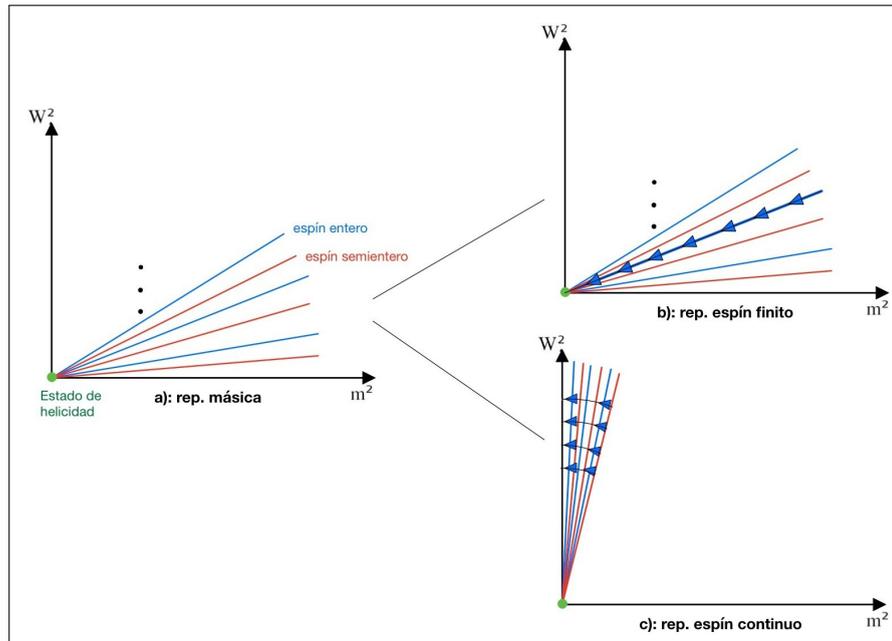


Figura 4.1: Diagrama de representaciones unitarias e irreducibles para los casos a) representaciones másicas, b) representaciones de espín finito y c) espín continuo. Cada dibujo transcribe las representaciones másicas como puntos en el espacio de autovalores de W^2 y m^2 . Las representaciones con el mismo espín dibujan una recta de pendiente $s(s + 1)$. En b) y c) se dibuja el límite bajo el cual se obtiene cada tipo de representación. Es una adaptación de [30].

2. El segundo operador de Casimir asigna el parámetro Θ a la representación. El punto importante recae en que la helicidad λ , como autovalor del generador L_1 del subgrupo $SO(2)$, toma valores enteros y semienteros sin quedar acotados, pues proviene de la representación no degenerada (es más, la acción de la representación mezcla helicidades, ver [34]). La interpretación física es más sutil que la dada para el caso de espín discreto; esta se puede dar a través de la contracción de Inönü-Wigner (que se estudiará en el capítulo §5).

En consecuencia, la representación de espín continuo queda caracterizada por el par (m, Θ) , es además infinito-dimensional con helicidad no acotada. Los infinitos estados de helicidad pueden ser descritos por una variable continua, un círculo (que será explicado más adelante). Esta variable continua es la que concede, desafortunadamente, el nombre de “espín continuo” a la representación; es preferible, por ser más acertada, la denominación “espín infinito” para recalcar que la helicidad (o espín) no está acotada (pero es discreta).

Ahora bien, ¿se puede asociar esta representación con una ecuación de onda? La respuesta necesita de la siguiente observación: esta representación, de espín continuo, ha sido desechada en la literatura por presentar propiedades “demasiado” exóticas (ver la sección §1.2). No obstante, el objetivo de este trabajo es mostrar el papel físico que juegan estas representaciones; en particular, puede probarse que también son un caso límite de partículas másicas. El siguiente comentario da idea de ello.

Comentario 4.3.1 (Representación de masa nula como límite másico). Se puede establecer una conexión entre las representaciones de la órbita de tipo-tiempo y tipo-luz a través del límite de masa nula, es decir, $m \mapsto 0$. De antemano, parece lógico pensar que las partículas de masa

nula pueden obtenerse como límite $m \rightarrow 0$, por ejemplo, si se considera que la energía de la partícula es muy elevada ($E \gg m$) de tal manera que se puede desprestigiar la masa a través de la relación $E = (P^2 + m^2)^{1/2}$. Ahora bien, por los resultados previos, emerge de manera natural cierto recelo: la existencia de dos tipos de representaciones inducidas para la órbita de tipo-luz, con cierta complejidad, da un carácter ígneo a la intuición anterior. No obstante, dicha intuición puede abordarse a través de la teoría de contracción de grupos (§5) dando a la idea anterior una base matemática. La Figura 4.1 da una idea visual del proceso:

- El diagrama transcribe representaciones másicas como puntos en el espacio de autovalores (m^2, W^2) . Para la Figura a), las representaciones verifican $W^2 = m^2 s(s + 1)$; luego, dibujan rectas cuya pendiente es $s(s + 1)$. El color de cada recta distingue entre espín entero o semi-entero. Por tanto, en a), cada punto de una recta es una única representación caracterizada por espín s y masa m .
- La Figura b) describe el proceso de obtención de **representaciones de espín discreto**. Estas pueden obtenerse como límite $m \rightarrow 0$ de las representaciones másicas; en la Figura b), este proceso equivale a fijar una recta de pendiente s y recorrerla hacia el origen (pues en el origen $W^2 = 0$). Conviene notar que todas las representaciones de espín discreto descansan sobre el origen, denotado como punto h de helicidad.
- La Figura c) describe el proceso de obtención de **representaciones de espín continuo**. Estas pueden obtenerse como doble límite $m \rightarrow 0$ y $s \rightarrow \infty$ siempre y cuando se fije $\Theta = ms$ finito. En la Figura c), equivale a fijar un punto en una recta y aumentar su pendiente hasta que esta recta colapsa sobre el eje vertical. En efecto, bajo este doble límite la representación másica se convierte en una representación dada por $m = 0$ y $W^2 = \Theta^2$.

Con esta imagen se puede dar cierta **interpretación física a las representaciones de espín continuo**: se relacionan con el caso límite de partículas muy energéticas ($E \gg m$) y de espín elevado ($s \gg 1$) [2]. En el capítulo §5 se profundizará en esta idea.

El mecanismo de contracción descrito en los párrafos anteriores permite construir la función de onda de cada tipo de representación a partir del límite másico (o doble límite de masa-espín) de las funciones de onda de partículas másicas.

4.3.2. Las simetrías internas: espín y helicidad

Antes de pasar a la ecuación de onda merece la pena reunir una serie de comentarios respecto a la noción de espín y helicidad.

1. Cabe señalar que ambos términos están relacionados con las simetrías internas de las partículas asociadas. Como ya se mencionó, el grupo pequeño $SO(3)$ se identifica con las simetrías del momento angular intrínseco, para la partícula másica en reposo. Así, el **espín** aparece de manera natural: s es el valor máximo de la proyección del operador momento angular en una dirección determinada [34, §9.7].

Para el caso de partículas sin masa y espín finito (recuérdese la Figura 1.1.b), las simetrías internas pueden relacionarse con el grupo $SO(2)$ (grupo pequeño de $E(2)$ para el caso degenerado). En este caso no puede considerarse el sistema en reposo, no tiene sentido. Por tanto, se

escoge como dirección de proyección la dirección de movimiento de la partícula. La proyección del operador momento angular en esta dirección toma el nombre de **helicidad**. Puesto que las representaciones de $SO(2)$ son unidimensionales, la helicidad tomará dos valores (siempre que $\lambda \neq 0$), positivo o negativo, dependiendo de la dirección del momento angular respecto a la dirección de desplazamiento. Para el caso $\lambda = 0$, solo existirá un único valor. A estos dos valores se les conoce como **polarización** de la partícula.

2. De la misma manera que el espín, la helicidad también toma dos tipos de valores, semienteros y enteros; es decir, también se identifica con **partículas bosónicas** o **partículas fermiónicas**.

