



---

**Universidad de Valladolid**

Facultad de Ciencias

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

Grado en Física

### **Teorías gauge y gravedad de Chern-Simons en 2+1 dimensiones**

Teorías gauge, el electromagnetismo, los monopolos, la teoría de Yang-Mills y una introducción a la formulación gauge de la gravedad en 2+1 dimensiones en términos de la forma de Chern-Simons

***Autor: Rubén Calvo Ibáñez***

***Tutor/es: José Manuel Izquierdo y Fernando Gómez Cubillo***



# Abstract

*Gauge theories are studied in the abstract framework of Differential Geometry. This includes: Lie groups, actions, fibre bundles, connections, curvatures, etc. These topics are covered throughout the first sections with the intention to serve as an introduction. After that, the main focus is to present numerous examples, with the highest amount of detail possible. Electromagnetism is analyzed, starting with classical freedom to choose the electromagnetic potential. Thereafter, the theory is described in terms of  $U(1)$ -principal bundles. Dirac monopoles are also studied, providing an example of a case where fibre bundles are non-trivial. Electromagnetic theory is generalized to Yang-Mills theories and the conditions for the existence of such theories is examined. The aim of the last chapter is to introduce gravity in 2+1 dimensions with a Chern-Simons action as a gauge theory. In this case, the theory is described in terms of the bundle of frames, the Lorentz connection and the Poincaré Group being the symmetry group for the theory.*

# Resumen

*Se estudian las teorías de gauge en el lenguaje abstracto de la Geometría Diferencial. Esto incluye: Grupos de Lie, acciones, fibrados, conexiones, curvaturas, etc. Estos temas se cubren a lo largo de las primeras secciones con la intención de servir como una introducción. Después, el objetivo principal es presentar numerosos ejemplos, con el mayor nivel de detalle permitido. Se analiza el electromagnetismo, comenzando por la libertad clásica de escoger los potenciales de la teoría. Tras ello, esta se describe en términos de  $U(1)$ -fibrados principales. Se estudian también los monopolos de Dirac, que sirven como ejemplo de teorías con fibrados no triviales. El electromagnetismo se generaliza a la teoría de Yang-Mills y se discuten las condiciones para la existencia una acción adecuada. El objetivo del último capítulo es introducir la gravedad de Chern-Simons en  $2+1$  dimensiones como teoría de gauge. En este caso, la teoría queda descrita en términos del vierbein, la conexión de Lorentz y el grupo de Poincaré, que es el grupo de simetrías de la misma.*

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Resumen</b>	<b>4</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Objetivo . . . . .	7
1.2. Breve reseña histórica . . . . .	7
1.3. Noción intuitiva de lo que son las teorías de gauge . . . . .	8
1.4. Aspectos matemáticos de las teorías de gauge . . . . .	8
1.5. Planteamiento del trabajo . . . . .	9
<b>2. Preliminares: algunos conceptos de Geometría diferencial</b>	<b>10</b>
2.1. Variedades diferenciables, campos de vectores y formas . . . . .	10
2.1.1. Espacio tangente a una variedad . . . . .	10
2.1.2. Campos tangentes . . . . .	10
2.1.3. Álgebra exterior sobre variedades . . . . .	10
2.1.4. El <i>pull-back</i> y el <i>push-forward</i> . . . . .	11
2.2. Grupos de Lie . . . . .	12
2.2.1. Grupos de Lie matriciales . . . . .	12
2.2.2. Difeomorfismos de multiplicación a izquierda y a derecha . . . . .	12
2.2.3. Álgebras de Lie y aplicación exponencial . . . . .	12
2.2.4. Caso particular . . . . .	13
2.3. Representaciones de grupos . . . . .	14
2.3.1. Representación adjunta . . . . .	14
2.3.2. La forma de Killing . . . . .	15
2.4. Acción de grupo . . . . .	15
2.4.1. Definición de acción de grupo . . . . .	15
2.4.2. Multiplicaciones y aplicación de órbitas . . . . .	16
2.4.3. Campos de vectores fundamentales . . . . .	17
2.4.4. La forma de Maurer-Cartan . . . . .	17
<b>3. Teorías de gauge</b>	<b>19</b>
3.1. Fibrados . . . . .	19
3.1.1. Fibrados principales . . . . .	19
3.1.2. Fibrados vectoriales asociados . . . . .	21
3.2. Conexión, curvatura y derivada covariante . . . . .	23

3.2.1.	Conexión y campos de gauge . . . . .	23
3.2.2.	2-forma de curvatura . . . . .	24
3.2.3.	Derivada covariante . . . . .	25
3.3.	El electromagnetismo . . . . .	26
3.3.1.	Invarianza gauge en el sentido usual . . . . .	26
3.3.2.	Reescribiendo las ecuaciones de Maxwell . . . . .	26
3.3.3.	El electromagnetismo como teoría gauge con grupo $U(1)$ . . . . .	28
3.3.4.	¿Dónde están el resto de ecuaciones? . . . . .	29
3.3.5.	La energía electromagnética . . . . .	31
3.3.6.	¿Por qué una simetría $U(1)$ ? . . . . .	33
3.4.	El monopolo magnético . . . . .	33
3.5.	El Lagrangiano de Yang-Mills . . . . .	37
<b>4.</b>	<b>Breve introducción a las clases características y la acción de Chern-Simons</b>	<b>39</b>
4.1.	El monopolo magnético revisado . . . . .	39
4.2.	Yang-Mills revisado y clases de Chern . . . . .	40
<b>5.</b>	<b>Gravedad</b>	<b>42</b>
5.1.	Gravedad en términos del <i>vierbein</i> y la conexión de spin . . . . .	42
5.1.1.	La gravedad de Einstein . . . . .	42
5.1.2.	El <i>vierbein</i> . . . . .	43
5.1.3.	El grupo de Lorentz . . . . .	43
5.1.4.	La conexión de Lorentz . . . . .	44
5.2.	Gravedad como teoría gauge . . . . .	46
5.2.1.	Punto de partida . . . . .	46
5.2.2.	Grupo de Poincaré . . . . .	46
5.2.3.	Acción de Einstein-Hilbert en función del <i>vierbein</i> y la conexión de Lorentz . . . . .	47
5.2.4.	Métricas invariantes en la teoría de Chern-Simons-Witten . . . . .	48
5.2.5.	Construcción explícita de la teoría . . . . .	49
5.2.6.	Soluciones de la teoría . . . . .	51
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Objetivo

La presente memoria constituye el Trabajo de Fin de Grado que presenta el interesado para optar a la titulación de Graduado en Físicas. Está organizado como la segunda parte física de un trabajo coordinado entre el Grado en Física y el Grado en Matemáticas. En el trabajo de matemáticas se trató, principalmente, el formalismo de las teorías gauge en el contexto de la Geometría Diferencial. Este trabajo se reservó para exponer el mayor número de ejemplos posibles, y hacer una introducción a la formulación gauge de la gravedad en 2+1 dimensiones en términos de la acción de Chern-Simons. Siendo un trabajo conjunto, algunas partes se han tomado *verbatim* de la memoria hecha en Matemáticas [6]. Esto incluye, sobre todo, la parte matemática de las teorías de gauge, si bien muchas partes han sido reescritas y reestructuradas.

### 1.2. Breve reseña histórica

Existen cuatro interacciones físicas fundamentales: la gravedad, el electromagnetismo y las fuerzas nucleares fuerte y débil. En 1915, Einstein publica una serie de artículos que culminan con sus ecuaciones de campo describiendo la primera fuerza fundamental: la gravitación [14]. Esta teoría, conocida comúnmente como Relatividad General, es de naturaleza geométrica. Es decir, en ella la gravedad no se interpreta como una fuerza en el sentido usual, sino como la curvatura de una variedad 4-dimensional que representaría el espacio-tiempo en el que vivimos. En 1918, H. Weyl introduce lo que más tarde sería un prototipo de teoría gauge [25]. Esta teoría pretendía unificar el electromagnetismo con la gravedad a través de un enfoque geométrico, similar al que hizo Einstein. Aunque el planteamiento original de Weyl se probó incorrecto, más tarde se descubrió que una nueva idea de invarianza gauge podía explicar la simetría de isospín. En un artículo clásico [39], C.N. Yang y R.L. Mills propusieron que la fuerza nuclear fuerte se pudiese describir como una teoría gauge con grupo de simetría  $SU(2)$ . Esto resucitó el interés en las teorías de gauge que, durante mucho tiempo, han constituido nuestro marco de entendimiento más profundo y unificado de las fuerzas fundamentales. En particular, el electromagnetismo, y las interacciones nucleares fuerte y débil se han unificado en una única teoría de gauge con grupo de Lie  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Esta teoría constituye el conocido como **Modelo Estándar de partículas elementales**.

Con el descubrimiento, en 2012, del bosón de Higgs [1] parece quedar confirmada la validez de este modelo y también el hecho de que la naturaleza de las interacciones fundamentales debería venir descrita por una gran teoría unificada de gauge. Por desgracia, no todas las fuerzas fundamentales están unificadas en una única teoría: la gravedad parece resistirse a los intentos de estos últimos años. Esto no quiere decir que la gravedad no haya sido formulada en términos de teorías gauge. En 1956, R.Utiyama, en su artículo [33] demuestra que la gravedad puede entenderse como una teoría de gauge donde el grupo de simetrías fuese el grupo de Lorentz. No obstante, todavía queda por formular una teoría gauge que tenga al grupo de Poincaré (que es el grupo completo de simetrías de la Relatividad General) como grupo de simetrías locales. Intentos recientes [35],[36] lograron describir satisfactoriamente la gravedad en 2+1 dimensiones como teoría gauge. Es más, estas teorías probaron más tarde ser resolubles analíticamente [36]. Aún con todo, el caso en 4 dimensiones continúa siendo un misterio. Resulta curioso que esta interacción, formulada en el lenguaje abstracto de la geometría diferencial por Einstein y que comparte tantas ideas con las teorías gauge actuales, escape aún a dicho formalismo.

### 1.3. Noción intuitiva de lo que son las teorías de gauge

Está clara, pues, la importancia de las teorías de gauge, pero aún no se ha presentado qué es exactamente una teoría gauge. Las teorías gauge son una clase de teorías físicas que describen la interacción de los campos fundamentales de la naturaleza en términos de una conexión en el espacio-tiempo cumpliendo ciertas propiedades, que se interpreta como un **potencial** en el sentido clásico, y una curvatura midiendo **la intensidad de dicha interacción**. La forma usual de llegar a una teoría gauge en física es observar la invarianza de un cierto Lagrangiano con respecto a una **transformación global**, que no depende del espacio-tiempo y promocionarla a una **transformación local** que sí que dependa. En este proceso, para conservar la invarianza, se ha de postular la existencia de un objeto matemático que transforme de acuerdo a una reglas determinadas, de manera que se pueda construir una variable dinámica -que será una derivada covariante- que sea invariante con respecto a la transformación local. Este objeto, que en física se llama **potencial de gauge**, resulta tener las mismas propiedades de transformación que una **1-forma local de conexión** en un fibrado principal, una vez escogida una sección del fibrado. La fuerza de la interacción mediada por este potencial, que físicamente puede construirse usando derivadas del mismo, en analogía a como se hace en el electromagnetismo con el tensor electromagnético, matemáticamente se corresponde con un objeto llamado **2-forma de curvatura**. Los campos físicos de materia se acoplan con la **derivada covariante** en lo que en física se conoce como **acople mínimo** (*minimal coupling*). Este acople da lugar a términos de interacción en los Lagrangianos representados por diagramas de Feynman.

### 1.4. Aspectos matemáticos de las teorías de gauge

Desde el punto de vista matemático, pues, el estudio de las teorías de gauge es el de los fibrados principales, fibrados vectoriales asociados, conexiones, curvaturas, derivadas cova-

riantes, etc. De este modo, aúna muchas ramas interesantes de la geometría diferencial y la topología en una única y hermosa teoría.

## 1.5. Planteamiento del trabajo

En este trabajo, se pretende dar una introducción a las teorías gauge que se complementen con el trabajo realizado en el área de matemáticas [6]. Por ello, se hará especial hincapié aquí en los ejemplos físicos, desarrollados con detalle cuando se pueda, y sus implicaciones. Con esto en mente, la estructura del trabajo es:

1. Se comienza por introducir brevemente algunos de los aspectos matemáticos de la teoría, tratados con detalle en [6]. Se hace un repaso, primero, de las nociones elementales de Geometría Diferencial (incluyendo el lenguaje de las formas, los campos tangentes, grupos de Lie, teoría de representaciones y acciones de grupo) para luego pasar al campo concreto de las teorías gauge: fibrados, conexiones curvaturas, etc.
2. Después, se pasa a analizar el ejemplo más sencillo de teoría gauge: la teoría del electromagnetismo de Maxwell. Se estudia cómo el principio de invarianza gauge tiene un origen clásico en la libertad de escoger los potenciales electromagnéticos. Esto se vincula con una simetría de carácter cuántico gobernada por el grupo  $U(1)$ . Entre medias, se reescribe el electromagnetismo en el lenguaje compacto de las formas y de las teorías gauge en fibrados principales. También se tratan los monopolos magnéticos, que sirven como introducción a las clases características, un tema de gran relevancia en la gravedad de Chern-Simons.
3. El resto del trabajo se dedica a intentar formular la gravedad como teoría gauge con el grupo de Poincaré como grupo de simetría. Se comienza introduciendo la gravedad en función de la referencia móvil, o *vierbein* y de la conexión de spin o conexión de Lorentz, para después pasar a analizar el caso en  $2 + 1$  dimensiones como teoría gauge con la acción de Chern-Simons y el grupo de simetrías  $G = ISO(2, 1)$  (el grupo de Poincaré).

Las referencias principales para las partes matemáticas introductorias son [16] y [29]. Para el estudio del electromagnetismo y los monopolos se usaron las referencias [23], [24], [20] y [31], principalmente. Para tratar la gravedad en  $2+1$  dimensiones se empleó [35], [41] y [18]. Otras referencias se usan en casos particulares, pero se especifican, normalmente, al principio de cada sección.

# Capítulo 2

## Preliminares: algunos conceptos de Geometría diferencial

Antes de comenzar con las teorías de gauge, conviene revisar algunos elementos de la Geometría Diferencial que se van a usar durante este trabajo. Se sigue, sobre todo [20], [16] y [21].

### 2.1. Variedades diferenciables, campos de vectores y formas

#### 2.1.1. Espacio tangente a una variedad

Dada una variedad diferenciable  $M$ , y un punto  $p \in M$ , se puede construir un espacio vectorial  $T_p M$ , el **espacio tangente a la variedad**, como la unión de todos los vectores velocidad de curvas que pasan por  $p$ . También se puede interpretar como el espacio de todas las derivaciones de funciones  $C^\infty(M)$  (funciones en  $M$  que son  $\mathbb{R}$ -valuadas y diferenciables). Por ello, una base de este espacio la constituyen las derivadas parciales en cada dirección, que son derivaciones:  $\{\partial_\mu(p)\}_\mu \subset T_p(M)$ .

#### 2.1.2. Campos tangentes

Una aplicación  $X : p \mapsto X_p \in T_p M$  que sea diferenciable en cierto sentido se llama **campo tangente a la variedad**. La diferenciabilidad de un campo se puede testar viendo que transforme funciones  $C^\infty(M)$  en funciones  $C^\infty(M)$  o simplemente dando una estructura al fibrado tangente  $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$  que haga que  $X$  sea una aplicación diferenciable entre variedades. Al conjunto de todos los campos tangentes se le denota  $\mathfrak{X}(M)$  y es un espacio vectorial.

#### 2.1.3. Álgebra exterior sobre variedades

Se puede hacer álgebra exterior sobre el espacio tangente a la variedad. Para ello, se define el espacio de funciones multilineales y alternadas que van de  $T_p M \times \binom{k}{!} \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$

que se suele denotar  $\Lambda^k(T_pM)$ . En este contexto, se define el espacio de **k-formas** sobre la variedad como:

**Definición 2.1.1 (k-formas).** Una **k-forma diferenciable**  $\alpha$  es una aplicación  $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \binom{k}{!} \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  verificando que, para cada  $p \in M$ , la aplicación  $\alpha_p : T_pM \times \binom{k}{!} \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\alpha_p(X_1, \dots, X_k) = \alpha_p(X_{1p}, \dots, X_{kp})$  es multilineal y alternada, donde  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\forall 1 \leq i \leq k$  y  $X_{ip} \in T_pM$  es la evaluación del campo en el punto  $p \in M$ . Al conjunto de todas las k-formas se las denota  $\Omega^k(M)$ .

Para las teorías gauge, interesan también las  $k$ -formas  $W$  valuadas, donde  $W$  es un cierto espacio vectorial. La generalización es inmediata ya que, en este caso se define una  $k$ -forma  $\alpha$  como una aplicación:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathfrak{X}(M) \times \binom{k}{!} \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M, W) \\ (X_1, \dots, X_k) &\longrightarrow \alpha(X_1, \dots, X_k)(p) = \alpha_p(X_{1p}, \dots, X_{kp}) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

que sea multilineal y alternada. En este caso,  $C^\infty(M, W)$  denota las funciones  $W$ -valuadas definidas en la variedad y que son diferenciables. Al espacio de las  $k$ -formas  $W$ -valuadas se le denota  $\Omega^k(M, W)$ .



