



Universidad de Valladolid

Facultad de Ciencias

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

Espacios de Hilbert, Resonancias y el Modelo de Friedrichs

Autor: Julen De Clercq Blanco

Tutor/es: Manuel Gadella Urquiza.

Índice General

I	Resumen	1
II	Espacios de Hilbert y Modelo de Friedrichs	3
1.	CONCEPTOS PREVIOS	4
1.1.	ESPACIOS VECTORIALES	4
1.1.1.	ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO	4
1.1.2.	SUCESIONES DE CAUCHY	6
1.2.	ESPACIOS DE HILBERT.	6
1.2.1.	ESPACIOS DE HILBERT DE DIMENSIÓN FINITA.	6
1.2.2.	ESPACIOS DE HILBERT DE DIMENSIÓN INFNITA.	6
1.3.	OPERADORES ACOTADOS.	8
1.3.1.	OPERADOR ADJUNTO.	9
1.3.2.	OPERADORES UNITARIOS.	9
1.3.3.	OPERADOR PROYECTOR.	9
1.4.	OPERADORES NO ACOTADOS.	11
1.4.1.	OPERADOR ADJUNTO.	14
1.4.2.	OPERADOR AUTOADJUNTO	15
1.4.3.	OPERADOR SIMÉTRICO	16
1.5.	TEORÍA ESPECTRAL.	21
2.	INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA MEDIDA	22
2.1.	UNA INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO FUNCIONAL	24
2.2.	NUEVA CLASIFICACIÓN DEL ESPECTRO PARA UN OPERADOR AUTOADJUNTO	29
3.	EL MODELO DE FRIEDRICHS	32
3.1.	RESONANCIAS EN MECÁNICA CUÁNTICA	32
3.2.	ESPACIOS DE HILBERT EQUIPADOS	35
3.3.	EL MODELO DE FRIEDRICHS	39
III	Conclusiones	47
IV	Bibliografía	50

Parte I

Resumen

Resumen

A lo largo del Grado en Física se introduce al estudiante a la *Mecánica Cuántica*. Usualmente se centran los esfuerzos en los estados estacionarios de las partículas, aquellos que no evolucionan con el tiempo.

Es sabido que, en la mayoría de situaciones en la naturaleza, no se produce esta situación ideal en la que un estado permanece inalterado de manera infinita. Sino que se producen en muchas ocasiones procesos de decaimiento cuyo estudio requiere de conceptos matemáticos que se escapan a las competencias del grado.

El análisis de los estados inestables, o como las llamaremos en adelante, resonancias, puede realizarse de diversas maneras. En el presente trabajo se llevará a cabo un proceso de obtención de los estados resonantes a través del *Modelo de Friedrichs*.

El *Modelo de Friedrichs* no es único, sino que tiene diferentes versiones según el caso que se quiera estudiar. Aquí daremos una introducción al *Modelo de Friedrichs* más elemental, válido para sistemas no relativistas y con un espectro concreto el cual precisaremos más adelante.

Para abordar esta tarea es preciso el conocimiento de algunos conceptos matemáticos previos. Por ello gran parte de la memoria consiste en una introducción a estos. Uno de los más importantes es el de *Espacio de Hilbert*, el cual se desarrollará de una manera más profunda de la necesaria para los intereses del modelo.

El trabajo se divide en 3 bloques con el fin de dotarlo de una estructura clara que permita al lector abordar este estudio de la manera más eficiente posible. En el primer apartado se da una introducción a los espacios de Hilbert, cuyo estudio se realiza de forma general debido a la importancia de estos en la física, en particular en la Mecánica Cuántica. Posteriormente se introducen en la sección 2 algunos conceptos básicos sobre teoría de la medida, lo que nos permitirá hacer una clasificación del espectro, necesaria para entender el marco en el cual desarrollaremos este *Modelo de Friedrichs* más elemental. Una vez vistos estos conceptos se pasa, en la tercera sección, al estudio del *Modelo de Friedrichs*, para ello damos una descripción de como se producen y se estudian las resonancias en la Mecánica Cuántica. El principal objetivo de este bloque será encontrar los *estados de Gamow* que definen los estados resonantes, para ello es necesario dar antes unas breves nociones sobre *Espacios de Hilbert Equipados*.

Parte II

Espacios de Hilbert y Modelo de Friedrichs

Capítulo 1

CONCEPTOS PREVIOS

Como hemos dicho, la razón última de este trabajo es el estudio de las resonancias a través del modelo de Friedrichs. Para abordar esta tarea en las mejores condiciones, será necesario introducir una serie de conceptos matemáticos sobre los que no se han ahondado en el grado. Entre todos ellos destacan los espacios de Hilbert, los cuales constituyen el motivo principal de esta sección.

Lo que el lector encontrará en las siguientes páginas será una introducción a dichos espacios y los principales operadores que actúan en ellos pasando por una primera clasificación de su espectro. Para ello, tomamos como punto de partida el concepto de espacio vectorial.

1.1. ESPACIOS VECTORIALES

Definición. Un espacio vectorial sobre un cuerpo K , será un grupo abeliano $(X, +)$ junto con una ley externa llamada producto escalar:

$$K \times X \longrightarrow X$$

Verificando las siguientes propiedades:

i.) $\forall a, b \in K ; \forall x \in X, \quad a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$

ii.) $\forall a \in K ; \forall x, y \in X, \quad a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$

iii.) $\forall a, b \in K ; \forall x \in X, \quad (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$

iv.) $\forall x \in X, \exists e \in K / e \cdot x = x$

Sea entonces X un espacio complejo cuyos elementos son x (es decir $x \in X$), puede escribirse cualquier elemento de dicho espacio por un subconjunto finito de vectores linealmente independientes. A este subconjunto se le conoce como base, que se denotará como: $\{e_i\}$.

Por ser vectores linealmente independientes deberán cumplir:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0. \quad (1.1)$$

Donde $\lambda_1 \dots \lambda_n$ son constantes arbitrarias.

Esto es en general cierto para subespacios de dimensión finita, sin embargo, lo que aquí interesará serán los espacios de dimensión infinita.

Antes de pasar al estudio de los espacios de Hilbert es necesario definir los espacios con producto interno.

1.1.1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Definición. Sea un espacio vectorial X , diremos que es además un espacio con producto interno si existe una aplicación de X^2 sobre el codominio de los complejos \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} X \times X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

La cual deberá satisfacer las siguientes condiciones:

i.) *Linealidad por la derecha.*

$$\forall x, y, z \in X; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\langle x | \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x | y \rangle + \beta \langle x | z \rangle$$

ii.) *Antilinealidad por la izquierda.*

Previamente hemos demostrado como el producto interno es lineal por la derecha, a diferencia del producto escalar el producto interno es antilineal por la izquierda.

$$\forall x, y, z \in X; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\langle \alpha x + \beta y | z \rangle = \langle z | \alpha x + \beta y \rangle^* = (\alpha \langle z | x \rangle + \beta \langle z | y \rangle)^* = \alpha^* \langle z | x \rangle^* + \beta^* \langle z | y \rangle^* = \alpha^* \langle x | z \rangle + \beta^* \langle y | z \rangle$$

Nótese como si el codominio fuese \mathbb{R} , esto es, si se tratase de un producto escalar, también se cumpliría la condición de linealidad por la izquierda, se dice entonces que el producto escalar es *bilineal*.

De las propiedades *i* y *ii* se dice que el producto interno sobre los complejos tiene forma *sesquial*.

iii.) *Conjugación.*

$$\forall x, y \in X;$$

$$\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle^*$$

iv.) *Es definido positivo.*

$$\forall x \in X;$$

$$\langle x | x \rangle \geq 0$$

Siendo cero si y solo si $x = \vec{0}$.

El producto interno permite definir la norma de un vector como:

$$\|x\| := +\sqrt{\langle x | x \rangle} \tag{1.2}$$

De esta definición pueden extraerse las siguientes propiedades:

i.) *Es definida positiva.*

$$\|x\| \geq 0$$

Siendo cero si y solo si $x = \vec{0}$.

ii.) *Es lineal respecto al producto.*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}; \quad \forall x \in X$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

iii.) *Cumple la desigualdad triangular.*

$$\forall x, y \in X$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

iv.) *Cumple la desigualdad de Schwartz.*

$$\forall x, y \in X$$

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Además la norma permite definir la distancia entre dos vectores del espacio. Sean $x, y \in X$, la distancia entre dos vectores viene dada por:

$$d(x, y) := \|x - y\| \tag{1.3}$$

De esta definición se desprenden de manera inmediata las siguientes propiedades:

i.) $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$

ii.) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii.) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

De la última desigualdad puede deducirse que la distancia definida es la mas pequeña existente entre dos vectores del espacio.

1.1.2. SUCESIONES DE CAUCHY

Definición. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión, diremos que es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $p, q > N$ se verifica:

$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon \tag{1.4}$$

Es decir, toda sucesión con límite es sucesión de Cauchy. Por tanto en los espacios vectoriales de dimensión finita cualquier sucesión de Cauchy es finita.

Si X no es de dimensión finita hay sucesiones de Cauchy que no tienen límite.

1.2. ESPACIOS DE HILBERT.

Llamaremos espacios de Hilbert a un espacio con producto interno tal que cualquier sucesión de Cauchy tiene límite.

De manera general pueden distinguirse dos tipos de espacios de Hilbert: Los de dimensión finita y los de dimensión infinita.

1.2.1. ESPACIOS DE HILBERT DE DIMENSIÓN FINITA.

Estos espacios se caracterizan porque cualquier base de dicho espacio tiene un número finito de vectores. En este tipo de espacios mediante el proceso de Gram-Schmidt puede demostrarse que es posible hallar una base ortonormal de vectores del espacio.

1.2.2. ESPACIOS DE HILBERT DE DIMENSIÓN INFINITA.

Este tipo de espacios es el empleado en la descripción de la mecánica cuántica, en concreto los espacios separables los cuales se caracterizan por contener un conjunto denso numerable. Es por esta razón que los emplearemos en el estudio de resonancias.

En estos espacios existen conjuntos ortonormales completos, que tienen las siguientes características:

i.) *Son normados.*

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita y ψ_n un elemento de un conjunto ortonormal de dicho espacio, entonces este vector es normado:

$$\|\psi_n\| = 1$$

ii.) *Los vectores del conjunto son ortonormales entre sí.*

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{n,m}$$

Esta propiedad junto con (i) establecen la condición de ortonormalización entre vectores del conjunto.

iii.) *Cualquier vector del espacio puede desarrollarse como suma de los vectores del conjunto ortonormal:*
Sea $\psi \in H$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n$$

Determinemos ahora cual es la forma de los coeficientes a_n . Comencemos por definir la serie:

$$S_n := \sum_{n=1}^N a_n \psi_n \quad (1.5)$$

La cual converge a ψ .

$$S_n \longrightarrow \psi$$

por tratarse de un espacio de Hilbert, ya que se ha de cumplir la condición de convergencia:

$$\|S_N - \psi\| < \varepsilon \quad (1.6)$$

Si no se estuviera trabajando en un espacio de este tipo no sería posible el desarrollo de un vector del espacio en sumas de vectores del conjunto ortonormal.

Realicemos entonces el producto interno del vector ψ_n por el vector general ψ , esto es:

$$\langle \psi_n | \psi \rangle = \langle \psi_n | \sum_{p=1}^{\infty} a_p \psi_p \rangle = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \langle \psi_n | \psi_p \rangle = a_n \quad (1.7)$$

Donde en la última igualdad se ha usado la condición de ortogonalidad (ii). Se concluye así que:

$$a_n = \langle \psi_n | \psi \rangle$$

De manera que el vector general $\psi \in H$ puede desarrollarse de la siguiente manera en función de los vectores del conjunto ortonormal:

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n | \psi \rangle \psi_n \quad (1.8)$$

Puede verse a raíz de estas propiedades como un conjunto ortonormal completo es una generalización del concepto de base ortonormal para espacios de Hilbert de dimensión infinita.

Un ejemplo de este tipo de espacios lo constituyen las funciones de cuadrado integrable:

$$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Estas funciones que constituyen un espacio de Hilbert, tienen definido su producto interno de la siguiente manera:

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx \quad (1.9)$$

Y por ser de cuadrado integrable deben satisfacer la condición:

$$\int |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(x) | f(x) \rangle dx < \infty \quad (1.10)$$

Puede demostrarse también que este tipo de funciones tienen límite en el sentido de Cauchy, así $\forall \varepsilon > 0$; existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > N$:

$$\|f_n - f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 dx} < \varepsilon \quad (1.11)$$

Un tipo particular de esta clase funciones son los polinomios de Hermite, cuyas funciones de la base ortonormal son:

$$\psi_n(x) = A_n H_n e^{-\alpha x^2} \quad \alpha > 0 \quad (1.12)$$

Donde A_n se escoge de forma que el módulo de ψ_n se normalice a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1 \quad (1.13)$$

De manera que cualquier función puede escribirse como combinación de los elementos de la base ortonormal:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

Donde, como se vió en (1.7) y en consonancia con la definición de producto interno hecha en (1.9):

$$a_n = \langle \psi_n | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi(x) dx \quad (1.14)$$

1.3. OPERADORES ACOTADOS.

En lo que nos concierne, los espacios de Hilbert, definimos operador como una aplicación continua de un espacio espacio de Hilbert en si mismo.

$$A: H \longrightarrow H$$

Para nuestros intereses será suficiente estudiar los operadores lineales, es decir, aquellos que cumplen la propiedad de linealidad:

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A\varphi + \beta A\psi \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \forall \varphi, \psi \in H \quad (1.15)$$

Distinguiremos entre operadores acotados y no acotados. Diremos que el operador A es acotado si existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall \psi \in H$:

$$\|A\psi\| \leq K\|\psi\| \quad (1.16)$$

Así mismo, sea ψ el límite de la sucesión ψ_n , diremos que un operador es continuo cuando la imagen de la sucesión tiende a la imagen del límite para cada uno de los puntos:

$$A\psi_n \longrightarrow A\psi \quad (1.17)$$

Estos enunciados permiten enunciar el siguiente teorema:

Teorema. A es un operador continuo si y solo si es acotado.