Una manera de ver este punto es relacionar la representación de masa nula y helicidad definida como caso límite ($m \rightarrow 0$) de las representaciones másicas. Al contraer el grupo $SO(3)$ en el euclídeo $E(2)$ el subgrupo de las rotaciones $SO(2)$ (de $E(2)$) hereda la propiedad de ser doblemente recubierto (ver [34, §10.4]) fruto de considerar el recubridor universal de $SO(3)$, $SU(2)$.

3. La helicidad para partículas sin masa y espín finito es un **invariante** bajo transformaciones de Lorentz, mientras que para partículas másicas la orientación del espín no lo es (piénsese que para s fijo, existen $2s + 1$ componentes; la acción del elemento de Lorentz transforma unas componentes en otras). La razón de ello puede encontrarse en la naturaleza del grupo pequeño $SO(2)$, cuyas representaciones son unidimensionales; otra forma de razonar, con mayor intuición física, consiste en comprender que un cambio en la helicidad (un cambio de signo) presupone encontrar un sistema de referencia que pueda invertir la dirección de desplazamiento de la partícula sin masa. No obstante, la invarianza de la velocidad de la luz en Relatividad Especial impide la existencia de dicho sistema de referencia.

4.3.3. Forma explícita de la representación de espín discreto

La intención de este apartado es introducir la ecuación de onda para una partícula libre sin masa y espín finito. Las consideraciones dadas para las representaciones másicas sirven de igual manera. Es más, utilizando el límite másico sobre la ecuación de onda de partícula másica se obtendrá la ecuación de espín discreto.

La función de onda sobre el espacio de momentos se toma como $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^N$, restringida a la órbita O_p , $p^2 = 0$. La representación irreducible actúa según

$$[\pi_{0,\lambda}(\Lambda, b)]f(p) = e^{-ip_\mu b^\mu} D(\Lambda, p)f(\Lambda^{-1}p) \quad (4.24)$$

con $D(\Lambda, p)$ representación unitaria e irreducible del grupo pequeño⁴. El espacio de funciones es un espacio de Hilbert de funciones cuadrado integrables con medida invariante $\frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$. En efecto, en el proceso de contracción, se verifica

$$\begin{cases} \omega_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \xrightarrow{m \rightarrow 0} |\mathbf{p}| \\ \frac{1}{\omega_p} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \end{cases}$$

Los detalles más matemáticos pueden consultarse en [7, §1.2].

⁴Igual que para el caso másico, se utiliza la rotación de Wigner según está descrita en el Comentario 4.2.1. El argumento se aplica de la misma manera sobre la órbita de tipo-luz. Los detalles pueden verse en [34, pg. 197]

Ecuación de Klein-Gordon: partícula sin masa con espín 0

La obtención de la ecuación de onda se hace como límite $m \mapsto 0$ de la ecuación de Klein-Gordon de partícula másica. El proceso es directo y no necesita de mayor detalle. En el espacio de momentos las funciones escalares de onda se denotan por $f(\omega_p, \mathbf{p})$; el producto interno se toma como

$$\langle f, g \rangle = \int \bar{f}(\omega_p, \mathbf{p}) g(\omega_p, \mathbf{p}) \frac{1}{|\mathbf{p}|} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (4.25)$$

La función de onda en el espacio de posiciones se define a través de la transformada de Fourier

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \exp i(\omega_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{f(\omega_p, \mathbf{p})}{\sqrt{|\mathbf{p}|}} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (4.26)$$

Esta función verifica la ecuación de Klein-Gordon sin masa: $\partial^2 \phi = 0$.

Ecuación de Dirac: partícula sin masa con espín 1/2

Igual que para el caso másico, se utiliza el formalismo de Dirac para obtener la ecuación de onda. Bajo el límite $m \mapsto 0$, las funciones de onda deben verificar la condición

$$p_\mu \gamma^\mu f(p) = 0 \quad (4.27)$$

La invarianza de la ecuación anterior y del producto interno se traduce de manera natural bajo el límite másico. Se tiene que el producto interno verifica

$$\langle f, g \rangle = \int f^+(\omega_p, \mathbf{p}) \gamma^0 g(\omega_p, \mathbf{p}) \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 |\mathbf{p}|} \quad (4.28)$$

La transformada de Fourier está dada como

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \exp(\omega_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{f(\omega_p, \mathbf{p})}{\sqrt{|\mathbf{p}|}} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (4.29)$$

De esta manera, la función de onda en el espacio de posiciones verifica la ecuación $i\gamma^\mu \partial_\mu = 0$.

Jugando un poco más con las ecuaciones se pueden encontrar propiedades interesantes. Si se escoge como representante de la órbita $p = (1/2, 0, 0, 1/2)^T$, entonces la restricción (4.27) queda como $(\gamma^0 - \gamma^3)f = 0$ que implica que $f \equiv (0, f_1, f_2, 0)^T$; es decir, solo habrá componentes transversales en la dirección de movimiento, dirección $(1, 0, 0, 1)^T$. A su vez, pone de manifiesto que solo existen dos componentes independientes. Por otro lado, el endomorfismo $\Gamma = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ descompone el espacio de funciones de onda en dos subespacios invariantes [35]. En efecto, toma la forma de

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de tal manera que define dos subespacios en función del autovalor: $\Gamma f = f$, o $\Gamma f = -f$. Ambos son invariantes bajo transformaciones del grupo propio de Lorentz, pero se envían uno en el otro bajo reflexiones (simetría discreta) [1]. Se concluye que cada subespacio se corresponde con un tipo de polarización circular: *a derechas* o *a izquierdas*.

⁵En la jerga física se suele denotar a este endomorfismo por γ^5 , que origina el operador quiral.

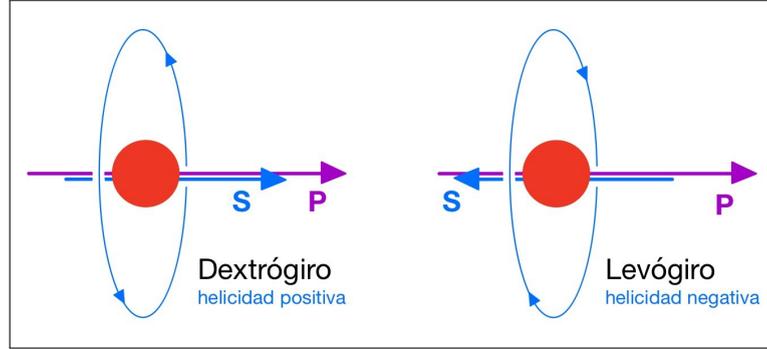


Figura 4.2: Diagrama que representa los dos estados de quiralidad, f_R –dextrógiro– y f_L –levógiro–, para partículas de masa nula que son, a su vez, estados de helicidad bien definida. En cada dibujo, \mathbf{P} denota el momento lineal de la partícula y \mathbf{S} la proyección sobre \mathbf{P} del momento angular intrínseco.

Ejemplo 4.3.2 (Estados de quiralidad. El neutrino.). Para ver la forma de la representación inducida se puede abordar de la misma manera que en el Comentario 4.2.4. Recuérdese la forma de la representación $D(R)$ del grupo pequeño $SO(3)$ para la partícula másica; entonces, la representación del grupo pequeño de $SO(2)$, para partícula sin masa, es de la forma

$$D(R) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^3} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^3} \end{pmatrix}, \text{ con } e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{+\frac{i}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\theta} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Es decir, la representación toma la forma de dos copias del carácter $e^{\pm i\frac{\theta}{2}}$. Obsérvese la aparición del valor $1/2$ en la exponencial que toma el significado de “espín”, o helicidad. Una manera de probar este resultado es utilizar el mecanismo de contracción de grupos (que será tratado en §5): la representación 2-dimensional $e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^i}$ de $SO(3)$ al contraer en $E(2)$ y restringirlo al subgrupo $SO(2)$ toma la forma de representación 2-dimensional con la forma $e^{\frac{i}{2}\theta\sigma^3}$.