A las  $k$ -formas se las puede «multiplicar», en cierto sentido usando el **producto exterior**, que se denotará  $\wedge$ . A las  $k$ -formas también se las puede subir de grado usando la **diferencial exterior**  $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ , que es la generalización de los operadores de derivación usuales en  $\mathbb{R}^3$  (el gradiente: convierte funciones en 1-formas; el rotacional: convierte 1-formas en 2-formas y la divergencia: convierte 2-formas en 3-formas).

### 2.1.4. El *pull-back* y el *push-forward*

Dada una aplicación  $\phi : M \rightarrow N$  entre variedades diferenciables, hay una forma natural de, dado un campo de vectores en  $M$ , asignarle un campo de vectores en  $N$ , llamada *push-forward*. Del mismo modo, dada una forma en  $N$ , la manera de asignarla una forma en  $M$  se denomina *pull-back*. Formalmente:

**Definición 2.1.2 (pull-back y push-forward).** Sea  $\phi : M \rightarrow N$  entre variedades diferenciables:

1. Si  $\phi$  es **difeomorfismo**, entonces se define:

$$\begin{aligned} \phi_* : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(N) \\ X &\longrightarrow \phi_*(X) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

con  $\phi_*(X)_{\phi(p)} = d_p\phi(X_p)$  y se llama *push-forward*, o morfismo estrella.

2. Si  $\phi$  es **diferenciable**, entonces se define:

$$\begin{aligned}\phi^* : \Omega^k(N) &\longrightarrow \Omega^k(M) \\ \alpha &\longrightarrow \phi_*(\alpha)\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

con  $\phi^*(\alpha)_p(X_1, \dots, X_k) = \alpha_{\phi(p)}(d_p\phi(X_{1p}), \dots, d_p\phi(X_{kp}))$ , siendo  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\forall i$ . A  $\phi^*$  se le llama *pull-back*.

## 2.2. Grupos de Lie

### 2.2.1. Grupos de Lie matriciales

Aunque los grupos de Lie se pueden definir con mayor generalidad, en Física interesa sobre todo el caso de los grupos de Lie matriciales, o **grupos de Lie lineales**, que son subgrupos cerrados de  $GL(n, \mathbb{K})$ , el grupo lineal general sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  (en general, suele ser  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ). Estos grupos tienen dos estructuras simultáneamente: la de grupo con una cierta operación definida sobre ellos y la de variedad diferenciable. Además, se pide que la multiplicación sea una aplicación diferenciable ( $C^\infty$ ). En este sentido, el hecho de que haya dos estructuras definidas sobre estos conjuntos, hace que se hable de que una aplicación sea un «isomorfismo de grupos de Lie» cuando es un difeomorfismo que además es un isomorfismo en el contexto de la teoría de grupos.

### 2.2.2. Difeomorfismos de multiplicación a izquierda y a derecha

Sobre los grupos de Lie, hay dos difeomorfismos de especial relevancia, que son las **multiplicaciones por la izquierda**:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longrightarrow g \cdot h\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

y las **multiplicaciones por la derecha**:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longrightarrow h \cdot g\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Estos difeomorfismos solamente se tienen en grupos de Lie y no en variedades, en general. Están relacionados con muchas construcciones particulares de grupos de Lie, como sus álgebras asociadas.

### 2.2.3. Álgebras de Lie y aplicación exponencial

Sobre un grupo de Lie  $G$ , se puede definir una estructura, llamada **álgebra de Lie**, que está formada por todos los campos de vectores invariantes por la izquierda (invariantes por el *push-forward* de 2.2.1) y que aquí se denotará con letras góticas:  $\mathfrak{g}$ . A todos los efectos, esta estructura se puede pensar como el espacio tangente a la matriz  $Id$ , con un corchete

dado por el conmutador de matrices. En grupos lineales, el álgebra de Lie es siempre un subespacio del espacio de todas las matrices cuadradas con coeficientes en el cuerpo  $\mathbb{K}$ , que se denota  $Mat(n \times n, \mathbb{K})$  o simplemente  $Mat(n, \mathbb{K})$ . El álgebra de Lie es de gran importancia, ya que representa una aproximación infinitesimal del grupo en un entorno de la identidad. Es más, definiendo:

**Definición 2.2.1 (matriz exponencial).** Sea  $A \in Mat(n \times n, \mathbb{K})$ . Se define la **exponencial de A** como:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad (2.2.3)$$

En grupos matriciales se llama **aplicación exponencial** a la aplicación

$$\exp : \mathfrak{g} \subset Mat(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow G : A \mapsto e^A \quad (2.2.4)$$

Entonces, se tiene el importante resultado, de mucha aplicación en Física:

**Teorema 2.2.2 (aplicación exponencial es sobreyectiva en grupos compactos y conexos).** Sea  $G$  un grupo de Lie **compacto y conexo**. Entonces, la aplicación exponencial es sobreyectiva. Esto es tanto como decir que el grupo se puede parametrizar por la aplicación exponencial.

La prueba del teorema se puede encontrar en textos más avanzados, como [30] (*Maximal Torus Theorem*). Lo interesante es que el álgebra de Lie del grupo determina todos los elementos del grupo a través de la aplicación exponencial y los llamados **generadores del álgebra**, que son un conjunto de vectores que forman una base del álgebra de Lie.

#### 2.2.4. Caso particular

A continuación, se considera un ejemplo de grupo de Lie matricial, tratado en [6]:

**Ejemplo 2.2.1 (grupo de matrices especiales y unitarias).** El grupo de matrices especiales y unitarias es:  $SU(n) = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{C}) : A A^\dagger = Id \text{ y } det(A) = 1\}$ . Es fácil probar que es un grupo de Lie con dimensión  $n^2 - 1$ .

En el **caso de  $n=2$** , el grupo es el grupo de rotaciones en el espacio del spin. Para verlo, basta con hallar el plano tangente a la identidad. Esto se hace tomando una curva  $\gamma(t)$  cuya imagen esté contenida en  $SU(2)$  y tal que  $\gamma(0) = Id$  y  $\gamma'(0) = X \in T_{Id}M \cong \mathfrak{su}(2)$  (el álgebra de Lie del grupo). Obsérvese que la curva  $\gamma(t) = e^{tX}$  valdría, ya que  $\gamma(0) = Id$  y  $\gamma'(0) = X$ . Como  $\gamma(t)$  está contenida en  $SU(2)$  cumple las ecuaciones de la variedad. Es decir:  $\gamma \gamma^\dagger = Id$  y  $det(\gamma(t)) = 1$ . Derivando implícitamente en la primera condición y por la regla del producto, se llega a:

$$\gamma'(0) \gamma(0)^\dagger + \gamma(0) \gamma'(0)^\dagger = X Id + Id X^\dagger = 0 \Rightarrow X = -X^\dagger \quad (2.2.5)$$

Por otro lado, usando que  $det(e^{tX}) = e^{tr(X)}$  ( $tr(\cdot)$  denota la traza) (ver [16], **Teorema**

1.7.33), se tiene que:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(e^{tX}) = \text{tr}(X) = 0 \Rightarrow \text{tr}(X) = 0 \quad (2.2.6)$$

Es decir, que el álgebra de Lie es:  $\mathfrak{su}(2) = \{A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A + A^\dagger = 0 \text{ y } \text{tr}(A) = 0\}$ . Una base de este espacio es:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Que cumplen las relaciones de conmutación  $[\tau_a, \tau_b] = \epsilon_{abc}\tau_c$ , haciendo que el mapa:  $\mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{su}(3) : J_a \rightarrow \tau_a$  sea un isomorfismo de álgebras de Lie. Físicamente, esto quiere decir que las matrices  $\tau_i$  son generadores de rotaciones, y por tanto, operadores de momento angular. El momento angular, en este caso, es el spin.

## 2.3. Representaciones de grupos

### 2.3.1. Representación adjunta

Aunque los grupos de Lie no sean matriciales, siempre se suelen **representar** como un grupo matricial, para trabajar con ellos.

**Definición 2.3.1 (representación).** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $V$  un espacio vectorial sobre los números reales o complejos. Una **representación** de  $G$  sobre  $V$  es una homomorfismo de grupos de Lie:

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

De todas las representaciones que se pueden hacer de un cierto grupo dependiendo del espacio  $V$ , destaca la representación adjunta, que toma  $V = \mathfrak{g}$ , el álgebra de Lie del grupo:

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longrightarrow Ad(g) = Ad_g = (c_g)_* \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

donde  $c_g$  representa la conjugación, que es un difeomorfismo:

$$\begin{aligned} c_g = \mathcal{L}_g \circ \mathcal{R}_{g^{-1}} : G &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow gxg^{-1} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

En el caso de grupos de Lie matriciales  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ , la representación adjunta se reduce a:

$$Ad_Q X = Q \cdot X \cdot Q^{-1}, \quad \forall Q \in G, X \in \mathfrak{g} \quad (2.3.3)$$

### 2.3.2. La forma de Killing

Desde el punto de vista de las teorías gauge, es de vital importancia que se puedan construir ciertas formas bilineales, no degeneradas e invariantes en el álgebra de Lie de un cierto grupo  $G$ . Que sean invariantes servirá para construir una acción que sea invariante gauge. Que sean no degeneradas implicará la posible interpretación de estos términos como términos cinéticos. En general, para todo grupo  $G$ , se define:

**Definición 2.3.2 (forma de Killing).** Sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de un cierto grupo  $G$ . La **forma de Killing**  $B_{\mathfrak{g}}$  en  $\mathfrak{g}$  se define como:

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longrightarrow \text{tr}(ad_X \circ ad_Y) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

La forma de Killing tiene las propiedades necesarias:

1. Es **bilineal** y **simétrica**.
2. Si  $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  es un automorfismo de  $\mathfrak{g}$ , entonces:

$$B_{\mathfrak{g}}(\sigma X, \sigma Y) = B_{\mathfrak{g}}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \tag{2.3.5}$$

Esto en particular se cumple cuando  $\sigma = Ad_g$ .

En el caso adicional de que el grupo sea **semisimple**, la forma de Killing es no-degenerada. De hecho, el recíproco también es cierto [16] (**Teorema 2.4.9**). Si el grupo es, además, **compacto**, entonces la forma de Killing es definida negativa [16] (**Teorema 2.4.16**). En particular, define un producto escalar definido positivo al multiplicarla por  $-1$ .

**Observación 2.3.1.** Sea  $G$  un grupo de Lie matricial. En general, en los textos de Física, se suele emplear « $\text{tr}(\cdot, \cdot) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto \text{tr}(X, Y)$ » para denotar cualquier forma del álgebra de Lie con las propiedades que satisface el opuesto de la forma de Killing en grupos compactos y semi-simples: invarianza por automorfismos, bilinealidad, simetría, ser no-degenerada y ser definida positiva. En resumidas cuentas, un producto escalar invariante por automorfismos.

## 2.4. Acción de grupo

### 2.4.1. Definición de acción de grupo

Las representaciones de los grupos dan una manera de actuar de los grupos sobre espacios vectoriales. Es natural entonces, pensar en abstraer esto a grupos actuando sobre variedades diferenciables. Las acciones de grupo pueden pensarse como una generalización no lineal de las representaciones:

**Definición 2.4.1 (acción por la derecha).** Una acción por la derecha sobre el grupo  $G$  en un conjunto  $M$  es un mapa:

$$\begin{aligned}\Phi : M \times G &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longrightarrow p \cdot g\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

verificando los siguientes axiomas:

1.  $p \cdot (g \cdot h) = (p \cdot g) \cdot h$ ,  $\forall p \in M$  y  $g, h \in G$ .
2.  $p \cdot e = p$ ,  $\forall p \in M$

Como pasa con acciones por la izquierda, en el caso de que  $M$  sea una variedad diferenciable y  $G$  sea un grupo de Lie; si  $\Phi$  es una función regular, se dice que es una **acción regular por la derecha**.

De forma análoga se podrían definir acciones por la derecha, aunque el convenio seguido en [16] es usar las acciones por la derecha para definir los fibrados principales.

## 2.4.2. Multiplicaciones y aplicación de órbitas

Fijando el elemento  $g$  se obtienen las multiplicaciones a derecha (en el caso de acciones por la derecha):

**Definición 2.4.2 (multiplicaciones a derecha).** Sea  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción por la derecha. Para cada  $g \in G$  fijo, se define la **multiplicación por la derecha** como:

$$\begin{aligned}r_g : M &\longrightarrow M \\ g &\longrightarrow p \cdot g\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

De forma análoga se puede definir la multiplicación por la izquierda en el caso de acciones por la izquierda.

Análogo al concepto de multiplicación a izquierda y derecha está el de aplicación de órbitas, que fija el punto  $p \in M$  sobre el que el grupo actúa:

**Definición 2.4.3 (aplicación de órbitas).** Sea  $\Phi : G \times M \rightarrow M$  una acción por la derecha. Para cada  $p \in M$  fijo, se define la **aplicación de órbitas** como:

$$\begin{aligned}\phi_p : G &\longrightarrow M \\ g &\longrightarrow p \cdot g\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

Que se definiría de manera análoga para multiplicaciones por la izquierda.

Las acciones se suelen clasificar atendiendo a la sobreyectividad e inyectividad de sus aplicaciones de órbitas:

1. La acción se dice que es **transitiva** si el mapa de órbitas es **sobreyectivo para cada  $p$  de  $M$** .
2. La acción se dice **libre** si el mapa de órbitas es **inyectivo para cada  $p$  de  $M$** .
3. La acción se dice **simplemente transitiva** si es **transitiva y libre**.

### 2.4.3. Campos de vectores fundamentales

En general, dado un difeomorfismo entre grupos de Lie, su *push-forward* define un morfismo entre las álgebras de Lie de los grupos. Las acciones de grupo determinan una aplicación natural del grupo de Lie  $G$  sobre el grupo de difeomorfismos en la variedad  $M$ :  $Dif(M)$ , llevando cada elemento  $g$  sobre su multiplicación a izquierda (si la acción es por la izquierda) o sobre su multiplicación a derecha (si la acción es por la derecha). Si se piensa en los campos de vectores como el álgebra de Lie (infinito dimensional) del grupo de difeomorfismos, esto induce una aplicación  $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  que se denota igual que el *push-forward*, definida así:

**Definición 2.4.4 (campo de vectores fundamental).** Sea  $G$  un grupo de Lie y  $M$  una variedad diferenciable. Si  $\Phi : M \times G \rightarrow M$  es una acción por la derecha, y  $X \in \mathfrak{g}$  es un campo de vectores, se define el **campo de vectores fundamental**  $\tilde{X}$  como:

$$\tilde{X}_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p \cdot \exp(tX)) = (d_e \phi_p)(X_e) \quad (2.4.4)$$

Si la acción es por la izquierda, el campo de vectores se define de una manera distinta:

$$\tilde{X}_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp(-tX) \cdot p) = (d_e \phi'_p)(X_e) \quad (2.4.5)$$

siendo  $\phi'_p(g) = g^{-1} \cdot p$ . La aplicación que envía cada campo de vectores del álgebra de Lie sobre su campo de vectores fundamental asociado se denota  $\phi_*$ :

$$\begin{aligned} \phi_* : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ X &\longrightarrow \tilde{X} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

### 2.4.4. La forma de Maurer-Cartan

Dado un grupo  $G$  de Lie, la forma de Maurer-Cartan asocia, a cada campo  $X \in \mathfrak{X}(G)$ , el único campo del álgebra de Lie que coincide con  $X$  en el punto  $g \in G$ . Formalmente, se

construye usando el *push-forward* la multiplicación por la izquierda así:

$$\begin{aligned} \mu_G : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(G, \mathfrak{g}) \\ X &\longrightarrow (\mu_G(X))_g = (d_g \mathcal{L}_{g^{-1}})(X_g) \in \mathfrak{g} \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

O simplemente  $\mu_G(X)_g = (\mathcal{L}_{g^{-1}})_*(X)_e \in T_e(M) \cong \mathfrak{g}$ . La forma de Maurer-Cartan aparece siempre que se calcule la diferencial de la acción de grupo, como se prueba en [6].

# Capítulo 3

## Teorías de gauge

Las teorías de gauge son teorías físicas en las que la interacción de un cierto campo fundamental está mediada por una 1-forma de conexión. Localmente, tras la elección de un gauge, estas 1-formas se pueden interpretar como definidas en un abierto del espacio-tiempo y con valores en un cierto espacio vectorial (que será el álgebra de Lie del grupo de simetrías) y, por tanto, se pueden interpretar como campos en el sentido usual. La fuerza de la interacción viene descrita por una 2-forma adecuada, llamada 2-forma de curvatura. Para poder introducir estos conceptos matemáticos, se necesita una estructura previa, que es la de fibrado. En esta primera sección se repasan los aspectos matemáticos más relevantes de la teoría de los fibrados y de las conexiones y curvaturas que se pueden definir en los mismos. Las referencias para esta parte son [16], [29], [21] y [3]. Para las demostraciones de los resultados que se exponen en esta sección, se puede consultar [6].

### 3.1. Fibrados

Los fibrados se pueden entender como productos cartesianos retorcidos de cierta manera. En este sentido, localmente serán difeomorfos a un pedazo de producto cartesiano, pero lo mismo no será cierto globalmente por la forma de retorcerse de sus fibras. Aunque se puede definir un fibrado en el caso más general, en Física tienen especial relevancia los llamados fibrados principales y sus fibrados vectoriales asociados.