Demostración. En primer lugar se demostrará como la condición de continuidad implica la de acotación. Para ello se propone la siguiente hipótesis, contraria a la de acotación:

$$\forall K > 0; \exists \psi_k / \|A\psi_k\| > K\|\psi_k\| \quad (1.18)$$

Particularicemos para el caso en que $K \in \mathbb{N}$, para hacer esto patente pondremos $K = n$:

$$\forall n > 0; \exists \psi_n / \|A\psi_n\| > n\|\psi_n\| \quad (1.19)$$

Dividiendo ambos lados de (1.19) por la norma $n\|\psi_n\|$:

$$\left\| A \frac{\psi_n}{n\|\psi_n\|} \right\| > 1 \quad (1.20)$$

Poniendo $\varphi_n = \frac{\psi_n}{n\|\psi_n\|}$:

$$\|A\varphi_n\| > 1 \quad (1.21)$$

La norma del vector φ_n es:

$$\|\varphi_n\| = \left\| \frac{\psi_n}{n\|\psi_n\|} \right\| = \frac{1}{n} \left\| \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|} \right\| = \frac{1}{n} \frac{\|\psi_n\|}{\|\psi_n\|} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (1.22)$$

Teniendo en cuenta la definición de continuidad (1.17), y considerando el límite anterior:

$$\begin{aligned} \varphi_n &\longrightarrow 0 \\ A\varphi_n &\longrightarrow A \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Pero hemos visto en (1.21) cómo el módulo de $A\varphi_n$ es mayor que uno, lo que entra en contradicción con la condición de continuidad. Se concluye entonces que si un operador es continuo debe ser también acotado.

Demostremos ahora lo contrario, que la acotación de un operador implica su continuidad.

Supongamos ahora que A es acotado. La condición de continuidad se ve satisfecha si el operador A es continuo en el 0 de H , de manera que es suficiente demostrar la continuidad en este punto. Sea pues:

$$\psi_n \longrightarrow 0$$

Como A es acotado, cumple la condición (1.16):

$$\|A\psi_n\| \leq K\|\psi_n\| = K\|\psi_n - 0\| \longrightarrow 0 \quad (1.23)$$

Quedando demostrada también la condición de continuidad a partir de la de acotación. ■

1.3.1. OPERADOR ADJUNTO.

Definición. Sea A acotado, existe un único operador acotado al que llamaremos adjunto de A , A^+ , tal que $\forall \varphi, \psi \in H$:

$$\langle A^+ \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | A \psi \rangle \quad (1.24)$$

Teorema. El adjunto de un operador acotado es acotado.

Demostración. Sea $\psi \in H$:

$$\|A^+ \psi\|^2 = \langle A^+ \psi | A^+ \psi \rangle = \langle \psi | A A^+ \psi \rangle \leq \| \psi \| \| A A^+ \psi \| \leq \| \psi \| \| A \| \| A^+ \psi \| \quad (1.25)$$

Donde se ha usado la desigualdad de Schwarz.

Efectivamente, puede verse como $\|A^+ \psi\|$ está acotado por $\|A\| \| \psi \|$ para un ψ genérico de H . ■

Algunas propiedades de estos operadores son las siguientes:

i.) $(A + B)^+ = A^+ + B^+$

ii.) $(AB)^+ = B^+ A^+$

1.3.2. OPERADORES UNITARIOS.

Definición. Se definen como operadores unitarios aquellos que verifican:

$$U U^+ = U^+ U = \mathbb{I} \quad (1.26)$$

De esta definición se concluye rápidamente que:

$$U^+ = U^{-1} \quad (1.27)$$

Teorema. El inverso de un operador unitario es lineal y unitario.

Teorema. El operador unitario es acotado y por tanto continuo.

1.3.3. OPERADOR PROYECTOR.

Definición. Definiremos el proyector como un operador acotado de un espacio de Hilbert en si mismo con la propiedad:

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \quad (1.28)$$

Dos ejemplos triviales de operadores proyección son los operadores identidad y cero:

$$\mathbb{I} \varphi = \varphi \quad \mathbb{O} \varphi = 0$$

Con el fin de estudiar este tipo de operadores de una manera mas completa, daremos a continuación una breve introducción a los espacios cerrados, los cuales serán desarrollados de manera mas detallada en apartados posteriores, y que nos facilitarán ahora una mejor comprensión de los proyectores.

Definición. Diremos que un subespacio M es cerrado si y solo si para toda sucesión $\{f_n\} \subset M$ tal que, $f_n \rightarrow f$, se verifica que $f \in M$. Es decir, si el límite de dicha sucesión está en M .

Proposición. Sea H un espacio de Hilbert, y M un subconjunto de H , el conjunto complementario M^\perp es un subespacio independientemente de que lo sea o no M .

Demostración. Sea M un subconjunto de H , definimos M^\perp como:

$$M^\perp = \{ g \in H; \langle g | f \rangle = 0, \forall f \in M \} \quad (1.29)$$

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f \in M$ y $g, h \in M^\perp$, vamos a demostrar que una combinación lineal los vectores de M^\perp da como resultado un vector ortogonal a M , y por tanto perteneciente también a M^\perp .

$$\langle \alpha g + \beta h | f \rangle = \alpha^* \langle g | f \rangle + \beta^* \langle h | f \rangle = 0 + 0 = 0 \quad (1.30)$$

Quedando demostrado que M^\perp es un subespacio vectorial. ■

Proposición. M^\perp es siempre cerrado.

Demostración. Sea $\{g_n\}$ una sucesión de M^\perp , entonces $\forall f \in M$:

$$0 = \langle g_n | f \rangle \longrightarrow \langle g | f \rangle = 0 \Rightarrow g \in M^\perp \quad (1.31)$$

Pues el producto escalar es una aplicación continua. ■

Si M es un subespacio cerrado, entonces:

i.) $M = M^{\perp\perp}$.

ii.) $H = M \oplus M^\perp$.

Habiendo introducido los espacios cerrados definimos el operador \mathcal{P} como una aplicación en el espacio de Hilbert sobre el espacio cerrado (no trivial) M , que es también un espacio de Hilbert.

$$\mathcal{P}: H = M \oplus M^\perp \longrightarrow M$$

De manera que siendo f un elemento del espacio H , este vector podrá descomponerse de forma única como suma de un vector de M y un vector de M^\perp :

$$f = f_m + f_v \quad (1.32)$$

Donde $f_m \in M$, y $f_v \in M^\perp$.

Así, la acción de \mathcal{P} sobre el vector general $f \in H$ viene definida por:

$$\mathcal{P}f := f_m \quad (1.33)$$

Veamos a continuación una serie de propiedades de este operador:

i.) \mathcal{P} es lineal.

Demostración. Tomemos $f, g \in H$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Se ha visto como los vectores f y g pueden escribirse en términos de vectores ortogonales entre sí:

$$f = f_m + f_v \quad g = g_m + g_v \quad (1.34)$$

Puede llevarse a cabo la suma de ambos vectores:

$$\alpha f + \beta g = (\alpha f_m + \beta g_m) + (\alpha f_v + \beta g_v) \quad (1.35)$$

Aplicamos entonces \mathcal{P} al vector resultante:

$$\mathcal{P}(\alpha f + \beta g) = \alpha f_m + \beta g_m = \alpha \mathcal{P}f + \beta \mathcal{P}g \quad (1.36)$$

■

ii.) \mathcal{P} es acotado.

Demostración: Sea $f \in H$, el cuadrado de la norma de este vector es:

$$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle = \langle f_m + f_v | f_m + f_v \rangle = \langle f_m | f_m \rangle + \langle f_v | f_v \rangle = \|f_m\|^2 + \|f_v\|^2 \quad (1.37)$$

Se concluye entonces que:

$$\|f\| \geq \|f_m\| \quad (1.38)$$

Por ende, si se aplica el operador \mathcal{P} a f :

$$\|\mathcal{P}f\| = \|f_m\| \leq \|f\| \quad (1.39)$$

Demostrándose que \mathcal{P} está acotado por $K = 1$ ■.

iii.) $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$.

Demostración: Sea $f \in H$:

$$\mathcal{P}^2 f = \mathcal{P}(\mathcal{P}f) = \mathcal{P}f_m = f_m = \mathcal{P}f \quad (1.40)$$

■

iv.) \mathcal{P} es autoadjunto.

Demostración. La condición de ser autoadjunto, se traduce en la igualdad:

$$\langle g|\mathcal{P}f \rangle = \langle \mathcal{P}g|f \rangle \quad \forall f, g \in H \quad (1.41)$$

Desarrollemos estos productos para ver si es cierta:

$$\begin{aligned} \langle g|f_m \rangle &= \langle g_m|f \rangle \\ \langle g_m + g_v|f_m \rangle &= \langle g_m|f_m + f_v \rangle \\ \langle g_m|f_m \rangle &= \langle g_m|f_m \rangle \end{aligned}$$

Se llega entonces a que el operador \mathcal{P} es efectivamente autoadjunto, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+$. ■

Puede verse como de las propiedades *iii* y *iv* el operador \mathcal{P} es un proyector.

Recogemos entonces las ideas mas importantes de la existencia de proyectores. Sea \mathcal{P} un proyector no trivial, entonces existe un único subespacio cerrado $M \subset H$, tal que:

- i.) $\forall f \in M; \mathcal{P}f = f$.
- ii.) $\forall f \in M^\perp; \mathcal{P}f = \vec{0}$.
- iii.) $H = M \oplus M^\perp$.

La correspondencia entre proyectores y espacios cerrados es biunívoca, esto es, si existe \mathcal{P} existe M y viceversa.

1.4. OPERADORES NO ACOTADOS.

Los operadores no acotados, a diferencia de los acotados, no están definidos en todo el espacio de Hilbert, sino en un dominio denso $\mathcal{D}(A)$.

Definición. Sea A un operador con un dominio denso $\mathcal{D}(A)$, diremos que es cerrado si para toda sucesión de vectores $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$, tales que verifiquen:

- 1.- $f_n \rightarrow f \in H$.
- 2.- $Af_n \rightarrow g \in H$.

Se cumple:

- 1.- $f \in \mathcal{D}(A)$
- 2.- $g = Af$

De esta definición, se comprueba que un operador cerrado se comporta como un operador continuo para ciertas sucesiones que verifican las condiciones dadas.

De estas condiciones se desprende que todos los operadores continuos son cerrados pero no viceversa.

Consideremos ahora el producto cartesiano de dos espacios de Hilbert, $(f, g) \in H \times H$, al cual se puede dotar de una estructura de espacio vectorial.

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}; (f_1, g_1), (f_2, g_2) \in H \times H$, definiremos la suma del producto cartesiano como:

$$\lambda_1(f_1, g_1) + \lambda_2(f_2, g_2) = (\lambda_1 f_1, \lambda_1 g_1) + (\lambda_2 f_2, \lambda_2 g_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \quad (1.42)$$

Definición. Sea el operador A , con dominio $\mathcal{D}(A)$, definiremos el grafo de A como:

$$\mathcal{G}_A := \{(f, Af) / \forall f \in \mathcal{D}(A)\} \quad (1.43)$$

El cual es un subespacio vectorial de $H \times H$.

Demostración.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $(f, Af), (g, Ag) \in \mathcal{G}_A$

$$\alpha(f, Af) + \beta(g, Ag) = (\alpha f + \beta g, A(\alpha f + \beta g)) \quad (1.44)$$

■

Definiremos el producto escalar de dos elementos del producto cartesiano de dos espacios de Hilbert de la forma:

$$\langle (f_1, g_1) | (f_2, g_2) \rangle := \langle f_1 | f_2 \rangle + \langle g_1 | g_2 \rangle \quad (1.45)$$

Con este producto escalar, la norma viene dada de la forma:

$$\|(f, g)\| = \sqrt{\langle (f, g) | (f, g) \rangle} = \sqrt{\langle f | f \rangle + \langle g | g \rangle} = \sqrt{\|f\|^2 + \|g\|^2} \quad (1.46)$$

Y de aquí puede extraerse de manera inmediata la siguiente igualdad:

$$\|(f, g)\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad (1.47)$$

La cual será útil en demostraciones posteriores.

Proposición. Diremos que (f_n, g_n) converge a (f, g) en $H \times H$ si y solo si $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en H .

Demostración. Para demostrar la proposición anterior, supongamos en primer lugar que se verifica: $(f_n, g_n) \rightarrow (f, g)$. Si esto es cierto, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existirá $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se verifica:

$$\|(f_n, g_n) - (f, g)\| < \varepsilon \quad (1.48)$$

Operando sobre esta definición de convergencia, y tras elevar al cuadrado ambos lados de la desigualdad, puede llegarse a:

$$\|(f_n - f, g_n - g)\|^2 < \varepsilon^2 \quad (1.49)$$

En este punto aplicamos la igualdad (1.47) encontrada anteriormente a partir de la definición de norma:

$$\|f_n - f\|^2 + \|g_n - g\|^2 < \varepsilon^2 \quad (1.50)$$

De donde se deduce de manera inmediata:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &< \varepsilon \\ \|g_n - g\| &< \varepsilon \end{aligned} \quad (1.51)$$

Quedando así demostrado que si (f_n, g_n) converge a (f, g) , entonces f_n converge a f , y g_n a g . Veamos ahora el recíproco, es decir, si f_n converge a f , y g_n a g , entonces $(f_n, g_n) \rightarrow (f, g)$. Escribamos para ello la siguiente norma:

$$\|(f_n, g_n) - (f, g)\|^2 = \|(f_n - f, g_n - g)\|^2 = \|f_n - f\|^2 + \|g_n - g\|^2 \quad (1.52)$$

Las hipótesis de partida de convergencia de las series $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$, nos permiten escribir las siguientes definiciones:

- i.) Si $f_n \rightarrow f$, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists n > N' \in \mathbb{N} / \|f_n - f\| < \varepsilon$
- ii.) Si $g_n \rightarrow g$, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists n > N'' \in \mathbb{N} / \|g_n - g\| < \varepsilon$

Donde se ha puesto N' diferente a N'' debido a la posible diferencia en la velocidad de convergencia de cada serie. Pongamos pues $N = \max\{N', N''\}$, de manera que para $n > N$ ambas condiciones de convergencia se cumplen.

Llevemos estas definiciones a la norma definida en (1.52), de forma que:

$$\|f_n - f\|^2 + \|g_n - g\|^2 < 2\varepsilon^2 \quad (1.53)$$

Lo cual es equivalente a escribir:

$$\forall \sqrt{2}\varepsilon > 0, \exists N/n > N$$

$$\|(f_n, g_n) - (f, g)\| < \sqrt{2}\varepsilon \quad (1.54)$$

Quedando demostrada la convergencia de (f_n, g_n) a (f, g) . ■

Definición. Sea G un subespacio de H , diremos que es cerrado si y solo si para toda sucesión $\{f_n\} \subset G$ tal que $f_n \rightarrow f$, entonces $f \in G$.

Teorema. Sea A un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(A)$, será cerrado si y solo si el grafo de A es cerrado en $H \times H$.

Demostración. Comencemos por demostrar que si \mathcal{G}_A es cerrado, entonces A también lo es. Para ello consideremos una sucesión convergente de \mathcal{G}_A :

$$(f_n, Af_n) \longrightarrow (f, g) \quad (1.55)$$

Por ser \mathcal{G}_A cerrado, debe verificarse para el límite anterior que:

$$(f, g) = (f, Af) \in \mathcal{G}_A \quad (1.56)$$

De donde puede verse de la última igualdad que A es cerrado por ser $f \in \mathcal{D}(A)$ y por converger $Af_n \longrightarrow g = Af$.