El párrafo anterior permite deducir una propiedad interesante de partículas como el neutrino, la quiralidad [28, §11.1]. Para ello, bajo la restricción $p = (1/2, 0, 0, 1/2)^T$, existen dos autoestados del endomorfismo Γ dados por $f_L \equiv (0, f, 0, 0)^T$ y $f_R \equiv (0, 0, f, 0)$, tales que

$$\Gamma f_L = f_L, \text{ y } \Gamma f_R = (-1)f_R.$$

Cada uno constituye un estado de quiralidad, f_L con quiralidad $(+1)$, y f_R con quiralidad (-1) . El punto interesante está en que estos estados también son autoestados de la representación $D(R)$ dada en (4.30), y por tanto, estados de helicidad definida. Es decir,

$$D(R)f_L = e^{-\frac{i}{2}\theta} f_L \text{ y } D(R)f_R = e^{\frac{i}{2}\theta} f_R,$$

o lo que es lo mismo, el estado f_L es autoestado de polaridad con helicidad negativa $(-1/2)$ o de **mano-izquierda** –*left-handed*– o levógiro; mientras que f_R lo es con helicidad positiva $(1/2)$ o de **mano-derecha** –*right-handed*– o dextrógiro (ver Figura 4.2). Además, estos estados no se mezclan por transformaciones de Lorentz, como se ha mencionado antes, salvo por simetrías de reflexión (o simetría de paridad).

El razonamiento anterior llega a la siguiente conclusión: existe una distinción fundamental entre partículas de masa nula y espín $1/2$ (tómese el neutrino como modelo) y sus antipartículas (antineutrino), pues a cada una de ellas se le asigna un único estado de quiralidad, f_L para la partícula y f_R para la antipartícula.

Ec. de Dirac generalizada: partícula sin masa con espín elevado

Se puede hacer el mismo procedimiento que en el apartado anterior: contraer la ecuación de onda para partícula másica en el límite de masa nula. Los detalles de este apartado pueden consultarse en el texto de Varadarajan [35, §9].

4.3.4. Forma explícita de la representación de espín infinito

La obtención de la ecuación de onda para la representación de espín continuo exige mayor trabajo, debido a su sutileza, que los casos antes tratados. En estas líneas se describe la función de onda escalar de espín continuo y se esboza su obtención.

La ecuación escalar sobre el espacio de momentos se denota por $\Psi(p, \xi)$ que depende del cuadrimomento p y el cuadrivector auxiliar, o “interno”, ξ ⁶. Esta función verifica las llamadas **ecuaciones de Wigner** (ver el artículo [4]):

$$\begin{cases} p^2 \Psi = 0 \\ (p^\mu \xi_\mu) \Psi = 0 \\ (\xi^2 - 1) \Psi = 0 \\ (p^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} - i\Theta) \Psi = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Observando las ecuaciones anteriores se concluye que el cuadrivector ξ pertenece a la circunferencia \mathbb{S}^1 transversal al movimiento (es decir, transversal a p). Con mayor detalle, la primera ecuación implica que el soporte de la función es tal que el cuadrimomento es tipo-luz, la segunda ecuación pone de manifiesto que ξ es transversal al movimiento (perpendicular a p) y, por la tercera, que este vector auxiliar es unitario. De la última ecuación se obtiene una condición para una solución

$$\Psi(p, \xi + \alpha p) = e^{i\alpha\Theta} \Psi(p, \xi), \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}$$

En efecto, para p fijo, la cuarta ecuación de (4.31) puede integrarse y obtener

$$\Psi(p, \xi) = e^{i\frac{\xi}{p}} \Psi(p)$$

y al considerar el punto $\xi + \alpha p$ se llega a

$$\Psi(p, \xi + \alpha p) = e^{i(\xi + \alpha p)/p} \Psi(p) = e^{i\alpha} \Psi(p, \xi)$$

La igualdad anterior sugiere la equivalencia física entre $\Psi(p, \xi)$ y su desplazamiento $\Psi(p, \xi + \alpha p)$; dicho de otra manera, la componente longitudinal de ξ (en la dirección de p) es una *fase pura*. En conclusión, de los razonamientos anteriores se llega a que $\xi \in \mathbb{S}^1$.

Las observaciones anteriores puede entenderse de la siguiente manera: el cuadrivector auxiliar ξ representa el **grado de libertad** asociado a la simetría interna de la partícula, su “espín continuo”, que toma forma de variable angular en la circunferencia. De esta manera, se puede parametrizar mediante un ángulo θ (como hacen Wigner y Bargmann en [1]) que toma valores en $[0, 2\pi)$ ⁷. La

⁶La razón de incorporar una variable interna es tratar de una manera más cómoda el carácter continuo de la representación. De esta manera la representación actúa sobre el cuatrivector ξ de la misma manera que lo hace sobre el cuadrimomento.

⁷La nomenclatura de “espín continuo” proviene de este ángulo. Ya que este ángulo toma valores “continuos”, parametriza de forma continua la variable interna ξ .

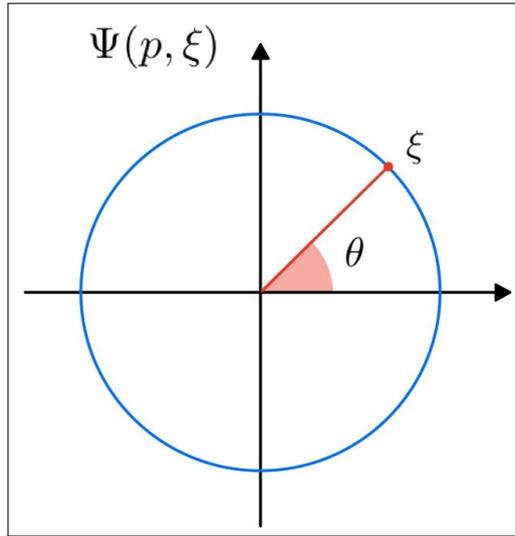


Figura 4.3: Representación visual de la variable “auxiliar” ξ como elemento de S^1 . El ángulo θ es la parametrización angular de dicha variable.

Figura 4.3 da una imagen de dicha parametrización. La conjugada de Fourier de la variable ξ es una variable discreta análoga a los grados de libertad asociados con el espín usual [3].

La acción de la representación irreducible $\pi_{0,\Theta}$ toma la forma

$$[\pi_{0,\Theta}(\Lambda, b)]\Psi(p, \xi) = e^{-ip_\mu b^\mu} \Psi(\Lambda^{-1}p, \Lambda^{-1}\xi) \quad (4.32)$$

Nótese que la forma es parecida a la dada por la acción de la representación de espín 0 para la función de onda escalar. Siguiendo esta idea, el producto interno se define como

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int \bar{\Psi}(\omega_p, \mathbf{p}, \theta) \Phi(\omega_p, \mathbf{p}, \theta) \frac{d^3\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \frac{d\theta}{(2\pi)^3} \quad (4.33)$$

La forma es la misma que para la ecuación escalar de espín 0; sin embargo, se debe integrar sobre la variable ξ en su parametrización angular, dada por θ (ver el artículo de Gracia-Bondía y Várilly [10]).

La obtención de la ecuación de onda en el espacio de posiciones se efectúa a través de la transformada de Fourier,

$$\Psi(t, \mathbf{x}, \xi) = \int \exp(\omega_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) \frac{\Psi(\omega_p, \mathbf{p}, \xi)}{\sqrt{|\mathbf{p}|}} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad (4.34)$$

Después de ver la ecuación de onda y su significado queda preguntar cómo se construye la ecuación anterior. Por las peculiaridades de la representación la obtención de esta ecuación no puede abordarse de la misma manera que en las representaciones consideradas anteriormente; necesita de un razonamiento más sofisticado.

Una manera de construirla, siguiendo el razonamiento de Bekaert [2] [3] [4], es aprovechar la **contracción de grupos pequeños** ($SO(3) \mapsto E(2)$) de la siguiente manera: el primer paso es obtener una ecuación de onda másica de espín elevado; luego, contraer (como se indica en [15]).

