

Las matemáticas en el mundo de los fractales. Dinámica compleja.

Teoremas de linealización de difeomorfismos y holonomía.

Alumna: JULIA GARCÍA NÓ
Tutor: Felipe Cano Torres



Memoria de fin de Grado
Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Valladolid

Índice general

Índice general	1
Introducción	3
Estructura de la memoria	3
1 Holonomía de una foliación	5
2 Resultados de linealización de difeomorfismos	19
2.1. Teorema de Poincaré	21
2.2. Teorema del dominio invariante	23
2.3. Teorema de linealización de Siegel	24
3 Teorema de la Flor	39
A Conjuntos de Julia y Mandelbrot. Experimentos	45
A.1. Programa para generar la imagen del fractal de Mandelbrot	49
A.2. Programas para generar las imágenes de los conjuntos de Julia	51
A.3. Programa para generar las imágenes de los conjuntos mencionados en el teorema de la flor	56
Bibliografía	61

Introducción

La dinámica compleja discreta, iteración de difeomorfismos holomorfos, ha adquirido una relevancia reciente desde la posibilidad de visualizar los conjuntos fractales que produce, como los conjuntos de Julia o el de Mandelbrot, mediante el uso intensivo de los ordenadores. Estas imágenes desafían a los matemáticos para que produzcan resultados teóricos, en general difíciles, como los estudios realizados por A. Douady sobre la conexidad de los mismos, o estructuras descubiertas (erizos) por R. Pérez Marco en lo relativo a difeomorfismos no linealizables.

De hecho un capítulo importante de la teoría, con raíces en la mecánica celeste es el problema de la linealización de difeomorfismos en presencia de pequeños divisores, al cual han contribuido Brjuno, Siegel, Moser, Yoccoz, Pérez-Marco y otros. El núcleo central de esta memoria consiste en dar una demostración del teorema de linealización de Siegel, bajo las habituales condiciones diofánticas relativas a la parte lineal. Al mismo tiempo recuperamos otros teoremas de linealización más clásicos como el teorema de linealización de Poincaré y el teorema del dominio invariante.

En lo concerniente a los difeomorfismos tangentes a la identidad, es obvio que no son linealizables excepto si son la identidad, damos una descripción topológica clásica de la dinámica en el teorema de la flor de Leau-Fatou.

La memoria comienza con una serie de cálculos de holonomía, que son la base de la relación entre los difeomorfismos de una variable (sistemas dinámicos discretos en una variable) y los sistemas dinámicos continuos en espacios ambiente de dimensión dos definidos por el flujo de campos de vectores, más concretamente, la holonomía se refiere a la foliación asociada, que es el resultado de olvidar el módulo de la velocidad en las trayectorias.

Lógicamente esta memoria solo es una puerta entreabierta al difícil mundo de los pequeños denominadores y también al de los sistemas dinámicos continuos en dimensión dos, muy relacionados con los difeomorfismos individualmente o con los grupos de difeomorfismos vía la holonomía de las hojas de una foliación. Esperamos en un futuro adentrarnos en alguno de estos temas.

Estructura de la memoria

Esta memoria consta de tres capítulos y un anexo experimental:

En el primer capítulo se desarrollarán ideas conducentes a los conceptos de foliación y holonomía, por medio de ejemplos significativos. Se indicará la prueba de Mattei y Moussu de que la linealizabilidad de la holonomía determina la de la fo-

liación en las llamadas sillas reales, punto de partida para el estudio vía la holonomía de las foliaciones.

En el segundo capítulo se estudiarán los resultados de linealización de Poincaré, del dominio invariante y de Siegel, centrándonos especialmente en dar una prueba detallada de este último, a partir de las referencias citadas en dicho capítulo.

En el tercer capítulo se presentará el teorema de la Flor de Leau y Fatou, que nos servirá para entender el comportamiento de los difeomorfismos tangentes a la identidad, que no son linealizables salvo el caso de la identidad.

Por último, en el anexo experimental se presentarán las definiciones los conjuntos de Julia y Mandelbrot para la iteración de funciones holomorfas. Se exhibirá su naturaleza fractal mediante ejemplos generados por programas de ordenador escritos por esta alumna, cuyo código asimismo se incluye.

Capítulo 1

Holonomía de una foliación

Foliaciones en superficies y holonomía de una proyección transversal

Intuitivamente, una foliación no singular por curvas de una superficie S es una partición del espacio en curvas no singulares contenidas en la superficie, con un criterio de continuidad, diferenciabilidad o analiticidad. La idea es válida tanto para el caso de superficies reales como para el de superficies complejas (localmente homeomorfas a \mathbb{C}^2). Las curvas de la partición se llaman hojas y pueden no estar “inmersas” en el espacio, sino simplemente ser la imagen $\phi(H)$ de una aplicación inyectiva

$$\phi : H \rightarrow S$$

donde H es una curva.

Un ejemplo significativo es la foliación del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ por curvas siguiendo una rotación de ángulo irracional $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Las hojas son las imágenes de

$$\phi_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

para $z = \exp(2\pi i\alpha)$, donde

$$\phi_z(t) = (\exp(2\pi it), \exp(2\pi i(\alpha + \theta t))) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

Obsérvese que cada hoja es densa en el toro. Podemos verlo en la figura 1.1.

Consideremos la primera proyección

$$\text{pr}_1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1; \quad (u, v) \mapsto u$$

las fibras de pr_1 son todas isomorfas a \mathbb{S}^1 y transversales a las hojas de la foliación. Tomemos un punto base $1 \in \mathbb{S}^1$. Dados un punto $(1, z) \in \text{pr}_1^{-1}(1)$ y cualquier camino

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

que comienza en $1 \in \mathbb{S}^1$, existe un único *levantamiento* $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$, que es un camino que cumple las siguientes propiedades

- (1) $\tilde{\gamma}(0) = (1, z)$.

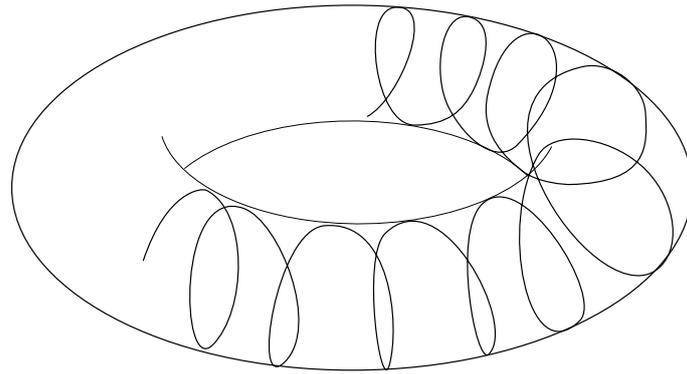


Figura 1.1: Toro y hoja de la foliación

(2) $\tilde{\gamma}(t)$ está en la hoja que pasa por $(1, z)$.

(3) $\text{pr}_1(\tilde{\gamma}) = \gamma$.

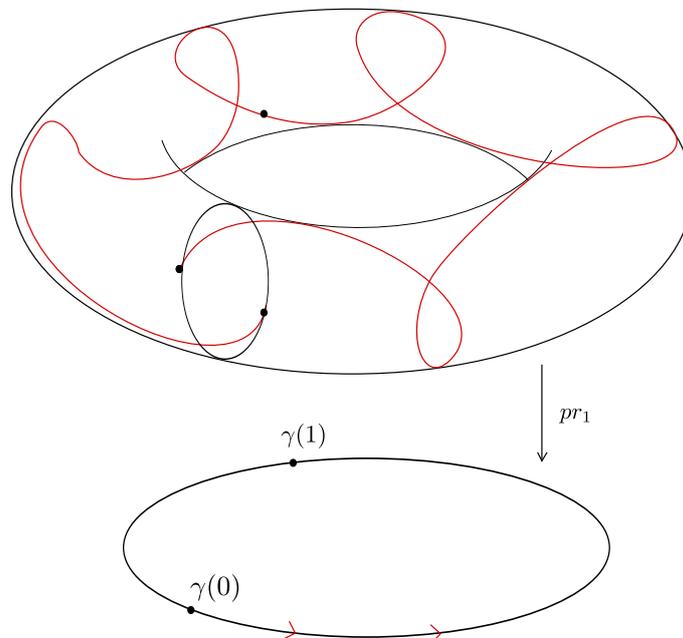
La aplicación

$$h_\gamma : (1, z) \mapsto \tilde{\gamma}(1) \in \text{pr}_1^{-1}(\gamma(1)),$$

se llama *aplicación de holonomía asociada a γ* . Es muy significativo el caso del camino

$$\sigma(t) = \exp(2\pi it),$$

cuya aplicación de holonomía es la rotación de ángulo θ , como automorfismo de la fibra $\mathbb{S}^1 = \text{pr}_1^{-1}(1)$.



En términos generales es posible definir la holonomía respecto de una fibración transversal a una foliación, como puede verse por ejemplo en [3], pero no entraremos aquí en más detalles.

Foliación dada por un campo de vectores sin puntos de equilibrio

Consideremos un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$ y dos funciones holomorfas $f(x, y), g(x, y)$ definidas en U sin ceros comunes en el abierto U . La ecuación diferencial autónoma (en tiempo complejo s)

$$\frac{dx}{ds} = f(x, y); \quad \frac{dy}{ds} = g(x, y) \quad (1.1)$$

se interpreta como el *campo de vectores* que en cada punto (x_0, y_0) de U selecciona el vector tangente de coordenadas

$$(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)).$$

El teorema de existencia y unicidad de solución para un problema de Cauchy [4] dice que dado $(x_0, y_0) \in U$ existe un disco abierto $\mathbb{D}(0, \epsilon) \subset \mathbb{C}$ y una aplicación

$$\gamma : \mathbb{D}(0, \epsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{C}^2; \quad s \mapsto (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$$

tal que se cumplen las siguientes propiedades

1. $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.
2. Para todo $s \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$ se tiene que

$$\gamma'(s) = (\gamma_1'(s), \gamma_2'(s)) = (f(\gamma(s)), g(\gamma(s))).$$

Además tenemos el siguiente resultado de unicidad que no probaremos

Proposición 1.1. *Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{D}(0, \tilde{\epsilon}) \rightarrow U$ cumple que $\alpha(0) = (x_0, y_0)$ y que*

$$\alpha'(s) = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s)) = (f(\alpha(s)), g(\alpha(s))), \quad s \in \mathbb{D}(0, \tilde{\epsilon}),$$

entonces $\alpha(s) = \gamma(s)$, para $0 \leq |s| < \min\{\epsilon, \tilde{\epsilon}\}$.

Se dice que γ es una *curva integral por el punto (x_0, y_0) del campo de vectores* dado por la ecuación (1.1). La condición de unicidad se puede interpretar diciendo que el *germen de γ es único*, pero no detallaremos esto.

Supongamos ahora que se tiene otro punto $(x_1, y_1) \in U$ que está en la imagen de γ , es decir, existe $s_1 \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$ tal que $\gamma(s_1) = (x_1, y_1)$. Sea $\tilde{\epsilon} = \epsilon - |s_1|$ y consideremos la aplicación

$$\beta : \mathbb{D}(0, \tilde{\epsilon}) \rightarrow U; \quad \beta(s) = \gamma(s + s_1).$$

Tenemos que $\beta(0) = (x_1, y_1)$, $\beta'(s) = \gamma'(s + s_1) = (f(\beta(s)), g(\beta(s)))$ y por consiguiente β es una curva integral pasando por (x_1, y_1) . Esta propiedad justifica las definiciones que siguen

Definición 1.2. *La imagen $\gamma(\mathbb{D}(0, \epsilon))$ de una curva integral γ se llamará placa de la foliación asociada al campo de vectores. Diremos que dos puntos (x, y) y (\tilde{x}, \tilde{y}) están en la misma hoja si existe una sucesión finita de placas $P_0, P_1, P_2, \dots, P_N$ tales que*

$$(x, y) \in P_0, (\tilde{x}, \tilde{y}) \in P_N$$

y se tiene que $P_{i-1} \cap P_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2, \dots, N$. Cada clase de equivalencia por la relación “estar en la misma hoja” se llamará una hoja de la foliación.

El hecho de que la relación “estar en la misma hoja” sea una relación de equivalencia, es inmediato de la definición.

Hasta ahora no tenemos una idea clara de cómo son las placas y las hojas en realidad. Para precisar esta descripción, usaremos la hipótesis que hasta ahora hemos mantenido silente: el hecho de que suponemos que el campo de vectores *no tiene puntos de equilibrio*, es decir que para todo $(x, y) \in U$ o bien $f(x, y) \neq 0$ o bien $g(x, y) \neq 0$. Obsérvese que en un punto de equilibrio la curva integral que pasa por ese punto es constante y de hecho la “hoja” correspondiente sería el conjunto formado por ese único punto. Estos puntos se llaman también *puntos singulares* del campo.

La descripción que pretendemos se basa en el siguiente resultado clásico de dependencia de las condiciones iniciales, cuya prueba suponemos asimismo conocida

Proposición 1.3. *Dado un punto $(x_0, y_0) \in U$ existen un abierto $V \subset U$ con $(x_0, y_0) \in V$, un radio $\epsilon > 0$ y una aplicación holomorfa*

$$F : V \times \mathbb{D}(0, \epsilon) \rightarrow U$$

tal que para todo $(x, y) \in V$ la aplicación

$$\gamma_{(x,y)}(s) : \mathbb{D}(0, \epsilon) \rightarrow U$$

dada por $\gamma_{(x,y)}(s) = F((x, y), s)$, es una curva integral que pasa por el punto (x, y) .

Vamos ahora a construir lo que se llama una *caja de flujo* alrededor de un punto. Tomemos $(x_0, y_0) \in U$ y supongamos que

$$f(x_0, y_0) \neq 0.$$

(si se tiene que $g(x_0, y_0) \neq 0$ y $f(x_0, y_0) = 0$, procederíamos de manera simétrica, intercambiando los papeles de las coordenadas). Denotemos por x, y, s las coordenadas en $V \times \mathbb{D}(0, \epsilon)$. Consideremos la inclusión

$$\sigma : \mathbb{D}(0, \epsilon') \times \mathbb{D}(0, \epsilon') \rightarrow V \times \mathbb{D}(0, \epsilon)$$

dada por $\sigma(u, v) = ((x_0, y_0 + u), v)$, definida para $\epsilon' \leq \epsilon$ suficientemente pequeño. Ahora consideramos la aplicación

$$c = F \circ \sigma : \mathbb{D}(0, \epsilon') \times \mathbb{D}(0, \epsilon') \rightarrow U.$$

El cálculo de la matriz jacobiana de c en el origen da

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial u}(0, 0) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, 0) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, 0) \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(0, 0) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial s}(x_0, y_0, 0) \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(0, 0) = (0, 1) \\ \frac{\partial c}{\partial v}(0, 0) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, 0) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, 0) \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(0, 0) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial s}(x_0, y_0, 0) \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(0, 0) = (f(x_0, y_0), g(x_0, y_0)). \end{aligned}$$

El determinante de esta matriz es precisamente $-f(x_0, y_0) \neq 0$.

Se concluye, por el teorema de la función inversa, que c es localmente inversible en (x_0, y_0) , más precisamente, existe un $\epsilon'' > 0$ con $\epsilon'' \leq \epsilon'$ tal que la imagen

$$C = (\mathbb{D}(0, \epsilon'') \times \mathbb{D}(0, \epsilon'')) \subset U$$

es un abierto de U y la aplicación c define un biholomorfismo

$$c : \mathbb{D}(0, \epsilon'') \times \mathbb{D}(0, \epsilon'') \rightarrow C.$$

Nótese que para cada v_0 con $|v_0| < \epsilon''$ el conjunto

$$c(\mathbb{D}(0, \epsilon'') \times \{v_0\}) \subset U$$

es una placa.

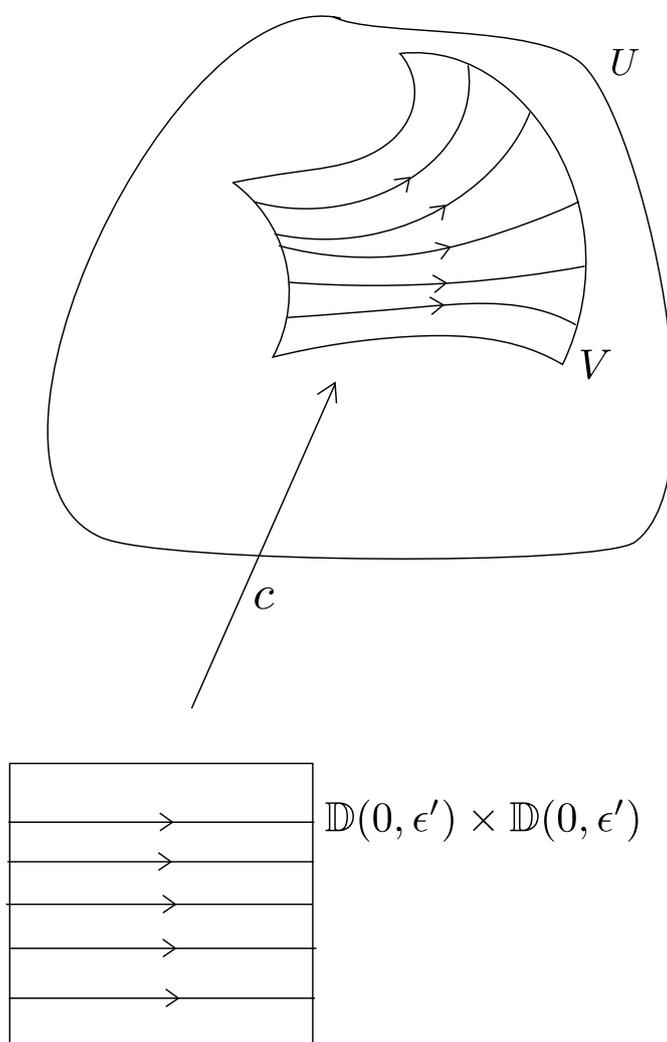


Figura 1.2: Cajas de flujo

Los conjuntos como el C antes construidos se llaman *cajas de flujo*. En cierto modo la foliación está dada por el dato de todas las cajas de flujo. Las hojas se pueden construir “pasando de una caja de flujo a otra”. La formalización de este paso determina el llamado *pseudo-grupo de holonomía*, que no detallaremos aquí.