#### 3.1.1. Fibrados principales

Antes de definir lo que es un fibrado principal, hay dos conceptos que se pueden definir de la forma más general: las secciones y las fibras. Dada  $\pi : E \rightarrow M$  una aplicación diferenciable y sobreyectiva entre variedades diferenciables, la **fibra de  $\pi$  sobre el punto  $x$**  es  $E_x = \pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(\{x\}) \subset E$ . Una colección de fibras se denota:  $E_U = \pi^{-1}(U)$ , con  $U \subset M$ . Por otro lado, una aplicación  $s : M \rightarrow E$  cumpliendo  $\pi \circ s = Id_M$  se llama **sección global**. Si la aplicación está definida en un abierto  $U \subset M$  y cumple  $\pi \circ s = Id_U$ ,  $\pi$ , se la llama **sección local**.

**Definición 3.1.1 (fibrado principal).** Sean  $P$  y  $M$  variedades diferenciables y  $G$  un grupo de Lie. Se supone que el grupo actúa de manera suave sobre la variedad  $M$  por

la derecha. Sea  $\pi : P \rightarrow M$  una aplicación diferenciable y sobreyectiva. Se dice que  $(P, \pi, M; G)$  es un **fibrado principal** y se denota así :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \pi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

o simplemente  $\pi : P \rightarrow M$ , si se verifican las siguientes propiedades:

1. Para cada punto  $x \in M$ , existe un abierto  $U \subset M$  tal que  $\pi|_U$  admite una **trivialización**. Esto es, existe un difeomorfismo  $\phi_U : P_U \rightarrow U \times F$  con  $pr_1 \circ \phi_U = \pi$ .
2. La acción **preserva las fibras** y es **simplemente transitiva en las mismas**. Esto quiere decir que la acción se restringe a las fibras:  $P_x \times G \rightarrow P_x$  (o también:  $p \cdot g \in P_x, \forall p \in P_x, g \in G$ ) y el mapa de órbitas  $G \rightarrow P_x : g \mapsto p \cdot g$  es una biyección,  $\forall x \in M, p \in P_x$ .
3. Existe un atlas del fibrado que es **G-equivariante**. Es decir, existe una familia  $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$  donde  $U_i$  forman un recubrimiento por abiertos de  $M$  y  $\phi_i : E_{U_i} \rightarrow U_i \times F$  es un difeomorfismo. Además, las aplicaciones  $\phi_i$  han de verificar:

$$\phi_i(p \cdot g) = \phi_i(p) \cdot g, \quad \forall p \in P_{U_i}, g \in G$$

donde se supone que, en el lado derecho de la ecuación, el grupo  $G$  actúa en un elemento  $(x, a) \in U_i \times G$  de la siguiente forma:

$$(x, a) \cdot g = (x, a \cdot g)$$

A un atlas en estas condiciones se le llama **atlas principal**.

Además, se denomina:

1. **grupo de estructura** del fibrado al grupo  $G$ .
2. **fibra general** a  $F$ .
3. **espacio total** a  $P$ .
4. **variedad base** a  $M$ .
5. **proyección** a  $\pi$ .

Dadas dos cartas  $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$  cuyos abiertos tienen intersección no vacía  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , se llaman funciones de transición o de solapamiento a:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} \Big|_{(U_i \cap U_j) \times G} : (U_i \cap U_j) \times G \rightarrow (U_i \cap U_j) \times G \quad (3.1.1)$$

Aunque, en ocasiones, también se denomina función de transición a:

$$\begin{aligned} \phi_{ji} : U_i \cap U_j &\longrightarrow G \\ x &\longrightarrow \phi_{jx} \circ \phi_{ix}^{-1}(e) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

siendo  $e$  el elemento unidad del grupo  $G$ .



El concepto de sección es clave en la teoría gauge:

**Definición 3.1.2 (gauge).** Sea  $\pi : P \rightarrow M$  un fibrado principal. Un **gauge global** es una sección global de  $\pi$ . El gauge se llama **local** si la sección también es local. Al conjunto de todas las secciones locales (gauges) de un abierto  $U \subset M$  se las denota  $\Gamma(U, P)$ .

Dar un gauge  $s : U_i \rightarrow P_{U_i}$  se corresponde a definir una trivialización del fibrado, a través de la ecuación:

$$\begin{aligned} t_i : U_i \times G &\longrightarrow P_{U_i} \\ (x, g) &\longrightarrow s(x) \cdot g \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

De ello se deduce que, si se puede encontrar una sección global (un gauge definido globalmente), entonces el fibrado se puede recubrir por una sola carta global. A este tipo de fibrados se les conoce como fibrados **triviales**. El ejemplo más sencillo de fibrado trivial ocurre cuando el espacio total se toma como producto cartesiano de la fibra general y la variedad base. Se puede probar (ver [16], sección 4.2.1) que:

**Teorema 3.1.3 (los fibrados principales sobre variedades contractibles son triviales).** Si  $M$  es una variedad contractible y  $G$  es un grupo de Lie, entonces todo  $G$ -fibrado principal sobre  $M$  es trivial.

### 3.1.2. Fibrados vectoriales asociados

Se llama fibrado vectorial a:

**Definición 3.1.4 (fibrados vectoriales).** Un fibrado

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & E \\ & & \pi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

se dice **fibrado vectorial de rango  $m$**  si:

1. La fibra general  $V$  y cada fibra  $E_x$ ,  $x \in M$  son espacios vectoriales  $m$ -dimensionales.
2. Existe un atlas  $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$  del fibrado de manera que los mapas  $\phi_{ix} = \phi_i|_{E_x} : E_x \rightarrow$

$V$  son isomorfismos, para cada  $x \in U_i$ . A este tipo de atlas se le llama **atlas vectorial del fibrado**.



Asociado a cada fibrado principal y a cada representación  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , existe un fibrado vectorial, llamado **fibrado vectorial asociado**. Este fibrado vectorial tiene como espacio total un espacio cociente, formado por la acción de grupo. La relación de equivalencia es la de pertenencia a la misma órbita. Es decir:

$$\text{Dados } (p, v), (q, w) \in P \times V, (p, v) R (q, w) \Leftrightarrow (p, v) = g \cdot (q, w), \text{ para algún } g \in G \quad (3.1.4)$$

donde la acción de grupo sobre un elemento  $(p, v)$  está definida por la expresión:  $(p, v) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g)^{-1}v)$ . Esto define un espacio total  $E = (P \times V)/G$ , que se denota  $E = P \times_{\rho} G$  y que tiene una única estructura de variedad diferenciable haciendo que la proyección canónica  $p : P \times V \rightarrow E$  sea una submersión. Entonces, se cumple:

**Teorema 3.1.5 (fibrado vectorial asociado).** Sea  $P$  un  $G$ -fibrado principal y  $\rho$  una representación del grupo de Lie  $G$  en un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$ . Entonces, el espacio cociente  $E = P \times_{\rho} V$  tiene la estructura de un fibrado vectorial sobre  $M$ , con proyección:

$$\begin{aligned} \pi_E : \quad E &\longrightarrow M \\ [p, v] &\longrightarrow \pi_P(p) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

y fibras  $E_x = (P_x \times V)/G$ , isomorfas a  $V$ . El espacio vectorial en cada fibra  $E_x$  está definido así:

$$\lambda[p, v] + \mu[p, w] = [p, \lambda v + \mu w], \forall v, w \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad (3.1.6)$$

y  $\pi_P(p) = x$ . Al fibrado anterior se le llama **fibrado vectorial asociado** al fibrado principal y a la representación  $\rho$ . El grupo  $G$  se conoce como el **grupo de estructura** de  $E$ .

Este resultado es un tanto técnico y no se va a demostrar, aunque se puede encontrar en [16] (sección 4.7.1)



Un resultado importante es que, elegido un gauge  $S : U \rightarrow P$ , existe una correspondencia biunívoca entre secciones suaves del fibrado vectorial asociado:  $\tau : U \rightarrow E$  y campos  $f : U \rightarrow V$  dada por la expresión:

$$\tau(x) = [s(x), f(x)], \forall x \in U \quad (3.1.7)$$

Es decir, al menos localmente (tras la elección de un gauge), las secciones del fibrado vectorial asociado se corresponden con campos en el sentido usual: definidos en un abierto de la variedad y con llegada sobre un cierto espacio vectorial. Estas secciones son las que representarán los campos de materia de la teoría. Para una prueba de este resultado, se puede ver [6].

## 3.2. Conexión, curvatura y derivada covariante

Dado un fibrado principal, se definen conexiones y curvaturas. Las conexiones, que son 1-formas definidas en el espacio total y con valores en el álgebra de Lie verificando ciertas propiedades se pueden interpretar como campos de gauge. Las curvaturas miden la fuerza de la interacción asociada con dichos campos. Las secciones del fibrado vectorial asociado representan los campos de materia. Sobre el fibrado vectorial asociado se puede definir un operador, llamado derivada covariante, que actúa sobre las secciones del fibrado vectorial. Es importante que este operador acople los campos de gauge con las secciones, representando la interacción materia-campo gauge.

### 3.2.1. Conexión y campos de gauge

Sea

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \pi \downarrow \\ & & M \end{array}$$

un  $G$ -fibrado principal.

**Definición 3.2.1 (1- formas de conexión).** Una **1-forma de conexión**, o simplemente una **conexión** para el  $G$ -fibrado principal anterior es una 1-forma  $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  verificando:

1.  $(r_g)_* A = Ad_{g^{-1}} \circ A$ , para cada  $g \in G$ .
2.  $A(\tilde{X}) = X$ , para cada  $X \in \mathfrak{g}$ , siendo  $\tilde{X}$  el campo vectorial fundamental asociado a  $X$  ( $\tilde{X}_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p \cdot \exp(tX)) = (d_e \phi_p)(X_e)$ , siendo  $\phi_p : G \rightarrow P : g \mapsto g \cdot p$  el mapa de órbitas asociado a la acción del grupo por la derecha).

Una conexión también se denomina **campo gauge** sobre  $P$ .

Para que la conexión sea una magnitud definida en la variedad base, que es lo que interesa, hay que aplicarle un *pull-back* adecuado. Este *pull-back* será el de un cierto gauge  $s : U \rightarrow P$  local del fibrado principal ( $U \subset M$ ). Entonces, se llama **1-forma local de conexión** (o **campo de gauge local**)  $A_s \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$  a la 1-forma en la variedad base con valores en el álgebra de Lie del grupo definida por:

$$A_s = s^* A \tag{3.2.1}$$

Dada una carta de la variedad  $(U, \phi)$  y  $\{\partial_\mu\}_{\mu=1, \dots, n}$  un sistema local de coordenadas en torno a  $U$ , si se define  $A_\mu = A_s(\partial_\mu)$ , se puede expandir:

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{\dim(\mathfrak{g})} A_\mu^a e_a \tag{3.2.2}$$

siendo  $\{e_a\}$  una base del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Los campos  $A_\mu^a \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  son funciones reales que se suelen denominar **campos de gauge bosónicos locales**.



Desde el punto de vista físico, es importante saber las reglas de transformación de la conexión cuando se cambia el gauge. Dados dos gauges  $s_i : U_i \rightarrow P$  y  $s_j : U_j \rightarrow P$ , si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , entonces  $s_i$  y  $s_j$  se relacionan a través de las funciones de transición 3.1.2 así:

$$s_i(x) = s_j(x) \cdot \phi_{ji}(x), \quad \forall x \in U_i \cap U_j \quad (3.2.3)$$

Entonces, si se denota  $\mu_{ji} = \phi_{ji}^* \mu_G \in \Omega^1(U_i \cap U_j, \mathfrak{g})$  (donde  $\mu_G$  es la forma de Maurer-Cartan), se tiene que, los campos de gauge locales transforman de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$A_i = Ad_{\phi_{ji}^{-1}} \circ A_j + \mu_{ji} \quad (3.2.4)$$

siendo  $A_i = s_i^* A$ ,  $i = 1, 2$ . De especial importancia es el caso en el que el grupo  $G$  es un grupo de Lie matricial. En este caso, la forma de Maurer-Cartan se reduce a la multiplicación por la izquierda y la forma de la ecuación 3.2.4 se reduce a:

$$A'_\mu = \phi A_\mu \phi^{-1} + \phi^{-1} \partial_\mu \phi \quad (3.2.5)$$

siendo  $\phi$  la matriz  $\phi_{ij}(x) \in G$ .

### 3.2.2. 2-forma de curvatura

La 2-forma de curvatura se obtiene tomando la diferencial exterior de la 1-forma de conexión y añadiendo un sumando que representa el corchete de la conexión consigo misma. Este corchete se define como:

**Definición 3.2.2 (corchete de formas).** Sea  $\eta \in \Omega^k(P, \mathfrak{g})$  y  $\phi \in \Omega^l(P, \mathfrak{g})$ . Se define el **corchete de las formas** como:

$$[\eta, \phi](X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) [\eta(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}), \phi(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})] \quad (3.2.6)$$

El conmutador también se encuentra en la literatura denotado como  $\eta \wedge \phi$  o  $[\eta \wedge \phi]$ . En este trabajo, se usarán estas últimas notaciones sobre todo.

Conviene observar que el corchete de  $[A, A]$  no va a ser, en general nulo, a diferencia de lo que ocurre con el corchete de campos o el conmutador genérico. Con esta definición de corchete, se suele puede definir la 2-forma de curvatura directamente a través de la **ecuación de estructura**:

$$F = dA + A \wedge A \quad (3.2.7)$$

En el caso de **grupos abelianos**, el corchete desaparece y se obtiene una 2-forma que es **exacta**.



La 2-forma no se suele usar definida en el espacio total, sino que se baja a la variedad base a través del *pull-back* de un cierto gauge. Esto es, dado un gauge  $s : U \rightarrow P$ , con  $U \subset M$ , se define  $F_s = s^*F$  la **2-forma local de curvatura**, o simplemente la **fuerza del campo**. Esta 2-forma está en  $\Omega^2(U, \mathfrak{g})$  y, dada una base  $\{\partial_\mu\}_\mu$  de  $T_pM$ , con  $p \in U$ , se define  $F_{\mu\nu} = F_s(\partial_\mu, \partial_\nu)$ . Localmente, la ecuación de estructura toma la siguiente expresión:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (3.2.8)$$

Si  $G$  es un grupo matricial,  $s_i : U_i \rightarrow P$  y  $s_j : U_j \rightarrow P$  son dos gauges locales, con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $F_i = s_i^*F$ ,  $i = 1, 2$  son las 2-formas de curvatura locales asociadas y  $G(x) : U_i \cap U_j \rightarrow G$  es la matriz de cambio de gauge:  $s_i(x) = G s_j(x)$  (que viene dada por la función de transición  $\phi_{ji}$ ), entonces al cambiar el gauge, la conexión transforma de la siguiente manera:

$$F_i = G F_j G^{-1} \quad (3.2.9)$$

Entonces, si el grupo es abeliano, la 1-forma  $F_s$  está definida globalmente y es una 1-forma exacta globalmente. Esto es lo que ocurre en el caso del electromagnetismo, que es una teoría de gauge con grupo de simetría  $U(1)$ , un grupo abeliano.

### 3.2.3. Derivada covariante

Supóngase que se quiere definir un operador de derivación actuando sobre las secciones de un cierto fibrado vectorial (por ejemplo el fibrado vectorial asociado). Está claro que la definición usual de derivada no funciona, porque requiere restar dos elementos que, en principio, pertenecerían a distintas fibras. Esto no se puede hacer porque, aunque cada fibra es un espacio vectorial isomorfo a la fibra general, en general ese espacio no es el mismo, luego se estarían substrayendo objetos matemáticos que no viven en el mismo espacio ambiente. Esto implica que no existe una forma canónica de definir una derivada que actúe sobre las fibras. Una forma de derivar sobre las fibras es usar la noción de **transporte paralelo**. No se va a reproducir aquí todo el formalismo del transporte paralelo, aunque está en [6] y también en [16] (sección 5.8) pero sí conviene recalcar que la derivada covariante es un operador que depende de la conexión escogida. Se puede definir directamente de manera local como sigue:

**Definición 3.2.3 (derivada covariante).** Sea  $\pi : P \rightarrow M$  un  $G$ -fibrado principal,  $A$  una conexión sobre el fibrado,  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una representación del grupo  $G$  sobre el espacio vectorial  $V$  y  $\pi_E : E \rightarrow M$  el fibrado vectorial asociado al fibrado principal y a la representación escogida, con  $E = P \times_\rho V$ . Se fija un gauge  $s : U \rightarrow P$ , con  $U \subset M$  un abierto de la variedad base. Esto determina un campo de gauge local  $A_s = s^*A$ . Sea  $\Phi : U \rightarrow E$  una sección del fibrado principal con  $\phi : U \rightarrow V$  determinada por la ecuación 3.1.7 y por el gauge escogido del siguiente modo:  $\Phi(x) = [s(x), \phi(x)]$ . Entonces, se define la derivada covariante en la dirección de  $X \in T_xM$ , con  $x \in U$ , actuando sobre la sección  $\Phi$  como:

$$\nabla_X \Phi(x) = [s(x), d\phi(X) + \rho_*(A_s(X))\phi(x)] \quad (3.2.10)$$

En ocasiones también se denota la derivada covariante actuando simplemente sobre  $\phi$ . Es decir:  $\nabla_X \phi = d\phi(X) + \rho_*(A_s(X))\phi(x)$ . Si  $\{\partial_\mu\}_\mu$  es una base del espacio tangente  $T_xM$ ,

entonces se define  $\nabla_\mu = \nabla_{\partial_\mu} \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \phi$ , donde se sobrentiende que  $A_\mu \phi = \rho_*(A_\mu) \phi$ .