La forma de obtener la ecuación de onda másica es mediante la reducción dimensional de Kaluza-Klein⁸ de tal manera que se asocia la ecuación másica a un único modo másico [3]. La contracción se efectúa mediante el mecanismo de Inönü-Wigner tal que, si solo se efectúa el límite $m \mapsto 0$, la ecuación de onda másica contrae como ecuación de onda de espín finito; si la contracción implica el doble límite $m \mapsto 0$, $s \mapsto \infty$ tal que $ms = \Theta$, entonces la ecuación de onda contrae en la ecuación de Wigner.

El mecanismo anterior permite escribir la función de onda de espín continuo como una torre de estados de helicidad definida (torre infinita pero numerable), como en la Figura 4.4. Sobre esta torre, la acción del grupo propio de Lorentz mezcla estados de helicidad, y por tanto, la helicidad no es un invariante para esta representación. En el límite $\Theta \mapsto 0$ la acción del grupo no mezcla estados; la helicidad se convierte en invariante de Lorentz. Se recupera de esta manera la representación de espín finito. El parámetro Θ juega el papel de constante de acople entre los distintos estados de helicidad; en el límite de parámetro nulo la representación de espín continuo descompone como suma infinita de representaciones de espín finito [2].

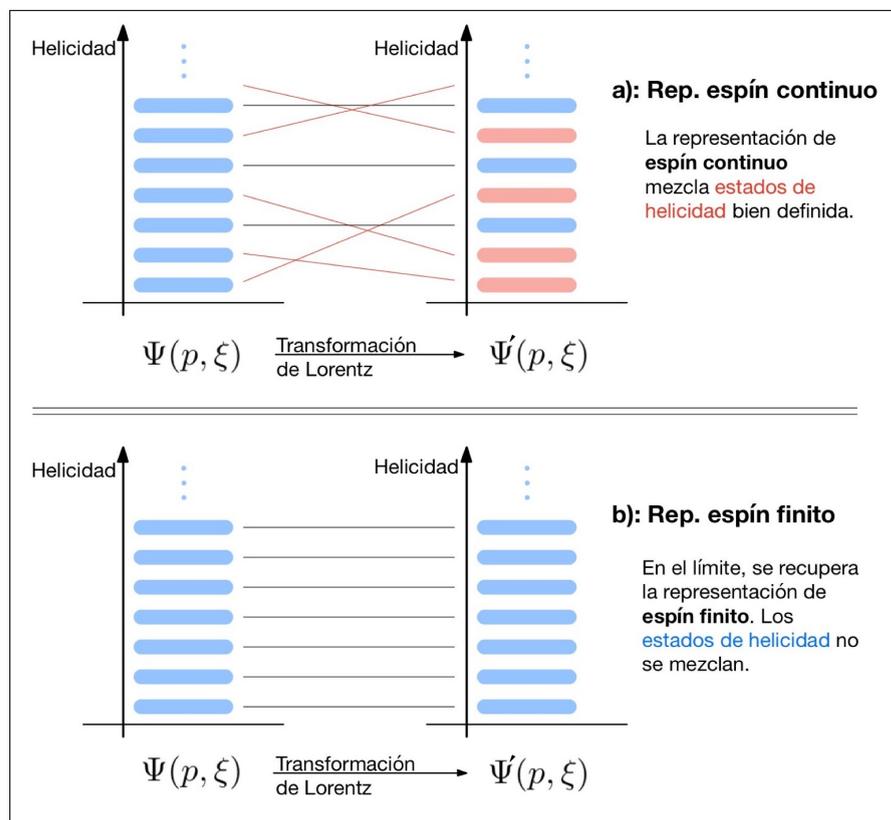


Figura 4.4: Visualización de la descomposición de la función de onda de espín continuo como torre de estados de helicidad bien definida.

⁸La idea de este mecanismo es construir ecuaciones de onda másicas en el espacio de Minkowski (3+1)-dimensional a partir de ecuaciones de onda de partículas de masa nula del espacio de Minkowski (4+1)-dimensional. La forma de hacerlo es fijar la componente extra de momento, supóngase p^3 , como una componente másica (o modo másico) $p^3 = m$. Para mayor detalle consultar el artículo de [15].

El punto clave está en que es posible construir ecuaciones de onda de espín finito en dimensión arbitraria (y en particular, dimensión 4+1); luego, bajo el mecanismo de Kaluza-Klein se pueden convertir a ecuaciones de onda másicas y espín arbitrario, y por la contracción de Inönü-Wigner, a ecuaciones de onda de espín continuo.

4.4. Otras representaciones: órbita de tipo espacio y órbita degenerada

4.4.1. Representación para partícula taquiónica: órbita de tipo-espacio

El grupo pequeño asociada a la órbita de tipo-espacio es isomorfo a $SO^+(1, 2)$. Este grupo posee cuatro tipos de representaciones unitarias e irreducibles [18]

1. *Serie discreta*: denotada por $\{\mathcal{D}_n^\pm\}$, con $n \geq 2$. El símbolo (+) o (-) distingue entre dos tipos de representaciones.
2. *Serie principal*: denotada por $\{\mathcal{P}^{\pm, i\nu}\}$, con $\nu \in \mathbb{R}$.
3. *Serie complementaria*: denotada por $\{\mathcal{C}^u\}$, con $0 < u < 1$.
4. *Representación trivial y \mathcal{D}_1^\pm* .

Por tanto, las representaciones inducidas por esta órbita quedarán clasificadas por las cuatro series que inducen. Si se aborda el estudio a partir de los operadores de Casimir se obtiene

$$\begin{cases} P^2 = -m^2 \\ W^2 = -m^2(K_1^2 + K_2^2 - L_3^2) \end{cases} \quad (4.35)$$

Por tanto, las representaciones inducidas quedan caracterizadas por el par (m, σ) , donde σ denota la representación irreducible y unitaria de $SO^+(1, 2)$.

La interpretación física de estas representaciones merece cierta atención. Se suelen relacionar con partículas **taquiónicas** (es decir, partículas cuya velocidad supera la velocidad de la luz en el vacío), ya que su momento es tipo-espacio. Este hecho tiene una consecuencia dramática: estas partículas son *no causales*, en el sentido de que el soporte de su propagador requiere propagación superlumínica [3]. Una manera de paliar este problema es reinterpretar dichas partículas como partículas másicas con masa imaginaria; es decir, $p = (im, 0, 0, 0)^T$. En efecto, de esta manera se soluciona de cierto el problema de causalidad, pero se pierde la unitariedad de la representación.

Quizá resulte sorprendente decir que, a pesar del problema apuntado en el párrafo anterior sobre la interpretación física de la representación de tipo-espacio, tiene un papel útil en la Física: se relacionan, por ejemplo, con rupturas espontáneas de simetría [15].

4.4.2. Representación del vacío: órbita degenerada

El grupo pequeño de la órbita degenerada es todo $SO^+(1, 3)$, y por tanto las representaciones inducidas coinciden con las representaciones del grupo $SO^+(1, 3)$. Las representaciones unitarias e irreducibles de este grupo se clasifican como [18]

1. *Serie principal*: denotada por $\{\mathcal{P}^{k, i\nu}\}$, y caracterizada por el parámetro $k \in \mathbb{Z}$ y $\nu \in \mathbb{R}$.

2. *Serie complementaria*: denotada por $\{\mathcal{C}^{0,\omega}\}$, con $0 < \omega < 2$.

3. *Representación trivial*

Esta órbita no posee mayor significado físico que la asociación con el estado vacío. No tiene mayor interés para el estudio hecho en este trabajo.

Capítulo 5

Contracción de grupos

En este capítulo se quiere profundizar en la técnica de *contracción* de grupos de Lie con la intención de **establecer el marco teórico** que sustenta la construcción de las representaciones de espín continuo, dadas en el capítulo anterior. La técnica parte de una intuición física sencilla: como apunta Kim [16, §VIII], la intuición de que en el límite de velocidad elevada una partícula másica es vista como partícula sin masa. Es decir, bajo la relación energía-momento de Einstein

$$E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2},$$

una partícula libre se comporta como partícula sin masa en el límite de alta energía, $E \gg m$. En el lenguaje de la teoría de grupos este principio se traduce en la contracción del grupo pequeño de partículas másicas ($SO(3)$) en el grupo pequeño de partículas sin masa ($E(2)$) de tal manera que las representaciones asociadas a partículas másicas se transforman, bajo cierto límite, en representaciones asociadas a partículas sin masa.