Foliación singular

Una *foliación singular* \mathcal{F} sobre un abierto $U \subset \mathbb{C}^2$ está dada por un campo de vectores

$$\xi = f(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

que es un dato equivalente a la ecuación diferencial (1.1). Exigiremos que los ceros comunes a f y g sean puntos aislados y estos serán las singularidades de la foliación. Fuera del lugar singular tenemos, como en la sección anterior, hojas y cajas de flujo, en definitiva una foliación en sentido usual.

Una observación importante es la siguiente, si consideramos una función $h(x, y)$ que no se anula nunca, el campo

$$h(x, y)\xi = (h(x, y)f(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + (h(x, y)g(x, y)) \frac{\partial}{\partial y}$$

define el mismo lugar singular y la misma partición del espacio U en hojas. Se tiene definida por tanto la misma foliación \mathcal{F} . Este hecho es consecuencia de la siguiente proposición

Proposición 1.4. *Supongamos que $\gamma : \mathbb{D}(0, \epsilon) \rightarrow U$ es una curva integral del campo ξ . Entonces existe una aplicación holomorfa localmente invertible*

$$\alpha : \mathbb{D}(0, \epsilon') \rightarrow \mathbb{D}(0, \epsilon)$$

con $\alpha(0) = 0$ tal que $\gamma \circ \alpha$ es una curva integral de $h(x, y)\xi$.

Demostración. Sabemos que $\gamma'(s) = (f(\gamma(s)), g(\gamma(s)))$. Planteemos la ecuación diferencial cuya incógnita es la aplicación α

$$(\gamma \circ \alpha)'(s) = h((\gamma \circ \alpha)(s)) (f((\gamma \circ \alpha)(s)), g((\gamma \circ \alpha)(s))).$$

Es equivalente a decir que

$$\alpha'(s)\gamma'(\alpha(s)) = h((\gamma(\alpha(s))) (f((\gamma(\alpha(s))), g((\gamma(\alpha(s))))))$$

Substituyendo $\gamma'(\alpha(s))$, tenemos que resolver

$$\alpha'(s) = h((\gamma(\alpha(s))) = (h \circ \gamma)(\alpha(s)).$$

Esta última es una ecuación diferencial autónoma en la variable α , que tiene una solución única con el valor inicial $\alpha(0) = 0$. El hecho de que α sea localmente invertible en el origen se sigue de que

$$\alpha'(0) = h(\gamma(0)) \neq 0.$$

□

Definición 1.5. *Sea $G(x, y)$ una función definida en U y consideremos la curva $G = 0$. Diremos que $G = 0$ es una curva invariante de la foliación \mathcal{F} si y solamente si es unión de hojas y de puntos singulares.*

Consideremos ahora el caso del polidisco $U = \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$. Tenemos la siguiente caracterización

Proposición 1.6. *Sea $U = \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$ y consideremos la foliación singular dada por el campo de vectores*

$$\xi = f(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Son equivalentes

1. *La curva $y = 0$ es invariante.*
2. *El coeficiente $g(x, y)$ es divisible por y , esto es $g(x, y) = y\tilde{g}(x, y)$.*

Demostración. Supongamos que la curva $y = 0$ sea invariante y consideremos un punto no singular $(x_0, 0)$ de esta curva. Sea γ una curva integral de ξ que pase por $(x_0, 0)$. Como $y = 0$ es invariante, debe contener la placa asociada a γ , es decir

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), 0)$$

para todo s del dominio de definición de γ . En particular $\gamma_2(s) = \gamma_2'(s) = 0$. Pero como $(x_0, 0)$ es un punto no singular de la foliación, se tiene que $\gamma'(0) \neq 0$ y por consiguiente la imagen de γ contiene infinitos puntos $(\gamma_1(s), 0)$ acumulándose en $(x_0, 0)$. Para todos esos puntos se debe tener que

$$g(\gamma(s)) = g(\gamma_1(s), 0) = \gamma_2'(s) = 0.$$

Esto ya implica que y divide la serie $g(x, y)$.

Recíprocamente, supongamos que $g(x, y) = y\tilde{g}(x, y)$ y sea γ una curva integral que pasa por $(x_0, 0)$. Tenemos que $\gamma_2(s)$ satisface la ecuación

$$\gamma_2'(s) = \gamma_2(s)\tilde{g}(\gamma(s)); \gamma_2(0) = 0.$$

Si escribimos $\gamma_2(s) = \sum_{n \geq 1} a_n s^n$ como serie convergente de potencias, la ecuación anterior dice que existe otra serie de potencias $\beta(s) = \sum_{n \geq 0} b_n s^n$ tal que

$$\sum_{n \geq 1} n a_n s^{n-1} = \left(\sum_{n \geq 1} a_n s^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n s^n \right).$$

Igualando los coeficientes del término de grado más bajo, concluimos que la única posibilidad es que $\gamma_2(s) = 0$ y por consiguiente la correspondiente placa esté contenida en $y = 0$. □

Cambios de coordenadas y parte lineal

Consideremos en

$$U = \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$$

la foliación singular \mathcal{F} dada por el campo de vectores

$$\xi = f(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sea

$$\Phi : U' = \mathbb{D}(0, r') \times \mathbb{D}(0, r') \rightarrow U = \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$$

una aplicación biholomorfa sobre su imagen $\Phi(U')$ tal que $\Phi(0) = 0$. Tal aplicación se denominará *cambio local de coordenadas en el origen de U* . Escribamos

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)); \quad \Phi^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

El *cambio de coordenadas de \mathcal{F} por Φ* será por definición la foliación $\Phi^*\mathcal{F}$ sobre U' definida por el campo de vectores

$$\xi^* = f^*(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + g^*(u, v) \frac{\partial}{\partial v},$$

donde las funciones f^* y g^* están definidas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} f^*(u, v) &= f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + g(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \\ g^*(u, v) &= f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + g(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

La siguiente propiedad se obtiene como aplicación directa de la regla de la cadena

Proposición 1.7. *Sea $\gamma^* : \mathbb{D}(0, \epsilon) \rightarrow U'$ una aplicación holomorfa y denotemos $\gamma = \Phi \circ \gamma^*$. Son equivalentes*

1. γ es una curva integral de ξ en $\gamma(0)$.
2. γ^* es una curva integral de ξ^* en $\gamma^*(0)$.

Supongamos ahora que la foliación \mathcal{F} tiene el origen como punto singular. Entonces podemos escribir

$$f(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + \tilde{f}(x, y); \quad g(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + \tilde{g}(x, y)$$

donde $\tilde{f}(x, y)$ y $\tilde{g}(x, y)$ expresados como series de potencias tienen todos sus términos de grado mayor o igual que dos. La matriz

$$M_\xi = (a_{ij})$$

recibe el nombre de *matriz de la parte lineal de ξ* . Diremos que ξ es un *campo lineal* si $\tilde{f} = \tilde{g} = 0$.

Observación 1.8. *El problema de linealización de una foliación \mathcal{F} en el origen consiste en encontrar, si ello es posible, un cambio de coordenadas Φ tal que $\Phi^*\mathcal{F}$ esté dada por un campo lineal.*

La matriz de la parte lineal de un campo se comporta por cambios de coordenadas como una equivalencia de matrices. Esto es, se puede considerar que se trata de la matriz de un endomorfismo de un espacio vectorial. Veámoslo. Escribamos el cambio de coordenadas de la forma

$$u(x, y) = b_{11}x + b_{12}y + \tilde{u}(x, y); \quad v(x, y) = b_{21}x + b_{22}y + \tilde{v}(x, y)$$

con el mismo criterio notacional anterior. Por ser un cambio de coordenadas, el determinante de la matriz jacobiana es no nulo, esto es

$$\text{Det}(b_{ij}) \neq 0.$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$M_{\Phi^*\mathcal{F}} = (b_{ij})^{-1}M_{\mathcal{F}}(b_{ij}).$$

En particular, salvo cambio de coordenadas, siempre podemos suponer la matriz de la parte lineal de un campo en forma normal de Jordan.

Holonomía de sillias reales

No hemos definido con total precisión la holonomía de una variedad invariante, tampoco lo haremos aquí, nos contentaremos de efectuar un “cálculo de holonomía” para un caso muy significativo tratado en el trabajo fundacional [8] de J. F. Mattei y R. Moussu. Consideraremos un campo de vectores de la forma

$$\xi = x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda(1 + A(x, y))y \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.2)$$

definido en $\mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$ y supondremos que

1. El autovalor λ es un número real $\lambda < 0$ no racional.
2. La función holomorfa $A(x, y)$ se anula en el origen y se tiene que

$$|A(x, y)| < 1/2$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$.

Diremos que la foliación singular asociada a ξ es una *silla real*. La razón de elegir este ejemplo aparentemente tan particular es que se trata del “caso difícil” respecto del problema de la linealización una vez realizada la reducción de singularidades de Seidenberg [14], que no detallaremos aquí. Para más detalles se remite al lector al artículo original de Mattei y Moussu [8].

Una observación muy importante es que la proyección

$$\text{pr} : \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r) \rightarrow \mathbb{D}(0, r); \quad (x, y) \mapsto x = \text{pr}((x, y))$$

tiene todas las fibras $\text{pr}^{-1}(x)$ transversales a la foliación, excepto la fibra especial $\text{pr}^{-1}(0)$ que es invariante. La transversalidad se expresa diciendo que las placas cortan transversalmente a la fibra en cada punto. Esto se ve observando que la recta tangente a la placa que pasa por el punto (x, y) está generada por el vector

$$(x, \lambda(1 + A(x, y))y)$$

dado por el campo de vectores.

Un punto $x_0 \in \mathbb{D}(0, r)^* = \mathbb{D}(0, r) \setminus \{0\}$ está determinado por sus coordenadas polares $(\rho_0, t_0) \in (0, r) \times \mathbb{R}$, a través de la aplicación recubridora

$$\phi : (0, r) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}(0, r)^*; \phi(\rho_0, t_0) = \rho_0 \exp(2\pi i t_0).$$

Recordamos que (ρ_0, t_0) y (ρ', t'_0) son coordenadas polares del mismo punto si y solo si $\rho'_0 = \rho_0$ y $t'_0 - t_0 \in \mathbb{Z}$.

Consideremos coordenadas polares (ρ_0, t_0) y escribamos $x_0 = \rho_0 \exp(2\pi i t_0)$. Fijemos asimismo una cota $y_0 \in \mathbb{D}(0, r)$. Nos proponemos definir la *imagen de holonomía del punto* (x_0, y_0) sobre la transversal

$$(x = x_0) = \text{pr}^{-1}((x_0, 0))$$

y referida al lazo

$$\sigma_{\rho_0, t_0}(t) = (\rho_0 \exp(2\pi i(t + t_0)), 0); \quad t \in [0, 1].$$

Señalemos que la imagen de σ_{ρ_0, t_0} es la circunferencia centrada en el origen y de radio ρ contenida en $y = 0$, que contiene el punto

$$(x_0, 0) = \sigma_{\rho_0, t_0}(0) = \sigma_{\rho_0, t_0}(1).$$

Consideremos el problema de Cauchy, con la función $h_{\rho_0, t_0, y_0}(t)$ como incógnita, definido por

$$h'(t) = 2\pi i \lambda (1 + A(\rho_0 e^{2\pi i(t+t_0)}, h(t))) h(t); \quad h(0) = y_0. \quad (1.3)$$

Para simplificar notación, escribimos $h(t) = h_{\rho_0, t_0, y_0}(t)$ si no hay confusión posible.

Sabemos que el problema de Cauchy dado por la ecuación (1.3) siempre tiene solución, definida en un entorno $(-\epsilon, \epsilon')$ del cero de \mathbb{R} . Sea $\gamma_{\rho, t_0, y_0}(t)$ el camino levantado de $\sigma_{\rho_0, t_0}(t)$ definido por

$$\gamma_{\rho, t_0, y_0}(t) = (\rho_0 \exp(2\pi i(t + t_0)), h(t)).$$

Nótese que

$$\gamma_{\rho, t_0, y_0}(0) = (x_0, y_0).$$

Observación 1.9. *Tenemos que $\gamma_{\rho_0, t_0+1, y_0}(t) = \gamma_{\rho_0, t_0, y_0}(t)$, en particular, la notación $\gamma_{x_0, y_0}(t) = \gamma_{\rho_0, t_0, y_0}(t)$ tiene sentido.*

Definición 1.10. *Diremos que la holonomía está definida en (x_0, y_0) si se tiene $\epsilon' > 1$ y además $h(t) \in \mathbb{D}(0, r)$ para $t \in [0, 1]$. En este caso, definimos la imagen $H_{x_0}(y_0)$ de y_0 por la aplicación de holonomía por*

$$H_{x_0}(y_0) = h(1).$$

Es decir, se tiene $\gamma_{x_0, y_0}(1) = (x_0, H_{x_0}(y_0))$.

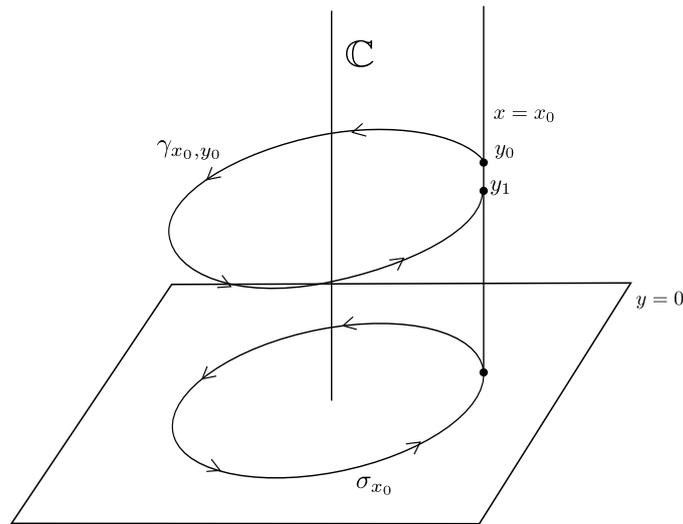


Figura 1.3: Construcción de la holonomía

Observación 1.11. La imagen del camino $\gamma_{x_0, y_0}(t)$ está localmente contenida en una placa, en efecto su vector tangente es

$$\gamma'_{x_0, y_0}(t) = 2\pi i \xi(\gamma_{x_0, y_0}(t))$$

y por tanto la curva compleja $\alpha(s) = \gamma_{x_0, y_0}(s/2\pi i)$ (definiciones evidentes) es una curva integral del campo ξ . Así pues, por conexión, la imagen de $\gamma_{x_0, y_0}(t)$ está contenida en la hoja que pasa por (x_0, y_0) en particular el punto

$$(x_0, H_{x_0}(y_0))$$

es el punto de esta hoja “después de dar una vuelta sobre el camino σ ”.

Nota del director: Esta es la idea central de la holonomía, que tiene un cierto parecido con la elevación de caminos en un revestimiento. Este parecido se convierte en una identificación, gracias al enfoque de J.F. Mattei a través del haz de gérmenes de integrales primeras, tema en el que no entraremos.

Proposición 1.12. Si el campo ξ es lineal, es decir si $A = 0$, la holonomía está definida en $\mathbb{D}(0, r)^* \times \mathbb{D}(0, r)$ y es la aplicación lineal dada por

$$H_{x_0}(y) = \exp(2\pi i \lambda)y.$$

Demostración. La solución del problema de Cauchy (1.3) es $h(t) = y_0 \exp(2\pi i \lambda(t + t_0))$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y, como $|h(t)| = |y_0|$, se sigue que $h(t) \in \mathbb{D}(0, r)$. \square

El resultado clásico de existencia y unicidad de solución y dependencia analítica respecto de condiciones iniciales [4] y parámetros tiene como consecuencia la existencia de holonomía para

$$|y_0| < \epsilon_1, \quad 0 < r/2 - \epsilon_2 < |x_0| < r/2 + \epsilon_2,$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$. Más aún, se puede asegurar que dado cualquier t con $-1 \leq t \leq 1$ la holonomía en tiempo t

$$H^{(t)}(x_0, y_0) = \gamma_{x_0, y_0}(t) = (x_1, y_1)$$

está definida y la aplicación $(x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1)$ es localmente biholomorfa.

Linealización por la holonomía

. Daremos aquí un resumen de los argumentos de Mattei y Moussu para probar que la linealización de la holonomía implica la de la foliación en el caso tratado. Más precisamente, supongamos que tenemos dos foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{F}_1 definidas respectivamente por campos de vectores ξ y ξ_1 que se escriben

$$\xi = x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda(1 + A(x, y))y \frac{\partial}{\partial y}; \quad \xi_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \mathbb{Q}$ y ambos están definidos en $\mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$. Suponemos además que $A(0, 0) = 0$ y que $|A| < 1/2$ en $\mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$. Fijamos el punto $x_0 = r/2$ y consideramos la holonomía de \mathcal{F}

$$H_{x_0} : \mathbb{D}(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{D}(0, r).$$

Vamos a suponer que H_{x_0} está conjugada a la rotación $z \mapsto \exp(2\pi i \lambda)z$, que es la holonomía de \mathcal{F}_1 . Esto es, existe un biholomorfismo

$$\phi : \mathbb{D}(0, \epsilon') \rightarrow U \subset \mathbb{D}(0, \epsilon'); \quad \phi(z) = z + z^2(\dots)$$

tal que $H_{x_0}(U) = U$ y además se tiene que $\phi^{-1} \circ H_{x_0} \circ \phi(z) = \exp(2\pi i \lambda)z$. Deseamos ver que, en estas condiciones, la foliación \mathcal{F} está holomórficamente conjugada a la foliación \mathcal{F}_1 en un entorno del origen. Más precisamente, deseamos ver que existe un abierto $W \subset \mathbb{C}^2$ que contiene el origen y un biholomorfismo $\Phi : W \rightarrow W'$ de la forma

$$\Phi(x, y) = (x, \psi(x, y)); \quad \psi(0, 0) = 0,$$

tal que

1. $W, W' \subset \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$.
2. El biholomorfismo Φ envía hojas de \mathcal{F} en hojas de \mathcal{F}_1 . Esto es equivalente a decir que el cambio de coordenadas dado por Φ aplicado a ξ da precisamente ξ_1 (dada la forma de Φ).