Veamos ahora que A cerrado implica \mathcal{G}_A cerrado. Para ello consideremos una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(A)$ que cumple los requisitos para que A sea cerrado:

$$i.) f_n \longrightarrow f \in \mathcal{D}(A)$$

$$ii.) Af_n \longrightarrow g = Af$$

Podemos construir entonces el producto cartesiano:

$$(f_n, Af_n) \longrightarrow (f, g) = (f, Af) \in \mathcal{G}_A \quad (1.57)$$

Concluyendo así que el grafo es cerrado. ■

Definición. Sean A y B dos operadores con dominios densos $\mathcal{D}(A)$ y $\mathcal{D}(B)$. Diremos que A extiende a B , y lo designaremos como $B \prec A$, si:

$$1.- \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$$

$$2.- \forall f \in \mathcal{D}(B), Af = Bf.$$

Definición. Sea B un operador con dominio $\mathcal{D}(B)$, diremos que es cerrable si existe un operador cerrado A tal que $B \prec A$.

Proposición. Un operador A es cerrable si existe un operador cerrado B tal que:

$$\overline{\mathcal{G}_A} = \mathcal{G}_B \quad (1.58)$$

Demostración. Veamos como la ecuación (1.58) implica que el operador A es cerrable. Es más, A es cerrable por el operador B que permite definir el grafo \mathcal{G}_B .

Si se cumple la igualdad (1.58), entonces deberá existir un operador B que de lugar al grafo \mathcal{G}_B . Además, en tanto que el grafo de B es igual a la adherencia del grafo de A , y teniendo en cuenta que la adherencia de un espacio vectorial es siempre un espacio cerrado, concluimos que el grafo de B ha de ser también cerrado.

Ahora bien, anteriormente se demostró que si el grafo de un operador es cerrado también lo ha de ser el operador y por tanto el operador B es cerrado.

Tengamos en cuenta ahora que una propiedad de los espacios topológicos es que todo espacio está contenido en su adherencia (esto no es difícil de demostrar, para ello basta encontrar una serie que converja a cada vector del subespacio. Esta serie siempre se puede encontrar considerando una en la que todos los elementos son el vector escogido). Lo cual permite escribir:

$$\mathcal{G}_A \subset \overline{\mathcal{G}_A} = \mathcal{G}_B \quad (1.59)$$

Un elemento cualquiera de \mathcal{G}_A es (f, Af) con $f \in \mathcal{D}(A)$. Como $\mathcal{G}_A \subset \mathcal{G}_B$, este elemento pertenecerá también a \mathcal{G}_B . Sin embargo, \mathcal{G}_B está definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}_B := \{(g, gB)/g \in \mathcal{D}(B)\} \quad (1.60)$$

Esto quiere decir que, para todo vector $f \in \mathcal{D}(A)$:

$$(f, Af) = (f, Bf) \quad (1.61)$$

Con lo que:

$$Af = Bf \quad \forall f \in \mathcal{D}(A) \quad (1.62)$$

La igualdad (1.62) junto con que B es cerrado, nos permite concluir que $A \prec B$. ■

1.4.1. OPERADOR ADJUNTO.

Proposición. Sea \mathcal{D} un subespacio denso de un espacio de Hilbert H , supongamos que existe $f \in H$ tal que $\langle f | g \rangle = 0, \forall g \in \mathcal{D}$, entonces $f = 0$.

Demostración. Por ser \mathcal{D} un subespacio denso en H , siempre podremos encontrar una sucesión $\{g_n\}$ en \mathcal{D} que converga a cualquier vector de H , en decir $\{g_n\} \rightarrow f$, con $f \in H$.

Consideremos ahora el producto interno de g_n con f , $\langle g_n | f \rangle$, donde g_n es el elemento n -ésimo de la sucesión $\{g_n\}$:

$$\{g_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \quad (1.63)$$

La hipótesis de partida es que f es ortogonal a cualquier vector en \mathcal{D} , en concreto lo será a g_n :

$$\langle g_n | f \rangle = 0 \quad (1.64)$$

De manera que, teniendo en cuenta la linealidad del producto interno y la expresión (1.63):

$$\langle \{g_n\} | f \rangle = 0 \quad (1.65)$$

Según la propia definición de $\{g_n\}$:

$$\langle \{g_n\} | f \rangle = 0 \rightarrow \langle f | f \rangle = 0 \quad (1.66)$$

Esta última igualdad expresa que $\|f\|^2 = \langle f | f \rangle = 0$. Y teniendo en cuenta las propiedad i del módulo definido en (1.2) esto solo puede ocurrir si $f = 0$. ■

Para definir el operador adjunto de un operador A , con dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en H , definiremos antes su dominio. Esto nos permitirá conocer sobre que vectores puede actuar dicho operador.

Definamos entonces \mathcal{D}^+ de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}^+ := \{f \in H / \exists g \in H / \langle f | Ah \rangle = \langle g | h \rangle, \forall h \in \mathcal{D}(A)\} \quad (1.67)$$

A raíz de esta definición, podemos enunciar una serie de propiedades:

i. \mathcal{D}^+ es un espacio vectorial.

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{D}^+$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces se debe verificar para todo $h \in \mathcal{D}(A)$:

$$\begin{aligned} \langle f_1 | Ah \rangle &= \langle g_1 | h \rangle \\ \langle f_2 | Ah \rangle &= \langle g_2 | h \rangle \end{aligned} \quad (1.68)$$

Multipliquemos ahora la primera igualdad en (68) por α^* , y la segunda por β^* , y realicemos la suma de ambas:

$$\alpha^* \langle f_1 | Ah \rangle + \beta^* \langle f_2 | Ah \rangle = \langle \alpha f_1 + \beta f_2 | Ah \rangle = \langle \alpha g_1 + \beta g_2 | h \rangle \quad (1.69)$$

Comprobándose que tiene estructura de espacio vectorial. ■

ii. El vector g correspondiente a un cierto $f \in H$ es único.

Demostración. Para demostrar la propiedad anterior, partiremos de la hipótesis contraria, es decir, supondremos la existencia de dos vectores g_1 y g_2 distintos asociados a un mismo f .

Si esto ocurre, entonces para todo $h \in \mathcal{D}(A)$, se cumplirán las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \langle f | Ah \rangle &= \langle g_1 | h \rangle \\ \langle f | Ah \rangle &= \langle g_2 | h \rangle \end{aligned} \quad (1.70)$$

De manera que es cierto que:

$$\langle g_1 | h \rangle = \langle g_2 | h \rangle \Rightarrow \langle g_1 - g_2 | h \rangle = 0 \quad (1.71)$$

Se ha demostrado anteriormente, que si un vector es ortogonal a todos los vectores de un subespacio denso, este debe ser el vector cero.

$$g_1 - g_2 = 0 \Rightarrow g_1 = g_2 \quad (1.72)$$

Encontrando así una contradicción en la hipótesis de partida, quedando demostrado que existe un único vector g para cada vector f . ■

Definición. Definiremos el operador adjunto de A , A^+ , como la aplicación sobre f que da como resultado g , es decir, $A^+f = g$, $\forall f \in \mathcal{D}^+$.

De la definición anterior, se desprende que el subespacio \mathcal{D}^+ es el dominio del operador adjunto A^+ : $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D}(A^+)$.

Proposición. A^+ es lineal.

Demostración. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(A^+)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces para todo $h \in \mathcal{D}(A)$:

$$\begin{aligned}\langle A^+f_1|h \rangle &= \langle f_1|Ah \rangle \\ \langle A^+f_2|h \rangle &= \langle f_2|Ah \rangle\end{aligned}\tag{1.73}$$

Podemos ahora multiplicar la primera igualdad por α^* y a la segunda por β^* para posteriormente realizar la suma de ambas igualdades:

$$\langle \alpha A^+f_1 + \beta A^+f_2|h \rangle = \langle \alpha f_1 + \beta f_2|Ah \rangle\tag{1.74}$$

Si ahora se restan ambos lados de la igualdad por el producto de la derecha, y usando la definición de operador adjunto:

$$\langle \alpha A^+f_1 + \beta A^+f_2 - A^+(\alpha f_1 + \beta f_2)|h \rangle = 0\tag{1.75}$$

De manera que por ser h un elemento cualquiera de un subespacio denso como lo es $\mathcal{D}(A)$, y ser ortogonal a $\alpha A^+f_1 + \beta A^+f_2 - A^+(\alpha f_1 + \beta f_2)$, se concluye que este último vector debe ser cero de manera que:

$$\alpha A^+f_1 + \beta A^+f_2 = A^+(\alpha f_1 + \beta f_2)\tag{1.76}$$

Verificándose con ello la linealidad de A^+ . ■

Teorema. $\mathcal{D}(A^+)$ es denso si y solamente si A es cerrable.

Proposición. A^+ es siempre cerrado.

Veamos a continuación una serie de propiedades del operador adjunto.

i.) Sea $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ el espacio de todos los vectores a los que son aplicables los operadores A y B . Si este dominio fuese denso, entonces:

$$(A+B)^+ \supseteq A^+ + B^+$$

ii.) Consideremos dos operadores A y B , ambos con dominio denso. Podemos construir el operador BA cuyo dominio vendrá definido por el siguiente espacio de vectores:

$$\mathcal{D}(BA) = \{f \in \mathcal{D}(A) / Af \in \mathcal{D}(B)\}$$

Entonces, si este dominio fuese denso:

$$(BA)^+ \supseteq A^+B^+$$

1.4.2. OPERADOR AUTOADJUNTO

Definiremos los operadores autoadjuntos de la misma manera de la que se hizo para los operadores acotados, es decir aquellos operadores que verifican:

$$A = A^+\tag{1.77}$$

Lo cual implica:

$$i.) \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^+)$$

$$ii.) \forall g \in \mathcal{D}(A); Ag = A^+g$$

Generalmente, para $f \in \mathcal{D}(A^+)$ y $g \in \mathcal{D}(A)$:

$$\langle f|Ag \rangle = \langle A^+f|g \rangle\tag{1.78}$$

Sin embargo, si A es autoadjunto:

$$\langle f|Ag \rangle = \langle Af|g \rangle\tag{1.79}$$

1.4.3. OPERADOR SIMÉTRICO

Definición. Diremos que un operador A es simétrico si para todo $f, g \in \mathcal{D}(A)$ se verifica que:

$$\langle f|Ag \rangle = \langle Af|g \rangle \quad (1.80)$$

Proposición. Sea A un operador simétrico, entonces $A^+ \succ A$.

Demostración. Sea A un operador con dominio denso $\mathcal{D}(A)$, y f y g dos elementos cualquiera de $\mathcal{D}(A)$.

El dominio $\mathcal{D}(A^+)$, fue definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}(A^+) := \{f \in H / \exists h \in H / \langle f|Ag \rangle = \langle h|g \rangle, \forall g \in \mathcal{D}(A)\} \quad (1.81)$$

Como A es simétrico:

$$\langle f|Ag \rangle = \langle Af|g \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(A) \quad (1.82)$$

Llamando $h = Af$, y comparando con (1.81), se deduce que f pertenece también a $\mathcal{D}(A^+)$.

De manera que todo vector contenido en $\mathcal{D}(A)$, también lo está en $\mathcal{D}(A^+)$. Esto se traduce en $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^+)$.

Demostrado que $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^+)$, resta comprobar que para todo $f \in \mathcal{D}(A)$, $A^+f = Af$. Para ello partamos de nuevo del hecho de que el operador A es simétrico, con lo cual satisface la condición (1.80). Pero ahora, sabemos que f pertenece a $\mathcal{D}(A^+)$ y por tanto deberá verificar también (1.78):

$$\langle f|Ag \rangle = \langle A^+f|g \rangle$$

Restando a (1.80) la ecuación (1.78) se llega a:

$$\langle Af - A^+f|g \rangle = 0 \quad \forall f, g \in \mathcal{D}(A) \quad (1.83)$$

Lo cual como se demostró en secciones anteriores, implica que $Af = A^+f$. Este resultado, termina de demostrar que $A^+ \succ A$. ■

Definición. Sea A simétrico, diremos que es esencialmente autoadjunto si admite una sola extensión autoadjunta, es decir si existe un único operador B tal que $A \prec B = B^+ \prec A^+$.

Definición. En concreto si $A = A^+$ diremos que A es e.s.a.

Definición. Llamaremos índices de deficiencia de A a:

$$\begin{aligned} n_+ &:= \dim\{Ker(A^+ + i\mathbb{I})\} \\ n_- &:= \dim\{Ker(A^+ - i\mathbb{I})\} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Donde i es la unidad imaginaria, y \mathbb{I} el operador identidad.

Teorema. Sea A simétrico:

- i.) Si $n_+ = n_- = 0$ entonces A es autoadjunto o e.s.a.
- ii.) Si $n_+ = n_- \neq 0$ entonces A tiene infinitas extensiones autoadjuntas.
- iii.) Si $n_+ \neq n_-$ entonces A no tiene extensiones autoadjuntas.

EJEMPLOS

Veamos a continuación una serie de ejemplos que ilustran las tres situaciones posibles en cuanto a la relación entre los índices de deficiencia.

- **Ejemplo 1.** Definamos el *espacio de Schwartz* en una dimensión, \mathcal{S} , como el espacio de funciones de la recta real en el plano complejo $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ verificando las dos propiedades siguientes:

- 1.- Si $f(x) \in \mathcal{S}$, entonces $f(x)$ es infinitamente diferenciable (es decir derivable) en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$.

2.- Toda función $f(x) \in \mathbb{R}$ y todas sus derivadas tienden a cero en el infinito más rápidamente que el inverso de cualquier polinomio. Esta propiedad se puede formular de la siguiente manera:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^n \frac{d^m}{dx^m} f(x) = 0,$$

para todo $n, m = 0, 1, 2, \dots$.

El espacio de Schwartz \mathcal{S} tiene las siguientes propiedades, que no demostraremos, pues están en la bibliografía pertinente:

i.) \mathcal{S} es un espacio vectorial sobre el cuerpo complejo \mathbb{C} .

ii.) Si $f(x) \in \mathcal{S}$, entonces todas las funciones de la forma

$$x^n \frac{d^m}{dx^m} f(x), \tag{1.85}$$

para todos los valores $n, m = 0, 1, 2, \dots$, están también en \mathcal{S} .

iii.) Toda función $f(x) \in \mathcal{S}$ es de cuadrado integrable, es decir que verifica la relación¹:

$$\|f(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

El conjunto de funciones de cuadrado integrable forma un espacio de Hilbert donde el producto escalar se define para todo par de funciones, $f(x)$ y $g(x)$, como:

$$\langle f|g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx,$$

donde la estrella significa que hemos de tomar el complejo conjugado de $f(x)$. Esta integral converge siempre si las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son de cuadrado integrable. A este espacio de Hilbert lo llamaremos $L^2(\mathbb{R})$. Por consiguiente, tenemos que $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$.

iv.) El espacio de Schwartz \mathcal{S} no solo es un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$, sino que además es un subespacio *denso*. Esto significa que para cualquier función $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, existe una sucesión de funciones $\{f_n(x)\} \subset \mathcal{S}$ tales que $f_n \rightarrow f$, en el sentido de la norma definida líneas más arriba, es decir que $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

v.) La *transformación de Fourier*:

$$\mathcal{F}(f) \equiv \widehat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

transforma funciones en \mathcal{S} en funciones que también están en \mathcal{S} . Tenemos entonces una aplicación $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ que es *invertiva y sobre*.