Este capítulo desarrolla los fundamentos de la teoría de contracción de grupos de Lie (sección §5.1), basándose en el libro de Gilmore [9, §9]. En particular, se profundiza en la contracción de Inönü-Wigner (sección §5.2), que garantiza el límite tratado en el párrafo anterior. Estas notas siguen el artículo original de Inönü y Wigner [14].

5.1. Introducción a la Contracción de Inönü-Wigner

La idea general de la **teoría de contracciones** es desarrollar una técnica para obtener a partir de un grupo G de Lie dado otro grupo G' no isomorfo (la contracción del grupo original). Para ello, se procede en dos pasos.

En primer lugar, se construye una transformación lineal no singular $M(\epsilon) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'^1$. Esta transformación dependerá de un parámetro $\epsilon > 0$ en cuyo límite $\epsilon \longmapsto 0$ la transformación $M(\epsilon)$ se convierta en singular. Si I_μ denota los generadores del álgebra \mathfrak{g} , tales que verifican las reglas de

¹Por ser una transformación no singular es isomorfismo. Se tendrá que \mathfrak{g} y \mathfrak{g}' son isomorfas. En el límite $\epsilon \longmapsto 0$ dejarán de ser isomorfas.

conmutación

$$[I_\mu, I_\nu] = T_{\mu\nu}^\tau I_\tau, \quad (5.1)$$

se define la transformación como

$$J_\mu = M_\mu^\nu(\epsilon) I_\nu \quad (5.2)$$

donde J_μ son los generadores transformados y $M_\mu^\nu(\epsilon)$ los elementos de matriz de la transformación. Los nuevos generadores verifican las reglas de conmutación

$$[J_\mu, J_\nu] = C_{\mu\nu}^\tau(\epsilon) J_\tau. \quad (5.3)$$

Con un cálculo sencillo se prueba que los factores de estructura transformados verifican la relación,

$$C_{\mu\nu}^\tau = M_\mu^\sigma M_\nu^\rho T_{\sigma\rho}^\kappa (M^{-1})_\kappa^\tau \quad (5.4)$$

Mientras la transformación sea no singular el álgebra no cambia, la imagen de la transformación sigue siendo isomorfa a \mathfrak{g} (Para más detalles, [14]).

En segundo lugar, se exige que bajo el límite $\epsilon \rightarrow 0$ la transformación pase a ser singular (es decir, no biyectiva), y además, los factores de estructura

$$C_{\mu\nu}^\tau(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_{\mu\nu}^\tau(\epsilon)$$

converjan hacia un límite bien definido. Bajo estas circunstancias se consigue un álgebra de Lie \mathfrak{g}' que difiere del álgebra original; se consigue así el objetivo planteado: construir un nuevo álgebra de Lie, y por tanto un nuevo grupo, a partir del inicial [9, §13]. Este proceso, como paso al límite, se conoce como **contracción del grupo** G .

Contracción de Inönü-Wigner

Un caso particular es la **contracción de Inönü-Wigner**, en honor a E. Wigner y E. Inönü que introdujeron esta técnica en el artículo conjunto [14], que tuvo gran influencia tanto en Física como en Matemáticas. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie que contiene una subálgebra \mathfrak{h} y un subespacio complementario \mathfrak{p} de tal modo que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$$

La intención es aplicar una transformación que deje a \mathfrak{h} invariante y afecte únicamente a \mathfrak{p} , según $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}'$. En el lenguaje de grupos, se quiere **contraer** \mathfrak{g} sobre la subálgebra \mathfrak{h} de tal manera que el proceso contractivo genere otra álgebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}'$.

Seguendo el texto de Gilmore [9], y pasando a una notación más compacta, se exige que

$$\begin{cases} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \\ [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \\ [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \end{cases} \quad (5.5)$$

La primera condición impone que \mathfrak{h} es subálgebra, la segunda es necesaria para la contracción (como se verá después, es necesaria para obtener la forma requerida de álgebra contraída), y la tercera es debido a que \mathfrak{p} no es subálgebra. En el artículo original [14] se escriben estas condiciones en la notación de generadores dada en (5.1) y (5.3).

La contracción de Inönü-Wigner, $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$, hace uso de la transformación

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{h}' \\ \mathfrak{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\dim(\mathfrak{h})} & 0 \\ 0 & \epsilon I_{\dim(\mathfrak{p})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{h} \\ \mathfrak{p} \end{pmatrix}$$

donde $I_{\dim(\mathfrak{h})}$ denota a la matriz identidad con dimensión la dimensión del álgebra \mathfrak{h} . Se supone que en el límite $\epsilon \longrightarrow 0$ las constantes de estructura están bien definidas. Entonces, si $\epsilon\mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}'$, se tiene que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' + \mathfrak{p}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}'$ con \mathfrak{p}' subálgebra conmutativa. En efecto,

$$\begin{cases} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \\ [\mathfrak{h}, \epsilon\mathfrak{p}] = \epsilon[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \epsilon\mathfrak{p} \\ [\epsilon\mathfrak{p}, \epsilon\mathfrak{p}] = \epsilon^2[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \epsilon^2(\mathfrak{h} + \mathfrak{p}) \end{cases} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \\ [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{p}' \\ [\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] = 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Nótese que el álgebra contraída tiene estructura de producto semidirecto. Esta forma es fundamental, como se verá en el ejemplo de la sección siguiente.

A nivel de **representaciones**, si se aplica la transformación anterior sobre los elementos infinitesimales de una representación del grupo inicial, denotada por π , y si se hace tender $\epsilon \longrightarrow 0$, entonces las representaciones de los generadores tenderán a 0 a excepción de aquellos que formen parte del subgrupo sobre el que se contrae (con la notación de subálgebras, aquellos que se generen con elementos de \mathfrak{h}); esto es,

$$\begin{cases} \pi(\mathfrak{h}) & \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \pi(\mathfrak{h}) \\ \pi(\epsilon\mathfrak{p}) & \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

donde $\pi(\mathfrak{h})$ es la representación de elementos de \mathfrak{h} . De esta manera, en el paso al límite, se consigue una representación que es presumiblemente isomorfa a una representación del subgrupo sobre el que se contrae, \mathfrak{h} . Para conseguir una representación de \mathfrak{g}' , y esto es, para que la representación contraída sea fiel se definirá como límite de una sucesión de representaciones del grupo inicial $\{\pi_n\}$. La idea será aumentar la dimensión de la representación para paliar la anulación de los generadores contraídos; es decir, se procede con un doble límite, sobre la dimensión de la representación que tenderá hacia infinito y sobre el parámetro ϵ que tenderá hacia cero (ver [14]):

$$\begin{cases} \pi_n(\mathfrak{h}) & \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\epsilon \rightarrow 0} \pi(\mathfrak{h}) \\ \pi_n(\epsilon\mathfrak{p}) & \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\epsilon \rightarrow 0} \pi(\mathfrak{p}') \end{cases} \quad (5.8)$$

donde π es una representación fiel de \mathfrak{g}' .

Una aplicación inmediata de esta técnica es la contracción del grupo $SO(3)$ en $E(2)$. Esta contracción permite definir las representaciones de la órbita de tipo-luz como caso límite de las representaciones de la órbita de tipo-tiempo. Merece la pena comentar que otra aplicación es la contracción del grupo de Poincaré en el grupo de Galileo inhomogéneo (contracción del grupo de Poincaré sobre las rotaciones espaciales y desplazamiento temporal). Esta contracción permite probar, desde un punto de vista grupo-teórico, el llamado *límite no relativista*; es decir, recuperar la Mecánica Clásica como límite (i.e. proceso contractivo) de la Mecánica Relativista².