El hecho de que la holonomía esté conjugada a la rotación nos permite definir un primer biholomorfismo que transforma ξ en un campo cuya holonomía es precisamente la holonomía lineal

$$H_{x_0}(z) = \exp(2\pi i \lambda)z.$$

Ahora, para probar que la linealización de la holonomía permite linealizar la foliación, es suficiente mostrar el siguiente

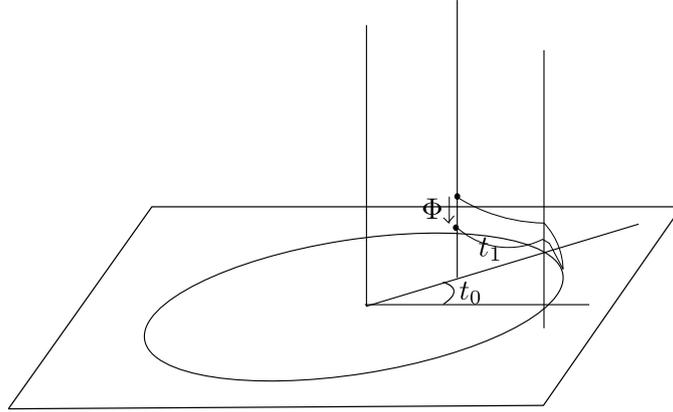
Teorema 1.13. *En las condiciones anteriores, supongamos que la holonomía de \mathcal{F} es la holonomía lineal*

$$H_{x_0}(z) = \exp(2\pi i \lambda)z.$$

Entonces existe un abierto $W \subset \mathbb{C}^2$ que contiene el origen y un biholomorfismo $\Phi : W \rightarrow W'$ de la forma

$$\Phi(x, y) = (x, \psi(x, y)); \quad \psi(0, 0) = 0,$$

tal que $W, W' \subset \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{D}(0, r)$ y Φ envía hojas de \mathcal{F}_1 en hojas de \mathcal{F} .

Figura 1.4: Construcción de Φ

Demos una idea de la prueba del teorema anterior. La construcción de Φ se hará primero considerando una aplicación

$$\Phi_1 : \{|x| = r/2\} \times \mathbb{D}(0, \epsilon) \rightarrow \{|x| = r/2\} \times W_1$$

con la propiedad deseada. Definimos $\Phi_1(x, y)$ siguiendo en tiempo inverso la hoja de la foliación lineal \mathcal{F}_1 que pasa por (x, y) hasta la fibra de x_0 y después aplicando el camino de holonomía de \mathcal{F} . Más precisamente, supongamos que

$$x = \exp(2\pi it), t \in [0, 1).$$

consideramos $y_0 = \exp(-2\pi it)y$ y definimos

$$\Phi_1(x, y) = (x, \gamma_{x_0, y_0}(t)).$$

Está claro que (x, y) está en la misma hoja de \mathcal{F}_1 que (x_0, y_0) y asimismo $\Phi_1(x, y)$ está en la misma hoja de \mathcal{F} que (x_0, y_0) . La continuidad y correspondiente holomorfía de Φ_1 (en cada fibra), se sigue de que la holonomía H_{x_0} está dada por la misma rotación que la holonomía de \mathcal{F}_1 .

Ahora la idea es extender Φ_1 a una aplicación Φ holomorfa y acotada en

$$W \setminus (x = 0),$$

que por el teorema de las singularidades evitables se extiende a una aplicación holomorfa en todo W . Esto se hará siguiendo el campo radial real como detallamos a continuación.

Para cada ángulo $t_0 \in [0, 1)$ consideramos el camino radial

$$\alpha_{t_0}(t) = \frac{r}{2} e^{-t} \exp(2\pi i t_0); \quad t \in [0, \infty).$$

Dado $t_1 > 0$ e $y_1 \in \mathbb{D}(0, r)$ consideramos el *camino levantado a las hojas de la foliación*

$$\tilde{\alpha}_{t_0, t_1; y_1}(t) = (\alpha_{t_0}(t), g_{t_0, t_1; y_1}(t))$$

definido por las condiciones siguientes

1. $g_{t_0, t_1; y_1}(t_1) = y_1$.
2. El vector tangente $\tilde{\alpha}'_{t_0, t_1; y_1}(t)$ es proporcional al vector $\xi(\tilde{\alpha}_{t_0, t_1; y_1}(t))$, es decir,

$$g'(t) = -\lambda g(t)(1 + a(t)),$$

donde $a(t) = A(e^{-t} \exp(2\pi i t_0))$, $g_{t_0, t_1; y_1}(t)$ y hemos escrito $g(t) = g_{t_0, t_1; y_1}(t)$ para aligerar la notación.

Se trata de nuevo de un problema de Cauchy, que tiene solución única $g(t)$. Consideremos la función real de variable real $G(t) = |g(t)|^2$, es decir

$$G(t) = g(t)\bar{g}(t).$$

Derivando, tenemos

$$\begin{aligned} G'(t) &= g(t)\bar{g}'(t) + g'(t)\bar{g}(t) = \\ &g(t) [-\lambda\bar{g}(t)(1 + \bar{a}(t))] + [-\lambda g(t)(1 + a(t))]\bar{g}(t) = \\ &-\lambda G(t) [(2 + \bar{a}(t)) + a(t)]. \end{aligned}$$

Nótese que la función real $\bar{a}(t) + a(t) = 2\text{Re}(a(t))$ tiene módulo menor o igual que 1 dada la hipótesis sobre el módulo de $A(x, y)$, por consiguiente, dado que si $y_1 \neq 0$ se tiene $g(t_1) \neq 0$, la ecuación diferencial

$$G'(t) = -\lambda G(t) [(2 + \bar{a}(t)) + a(t)]$$

nos dice que la solución $G(t)$ es creciente (derivada positiva, pues $-\lambda > 0$). En particular, la solución $g(t)$ es creciente en módulo. Dicho de otro modo $g(t_1 - u)$ es decreciente en módulo.

Ahora procedemos como sigue. Consideramos el abierto

$$W = \mathbb{D}(0, r/2) \times \mathbb{D}(0, \delta)$$

y vamos a definir la imagen $\Phi(x, y)$ de un elemento $(x, y) \in \mathbb{D}(0, r/2)^* \times \mathbb{D}(0, \delta)$. Supongamos que

$$x = t_1 \exp(2\pi i t_0).$$

Ahora construimos

$$(x_2, y_2) = \tilde{\alpha}_{t_0, t_1; y}(0)$$

que está definido en $\mathbb{D}(0, r/2) \times \mathbb{D}(0, r/2)$ dado que $g(t)$ es creciente en módulo. Seguimos (x_2, y_2) por la holonomía en tiempo inverso de \mathcal{F} hasta la fibra de $(r/2, 0)$ y después avanzamos por la holonomía de \mathcal{F}_1 hasta la fibra de $(x_2, 0)$ para obtener

$$(x_3, y_3) = \Phi_1^{-1}(x_2, y_2).$$

Finalmente avanzamos por la holonomía de \mathcal{F}_1 levantando el camino radial hasta la fibra de $(x, 0)$, es decir, construimos

$$(x_4, y_4) = \Phi(x, y).$$

La construcción asegura que se envían hojas de \mathcal{F} en hojas de \mathcal{F}_1 , la continuidad está asegurada por la de Φ_1 y, salvo detalles que se pueden consultar en [8], hemos construido la conjugación linealizadora deseada.

Capítulo 2

Resultados de linealización de difeomorfismos

Las matemáticas son una herramienta muy utilizada en el estudio de los fenómenos físicos. En este contexto, llamaremos sistema dinámico a un sistema físico en el cual se pueden observar variaciones a lo largo del tiempo de ciertas magnitudes que podemos medir. En este proyecto vamos a estudiar una serie de resultados que afectan a una clase particular de problemas de este tipo. En concreto, sistemas dinámicos discretos locales definidos por un difeomorfismo

$$f : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$$

Donde U y V son entornos de un punto $m \in \mathbb{C}$ tal que $f(m) = m$. En estos sistemas, dado $x_0 \in U$, la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ se denomina órbita positiva de x_0 ; nótese que puede ser finita si, para algún n , $f(x_n) \notin U$, o equivalentemente $f^n(x_0) \notin U$.

Vamos a comenzar por definir de forma más concreta la base teórica sobre la que trabajaremos:

Definición 2.1. *Dadas dos aplicaciones holomorfas $f : U \rightarrow V$ y $g : U' \rightarrow V'$, se dice que son equivalentes en un punto m si existe un entorno W de m con $W \subseteq U \cap U'$ tal que $f|_W = g|_W$. Esta relación se denomina germificación en m . Llamamos germen a la clase de equivalencia para esta relación.*

En lo que sigue llamaremos *sistema dinámico* a una aplicación holomorfa $f : U \rightarrow V$, con $U, V \subseteq \mathbb{C}$ entornos del origen y $f(0) = 0$. En ocasiones reemplazaremos esta aplicación por una equivalente por la relación de germificación en el origen. Al conjunto de sistemas dinámicos tal como los hemos definido lo denotaremos por $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Observamos que los elementos de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ pueden componerse indefinidamente, aun cuando para algunos puntos las órbitas se salgan del dominio de definición.

Veamos algunos ejemplos de sistemas dinámicos locales:

Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}$ entornos del origen. Definimos el sistema dinámico f por:

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow V \\ z &\mapsto 2z \end{aligned}$$

Siguiendo la definición que hemos dado, f es un sistema dinámico (local alrededor del origen). Podemos observar que, si tomamos $U = V = B(0, 1)$, toda órbita que comience en $x_0 \in B(0, 1) \setminus \{0\}$ se sale de U y por tanto es finita.

Por otra parte, consideramos la translación g :

$$g : U \rightarrow V$$

$$z \mapsto z + 1$$

Aparentemente g no tiene un punto fijo, pero si aplicamos el cambio de coordenadas

$$w = \Phi(z) = \frac{1}{z}$$

tenemos que:

$$G(w) = \Phi(g(\Phi^{-1}(w)))$$

$$= \Phi\left(g\left(\frac{1}{w}\right)\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{w} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{1+w}{w}}$$

$$= \frac{w}{w+1}$$

G tiene un punto fijo en el origen, luego g tiene un punto fijo en ∞ y es un sistema dinámico local alrededor de ∞ en P^1 , la recta proyectiva compleja.

Los resultados que vamos a estudiar en esta sección son los referidos a la linealización de difeomorfismos. Es decir, estudiamos distintas situaciones en las que pueden ser o no linealizables. La importancia de estos resultados se debe al comportamiento de los sistemas dinámicos lineales, en comparación con los no lineales. Para empezar, veamos a qué nos referimos con estos términos:

Definición 2.2. Diremos que f es lineal si es de la forma $f(x) = \lambda x$. Diremos que es linealizable si existe un difeomorfismo $\Phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})(z) = \lambda z$. Entonces, diremos que la aplicación Φ es un cambio de coordenadas linealizador.

Lo veremos más claramente en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})(z) = \lambda z} & \mathbb{C} \end{array}$$

donde f y Φ están definidas en entornos del origen.

Además, cuando un difeomorfismo es linealizable, cumplirá una serie de propiedades que nos serán útiles a la hora de estudiar nuestros resultados:

Proposición 2.3. Sea $f, \Phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, con $\Phi(0) = f(0) = 0$. Si $f'(0) = \lambda$, entonces $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})'(0) = \lambda$.

Demostración. La demostración es sencilla. Sea $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})'(0) = \mu$. Entonces, derivando $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})'(0) = \mu$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\Phi'(f(\Phi^{-1}(0))) f'(\Phi^{-1}(0)) \Phi^{-1}'(0) &= \mu \\ \Phi'(0) \lambda \Phi^{-1}'(0) &= \mu \\ \lambda &= \mu\end{aligned}$$

□

Necesitamos, ahora, entender las consecuencias de que un difeomorfismo sea linealizable, y las consecuencias de que no lo sea.

Cuando un sistema es lineal, es decir, es de la forma $x_{n+1} = \lambda x_n$, se ve fácilmente que la forma general de un término cualquiera es $x_n = \lambda^n x_0$. Además, si es linealizable, tenemos que existe un Φ tal que $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})(z) = \lambda z$, y, componiendo $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})$, tenemos que $(\Phi \circ f^n \circ \Phi^{-1})(z) = \lambda^n z$. De este modo, si conocemos Φ , podemos calcular fácilmente x_n para cualquier n .

Por otro lado, si estamos ante el caso de una aplicación f no linealizable, nos encontramos con situaciones como la de los conjuntos de Julia y Mandelbrot, que se verán al final de esta memoria.

2.1. Teorema de Poincaré

El primer teorema que vamos a estudiar es el conocido como teorema de linealización de Poincaré, cuyo enunciado es el que vemos a continuación.

Teorema 2.4. *Todo germen de difeomorfismo $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $|f'(0)| \neq 1$ es linealizable.*

Demostración. Sea $\lambda = f'(0)$. Si $|\lambda| > 1$, podemos encontrar un cambio de coordenadas linealizador para f^{-1} en su lugar, que tiene derivada $1/\lambda$ en 0. Por tanto, podemos reducirnos al caso donde $|\lambda| < 1$.

Sea μ tal que $0 < \mu^2 < |\lambda| < \mu$. Tomamos un representante $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, con \mathbb{D} un disco tal que para todo $z \in \mathbb{D}$, $\mu^2 |z| < |f(z)| < \mu |z|$.

Consideramos ahora la sucesión de funciones $g_n = \frac{f^n}{\lambda^n}$, y su límite la aplicación

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^n(z)}{\lambda^n}\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que esta aplicación está bien definida, lo que es equivalente a demostrar que la sucesión converge, y es un cambio de coordenadas que linealiza a f , es decir, $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})(z) = \lambda z$.

Vamos a empezar por demostrar que el límite está bien definido. Para ello, utilizaremos el criterio de convergencia uniforme de Cauchy, es decir, demostraremos

que, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq n_0$, $|g_n(z) - g_m(z)| \leq \varepsilon$. Para ello, encontraremos una cota para $|g_n(z) - g_m(z)|$. Para empezar, tomamos $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $|f(z) - \lambda z| \leq \delta|z|^2$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 |f^n(z) - \lambda^n z| &= \left| \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} f^k(z) - \lambda f^{k-1}(z) \right| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |\lambda|^{n-k} |f^k(z) - \lambda f^{k-1}(z)| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |\lambda|^{n-k} \delta |f^{k-1}(z)|^2 \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |\lambda|^{n-k} \delta \mu^{2(k-1)} |z|^2 \\
 &\leq \delta |\lambda|^{n-1} |z|^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\mu^2}{|\lambda|} \right)^{k-1} \\
 &= C |\lambda|^n |z|^2
 \end{aligned}$$

donde $C = \frac{\delta}{|\lambda| - \mu^2}$. Se deduce que

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{f^{n+p}(z)}{\lambda^{n+p}} - \frac{f^n(z)}{\lambda^n} \right| &= \frac{|f^p(f^n(z)) - \lambda^p f^n(z)|}{|\lambda|^{n+p}} \\
 &\leq \frac{C |\lambda|^p |f^n(z)|^2}{|\lambda|^n |\lambda|^p} \\
 &\leq \frac{C |f^n(z)|^2}{|\lambda|^n} \\
 &\leq C |z|^2 \left(\frac{\mu^2}{|\lambda|} \right)^n \\
 &\leq C \left(\frac{\mu^2}{|\lambda|} \right)^n
 \end{aligned}$$

Además, dado que $\mu^2 < \lambda$, tenemos que $\frac{\mu^2}{|\lambda|} < 1$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon \geq C \left(\frac{\mu^2}{|\lambda|} \right)^n$ para cualquier $n \geq n_0$, y, tomando $n, m \in \mathbb{N}$ con $n_0 < n < m$, tenemos que

$$|g_n(z) - g_m(z)| \leq C \left(\frac{\mu^2}{|\lambda|} \right)^n \leq \varepsilon$$

con lo que se cumple el criterio de Cauchy.

Tan sólo falta demostrar que Φ linealiza a f . Sabemos que $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 1$.

Además, para todo $z \in \mathbb{D}$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\Phi \circ f)(z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^n(f(z))}{\lambda^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda \frac{f^{n+1}(z)}{\lambda^{n+1}} \\ &= \lambda \Phi(z) \end{aligned}$$

y Φ es entonces el cambio de coordenadas linealizador que buscábamos. \square

2.2. Teorema del dominio invariante

El segundo resultado que vamos a estudiar se denomina teorema del dominio invariante.

Teorema 2.5. *Sea $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tal que $|f'(0)| = 1$, definida en un disco $B(0, \rho)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(1) *el germen f es linealizable.*

(2) *existe un abierto simplemente conexo V tal que $0 \in V \subseteq B(0, \rho)$ y $f(V) = V$.*

Demostración. Comenzamos suponiendo que el germen f es linealizable. Entonces, existe una función Φ tal que $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})(z) = \lambda z$, con $|\lambda| = 1$. Por tanto, $(\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})$ es una rotación. Entonces:

$$\begin{aligned} (\Phi \circ f \circ \Phi^{-1})(B(0, \rho)) &= B(0, \rho) \iff \\ \Phi(f(\Phi^{-1}(B(0, \rho)))) &= B(0, \rho) \iff \\ f(\Phi^{-1}(B(0, \rho))) &= \Phi^{-1}(B(0, \rho)) \end{aligned}$$

Y $V = \Phi^{-1}(B(0, \rho))$ es el abierto que buscábamos.