Consideremos ahora que definimos en \mathcal{S} el siguiente operador, Q , llamado *operador multiplicación*: Si $f(x) \in \mathcal{S}$,

$$[Qf](x) = xf(x), \quad \forall f(x) \in \mathcal{S}. \tag{1.86}$$

Por la propiedad expuesta en (1.85), $xf(x) \in \mathcal{S}$. De aquí que el operador Q sea una aplicación que nos lleva de \mathcal{S} en \mathcal{S} . Vamos a considerar \mathcal{S} como el dominio de Q . Es muy fácil ver que Q es simétrico en este dominio, pues si $f(x), g(x) \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \langle Qf|g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} [Qf]^*(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f^*(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) [xg(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) [Qg](x) dx = \langle f|Qg \rangle. \end{aligned} \tag{1.87}$$

¹En realidad esta integración debe de tomarse en el sentido de Lebesgue, que es un poco más general que la integración de Riemann.

Por lo tanto $Q \prec Q^+$. Pero como Q es la multiplicación por la variable x , también lo ha de ser su adjunto Q^+ , el cual estaría definido en un dominio que contuviera a \mathcal{S} . Entonces para toda función $f(x) \in \mathcal{S}$, tendremos que

$$(Q^+ \pm i\mathbb{I})f(x) = (x \pm i)f(x) \in \mathcal{S}. \quad (1.88)$$

Vamos a ver cuales son los núcleos (kernel) de los operadores $Q^+ \pm i\mathbb{I}$. Para ello tenemos que resolver las ecuaciones $(x \pm i)f(x) = 0$, las cuales tiene tan solo una solución $f(x) \equiv 0$. Por lo tanto sus núcleos se reducen a la función idénticamente cero. Esto significa que sus índices de deficiencia son

$$n_+ = n_- = 0.$$

Consiguientemente, Q es *esencialmente autoadjunto en \mathcal{S}* y tiene una única extensión autoadjuta. Esta es muy fácil de ver quien es, se trata de su operador autoadjunto Q^+ el cual actúa de manera similar a Q pero sobre un dominio mayor, el espacio de funciones de cuadrado integrable $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ verificando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx < \infty.$$

Se puede demostrar que este espacio NO es todo $L^2(\mathbb{R})$. Puesto que contiene a \mathcal{S} , ha de ser denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Consideremos ahora el operador momento $P = -i(d/dx)$, que también está definido en \mathcal{S} y, por las propiedades de las funciones del espacio de Schwartz transforma funciones en \mathcal{S} en funciones en \mathcal{S} .

La transformación de Fourier \mathcal{F} tiene la siguiente propiedad: Para toda función $f(x) \in \mathcal{S}$, se verifica que:

$$(\mathcal{F}^{-1}Q\mathcal{F})f(x) = -i\frac{d}{dx}f(x) = Pf(x), \quad (1.89)$$

donde \mathcal{F}^{-1} es el inverso de la transformación de Fourier. Entonces tenemos la siguiente relación, válida en cuanto operadores sobre \mathcal{S} :

$$\mathcal{F}^{-1}Q\mathcal{F} \equiv P. \quad (1.90)$$

La transformación de Fourier es un operador unitario y los operadores unitarios conservan propiedades tales como los índices de deficiencia. De esta manera, el operador momento P , definido en \mathcal{S} tiene índices de deficiencia nulos y, por lo tanto, es esencialmente autoadjunto en \mathcal{S} . Nótese que en \mathcal{S} :

$$QP - PQ = i\mathbb{I},$$

que es la relación de Heisenberg.

- **Ejemplo 2.** Consideremos ahora el espacio de Hilbert $L^2[0, 1]$ que es el espacio de todas aquellas funciones $f(x) : [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$, tales que sean de cuadrado integrable, ésto es $f(x) \in L^2[0, 1]$ si y sólo si,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (1.91)$$

Si $f(x), g(x) \in L^2[0, 1]$, su producto escalar es

$$\langle g(x)|f(x) \rangle := \int_0^1 g^*(x) f(x) dx. \quad (1.92)$$

La norma al cuadrado, $\|f(x)\|^2$ de una función $f(x) \in L^2[0, 1]$ es justamente (1.91). Para toda función $f(x) \in L^2[0, 1]$ definimos el operador Q como

$$[Qf](x) = xf(x). \quad (1.93)$$

Veamos que $xf(x) \in L^2[0, 1]$ para todo $f(x) \in L^2[0, 1]$:

$$\|Qf\|^2 = \int_0^1 |xf(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|^2. \quad (1.94)$$

Pero además vemos que $\|Qf\| \leq \|f\|$, para todo $f(x) \in L^2[0, 1]$, por lo que Q está acotado y $\|Q\| \leq 1$. Además, y exactamente igual que en la sección anterior, vemos que $\langle Qf|g \rangle = \langle f|Qg \rangle$, con lo cual Q es acotado y autoadjunto. Este operador no tiene problema alguno.

Vamos a ver que sucede con $P = -i(d/dx)$. De entrada hemos de exigir que este operador deba de aplicarse a funciones derivables tal que su derivada sea de cuadrado integrable. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos de tales funciones, tenemos

$$\begin{aligned} \langle Pf|g \rangle &= i \int_0^1 [f'(x)]^* g(x) dx = i[f^*(1)g(1) - f^*(0)g(0)] - i \int_0^1 f^*(x) g'(x) dx \\ &= i[f^*(1)g(1) - f^*(0)g(0)] + \langle f|Pg \rangle. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Por lo tanto, este operador no es ni siquiera simétrico, a menos que $i[f^*(1)g(1) - f^*(0)g(0)] = 0$. Este problema podría tener el siguiente arreglo:

Consideremos las funciones continuas y con derivada primera continua en el intervalo $[0, 1]$ y con la propiedad adicional que $i[f^*(1)g(1) - f^*(0)g(0)] = 0$. Llamemos $C^1[0, 1]$ al conjunto de estas funciones, el cual tiene las siguientes propiedades:

- i.) $C^1[0, 1]$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo complejo.
- ii.) También $C^1[0, 1] \subset L^2[0, 1]$.
- iii.) Además $C^1[0, 1]$ es denso en $L^2[0, 1]$, con respecto a la norma en este segundo espacio.
- iv.) Si $f(x) \in C^1[0, 1]$, entonces tanto $f(x)$ como su derivada $f'(x)$ están en $L^2[0, 1]$ ³.

Entonces, si $f(x)$ y $g(x)$ están en $C^1[0, 1]$, se tiene que $i[f^*(1)g(1) - f^*(0)g(0)] = 0$, y por lo tanto, P es un operador simétrico en $C^1[0, 1]$, i.e., $\langle Pf|g \rangle = \langle f|Pg \rangle$, $\forall f(x), g(x) \in C^1[0, 1]$. Por consiguiente, $P \prec P^+$, y como P es un operador diferencial, su adjunto debe de ser el mismo operador diferencial en un subespacio más grande.

Vamos a calcular los índices de deficiencia para P en $C^1[0, 1]$. Estos son las dimensiones de los núcleos de $P^+ \pm i\mathbb{I}$, que se calculan como:

$$0 = (P^+ \pm i\mathbb{I})f(x) = -if'(x) \pm if(x) \implies f'(x) \mp f(x) = 0, \quad (1.96)$$

por lo cual,

$$f(x) = Ae^{\mp x}, \quad (1.97)$$

donde A es una constante arbitraria. Obviamente, $Ae^{\mp x}$ están ambas en $C^1[0, 1]$ y como A es una constante compleja arbitraria, cada una de estas soluciones forma un espacio vectorial complejo de dimensión uno. Por lo tanto, los índices de deficiencia son iguales: $n_+ = n_- = 1$, consiguientemente P tiene infinitas extensiones autoadjuntas. Vamos a encontrarlas mediante la determinación de sus dominios.

Para que el operador P sea, al menos, simétrico se tiene que verificar para todo par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el dominio de P , $\mathcal{D}(P)$, que

$$f^*(1)g(1) - f^*(0)g(0) = 0. \quad (1.98)$$

Escogiendo $f(x) \equiv g(x)$, la ecuación (1.98) adopta la forma

$$|f(1)|^2 - |f(0)|^2 = 0 \implies f(1) = e^{i\alpha} f(0), \quad (1.99)$$

²Se puede ver que $\|Q\| = 1$.

³Toda función continua en un intervalo acotado es integrable y de cuadrado integrable.

donde α es un número real arbitrario. Como es una fase, basta que $\alpha \in [0, 2\pi]$. Consideremos ahora los dominios \mathcal{D}_α con $\alpha \in [0, 2\pi]$ y definidos de la siguiente forma: Una función $f(x) \in \mathcal{D}_\alpha$ si y solo si $f(x) \in C^1[0, 1]$ y además verifica la relación a la derecha de (1.99) con α fijo. Se puede demostrar que:

- i.) El espacio vectorial \mathcal{D}_α es denso en $L^2[0, 1]$.
- ii.) El operador P en \mathcal{D}_α es simétrico, lo cual es evidente por toda la discusión realizada hasta ahora. Pero además es autoadjunto. No incluimos aquí la demostración.
- iii.) En consecuencia, para cada $\alpha \in [0, 2\pi]$ tenemos una versión o determinación autoadjunta del operador P , que podríamos llamar P_α . Estas determinaciones autoadjuntas no son equivalentes en el sentido de que no hay un operador unitario U y dos fases $\alpha, \beta \in [0, 1)$ tales que $P_\alpha = U P_\beta U^{-1}$. Por lo tanto, existen infinitas determinaciones autoadjuntas del operador P .

En el ejemplo anterior, se podían identificar Q y P con los operadores posición y momento en una dimensión, ya que verifican la relación de Heisenberg $[Q, P] = i\mathbb{I}$. Esta relación viene de la cuantización canónica del corchete de Poisson $\{Q, P\} = 1$.

Sin embargo, y por razones técnicas que sobrepasan este TFG, la relación de Heisenberg no se realiza en espacios que no sean del tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como consecuencia, no se puede decir que Q en este ejemplo sea un operador posición y los P_α , o alguno de ellos, sea el operador momento. Lo mismo va a suceder en el ejemplo que viene a continuación, aunque en éste haya razones de mayor peso.

- **Ejemplo 3.** Vamos a considerar el espacio de Hilbert $L^2[0, \infty)$, que es el espacio de las funciones $f(x) : \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty) \mapsto \mathbb{C}$ de cuadrado integrable, i.e.,

$$\|f\|^2 := \int_0^\infty |f(x)|^2 dx, \quad (1.100)$$

con producto escalar

$$\langle f|g \rangle := \int_0^\infty f^*(x) g(x) dx, \quad (1.101)$$

válido para todo par de funciones $f(x), g(x) \in L^2[0, \infty)$.

En este espacio de Hilbert, podemos definir un operador multiplicación $[Qf](x) = xf(x)$ con dominio aquellas funciones $f(x) \in L^2[0, \infty)$ tales que $xf(x) \in L^2[0, \infty)$. Este dominio es denso y puede demostrarse que en él Q es autoadjunto, por lo cual no ofrece problemas.

Otro asunto es el operador diferencial $P = -id/(dx)$. Vamos a considerar que su dominio es el subespacio de $L^2[0, \infty)$ formado por todas las funciones, $f(x) \in L^2[0, \infty)$, diferenciales que tengan derivada primera de cuadrado integrable, $f'(x) \in L^2[0, \infty)$ y que además $f(\infty) = 0^4$. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos tales funciones. Entonces, tras un proceso e integración por partes, queda que:

$$\begin{aligned} \langle Pf|g \rangle &= i \int_0^\infty [f'(x)]^* g(x) dx = i[f^*(\infty)g(\infty) - f(0)g(0)] - i \int_0^\infty f^*(x) g'(x) dx \\ &= -if^*(0)g(0) + \langle f|Pg \rangle. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Vemos que para tener un dominio de funciones $f(x)$ en el que P sea simétrico, es necesario que $f(0) = 0$ para toda función del mencionado dominio.

Para calcular los índices de deficiencia, vamos a proceder exactamente igual que en el caso anterior, calculado las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$0 = (P^\pm \pm i\mathbb{I})f(x) = -if'(x) \pm if(x) = 0 \implies f(x) = Ae^{\mp x}. \quad (1.103)$$

Observamos que, para todo número complejo A , se verifica que $Ae^{-x} \in L^2[0, \infty)$, pues es de cuadrado integrable, basta hacer la integración. Por lo tanto $n_+ = 1$. Sin embargo, Ae^x no es de cuadrado integrable y entonces $n_- = 0$. Los dos índices de deficiencia son distintos. No existen versiones autoadjuntas de P en este caso.

⁴Una función de cuadrado integrable puede no tener límite cuando $x \mapsto \infty$, pero si lo tiene es siempre cero.