² Este ejemplo, junto la contracción de $SO(3)$ en $E(2)$, constituyen el núcleo principal del trabajo de Inönü y Wigner [14]. Ver también [20]

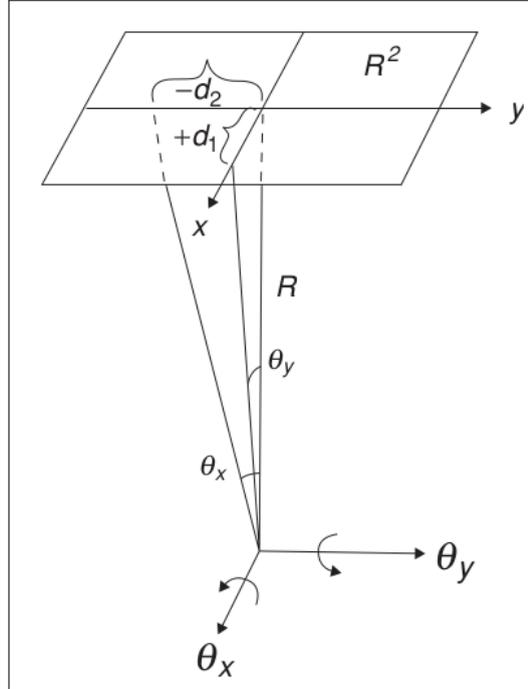


Figura 5.1: Representación de la acción de las rotaciones espaciales sobre el plano tangente de la esfera. Imagen extraída de [9]

5.2. Contracción de $SO(3)$ en $E(2)$

El estudio de la contracción del grupo $SO(3)$ se divide en dos apartados: en el primero se tratará la contracción del grupo bajo una interpretación geométrica con la intención de presentar el proceso de contracción de la manera más intuitiva; en el segundo apartado se relacionará esta contracción con la contracción de los grupos pequeños del grupo de Poincaré.

5.2.1. Interpretación geométrica

La idea es contraer $SO(3)$ sobre el subgrupo de las rotaciones en torno al eje z ; esto es, el grupo generado por L_3 . En el paso al límite, los generadores L_1 y L_2 pasarán a ser N_1 y N_2 , generadores de un subgrupo abeliano. Por tanto, L_3 junto a N_1 y N_2 generarán un grupo isomorfo al grupo euclídeo $E(2)$. Se obtendrá $SO(3) \mapsto E(2)$.

Para visualizar el proceso se toma la siguiente interpretación geométrica [9]: se supone $SO(3)$ actuando sobre la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, con $R > 0$. Los generadores infinitesimales se representarán como operadores de diferenciación

$$\begin{cases} L_1 = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ L_2 = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ L_3 = i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (5.9)$$

Se consideran pequeñas rotaciones de tal manera que la acción del grupo se pueda describir en un entorno del polo norte $(0, 0, R)$. Estas rotaciones se escriben como elementos del álgebra de la forma

$$\theta_1 L_1 + \theta_2 L_2 + \theta_3 L_3,$$

con θ_1, θ_2 pequeñas rotaciones entorno al eje x y eje y . Se verifica además

$$\theta_1 = -\frac{d_2}{R}, \quad \theta_2 = \frac{d_1}{R} \quad (5.10)$$

donde d_1 y d_2 son elementos de arco (ver Figura 5.1). Si se toma el límite $R \rightarrow \infty$ la esfera crece hasta confundirse con el plano tangente. Las pequeñas rotaciones entorno al eje x e y , rotaciones denotadas como θ_1 y θ_2 , se identifican bajo este límite con las traslaciones d_1 y d_2 sobre el plano tangente; por otro lado, la rotación entorno al eje z , θ_3 , permanece inalterada. Es decir, en el paso al límite, se recupera la acción natural del grupo euclídeo sobre el plano tangente.

La idea anterior sugiere reescribir los generadores del grupo. El elemento del álgebra se reescribe como

$$-d_2 \left(\frac{L_1}{R} \right) + d_1 \left(\frac{L_2}{R} \right) + \theta_3 L_3$$

Nótese que el parámetro $\frac{1}{R}$ no es más que la curvatura de la esfera. En el paso al límite $R \rightarrow \infty$ se consigue la siguiente transformación de los generadores infinitesimales, donde se identifica la coordenada z con el radio R ,

$$\begin{cases} \frac{1}{R} L_1 = -\frac{i}{R} \left[y \frac{\partial}{\partial z} - R \frac{\partial}{\partial y} \right] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} i \frac{\partial}{\partial y} \equiv N_2 \\ \frac{1}{R} L_2 = -\frac{i}{R} \left[R \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -i \frac{\partial}{\partial x} \equiv -N_1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Donde el límite de ambos generadores existe y se define como N_1 y N_2 . Las relaciones de conmutación cambian bajo estos nuevos generadores, recuperándose el álgebra de $E(2)$,

$$\begin{cases} [L_3, \frac{L_1}{R}] = i \frac{L_2}{R} \\ [L_3, \frac{L_2}{R}] = -i \frac{L_1}{R} \\ [\frac{L_1}{R}, \frac{L_2}{R}] = i \frac{1}{R^2} L_3 \end{cases} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \begin{cases} [L_3, N_2] = i N_1 \\ [L_3, N_1] = -i N_2 \\ [N_1, N_2] = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Conviene notar que se verifica de esta manera las reglas establecidas para el álgebra en (5.6): el álgebra sobre la que se contrae queda inalterada (en este caso, el álgebra generada por L_3), mientras que los generadores restantes conforman un subgrupo abeliano; se puede afirmar que la contracción realizada es realmente una contracción de Inönü-Wigner, donde el parámetro $\frac{1}{R}$ ha tomado el papel de ϵ .

Por tanto, se ha conseguido obtener la contracción de grupos desde una interpretación geométrica, como un problema de contracción de la esfera de radio R en el plano. El siguiente paso es reinterpretar el párrafo anterior para el grupo de Poincaré y calcular de esta manera el límite de las representaciones.

5.2.2. La representación de masa nula como límite másico

En **primer lugar**, se escoge una representación adecuada del grupo $SO(3)$. En este caso, una representación $(2s + 1)$ -dimensional, con s número entero positivo (o estrictamente semientero

positivo). Bajo la base adecuada los elementos de matriz de los generadores toman la forma (ver §2.5.2)

$$\begin{cases} (L_1)_{mm'} = -\frac{1}{2}\sqrt{(s-m)(s+m')}\delta_{m'm+1} + \frac{1}{2}\sqrt{(s-m')(s+m)}\delta_{m'm-1} \\ (L_2)_{mm'} = \frac{i}{2}\sqrt{(s-m)(s+m')}\delta_{m'm+1} + \frac{i}{2}\sqrt{(s-m')(s+m)}\delta_{m'm-1} \\ (L_3)_{mm'} = m\delta_{mm'} \end{cases} \quad (5.13)$$

con $m, m' = -s, 1-s, \dots, s-1, s$. Además, en esta base el operador $L^2 = (L_1)^2 + (L_2)^2 + (L_3)^2$ toma la forma de $L^2 = s(s+1)$.

Atendiendo a las observaciones dadas en la sección anterior, se pueden construir dos tipos de representaciones contraídas: el primer caso se corresponde con el límite $\epsilon \mapsto 0$ para s fijo, expresión (5.7); el segundo, se corresponde con el doble límite $s \mapsto \infty, \epsilon \mapsto 0$, expresión (5.8).

Para el primer caso, si se fija el parámetro s (y por tanto, la dimensión) entonces la contracción a través del parámetro ϵ ofrece los siguientes generadores,

$$\begin{cases} \epsilon (L_1)_{mm'} \longrightarrow (N_1)_{mm'} = 0 \\ \epsilon (L_2)_{mm'} \longrightarrow (N_2)_{mm'} = 0 \\ (L_3)_{mm'} \longrightarrow (L_3)_{mm'} = m\delta_{mm'} \end{cases} \quad (5.14)$$

para m, m' tomando valores en $\{-s, 1-s, \dots, s-1, s\}$. Por tanto, se obtiene una representación del subgrupo $SO(2)$, generado por L_3 , de dimensión finita.