### 3.3. El electromagnetismo

En esta sección se va a seguir, sobre todo:[3] (capítulo 5), [20] (sección 2.2), [6], [16] (sección 7.2) y también algunas ideas de [5] y [28]. El objetivo es analizar a fondo el electromagnetismo como teoría gauge de grupo de simetría  $U(1)$ , haciendo referencia al formalismo introducido anteriormente.

#### 3.3.1. Invarianza gauge en el sentido usual

Históricamente, Weyl introdujo las teorías de gauge para explicar la libertad de elección en los potenciales electromagnéticos en la teoría de Maxwell. Dicha libertad se puede explicar de la siguiente manera: supóngase que  $\Phi$  y  $\mathbf{A}$  son el potencial escalar del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el potencial vector del campo magnético  $\mathbf{B}$ , respectivamente. Entonces, se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \wedge \mathbf{A} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Dados otros potenciales  $\Phi'$  y  $\mathbf{A}'$ , es bien conocido en física que estos potenciales se relacionan por medio de:

$$\begin{cases} \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \Lambda \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Usando la notación relativista, esta ecuación se puede resumir incluso más. Usando la métrica Lorentziana para subir y bajar índices (y usando unidades naturales donde  $c=1$ ), se puede escribir  $\partial_\mu = (\partial_t, -\nabla)$ . Tomando el cuadri-potencial:  $A_\mu = (\Phi, \mathbf{A})$ , la transformación de las ecuaciones anteriores se escribiría así:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (3.3.3)$$

En este contexto, se puede interpretar la teoría de gauge como la libertad a la hora de escoger un potencial de los de la familia dada por la ecuación anterior. Escoger cualquiera de estos potenciales no cambia la física del problema a nivel clásico (ver, por ejemplo, [22], sección 2.6, para una discusión intuitiva de la relevancia de la elección de gauge a nivel cuántico en el celebrado **efecto Aharonov-Bohm**), ya que los campos involucrados son los mismos.

#### 3.3.2. Reescribiendo las ecuaciones de Maxwell

Lo que se pretende ahora es reescribir las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de 1-formas, pero sin hacer todavía alusión a ninguna estructura de fibrado.

Se parte del siguiente par de ecuaciones diferenciales homogéneas:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} & = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & = 0 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

El espacio ambiente que se va a considerar por ahora es el espacio usual:  $\mathbb{R}^3$ . En el lenguaje de las formas diferenciables, la divergencia se convierte en la diferencial exterior de una 2-forma en  $\mathbb{R}^3$ , mientras que el rotacional es también la diferencial exterior, solo que de una 1-forma. Por tanto, se escribe  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)^T$  como una 2-forma así:

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \quad (3.3.5)$$

Mientras que el campo eléctrico:  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T$  se escribe como 1-forma así:

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (3.3.6)$$

Ambas se pueden combinar en una 2-forma en  $\mathbb{R}^4$ , llamada **tensor electromagnético**:

$$F = B + E \wedge dt \quad (3.3.7)$$

Que, en coordenadas, puede escribirse como:

$$F = (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

Lo interesante de escribir el tensor electromagnético de esta manera es que unifica las dos ecuaciones de Maxwell de esta sección en una única condición, que es que sea una 2-forma cerrada:

$$dF = 0 \quad (3.3.9)$$

Para demostrar que esta ecuación lleva a las ecuaciones de 3.3.4, se calcula:

$$dF = d(B + E \wedge dt) = dB + dE \wedge dt \quad (3.3.10)$$

Es un ejercicio sencillo hallar las diferenciales de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} dB &= (\partial_x B_x dx + \partial_t B_x dt) \wedge dy \wedge dz + (\partial_y B_y dy + \partial_t B_y dt) \wedge dz \wedge dx + (\partial_z B_z dz + \partial_t B_z dt) \wedge dx \wedge dy \\ &= (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz + dt \wedge (\partial_t B_x dy \wedge dz + \partial_t B_y dz \wedge dx + \partial_t B_z dx \wedge dy) = \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{B}) + dt \wedge \partial_t \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Y para el campo eléctrico, de igual modo:

$$dE = dt \wedge \partial_t \mathbf{E} + \nabla \wedge \mathbf{E} \quad (3.3.12)$$

Sustituyendo en la ecuación 3.3.10, se llega finalmente a:

$$dF = (\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\partial_t \mathbf{B} + \nabla \wedge \mathbf{E}) \wedge dt = 0 \quad (3.3.13)$$

El primer término no tiene componente en  $dt$ , mientras que el segundo sí, luego para que esto sea 0, han de ser cada uno de los elementos cero, con lo que se recupera 3.3.4.

### 3.3.3. El electromagnetismo como teoría gauge con grupo $U(1)$

El objetivo es ahora intentar formular el electromagnetismo como teoría de gauge con grupo de simetría  $U(1)$  usando el formalismo de los fibrados, conexiones y curvaturas. En la anterior subsección, se vio que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir de forma compacta empleando el tensor electromagnético. El hecho de que la diferencial del tensor sea 0, por el **Lema de Poincaré**, asegura que  $F$  es una forma exacta. Es decir, existe una 1-forma  $A$  tal que  $dA = F$ . Esto recuerda a la ecuación de estructura 3.2.7. Para ello, no obstante, debería tenerse un corchete nulo. Por suerte, este es el caso en teorías que tienen un grupo de simetría abeliano (en el electromagnetismo,  $U(1)$ ).

Se considera el espacio plano de Minkowski, que es  $\mathbb{R}^4$  equipado con la métrica:

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3.14)$$

Recuérdese que, por ser este espacio contractible, todos los fibrados que se definan en él son triviales 3.1.3. Entonces, la teoría se puede formular en base al fibrado trivial:

$$\begin{array}{ccc} U(1) & \longrightarrow & E = \mathbb{R}^4 \times U(1) \\ & & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Como  $U(1)$  es un grupo **abeliano**, todos los corchetes que aparezcan en la formulación de conexiones, curvaturas, o cambios de gauge desaparecen. El álgebra de Lie de  $U(1)$ , que es el espacio tangente a  $1 \in S(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ , no es más que  $i\mathbb{R}$ . El hecho de que el fibrado sea trivial implica que se puede encontrar trivializaciones y, por tanto, gauges que sean globales. Sea  $s : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \times U(1)$  un gauge globalmente definido. La 1-forma  $A_s = s^*A$  estaría globalmente definida y sería un elemento de  $\Omega^1(\mathbb{R}^4, \mathfrak{g})$ . Como  $\mathbb{R}^4$  tiene un sistema global de coordenadas, se puede escribir:

$$A_s = A_\mu dx^\mu \quad (3.3.15)$$

donde se usa el convenio de Einstein para realizar la sumación y  $dx^\mu$  es la base de 1-formas globales (dual de la base usual). Las funciones  $A_\mu$  son  $i\mathbb{R}$  valuadas. La curvatura asociada a la conexión anterior, en forma local, se puede escribir, usando 3.2.8, y considerando que el grupo es abeliano, como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.3.16)$$

Todavía no se sabe bien qué significan estos elementos de curvatura, conexión, etc. en el contexto de la teoría del electromagnetismo y cómo se relacionan con los campos clásicos o los potenciales. Obsérvese que la ecuación de cambio de gauge física:  $A'_\mu = G^{-1}A_\mu G + G^{-1}\partial_\mu G$ , en el caso de grupos abelianos se reduce a:  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \log G$ . Esto resuena a 3.3.3. Teniendo en cuenta que  $G = e^{i\Lambda(x^\mu)}$  es la forma más general de un cambio de gauge que esté en  $U(1)$ , lo anterior puede interpretarse como una derivación logarítmica. Es decir:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu (\log(e^{i\Lambda(x^\mu)})) \quad (3.3.17)$$

El logaritmo complejo no es una función en el sentido usual, ya que es multivaluada. En este caso, eso no da problemas, ya que todas las ramas del logaritmo está relacionadas por  $\log(z) = \log(|z|) + i\theta + i2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (siendo  $\theta$  el argumento). En este caso,  $z = e^{i\Lambda(x^\mu)}$  es de módulo unidad, luego su logaritmo sería:  $\log(z) = i(\Lambda + 2k\pi)$ , pero como al derivar el  $2k\pi$  va a desaparecer, la expresión está bien definida:

$$A'_\mu = A_\mu + i\partial_\mu\Lambda \quad (3.3.18)$$

De hecho, como las funciones  $A_mu$  son  $i\mathbb{R}$  valuadas, tomando  $\mathcal{A}_\mu = -iA_\mu$ , se deduce que  $\mathcal{A}_\mu$  son  $\mathbb{R}$  valuadas, y su cambio de gauge es:

$$\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu\Lambda \quad (3.3.19)$$

que es idéntico a 3.3.3. Esto sugiere que se pueda identificar la conexión en el fibrado con el potencial electromagnético. Esta identificación queda reforzada si también se toma  $\mathcal{F}$  como curvatura  $\mathbb{R}$ -valuada de  $\mathcal{A}$  y se identifica con el tensor electromagnético. En ese caso, las ecuaciones de la curvatura 3.3.16 devuelven las ecuaciones de Maxwell para los potenciales electromagnéticos. Con esto queda totalmente identificada la teoría de Maxwell como teoría gauge de grupo  $U(1)$ .

Recuérdese ahora la ecuación 3.2.9. En el caso de grupos abelianos, esta ecuación llevaría a que la 2-forma local de curvatura es invariante al cambiar el gauge. Esto implica que  $\mathcal{F}$  define globalmente una 2-forma cuya diferencial es 0 por la ecuación de estructura:  $d\mathcal{F} = 0$ . Las ecuaciones que dan la diferencial de la curvatura se conocen como **identidades de Bianchi**. En este caso tan sencillo, la identidad de Bianchi expresa el hecho de que el tensor electromagnético es una forma exacta y cerrada (el campo electromagnético admite potenciales). Obsérvese que, con la identificación hecha en esta sección de la curvatura como el tensor electromagnético, la identidad de Bianchi es equivalente a 3.3.13. Esta a su vez, como se vio en la sección anterior, conlleva las dos ecuaciones de Maxwell de 3.3.4. En general, la identidad de Bianchi para grupos no abelianos es:

$$dF = [A, F] \quad (3.3.20)$$

### 3.3.4. ¿Dónde están el resto de ecuaciones?

En las secciones anteriores, se ha demostrado que la identidad de Bianchi para la curvatura que describe la intensidad del campo electromagnético (tensor electromagnético) da lugar a las dos ecuaciones de 3.3.4. Estas no son todas las ecuaciones de Maxwell, sino que faltan:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} & = \rho \\ \nabla \wedge \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & = \mathbf{J} \end{cases} \quad (3.3.21)$$

Estas ecuaciones son en cierto sentido duales de las de 3.3.4, ya que aparecen al cambiar  $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B}$  y añadir, en el lado derecho de las ecuaciones, términos inhomogéneos que expresan las densidades de carga y corriente eléctrica. Estas ecuaciones se pueden obtener por medio del **operador dual de Hodge**, o **estrella de Hodge**.

Obsérvese que, para llegar a las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de 1-formas y 2-formas, se tuvo que escribir el campo magnético  $\mathbf{B}$  como una 2-forma y el campo eléctrico

**E** como una 1-forma (ver sección 3.3.2). Esto era así porque se quería después calcular los operadores de: divergencia y rotacional, que se podían interpretar con la diferencial exterior en el contexto de formas. Si se quieren escribir las ecuaciones 3.3.21 de manera similar, se ha de poder calcular la divergencia del campo eléctrico y el rotacional del campo magnético. Esto se puede hacer por medio del **dual de Hodge**, que convierte las 1-formas en  $\mathbb{R}^3$  en 2-formas y viceversa.

Para definir el dual de Hodge, se necesita emplear una métrica. Considérese, pues,  $M$  una variedad orientada y  $n$ -dimensional con una métrica  $g$  definida sobre la variedad. La métrica, junto con la orientación, definen una **forma de volumen canónica**, que se denota  $dvol_g$ , o simplemente  $dvol$ . Sea  $(U, \phi)$  una carta de  $M$  compatible con la orientación, con coordenadas locales  $\{x^\mu\}$ . Entonces:

$$dvol = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (3.3.22)$$

donde  $|g|$  denota el valor absoluto del determinante de la matriz de la métrica:  $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ .

El operador de Hodge se define usando la métrica así:

**Definición 3.3.1 (operador dual de Hodge).** El **operador dual de Hodge** es una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} \star : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{n-k}(M) \\ \eta &\longrightarrow \star\eta \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

donde  $\star\eta$  está definida de modo que:  $\langle \omega, \eta \rangle dvol = \omega \wedge \star\eta$ ,  $\forall \omega, \eta \in \Omega^k(M)$  y  $\langle \omega, \eta \rangle$  denota el producto escalar de dos formas:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (\omega, \eta) &\longrightarrow \frac{1}{k!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \eta^{\mu_1, \dots, \mu_k} \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

donde se supone que  $\omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} = \omega(\partial_{\mu_1}, \dots, \partial_{\mu_k})$  y se sobrentienden las sumas sobre índices repetidos (convenio de Einstein).

**Observación 3.3.1.** Se puede probar que lo anterior está bien definido y es una  $(n - k)$ -forma. Por otro lado, la métrica aparece en dos sitios: por un lado, en la forma de volumen y, por otro, en el producto escalar. El convenio físico es que se usa la métrica para subir y bajar índices, del siguiente modo:

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} T_{\rho\sigma} g^{\nu\sigma} \quad (3.3.25)$$

Conviene observar que  $g^{\nu\rho}$  en notación relativista denota la inversa de la métrica. Es decir:  $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$ . Entonces, en verdad:  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \eta^{\mu_1, \dots, \mu_k} = \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} g^{\mu_1 \sigma_1} \dots g^{\mu_k \sigma_k} \eta_{\sigma_1, \dots, \sigma_k}$ .

—————  $\Leftrightarrow$  —————

Volviendo al caso del electromagnetismo, se quiere ahora calcular el dual de Hodge de  $F$ ,  $\star F$ . Usando la definición, se puede calcular el dual de Hodge de las dos formas. Esto se muestra en el Cuadro 3.1.

Cuadro 3.1: Dual de Hodge de las dos formas en el espacio de Minkowski

Dos forma $\omega$	Dual de Hodge $\star\omega$
$dt \wedge dx$	$-dy \wedge dz$
$dt \wedge dy$	$dx \wedge dz$
$dt \wedge dz$	$-dx \wedge dy$
$dx \wedge dy$	$dt \wedge dz$
$dx \wedge dz$	$-dt \wedge dy$
$dy \wedge dz$	$dt \wedge dx$

Sustituyendo, se llega al dual del tensor electromagnético:

$$\star F = (\star F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.26)$$

Por tanto, el dual de  $F$  es una 2-forma que se obtiene de reemplazar  $E_i \mapsto -B_i$  y  $B_i \mapsto E_i$  en  $F$ . Esto es tanto como poner ahora  $E' = E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy$ , y  $B' = -B_x dx - B_y dy - B_z dz$  y haber escrito:

$$d \star F = E' + B' \wedge dt \quad (3.3.27)$$

Entonces, como la expresión es formalmente la misma, su diferencial no será más que:

$$d \star F = (\nabla \cdot \mathbf{E}') + (\partial_t \mathbf{E}' + \nabla \wedge \mathbf{B}') \wedge dt \quad (3.3.28)$$

Si se denota  $J = j\rho dt$ , donde  $j = J_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3$ , se obtiene que las ecuaciones 3.3.21 son formalmente equivalentes a:

$$d \star F = J \quad (3.3.29)$$

### 3.3.5. La energía electromagnética

La densidad de energía electromagnética es, desde el punto de vista clásico:

$$\frac{1}{2}(\langle E, E \rangle + \langle B, B \rangle) \quad (3.3.30)$$

Y el Lagrangiano en el vacío del campo electromagnético sería:

$$\frac{1}{2}(\langle E, E \rangle - \langle B, B \rangle) \quad (3.3.31)$$

El objetivo de esta subsección es ligar esto con la 2-forma de curvatura o tensor electromagnético. Para ello, hay que encontrar alguna expresión cuadrática en el mismo, de modo que aparezcan de manera natural los productos escalares.

Primero nótese que los productos escalares de 3.3.30 también tienen sentido en el contexto de las formas, usando la definición de producto escalar de formas que se dio en 3.3.1. Para calcularlo en la práctica, lo mejor es usar notación matricial. Esto tiene la ventaja de que

subir y bajar índices es multiplicar a izquierda y a derecha por la métrica y que, para calcular el producto escalar basta con hallar la traza de la matriz producto. Por ejemplo, el campo magnético  $B$  se puede poner como una 2-forma así:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_z & -B_y \\ 0 & -B_z & 0 & B_x \\ 0 & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.32)$$

Como tiene ceros en la parte temporal, al multiplicar por la métrica va a quedar la misma matriz. Transponiendo y multiplicando por  $B$  se obtiene:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y^2 + B_z^2 & -B_y B_x & -B_z B_x \\ 0 & -B_y B_x & B_x^2 + B_z^2 & -B_z B_y \\ 0 & -B_z B_x & -B_z B_y & B_x^2 + B_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.3.33)$$

Tomando la traza de lo anterior y dividiendo por  $2!$  se obtiene que:  $\langle B, B \rangle = \|B\|^2$ . Es decir, coincide con la norma del campo visto como vector. Lo mismo ocurre para el campo eléctrico.