Ahora, suponemos que existe un abierto simplemente conexo V tal que $0 \in V \subseteq B(0, \rho)$ y $f(V) = V$. Según el teorema de representación conforme, existe una aplicación Φ holomorfa y biyectiva $\Phi : V \rightarrow B(0, 1)$, y, en particular, con $\Phi(0) = 0$. Designamos

$$g = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$$

Esta función g puede escribirse de la forma

$$g(z) = \lambda z U(z)$$

donde $\lambda = f'(0) = g'(0)$ y $U(0) = 1$, según hemos visto en la proposición 2.3. Como la imagen de g está contenida en $B(0, 1)$, para todo $z \in B(0, 1)$ tenemos que

$$|g(z)| = |z| |U(z)| \leq 1$$

Si tomamos un representante de g cuyo dominio contenga a $\bar{B}(0, 1)$, veremos que g alcanza su máximo en $\bar{B}(0, 1)$ en la frontera de este conjunto, y del mismo modo lo hace U . $|z| = 1$ en todos los puntos de la frontera. Por lo tanto, $|U(z)| \leq 1$ para todo $z \in B(0, 1)$. Pero sabemos que $U(0) = 1$. Entonces, como consecuencia del teorema del módulo máximo, U es constante y $g(z) = \lambda z$ para $z \in B(0, 1)$, y Φ es nuestro cambio de variable linealizador. \square

2.3. Teorema de linealización de Siegel

Números diofánticos

Un número real $\theta \in \mathbb{R}$ se dice que es *diofántico* si y solamente si existen dos constantes positivas $\delta > 0$ y $c > 0$ tales que para cualquier número racional $p/q \in \mathbb{Q}$ expresado como cociente de enteros con $q > 0$ se tiene que

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c^\delta}{q}.$$

Por definición, un número diofántico no puede ser racional. De hecho, la condición anterior supone en cierto modo que los números diofánticos se encuentran “alejados de los números racionales”.

Existen resultados de existencia de tales números, por ejemplo

Teorema 2.6 (Liouville). *Sea $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un número algebraico raíz de un polinomio*

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

con coeficientes enteros $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ y que no tenga raíces racionales. Existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c^n}{q}.$$

para todo número racional p/q , donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q > 0$.

Demostración. Es suficiente probar la acotación para números racionales p/q con $q \geq 2$ y tales que $|p/q - \theta| < 1$. Tenemos

$$0 \neq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{|a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_0 q^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}.$$

Aplicando el teorema del valor medio, existe un $\xi \in \mathbb{R}$ tal que

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = P\left(\frac{p}{q}\right) - P(\theta) = \left(\frac{p}{q} - \theta\right) P'(\xi)$$

donde ξ está comprendido entre θ y $\frac{p}{q}$. Tenemos que $|\xi| < 1 + |\theta|$. Sea $1/c > 0$ una cota superior de $|P'(x)|$ para $x \in [\theta - 1, \theta + 1]$. Se sigue que

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| = \frac{|P(\frac{p}{q})|}{|P'(\xi)|} \geq c/q^n,$$

como queríamos demostrar. □

(Esta prueba ha sido tomada de un texto de Alejandro Luque en [7].)

Asimismo, existen números no racionales y no diofánticos, que deberán ser forzosamente trascendentes, es decir no algebraicos, en virtud del teorema anterior. Una variante de la construcción del conjunto triádico de Cantor nos permite probar la existencia de una cantidad no numerable de números reales no diofánticos,

como indicamos a continuación. Dados enteros p, q con $1 \leq p \leq q - 1$ con $q \geq 3$ consideremos los intervalos cerrados

$$I_q^p = \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^q} \right] \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Nótese que $I_q^p \cap I_q^{p'} = \emptyset$ si $p \neq p'$. Más aún, dado $q \geq 3$ existe $q' > q$ tal que para cualquier p con $1 \leq p \leq q - 1$ hay dos enteros p' y p'' con $1 \leq p' < p'' \leq q' - 1$, tales que

$$I_{q'}^{p'} \subset I_q^p \supset I_{q'}^{p''}.$$

Escribamos $J_1 = I_3^1 = [1/3 - 1/27, 1/3 + 1/27]$, que denotaremos $J_1 = I(1)$. Para comenzar una inducción, hagamos $q_1 = 3$ y $p(1) = 1$. A continuación, definiremos por inducción los denominadores q_1, q_2, \dots, q_n , los compactos J_n y los intervalos

$$I(1; \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n) = I_{q_n}^{p(1; \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n)}; \quad \epsilon_i \in \{0, 1\}$$

como sigue. Sea $q_{n+1} > q_n$ tal que para cada p con $1 \leq p \leq q_n - 1$ existen al menos dos enteros p' y p'' con $1 \leq p' < p'' \leq q_{n+1} - 1$, tales que

$$I_{q_{n+1}}^{p'} \subset I_{q_n}^p \supset I_{q_{n+1}}^{p''}.$$

Ahora, para cada $p(1; \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ seleccionamos dos de tales puntos

$$p' = p(1; \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n, 0), \quad p'' = p(1; \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 1).$$

Finalmente hacemos

$$J_n = \bigcup_{\epsilon_i \in \{0,1\}; i=2,3,\dots,n+1} I_{q_{n+1}}^{p(1; \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n, \epsilon_{n+1})}.$$

De este modo tenemos una sucesión encajada de compactos

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots$$

cuya intersección T es no numerable, por el argumento clásico del conjunto triádico de Cantor.

Proposición 2.7. *Todo elemento θ de T incumple la condición diofántica.*

Demostración. Sea $\theta \in T$. Si θ es racional, ya sabemos que no es diofántico. Supongamos que se tuviera la condición diofántica

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq c/q^\delta.$$

Seleccionemos un denominador q_n tal que $q_n \geq \delta + 1$ y tal que $c > 1/q_n$. Sabemos que $\theta \in I_{q_n}^{p(1; i_2, i_3, \dots, i_n)}$ para cierto $p = p(1; i_2, i_3, \dots, i_n)$. Entonces se tiene que

$$\left| \theta - \frac{p}{q_n} \right| < 1/q_n^{q_n} = (1/q_n)(1/q_n^{q_n-1}) < c/q_n^\delta.$$

Por tanto θ no puede ser diofántico. □

Proposición 2.8. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número real y escribamos $\lambda = \exp(2\pi i\theta)$. Decir que θ es diofántico es equivalente a decir que existe una constante $c' > 0$ y un entero positivo $\mu \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que*

$$|\lambda^p - 1| \geq \frac{c'}{p^{\mu-1}}, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Demostración. Recodemos que dado que la cuerda y el arco son infinitésimos equivalentes, existen constantes $c'', c''' > 0$ tales que para cualquier ξ con $-1 \leq \xi \leq 1$ se tiene

$$c'''|\xi| \geq |\exp(2\pi i\xi) - 1| \geq c''|\xi|.$$

Supongamos primero que θ es diofántico. Sabemos que existen constantes $c > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$|\theta - r/p| \geq c/p^\delta.$$

para cualquier número racional r/p con $p > 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\delta \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Elijamos ahora un entero r tal que $\xi = p(\theta - r/p)$ sea de módulo $|\xi| \leq 1$ y escribamos

$$\lambda^p = \exp(2\pi i(p\theta - r)) = \exp(2\pi ip(\theta - r/p)).$$

Tenemos que

$$|\lambda^p - 1| \geq c''|p(\theta - r/p)| \geq c''c/p^{\delta-1}.$$

Basta tomar $\mu = \delta$ y $c' = c''c$.

Recíprocamente, supongamos que λ cumple las condiciones del enunciado. Tomemos un racional r/p con $p > 0$. Elijiendo si es preciso $c < 1$ y $\delta \geq 1$ es suficiente considerar el caso de que $|\theta - r/p| \leq 1/p$. Entonces se cumple

$$c'''p|\theta - r/p| \geq |\lambda^p - 1| \geq \frac{c'}{p^{\mu-1}}$$

y es suficiente tomar $c = c'/c'''$ y $\delta = \mu$. □

Corolario 2.9. *Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un número real y escribamos $\lambda = \exp(2\pi i\theta)$. Decir que θ es diofántico es equivalente a decir que existe una constante $c' > 0$ y un entero positivo $\mu \in \mathbb{Z}_{>0}$ tales que*

$$|\lambda^p - \lambda| \geq \frac{c'}{(p-1)^{\mu-1}}, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$$

Demostración. Es suficiente observar que $|\lambda| = 1$ y por consiguiente $|\lambda^p - \lambda| = |\lambda^{p-1} - 1|$. □

La condición expresada en el corolario anterior es la que usaremos en el resto de la sección.

Enunciado del teorema de linealización de Siegel

En esta sección demostraremos el siguiente resultado

Teorema 2.10 (Teorema de linealización de Siegel). *Consideremos un germen de difeomorfismo $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ con $|f'(0)| = 1$. Escribamos $f'(0) = \lambda = \exp(2\pi i\theta)$. Si θ es un número diofántico, entonces f es un germen linealizable.*

Seguiremos esencialmente la prueba del libro [15] de Moser y Siegel en la versión que aparece en el libro [3]. El esquema de la demostración es el siguiente. Buscamos un cambio de coordenadas linealizador Φ , es decir un germen de difeomorfismo, que tomaremos tangente a la identidad, de la forma

$$\Phi(z) = z + z^2(\dots)$$

tal que

$$\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi(z) = \lambda z,$$

para todo z en un entorno suficientemente pequeño del origen.

Para todo germen de difeomorfismo $g : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ escribiremos

$$g(z) = g'(0)z + \tilde{g}(z),$$

donde $\tilde{g}(z)$ tiene un cero de orden mayor o igual que dos en el origen. Así el difeomorfismo linealizador Φ se escribirá

$$\Phi(z) = z + \tilde{\Phi}(z).$$

Asimismo escribiremos $f(z) = \lambda z + \tilde{f}(z)$. Por otro lado, Φ debe cumplir la siguiente condición

$$f(z + \tilde{\Phi}(z)) = \Phi(\lambda z) = \lambda z + \tilde{\Phi}(\lambda z).$$

Es decir

$$f(z + \tilde{\Phi}(z)) = \lambda z + \lambda \tilde{\Phi}(z) + \tilde{f}(z + \tilde{\Phi}(z)) = \lambda z + \tilde{\Phi}(\lambda z).$$

Dicho de otro modo, la ecuación funcional que determinará $\tilde{\Phi}(z)$ y por tanto $\Phi(z)$ es la siguiente

$$\tilde{f}(z + \tilde{\Phi}(z)) = \tilde{\Phi}(\lambda z) - \lambda \tilde{\Phi}(z). \quad (2.1)$$

Esta ecuación funcional (llamada *ecuación de Schröder*, véase [16]) se resolverá por medio de un procedimiento iterativo basado en una nueva ecuación funcional que aproxima (2.1). Damos a continuación una descripción formal del método iterativo, el resto de las subsecciones se dedicará a probar el sentido convergente de este método y que efectivamente produce un difeomorfismo linealizador Φ .

Comenzamos escribiendo $\tilde{f}_0(z) = \tilde{f}(z)$, $f_0(z) = \lambda z + \tilde{f}_0(z) = f(z)$. Usaremos \tilde{f}_0 para producir una primera aproximación al difeomorfismo linealizador, que denotaremos $\Psi_1(z) = z + \tilde{\Psi}_1(z)$. Obtendremos $\tilde{\Psi}_1(z)$ como la única solución posible de orden dos de la ecuación

$$\tilde{f}_0(z) = \tilde{\Psi}_1(\lambda z) - \lambda \tilde{\Psi}_1(z). \quad (2.2)$$

Esta ecuación es una aproximación de la ecuación funcional (2.1) y la base del procedimiento iterativo. A continuación, modificamos $f_0(z)$ para obtener

$$f_1(z) = \lambda z + \tilde{f}_1(z)$$

utilizando Ψ_1 como conjugante

$$f_1(z) = (\Psi_1^{-1} \circ f_0 \circ \Psi_1)(z).$$

Repetimos el procedimiento para obtener $\Psi_2(z) = z + \tilde{\Psi}_2(z)$ como la única solución posible de la ecuación

$$\tilde{f}_1(z) = \tilde{\Psi}_2(\lambda z) - \lambda \tilde{\Psi}_2(z).$$

Repetimos. Definimos pues $f_n(z) = \lambda z + \tilde{f}_n(z)$ y $\Psi_{n+1}(z) = z + \tilde{\Psi}_{n+1}(z)$ haciendo que

$$f_n(z) = (\Psi_n^{-1} \circ f_{n-1} \circ \Psi_n)(z); \quad \tilde{f}_n(z) = \tilde{\Psi}_{n+1}(\lambda z) - \lambda \tilde{\Psi}_{n+1}(z).$$

Una vez justificado este procedimiento iterativo y probada su validez en entornos adecuados del origen, definimos

$$\Phi_n = \Psi_1 \circ \Psi_2 \circ \cdots \circ \Psi_n.$$

Nótese que $f_n(z) = (\Phi_n^{-1} \circ f \circ \Phi_n)(z)$. Finalmente probaremos que las sucesiones de funciones $\{\Phi_n\}$, $\{\Phi_n^{-1}\}$ convergen uniformemente en un entorno del origen hacia Φ , Φ^{-1} y asimismo la sucesión

$$f_n \rightarrow (z \mapsto \lambda z), \quad \text{uniformemente.}$$

Se concluirá que $(\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi)(z) = \lambda z$ en el entorno común de las citadas convergencias.

A continuación realizaremos en las subsecciones que siguen el control de los entornos en los que nuestros objetos están definidos y se tienen las deseadas convergencias, justificando todos los pasos del esquema formal anterior.

La base de la iteración

Ya hemos indicado que la ecuación funcional (2.2) es la base del procedimiento iterativo. El siguiente lema garantiza la validez de la utilización de (2.2) para producir $\tilde{\Psi}_n$ a partir de \tilde{f}_{n-1} .

Lema 2.11. *Sean $\rho > 0$ un número real y $\mathbb{D}(0, \rho) \subset \mathbb{C}$ el disco cerrado de centro el origen y radio ρ . Consideremos una función holomorfa*

$$\alpha : \mathbb{D}(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$$

definida en un entorno de $\mathbb{D}(0, \rho)$, que tenga un cero de orden mayor o igual que dos en el origen. Entonces, existe una única función holomorfa

$$\beta : \mathbb{D}(0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$$

definida en un entorno de $\mathbb{D}(0, \rho)$, con un cero de orden mayor o igual que dos en el origen tal que se cumple la relación funcional

$$\alpha(z) = \beta(\lambda z) - \lambda \beta(z).$$

Demostración. La función α está descrita de manera unívoca por la suma de una serie de potencias

$$\sum_{n \geq 2} \alpha_n z^n$$

cuyo radio de convergencia es mayor que ρ . Caso de existir, la función β también debe estar descrita por una serie de potencias que denotaremos

$$\hat{\beta} = \sum_{n \geq 2} \beta_n z^n.$$

Más aún, la relación funcional debe ser cierta a nivel formal de series de potencias y si la serie $\hat{\beta}$ tiene radio de convergencia mayor que ρ , entonces β es necesariamente la suma de $\hat{\beta}$ en $\mathbb{D}(0, \rho)$. Veamos primero la unicidad de $\hat{\beta}$. La relación funcional en términos de series de potencias equivale a decir que

$$\sum_{n \geq 2} \alpha_n z^n = \sum_{n \geq 2} (\lambda^n - \lambda) \beta_n z^n.$$

Tenemos la hipótesis de que $\lambda = \exp(2\pi i \theta)$ con θ es diofántico. En particular $\lambda^n - \lambda \neq 0$ para todo $n \geq 2$. Esto permite encontrar una solución única $\hat{\beta}$ dada por

$$\hat{\beta} = \sum_{n \geq 2} \frac{\alpha_n}{\lambda^n - \lambda} z^n.$$

Para concluir, es suficiente demostrar que el radio de convergencia de $\hat{\beta}$ es mayor o igual que ρ . Recordéese que, por la condición diofántica, tenemos

$$\frac{1}{|\lambda^n - \lambda|} \leq \frac{1}{c'} (n-1)^{\mu-1}$$

para cada $n \geq 2$, donde $\mu \geq 1$ es un número entero. Así pues, una serie mayorante de $\hat{\beta}$ es la serie de coeficientes positivos

$$\sigma(t) = \sum_{n \geq 2} |\alpha_n| \frac{1}{c'} (n-1)^{\mu-1} t^n.$$

Con el fin de calcular su radio de convergencia r' utilizaremos el criterio de d'Alembert. Tenemos

$$\frac{1}{r'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \right) \left(\frac{(n-1)^{\mu-1}}{n^{\mu-1}} \right).$$

Sabemos que

$$\frac{1}{\rho} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \right); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n-1)^{\mu-1}}{n^{\mu-1}} \right) = 1.$$

Se sigue que $r' > \rho$, como queríamos demostrar. \square

Acotaciones derivadas de la fórmula de Cauchy

Recogemos en esta sección algunas acotaciones conocidas, derivadas de la fórmula de Cauchy que serán usadas en la prueba de la convergencia del procedimiento iterativo.