Para el segundo caso, se efectúa el doble límite sobre la dimensión, $s \rightarrow \infty$ (sin mezclar valores enteros y semienteros) y sobre el parámetro, $\epsilon \rightarrow 0$, de tal manera que $s\epsilon = \Theta$ se mantenga finito. Los elementos de matriz, tras el límite, quedan con la forma

$$\begin{cases} \epsilon (L_1)_{mm'} \longrightarrow (N_1)_{mm'} = \frac{1}{2}\Theta(\delta_{m'm-1} - \delta_{m'm+1}) \\ \epsilon (L_2)_{mm'} \longrightarrow (N_2)_{mm'} = \frac{i}{2}\Theta(\delta_{m'm-1} + \delta_{m'm+1}) \\ (L_3)_{mm'} \longrightarrow (L_3)_{mm'} = m\delta_{mm'} \end{cases} \quad (5.15)$$

donde m, m' pueden tomar cualquier valor entero (o semientero). Se obtiene así una representación infinito-dimensional y fiel del grupo $E(2)$, contraído (ver §2.5.3).

En **segundo lugar**, para establecer la relación con el grupo de Poincaré se utiliza el segundo operador de Casimir, W^2 . Para la órbita de tipo-tiempo, donde el grupo pequeño toma la forma de $SO(3)$ (ver §3.3.3),

$$W^2 = -\frac{1}{4}m^2L^2 = -\frac{1}{4}m^2s(s+1) \quad (5.16)$$

donde se ha tomado L^2 sobre la base anterior. En este punto, se identifica el parámetro m de masa como el ϵ de la contracción de Inönü-Wigner. Si se toma el límite $m \mapsto 0$, entonces

$$W^2 \xrightarrow{m \rightarrow 0} -\frac{1}{4} \left((N_1)^2 + (N_2)^2 + 0 \right) = 0. \quad (5.17)$$

El segundo operador de Casimir se anula tras la contracción, pues los operadores N_1 y N_2 son nulos. Se recupera así el operador W^2 para la órbita de tipo-luz, en el caso degenerado. Por tanto, esta contracción puede vincularse directamente con las representaciones de espín finito. Por otro lado, si se toma el doble límite,

$$W^2 \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{m \rightarrow 0} -\frac{1}{4} \left((N_1)^2 + (N_2)^2 + 0 \right) = \frac{1}{4}\Theta \quad (5.18)$$

donde se ha recuperado el segundo operador de Casimir para la órbita de tipo-luz, en el caso no degenerado. Es decir, para $\Theta \neq 0$ se vincula esta contracción con las representaciones de espín continuo³. Nótese que el parámetro Θ ha absorbido la constante ω (recuérdese que el representante de la órbita de tipo-luz se definió como $p = (\omega, \omega, 0, 0)^T$ en 3.3.3 –de aquí proviene el parámetro ω , con dimensión de masa–).

Las consideraciones anteriores permiten concluir de la siguiente manera:

1. Las **representaciones de espín discreto** pueden obtenerse como límite $m \rightarrow 0$ de las representaciones másicas con espín s fijo. En efecto, en este caso los generadores N_1 y N_2 se anulan y el grupo pequeño contrae sobre el subgrupo $SO(2)$ (el caso degenerado).

$$\begin{cases} \epsilon L_1 \mapsto N_1 = 0 \\ \epsilon L_2 \mapsto N_2 = 0 \\ L_3 \mapsto L_3 \end{cases} \quad (5.19)$$

Es más, de este modo se tiene que las simetrías internas (el momento angular intrínseco, o espín) *contraen* en las simetrías planas; la helicidad toma el papel de límite de espín⁴.

2. Las **representaciones de espín continuo** se obtienen bajo el doble límite

$$s \rightarrow \infty, m \rightarrow 0 \text{ tal que } sm = \Theta \quad (5.20)$$

con parámetro Θ estrictamente positivo. Este hecho sugiere la interpretación de las partículas de espín continuo como límite de alta energía ($E \gg m$) y espín elevado ($s \gg 1$) de las partículas másicas. El parámetro Θ queda como “remanente” de masa.

De esta manera se puede dar una explicación a las dos exóticas propiedades mencionadas en §1.2: (i) la parametrización de las representaciones de masa nula bajo una constante con dimensión de masa; (ii) la existencia de infinitos grados de libertad por punto espacio-temporal, producido por la no acotación del espín.

En efecto, con el mecanismo de contracción se obtiene de manera natural el parámetro Θ como límite del producto sm ; puesto que absorbe la constante ω (relacionada con el representante de la órbita $p \equiv (\omega, 0, 0, \omega)^T$), Θ adquiere dimensión de masa. Desde una perspectiva física, se puede considerar el remanente de masa cuando se establece el límite de alta energía y espín elevado⁵. De la misma manera, el mecanismo de contracción construye representaciones de dimensión infinita; además, por la forma dada en (5.15) se observa que la representación mezcla estados de helicidad bien definida. De este modo, un estado cualquiera del sistema físico se deberá expresar como suma infinita de estados de helicidad (o como torre de helicidades), de tal modo que los grados de libertad del sistema son infinitos.

En conclusión, a través de la contracción de Inönü-Wigner se ha podido dar, desde el lenguaje de la Teoría de Grupos, un mecanismo para obtener las representaciones de tipo-luz como caso

³Obsévese que para $\Theta \mapsto 0$ se obtiene el caso anterior, relacionado con espín finito, como es razonable.

⁴Esta afirmación necesita algo más de atención: observando la forma de (5.14), el generador (L_3) descompone como suma directa (y finita) de caracteres de $SO(2)$. Por tanto, sobre el espacio de representación están presentes distintos estados de helicidad bien definida, de $-s$ hasta s (imagínese una torre finita de estados); pero, el punto importante, no se mezclan bajo la acción de la representación.

⁵Recuérdese la Figura 4.1.c): la representación de espín continuo se construía *colapsando* las rectas de representaciones másicas (donde la pendiente es $s(s+1)$ sobre el eje vertical).

límite de las representaciones de tipo-tiempo. Sobre este mecanismo se asienta toda construcción de funciones de onda de espín continuo (como el caso tratado en §4.3.4). Merece la pena señalar que durante el proceso contractivo aparece de manera natural la distinción (o construcción) de las dos tipologías de representaciones: espín finito y espín continuo. Es más, el límite sugiere la interpretación de las partículas de espín continuo (rechazadas en la literatura física hasta muy recientemente) como caso límite de partículas másicas de alta energía y espín elevado. De este modo, este capítulo concluye el tratamiento teórico sobre representaciones de espín continuo.

Capítulo 6

Conclusiones

Los **objetivos** planteados en el trabajo han sido:

- *Estudiar el grupo de Poincaré y obtener la clasificación de sus representaciones unitarias e irreducibles de tal manera que se pueda obtener una clasificación de las partículas elementales relativistas.*
- *Estudiar las representaciones de espín continuo con la intención de entender su posición actual en la física moderna, y ver a su vez el contenido físico de dichas representaciones a través del mecanismo de contracción de grupos de Lie*

Estos objetivos han sido abordados y tratados con gran profundidad. Las conclusiones desprendidas del trabajo son las siguientes:

1. Se ha estudiado con detalle las transformaciones de simetría espacio-temporales, o transformaciones de Lorentz, que permiten construir el **grupo de Lorentz** (para las transformaciones homogéneas) y el **grupo de Poincaré** (para las transformaciones inhomogéneas).
2. Se ha estudiado la forma de ambos grupos, así como sus álgebras de Lie asociadas y sus generadores. Para el grupo de Poincaré se han obtenido las órbitas y grupos pequeños asociados.
3. Se han obtenido las **representaciones unitarias e irreducibles** del **grupo de Poincaré**, que se clasifican en los siguientes tipos:
 - a) **Representaciones másicas** asociada a la órbita de tipo-tiempo. Su grupo pequeño asociado es el grupo $SO(3)$.
 - b) **Representaciones de masa nula** asociadas a la órbita de tipo-luz. Su grupo pequeño asociado es el grupo Euclídeo $E(2)$, cuya estructura de producto semidirecto ofrece la subdivisión de las representaciones siguiente:
 - 1) **Representaciones de espín finito**, inducidas por el subgrupo $SO(2) \subset E(2)$.
 - 2) **Representaciones de espín continuo**, inducidas por todo $E(2)$.
 - c) **Representaciones taquiónicas** asociadas a la órbita de tipo-espacio, cuyo grupo pequeño asociado es el grupo propio de Lorentz, $(2 + 1)$ -dimensional, $SO^+(1, 2)$.