Esto parece indicar que tomando productos del tensor electromagnético visto como 2-forma, uno podría obtener un término cuadrático en los campos que se pudiese interpretar como una densidad de energía desde el punto de vista físico. Si se calcula el producto  $\langle F, F \rangle$ , se obtiene lo que aparece en la Figura 3.1:

$$P := \begin{bmatrix} -Ex^2 - Ey^2 - Ez^2 & By Ez - Bz Ey & -Bx Ez + Bz Ex & Bx Ey - By Ex \\ -By Ez + Bz Ey & By^2 + Bz^2 - Ex^2 & -Bx By - Ex Ey & -Bx Bz - Ex Ez \\ Bx Ez - Bz Ex & -Bx By - Ex Ey & Bx^2 + Bz^2 - Ey^2 & -By Bz - Ey Ez \\ -Bx Ey + By Ex & -Bx Bz - Ex Ez & -By Bz - Ey Ez & Bx^2 + By^2 - Ez^2 \\ 2 Bx^2 + 2 By^2 + 2 Bz^2 - 2 Ex^2 - 2 Ey^2 - 2 Ez^2 \end{bmatrix}$$

Figura 3.1: Cálculo del producto  $\langle F, F \rangle$  usando el software de cálculo simbólico Maple. Lo que aparece debajo es la traza. Encima, se tiene la matriz producto. El valor de  $\langle F, F \rangle$  se obtiene dividiendo la traza por  $2!$ .

Es decir:  $-\frac{1}{2}\langle F, F \rangle = \frac{1}{2}(\langle E, E \rangle - \langle B, B \rangle)$ . Esto implica que el Lagrangiano del campo electromagnético puede escribirse como:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{2}\langle F, F \rangle \quad (3.3.34)$$

Esta ecuación es la precursora de la teoría de Yang-Mills. En el contexto de las formas, como este Lagrangiano tiene que ser integrable sobre una variedad 4-dimensional (para dar una acción), ha de ser una 4-forma, luego estrictamente hablando, el Lagrangiano sería:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{2}\langle F, F \rangle dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (3.3.35)$$

### 3.3.6. ¿Por qué una simetría $U(1)$ ?

A lo largo de esta sección, se ha visto que el electromagnetismo puede tratarse, con el formalismo introducido, como un teoría de gauge con grupo de simetría  $U(1)$ . No obstante, una pregunta queda aún sin responder: ¿por qué el grupo de simetría es  $U(1)$ ? Para responder a esta pregunta, hay que escribir el hamiltoniano de una partícula cargada. Las fuerzas que experimentan las partículas cargadas, llamada fuerza de Lorentz, conduce al siguiente Lagrangiano dependiente de las velocidades:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) - e \left( \phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{A} \right) \quad (3.3.36)$$

siendo  $\mathbf{r}(t)$  la posición de la partícula,  $m$  su masa,  $e$  la carga,  $c$  la velocidad de la luz y  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  los potenciales escalar y vectorial, respectivamente (el primero del campo eléctrico y el segundo del magnético). En lo que sigue, se tomarán unidades naturales en las que  $c = 1$ . El momento canónico asociado con el Lagrangiano es, por definición:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{r}_i(t) + e A_i \quad (3.3.37)$$

Por tanto, el hamiltoniano (clásico) sería:

$$\mathcal{H} = p_i \dot{r}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi \quad (3.3.38)$$

Cuantizar este hamiltoniano consiste en sustituir las variables del espacio de fases por sus correspondientes operadores a nivel cuántico. Esto es:  $\mathbf{p} \rightarrow P = -i\hbar\nabla$  y  $\mathbf{x} \rightarrow X$ , de modo que se obtiene la versión cuántica de la ecuación 3.3.38 (ecuación de Schrödinger):

$$\mathcal{H}\Psi = \frac{1}{2m} (P - eA)^2 \Psi = E\Psi \quad (3.3.39)$$

donde  $\Psi$  es la función de onda, y  $E$  es el operador energía, que incluye la contribución de la energía cinética de la partícula y del potencial  $e\phi$ . Es decir:  $E = i\hbar\partial_t - e\phi$ . Entonces, la libertad de gauge clásica expuesta en la sección 3.3.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \partial_t\Lambda \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

introducida en la ecuación de Schrödinger, hacen que la función de onda cambie por un factor de fase  $\Psi \rightarrow \Psi' = \exp(i e\Lambda/\hbar) \Psi$ . Esto explica que haya una relación biunívoca entre la simetría de gauge en el sentido usual y una simetría “interna”, de carácter cuántico, gobernada por el grupo  $U(1)$ .

## 3.4. El monopolo magnético

El objetivo de esta sección es describir un ejemplo físico en el que el fibrado en consideración no sea un fibrado trivial. Este ejemplo es el del monopolo magnético, de gran relevancia. En este caso, la no trivialidad del fibrado se ve forzada por las singularidades que existen en el campo. Las referencias para esta parte son, principalmente: [24] (sección 10.5.2), [20](sección 2.2), [23](sección 0.2), [31] y también [28].



Las ecuaciones de Maxwell tienen en cierto sentido, un caracter dual, salvo en la parte no-homogénea de 3.3.21. Estos términos, de hecho, describen dos aspectos fundamentales de la naturaleza: que existen las cargas eléctricas puntuales y que dichas cargas, en movimiento, producen campos magnéticos. Para que las ecuaciones de Maxwell sean completamente simétricas, deberían existir las cargas puntuales magnéticas, también conocidas como monopolos magnéticos.

Desde el punto de vista físico, un monopolo puede describirse demandando que el campo magnético tenga una divergencia. Es decir:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (3.4.1)$$

donde  $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)^T$  es el vector de posición,  $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$  representa la delta de Dirac tridimensional y la constante  $g$  sería la supuesta carga magnética. La ecuación anterior puede resolverse como:

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.4.2)$$

que puede interpretarse como la ecuación de Coulomb para el campo magnético. Para el campo anterior, un potencial vector que se puede encontrar es el siguiente:

$$A_x^N = \frac{-gy}{r(r+z)} \quad A_y^N = \frac{gx}{r(r+z)} \quad A_z^N = 0 \quad (3.4.3)$$

Este potencial vector da lugar al campo 3.4.2 excepto en el eje  $z$  negativo, donde tiene singularidades. No obstante, para valores negativos de la coordenada  $z$  se puede tomar:

$$A_x^S = \frac{gy}{r(r-z)} \quad A_y^S = \frac{-gx}{r(r-z)} \quad A_z^S = 0 \quad (3.4.4)$$

que está ahora definido para valores negativos de  $z$ , pero no para valores positivos. El hecho de que no se pueda encontrar un potencial vector global es una consecuencia de la ley de Gauss y del teorema de la divergencia. Por la ley de Gauss, el flujo de un campo como el de 3.4.2 debería ser  $4\pi g$ . Si  $B = \nabla \wedge \mathbf{A}$  globalmente, por el teorema de la divergencia, su flujo sería 0, lo cual llevaría a inconsistencias.

Ahora, se considera todo lo anterior en el lenguaje de las formas diferenciales. Tomando  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  y sustituyendo en 3.3.8 se obtiene, como tensor electromagnético:

$$F = \frac{g}{r^3} (x^1 dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^3 dx^1 \wedge dx^2) \quad (3.4.5)$$

Como  $F$  no depende de  $x^0$  (la coordenada temporal),  $F$  define una 2-forma en cada sección  $x^0 = \text{constante}$ . Es más, usando el *pull-back* del difeomorfismo de cambio de coordenadas a esféricas, 3.4.5 se puede escribir como:

$$F = g \sin(\varphi) d\varphi \wedge d\theta \quad (3.4.6)$$

siendo  $\theta$  y  $\varphi$  como en la Figura 3.2.

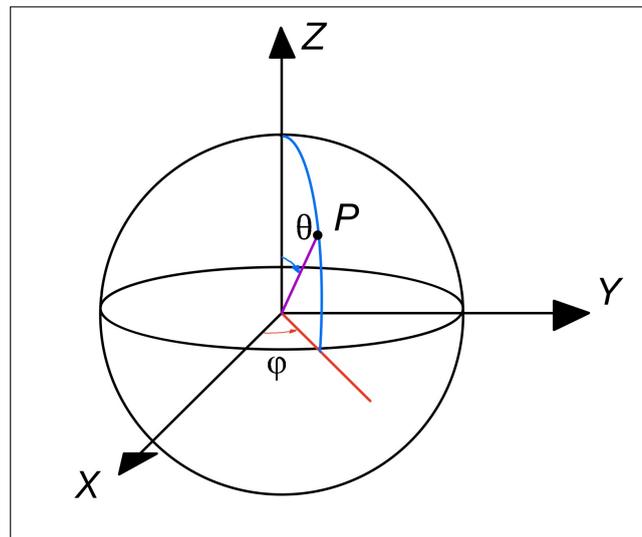


Figura 3.2: Coordenadas esféricas:  $(\rho, \theta, \varphi)$ . Solo se representan las dos últimas sobre una esfera de radio  $\rho$ .

Como  $F$  no depende de la coordenada radial, se puede restringir el estudio a la esfera de radio 1 y la sección, por ejemplo  $x^0 = 0$ . A todos los efectos, esto es estudiar el campo que crea el monopolo en la esfera  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces, se quiere describir el efecto del monopolo en la esfera usando el hecho de que el electromagnetismo es una teoría de gauge con grupo de simetría  $U(1)$ . El primer paso será, por tanto, considerar un  $U(1)$ -fibrado principal con variedad base la esfera  $S^2$ . Para recubrir la esfera, se pueden usar los dos abiertos siguientes:  $U_N$  y  $U_S$ , definidos como:

$$U_N = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 : x^3 > -\epsilon\} \text{ y } U_S = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 : x^3 < \epsilon\} \quad (3.4.7)$$

Estos conjuntos se representan en la Figura 3.3.

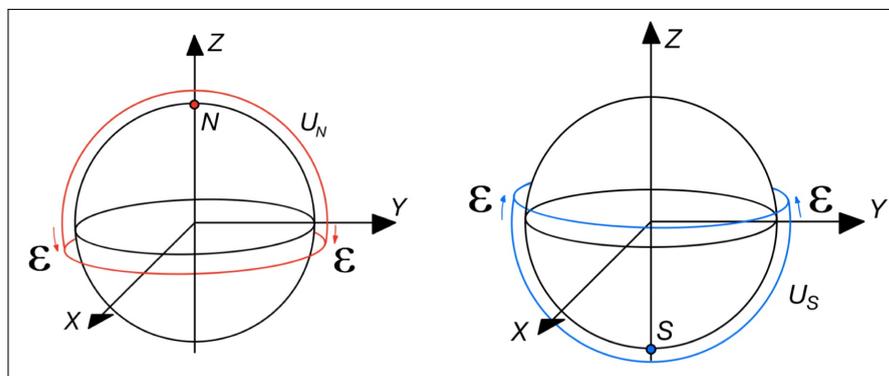


Figura 3.3: Recubrimiento de la esfera en dos abiertos:  $U_S$  y  $U_N$ . Obsérvese que hay un entorno del ecuador donde los dos se solapan.

En cada uno de estos abiertos, se puede definir una conexión  $A_s$  local que dependerá del gauge escogido. En este caso, para construir la conexión en cada abierto, basta con expresar los potencial-vectores hallados en 3.4.3 y 3.4.4 en el lenguaje de las 1-formas. En

la base de 1-formas globales de  $\mathbb{R}^3$ , estos campos pueden escribirse simplemente como los correspondientes duales:

$$\begin{aligned} A^N &= \frac{-gy}{r(r+z)}dx + \frac{gx}{r(r+z)}dy \\ A^S &= \frac{gy}{r(r-z)}dx + \frac{-gx}{r(r-z)}dy \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

usando que  $dx = \sin(\theta)\cos(\varphi)dr + r\cos(\theta)\cos(\varphi)d\theta - r\sin(\theta)\sin(\varphi)d\varphi$  y  $dy = \sin(\theta)\sin(\varphi)dr + r\cos(\theta)\sin(\varphi)d\theta + r\sin(\theta)\cos(\varphi)d\varphi$ , se llega a:

$$\begin{aligned} A^N &= g(1 - \cos(\theta))d\varphi \\ A^S &= -g(1 + \cos(\theta))d\varphi \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Es fácil comprobar, diferenciando las anteriores, que  $dA^i = F$ ,  $i = N, S$ . Para que las 1-formas de conexión sean verdaderamente  $i\mathbb{R}$  valuadas, se añade un  $i$  en  $A^N$  y  $A^S$  y también en la fuerza de la interacción. Se denota, pues:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^N &= ig(1 - \cos(\theta))d\varphi \\ \mathcal{A}^S &= -ig(1 + \cos(\theta))d\varphi \\ \mathcal{F} &= ig\sin(\varphi)d\varphi \wedge d\theta \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Si  $\mathcal{A}^N$  y  $\mathcal{A}^S$  se van a interpretar como conexiones en el sentido de las teorías gauge, en la zona de solapamiento  $U_N \cap U_S$  en torno al ecuador, debería existir una función  $\exp(i\Lambda(\theta, \phi)) \in U(1)$  (que representa la  $\phi_{ji}(x) \in U(1)$  de 3.1.2) de manera que se verifica la expresión 3.3.3. Esto es:

$$\mathcal{A}^N = \mathcal{A}^S + id\Lambda \Rightarrow d\Lambda = -i(\mathcal{A}^N - \mathcal{A}^S) = 2gd\varphi \quad (3.4.11)$$

A medida que  $\varphi$  se mueve por el ecuador, desde  $0 \rightarrow 2\pi$ ,  $\Lambda$  cambia por una cantidad  $\Delta\Lambda$  igual a:

$$\Delta\Lambda = \int_0^{2\pi} d\Lambda = \int_0^{2\pi} 2gd\varphi = 4\pi g \quad (3.4.12)$$

Entonces, para que  $\exp(i\Lambda(\theta, \phi))$  esté bien definida, ha de ocurrir que:

$$\exp(i(\Lambda + \Delta\Lambda)) = \exp(i\Lambda) \Leftrightarrow \Delta\Lambda = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \Delta\Lambda/2\pi = 2g \in \mathbb{Z} \quad (3.4.13)$$

Esta curiosa condición sobre el número  $g$  tiene dos interpretaciones:

1. Por un lado, esta condición se puede interpretar como la cuantización de la carga magnética. Relacionando esta observación con el hecho de cómo cambia una función de onda al cambiar el gauge (ver Sección 3.3.6), Dirac demostró [12] que la existencia de monopolos conduciría a un hecho bien establecido en la experiencia diaria: la cuantización de la carga eléctrica.
2. Por otro lado, esta condición se puede interpretar como una condición sobre los  $U(1)$ -fibrados principales que se pueden construir con  $S^2$  como la variedad base. La condición implica que  $g = n/2$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . Además, la ecuación 3.4.11 lleva a  $\Lambda = 2g\varphi + \varphi_0$ . Cambiando la definición de la coordenada  $\varphi$  si fuera necesario, se puede eliminar el

factor de integración  $\varphi_0$  de modo que  $\Lambda = 2g\varphi = n\varphi$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ . Como la función  $\exp(i\Lambda) = \exp(in\lambda)$  es la función de transición del fibrado, se deduce que: si  $\mathbf{n}=\mathbf{0}$ , entonces el fibrado es trivial, ya que la función de transición es la identidad. En este caso, la carga  $g$  del monopolo es 0, lo cual es lógico: sin la presencia de cargas, no hace falta usar un fibrado no trivial para describir el campo, ya que no hay singularidades de ningún tipo. Si  $\mathbf{n}=\mathbf{1}$  o  $\mathbf{n}=-\mathbf{1}$ , las funciones de transición son no triviales, y por tanto los fibrados también lo son. De hecho, estos fibrados son los de Hopf (como se ve en [20]).

### 3.5. El Lagrangiano de Yang-Mills

En la sección 3.3.5, se demostró que se podía construir un Lagrangiano para el campo electromagnético tomando productos del tensor electromagnético o 2-forma de curvatura. El objetivo de esta sección sería buscar una expresión similar que se ajustara al caso general de una teoría gauge con grupo de simetría  $G$ . Se siguen los resultados de [16] (sección 7.3.1), de [20] (sección 2.5) y también de [3] (capítulo 4)



Se pretende construir un Lagrangiano que sea cuadrático en la curvatura de modo que generalice al caso del Lagrangiano electromagnético. Los requisitos de dicho Lagrangiano son:

1. Debería **generalizar al Lagrangiano electromagnético** encontrado en la sección 3.3.5.
2. Debería ser **invariante gauge**.
3. Debería estar **definido globalmente** en la variedad y tener **valores reales**.