Consideremos una función holomorfa

$$h : \mathbb{D}(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$$

definida en un entorno del disco cerrado $\mathbb{D}(0, r)$ de centro el origen y radio $r > 0$. Denotaremos

$$M(r; h) = \max\{|h(z)|; z \in \mathbb{D}(0, r)\}.$$

Por el principio del módulo máximo, sabemos que

$$M(r; h) = \max\{|h(z)|; |z| = r\}.$$

Proposición 2.12. *Supongamos que $\tilde{h}(z)$ es holomorfa, definida en un entorno de $\mathbb{D}(0, r)$ y con un cero de orden mayor o igual que dos en el origen. Escribamos $\tilde{h}(z)$ y su derivada $\tilde{h}'(z)$ como series de potencias*

$$\tilde{h}(z) = \sum_{j \geq 2} a_j z^j; \quad \tilde{h}'(z) = \sum_{j \geq 2} j a_j z^{j-1}.$$

Se tienen las acotaciones siguientes, para cada índice $j \geq 2$:

$$|a_j| \leq \frac{M(r, \tilde{h})}{r^j}. \quad (2.3)$$

$$|a_j| \leq \frac{M(r, \tilde{h}')}{j r^{j-1}}. \quad (2.4)$$

Además, si $0 < \epsilon < r$ se tiene que

$$M(r - \epsilon; \tilde{h}') \leq \frac{M(r; \tilde{h})}{\epsilon}. \quad (2.5)$$

Demostración. La fórmula de Cauchy dice que

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\tilde{h}(z)}{z^{j+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{\tilde{h}(r \exp(\alpha i))}{r^{j+1} \exp((j+1)\alpha i)} d\alpha.$$

Por integración, se siguen las dos primeras acotaciones. La tercera acotación se obtiene aplicando la fórmula de Cauchy a los puntos del borde de $\mathbb{D}(0, r - \epsilon)$. \square

Sucesiones de cotas

A continuación construiremos unas sucesiones que servirán de cotas para controlar la convergencia del proceso iterativo. Recuérdese que tenemos fijado un entero $\mu \geq 1$ y una constante $c' > 0$ tales que

$$|\lambda^p - \lambda| \geq \frac{c'}{(p-1)^{\mu-1}}, \text{ para todo } p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$$

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $0 < c' \leq 1$. En particular, tenemos que

$$\frac{1}{|\lambda^p - \lambda|} \leq \frac{(p-1)^{\mu-1}}{c'}.$$

Por otro lado, definiremos la constante

$$c_0 = \frac{\mu!}{c'} > 1,$$

que desempeñará un papel relevante en la construcción de las sucesiones citadas.

Las sucesiones que construiremos tomarán como punto de partida tres valores reales η_0 , δ_0 y r_0 con las condiciones

$$0 < \eta_0 < 1/5; \quad 0 < \delta_0, \quad 0 < r_0.$$

De acuerdo con nuestras necesidades, una vez fijado η_0 , ajustaremos si es necesario los valores de δ_0 y r_0 . Ahora, definimos por inducción

$$r_{n+1} = r_n(1 - 5\eta_n) \tag{2.6}$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n/2 \tag{2.7}$$

$$\delta_{n+1} = c_0 \frac{\delta_n^2}{\eta_n^{\mu+2}(1 - \eta_n)}. \tag{2.8}$$

Estas sucesiones serán útiles gracias al lema siguiente

Lema 2.13. *Si δ_0 es suficientemente pequeño, para todo $n \geq 0$ tenemos que*

$$1. \quad c_0 \delta_n \leq \eta_n^{\mu+2}.$$

$$2. \quad \delta_n \leq \eta_n^{\mu+2}.$$

Demostración. Elijamos $\delta_0 > 0$ con la condición de que

$$c_0 2^{\mu+3} \delta_0 \leq \eta_0^{\mu+2}. \tag{2.9}$$

Esto implica la primera afirmación para el caso $n = 0$, pues $c_0 \delta_0 < c_0 2^{\mu+3} \delta_0 \leq \eta_0^{\mu+2}$. Observemos que $\eta_n < 1/2$ para cada $n \geq 0$, con lo que $2(1 - \eta_n) > 1$ y así tenemos

$$(c_0 2^{\mu+3} \delta_0)^2 \leq 2(1 - \eta_0)(\eta_0^{\mu+2})^2. \tag{2.10}$$

Nótese que las desigualdades

$$D1(n) : \quad (c_0 2^{\mu+3} \delta_n)^2 \leq 2(1 - \eta_n)(\eta_n^{\mu+2})^2. \tag{2.11}$$

$$D2(n+1) : \quad c_0 2^{\mu+3} \delta_{n+1} \leq \eta_{n+1}^{\mu+2}. \tag{2.12}$$

son equivalentes. En efecto

$$\begin{aligned} c_0 2^{\mu+3} \delta_{n+1} \leq \eta_{n+1}^{\mu+2} &\Leftrightarrow \\ c_0 2^{\mu+3} \left(\frac{c_0 (\delta_n)^2}{\eta_n^{\mu+2}(1 - \eta_n)} \right) &\leq \frac{\eta_n^{\mu+2}}{2^{\mu+2}} \Leftrightarrow \\ (c_0 2^{\mu+3} \delta'_n)^2 &\leq 2(1 - \eta_n)(\eta_n^{\mu+2})^2. \end{aligned}$$

De la desigualdad $D2(n)$ se concluirá la afirmación (1), dado que

$$c_0 2^{\mu+3} \delta_n \leq \eta_n^{\mu+2} \Rightarrow c_0 \delta_n \leq c_0 2^{\mu+3} \delta_n \leq \eta_n^{\mu+2}.$$

Por la selección hecha de δ_0 se cumple $D2(0)$. Sabemos que $D1(0)$ es cierta en virtud de la ecuación (2.10). Únicamente falta el paso de inducción

$$D2(n+1) \Rightarrow D1(n+1).$$

Veámoslo. Elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad $D2(n+1)$, tenemos

$$(c_0 2^{\mu+3} \delta_{n+1})^2 \leq (\eta_{n+1}^{\mu+2})^2.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $2(1 - \eta_{n+1}) > 1$ obtenemos

$$(c_0 2^{\mu+3} \delta_{n+1})^2 \leq 2(1 - \eta_{n+1})(\eta_{n+1}^{\mu+2})^2,$$

que es exactamente la desigualdad $D1(n+1)$.

Finalmente, la segunda afirmación se sigue de la primera dado que $\delta_n < c_0 \delta_n$. \square

Una consecuencia interesante de este lema es que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0. \quad (2.13)$$

En efecto

$$0 < \delta_n \leq \eta_n^{\mu+2} = \frac{\eta_0}{2^{n(\mu+2)}}$$

y por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

Los discos de convergencia

Iniciamos aquí la prueba de la convergencia de la iteración de Siegel. Recordemos que $c_0 = \mu!/c'$ y elijamos un radio $1 > r_0 > 0$ lo bastante pequeño como para que

$$\delta_0 = M(r_0; \tilde{f}')$$

satisfaga la condición

$$c_0 2^{\mu+3} \delta_0 \leq \eta_0^{\mu+2},$$

que nos ha permitido obtener las conclusiones del Lema 2.13.

Así pues, a partir de ahora, las sucesiones de cotas r_n, δ_n, η_n comienzan con $0 < \eta_0 < 1/5$, $0 < r_0 < 1$ y $\delta_0 = M(r_0; \tilde{f}')$ satisfaciendo la condición anterior. Definiremos los discos encajados

$$\mathbb{D}_j^{(n)} = \mathbb{D}(0, r_n(1 - j\eta_n)); \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Obsérvese que $\mathbb{D}_5^{(n-1)} = \mathbb{D}(0, r_n)$. En este sentido ampliamos la notación para incorporar $\mathbb{D}_5^{(-1)} = \mathbb{D}(0, r_0)$.

Nótese que se tiene

$$\dots \supset \mathbb{D}_5^{(n-1)} \supset \mathbb{D}_1^{(n)} \supset \mathbb{D}_2^{(n)} \supset \mathbb{D}_3^{(n)} \supset \mathbb{D}_4^{(n)} \supset \mathbb{D}_5^{(n)} \supset \mathbb{D}_1^{(n+1)} \supset \dots$$

Definamos ρ como

$$\rho = r_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^n (1 - \eta_j).$$

Lema 2.14. *Se tiene que $0 < \rho < r_n$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Escribamos $s_n = \prod_{j=0}^n (1 - \eta_j)$. Recordemos que $0 < \eta_0 < 1/5$ y que $\eta_n = \eta_0/2^n$. Sabemos que

$$s_n = s_{n-1}(1 - \eta_0/2^n).$$

Por lo que es una sucesión estrictamente decreciente. Tenemos además que

$$1 > s_0 = (1 - \eta_0) > \frac{1 - \eta_0}{2} > 0, \quad s_0 - \frac{1 - \eta_0}{2} = \frac{1 - \eta_0}{2} > \eta_0.$$

Probemos por inducción que

$$s_n - \frac{1 - \eta_0}{2} > \eta_0/2^n$$

lo que termina la prueba del lema, ya que entonces $s_n > (1 - \eta_0)/2$ para todo $n \geq 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} s_n - \frac{1 - \eta_0}{2} &= s_{n-1} - s_{n-1} \frac{\eta_0}{2^n} - \frac{1 - \eta_0}{2} = \\ &= \left(s_{n-1} - \frac{1 - \eta_0}{2} \right) - s_{n-1} \frac{\eta_0}{2^n} \geq \\ &\geq \frac{\eta_0}{2^{n-1}} - s_{n-1} \frac{\eta_0}{2^n} \geq \frac{\eta_0}{2^{n-1}} - \frac{\eta_0}{2^n} \geq \frac{\eta_0}{2^n}. \end{aligned}$$

Veamos finalmente, por inducción, que $r_n > r_0 s_{n+2}$. Tenemos

$$r_n = r_{n-1}(1 - 5\eta_{n-1}) > r_0 s_{n+1}(1 - 5\eta_{n-1}) > r_0 s_{n+1}(1 - \eta_{n+2}) = r_0 s_{n+2}$$

dado que

$$1 - 5\eta_{n-1} = 1 - 5 \frac{\eta_0}{2^{n-1}} < 1 - \frac{\eta_0}{2^{n+2}} = 1 - \eta_{n+2}.$$

Se concluye que $r_n > \rho$. □

La solución Φ del problema de linealización estará definida sobre el disco $\mathbb{D}(0, \rho)$.

Adaptación de las iteradas a los discos de convergencia

La convergencia del procedimiento de linealización de Siegel reposa sobre la siguiente proposición, a cuya prueba está dedicada esta sección

Proposición 2.15. *Para cada índice $n \geq 1$ se tienen las siguientes propiedades*

1. *Las funciones f_{n-1} y Ψ_n están definidas en el disco $\mathbb{D}_5^{(n-2)} = \mathbb{D}(0, r_{n-1})$.*
2. *La función Ψ_n es inyectiva sobre $\mathbb{D}_1^{(n-1)}$ y además*

$$\Psi_n(\mathbb{D}_1^{(n-1)}) \supset \mathbb{D}_2^{(n-1)}.$$

En particular, Ψ_n^{-1} está definida sobre $\mathbb{D}_2^{(n-1)}$ y se tiene que

$$\Psi_n^{-1}(\mathbb{D}_2^{(n-1)}) \subset \mathbb{D}_1^{(n-1)}.$$

$$3. \Psi_n(\mathbb{D}_4^{(n-1)}) \subset \mathbb{D}_3^{(n-1)}.$$

$$4. f_{n-1}(\mathbb{D}_3^{(n-1)}) \subset \mathbb{D}_2^{(n-1)}.$$

Realizaremos la prueba de la Proposición 2.15 por inducción sobre el índice n del enunciado. Supongamos en primer lugar que $n = 1$. En este caso la propiedad (1) se interpreta diciendo que f_0 está definida sobre

$$\mathbb{D}_5^{(-1)} = \mathbb{D}(0, r_0),$$

lo cual forma parte de las hipótesis de inicio. Nótese que el hecho de que Ψ_1 esté también definida sobre este disco es consecuencia directa del Lema 2.11. Probemos ahora la propiedad (2), es decir, debemos probar que Ψ_1 es inyectiva sobre $\mathbb{D}_1^{(0)}$ y se tiene que

$$\Psi_1(\mathbb{D}_1^{(0)}) \supset \mathbb{D}_2^{(0)}.$$

Precisaremos el siguiente

Lema 2.16. *Supongamos que r, η son tales que $0 < r < r_0$ y que $0 < \eta < 1/5$. Se tiene la siguiente acotación*

$$M(r(1 - \eta); \tilde{\Psi}'_1) \leq \frac{\mu!}{c' \eta^{\mu+1}} M(r, \tilde{f}'_0) = c_0 \frac{M(r, \tilde{f}'_0)}{\eta^{\mu+1}} \leq \frac{c_0 \delta_0}{\eta^{\mu+1}} \leq \eta < 1.$$

Demostración. Escribamos $\tilde{f}_0 = \sum_{j \geq 2} a_j z^j$ y $\tilde{\Psi}_1 = \sum_{j \geq 2} b_j z^j$. Sabemos que

$$b_j = \frac{a_j}{\lambda^j - \lambda}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Por la Proposición 2.12, tenemos la acotación

$$|a_j| \leq \frac{M(r; \tilde{f}'_0)}{j r^{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots$$

Por otro lado la condición diofántica dice que

$$\frac{1}{|\lambda^j - \lambda|} \leq \frac{(j-1)^{\mu-1}}{c'}.$$

Así podemos escribir

$$\begin{aligned} M(r(1 - \eta); \tilde{\Psi}'_1) &\leq \sum_{j \geq 2} j |b_j| r^{j-1} (1 - \eta)^{j-1} = \\ &= \sum_{j \geq 2} j \frac{|a_j|}{|\lambda^j - \lambda|} r^{j-1} (1 - \eta)^{j-1} \leq \\ &\leq M(r; \tilde{f}'_0) \sum_{j \geq 2} \frac{1}{|\lambda^j - \lambda|} (1 - \eta)^{j-1} \leq \\ &\leq \frac{M(r; \tilde{f}'_0)}{c'} \sum_{j \geq 2} (j-1)^{\mu-1} (1 - \eta)^{j-1}. \end{aligned}$$

Recordemos ahora que se tiene la siguiente fórmula, válida para $0 \leq x < 1$

$$\frac{1}{(1-x)^{\mu+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu+k}{k} x^k.$$

(Véase, por ejemplo el libro de Atiyah-McDonald, pg. 133 [2]). Haciendo $x = 1 - \eta$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta^{\mu+1}} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\mu+k}{k} (1-\eta)^k \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\mu+k}{k} (1-\eta)^k \geq \\ &\geq \frac{1}{\mu!} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\mu} (1-\eta)^k = \\ &= \frac{1}{\mu!} \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)^{\mu} (1-\eta)^{j-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$M(r(1-\eta); \tilde{\Psi}'_1) \leq \frac{M(r; \tilde{f}'_0)}{c'} \sum_{j \geq 2} (j-1)^{\mu-1} (1-\eta)^{j-1} \leq \frac{\mu! M(r; \tilde{f}'_0)}{c' \eta^{\mu+1}} = c_0 \frac{M(r; \tilde{f}'_0)}{\eta^{\mu+1}}.$$

Dado que $0 < r < r_0$, tenemos que $M(r, \tilde{f}'_0) \leq \delta_0 = M(r_0, \tilde{f}'_0)$ y por lo tanto

$$M(r(1-\eta); \tilde{\Psi}'_1) \leq \frac{\mu! M(r; \tilde{f}'_0)}{c' \eta^{\mu+1}} = c_0 \frac{M(r; \tilde{f}'_0)}{\eta^{\mu+1}} \leq \frac{c_0 \delta_0}{\eta^{\mu+1}}.$$

Aplicando el Lema 2.13 se concluye que

$$\frac{c_0 \delta_0}{\eta^{\mu+1}} < \eta < 1.$$

□

Como consecuencia del lema anterior tenemos que

$$M(r_0(1-\eta_0); \tilde{\Psi}'_1) \leq \eta_0 < 1.$$

Esto implica que $\Psi_1(z)$ es inyectiva sobre $\mathbb{D}_1^{(0)} = \mathbb{D}(0, r_0(1-\eta_0))$ dado que la derivada de Ψ_1 es

$$\Psi'_1(z) = 1 + \tilde{\Psi}'_1(z)$$

y por consiguiente no se anula nunca ya que $|\tilde{\Psi}'_1(z)| < 1$. (Si tomara dos valores iguales, la derivada se anularía en algún punto). Por otro lado, si tomamos un número complejo z con $|z| = r_0(1-\eta_0)$, dado que $M(r_0(1-\eta_0); \tilde{\Psi}'_1) \leq \eta_0$ se sigue que $|\tilde{\Psi}_1(z)| \leq (r_0 - \eta_0)\eta_0 < \eta_0$ y entonces

$$|\Psi_1(z)| = |z + \tilde{\Psi}_1(z)| \geq r_0(1-\eta_0) - r_0\eta_0 = r_0(1-2\eta_0).$$

Esto prueba ya que $\Psi_1(\mathbb{D}_1^{(0)}) \supset \mathbb{D}_2^{(0)}$.

Probemos ahora que $\Psi_n(\mathbb{D}_4^{(0)}) \subset \mathbb{D}_3^{(0)}$. Tomando z con $|z| \leq r_0(1 - 4\eta_0)$ y argumentando como antes, se tiene

$$|\Psi_1(z)| = |z + \tilde{\Psi}_1(z)| \leq r_0(1 - 4\eta_0) + r_0\eta_0 = r_0(1 - 3\eta_0).$$

Para terminar la etapa inicial de la inducción con $n = 1$ debemos probar ahora que $f_0(\mathbb{D}_3^{(0)}) \subset \mathbb{D}_2^{(0)}$. Tomemos z con $|z| \leq r_0(1 - 3\eta_0)$, recordemos que

$$|\tilde{f}_0(z)| \leq r_0\delta_0$$

por el mismo argumento de antes. Además, $\delta_0 < \eta_0^{\mu+2} < \eta_0$. Se tiene pues que

$$|f_0(z)| = |\lambda z + \tilde{f}_0(z)| \leq r_0(1 - 3\eta_0) + r_0\delta_0 \leq r_0(1 - 2\eta_0).$$

Esto completa la etapa $n = 1$.