1.5. TEORÍA ESPECTRAL.

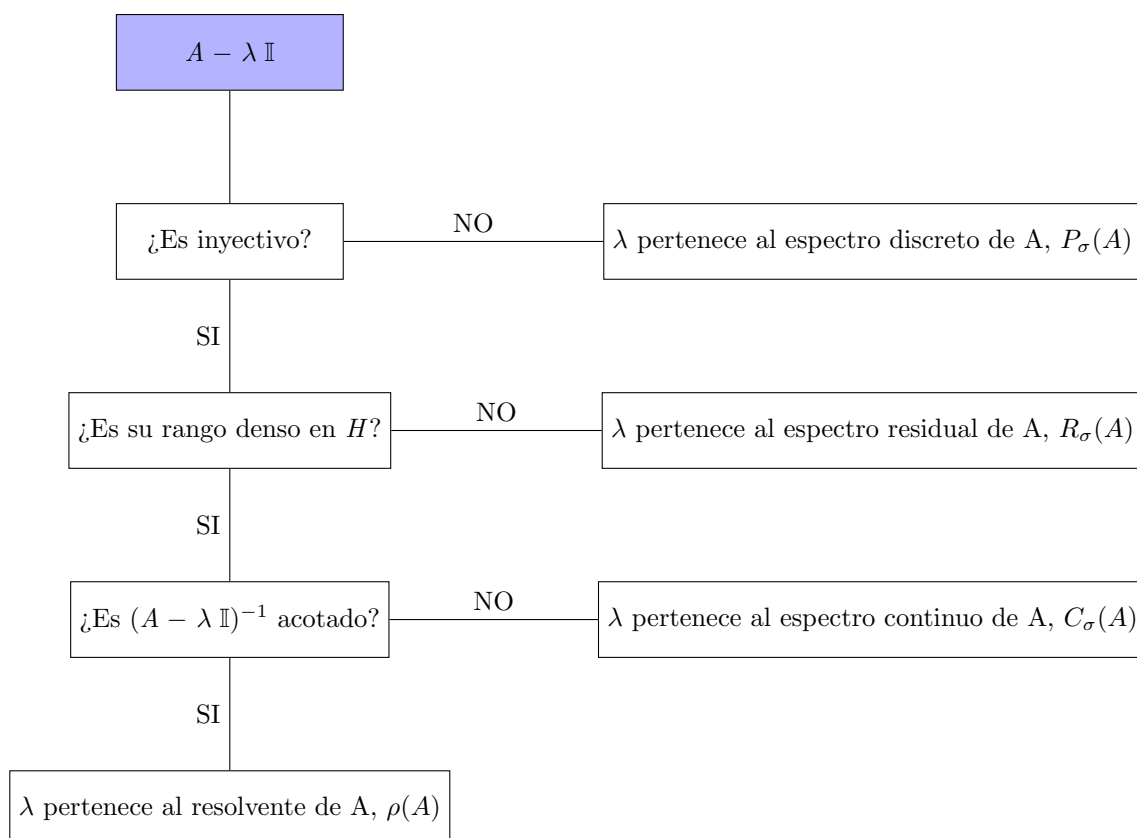
Para terminar este bloque de conceptos previos vamos a dar una primera clasificación al espectro de un operador. Esta descripción será completada en secciones posteriores con la que llamaremos la nueva clasificación del espectro.

Consideremos un operador A definido en un dominio \mathcal{D} sobre un espacio de Hilbert H :

$$A: \mathcal{D} \rightarrow H$$

Donde en particular, para A acotado $\mathcal{D} = H$. En adelante, y por ser el caso de mayor interés en nuestro estudio, se considerará de forma general un dominio \mathcal{D} denso.

A partir de este operador se construye $A - \lambda \mathbb{I}$, donde λ es un número complejo arbitrario, el cual se analizará de acuerdo al siguiente diagrama:



Si λ pertenece al resolvente de A , $(A - \lambda \mathbb{I})^{-1}$ es acotado aunque A no lo sea. Además tanto a este conjunto de números como al operador que acotan recibirán el nombre de resolvente.

Llamaremos espectro de A a: $\sigma(A) = P_\sigma(A) \cup R_\sigma(A) \cup C_\sigma(A)$. Además, cualquier número complejo debe estar en cualquiera de los cuatro grupos presentes en el diagrama anterior, así: $\mathbb{C} = \sigma(A) \cup \rho(A)$.

Capítulo 2

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA MEDIDA

Vamos a comenzar con el concepto de σ -álgebra de subconjuntos de un conjunto dado.

Definición.- Sea Ω un conjunto no vacío. Diremos que una clase de subconjuntos \mathcal{B} de Ω es una σ -álgebra si verifica las siguientes tres condiciones:

- 1.- El conjunto total Ω y el conjunto vacío \emptyset están en \mathcal{B} .
- 2.- Si $A \in \mathcal{B}$, entonces su complementario $A^c := \Omega/A = \Omega - A$ está en \mathcal{B} .
- 3.- Sea $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ una sucesión de conjuntos en \mathcal{B} que sean disjuntos dos a dos, es decir que $A_i \cap A_j = \emptyset$ siendo $i \neq j$. Entonces:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}. \quad (2.1)$$

Al par del conjunto Ω y la σ -álgebra \mathcal{B} , le designaremos como $\{\Omega, \mathcal{B}\}$ y se le denomina *espacio de medida*.

Algunas propiedades y ejemplos:

i.) La unión numerable de cualquier colección de elementos de \mathcal{B} está en \mathcal{B} .

Demostración. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos en \mathcal{B} (da igual si son o no disjuntos dos a dos), y denotemos su unión como $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n$. Entonces podemos construir los siguientes conjuntos a partir de los A_n :

$$C_1 := A_1, \quad C_2 := A_2 - A_1, \quad C_3 := A_3 - C_2, \quad \dots \quad C_n := A_n - C_{n-1} \quad (2.2)$$

Los cuales sí son disjuntos dos a dos. Por tanto, vía la propiedad 3 de la definición de las σ -álgebras, la unión de los conjuntos C_n sí que se encuentra en \mathcal{B} .

Sin embargo, por la forma en que los conjuntos C_n están contruidos, se verifica que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \quad (2.3)$$

Y por tanto la unión de A_n también está en \mathcal{B} . ■

ii.) Sean $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ una sucesión de conjuntos en \mathcal{B} . Entonces su intersección está también en \mathcal{B} .

Demostración. Partamos de la siguiente igualdad:

$$\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right]^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c. \quad (2.4)$$

Si los A_i están en \mathcal{B} , sus complementarios, A_i^c también lo están (por la condición 2 de las σ -álgebras), y también su unión por lo visto en la propiedad anterior. Pero si el complementario de $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ está en \mathcal{B} , también lo estará éste. ■

- iii.) Hay dos ejemplos triviales de σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Una está formado por tan solo dos de sus subconjuntos, los más triviales $\{\Omega, \emptyset\}$. La otra por *todos* los subconjuntos de Ω .
- iv.) La intersección de cualquier colección de σ -álgebras de subconjuntos de Ω es también una σ -álgebra. La demostración es sencilla, pero no la ponemos aquí.
- v.) Tampoco demostraremos esta propiedad, pero la añadimos porque es importante. Sea \mathcal{C} una colección cualquiera de subconjuntos de Ω . Esto significa que \mathcal{C} es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de Ω . Entonces *existe una mínima σ -álgebra de subconjuntos de Ω , \mathcal{B} , que contiene a \mathcal{C} , i.e., $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$* . Que sea mínima quiere decir que si hay otra σ -álgebra \mathcal{A} que contiene a \mathcal{C} , $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. La mínima σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} es precisamente la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{C} .
- vi.) Un ejemplo muy importante que vamos a usar en lo sucesivo. Tomemos la recta real \mathbb{R} y el conjunto de todos sus intervalos abiertos de la forma (a, b) . Consideremos la mínima σ -álgebra que contiene a todos estos intervalos abiertos. A esta σ -álgebra, que denotaremos como \mathcal{B} , le llamaremos la σ -álgebra de Borell y a sus conjuntos, borelianos. Ejemplos de Borelianos: Los puntos aislados. Cualquier sucesión (numerable) de puntos aislados. Los semiintervalos de la forma $[a, b)$ o $(a, b]$. Los conjuntos abiertos, incluyendo intervalos de longitud infinita de la forma $(-\infty, b)$ o (a, ∞) . Los conjuntos cerrados, incluyendo los intervalos cerrados. De ahora en adelante designaremos como $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}\}$ a la recta real y su σ -álgebra de Borel.

Definición.- Sea $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ un *espacio de medida*. Llamaremos una *medida* en $\{\Omega, \mathcal{A}\}$ a una aplicación $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty)$, con las siguientes propiedades:

- 1.- $\mu(\emptyset) = 0$.
- 2.- Sean $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ una sucesión de subconjuntos en \mathcal{A} disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad (2.5)$$

Algunas características importantes de la medida son:

- i.) La medida de cualquier conjunto $A \in \mathcal{A}$ es cero, positiva o infinita.
- ii.) Si $A \subset B$ y ambos conjuntos están en \mathcal{A}^1 , entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- iii.) Si en la definición (2.5) reemplazamos sucesión, por un número finito, entonces el resultado será el mismo, reemplazando ∞ por el número de conjuntos.
- iv.) Si los A_i no son disjuntos dos a dos, no se verificará en general (2.5), sino que tendríamos que

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad (2.6)$$

- v.) Diremos que μ es *finita* si $\mu(\Omega) < \infty$. Entonces la medida $\mu(A)$ de cualquier subconjunto $A \in \mathcal{A}$ es siempre finita, porque $\mu(A) \leq \mu(\Omega)$. Una medida finita es de *probabilidad* si $\mu(\Omega) = 1$. En este caso si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mu(A) \leq 1$.
- vi.) Sea μ una medida finita en $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}\}$. Definimos la *función de distribución* $F(x)$ como

$$F(x) := \mu(-\infty, x], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

La función de distribución tiene las siguientes propiedades:

- Si $x < y$, entonces $F(x) \leq F(y)$, para todo par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$. La función de distribución es monótona creciente.
- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = \mu(\mathbb{R})$.

¹Los conjuntos que están en \mathcal{A} no tienen medida definida

- La función de distribución es continua por la derecha: $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$. Pero no lo es necesariamente por la izquierda. En los puntos en los cuales este sucede la función de distribución muestra un salto, la altura del salto es la medida de dicho punto que es ahora distinta de cero. En los puntos en los cuales $F(x)$ es continua, la medida de los mismos es cero.

vii.) Si la función de distribución $F(x)$ fuera derivable, llamaríamos a su derivada la *función densidad*, $\rho(x) = dF(x)/dx$. La función densidad es no negativa $\rho(x) \geq 0$ y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \mu(\mathbb{R}) < \infty. \quad (2.8)$$

2.1. UNA INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO FUNCIONAL

Sean $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}\}$ el espacio de medida formado por la recta real y su σ -álgebra de Borel. Consideremos ahora un espacio de Hilbert separable arbitrario \mathcal{H} , aunque en general sería de dimensión infinita. Sea ahora $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ el conjunto de los proyectores (ortogonales) en \mathcal{H} . Sabemos que existe una correspondencia biunívoca entre este conjunto y el conjunto de subespacios cerrados en \mathcal{H} .

Definición.- Una medida espectral en \mathcal{H} es una aplicación

$$\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}), \quad (2.9)$$

que a cada boreliano A le asigna un proyector $E(A)$, con las siguientes condiciones:

1.- Para toda sucesión de borelianos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ disjuntos dos a dos, se tiene que

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} E(A_i), \quad (2.10)$$

donde la suma implica un límite que debe tomarse en el sentido fuerte de operadores. Esto significa que para todo $\psi \in \mathcal{H}$ se verifica que (en el sentido de la norma en \mathcal{H}):

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(A_i) \psi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N E(A_i) \psi. \quad (2.11)$$

2.- $E(\emptyset) = O$, donde O es el operador que lleva todos los vectores al cero.

3.- $E(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$, el operador identidad.

Algunas propiedades de las medidas espectrales

i.) Si $A_1 \subset A_2$, entonces $E(A_1) \preceq E(A_2)$. Esto significa que si M_1 y M_2 son los subespacios cerrados que corresponden a $E(A_1)$ y $E(A_2)$, respectivamente, entonces $M_1 \subset M_2$ y además que $E(A_1)\psi = E(A_2)\psi$, para todo $\psi \in M_1$.

ii.) Para todo par de borelianos A_1 y A_2 se tiene que

$$E(A_1 \cap A_2) + E(A_1 \cup A_2) = E(A_1) + E(A_2). \quad (2.12)$$

Demostración.- Observemos que se verifican las siguientes relaciones entre conjuntos:

$$A_1 \cup A_2 = [A_1 - A_1 \cap A_2] \cup [A_2 - A_1 \cap A_2] \cup [A_1 \cap A_2]. \quad (2.13)$$

Los conjuntos a la derecha del signo igual en (2.13) son disjuntos dos a dos. Por lo tanto, utilizando la relación (2.10), que es también válida para un conjunto finito de borelianos disjuntos dos a dos, se tiene que

$$E(A_1 \cup A_2) = E(A_1 - A_1 \cap A_2) + E(A_2 - A_1 \cap A_2) + E(A_1 \cap A_2). \quad (2.14)$$

Además sucede que $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, por lo que $A_1 - A_1 \cap A_2$ y $A_1 \cap A_2$ son disjuntos. De aquí:

$$E(A_1 - A_1 \cap A_2) + E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) \implies E(A_1 - A_1 \cap A_2) = E(A_1) - E(A_1 \cap A_2), \quad (2.15)$$

y lo mismo reemplazando A_1 por A_2 . Llevando este resultado a (2.15), obtenemos (2.12). ■

iii.) Se tiene para todo par de borelianos A_1 y A_2 que

$$E(A_1) E(A_1 \cup A_2) = E(A_1). \quad (2.16)$$

iv.) Finalmente, para todo par de borelianos A_1 y A_2 se verifica

$$E(A_1 \cap A_2) = E(A_1) E(A_2). \quad (2.17)$$

Las demostraciones no son complicadas, pero no son particularmente interesantes, por lo que las omitiremos aquí. Es mucho más interesante discutir las medidas en $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}\}$ que se originan gracias a las medidas espectrales y las relaciones de estas con los operadores autoadjuntos.

Fijemos un vector $\psi \in \mathcal{H}$. Para cada $A \in \mathcal{B}$, definamos:

$$\mu_\psi(A) = \langle \psi | E(A) \psi \rangle. \quad (2.18)$$

Demostremos que μ_ψ , definido en (2.18) es una medida en $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}\}$. Para ello tenemos que demostrar que satisface las propiedades que definen una medida, expuestas al comienzo de esta sección. De esta manera:

1.- Sea \emptyset el conjunto vacío. Como $E(\emptyset) = O$, tenemos

$$\mu_\psi(\emptyset) = \langle \psi | E(\emptyset) \psi \rangle = 0. \quad (2.19)$$

2.- Como $E(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$,

$$\mu_\psi(\mathbb{R}) = \langle \psi | E(\mathbb{R}) \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = \|\psi\|^2. \quad (2.20)$$

3.- Sea $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ una sucesión de borelianos disjuntos dos a dos. Entonces:

$$\begin{aligned} \mu_\psi \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] &= \langle \psi | E \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] \psi \rangle = \langle \psi | \sum_{i=1}^{\infty} E(A_i) \psi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \psi | E(A_i) \psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\psi(A_i). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vemos que μ_ψ es una medida finita en $\{\mathbb{R}, \mathcal{B}\}$, la cual es una medida de probabilidad si el estado ψ está normalizado, $\|\psi\| = 1$, por (2.20).

Pasemos ahora a considerar los conjuntos de la forma $(-\infty, \alpha]$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, que como bien sabemos son borelianos. Consideremos entonces los proyectores de la forma

$$E_\alpha := E(-\infty, \alpha], \quad (2.22)$$

los cuales tienen las siguientes propiedades:

i.) Si $\alpha < \beta$, entonces $E_\alpha \preceq E_\beta$.

ii.) Se verifica el siguiente límite en el sentido fuerte: $s - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_{\alpha+\epsilon} = E_\alpha$. Recordemos que esto significa que para todo $\psi \in \mathcal{H}$ se tiene que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_{\alpha+\epsilon} \psi = E_\alpha \psi$, en el sentido de la norma en \mathcal{H}^2 .

iii.) Finalmente, $E_{-\infty} = O$ y $E_\infty = \mathbb{I}$.