El problema que se tiene en el caso general es el de comprobar la invarianza gauge. Si simplemente se pusiera el producto escalar usual de las 2-formas, nada garantizaría que fuera invariante con respecto a cambios de gauge. La 2-forma cambia al cambiar el gauge como 3.2.9. Un operador que es invariante con respecto a esta transformación es la forma de Killing o, en general, la traza de la observación 2.3.1, lo cual motiva el siguiente resultado:

**Teorema 3.5.1 (Lagrangiano de Yang-Mills).** Sea  $P \xrightarrow{\pi} M$  un  $G$ -fibrado principal (con  $G$  un grupo matricial) y  $A$  una conexión con curvatura  $F$  asociada. Se supone que  $M$  es una variedad orientada con una métrica  $g$  con signatura Lorentz definida sobre ella. También se supone que existe una traza verificando las propiedades de 2.3.1. Entonces, el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2} \text{tr}(F \wedge \star F) \tag{3.5.1}$$

llamado **Lagrangiano de Yang-Mills** es invariante gauge y coincide con el Lagrangiano del caso electromagnético cuando  $G = U(1)$ .

*Demostración.* Para ver esto, sean dos gauges  $s_i : U_i \rightarrow P$  y  $s_j : U_j \rightarrow P$  con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Entonces, existe un elemento  $g \in G$  tal que  $s_i(x) = s_j(x) \cdot g$ , para cada  $x \in U_i \cap U_j$ . Sean  $F_i$  y  $F_j$  las curvaturas locales definidas por este gauge, que están relacionadas por la ecuación 3.2.9. Entonces, se calcula:

$$tr(F_{i\mu\nu}F_i^{\mu\nu})dvol = tr(G F_{j\mu\nu}F_j^{\mu\nu} G^{-1})dvol = tr(F_{j\mu\nu}F_j^{\mu\nu})dvol \quad (3.5.2)$$

donde se ha usado que la traza es invariante por  $Ad_g$  por hipótesis. Esto prueba la invarianza gauge. De hecho, la traza define un producto interno en  $\mathfrak{g}$ . Sea  $\{T_a\}_a$  una base del espacio  $\mathfrak{g}$ . Entonces:  $F = F_{\mu\nu}^a T_a$  es la expansión en la base de  $T_a$ . Entonces:

$$tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})dvol = tr(F_{\mu\nu}^a T_a F_b^{\mu\nu} T^b) = F_{\mu\nu}^a F_b^{\mu\nu} tr(T_a T^b) dvol \quad (3.5.3)$$

Si se escoge la base  $\{T_a\}_a$  ortonormal con respecto al producto interno que determina la traza, se tiene que  $tr(T_a T^b) = \delta_a^b$  y, por tanto, lo anterior queda:  $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} dvol$ . En el caso del electromagnetismo, que es un grupo abeliano, cualquier producto escalar definido sobre  $\mathfrak{g}$  es  $Ad_g$ -invariante (ya que  $Ad_g$  es la identidad) y, por tanto, define una traza en el sentido de la observación 2.3.1. Si  $tr(\cdot, \cdot)$  es dicha traza, entonces en una base ortonormal del álgebra se puede escribir:  $tr(F \wedge \star F) = F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} dvol$ . Como el álgebra es de dimensión 1, la anterior expresión se reduce a  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dvol$ . Esto implica que  $tr(F \wedge \star F) = \langle F, F \rangle dvol$ , lo cual lleva a:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{2} tr(F \wedge \star F) = -\frac{1}{2} \langle F, F \rangle dvol = -\frac{1}{2} \langle F, F \rangle \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (3.5.4)$$

y como la métrica tiene signatura Lorentz, esto coincide con el Lagrangiano del campo electromagnético.  $\square$



El lagrangiano de Yang-Mills conduce a la acción de Yang-Mills, que es:

$$S_{YM} = -\frac{1}{2} \int_M tr(F \wedge \star F) \quad (3.5.5)$$

**Observación 3.5.1.** Como aparece en las hipótesis de 3.5.1, es necesario que exista una traza en el sentido de la observación 2.3.1. Esto, por ejemplo, ocurre cuando el grupo es **compacto** y **semi-simple**, como ya se mencionó en 2.3. Este es el caso de  $G = SU(2)$ , que es el grupo original que se usó para explicar la invarianza de isospín [39].

# Capítulo 4

## Breve introducción a las clases características y la acción de Chern-Simons

Para esta sección, se siguen principalmente [9] (parte V sección 10), [13] (capítulo 6), [11] (secciones 2.5 y 2.6) y también [20] (sección 2.2). Para la parte física de las teorías de Chern-Simons, se sigue [35], [18] y [41]. El objetivo de la sección es hacer una corta introducción a las clases características, que pueden usarse en la formulación de una teoría gauge de la gravedad.

### 4.1. El monopolo magnético revisado

Se considera, para empezar, un  $G$ -fibrado principal sobre la variedad base  $X$ :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & P \\ & & \pi \downarrow \\ & & X \end{array}$$

Por simplicidad, se supondrá que  $G$  es un grupo de matrices. Sea  $\omega$  una conexión en el fibrado, y  $F$  su 2-forma de curvatura. Dada una sección local o gauge  $s$ , la 2-forma local será  $F_s = s^*\omega$ . La 2-forma local está definida en la variedad base, pero no es una 2-forma globalmente definida, ya que en los abiertos que se solapan, esta cambia de la siguiente manera al cambiar el gauge:  $F_i = g^{-1}F_jg$ , siendo  $g$  un cierto elemento de  $G$ , y  $F_i, F_j$  asociadas con dos gauges  $s_i$  y  $s_j$ . No obstante, como la traza es invariante por conjugación, se puede construir un invariante por cambios de gauge tomando la traza de  $F$ , en cualquier base del espacio tangente escogida (ya que la traza también es invariante por cambios de base). En particular,  $tr(F)$  es una 2-forma globalmente definida que, de hecho, se puede probar que es cerrada, luego define una clase de cohomología en la variedad base  $X$ . Esta clase de cohomología se llama **primera clase de Chern** y se denota  $c_1(P)$ :

$$c_1(P) = \left[ \frac{i}{2\pi} tr(F) \right] \tag{4.1.1}$$

donde los corchetes denotan la clase de equivalencia de cohomología. Lo interesante es que se puede probar que esta clase de cohomología no depende de la conexión  $\omega$  escogida en el fibrado y, por tanto, es una característica topológica del fibrado en sí. De hecho, los  $U(1)$ -fibrados principales se pueden clasificar atendiendo simplemente a la primera clase de Chern (ver Teorema E.5 del Apéndice E de [15]). En particular, si la clase de cohomología es trivial, el fibrado es trivial.

En el caso del monopolo, si  $\mathcal{F} = iF$  es la 2-forma de curvatura (con  $F$  el tensor electromagnético), la primera clase de Chern se puede escribir simplemente como:

$$c_1(P) = \frac{i}{2\pi} [iF] = \frac{-1}{2\pi} [F] \quad (4.1.2)$$

La traza ha desaparecido porque el grupo tiene una sola dimensión. Lo interesante es que la topología del fibrado viene codificada en el tensor electromagnético o, mejor dicho, en su clase de cohomología. De hecho, si se integra un representante de  $c_1(P)$  a través de la esfera (da igual cuál se integre, pues todos se diferencian por una forma exacta que, integrada a la esfera da 0):

$$\int_{S^2} c_1(P) = \frac{-1}{2\pi} \int_{S^2} F = \frac{-g}{2\pi} \int_{S^2} \sin(\varphi) d\varphi \wedge d\theta = 2g \quad (4.1.3)$$

Por tanto, se deduce que si  $n = 0$ , la clase de cohomología es trivial y el fibrado es también trivial. Si  $n \neq 0$ , el fibrado no puede ser trivial. Esto es justamente lo que se encontraba en el apartado anterior razonando con la función de transición del fibrado.

## 4.2. Yang-Mills revisado y clases de Chern

En el apartado anterior, se razonó que la no trivialidad de los fibrados podía relacionarse con un cierto elemento de una clase de cohomología, la primera clase de Chern. Esto sirvió para determinar la no trivialidad de los fibrados cuando la carga magnética es no nula. Esta construcción, hecha para  $U(1)$ , puede ampliarse a casos más generales a través del estudio de las **clases características**.

Las clases características son elementos que se pueden construir a través de ciertas clases de cohomología y que miden la no trivialidad de un fibrado. El estudio de las clases características es largo y técnico y requiere muchos resultados previos, por lo que no se puede reproducir aquí con detalle. Por suerte, para este trabajo, no es de interés la teoría general de las clases características, sino una clase en particular, que es la **forma de Pontryagin** [42].

Para motivar la introducción de esta clase característica, se retorna por un momento a la sección 3.5. Para construir este Lagrangiano, hace falta tener una variedad  $M$  que esté equipada con una métrica, o sino no se puede hablar del **dual de Hodge**. Esta métrica es lo que en Física se conoce como una **estructura fija**, ya que tiene un rol crucial, pero no es más que algo que se postula *ad hoc* para construir la teoría, y no algo que aparece de resolver una determinada ecuación o de imponer una cierta condición. Entonces, uno podría

pensar en sustituir la acción de Yang-Mills por la siguiente acción que no involucra al dual de Hodge:

$$S = \int_M \text{tr}(F \wedge F) \quad (4.2.1)$$

Esta acción no es interesante desde el punto de vista físico, ya que todos los potenciales  $A$  son extremos de esta acción [3] (pág.280). Es decir,  $\delta S = 0$ , para cada conexión  $A$ . Esto se puede interpretar como que  $S$  no depende de  $A$  y, por tanto, es característica del fibrado. Es, de hecho, una clase característica.

Aunque la acción anterior no pueda interpretarse como una acción físicamente relevante, quizá su integral sí que daría una forma que describiese una teoría física relevante. Las integrales de las clases características son invariantes topológicos, por lo que esta forma debería gozar de ciertas propiedades interesantes de invarianza.

El integrando de la acción 4.2.1 es una forma cerrada, la primera clase de Poyntagin, que se denotará  $P_4$ . Entonces, por el Lema de Poincaré, es localmente exacta. Esto implica que existe una 3-forma  $C_3$  tal que  $dC_3 = P_4$ . Esta 3-forma es la **forma de Chern-Simons** y se puede calcular por medio de la **transgresión** de  $P_4$  [11] (**Tema 2**):

$$C_3 = \int_0^1 dt \text{str}(A, tdA + t^2 A^2) \quad (4.2.2)$$

donde  $\text{str} = (1/2!)(\text{tr}(A F_t) - \text{tr}(F_t A))$  y se sobrentienden los productos  $\wedge$  para ahorrar notación. Entonces, la transgresión es:

$$C_3 = \frac{1}{2} \text{tr} \left( AdA + \frac{2}{3} A^3 \right) \quad (4.2.3)$$

Obviando el factor combinatorio que ha aparecido, se define la 3-forma de Chern-Simons:

$$C_3 = \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (4.2.4)$$

La forma  $C_3$  no es invariante gauge, pero si es cuasi-invariante. De hecho, como  $P_4$  es invariante por transformaciones de gauge, y  $P_4 = dC_3$ , se deduce que  $C_3$  es invariante excepto quizá por un término de frontera. Es decir:  $d(\delta_{\text{gauge}} C_3) = 0$ . Esto lleva a que:

$$\delta_{\text{gauge}} S[C_3] = \int_M \delta_{\text{gauge}} C_3 = \int_{\partial M} \Omega \quad (4.2.5)$$

donde  $S[C_3]$  representa la acción formulada a través de  $C_3$  (es decir, la integral de  $C_3$  a una variedad  $M$  de dimensión 3),  $\delta_{\text{gauge}}$  se usa para denotar una varación por una transformación de gauge y  $\Omega$  representa un término de frontera. Este se puede hacer tender hacia 0 imponiendo unas condiciones frontera apropiadas [43].

**Observación 4.2.1.** En general, se define la  $2k$ -forma de Poyntagin de grado como  $P_{2k} = \text{tr}(F^k)$ . Esta forma se puede probar que es cerrada y es también una clase característica. Por tanto, localmente  $P_{2k} = dC_{2k-1}$  define una forma de grado  $2k - 1$  que es la forma genérica de Chern-Simons. Estas formas se pueden emplear para estudiar la gravedad en dimensiones impares  $> 3$  [7], [8].

# Capítulo 5

## Gravedad

### 5.1. Gravedad en términos del *vierbein* y la conexión de spin

El objetivo de esta subsección es introducir la gravedad formulada en términos del *vierbein* y la conexión de Lorentz o conexión de spin. Se sigue [34], [19], [3], [41], [26] y [40].



#### 5.1.1. La gravedad de Einstein

En 1915 [14], Einstein publica sus ecuaciones de campo para una variedad  $M$  que representara el espacio-tiempo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G_N T_{\mu\nu} \quad (5.1.1)$$

escritas en función de:

- La **métrica en la variedad**  $g_{\mu\nu}$ .
- La **conexión de Levi-Civita**,  $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ , que es una conexión **sin-torsión** y **compatible con la métrica**, que se puede escribir como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (5.1.2)$$

- El **tensor de Riemann**:

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \quad (5.1.3)$$

Y sus contracciones asociadas (**curvaturas**) como el **tensor de Ricci**:  $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho$  o el **escalar de curvatura**:  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ .

- El **tensor de energía-momento**  $T_{\mu\nu}$ , que es un término inhomogéneo para describir el acople del campo gravitatorio con la materia. En el caso del vacío, este tensor se toma idénticamente nulo.

y siendo  $G_N$  la constante de gravitación de Newton. Las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío (cuando el tensor de energía-momento es nulo) 5.1.1 se pueden poner en función de una acción, llamada **acción de Einstein-Hilbert**:

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int_M d^4x \sqrt{|g|} R \quad (5.1.4)$$

siendo  $k = 8\pi G_N$ . Esta acción se puede generalizar si se permiten geometrías de curvatura constante, añadiendo una constante cosmológica  $\Lambda$ :

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int_M d^4x \sqrt{|g|} (R - 2\Lambda) \quad (5.1.5)$$

### 5.1.2. El *vierbein*

En cada punto de la variedad  $M$  que modela el espacio-tiempo, se puede escoger una base ortonormal del espacio tangente que haga que la métrica diagonalice a la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Este sistema se llama **tétrada** o en alemán *vierbein*. De hecho, *vierbein* se suele reservar para el isomorfismo entre el espacio tangente  $T_pM$  y  $\mathbb{R}^4$  que supone tomar coordenadas. El convenio con el *vierbein* es el de usar los índices griegos  $\mu, \nu$ , etc. para las coordenadas locales en la variedad y los índices latinos  $a, b$ , etc. para los índices de la tétrada en el espacio tangente. Sea  $p \in M$ ,  $(U, \{x_\mu\})$  un sistema local de coordenadas en torno a  $p$ , con  $p \in U \subset M$ . Entonces, dado un vector  $e_a(x_\mu)$  de la tétrada, se puede expandir en la base del espacio tangente  $\{\partial_\mu\}$  así:  $e_a(x_\mu) = e_a^\mu(x_\mu)\partial_\mu$ . El *vierbein* debe cumplir:

$$\begin{aligned} e_a^\nu(x_\mu)e_\mu^a(x_\mu) &= \delta_\mu^\nu \\ e_a^\nu(x_\mu)e_\nu^b(x_\mu) &= \delta_a^b \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

La primera de las anteriores define la inversa del *vierbein*,  $e_\mu^a$ . La segunda es la condición de ortonormalidad. Por último, para que el campo de *vierbein* diagonalice a la métrica, debe cumplirse que:

$$g_{\mu\nu}(x_\mu) = e_\mu^a(x_\mu)e_\nu^b(x_\mu)\eta_{ab} \quad (5.1.7)$$

Esto quiere decir que la información sobre la métrica de la variedad está codificada en el *vierbein*, por lo que este determina la métrica. El recíproco, no obstante, no es cierto, ya que se pueden escoger muchos sistemas ortonormales de coordenadas como base del espacio tangente.

Dicho de otro modo, el *vierbein* establece un isomorfismo entre el espacio de Minkowski y el espacio tangente en cada punto, trasladando la métrica plana a la métrica en la variedad. Por ello, la estructura métrica de la variedad está contenida en el *vierbein* y este se puede interpretar como un campo dinámico en sustitución de la métrica.

### 5.1.3. El grupo de Lorentz

Se sigue [32] (capítulo 10). La idea de este apartado es exponer el grupo de Lorentz. Este se define como:

**Definición 5.1.1 (grupo de Lorentz).** El **grupo de Lorentz** se define como conjunto de automorfismos lineales  $\Lambda$  del espacio de Minkowski que dejan invariante la métrica. Esto es:

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda_{\lambda}^{\mu}\Lambda_{\sigma}^{\nu} = \eta_{\lambda\sigma} \quad (5.1.8)$$

Matricialmente, la condición anterior también puede escribirse como:

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (5.1.9)$$

Tomando determinantes en ambos lados de la ecuación, se llega a que  $\det(\Lambda) = \pm 1$ . Esto divide el grupo de Lorentz en dos partes desconexas: las transformaciones con determinante 1 y las transformaciones con determinante  $-1$ , pero solo el primero contiene a la  $Id$  y por tanto es la única componente que es grupo. Es más, yendo a la ecuación 5.1.8, se ve que, tomando la componente (00) (temporal), se tiene:

$$1 = (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 - (\Lambda_0^2)^2 - (\Lambda_0^3)^2 \quad (5.1.10)$$

En particular, está claro que  $\Lambda_0^0$  ha de cumplir:

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \quad \text{ó} \quad \Lambda_0^0 \leq -1 \quad (5.1.11)$$

Esto implica que el grupo de Lorentz tiene 4 componentes conexas, pero solo una de ellas es subgrupo por contener a la identidad. El grupo completo de Lorentz no es el que va a interesar en este caso, sino que va a interesar el subgrupo conexo de transformaciones propias:

**Definición 5.1.2 (grupo propio de Lorentz).** El **grupo propio de Lorentz**, también llamado **grupo propio ortocrono de Lorentz** se define como el subgrupo del grupo de Lorentz formado por transformaciones propias con  $\Lambda_0^0 \geq 1$ . Esto es, transformaciones  $\Lambda$  que conservan la orientación y que verifican:  $\det(\Lambda) = +1$  y  $\Lambda_0^0 \geq 1$ . El grupo propio en 4 dimensiones se denota  $SO(3,1)$ . En el caso general de  $d$  dimensiones, es  $SO(d-1,1)$ .