Antes de efectuar la etapa inductiva, observemos que la etapa con $n = 1$ se podría haber desarrollado sin problemas sencillamente suponiendo que $M(r_0; \tilde{f}'_0) \leq \delta_0$, en lugar de considerar la igualdad $M(r_0; \tilde{f}'_0) = \delta_0$. Notemos asimismo que

$$f_1 = \Psi_1^{-1} \circ f_0 \circ \Psi_1,$$

está definida sobre $\mathbb{D}_5^{(0)} = \mathbb{D}(0, r_1)$, de acuerdo con el diagrama

$$\mathbb{D}(0, r_1) = \mathbb{D}_5^{(0)} \subset \mathbb{D}_4^{(0)} \xrightarrow{\Psi_1} \mathbb{D}_3^{(0)} \xrightarrow{f_0} \mathbb{D}_2^{(0)} \xrightarrow{\Psi_1^{-1}} \mathbb{D}_2^{(0)} \subset \mathbb{D}(0, r_0).$$

Por consiguiente, repitiendo los argumentos de la etapa con $n = 1$, será suficiente asegurarse, procediendo por inducción, de que

$$M(r_n; \tilde{f}'_n) \leq \delta_n$$

para todo n .

Supongamos el resultado para $n - 1$, es decir el enunciado de la proposición y que $M(r_{n-1}; \tilde{f}'_{n-1}) \leq \delta_{n-1}$. Probemos que $M(r_n; \tilde{f}'_n) \leq \delta_n$.

En el disco $\mathbb{D}_4^{(n-1)}$ podemos escribir

$$f_n = \Psi_n^{-1} \circ f_{n-1} \circ \Psi_n$$

y por tanto

$$(\Psi_n \circ f_n)(z) = (f_{n-1} \circ \Psi_n)(z), \quad z \in \mathbb{D}_4^{(n-1)}.$$

En consecuencia, para cada $z \in \mathbb{D}_4^{(n-1)}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \Psi_n(\lambda z + \tilde{f}_n(z)) &= f_{n-1}(z + \tilde{\Psi}_n(z)) \Rightarrow \\ \lambda z + \tilde{f}_n(z) + \tilde{\Psi}_n(\lambda z + \tilde{f}_n(z)) &= \lambda z + \lambda \tilde{\Psi}_n(z) + \tilde{f}_{n-1}(z + \tilde{\Psi}_n(z)). \end{aligned}$$

Es decir, se tiene que

$$\tilde{f}_n(z) = \tilde{f}_{n-1}(z + \tilde{\Psi}_n(z)) - \tilde{\Psi}_n(\lambda z + \tilde{f}_n(z)) + \lambda \tilde{\Psi}_n(z).$$

Dado que $\lambda\Psi_n(z) = \Psi_n(\lambda z) - \tilde{f}_{n-1}(z)$, la igualdad anterior puede escribirse de la forma

$$\tilde{f}_n(z) = [\tilde{f}_{n-1}(z + \tilde{\Psi}_n(z)) - \tilde{f}_{n-1}(z)] - [\tilde{\Psi}_n(\lambda z + \tilde{f}_n(z)) - \tilde{\Psi}_n(\lambda z)].$$

Escribamos ahora $r^* = r_{n-1}(1 - 4\eta_{n-1})$. Por aplicación de la fórmula de los incrementos finitos, la igualdad anterior implica que

$$M(r^*; \tilde{f}_n) \leq M(r^*; \tilde{f}'_{n-1})M(r^*; \tilde{\Psi}_n) + M(r^*; \tilde{\Psi}'_n)M(r^*; \tilde{f}_n). \quad (2.14)$$

Ahora, tenemos que

$$M(r^*; \tilde{\Psi}_n) \leq r^* M(r^*; \tilde{\Psi}'_n) \leq r_{n-1} M(r^*; \tilde{\Psi}'_n).$$

Dada la hipótesis de inducción, podemos aplicar el lema 2.16 a la pareja $\tilde{f}'_{n-1}, \tilde{\Psi}'_n$ el radio r_{n-1} y la cota δ_{n-1} para concluir que

$$M(r_{n-1}(1 - \eta_{n-1}); \tilde{\Psi}'_n) \leq \frac{\mu!}{c'\eta_{n-1}^{\mu+1}} M(r, \tilde{f}'_{n-1}) = c_0 \frac{M(r, \tilde{f}'_{n-1})}{\eta_{n-1}^{\mu+1}} \leq \frac{c_0 \delta_{n-1}}{\eta_{n-1}^{\mu+1}} \leq \eta_{n-1}.$$

Por otro lado, como $r^* = r_{n-1}(1 - 4\eta_{n-1}) < r_{n-1}$, tenemos

$$M(r^*; \tilde{\Psi}'_n) \leq M(r_{n-1}(1 - \eta_{n-1}); \tilde{\Psi}'_n).$$

Aplicando estas últimas desigualdades a la desigualdad (2.14), tenemos

$$\begin{aligned} M(r^*; \tilde{f}_n) &\leq M(r^*; \tilde{f}'_{n-1})M(r^*; \tilde{\Psi}_n) + M(r^*; \tilde{\Psi}'_n)M(r^*; \tilde{f}_n) \leq \\ &\leq M(r^*; \tilde{\Psi}'_n) \left(r_{n-1} M(r^*; \tilde{f}'_{n-1}) + M(r^*; \tilde{f}_n) \right). \end{aligned}$$

Es decir

$$(1 - M(r^*; \tilde{\Psi}'_n))M(r^*; \tilde{f}_n) \leq r_{n-1} M(r^*; \tilde{\Psi}'_n)M(r^*; \tilde{f}'_{n-1}),$$

o lo que es lo mismo

$$M(r^*; \tilde{f}_n) \leq \frac{r_{n-1} M(r^*; \tilde{\Psi}'_n)M(r^*; \tilde{f}'_{n-1})}{1 - M(r^*; \tilde{\Psi}'_n)}.$$

Ahora aplicamos las acotaciones ya establecidas

$$M(r^*; \tilde{\Psi}'_n) \leq \frac{c_0 \delta_{n-1}}{\eta_{n-1}^{\mu+1}}; \quad M(r^*; \tilde{f}'_{n-1}) \leq M(r_{n-1}; \tilde{f}'_{n-1}) \leq \delta_{n-1},$$

para obtener

$$M(r^*; \tilde{f}_n) \leq \frac{1}{1 - M(r^*; \tilde{\Psi}'_n)} \frac{r_{n-1} c_0 \delta_{n-1}^2}{\eta_{n-1}^{\mu+1}}.$$

Dado que $M(r^*; \tilde{\Psi}'_n) \leq \eta_{n-1}$, tenemos

$$\frac{1}{1 - M(r^*; \tilde{\Psi}'_n)} \leq \frac{1}{1 - \eta_{n-1}}$$

y por consiguiente

$$M(r^*; \tilde{f}_n) \leq \frac{r_{n-1}c_0\delta_{n-1}^2}{(1-\eta_{n-1})\eta_{n-1}^{\mu+1}} = \frac{r_{n-1}\eta_{n-1}c_0\delta_{n-1}^2}{(1-\eta_{n-1})\eta_{n-1}^{\mu+2}} = r_{n-1}\eta_{n-1}\delta_n.$$

Aplicando una de las desigualdades derivadas de la fórmula de Cauchy, dado que $r_n = r^* - \eta_{n-1}r_{n-1}$ se tiene

$$M(r_n; \tilde{f}'_n) \leq \frac{M(r^*; \tilde{f}_n)}{\eta_{n-1}r_{n-1}}$$

y por consiguiente

$$M(r_n; \tilde{f}'_n) \leq \delta_n.$$

Como queríamos demostrar.

Conclusión

La construcción anterior prueba que para cada $n \geq 0$ las funciones Φ_n, Φ_n^{-1} y f_n están definidas sobre el disco $\mathbb{D}(0, \rho)$. Además, tenemos que

$$\Phi_n(\mathbb{D}(0, \rho)) \subset \mathbb{D}(0, r_0); \quad \Phi_n^{-1}(\mathbb{D}(0, \rho)).$$

Según el teorema de Montel en [5], dada una sucesión de funciones acotadas existe una subsucesión de funciones convergente. Sabemos que las sucesiones Φ_n, Φ_n^{-1} y f_n están acotadas. Por tanto podemos encontrar subsucesiones $\Phi_{n_k}, \Phi_{n_k}^{-1}, f_{n_k}$ (con los mismos subíndices) convergentes, aplicando el teorema de Montel sobre f_n y las subsucesiones de Φ_n y Φ_n^{-1} con los mismos subíndices que la subsucesión convergente para f_n .

Recordemos que en virtud de la ecuación (2.13) se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. Dado que $M(\rho; \tilde{f}'_n) \leq \delta_n$, vemos que la sucesión \tilde{f}'_n converge uniformemente hacia 0. Esto implica que

$$f_n = \Phi_n \circ f \circ \Phi_n^{-1}$$

converge uniformemente hacia $z \mapsto \lambda z$ y por consiguiente se tiene que

$$\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}(z) = \lambda z, \quad z \in \mathbb{D}(0, \rho).$$

Esto concluye la prueba del teorema de Siegel.

Capítulo 3

Teorema de la Flor

Para estudiar el siguiente resultado, necesitamos unas definiciones previas:

Definición 3.1. Decimos que un sistema dinámico f es tangente a la identidad si su parte lineal es la identidad. Entonces, siendo f de la forma

$$f(z) = z + az^{p+1} + \dots$$

decimos que es de grado p .

Proposición 3.2. Dado un sistema dinámico f tangente a la identidad, el sistema será linealizable si y sólo si f es la identidad.

Demostración. Sea f un sistema dinámico tangente a la identidad y linealizable. Entonces, existe una función Φ tal que

$$\Phi \circ f \circ \Phi^{-1} = Id$$

entonces:

$$f = \Phi^{-1} \circ \Phi = Id$$

□

Definición 3.3. Dados un sistema dinámico $f \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, un vector $v \in S^1$ y un abierto conexo A , decimos que la dinámica en A es atractora en la dirección de v , y A es un pétalo atractor centrado en v , si

- (1) $f(A) \subseteq A$
- (2) $f^k(z) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $z \in A$.
- (3) $\frac{f^k(z)}{|f^k(z)|} \rightarrow v$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Es decir, las órbitas en A convergen a 0 en la dirección de v . En este caso, diremos que v es una dirección atractora.

Del mismo modo, decimos que la dinámica es repulsora y A es un pétalo repulsor si es atractor para f^{-1} . En este caso, v será una dirección repulsora.

Notamos que dado un sistema dinámico tangente a la identidad f de la forma:

$$f(z) = z + az^{p+1} + \dots$$

y un vector $v \in S^1$, v es una dirección atractora si y solamente si av^r es real y negativo. Del mismo modo, será una dirección repulsora si y solamente si av^r es real y positivo.

El teorema de la flor dice lo siguiente:

Teorema 3.4. *Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ un sistema dinámico tangente a la identidad de grado p , donde U es un entorno del origen. Entonces, existen p pétalos atractores y p pétalos repulsores alrededor del origen, cada uno de ellos centrado en una dirección atractora o repulsora, tales que:*

1. *Dos pétalos intersecan si y sólo si sus direcciones centrales forman un ángulo de amplitud $\frac{\pi}{p}$.*
2. *La unión de todos ellos forma un entorno punteado del origen.*

Antes de dar una idea de la demostración, podemos observar en las figuras 3.1 y 3.2 el aspecto que tienen los conjuntos de puntos no divergentes para $z + z^5$ y $z + z^6$.

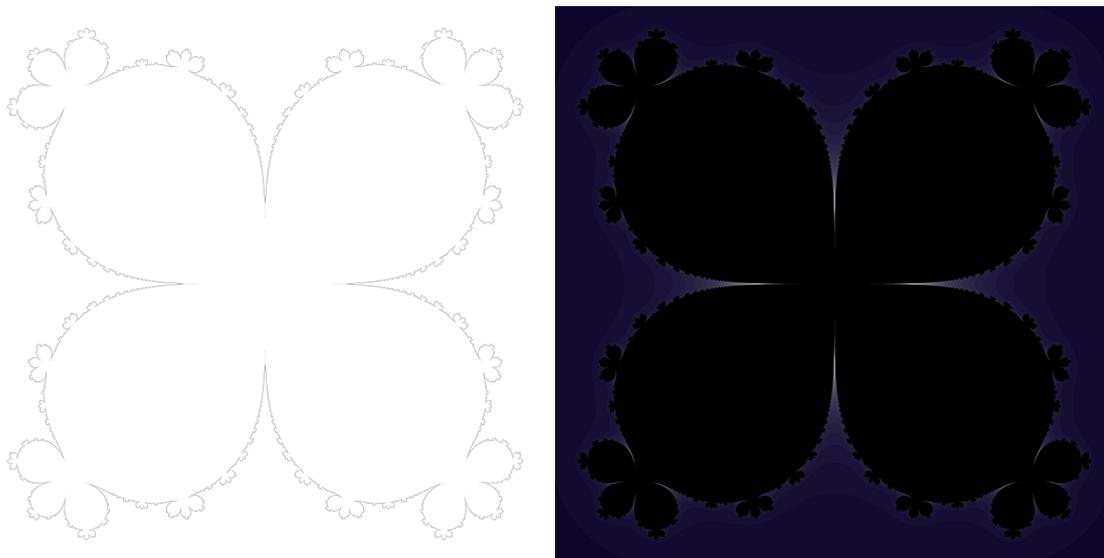


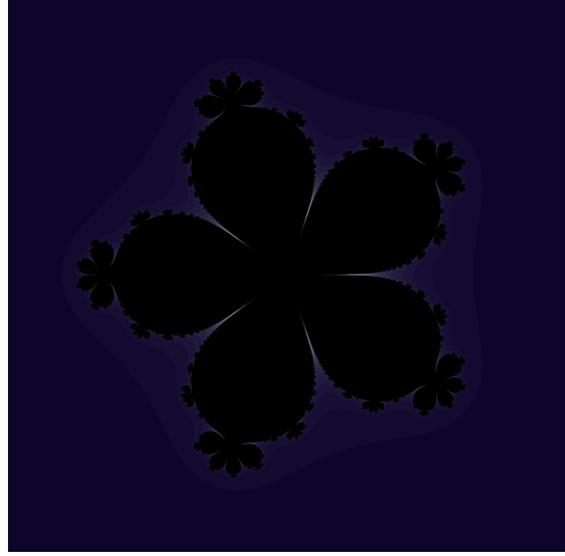
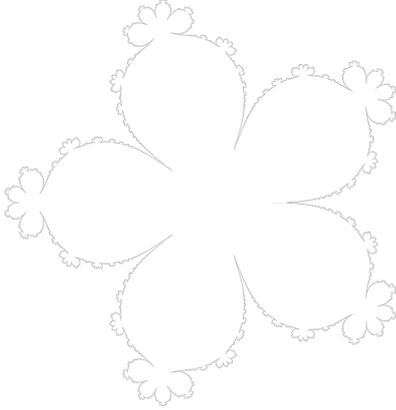
Figura 3.1: $z^5 + z$

La siguiente idea de la prueba está basada en la presentación de M. Abate [1].

Demostración. Vamos a empezar por reducir al caso en que nuestro sistema dinámico es de la forma

$$z - z^{p+1} + \dots$$

Nuestra f es de la forma $f(z) = z + az^{p+1} + \dots$. Aplicamos el cambio de coordenadas lineal $\Psi(z) = \sqrt[p]{-a}z$ para una raíz de $-a$ cualquiera. Trabajaremos con la función

Figura 3.2: $z^6 + z$

$$f_0 = \Psi \circ f \circ \Psi^{-1}:$$

$$\begin{aligned} f_0(z) &= (\Psi \circ f \circ \Psi^{-1})(z) \\ &= \Psi \left(f \left(\frac{z}{\sqrt[p]{-a}} \right) \right) \\ &= \Psi \left(\frac{z}{\sqrt[p]{-a}} + a \left(\frac{z}{\sqrt[p]{-a}} \right)^{p+1} + \dots \right) \\ &= \sqrt[p]{-a} \frac{z}{\sqrt[p]{-a}} - \sqrt[p]{-a} \frac{z^{p+1}}{\sqrt[p]{-a}} + \dots \\ &= z - z^{p+1} + \dots \end{aligned}$$

Entonces, las direcciones atractoras son las raíces p -ésimas de la unidad. Dado un $\delta > 0$, definimos el conjunto

$$C_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^p - \delta| < \delta\}$$

Este conjunto tiene p componentes conexas y cada una es simétrica con respecto a una raíz p -ésima de la unidad. Para δ lo suficientemente pequeño, serán pétalos atractores de la unidad, pero no los que buscamos, dado que no satisfacen el punto 2 (no forman un entorno punteado del origen). Construiremos a partir de ellos unos pétalos más grandes posteriormente. Empezaremos por demostrar que las componentes conexas de C_δ son efectivamente pétalos atractores.