²Es decir, para cada $\psi \in \mathcal{H}$ fijado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tales que si $|\beta| < \delta$, entonces $\|E_{\alpha+\beta} \psi - E_\alpha \psi\| < \epsilon$.

Una importante observación:

$$\mu_f(-\infty, \alpha] = \langle f | E(-\infty, \alpha] f \rangle = \langle f | E_\alpha f \rangle, \quad (2.23)$$

nos da la *función de distribución* de la medida μ_f para cada $f \in \mathcal{H}$. De esta manera podemos definir la siguiente integral en el sentido de Stieltjes³:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\langle f | E_\lambda f \rangle, \quad (2.24)$$

donde $g(\lambda)$ es una función $g(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. La integral está bien definida en algunos casos que no vamos a discutir aquí, pero que incluyen el que $g(\lambda)$ sea continua y acotada.

Vamos ahora a ver la relación entre medidas espectrales y operadores autoadjuntos. El resultado principal (que no demostraremos aquí ya que su demostración está en los libros especializados) es el siguiente:

Teorema.- Sea A un operador autoadjunto con dominio \mathcal{D} . Entonces existe una medida espectral $E(A)$ tal que para todo $f \in \mathcal{D}$ se tiene que:

$$\langle f | Af \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\langle f | E_\lambda f \rangle. \quad (2.25)$$

Esta integral converge si y sólo si $f \in \mathcal{D}^4$. Además para todo boreliano $A \in \mathcal{B}$ y todo $f \in \mathcal{H}$, se verifica que

$$\langle f | E(A) f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_A(\lambda) d\langle f | E_\lambda f \rangle = \int_A d\langle f | E_\lambda f \rangle, \quad (2.26)$$

donde $\delta_A(\lambda)$ es la función característica del boreliano A , esto es

$$\delta_A(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \in A, \\ 0 & \text{si } \lambda \notin A. \end{cases} \quad (2.27)$$

Recíprocamente, dada una medida espectral $E(A)$, existe un operador autoadjunto A , con dominio $\mathcal{D}(A)$, tal que para todo $f \in \mathcal{D}(A)$, se verifica (2.25).

NOTA.- Es habitual, en lugar de (2.25), usar la siguiente notación

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda. \quad (2.28)$$

Sea ahora una función $f(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ con unas ciertas propiedades, que cumplen todas las que sean continuas y acotadas, lo cual vamos a considerar siempre en nuestro caso. Sea A un operador autoadjunto con medida espectral $E(A)$. Entonces, para todo $g \in \mathcal{H}$ se define un operador acotado⁵, $f(A)$, en \mathcal{H} de la siguiente manera⁶:

$$\langle g | f(A) g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle g | E_\lambda g \rangle. \quad (2.29)$$

El típico ejemplo es el siguiente. Fijo un número real arbitrario t y escribo para todo $h \in \mathcal{H}$:

$$\langle h | e^{-itA} h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d\langle h | E_\lambda h \rangle, \quad (2.30)$$

donde E_λ es la medida espectral asociada a A .

³Si la función de distribución es derivable, tendremos entonces que existe una función $\rho_f(\lambda)$ para la cual $d\langle f | E_\lambda f \rangle = \rho_f(\lambda) d\lambda$, en cuyo caso podemos entender bien el significado de la integral (2.24).

⁴La función $g(\lambda) = \lambda$ no está acotada en \mathbb{R} .

⁵Dependiendo de A , existen funciones $f(\lambda)$ no acotadas para las cuales $f(A)$ está bien definido, pero entonces no sería un operador acotado. Además si $f(\lambda)$ es una función real, entonces $f(A)$ es autoadjunto.

⁶Aquí hay una serie de tecnicismos que estamos dejando de lado.

Sean ahora t_1 y t_2 dos números reales. Para todo $h \in \mathcal{H}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle h | e^{-i(t_1+t_2)A} h \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t_1+t_2)\lambda} d\langle h | E_\lambda h \rangle \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it_1\lambda} e^{-it_2\lambda} d\langle h | E_\lambda h \rangle &= \langle h | e^{-it_1A} e^{-it_2A} h \rangle. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Como dos operadores acotados A y B son iguales si y solo si $\langle h | Ah \rangle = \langle h | Bh \rangle$ para todo $h \in \mathcal{H}$, la relación (2.31) implica que

$$e^{-i(t_1+t_2)A} = e^{-it_1A} e^{-it_2A}, \quad (2.32)$$

relación válida para cualquier par de números reales t_1 y t_2 . Obviamente si $t = 0$, $e^{-i0A} = e^0 = \mathbb{I}$, y si $t_2 = -t_1 = t$ se verifica que:

$$e^{-itA} e^{itA} = e^{-i(t-t)A} = \mathbb{I} = e^{itA} e^{-itA} \implies (e^{itA})^{-1} = e^{-itA}. \quad (2.33)$$

Además (la estrella significa conjugación compleja):

$$\langle e^{itA} h | h \rangle = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\langle h | E_\lambda h \rangle \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} d\langle h | E_\lambda h \rangle = \langle h | e^{-itA} h \rangle. \quad (2.34)$$

Por consiguiente:

$$[e^{-itA}]^+ = e^{itA} = [e^{-itA}]^{-1}. \quad (2.35)$$

De todo ésto se demuestra que e^{-itA} es un **operador unitario** para todo $t \in \mathbb{R}$. Más aún, el conjunto de operadores e^{-itA} con $t \in \mathbb{R}$ forma un **grupo** uniparamétrico de operadores unitarios, en el cual el parámetro es, naturalmente, t . ■

Vamos a por más. Vamos a demostrar que para todo número real t_0 se verifica el siguiente límite fuerte:

$$s - \lim_{t \rightarrow t_0} e^{-itA} = e^{-it_0A}. \quad (2.36)$$

Para demostrarlo, comencemos con la siguiente operación ($\psi \in \mathcal{H}$):

$$\begin{aligned} \|(e^{-itA} - \mathbb{I})\psi\|^2 &= \langle (e^{-itA} - \mathbb{I})\psi | (e^{-itA} - \mathbb{I})\psi \rangle = \langle \psi | (e^{itA} - \mathbb{I})(e^{-itA} - \mathbb{I})\psi \rangle \\ &= \langle \psi | (2\mathbb{I} - e^{itA} - e^{-itA})\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 2(1 - \cos(\lambda t)) d\langle \psi | E_\lambda \psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Obsérvese que

$$|2(1 - \cos(\lambda t))| \leq 4, \quad (2.38)$$

lo cual nos va a permitir usar el Teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue para intercambiar el límite y la integral. Este Teorema, en su versión más simplificada, se podría enunciar así:

Teorema de Lebesgue.- Sea una sucesión $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x) \dots$ de funciones integrales definidas en \mathbb{R} y con valores en el plano complejo \mathbb{C} , $g_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, tal que dicha sucesión converge punto a punto a una función $g(x)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$. Supongamos además que existe una función integrable $F(x)$ y positiva, $F(x) \geq 0$, tal que $|g_n(x)| \leq F(x)$, para todo⁷ $x \in \mathbb{R}$ y todo $n = 1, 2, \dots$. Entonces se verifica que:

⁷En realidad para casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue. Esto significa que pudiera haber un conjunto de puntos de medida cero (tal y como un conjunto numerable de puntos) para los cuales la acotación no se verifique. Este tipo de excepción es característico de la Teoría de la Integración, ya que las integrales de dos funciones que se diferencien en un conjunto de medida nula solamente, son iguales.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx. \quad (2.39)$$

Este resultado sigue valiendo si reemplazamos la medida de Lebesgue, dx , por otra, por ejemplo, $d\langle\psi|E_\lambda\psi\rangle$. ■

En nuestro caso, cualquier función acotada es integrable, pues la medida es finita, ya que $\langle\psi|E_\lambda\psi\rangle \leq \langle\psi|\psi\rangle = \|\psi\|^2$. Por lo tanto, podemos usar $F(\lambda) \equiv 4$. Asimismo, el Teorema es válido si reemplazamos la sucesión de funciones por un conjunto de funciones dependientes de un parámetro continuo, que sería nuestro caso, como podemos ver. De esta manera,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \|(e^{-itA} - \mathbb{I})\psi\|^2 &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} 2(1 - \cos(\lambda t)) d\langle\psi|E_\lambda\psi\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\lim_{t \rightarrow 0} 2(1 - \cos(\lambda t))] d\langle\psi|E_\lambda\psi\rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Vamos a considerar ahora un t_0 arbitrario. Entonces para todo $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\|e^{-itA}\psi - e^{-it_0A}\psi\| = \|e^{-it_0A}(e^{-i(t-t_0)A}\psi - \psi)\| = \|(e^{-i(t-t_0)A}\psi - \psi)\| \mapsto 0, \quad (2.41)$$

si $t \mapsto 0$. La segunda igualdad en (2.41) es debida a que e^{-it_0A} es un operador unitario y como tal tiene la siguiente propiedad: Para todo $\varphi \in \mathcal{H}$, se verifica que $\|e^{-it_0A}\varphi\| = \|\varphi\|$. ■

Esta propiedad nos indica que el conjunto de operadores unitarios e^{-itA} , siendo A autoadjunto, no solamente forma un grupo dependiendo del parámetro t , sino que además el grupo es fuertemente continuo con respecto a este parámetro, lo que se traduce en la propiedad (2.36), válida para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.

El inverso de este resultado es el llamado Teorema de Stone, que puede enunciarse de la siguiente manera (su demostración está en la bibliografía usual, por ejemplo el Reed-Simon vol. I):

Teorema (Stone).- Sea $U(t)$ una familia, dependiente del parámetro $t \in \mathbb{R}$, de operadores unitarios en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , tales que

1.- Forman un grupo, en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned} U(t_0 + t_1) &= U(t_0)U(t_1), \quad \forall t_0, t_1 \in \mathbb{R}, \quad U(-t) = [U(t)]^{-1} = U^+(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ U(0) &= \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Nótese que el grupo es conmutativo, por la primera propiedad en (2.42).

2.- Para todo $\psi \in \mathcal{H}$ y todo $t_0 \in \mathbb{R}$, se tiene que, en el sentido de la norma en \mathcal{H} y para todo $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} U(t)\psi = U(t_0)\psi. \quad (2.43)$$

Bajo estas condiciones, existe un operador autoadjunto A tal que

$$U(t) = e^{-itA}, \quad (2.44)$$

donde el significado de la exponencial se explicó en el párrafo anterior. ■

Incidentalmente, es interesante averiguar si la exponencial e^{-itA} está relacionada con una serie como sucede en el caso de los números complejos. El asunto depende de si A está acotado o no, y en caso contrario, si A es o no autoadjunto.

Si A está acotado, ya sea o no autoadjunto, tenemos siempre que

$$e^{-itA}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itA)^n}{n!} \psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}, \quad (2.45)$$

donde la serie converge en el sentido de la norma en \mathcal{H} . O lo que es lo mismo: en el sentido de la convergencia fuerte de operadores,

$$e^{-itA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itA)^n}{n!}. \quad (2.46)$$

Si A no está acotado, pero es autoadjunto, vamos a considerar el siguiente dominio:

$$\mathcal{D}^{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n), \quad (2.47)$$

donde $\mathcal{D}(A^n)$ es el dominio del operador A^n . Si A fuera autoadjunto, entonces el dominio \mathcal{D}^{∞} sería denso en \mathcal{H} .

Sea ahora A un operador con dominio $\mathcal{D}(A)$. Sea $\psi \in \mathcal{H}$ un vector para el cual la serie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itA)^n}{n!} \psi, \quad (2.48)$$

converge, en el sentido de la norma en \mathcal{H} . El conjunto de vectores ψ para los cuales la serie (2.48) converge forma un espacio vectorial, \mathcal{D}_A , llamado el *espacio de los vectores analíticos de A* . Obviamente, el espacio de vectores analíticos está contenido en \mathcal{D}^{∞} , sea quienes sea A .

Teorema.- Si A es autoadjunto, entonces A tiene un espacio de vectores analíticos *denso en \mathcal{H}* . El recíproco es cierto, si A es simétrico, A es autoadjunto si tiene un espacio de vectores analíticos denso en \mathcal{H} , por lo que esta propiedad no es compartida por los operadores A esencialmente autoadjuntos. ■

No desmotaremos ninguno de estos resultados que pueden encontrarse en el libro de Reed-Simon vol 1.

2.2. NUEVA CLASIFICACIÓN DEL ESPECTRO PARA UN OPERADOR AUTOADJUNTO

Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Si \mathcal{H} es de dimensión finita, A tiene solo autovalores y además se puede encontrar una base ortonormal en \mathcal{H} para la cual, la matriz que representa a A en dicha base es diagonal, siendo los elementos de la diagonal principal los autovalores de A . Por lo tanto, supondremos que \mathcal{H} es de dimensión infinita y separable⁸.

Sea entonces A un operador *autoadjunto* en un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita \mathcal{H} . El operador A puede ser acotado o no. En el caso no acotado, supongamos que su dominio es $\mathcal{D}(A)$, el cual es denso⁹ en \mathcal{H} . En lo que sigue, supondremos que A es no acotado para poder incluir las discusiones acerca de dominios. Si A fuera acotado, sería lo mismo, solo que ahora los dominios son todo el espacio de Hilbert.

El espectro se define exactamente igual a como lo habíamos definido anteriormente. Lo que cambia es la clasificación o división del espectro en subconjuntos que ahora *no son necesariamente disjuntos dos a dos*. La clasificación de los elementos del espectro de A es la siguiente:

- **Espectro puntual.**

Se define de la manera siguiente: Un cierto número real¹⁰ $\lambda \in \mathbb{R}$ está en el *espectro puntual* de A si, o bien es un autovalor de A , o bien es un punto de acumulación de autovalores de A ¹¹.

⁸Lo que significa que sus bases ortonormales son infinito-numerables

⁹No es una hipótesis, si A es autoadjunto su dominio es automáticamente denso, pues de lo contrario no existiría el adjunto.

¹⁰El espectro de todo operador autoadjunto es siempre real.

¹¹Un cierto λ es un punto de acumulación de un conjunto si *todo* entorno de λ contiene puntos del conjunto.

Aquí hay un punto delicado, pues mientras que un operador en un espacio vectorial de dimensión finita tiene siempre autovalores, si el espacio tiene dimensión infinita, esto puede no ser así. El ejemplo típico sería el operador multiplicación $[Qf](x) = xf(x)$ en $L^2(\mathbb{R})$. Supongamos λ un autovalor de este operador, entonces $xf(x) = \lambda f(x)$ implica que $(x - \lambda)f(x) = 0 \implies f(x) = 0$, excepto quizás en $x = \lambda$ que es un conjunto de medida nula. Y dos funciones en $L^2(\mathbb{R})$ que se diferencian en un conjunto de medida nula son iguales, por tanto en este caso $f(x) = 0$ para todo x incluido λ .