**Observación 5.1.1.** En algunos libros se denota  $SO(3,1)$  al grupo especial de Lorentz cumpliendo solo  $\det(\Lambda) = 1$  y, cuando se cumple también  $\Lambda_0^0 \geq 1$  se le denota  $SO^+(3,1)$ . Aquí se sigue la convención de [32].

En lo que sigue, se usará grupo de Lorentz para designar el grupo propio de Lorentz  $SO(3,1)$ .

#### 5.1.4. La conexión de Lorentz

Desde el punto de vista matemático, existen muchas conexiones que se pueden definir en la variedad  $M$ , dando distintas derivadas covariantes y distintos tensores de Riemann. Einstein tomó el convenio de escoger la conexión de Levi-Civita en base a querer obtener **una teoría donde la métrica fuera el único campo dinámico**. Por ello, la conexión de Levi-Civita se construye, en la teoría de Einstein, a partir de la métrica y estas dos no

son magnitudes independientes, sino que están ligadas por 5.1.2. En pos de hacer una teoría que no necesite más suposiciones de las necesarias, puede intentarse formularse la gravedad con una conexión distinta.

Ya que el resto de interacciones fundamentales se pueden formular en el lenguaje de las teorías de gauge, sería apropiado buscar una cierta conexión que tuviese su origen en una simetría gauge. En cada punto  $p \in M$  de la variedad, hay una simetría en el espacio tangente  $T_p M$  que es la simetría de Lorentz. Es decir, la invarianza de la Física cuando se aplica una transformación del grupo de Lorentz. Esta invarianza lleva a una conexión de gauge  $\omega_b^a$ , llamada **conexión de Lorentz** o **conexión de spin** que sería una 1-forma local con valores en el álgebra de Lie del grupo  $SO(3, 1)$ , llámese  $\mathfrak{so}(3, 1)$ . Localmente, pues, se puede escribir:

$$\omega_b^a(x_\mu) = \omega_{b\mu}^a(x_\mu) dx^\mu \tag{5.1.12}$$

en la base de 1-formas locales. Las funciones  $\omega_{b\mu}^a(x_\mu)$  serían  $\mathfrak{so}(3, 1)$ -valuadas.



Por ser  $\omega_{b\mu}^a$  una conexión en el sentido de las teorías gauge, está claro que ha de transformar, al cambiar el gauge, así:

$$\omega_{b\mu}^a(x_\mu) = \Lambda^a_c(x_\mu) \Lambda_b^d(x_\mu) \omega_{d\mu}^c(x_\mu) + \Lambda^a_c(x_\mu) \partial_\mu \Lambda_b^c(x) \tag{5.1.13}$$

donde  $\Lambda^b_d \in SO(3, 1)$  es la matriz de transformación del gauge y  $\Lambda_b^d = \eta_{ab} \eta^{cd} \Lambda^a_c$  es su inversa (transpuesta).



La conexión define una derivada covariante de los campos  $\phi^a(x_\mu)$ :

$$D_\mu \phi^a(x_\mu) = \partial_\mu \phi^a(x_\mu) + \omega_{b\mu}^a(x_\mu) \phi^b(x_\mu) \tag{5.1.14}$$

que se ha querido denotar con  $D$  en vez de con  $\nabla$  (como en 3.2.3) para diferenciarla de la derivada covariante definida por la conexión de Levi-Civita.



Siguiendo con el formalismo de las teorías gauge, una vez se tiene una conexión, como  $\omega_{b\mu}^a$ , lo que sigue es definir una 2-forma de curvatura. Esta 2-forma viene dada por la ecuación 3.2.7:

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = \frac{1}{2} R^a_{b\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \tag{5.1.15}$$

Como se demuestra en [17] (sección 3.2.3), este tensor de curvatura está relacionado con el tensor de Riemann  $\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma}$  (obtenido a través de la conexión de Levi-Civita) a través de la expresión:

$$\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = e_a^\mu e_{b\nu} R^ab_{\rho\sigma} \tag{5.1.16}$$

siempre y cuando la 2-forma de **torsión**  $T^a_{\mu\nu}$ :

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_{\mu b}^a \wedge e_\nu^b - \omega_{\nu b}^a \wedge e_\mu^b = D_\mu e_\nu^a - D_\nu e_\mu^a \tag{5.1.17}$$

sea idénticamente nula. En particular, si la torsión es nula, se deduce la siguiente relación entre el tensor de Ricci  $\tilde{R}_{\nu\sigma} = \tilde{R}^\mu_{\nu\mu\sigma}$  y el tensor de curvatura:

$$\tilde{R}_{\nu\sigma} = \tilde{R}^\mu_{\nu\mu\sigma} = e_a^\mu e_{b\nu} R^ab_{\mu\sigma} \tag{5.1.18}$$

## 5.2. Gravedad como teoría gauge

En este apartado, se sigue sobre todo [41], [18], [3], [17] y los artículos originales de Witten: [37], [38], [35].

### 5.2.1. Punto de partida

Se quiere describir una teoría gauge de la gravedad usando el *vierbein*, la conexión de Lorentz, su 2-forma de curvatura asociada y (posiblemente) la torsión:

Cuadro 5.1: Ingredientes para formular una teoría gauge de la gravedad

$e^a$	<i>Vierbein</i>
$\omega^a_b$	Conexión de Lorentz
$R^a_b$	2-forma de curvatura
$T^a$	Torsión

Como grupo  $G$ , hay libertad. Se puede escoger, en principio, cualquier grupo que contenga al grupo de Lorentz como subgrupo. Una posibilidad es incluir las traslaciones locales:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\mu) \quad (5.2.1)$$

Desde el punto de vista físico, esto se corresponde a la experiencia cotidiana de que, al menos localmente, el espacio es suficientemente plano como para que las transformaciones traslacionales dejen la física invariante. Esto es solo una aproximación, y se podría considerar que, en vez de experimentar las simetrías de un espacio-tiempo plano localmente, se está experimentando las simetrías de un espacio con curvatura constante no nula. Esto es lo que ocurre con el grupo de *de-Sitter* y el de *anti de-Sitter*. De hecho, estos son los grupos no triviales más pequeños que contienen al grupo de Lorentz [17]:

Cuadro 5.2: Grupos más pequeños que contienen al grupo de Lorentz

$SO(4,1)$	<i>de-Sitter</i> (dS)
$SO(3,2)$	<i>anti-de Sitter</i> (AdS)
$ISO(3,1)$	Poincaré

La teoría de gauge de Chern-Simmons-Witten [35] es una **teoría de gravedad en 2+1 dimensiones** con grupo de simetrías  $ISO(2,1)$ .

### 5.2.2. Grupo de Poincaré

El grupo de Poincaré incluye tanto transformaciones del grupo de Lorentz como traslaciones espacio-temporales locales [32]:

**Definición 5.2.1 (grupo de Poincaré).** El **grupo de Poincaré**  $ISO(3, 1)$  es el grupo de todas las transformaciones en el espacio de Minkowski que consisten en: traslaciones, transformaciones propias de  $SO(3, 1)$  y sus productos. Este grupo también se llama **grupo inhomogéneo de Lorentz**.

El grupo de Poincaré tiene 10 generadores, de los cuales cuatro de ellos están asociados con las traslaciones  $\{P^\mu\}$  y 6 de ellos están asociados con el grupo de Lorentz  $\{J_{\mu\nu}\}$ :

**Teorema 5.2.2 (álgebra de Lie del grupo de Poincaré).** Los generadores del grupo de Poincaré son  $\{J_{ab}, P_c\}$  verificando el álgebra de conmutación siguiente:

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= 0 \\ [P_a, J_{bc}] &= P_b\eta_{ac} - P_c\eta_{ab} \\ [J_{ab}, J_{cd}] &= J_{cb}\eta_{ad} - J_{ab}\eta_{ac} + J_{ac}\eta_{bd} - J_{ad}\eta_{bc} \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

La prueba de este resultado se encuentra en [32] (capítulo 10).

### 5.2.3. Acción de Einstein-Hilbert en función del *vierbein* y la conexión de Lorentz

Sea  $R_{\mu\nu}{}^a{}_b$  la 2-forma de curvatura en una base local del espacio tangente. La ecuación de estructura local sería:

$$R_{\mu\nu}{}^a{}_b = \partial_\mu\omega_\nu{}^a{}_b - \partial_\nu\omega_\mu{}^a{}_b + [\omega_\mu, \omega_\nu]{}^a{}_b \quad (5.2.3)$$

Entonces:

**Proposición 5.2.3 (Acción de Einstein-Hilbert en función del *vierbein* y la conexión de Lorentz).** La acción de Einstein-Hilbert 5.1.4 en el vacío se puede escribir, en función de la curvatura de la conexión de Lorentz y del *vierbein*, como:

$$S = \frac{1}{2} \int_M \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \epsilon_{abcd} (e_\mu^a e_\nu^b R_{\sigma\lambda}{}^{cd}) \quad (5.2.4)$$

*Demostración.* La acción 5.2.4 tiene dos variables dinámicas independientes: la conexión de Lorentz y el *vierbein*. Calculando la variación con respecto a la conexión  $\omega$  [35], se obtiene:

$$D_\mu e_\nu{}^a - D_\nu e_\mu{}^a = 0 \quad (5.2.5)$$

que es equivalente a que la torsión desaparezca 5.1.17. Variando con respecto a  $e$  [35] se encuentra:

$$R_{\mu\nu}{}^a{}_b = 0 \quad (5.2.6)$$

La primera condición lleva a que la torsión 5.1.17 sea nula. Por tanto, el tensor de curvatura se relaciona con el tensor de Ricci por 5.1.18. Entonces, la segunda condición implica la ecuación de Einstein sin traza en el vacío (que se anule el tensor de Ricci).  $\square$



En el lenguaje de las formas, el integrando de la acción de Einstein-Hilbert en 4-dimensiones es la 4-forma  $e \wedge e \wedge R$ , con  $R$  la curvatura y  $e$  el *vierbein*. El análogo 3-dimensional de esto sería [35][17]:

$$e \wedge R \Rightarrow S_{EH-3} = \frac{1}{2k} \int_M \epsilon^{\mu\nu\sigma} \epsilon_{abc} (e_\mu^a R_{\nu\sigma}^{bc}) \quad (5.2.7)$$

### 5.2.4. Métricas invariantes en la teoría de Chern-Simons-Witten

Lo que se pretende ahora es escribir una acción que combine el *vierbein*  $e_\mu^a$  y la conexión de Lorentz  $\omega_\mu^a{}_b$  en un campo de gauge para el grupo  $G = ISO(d-1, 1)$  de Poincaré en  $d$ -dimensiones. Por construcción, está claro que la conexión de Lorentz se va a poder interpretar como un campo de gauge de grupo de simetría  $G = SO(d-1, 1)$ . En cuanto a la simetría traslacional; desde un punto de vista puramente matemático, el vierbein se puede interpretar como una conexión afín en el fibrado tangente [10], lo que lleva a las leyes de transformación correctas al cambiar de gauge.

Aunque el vierbein y la conexión de Lorentz tengan las propiedades correctas para poder interpretarse como un campo gauge del grupo de Poincaré, no es posible, en general y para dimensiones arbitrarias, escribir una acción compatible con el principio de invarianza gauge en función de una conexión que integre  $\omega$  y  $e$  [35]. En dimensión 3, no obstante, se puede probar con una acción de tipo Chern-Simons 4.2.4. Formalmente, se toma:

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int_M tr \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (5.2.8)$$

Si se escoge una base  $\{T_a\}_a$  del álgebra de Lie del grupo, entonces el término cuadrático, o **término cinético** de la acción es:

$$tr(T_a T_b) \int_M (A^a \wedge dA^b) \quad (5.2.9)$$

para que esto se pueda interpretar como un término cinético,  $tr$  se tiene que poder interpretar en el sentido de la observación 2.3.1 [35]. Entonces, antes de preguntarse si la gravedad en 2+1 dimensiones puede ser una teoría de gauge con una acción de Chern-Simons, hay que preguntarse si existe una traza con las propiedades deseadas. Ya se ha visto, en la sección 2.3, que los grupos compactos y semi-simples permiten construir una traza en estas condiciones. Por desgracia, este no es el caso del grupo de Poincaré, que ni es compacto ni es semi-simple. En este caso, no se tienen teoremas que den la existencia de este tipo de productos internos en el álgebra del grupo y solo queda la posibilidad de intentar construir la traza directamente.

**Proposición 5.2.4 (métrica invariante de  $\mathfrak{iso}(2, 1)$ ).** Sean  $P^a$  y  $J^{bc}$  los generadores del álgebra  $\mathfrak{iso}(2, 1)$  del grupo de Poincaré. La forma bilineal  $W = \epsilon_{abc} P^a J^{bc}$  [35] es **simétrica, invariante y no-degenerada**.

*Demostración.* Se comprueban las propiedades deseadas una a una:

1. Como el único producto no trivial es el de un generador  $P^a$  con uno  $J^{bc}$ , basta con ver que:  $W = \epsilon_{abc}P^a J^{bc} = \epsilon_{abc}J^{bc}P^a$ . Para ello, se usan las relaciones de conmutación:

$$P^a J^{bc} = J^{bc}P^a + [P^a, J^{bc}] = J^{bc}P^a + P^b\eta^{ac} - P^c\eta^{ab} \quad (5.2.10)$$

Ahora se multiplica en ambos lados de la ecuación por el tensor  $\epsilon_{abc}$  y se usa que  $\epsilon_{abc}P^b\eta^{ac} = 0 = \epsilon_{abc}P^c\eta^{ab}$  ya que el tensor de Levi-Civita es antisimétrico por el intercambio de dos de sus índices, y la métrica de Minkowski es simétrica. Esto lleva a que:  $W = \epsilon_{abc}P^a J^{bc} = \epsilon_{abc}J^{bc}P^a$  como quería verse.

2. Para ver que es no-degenerada, hay que ver que, si  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , entonces  $W(X, Y) = 0, \forall Y \Rightarrow X = 0$ . Si  $X = X_a P^a$ , entonces está claro, ya que el producto por  $J^{bc}$  debería ser no nulo, a no ser que los coeficientes  $X_a$  sean idénticamente nulos. Igual se comprueba para  $X = X_{bc}J^{bc}$ .
3. Queda por ver que es invariante, lo cual es más delicado. Se usará la caracterización de invarianza de [27] (página 11):

$$\text{La métrica } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ es invariante si } \langle [Z, X], Y \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} \quad (5.2.11)$$

En este caso particular, la propiedad solo ha de comprobarse cuando dos de los elementos  $X, Y$  sean traslacionales y el otro,  $Z$ , sea lorentziano o viceversa (son los únicos casos no triviales). Por ejemplo, si  $Z = J^{cd}$  es lorentziano y  $X = P^a$  y  $Y = P^b$  son traslacionales:

$$\langle [P^a, J^{cd}], P^b \rangle = 0 \quad (5.2.12)$$

El anterior término es 0 porque el conmutador  $[P^a, J^{cd}]$  solo tiene términos en los generadores traslacionales, pero el producto de dos términos traslacionales es 0 porque la forma  $W$  no tiene términos en  $P^a P^b$ . De igual manera se razona que:

$$\langle P^a, [P^b, J^{cd}] \rangle = 0 \quad (5.2.13)$$

y ya se tendría la igualdad.

□

Esto demuestra que sí que se puede construir la métrica deseada, lo cual implica que se va a poder construir una teoría Chern-Simons razonable (con propiedades adecuadas).