- d)* **Representaciones asociadas a la órbita degenerada**, $\{0\}$. El grupo pequeño es el propio grupo de Lorentz, $(3 + 1)$ -dimensional, $SO^+(1, 3)$.

Esta clasificación ha sido abordada con la ayuda de la metodología de Mackey y la teoría de operadores de Casimir de álgebras de Lie.

La clasificación anterior permite dar una **clasificación de las partículas elementales relativistas**; en efecto, cada partícula está asociada a una representación unitaria e irreducible del grupo de Poincaré.

4. Se dan las ecuaciones de onda de las partículas másicas (ecuación de Klein-Gordon y ecuación de Dirac), asociadas a las representaciones másicas, así como las ecuaciones de onda de partículas asociadas a las representaciones de masa nula (partícula de espín finito y partícula de espín continuo). Con ello se concluye el primer objetivo.
5. Respecto a las representaciones de **espín continuo**, se ha podido establecer una nueva perspectiva para dichas representaciones a través del **proceso de contracción de grupos de Inönü-Wigner**.
 - a)* Por un lado, se ha conseguido dar una reinterpretación física de estas representaciones: estableciendo la **partícula de espín continuo como límite de partículas másicas energéticas** ($E \gg m$) y de **espín elevado** ($s \gg 1$).
 - b)* Por otro lado, se ha establecido el camino para construir la ecuación de ondas asociada. Esta construcción da una descripción de la partícula como **torre infinita de estados de helicidad bien definida**. De esta manera se cierra el segundo objetivo.

Bibliografía

- [1] BARGMANN, V., WIGNER, E. *Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equation*. Proc. Nat. Acad. Sci (U.S.A.) **34**, 211 (1948).
 - [2] BEKAERT, X., SKVORTSOV, E. *Elementary particles with continuous spin* IJMP Vol. 32, No. **23**, 1730019 (2017)
 - [3] BEKAERT, X., BOULANGER, N. *The unitary representations of the Poincaré group in any spacetime dimension*, in the proceedings of the 2nd Modave Summer School in Theoretical Physics (6-12 Aug 2006, Modave, Belgium) [hep-th/0611263].
 - [4] BEKAERT, X., MOURAD, J. *The Continuous Spin Limit of Higher Spin Field Equation*. JHEP **1**, **115** (2006) [arXiv:hep-th/0509092].
 - [5] DEITMAR A., ECHTERNHOFF, S. *Principles of Harmonic Analysis*. Springer. Berlin (2008).
 - [6] FOLLAND, G. B. *A course in abstract harmonic analysis*. DCRC Press, Boca Raton - Florida (1995).
 - [7] FOLLAND, G. B. *Quantum Field Theory: a tourist guide for mathematicians*. American Mathematical Society, Providence - Rhode Island (2008).
 - [8] FUSHCHYCH, W.I., NIKITIN, A.G. *Reduction of the Representations of the Generalised Poincaré Algebra by the Galilei Algebra*. JPMG vol. 13 **7** (1980) [DOI:10.1088/0305-4470/13/7/015]
 - [9] GILMORE, R. *Lie Groups, Physics, and Geometry. An introduction for Physicist, Engineers and Chemists*. Cambridge University Press. Cambridge (2008)
 - [10] GRACIA-BONDÍA, J.M., VÁRILLY, J.C. *On the kinematics of the last Wigner particle*. (2019). [arXiv:1809.00387]
 - [11] HALL, B. C. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations. An elementary introduction*. Springer NY (2015).
 - [12] HALL, B. C. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer NY (2013).
 - [13] HUMPHREYS, J. F. *A Course in Group Theory*. Oxford University Press. (1996). Oxford.
 - [14] INÖNÜ, E. , WIGNER, E. *On the Contraction of Groups and their Representations*. Proc Natl Acad Sci U S A. (1953) 39(6) pg. 510–524. [doi: 10.1073/pnas.39.6.510]
 - [15] KHAN, A. M., RAMOND, P. *Continuous Spin Representations from Group Contraction*. JMP, vol 45, **5** (2005) [arXiv:hep-th/0410107]
-

- [16] KIM, Y.S., NOZ, M.E. *Theory and Applications of the Poincaré Group*. D. Reidel Publishing Company (1986)
- [17] KLEIN, F., *A comparative review of recent researches in geometry*. (2008) [arXiv:0807.3161]
- [18] KNAPP, A. W. *Representation Theory of Semisimple Groups*. Princeton University Press (1986)
- [19] LEE, M. L. *Manifolds and Differential Geometry*. American Mathematical Society (2009)
- [20] LEVY-LEBLOND, J. M. *Galilei Group and Nonrelativistic Quantum Mechanics*. JMP 4, 776 (1963)
- [21] MACKEY, G. W. *Induced Representations of Locally Compact Groups I*. The Annals of Mathematics. Vol. 55. N°1 (January, 1952). pp. 101 - 139.
- [22] MACKEY, G. W. *Induced Representations of Locally Compact Groups II. The Frobenius Reciprocity Theorem*. The Annals of Mathematics. Vol. 58. N°2 (January, 1953). pp. 193 - 221.
- [23] MACKEY, G. W. *Infinite - dimensional Group Representations*. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), no. 5, 628–686.
- [24] MARTORELL ARGEMÍ, C. M. *Una introducción a la teoría de representaciones unitarias de grupos localmente compactos* Trabajo de Final de Grado, UVa (2020).
- [25] RUDIN, W. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc. NY (1991)
- [26] SAKURAI, J.J., NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. Addison - Wesley, MA (1995).
- [27] SAKURAI, J.J. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, MA (1967).
- [28] SCHWARTZ, M. D. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press (2014).
- [29] SOROKIN, D. *Introduction to the Classical Theory of Higher Spins*. (2003) [arXiv:hep-th/0405069]
- [30] SCHUSTER, P., TORO, N. *On the Theory of Continuous-Spin Particles: Helicity Correspondence in Radiation and Forces*. JHEP 1309 (2013) 105 [arXiv:1302.1577]
- [31] SCHUSTER, P., TORO, N. *On the Theory of Continuous-Spin Particles: Wavefunctions and Soft-Factor Scattering Amplitudes*. JHEP 1309 (2013) 104 [arXiv:1302.1198]
- [32] SCHUSTER, P., TORO, N. *A Gauge Field Theory of the Continuous-Spin Particles*. JHEP 1310 (2013) 061 [arXiv:1302.3225]
- [33] TARAONI, A. *Nobel Prize 2015: Kajita and McDonald* Nature Phys 11, 891 (2015).
- [34] TUNG, WU-KI *Group theory in physics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., USA (2003).
- [35] VARADARAJAN, V.S. *Geometry of Quantum Theory*. Springer, NY (2006)
- [36] WEINBERG, S. *The quantum theory of fields. I Foundations*. Cambridge University Press (1995).

- [37] WEINBERG, S. *Lectures on Quantum Mechanics*. 2^o Edición. Cambridge University Press (2015).
- [38] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, Inc. (1972).
- [39] WIGNER, E. *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group*. The Annals of Mathematics. Vol. 40. N^o1 (January, 1939). pp. 149 - 204.
- [40] YNDURAIN, F. J. *Mecánica Cuántica Relativista*. Alianza Ed., Madrid (1990).