Dado $j = 1, 3, \dots, 2p - 1$, consideramos los sectores centrados en v_j y limitados por las direcciones repulsoras consecutivas, a los que llamaremos Σ_j . Es decir:

$$\Sigma_j = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{2j-3}{r}\pi < \arg(z) < \frac{2j-1}{r}\pi \right\}$$

Σ_j contendrá entonces una única componente conexa $P_{j,\delta}$ de C_δ , es decir,

$$P_{j,\delta} = \Sigma_j \cap C_\delta$$

El siguiente paso es aplicar el cambio de coordenadas $w = \Phi(z) = \frac{-1}{pz^p}$. A partir de este cambio de coordenadas obtenemos una $F = \Phi \circ f_0 \circ \Phi^{-1}$. Para cada determinación de la raíz p -ésima, tenemos una F de la forma

$$\begin{aligned}
 F(w) &= (\Phi \circ f_0 \circ \Phi^{-1})(w) \\
 &= \Phi \left(f \left(\sqrt[p]{\frac{-1}{pw}} \right) \right) \\
 &= \Phi \left(\sqrt[p]{\frac{-1}{pw}} \left(1 - \frac{1}{pw} + o \left(\frac{1}{|w|} \right) \right) \right) \\
 &= w \left(1 - \frac{1}{pw} + o \left(\frac{1}{|w|} \right) \right)^{-p} \\
 &= w \left(1 + \frac{1}{w} + o \left(\frac{1}{|w| \sqrt[p]{|w|}} \right) \right) \\
 &= w + 1 + O \left(\frac{1}{\sqrt[p]{|w|}} \right)
 \end{aligned}$$

Denotamos a la imagen de $P_{j,\delta}$ como $H_\delta = \Phi(P_{j,\delta})$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 H_\delta &= \Phi(P_{j,k}) \\
 &= \left\{ w = \Psi(z) \mid \frac{2j-3}{r}\pi < \arg(z) < \frac{2j-1}{r}\pi, |z^p - \delta| < \delta \right\} \\
 &= \left\{ w = \frac{1}{pz^p} \mid \frac{2j-3}{r}\pi < \arg(z) < \frac{2j-1}{r}\pi, |z^p - \delta| < \delta \right\} \\
 &= \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \arg(w) \neq -1, \left| \frac{1}{pw} - \delta \right| < \delta \right\} \\
 &= \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \arg(w) \neq -1, \left| \frac{1}{p\delta} - w \right| < |w| \right\} \\
 &= \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \arg(w) \neq -1, \left(\Re(w) - \frac{1}{p\delta} \right)^2 + \Im(w)^2 < \Re(w)^2 + \Im(w)^2 \right\} \\
 &= \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \arg(w) \neq -1, \Re(w)^2 + \frac{2\Re(w)}{p\delta} + \frac{1}{p^2\delta^2} < \Re(w)^2 \right\} \\
 &= \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \Re(w) > \frac{1}{2p\delta} \right\}
 \end{aligned}$$

Tenemos entonces que, para w con parte real lo suficientemente grande,

$$\Re(F(w)) > \Re(w) + \frac{1}{2}$$

y por tanto, para δ lo suficientemente pequeño, la imagen de H_δ está contenida en H_δ , y la imagen de $P_{j,\delta}$ está contenida en $P_{j,\delta}$.

Ahora, se prueba por inducción que, para todo $w \in H_\delta$:

$$\Re(F^k(w)) > \Re(w) + \frac{k}{2}$$

Suponemos que se cumple para cierto k , veamos que se cumple para $k + 1$:

$$\begin{aligned}\Re(F^{k+1}(w)) &= \Re(F^k(F(w))) \\ &> \Re(F(w)) + \frac{k}{2} \\ &> \Re(w) + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \Re(w) + \frac{k+1}{2}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^k(w) = \infty \quad \text{en } H_\delta$$

y, para z :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_0^k(z) = 0 \quad \text{en } P_{j,\delta}$$

Ahora vamos a ver que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \arg(F^k(w)) = 0$$

y, por tanto, las órbitas en $P_{j,\delta}$ convergen a 0 en la dirección v_j :
Tenemos que

$$\frac{F^k(w)}{k} = \frac{w}{k} + 1 + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} O(F^i(w)^{\frac{-1}{p}})$$

Por lo tanto, el límite es:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F^k(w)}{k} &= 0 + 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} O(F^i(w)^{\frac{-1}{p}}) \\ &= 1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} O(F^k(w)^{\frac{-1}{p}}) \\ &= 1\end{aligned}$$

y, como $\arg(1) = 0$, $\arg(F^k(w))$ tiende a 0, y, por tanto, las órbitas que pasan por $P_{j,\delta}$ convergen a 0 en la dirección v_j . Así queda demostrado que $P_{j,\delta}$ es un pétalo atractor.

Para f^{-1} se construyen pétalos atractores del mismo modo, que serán pétalos repulsores para f . Esto es posible gracias a que f^{-1} es de la forma

$$f^{-1}(z) = z - a^{-1}z^{p+1} + O(z^{p+2})$$

Estos pétalos son demasiado pequeños y su unión no constituye un entorno del origen. Por tanto, construimos una familia de pétalos más grandes. Al igual que anteriormente, construimos simplemente los atractores. Los repulsores se construyen del mismo modo, para f^{-1} .

Dado que $F(w) = 1 + w + O(w^{\frac{1}{r}})$, tenemos que existen R, C reales tales que:

$$|F(w) - w - 1| \leq \frac{C}{|w|^{\frac{1}{r}}}$$

para todo w con $|w| > R$.

Ahora tomamos un $\varepsilon \in (0, 1)$ fijo y un $\delta > 0$ tal que para todo w con $|w| > \frac{1}{2r\delta}$,

$$|F(w) - w - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora definimos la constante M_ε como:

$$M_\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}{2r\delta}$$

Y definimos la que será la imagen por Ψ de nuestro pétalo, H_ε :

$$H_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} \mid \varepsilon |\Im(w)| > -\Re(w) + M_\varepsilon\} \cup H_\delta$$

Para w en H_ε se cumplen las siguientes afirmaciones:

$$\Re(F(w)) > \Re(w) + 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\Im(F(w)) - \Im(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por tanto, dado w en $H_\varepsilon - H_\delta$,

$$\begin{aligned} \Re(F(w)) &> \Re(w) + 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> \varepsilon |\Im(w)| + M_\varepsilon + 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> \varepsilon |\Im(F(w))| - \frac{\varepsilon^2}{2} + M_\varepsilon + 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> \varepsilon |\Im(F(w))| + M_\varepsilon \end{aligned}$$

Y, por tanto, $F(H_\varepsilon) \subseteq H_\varepsilon$ y las órbitas que comienzan en H_ε entran en H_δ . Finalmente, tomando $P_j = \Psi^{-1}(H_\varepsilon)$, hemos demostrado el teorema de la flor. \square

Apéndice A

Conjuntos de Julia y Mandelbrot. Experimentos

Esta presentación de los conjuntos de Julia y Mandelbrot se basa fundamentalmente en la obra [17].

Los conjuntos de Julia se definen en primer lugar para los polinomios de la forma

$$P_c(z) = z^2 + c$$

dependientes del parámetro c . Para el sistema dinámico dado por P_c para un cierto $c \in \mathbb{C}$, estudiamos el comportamiento de los puntos del plano complejo. Para cada $z \in \mathbb{C}$, observamos si la sucesión $(P_c^n(z))$ diverge o no. Así definimos los conjuntos a los que llamaremos de puntos de escape y de puntos prisioneros, respectivamente:

$$\mathcal{E}_c = \{z \in \mathbb{C} : |P_c^n(z)| \rightarrow \infty \text{ cuando } n \rightarrow \infty\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_c = \{z \in \mathbb{C} : z \notin \mathcal{E}_c\}.$$

Entonces, el conjunto de Julia F_c para c será la frontera de \mathcal{P}_c y \mathcal{E}_c ,

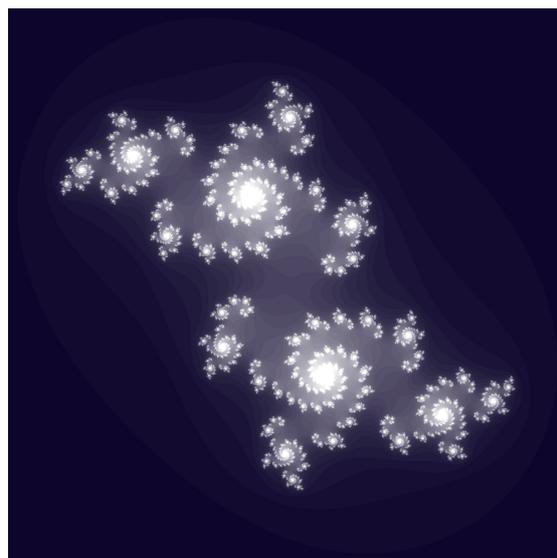
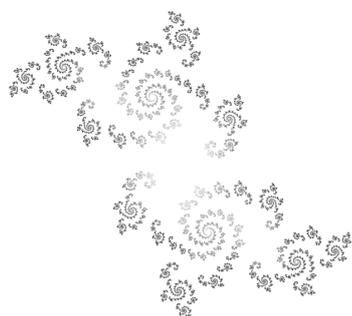
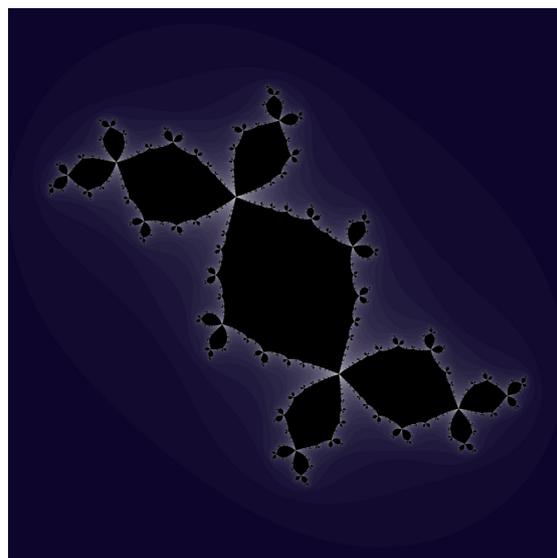
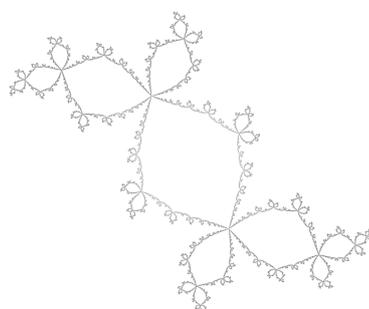
$$F_c = \text{Fr}(\mathcal{E}_c) = \text{Fr}(\mathcal{P}_c)$$

Estas definiciones se pueden generalizar para difeomorfismos en el plano complejo. En este caso, para un difeomorfismo f , denotaremos por E_f , P_f y F_f los correspondientes conjuntos.

Dependiendo del valor de c , estos conjuntos tendrán una u otra forma. En particular, para un cierto c , si $P_c^n(0)$ no diverge, el conjunto será conexo, y no lo será si $P_c^n(0)$ diverge. Esta distinción es la que dará lugar, posteriormente, al conjunto de Mandelbrot. Esto se debe al siguiente resultado cuya demostración podemos ver en el libro de Milnor, [11].

Teorema A.1. *Dado un polinomio f de grado ≥ 2 , los conjuntos F_f y P_f son conexos si y solo si ningún punto crítico de f está en E_f .*

No es posible obtener expresiones compactas que designen a los conjuntos de Julia para $c \neq 0$ y esto se debe a que los polinomios P_c no son linealizables. Sin embargo, existen distintas formas de aproximarlos, que explicaremos a continuación y resultan en las imágenes que podemos ver. En la figura A.1 vemos el caso no conexo, mientras que en la figura A.2 podemos observar el caso conexo.

Figura A.1: Conjunto de Julia para $c = 0,68i$ Figura A.2: Conjunto de Julia para $c = -0,123 + 0,745i$

Las imágenes de la izquierda se han obtenido utilizando un algoritmo de tiempo de escape. Este algoritmo se basa en que los conjuntos de Julia están contenidos en un disco. El algoritmo es el siguiente:

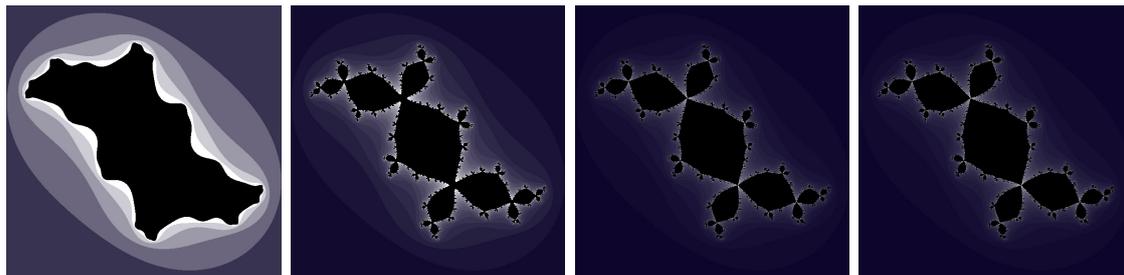


Figura A.3

Data: N número máximo de iteraciones, G red de puntos a representar, f sistema dinámico, M cota superior del conjunto

Result: O lista de puntos que no están en el conjunto, I lista de puntos que están en el conjunto

```

for  $z \in G$  do
   $z' = z$ ;
  for  $n$  de 1 a  $N$  do
     $z' = f(z')$ ;
    detener si  $z' > M$ 
  end
  if  $z' > M$  then
     $z \in O$ ;
  else
     $z \in I$ ;
  end
end

```

Vemos a continuación los resultados para distintos números de iteraciones en la figura A.3. El lector debe observar que, mientras que los puntos de O están necesariamente fuera del conjunto, los puntos de I podrían no pertenecer realmente al conjunto. En algoritmo nos dará un resultado más preciso, como hemos visto previamente, cuanto mayor sea N .

Las imágenes de la derecha se han obtenido utilizando el algoritmo de iteración inversa, explicado de forma general en [17] y en detalle en [9]. Este algoritmo consiste en iterar la inversa de la función para un conjunto de puntos no pertenecientes al conjunto. Tras sucesivas iteraciones, los puntos obtenidos serán puntos muy cercanos a la frontera del conjunto de puntos que no divergen. El algoritmo es el siguiente:

Data: Profundidad $P \in \mathbb{N}$, L lista de puntos exteriores al conjunto

Result: L lista ampliada de puntos exteriores al conjunto

```

for  $n$  de 1 a  $P$  do
  for  $z \in L$  do
    añadimos  $f^{-1}(z)$  a  $L$ ;
  end
end

```

Entonces, L es el conjunto de puntos que buscábamos. En este caso, las escasas profundidades que es posible alcanzar no permiten obtener imágenes claras del con-

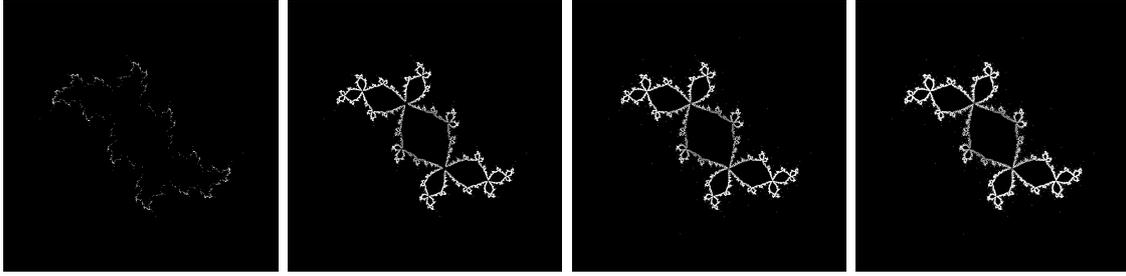


Figura A.4

junto.

Para obtener las imágenes en las figuras A.1 y A.2 hemos usado una variante de este algoritmo, que podemos ver en [9], que permite utilizar profundidades mucho mayores con menor uso de memoria. Esta variante limita la precisión de la imagen, lo cual no es un problema en nuestro caso. El algoritmo es el siguiente:

Data: Profundidad $P \in \mathbb{N}$, L lista de puntos exteriores al conjunto, k precisión

Result: L lista ampliada de puntos exteriores al conjunto

for n de 1 a P **do**

for $z \in L$ **do**

 If $f^{-1}(z) \notin L$ añadimos $f^{-1}(z)$ a L ;

end

end

Considerando que $a \in L$ si existe un $z \in L$ con $a \in B(z, k)$. En este caso, podemos ver cómo se alcanzan profundidades mayores en la figura A.4.

Para las figuras A.1 y A.2 se toma como conjunto inicial de puntos únicamente el punto $z = 1$.

Podemos ver que en ambos casos no estamos obteniendo la totalidad del conjunto, si no que estamos comprobando si un conjunto discreto, bastante pequeño de puntos pertenece o no al conjunto. El conjunto de Mandelbrot está estrechamente relacionado con los conjuntos de Julia. Este conjunto está formado por aquellos puntos para los cuales el conjunto de Julia F_c es conexo. Esto es equivalente, como ya hemos visto, a decir que la sucesión definida por

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= P_c(z_n) \end{aligned}$$

no diverge.

El resultado es un conjunto como el que vemos en la figura A.5.