### 5.2.5. Construcción explícita de la teoría

En el apartado anterior se vio que sí que existían métricas invariantes para  $\mathfrak{iso}(2, 1)$ . Queda ahora construir la teoría explícitamente. Para ello, se comienza por reemplazar  $J^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}J_{bc}$ . Con esto, si se denota ahora  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a la métrica encontrada en 5.2.4, se tiene que:

$$\langle J_a, P_b \rangle = \delta_{ab}, \quad \langle J_a, J_b \rangle = \langle P_a, P_b \rangle = 0 \quad (5.2.14)$$

Entonces, las relaciones de conmutación toman la nueva forma:

$$[J_a, J_b] = \epsilon_{abc}J^c, \quad [J_a, P_b] = \epsilon_{abc}P^c, \quad [P_a, P_b] = 0 \quad (5.2.15)$$

Para construir la conexión, se toma:

$$A_\mu = e_\mu^a P_a + \omega_\mu^a J_a \quad (5.2.16)$$

en la base del álgebra. En un lenguaje más compacto:  $A_\mu = e_\mu + \omega_\mu$ . Por tanto, la curvatura asociada debería ser:

$$F = d(e + \omega) + e \wedge \omega + \omega \wedge e + e \wedge e + \omega \wedge \omega \quad (5.2.17)$$

Desarrollando esto componente a componente y usando las propiedades del producto externo, se obtiene:

$$F_{\mu\nu} = P_a \left( \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \epsilon^{abc} (\omega_{\mu b} e_{\nu c} + e_{\mu b} \omega_{\nu c}) \right) + J_a (\partial_\mu \omega_\nu^a - \partial_\nu \omega_\mu^a + \epsilon^{abc} \omega_{\mu b} \omega_{\nu c}) \quad (5.2.18)$$

Si la teoría de gauge fuese una teoría en 4-dimensiones, se podría tomar esta curvatura e introducirla en una acción del tipo 4.2.1, usando como traza la métrica invariante en el álgebra de Lie que se construyó en la sección anterior. Esto llevaría a una acción del tipo  $\int F^a \wedge F^b d_{ab}$ , donde  $d_{ab} = \text{tr}(T_a T_b)$  denota la métrica del álgebra de Lie. Esta forma ya se vio que era un invariante topológico, la forma de Poyntragin en 4 dimensiones. Su integral a una variedad 4-dimensional lleva a la acción de Chern-Simons que, por tanto, se puede interpretar como un término de frontera en una teoría 4-dimensional. Lo interesante es que, como también se vio en 4.2, la invarianza de la forma de Poyntragin conduce a la invarianza gauge de la acción de Chern-Simons. Es más, como se prueba en [35], esta acción coincide con la de Einstein-Hilbert en 2+1 dimensiones:

**Proposición 5.2.5 (Acción de Chern-Simons y acción de Einstein-Hilbert en 2+1 dimensiones).** La acción de Chern-Simons y la acción de Einstein-Hilbert coinciden en el caso de 2 + 1 dimensiones.

*Demostración.* Para ver esto, basta con probar que la diferencial del integrando de la acción de Einstein-Hilbert en 3 dimensiones 5.2.7 coincide con  $\int F^a \wedge F^b d_{ab}$ , ya que esta es la definición de la forma de Chern-Simons (ver sección 4.2). De manera desarrollada, el valor de  $\int F^a \wedge F^b d_{ab}$  sería:

$$\int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left( \underbrace{\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a}_{\text{término } \star} + \epsilon^{abc} \underbrace{(\omega_{\mu b} e_{\nu c} + e_{\mu b} \omega_{\nu c})}_{\text{término } \bullet} \right) \underbrace{(\partial_\sigma \omega_\rho^a - \partial_\rho \omega_\sigma^a + \epsilon_{ade} \omega_\sigma^d \omega_\rho^e)}_{\text{término } \star\star} \quad (5.2.19)$$

donde ya se ha usado la forma bilineal  $d_{ab}$  para multiplicar los generadores. Si se denota  $U$  a la 4-forma diferencial cuya expresión en coordenadas es el integrando de la ecuación anterior, entonces lo que se va a demostrar es que  $U = dV$ , siendo  $V$  una 3-forma cuya expresión en coordenadas es:

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma} \left( e_{\mu a} \underbrace{(\partial_\nu \omega_\sigma^a - \partial_\sigma \omega_\nu^a + \epsilon_{abc} \omega_\nu^b \omega_\sigma^c)}_{\text{término } \Delta} \right) \quad (5.2.20)$$

Si se deriva usando la regla del producto, está claro que la diferencial del *vierbein* por el término  $\Delta$  en la ecuación 5.2.20 dan lugar al producto de los términos  $\star$  y  $\star\star$ . Entonces,

bastaría con probar que el producto de *vierbein* por la diferencial de la forma que en coordenadas es  $\Delta$  dan lugar al resto de sumandos en la ecuación 5.2.19 (el otro sumando de la ecuación vendría de multiplicar  $\bullet$  por  $\star\star$ ). Las cuentas son más sencillas si se hacen en el lenguaje compacto de las formas, evitando tener que usar coordenadas. Entonces, usando  $e$  para referirse a la 1-forma del *vierbein*,  $\omega$  para referirse a la conexión de Lorentz,  $R$  para referirse a la curvatura dada por la conexión de Lorentz y  $F$  para la curvatura total (para el campo de gauge  $A_\mu$ , que viene dada por 5.2.18), se tiene que lo que se quiere probar es:

$$(de + \omega \wedge e + e \wedge \omega) \wedge R \stackrel{\text{por probar}}{=} d(e \wedge R) = de \wedge R + e \wedge dR \quad (5.2.21)$$

Con esta notación queda todo mucho más sencillo. El término  $\star$  se correspondería a la  $de$ , escrito en coordenadas. La parte  $\bullet$  sería  $(\omega \wedge e + e \wedge \omega)$  y  $\star\star$  y  $\Delta$  serían  $R$ . Entonces, ahora se tiene que probar que:

$$(\omega \wedge e + e \wedge \omega) \wedge R = e \wedge dR = e \wedge [\omega, R] \quad (5.2.22)$$

donde se ha usado la identidad de Bianchi general 3.3.20. Si se desarrolla el corchete, se obtiene:

$$(\omega \wedge e + e \wedge \omega) \wedge R = e \wedge [\omega, R] = e \wedge \omega \wedge R - e \wedge R \wedge \omega = e \wedge \omega \wedge R + e \wedge \omega \wedge R \quad (5.2.23)$$

donde se ha usado que, por ser la forma  $R$  de grado par, anticonmuta con  $e$ . Sacando factor común a  $R$  en el miembro de la izquierda, se obtiene lo que se quería. Con esto, se demuestra que la acción de Einstein-Hilbert y la acción de Chern-Simons efectivamente coinciden.  $\square$

### 5.2.6. Soluciones de la teoría

Es característico de la acción de Chern-Simons tener como solución conexiones planas:

**Proposición 5.2.6 (solución de la acción de Chern-Simons).** La solución clásica del funcional de Chern-Simons es la conexión plana:  $F = 0$ .

*Demostración.* Se sigue [18] (página 21). Se toma una familia uni-paramétrica de conexiones  $A_\epsilon = A + \epsilon B$ , donde  $B$  sea también una 1-forma  $\mathfrak{g}$ -valuada. Entonces:

$$\begin{aligned} S_{CS}(A_\epsilon) &= \frac{k}{4\pi} \int_M \text{tr} \left( (A + \epsilon B)(dA + \epsilon dB) + \frac{2}{3}(A + \epsilon B)^3 \right) \\ &= S_{CS}(A) + \epsilon \frac{k}{4\pi} \left( \int_M 2 \text{tr}(B \wedge F) - \int_M d(A \wedge B) \right) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

Al integrar esto a la variedad, se ve que la variación de la acción será igual a la integral de un término proporcional a  $F$  y otro término de frontera. Con condiciones frontera adecuadas [27], el término de frontera se puede ignorar, de modo que la acción será estacionaria para cada variación de  $\delta A = B$  si y solo si, la curvatura es 0. Es decir, la solución de la ecuación de Chern-Simons en 2+1 dimensiones es una conexión plana.  $\square$



Esto también implica que la solución es un **gauge puro**; es decir, un potencial que se relaciona con el potencial nulo por un cambio de gauge:  $A = g^{-1}dg$ , para un cierto  $g \in ISO(2, 1)$ . Para verlo, se sigue [27]. Se calcula  $d(g^{-1}g) = dg^{-1}g + g^{-1}dg = d(Id) = 0$ . Por tanto,  $dg^{-1} = -g^{-1}dg g^{-1}$ . Es decir:

$$dA = d(g^{-1}dg) = dg^{-1} \wedge dg = -g^{-1}dg g^{-1} \wedge dg = -A \wedge A \quad (5.2.25)$$

Por tanto,  $dA + A \wedge A = 0$ , lo que implica, usando la ecuación de estructura 3.2.7, que la curvatura es 0.

# Capítulo 6

## Conclusiones

Este trabajo pretendía ser una introducción a la formulación de las teorías gauge y algunos ejemplos, incluidos el **electromagnetismo**, la **teoría de Yang-Mills** y la **teoría gauge de Chern-Simons-Witten** de la gravedad en 2+1 dimensiones. A continuación se analiza cada uno de los anteriores:

1. **El electromagnetismo:** El electromagnetismo ha quedado satisfactoriamente analizado bajo el marco de las teorías gauge. Siendo el ejemplo más sencillo, se ha podido estudiar con toda profundidad, desde la invarianza gauge en el sentido clásico en la elección de los potenciales hasta la escritura de las ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de las formas y sus duales de Hodge. Se ha demostrado la existencia de una verdadera simetría de grupo  $U(1)$  a nivel cuántico, que se ha ligado con la simetría existente en la elección de los potenciales electromagnéticos. También ha servido de precedente para formular un primer Lagrangiano de teoría gauge, que más tarde sería tratado y generalizado en la sección 3.5.

En cuanto a la estructura matemática de la teoría, era bastante simple, por ser todos los fibrados triviales, lo que llevó a analizar el caso de los monopolos que, siendo un ejemplo también sencillo, permitió aplicar muchas partes de la teoría de fibrados principales e introducir las clases características.

2. **Yang-Mills** La generalización lógica del Lagrangiano electromagnético llevó a formular un Lagrangiano de Yang-Mills, cuya existencia quedaba garantizada siempre y cuando existiera una cierta forma bilineal en el álgebra de Lie del grupo que se pudiera interpretar como un producto interno, dando propiedades deseables a los términos cinéticos del Lagrangiano. Por otro lado, la teoría de Yang-Mills necesitaba de una **estructura fija:** se necesitaba una métrica predefinida en la variedad para poder definir el dual de Hodge y, consecuentemente, la acción de la teoría. Esto es en cierto modo, indeseable. Por ello, querer eliminar esta imposición sobre la métrica llevó de manera natural a emplear un Lagrangiano basado en la clase de Poynteragin 4.2, y del que se deducía un término frontera que podía interpretarse como una acción (cuasi) invariante gauge: la forma de Chern-Simons.
3. **La gravedad:** siendo la teoría más compleja de todas, no se ha podido formular en todo detalle. Aún así, el análisis hecho de la gravedad lleva a que:

- Se ha reproducido satisfactoriamente la gravedad como teoría gauge del grupo de Poincaré en 2+1 dimensiones. Los potenciales gauge se corresponden con la conexión de Lorentz y el vierbein.
- La teoría tenía como solución conexiones planas, como se ha demostrado. De hecho, esta teoría tampoco tiene grados de libertad que se propagan (ondas gravitacionales) [4] aunque sí que se ha demostrado recientemente que tiene soluciones de agujero negro [2] [17].

Algunas otras características de la teoría, aunque no se han podido analizar aquí, son:

- La teoría se generaliza de manera natural a dimensiones impares mayores, usando las clases de Chern [8]. Estas clases se pueden demostrar que también coinciden con la acción de Einstein-Hilbert incluso en dimensiones distintas de 3.
- La teoría es resoluble analíticamente a nivel cuántico [36], [35].

# Bibliografía

- [1] ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Physics Letters B*, 716(1):1–29, September 2012.
- [2] Máximo Bañados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. The Black Hole in Three Dimensional Space Time. *Physical Review Letters*, 69(13):1849–1851, September 1992. arXiv: hep-th/9204099.
- [3] John Baez and Javier P. Muniain. *Gauge fields, knots and Gravity*, volume 4 of *Series on Knots and Everything 4*. World Scientific, 1994.
- [4] Maximo Banados, Luis J. Garay, and Marc Henneaux. The local degrees of freedom of higher dimensional pure Chern-Simons theories. *arXiv:hep-th/9506187*, June 1995. arXiv: hep-th/9506187.
- [5] Ugo Bruzzo. Gauge Theory: from Physics to Geometry. *Rendiconti dell’Istituto di Matematica dell’Università di Trieste*, 42, 2011.
- [6] Rubén Calvo Ibáñez. Formulación Matemática de las Teorías de Gauge. *Universidad de Valladolid*, 2020.
- [7] D. Camarero, J. A. de Azcarraga, and J. M. Izquierdo. Bosonic D=11 supergravity from a generalized Chern-Simons action. *Nuclear Physics B*, 923:633–652, October 2017. arXiv: 1706.08772.
- [8] A.H. Chamseddine. Topological gauge theory of gravity in five and all odd dimensions. *Physics Letters B*, 233(3-4):291–294, December 1989.
- [9] Yvonne Choquet-Bruhat and Cecile Dewitt-Morette. *Analysis, manifolds and physics. Part II*, volume Part 2. Elsevier, rev. and enl. ed edition, 2000.
- [10] Tulsi Dass. Gauge fields, space-time geometry and gravity. *Pramana*, 23(4):433–443, October 1984.
- [11] José A. De Azcárraga and J. M. Izquierdo. *Lie Groups, Lie Algebras, Cohomology and some Applications in Physics*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [12] Paul Adrien Maurice Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field,. *Royal Society*, Volume 133(Issue 821):13, September 1931.
- [13] Hanson Eguchi Gilkey. *Gravitation, gauge theories and differential geometry*. PR. 1980.

- 
- [14] Albert Einstein. The field equations of Gravitation. *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 844-847, November 1915.
- [15] Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck. *Instantons and Four-Manifolds*, volume 1 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Springer US, New York, NY, 1984.
- [16] Mark J.D. Hamilton. *Mathematical Gauge Theory*. Universitext. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [17] Mokhtar Hassaine and Jorge Zanelli. *Chern-Simons (super) gravity*. Number vol. 2 in 100 years of general relativity. World Scientific, New Jersey ; London ; Singapore ; Beijing ; Shanghai ; Hong Kong ; Taipei ; Chennai ; Tokyo, 2016. OCLC: ocn930486482.
- [18] Sen Hu and Edward Witten. *Lecture Notes on CHERN-SIMONS-WITTEN THEORY*. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [19] Bert Janssen. *Teoría de la Relatividad General*. Universidad de Granada - Spain, September 2019.
- [20] Gregory L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge Fields: Interactions*, volume 141 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlang, 1991.
- [21] Jeffrey M. Lee. *Manifolds and differential geometry*. Number v. 107 in Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2009. OCLC: ocn317623289.
- [22] K. Moriyasu. *An Elementary Primer For Gauge Theory*. World Scientific Publishing Company, 1983.
- [23] Gregory L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge fields: Foundations*, volume 25 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer New York, New York, NY, 2011.
- [24] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Institute of Physics Publishing, June 2003.
- [25] Lochlainn O’Raifeartaigh and Norbert Straumann. Gauge theory: Historical origins and some modern developments. *Reviews of Modern Physics*, 72(1):1–23, January 2000.
- [26] J. G. Pereira. Lorentz Connections and Gravitation. *arXiv:1210.0379 [gr-qc, physics:hep-th]*, pages 239–259, 2012. arXiv: 1210.0379.
- [27] Stefan Prohazka. Chern-Simons Holography: Boundary Conditions, Contractions and Double Extensions for a Journey Beyond Anti-de Sitter. *arXiv:1710.11110 [hep-th]*, October 2017. arXiv: 1710.11110.
- [28] Barbara Roos. Principal bundles, Hopf bundles and Eigenbundles. *ETH Zürich*, 2018.
- [29] Gerd Rudolph and Matthias Schmidt. *Differential Geometry and Mathematical Physics: Part II. Fibre Bundles, Topology and Gauge Fields*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Netherlands, Dordrecht, 2017.

- 
- [30] Mark R. Sepanski. *Compact Lie groups*. Number 235 in Graduate texts in mathematics. Springer, New York, N.Y., 2007. OCLC: ocm77530142.
- [31] Ya M. Shnir. *Magnetic monopoles*. Texts and monographs in physics. Springer, Berlin & New York, 2005. OCLC: ocm61430002.
- [32] Wu-Ki Tung. *Group theory in physics*. World Scientific, Philadelphia, 1985.
- [33] Ryoyu Utiyama. Invariant Theoretical Interpretation of Interaction. *Physical Review*, 101(5):1597–1607, March 1956.
- [34] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation (Physics Series)*. W. H. Freeman, first edition edition, 1973.
- [35] Edward Witten. 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B*, 311(1):46–78, December 1988.
- [36] Edward Witten. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. *Commun. Math. Phys.*, 121, 1989.
- [37] Edward Witten. Chern-Simons Gauge Theory As A String Theory. *arXiv:hep-th/9207094*, December 2003. arXiv: hep-th/9207094.
- [38] Edward Witten. Three-Dimensional Gravity Revisited. *arXiv:0706.3359 [hep-th]*, June 2007. arXiv: 0706.3359.
- [39] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, 96(1):191–195, October 1954.
- [40] Jeffrey Yopez. Einstein’s vierbein field theory of curved space. *arXiv:1106.2037 [gr-qc, physics:physics]*, June 2011. arXiv: 1106.2037.
- [41] Jorge Zanelli. LECTURE NOTES ON CHERN-SIMONS (SUPER-)GRAVITIES. page 82.
- [42] Jorge Zanelli. Chern-Simons Gravity: From 2+1 to 2n+1 Dimensions. 30(2), June 2000.
- [43] Jorge Zanelli. Chern–Simons forms in gravitation theories. *Classical and Quantum Gravity*, 29(13):133001, July 2012.