Vamos ahora a hacer una serie de consideraciones que no vamos a demostrar. Una discusión detallada está en los libros de Reed y Simon, tanto en este apartado como en los siguientes.

El conjunto de los autovalores de A forma un subespacio de \mathcal{H} y, por lo tanto, su adherencia es un subespacio cerrado de \mathcal{H} la cual es, por lo tanto, un subespacio de Hilbert de \mathcal{H} al que denominaremos \mathcal{H}_{pp} . Si A fuera no acotado, consideremos la intersección de su dominio con \mathcal{H}_{pp} , $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{H}_{pp}$, al que llamaremos $\mathcal{D}_{pp}(A)$. El subespacio $\mathcal{D}_{pp}(A) \equiv \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{H}_{pp}$ tiene las siguientes propiedades:

- i.) $\mathcal{D}_{pp}(A)$ es denso en \mathcal{H} .
- ii.) Para todo $\psi \in \mathcal{D}_{pp}(A)$, se tiene que $A\psi \in \mathcal{H}_{pp}$.
- iii.) La restricción de A a \mathcal{H}_{pp} , es decir a $\mathcal{D}_{pp}(A)$, tiene únicamente espectro puntual, el cual es justamente el espectro puntual de A .
- iv.) Para todo $\psi \in \mathcal{H}_{pp}$, consideremos la función de distribución $f_\psi(\lambda) = \langle \psi | E_\lambda \psi \rangle$, donde E_λ es la medida espectral asociada a A . Entonces $f(\lambda)$ es una función de tipo escalonada, es decir constante salvo en puntos aislados, en los cuales la función se incrementa. Estos puntos en los que la función tiene un salto son precisamente aquellos puntos en los cuales están los autovalores de A .

Al espectro puntual de A se le denota como $\sigma_{pp}(A)$.

• **Espectro absolutamente continuo.**

Sea $\psi \in \mathcal{D}(A)$ un vector para el cual la función de distribución $f_\psi(\lambda) = \langle \psi | E_\lambda \psi \rangle$ es una función derivable, es decir que existe la función densidad

$$\rho_\psi(\lambda) = \frac{d \langle \psi | E_\lambda \psi \rangle}{d\lambda} = f'_\psi(\lambda). \quad (2.49)$$

El conjunto de vectores $\psi \in \mathcal{H}$ para los cuales se verifica esta propiedad forma un espacio vectorial, cuya adherencia es un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{ac} \subset \mathcal{H}$, que se llena el espacio absolutamente continuo con respecto a A , de ahí el subíndice ac. También se verifica que si $\mathcal{D}_{ac}(A) := \mathcal{H}_{ac} \cap \mathcal{D}(A)$, entonces:

- i.) $\mathcal{D}_{ac}(A)$ es denso en \mathcal{H}_{ac} .
- ii.) Para todo vector $\psi \in \mathcal{D}_{ac}(A)$, se tiene que $A\psi \in \mathcal{H}_{ac}$.
- iii.) La restricción de A a \mathcal{H}_{ac} , es decir a \mathcal{D}_{ac} tiene solamente espectro continuo, al cual se denomina *espectro absolutamente continuo de A* . La denominación absolutamente continuo tiene que ver con una propiedad de la medida generada por E_λ en \mathcal{H}_{ac} que no discutiremos aquí, al ser muy técnica.

Al espectro absolutamente continuo de A se le denota como $\sigma_{ac}(A)$

• **Espectro singular continuo**

Puede existir otro espacio de vectores \mathcal{H}_{sing} para el que no se verifique (2.49), el cual es también un espacio de Hilbert. Sus propiedades son muy similares a las de \mathcal{H}_{ac} . Al espectro de la restricción de A en \mathcal{H}_{sing} , o para ser más precisos en $\mathcal{D}_{sing}(A) := \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{H}_{sing}$ se le llama *espectro singular de A* . La terminología está tomada de la Teoría de la medida y no vamos a justificarla aquí.

Al espectro singular continuo de A se lo denota como $\sigma_{sing}(A)$.

Un importante resultado es el siguiente:

Teorema.- Se verifica que:

- 1.- El espacio de Hilbert es la suma directa ortogonal de los subespacios definidos anteriormente, es decir:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing}. \quad (2.50)$$

2.- Sea $\sigma(A)$ el espectro de A tal y como lo definimos anteriormente. Entonces:

$$\sigma(A) = \sigma_{pp}(A) \cup \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A). \quad (2.51)$$

Sin embargo, esta unión no tiene porque ser desjunta en el sentido que sus tres conjuntos no tienen porque ser disjuntos dos a dos.

Capítulo 3

EL MODELO DE FRIEDRICHS

El modelo de Friedrichs es un modelo matemático que describe el comportamiento de estados inestables en Mecánica Cuántica. No existe un único modelo de Friedrichs sino muchos, que esencialmente resultan en generalizaciones de un modelo básico, que describiremos en esta Sección. Antes de proceder a su estudio, vamos a ver muy brevemente dos cuestiones previas: que entendemos por resonancias en Mecánica Cuántica no relativista y que son los espacios de Hilbert equipados.

3.1. RESONANCIAS EN MECÁNICA CUÁNTICA

Como señalamos anteriormente, nos limitaremos a procesos no relativistas. En los textos habituales de Mecánica Cuántica elemental se insiste en el estudio de los estados ligados que son aquellos que son autoestados de un hamiltoniano y que, por lo tanto, permanecen invariables a las evoluciones temporales regidas por dicho Hamiltoniano. Sin embargo nuestras experiencias en Física Atómica, Nuclear y de Partículas, nos avisa de la existencia de una gran diversidad de estados inestables, lo cuales son mayoría en estos contextos. Típicamente, un estado cuántico inestable, también llamado resonante sería por ejemplo el de un neutrón en un núcleo atómico que se transforma en un protón más un electrón más un antineutrino¹. Es la llamada *desintegración beta*. Pero sabemos que la mayor parte de los isótopos de los núcleos pesados son inestables y también la mayor parte de las partículas. Vamos a hacer una descripción de estos estados en términos de lo que llamaríamos *scattering resonante*.

Los procesos de scattering en Física son procesos de difusión de partículas u ondas debidos a la presencia de un potencial que perturba (introduce nuevas fuerzas) en un medio. En el caso de la Mecánica Cuántica no relativista, este potencial es una función, $V(x)$, que se añade al Hamiltoniano llamado libre o no perturbado H_0 . Este H_0 puede ser el hamiltoniano de la partícula libre $H_0 := \mathbf{p}^2/(2m)$ o cualquier otro que tenga espectro continuo. Aunque no es exactamente así en la mayor parte de los casos, podemos suponer para mayor simplicidad que el potencial $V(x)$ afecta a una región acotada del espacio, fuera de la cual es igual a cero.

El scattering resonante puede, en primera aproximación, describirse como sigue: Una determinada partícula evoluciona como libre desde $t = -\infty$ hasta que llega a la región de interacción, en donde actúa el potencial $V(x)$. Hasta ahí, la evolución temporal de la partícula está regida por el Hamiltoniano libre H_0 , de tal manera que su operador evolución es e^{-itH_0} ($\hbar = 1$). La partícula permanece un tiempo en la región de interacción y luego sale, evolucionando como libre (con H_0) hasta $t = \infty$. En la región de interacción la partícula está gobernada por el Hamiltoniano $H = H_0 + V(x)$, de tal manera que su evolución temporal responde al operador e^{-itH} .

Si en la región de interacción la partícula permaneciera un tiempo muy superior al que permanecería si la interacción no existiera, entonces decimos que se ha creado un estado metaestable o estado cuántico inestable o resonancia. La diferencia entre el tiempo en el que está dentro y el que hubiera estado sin interacción se le llama *Wigner time delay* y está definido en la bibliografía estándar en Teoría de Scattering.

Vemos que en esta formulación del scattering resonante hay dos procesos, uno de *captura* de una partícula en una región de interacción, y la consiguiente creación del estado cuántico inestable o resonancia y otro de *decaimiento* en el que la partícula abandona la región de interacción. En el estudio de los estados inestables o

¹Tiene que ser un antineutrino y no un neutrino por la conservación del número leptónico, aunque recordemos que no es ésta una ley de conservación fundamental, pues se puede violar en algunos procesos.

resonancias, se analiza el decaimiento² sin tener en cuenta como ha sido el proceso de captura. Los procesos de captura y decaimiento son procesos independientes y no son la inversión temporal del otro.

Podemos hacernos otra imagen de los estados cuánticos inestables que pareciera estar mejor representada por los modelos tipo Friedrichs. Un estado ligado, correspondiente a un cierto Hamiltoniano H_0 , que esta vez opera como libre, interacciona con un campo externo. Como resultado de la interacción, el estado ligado desaparece y se transforma en un estado inestable o resonancia. No obstante, puede demostrarse que los modelos tipo Friedrichs pueden ajustarse al modelo anterior, si bien es algo complejo y no lo discutiremos aquí. Subrayemos, no obstante, que los modelos de Friedrichs tienen solo en cuenta los procesos de decaimiento y no consideran los de captura, como en la gran mayoría de los estudios de los estados inestables, también llamados resonantes.

Vamos ahora a analizar algunas de las definiciones que da la bibliografía de los estados resonantes, como los llamaremos habitualmente a partir de ahora. Hay dos grupos de definiciones, unas desde el punto de vista de la matemática y otras desde un punto de vista más físico. Aunque estas definiciones puedan coincidir en muchas situaciones reales, no son estrictamente equivalentes.

1.- Definiciones matemáticas

- **Polos de la matriz $S(k)$.**- Vamos a pensar en términos de scattering resonante, en el cual la partícula incidente, lejos de la región de interacción, tiene un estado con función de ondas $\psi_{\text{in}}(k)$, donde k es el momento. Es conveniente, pues, representar las funciones de ondas no en representación de coordenadas, como es habitual, sino en representación de momentos³. Se produce la interacción y, mucho después de que la interacción haya cesado, la función de ondas de la partícula en representación de momentos sería $\psi_{\text{out}}(k)$. Las funciones de onda “in” y “out” están relacionadas mediante un operador, $S(k)$, que ahora sería función del momento k :

$$\psi_{\text{out}}(k) = S(k) \psi_{\text{in}}(k), \quad (3.1)$$

a la que se suele llamar *matriz S* , porque a menudo tiene forma matricial. La matriz S es independiente del estado inicial $\psi_{\text{in}}(k)$ y, obviamente, conecta los estados iniciales y finales del proceso por lo que $S(k)$ solamente depende del potencial de interacción $V(x)$. De momento, no hemos dicho que haya un comportamiento resonante, es decir que el Wigner time delay sea largo.

En principio la variable k en la función $S(k)$ es real, si bien $S(k)$ es en general complejo para k real. Vamos a analizar $S(k)$ de manera independiente de los estados “in” y “out”, de los cuales nos vamos a olvidar. Pues bien, para una cierta colección de potenciales $V(x)$, que aquí no vamos a especificar, la función $S(k)$ puede extenderse a una función meromorfa (analítica salvo puntos singulares aislados) en todo el plano complejo, de tal manera que $S(k) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, salvo en puntos aislados.

Estos puntos singulares pueden ser de la siguiente forma: i.) Polos simples en el semieje imaginario positivo, corresponden a estados ligados. De tal manera, que si uno de tales polos está en el punto ik_0 con $k_0 > 0$, la energía del estado ligado correspondiente sería $E_0 = k_0^2/(2m)$, $\hbar = 1$. ii.) Polos simples en el semieje imaginario negativo, cuyo sentido físico no está claro. Se llaman polos *virtuales* o polos *antiligados* iii.) Pares de polos en el semiplano inferior y, en principio, de multiplicidad arbitraria. Cada uno de estos pares está situado simétricamente con respecto al eje imaginario negativo, de tal manera que si uno de ellos es $k_r - ik_I$, donde k_r y k_I son reales y positivos, entonces el otro está en $-k_r - ik_I$. Los polos de cada par tienen la misma multiplicidad. Pues bien, estos son, por definición, los *polos resonantes*. Cada par de polos correspondería a una resonancia.

Es importante decir que hay potenciales que definen una matriz S , $S(k)$, tal que carezca de alguno de estos tres ingredientes, es decir que carezca de polos ligados, de polos virtuales o de resonancias.

Sobre el problema de la energía y los autovectores (o autofunciones) de los estados resonantes hablaremos más tarde.

• Resolventes reducidos

Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert \mathcal{H} separable y de dimensión infinita. Sabemos que un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ está en el *resolvente* de A , $\lambda \in \rho(A)$, si no está en el espectro de A , $\lambda \notin \sigma(A)$. Esto significa que $A - \lambda\mathbb{I}$ es invertible y está acotado, es decir, existe el operador $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ y es continuo⁴, para cada uno y todos estos $\lambda \in \rho(A)$. Por lo tanto, para cada vector $\psi \in \mathcal{H}$, existe el número complejo $\langle \psi | (A - \lambda\mathbb{I})^{-1} \psi \rangle$, que vamos a escribir como:

²A veces llamado popularmente, la desintegración.

³La función de ondas en representación de coordenadas es simplemente la transformada de Fourier de la función de ondas en representación de momentos.

⁴Y por lo tanto, definido en todo \mathcal{H} .

$$\langle \psi | \frac{1}{A - \lambda \mathbb{I}} | \psi \rangle \quad \text{o simplemente,} \quad \langle \psi | \frac{1}{A - \lambda} | \psi \rangle, \quad (3.2)$$

donde el operador identidad \mathbb{I} se sobreentiende. Pues bien, tenemos las siguientes definiciones:

1.- El *operador resolvente* es el conjunto de operadores de la forma $(A - \lambda \mathbb{I})^{-1}$, definidos para cada $\lambda \in \rho(A)$.

2.- Fijado un $\psi \in \mathcal{H}$ y para todo $\lambda \in \rho(A)$, llamaremos *resolvente reducido*, $R_\psi(\lambda)$, a (3.2). Podríamos llamarlo mejor *resolvente reducido de A con respecto a ψ* para mayor precisión, aunque la primera denominación es mejor al ser más corta. Nótese que el resolvente reducido es una función de variable compleja definida en el plano complejo menos el espectro de A .

Vamos a considerar a continuación un Hamiltoniano libre H_0 y otro de interacción que sea la suma del libre y un potencial, $H = H_0 + V$. Se puede demostrar que existe un subespacio de vectores ψ de \mathcal{H} para los cuales

$$R_\psi^0(\lambda) = \langle \psi | \frac{1}{H_0 - \lambda} | \psi \rangle \quad \text{y} \quad R_\psi(\lambda) = \langle \psi | \frac{1}{H - \lambda} | \psi \rangle \quad (3.3)$$

son funciones analíticas que están definidas en todo $\lambda \in \rho(A)$, excepto posiblemente en puntos aislados donde habría polos.