Esta imagen se ha generado utilizando el mismo algoritmo de tiempo de escape utilizado para generar los conjuntos de Julia, adaptado para este caso particular:

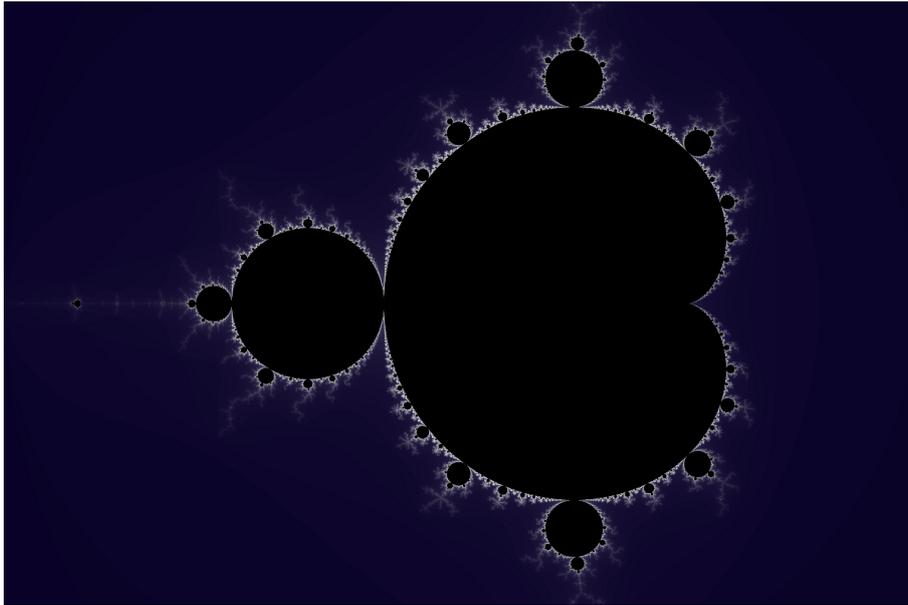


Figura A.5: Conjunto de Mandelbrot

Data: N número máximo de iteraciones, G red de puntos a representar, M cota superior del conjunto

Result: O lista de puntos que no están en el conjunto, I lista de puntos que están en el conjunto

```

for  $c \in G$  do
   $z = c;$ 
  for  $n$  de 1 a  $N$  do
     $z = z^2 + c;$ 
    detener si  $z > M$ 
  end
  if  $z > M$  then
     $c \in O;$ 
  else
     $c \in I;$ 
  end
end

```

A.1. Programa para generar la imagen del fractal de Mandelbrot

Usando un algoritmo de tiempo de escape y la librería PixelToaster:

```

#include "PixelToaster.h"
#include<vector>
#include<complex>
#include<cstdio>
#include<iostream>

```

```

using namespace std;
using namespace PixelToaster;

int to255(float val){
    return (int)(val*255+0.5);
}

int toFile(vector<Pixel> image, int width, int height){
    unsigned char *rgbPixels = new unsigned char [width*height*3];
    int x, y;

    for (x=0;x<width;x++){
        for (y=0;y<height;y++){
            rgbPixels [(x+y*width)*3+0] = to255 (image [x+y*width] . r );
            rgbPixels [(x+y*width)*3+1] = to255 (image [x+y*width] . g );
            rgbPixels [(x+y*width)*3+2] = to255 (image [x+y*width] . b );
        }
    }
    FILE *file = fopen("mandelbrot9000x6000.data", "wb");
    fwrite(rgbPixels, sizeof(unsigned char), width*height*3, file);
    fclose(file);
    delete [] rgbPixels;

    return 1;
}

int main(){
    const int width=9000, height=2*width/3;
    vector<Pixel> pixels (width*height);
    int n, x, y, maxIt=10000, zero [2], whiteLim=200;
    complex<double> element, val;
    zero [0]=width*2/3; zero [1]=height/2;
    //Display display("Mandelbrot", width, height);

    for (y=0;y<height;y++){
        for (x=0;x<width;x++){
            element=(double)3*(complex<double>
                (x-zero [0], zero [1]-y))/(double)width;
            val=0;
            n=0;
            do{
                val=val*val+element;
                n++;
            }while(n<maxIt && abs(val)<2);
        }
    }
}

```

```

    if(abs(val)<2){
        pixels[y*width+x].r=0;
        pixels[y*width+x].g=0;
        pixels[y*width+x].b=0;
    }
    else if(n > whiteLim){
        pixels[y*width+x].r=1;
        pixels[y*width+x].g=1;
        pixels[y*width+x].b=1;
    }
    else{
        pixels[y*width+x].r=0.97*(float)n/whiteLim+0.03;
        pixels[y*width+x].g=(float)n/whiteLim;
        pixels[y*width+x].b=0.85*(float)n/whiteLim+0.15;
    }
}
}
}

ToFile(pixels , width , height);

//while(display.open()) display.update(pixels);
return 0;
}

```

A.2. Programas para generar las imágenes de los conjuntos de Julia

El primero, usando el algoritmo de iteración inversa visto en [9] y la librería PixelToaster:

```

#include "PixelToaster.h"
#include<vector>
#include<complex>
#include<iostream>
#include<cstdio>

using namespace std;
using namespace PixelToaster;

int elementOf(int num[2], int list[][2], int n){
    int i=0, result=0;
    do{
        if(num[0]==list[i][0] && num[1]==list[i][1]) result = 1;
        i++;
    }while(i<n && result==0);
    return result;
}

```

```

}

int pointToPixel(complex<double> point ,
                 int pixel[2], int zero[2], int width, int height){
    pixel[0] = (int)(real(point)*(width-zero[0])/2.0+0.5)+zero[0];
    pixel[1] = (int)(imag(point)*(zero[1]-height)/2.0+0.5)+zero[1];
    return 1;
}

int pixelToPoint(int pixel[2], complex<double> &point ,
                 int zero[2], int width, int height){
    point = (double)4*(complex<double>
                    (pixel[0]-zero[0],zero[1]-pixel[1]))/
            (double)width;

    return 1;
}

int to255(float val){
    return (int)(val*255+0.5);
}

int toFile(vector<Pixel> image, int width, int height){
    unsigned char *rgbPixels = new unsigned char[width*height*3];
    int x, y;

    for(x=0;x<width;x++){
        for(y=0;y<height;y++){
            rgbPixels[(x+y*width)*3+0] = to255(image[x+y*width].r);
            rgbPixels[(x+y*width)*3+1] = to255(image[x+y*width].g);
            rgbPixels[(x+y*width)*3+2] = to255(image[x+y*width].b);
        }
    }
    FILE *file = fopen("juliaDep70.data", "wb");
    fwrite(rgbPixels, sizeof(unsigned char), width*height*3, file);
    fclose(file);
    delete [] rgbPixels;

    return 1;
}

int main(){
    const int width=600, height=width, deg=2
        , depth=70, pixLen = 10000;
    vector<Pixel> pixels(width*height);
    int i, j, k, zero[2], pointsNum=1;

```

```

int previousPointsNum=0, pointsLastItNum=1, pointsSFNum=1;
int currPix [2];
int pixelsSoFar [pixLen] [2];
complex<double> roots [deg], c, point;
zero [0]=width/2; zero [1]=height/2;
//Display display("Julia Set, c = -0.123 + 0.745i", width, height);

//c = complex<double>(0,0.68);
c = complex<double>(-0.123, 0.745);
//c = complex<double>(2,0);
//c = complex<double>(0.4,0.4);

pixelsSoFar [0][0]=(int)width;
pixelsSoFar [0][1]=zero [1];

i=0;
do{
    j=previousPointsNum;
    do{
        pixelToPoint (pixelsSoFar [j], point, zero, width, height);
        roots [0] = sqrt (point-c);
        roots [1] = -sqrt (point-c);
        k=0;
        do{
            pointToPixel (roots [k], currPix, zero, width, height);
            if(elementOf(currPix, pixelsSoFar, pointsSFNum)==0){
                pixelsSoFar [pointsSFNum][0] = currPix [0];
                pixelsSoFar [pointsSFNum][1]=currPix [1];
                pointsSFNum++;
                if(currPix [0] < width && currPix[0]>=0 &&
                    currPix [1] < height && currPix [1] >=0){
                    pixels [currPix [1]*width+currPix [0]].r = 1;
                    pixels [currPix [1]*width+currPix [0]].g = 1;
                    pixels [currPix [1]*width+currPix [0]].b = 1;
                }
            }
            k++;
        } while(k<deg && pointsSFNum<pixLen);
        j++;
    } while(j<pointsLastItNum && pointsSFNum<pixLen);
    previousPointsNum = pointsLastItNum;
    pointsLastItNum = pointsSFNum;
    i++;
} while(i<depth && pointsSFNum<pixLen);

if (i==depth) cout<<"Maximum_depth!_:D,_"

```

```

        <<pointsSFNum<<" _points!"<<endl;

    toFile(pixels , width , height);

    //while (display.open()) display.update(pixels);
    return 0;
}

```

El segundo, usando el algoritmo de tiempo de escape y la librería PixelToaster

```

#include "PixelToaster.h"
#include<vector>
#include<complex>
#include<cstdio>
#include<iostream>

using namespace std;
using namespace PixelToaster;

int to255(float val){
    return (int)(val*255+0.5);
}

int toFile(vector<Pixel> image,int width,int height){
    unsigned char *rgbPixels = new unsigned char [width*height*3];
    int x, y;

    for (x=0;x<width;x++){
        for (y=0;y<height;y++){
            rgbPixels [(x+y*width)*3+0] = to255 (image [x+y*width] . r );
            rgbPixels [(x+y*width)*3+1] = to255 (image [x+y*width] . g );
            rgbPixels [(x+y*width)*3+2] = to255 (image [x+y*width] . b );
        }
    }
    FILE *file = fopen("julia0.68iescapeTime150it.data","wb");
    fwrite(rgbPixels , sizeof(unsigned char) , width*height*3 , file );
    fclose(file);
    delete [] rgbPixels;

    return 1;
}

int main(){
    const int width=600, height=width;
    vector<Pixel> pixels (width*height);
    int n, x, y, maxIt=150, zero [2], whiteLim=50;
    complex<double> element, val;

```

```

zero[0]=width/2; zero[1]=height/2;
//Display display("Mandelbrot",width,height);

//element = complex<double>(0,0.68);
element = complex<double>(-0.123, 0.745);

for(y=0;y<height;y++){
  for(x=0;x<width;x++){
    val=(double)3*(complex<double>(x-zero[0],zero[1]-y))/
      (double)width;
    n=0;
    do{
      val=val*val+element;
      n++;
    }while(n<maxIt && abs(val)<2);
    if(abs(val)<2){
      pixels[y*width+x].r=0;
      pixels[y*width+x].g=0;
      pixels[y*width+x].b=0;
    }
    else if(n > whiteLim){
      pixels[y*width+x].r=1;
      pixels[y*width+x].g=1;
      pixels[y*width+x].b=1;
    }
    else{
      pixels[y*width+x].r=0.97*(float)n/whiteLim+0.03;
      pixels[y*width+x].g=(float)n/whiteLim;
      pixels[y*width+x].b=0.85*(float)n/whiteLim+0.15;
    }
  }
}

ToFile(pixels, width, height);

//while(display.open()) display.update(pixels);
return 0;
}

```

A.3. Programa para generar las imágenes de los conjuntos mencionados en el teorema de la flor

Usando tanto el algoritmo de tiempo de escape como el de iteración inversa visto en [9], y las librerías PixelToaster y polynomial-root-finder de Rice University:

```

#include "PixelToaster.h"
#include<vector>
#include<complex>
#include <iostream>
#include<cstdio>

extern "C" {
    #include "header.h"
}

using namespace std;
using namespace PixelToaster;

extern "C" {
    unsigned char null(dcomplex *p, dcomplex *pred, int *n,
                      dcomplex *root, double *maxerr, unsigned char flag);
}

int elementOf(int num[2], int list[][2], int n){
    int i=0, result=0;
    do{
        if(num[0]==list[i][0] && num[1]==list[i][1]) result = 1;
        i++;
    }while(i<n && result==0);
    return result;
}

int pointToPixel(dcomplex point, int pixel[2],
                int zero[2], int width, int height){
    pixel[0] = (int)(point.r*((double)width/3.0))+zero[0];
    pixel[1] = -(int)(point.i*((double)width/3.0))+zero[1];
    return 1;
}

int pixelToPoint(int pixel[2], dcomplex &point,
                int zero[2], int width, int height){
    point.r = 3.0*(double)(pixel[0]-zero[0])/(double)width;
    point.i = 3.0*(double)(zero[1]-pixel[1])/(double)width;
}

```

```

    return 1;
}

int pixelToPoint(int pixel[2], complex<double> &point,
                int zero[2], int width, int height){
    point = 3.0*(complex<double>(pixel[0]-zero[0],
                                zero[1]-pixel[1]))/(double)width;
    return 1;
}

int to255(float val){
    return (int)(val*255+0.5);
}

int toFile(vector<Pixel> image,int width,int height){
    unsigned char *rgbPixels = new unsigned char [width*height*3];
    int x, y;

    for(x=0;x<width;x++){
        for(y=0;y<height;y++){
            rgbPixels [(x+y*width)*3+0] = to255(image[x+y*width].r);
            rgbPixels [(x+y*width)*3+1] = to255(image[x+y*width].g);
            rgbPixels [(x+y*width)*3+2] = to255(image[x+y*width].b);
        }
    }
    FILE *file = fopen("flor.data","wb");
    fwrite(rgbPixels, sizeof(unsigned char), width*height*3, file);
    fclose(file);
    delete [] rgbPixels;

    return 1;
}

int main(){
    const int width=1000, height=width, deg=5;
    const int depth=80, psfLength=1000000;
    int displayVal=1;//show display or not
    int fileVal=0;//save to file or not
    vector<Pixel> pixels(width*height);
    int n, i, j, k, l, maxIt=100, whiteLim=50, zero[2];
    int previousPointsNum=0, pointsLastItNum=1;
    int pointsSFNum=1, degree=deg;
    int currPix[2], pixelsSoFar[psfLength][2];
    unsigned char error, flag=TRUE;
    double maxErr;

```

```

complex<double> val;
dcomplex pred[deg], roots[deg], coeffs[deg+1];
zero[0]=width/2; zero[1]=height/2;
pixelsSoFar[0][0]=(int)width;
pixelsSoFar[0][1]=zero[1];

//initial coefficients
coeffs[0].r = 0; coeffs[0].i = 0;
coeffs[1].r = 1; coeffs[1].i = 0;
coeffs[2].r = 0; coeffs[2].i = 0;
coeffs[3].r = 0; coeffs[3].i = 0;
coeffs[4].r = 0; coeffs[4].i = 0;
coeffs[5].r = 1; coeffs[5].i = 0;
coeffs[6].r = 0; coeffs[6].i = 0;

//escape-time algorithm
for (currPix[1]=0; currPix[1]< height; currPix[1]++){
  for (currPix[0]=0; currPix[0]< width; currPix[0]++){
    pixelToPoint(currPix, val, zero, width, height);
    n=0;
    do{
      val=val/(-val+complex<double>(1,0));
      n++;
    }while(n<maxIt && abs(val)<2);
    if(abs(val)<2){
      pixels[currPix[1]*width+currPix[0]].r=0;
      pixels[currPix[1]*width+currPix[0]].g=0;
      pixels[currPix[1]*width+currPix[0]].b=0;
    }
    else if(n > whiteLim){
      pixels[currPix[1]*width+currPix[0]].r=1;
      pixels[currPix[1]*width+currPix[0]].g=1;
      pixels[currPix[1]*width+currPix[0]].b=1;
    }
    else{
      pixels[currPix[1]*width+currPix[0]].r=
        0.7*(float)n/whiteLim+0.3;
      pixels[currPix[1]*width+currPix[0]].g=
        (float)n/whiteLim;
      pixels[currPix[1]*width+currPix[0]].b=
        0.85*(float)n/whiteLim+0.15;
    }
  }
}
}

```

border **using** the Inverse Iteration Algorithm

```

i=0;
do{
  j=previousPointsNum;
  do{
    pixelToPoint ( pixelsSoFar [ j ] , coeffs [ 0 ] , zero , width , height );
    coeffs [ 0 ] . r = -coeffs [ 0 ] . r ;
    coeffs [ 0 ] . i = -coeffs [ 0 ] . i ;
    null ( coeffs , pred , &degree , roots , &maxErr , ( unsigned char ) flag );
    k=0;
    do{
      pointToPixel ( roots [ k ] , currPix , zero , width , height );

      if ( elementOf ( currPix , pixelsSoFar , pointsSFNum ) == 0 ) {
        pixelsSoFar [ pointsSFNum ] [ 0 ] = currPix [ 0 ];
        pixelsSoFar [ pointsSFNum ] [ 1 ] = currPix [ 1 ];
        pointsSFNum++;

        if ( currPix [ 0 ] < width && currPix [ 0 ] >= 0
            && currPix [ 1 ] < height && currPix [ 1 ] >= 0 ) {
          pixels [ currPix [ 1 ] * width + currPix [ 0 ] ] . r = 1 ;
          pixels [ currPix [ 1 ] * width + currPix [ 0 ] ] . g = 1 ;
          pixels [ currPix [ 1 ] * width + currPix [ 0 ] ] . b = 1 ;
        }
      }
      k++;
    } while ( k < deg && pointsSFNum < psfLength );
    j++;
  } while ( j < pointsLastItNum && pointsSFNum < psfLength );
  previousPointsNum = pointsLastItNum ;
  pointsLastItNum = pointsSFNum ;
  i++;
} while ( i < depth && pointsSFNum < psfLength );

if ( fileVal ) toFile ( pixels , width , height );

cout << " done ! " << endl ;
if ( i == depth ) {
  cout << " Maximum _ depth ! _ : D " << endl ;
  cout << " Pixels _ drawn : _ " << pointsSFNum << endl ;
}

if ( displayVal ) {
  Display display ( " Flor " , width , height );
  while ( display . open () ) display . update ( pixels );
}
return 0 ;

```

}

Bibliografía

- [1] M. Abate. An introduction to discrete holomorphic local dynamics in one complex variable. *World Sci. Publ.*, 2008.
- [2] M.F. Atiyah y I.G. Macdonald. *Introducción al álgebra conmutativa*. Editorial reverté, 1973.
- [3] F. Cano, D. Cerveau, y J. Déserti. *Téorie Élémentaire des Feuilletages Holomorphes Singuliers*. Echelles. Belin, 2013.
- [4] H. Cartan. *Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*. selecciones científicas, primera edición, 1968.
- [5] J.B. Conway. *Function of one complex variable I*. Springer-Verlag, segunda edición, 1978.
- [6] F. Loray. Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux. <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/37/08/PDF/LeconsLink.pdf>, 2005.
- [7] A. Luque. Introducción a la dinámica de aplicaciones del círculo y problemas relacionados. <http://www.ma1.upc.edu/recerca/reports-recerca/repre-2009/Fitxers/rep200901luque.pdf>, junio 2009.
- [8] J. F. Mattei y R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 13:469–523, 1980.
- [9] M. McClure. Inverse iterations algorithms for Julia sets. *Mathematica in Education and Research*, Volume 7(Issue 2), 1998.
- [10] J. Milnor. Dynamics in one complex variable. introductory lectures, 1990. <http://arxiv.org/pdf/math/9201272v1.pdf>.
- [11] J. Milnor. *Dynamics in one Complex Variable*. Annals Of Mathematics Studies. Princeton University Press, tercera edición, 2006.
- [12] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, segunda edición, 2002.
- [13] I. Quilez. De la dinámica a la geometría en el conjunto de mandelbrot. <http://www.iquilezles.org/>, 2002.

-
- [14] A. Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equations $Ady = Bdx$. *American Journal of Mathematics*, 90, 1968.
- [15] C. L. Siegel y J. Moser. *Lectures on Celestial Mechanics*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 1995.
- [16] C.L. Siegel. Iteration of analytic functions. *Ann. of Math.*, 43:607–612, October 1942.
- [17] R. V. Solé y S. C. Manrubia. *Orden y caos en sistemas complejos. Fundamentos*. Politext. Edicions UPC, primera edición, 2001.