Pues bien, si existieran un cierto vector $\psi \in \mathcal{H}$ y un número complejo $\lambda_0 \in \rho(H_0) \cap \rho(H)$ para los cuales la función $R_\psi^0(\lambda)$ fuera analítica y la función $R_\psi(\lambda)$ tuviera un polo, entonces diríamos que existe una resonancia con energía λ_0 .

Es importante notar que si λ_0 es un polo resonante, también lo es su complejo conjugado λ_0^* . También es preciso notar que, mientras que los polos de $S(k)$ son momentos, los λ_0 son energías. Más abajo completaremos esta información.

En muchas situaciones particulares estas dos definiciones son equivalentes, en cuyo caso es importante hacer una cierta comparación entre las dos definiciones y sacar consecuencias⁵. No vamos a describir todo ello con detalle, sería un nuevo trabajo. Vimos que el comportamiento resonante tiene su origen en un potencial localizado en una región del espacio que retiene una partícula incidente durante un tiempo que podríamos considerar “largo” en comparación al tiempo que la partícula estuviera en la misma región si el potencial no existiera. Tenemos pues un Hamiltoniano “libre”, H_0 y otro “perturbado”, H . Es decir, las resonancias son el resultado de un *par de Hamiltonianos*, $\{H_0, H\}$. Esto queda también en evidencia en la definición de polos resonantes desde el punto de vista de la definición de polos resonantes realizada con los resolventes reducidos.

Los polos de $S(k)$ y los polos resonantes de la definición de los resolventes están lógicamente relacionados. Recordemos que la relación entre momento (con $\hbar = 1$), k y energía E es justamente⁶ $E = k^2/(2m)$. Al par de polos de $S(k)$ en $k_r - ik_I$ y $-k_r - ik_I$, le corresponden los polos resonantes, según la segunda definición dados por:

$$\lambda_0 = \frac{k_r^2 - k_I^2 - 2ik_r k_I}{2m} = E_R - i\frac{\Gamma}{2}, \quad \lambda_0^* = \frac{k_r^2 - k_I^2 + 2ik_r k_I}{2m} = E_R + i\frac{\Gamma}{2}. \quad (3.4)$$

De esta manera, los polos resonantes correspondientes a una única resonancia tienen los valores $E_R \pm i\Gamma/2$. Decimos que estas son las *energías del estado resonante* caracterizado por el par de polos correspondientes de $S(k)$ o el par de polos resonantes complejos conjugados definidos mediante los resolventes reducidos.

¿Qué significa que los estados resonantes tengan energías complejas? Y para colmo, según este análisis un estado resonante tendría dos energías, una complejo conjugada con respecto a la otra. Pues bien, lo importante son los valores de E_R y Γ . E_R es la energía a la que se produce la resonancia⁷ y $2/\Gamma$ es la vida media del estado inestable que se produce tras la captura de la partícula por el potencial en la región de interacción. Así la parte imaginaria no es otra cosa que inverso de esta vida media. Se entiende que $E_R > 0$ y $\Gamma > 0$, es decir las dos son *positivas*.

Bien, hemos hablado de resonancias y energías resonantes. Pero debemos de decir que es un estado resonante. Un estado queda definido mediante su función de onda o vector estado. Vamos a definir los vectores estado

⁵Pero no siempre son equivalentes

⁶En realidad el momento es un vector tridimensional, con lo que $k = |\mathbf{k}|$.

⁷En realidad la diferencia de energías entre el estado antes de que se produzca el decaimiento y la suma de energías de las partículas producto de la desintegración.

para una resonancia o estado cuántico inestable. Estos va a ser los autovalores del Hamiltoniano total, H , con autovalores $E_R \pm i\Gamma/2$:

$$H\psi^D = (E_R - i\frac{\Gamma}{2})\psi^D, \quad H\psi^G = (E_R + i\frac{\Gamma}{2})\psi^G. \quad (3.5)$$

A estos autovectores, ψ^D y ψ^G , se les denomina *vectores o estados de Gamow* para la resonancia con polos resonantes $E_R \pm i\Gamma/2$. Explicaremos más adelante lo que significan los superíndices D (decay) y G (growing).

Las relaciones (3.5) nos tienen que llamar fuertemente la atención porque pareciera que un hamiltoniano, que es un operador autoadjunto, pudiera tener autovalores complejos. Esto *no es posible en el contexto de los espacios de Hilbert*. Pero si lo es si extendemos el espacio de Hilbert a una *superestructura que llamaremos el espacio de Hilbert equipado* y que analizaremos en la subsección siguiente. Lo que sucede aquí es que las funciones de onda para ψ^D y ψ^G no van a ser nunca de cuadrado integrable. Es más, en representación de coordenadas, van a tener un comportamiento exponencial en la coordenada en el infinito, es decir que el comportamiento asintótico de estas funciones de onda ha de ser proporcional a e^x .

Vamos a ver el significado de los superíndices D (decay) y G (growing). Exponenciemos formalmente (3.5), lo cual nos da ($\hbar = 1$):

$$e^{-itH}\psi^D = e^{-itE_R} e^{-t\Gamma/2}\psi^D, \quad e^{-itH}\psi^G = e^{-itE_R} e^{t\Gamma/2}\psi^G. \quad (3.6)$$

Hemos elegido e^{itH} , ya que es el operador que nos da la evolución temporal de los estados. Obsérvese que ψ^D decae exponencialmente hacia el futuro, $t \mapsto +\infty$, mientras que ψ^G crece exponencialmente. De ahí que se denominen *decaying* (D) y *growing* (G), respectivamente. Para $t \mapsto -\infty$ la situación es exactamente la inversa, pero los nombre no cambian, ya que el tiempo corre del pasado al futuro. Ambos vectores de Gamow representan igualmente al estado cuántico inestable y se relacionan mutuamente mediante el operador inversión temporal.

Definiciones físicas

Vamos brevemente a enumerar las definiciones de resonancias basadas en argumentos y observaciones físicas. Hay que decir que no siempre son equivalentes y que no siempre son equivalentes a las definiciones matemáticas antes presentadas. Lo son en algunos modelos y en otros no. En general, no se conocen condiciones universales que nos digan cuando las definiciones son equivalentes y cuando no. En estas definiciones seguimos suponiendo que las resonancias se forman en procesos de scattering resonante. Los conceptos que se utilizan en esta apartado son justamente los que se utilizan en Teoría de scattering, que puede seguirse en textos clásicos como el de Cohen-Tannoudji, et al, RG Newton, A Bohm o Taylor. Estas son

- Alrededor de la energía resonante E_R (diferencia de energía entre el estado inestable y los productos de la desintegración), tiene un pico abrupto la función $S(E)$, con $E = k^2/(2m)$. La anchura en la mitad de la distancia entre cero y el pico es justamente $2/\Gamma$, la vida media.
- La sección eficaz diferencial tiene un cambio abrupto en E_R .
- El Wigner time delay puede ser una magnitud medible. La presencia de una resonancia se puede observar si hay un Wigner time delay largo.

Sobre las resonancias en Mecánica Cuántica no relativista o relativista se han escrito muchos trabajos y se conocen muchas propiedades. Su mero análisis ocuparía un libro completo, por lo que optamos por dejarlo aquí.

3.2. ESPACIOS DE HILBERT EQUIPADOS

Llamados en inglés *rigged Hilbert spaces* (RHS) y también conocidos como *ternas de Gelfand*, un espacio de Hilbert equipado es una terna de espacios, verificando, en primer lugar la siguientes relaciones de inclusión:

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times. \quad (3.7)$$

Aquí \mathcal{H} es un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita. Los otros dos espacios tiene una serie de propiedades que trataremos de describir a continuación.

En primer lugar, Φ es un subespacio *denso* en \mathcal{H} que tiene una topología propia que hace de la inyección canónica, $i : \Phi \mapsto \mathcal{H}$, $i(\varphi) = \varphi$, $\forall \varphi \in \Phi$, una función continua. Esto no es fácil de visualizar sin un conocimiento de espacios topológicos localmente convexos, pero trataremos de visualizarlo con una situación particular, pero muy interesante, y un ejemplo.

Situación particular muy interesante: En el espacio Φ tenemos definida la norma del espacio de Hilbert \mathcal{H} , que podríamos llamarla la norma cero, $\| - \|_0$. Junto con esta norma tendríamos un conjunto de normas infinito numerable, $\{\| - \|_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Estas normas serían no equivalentes⁸. Una sucesión de vectores en Φ , $\{\varphi_n\} \subset \Phi$ converge a un vector $\varphi \in \Phi$ siempre y cuando

$$\|\varphi_n - \varphi\|_p \mapsto 0, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

es decir cuando $\varphi_n \mapsto \varphi$ con todas las normas de Φ incluyendo la norma que define la topología en \mathcal{H} y que naturalmente hereda Φ , al ser este último un subespacio de \mathcal{H} . Incluimos esta norma en Φ para estar seguros que la inyección canónica de Φ en \mathcal{H} sea continua.

Un ejemplo muy interesante de esta situación particular: *el espacio de Schwartz*, \mathcal{S} , en una dimensión. Este se define como el conjunto de funciones continuas $\varphi(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, de la recta real en el plano complejo, con las propiedades vistas en el *Ejemplo 1*. en la subsección de operadores simétricos.

Como $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R})$, entonces toda $\varphi(x) \in \mathcal{S}$ se puede desarrollar como una serie en términos de una base ortonormal, $\{H_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, como:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x). \quad (3.9)$$

Como base ortonormal se pueden escoger las funciones normalizadas de Hermite. Entonces, definamos la siguiente sucesión de normas:

$$\|\varphi\|_p := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1)^{2p}}, \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Hemos incluido $p = 0$, lo cual nos indica que la norma en $L^2(\mathbb{R})$ está en la lista (3.10). De aquí que la inyección canónica $\mathcal{S} \mapsto L^2(\mathbb{R})$ sea continua.

Ahora vamos a explicar que es el espacio Φ^\times . Sea F una aplicación $F : \Phi \mapsto \mathbb{C}$ del espacio Φ en el cuerpo complejo, satisfaciendo las siguientes condiciones:

i.) *Antilinealidad*: Para todos $\varphi, \psi \in \Phi$ y todo par de números complejos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$F(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha^* F(\varphi) + \beta^* F(\psi). \quad (3.11)$$

ii.) *Continuidad*: Para toda sucesión convergente en Φ , $\varphi_n \mapsto \varphi$, tenemos que $F(\varphi_n) \mapsto F(\varphi)$ ⁹. Cuando la topología en Φ está definida mediante una sucesión de normas, como en el caso estudiado antes, $\| - \|_p$, $p = 0, 1, 2, \dots$, una aplicación *antilineal*, $F : \Phi \mapsto \mathbb{C}$ es continua si y sólo si existe un número real positivo $K > 0$ y un conjunto *finito* de las normas que definen la topología en Φ , $\| - \|_{n_1}, \| - \|_{n_2}, \dots, \| - \|_{n_k}$ tales que para todo $\varphi \in \Phi$,

$$|F(\varphi)| \leq K \{ \|\varphi\|_{n_1} + \|\varphi\|_{n_2} + \dots + \|\varphi\|_{n_k} \}. \quad (3.12)$$

Debemos de subrayar que el número real positivo K y las normas en (3.12) son las mismas para todo vector $\varphi \in \Phi$.

A toda aplicación F verificando las anteriores propiedades le llamaremos un *funcional* en Φ . Resulta que el conjunto de los funcionales en Φ forma un espacio vectorial sobre el cuerpo complejo \mathbb{C} . En particular, cualquier combinación lineal, $\alpha F + \beta G$, de funcionales F y G es también un funcional.

⁸Sea \mathcal{V} un espacio vectorial con al menos dos normas $\| - \|_1$ y $\| - \|_2$. Diremos que estas normas son equivalentes si para todo $v \in \mathcal{V}$ existen dos constantes positivas $a > 0$ y $b > 0$ tales que $a\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq b\|v\|_1$. Dos normas equivalentes nos dan la misma topología en \mathcal{V} , y por lo tanto, las mismas sucesiones convergentes.

⁹Obsérvese que esta última es una convergencia en el cuerpo complejo.

Pues bien, el espacio Φ^\times es el *espacio de los funcionales* en Φ . Aquí cabe preguntarse porque hemos definido los funciones como antilineales en lugar de lineales. En realidad, eso importa muy poco. Lo hemos hecho así para compatibilizar el formalismo de RHS con la notación de Dirac de la Mecánica Cuántica. Pero de manera estricta, da igual que nuestros funcionales sena lineales que antilineales. Vamos a poner un impartante ejemplo que quizá podría aclarar este asunto.

Vamos a suponer que la topología en Φ está dada por una sucesión de normas, justamente como antes. Sea $\psi \in \mathcal{H}$ un vector arbitrario en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Asociado a ψ , vamos a definir la siguiente aplicación:

$$F_\psi(\varphi) := \langle \varphi | \psi \rangle, \quad \forall \varphi \in \Phi. \quad (3.13)$$

La aplicación F_ψ es obviamente antilineal de Φ en el plano complejo, debido a las propiedades del producto escalar. Para demostrar la continuidad, simplemente hagamos uso de la desigualdad de Schwartz:

$$|F_\psi(\varphi)| = |\langle \varphi | \psi \rangle| \leq \|\psi\| \|\varphi\| = K \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad (3.14)$$

donde $K = \|\psi\|$. Vemos que se verifica la desigualdad (3.12), en la cual aparece una sola norma, justamente la norma en \mathcal{H} .

De esta manera, F_ψ es un funcional en Φ . Por consiguiente, $F_\psi \in \Phi^\times$, para todo $\psi \in \mathcal{H}$.

Tenemos entonces una aplicación $\psi \mapsto F_\psi$, para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Vamos a demostrar que es inyectiva. Para ello consideremos dos vectores $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ con $\psi \neq \phi$ y supongamos que $F_\psi(\varphi) = F_\phi(\varphi)$, para todo $\varphi \in \Phi$, es decir supongamos que no hay inyectividad. Entonces, usando la desigualdad de Schwarz tenemos que

$$F_\psi(\varphi) = \langle \varphi | \psi \rangle = F_\phi(\varphi) = \langle \varphi | \phi \rangle \implies \langle \varphi | \psi - \phi \rangle = 0. \quad (3.15)$$

Debido a que φ es arbitrario en Φ , resulta que el vector $\psi - \phi$ es ortogonal a todos los vectores de un subespacio denso. Por lo tanto, $\psi - \phi = \mathbf{0}$ y $\psi = \phi$. De esta manera, llegamos a una contradicción que se elimina solamente aceptando que la hipótesis de no inyectividad es falsa. Por consiguiente, la aplicación $\psi \mapsto F_\psi$ es inyectiva y válida para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Veos que para cada $\psi \in \mathcal{H}$ tenemos un funcional y solamente uno, y que los funcionales para dos vectores distintos son diferentes.

Todo ésto nos permite identificar, por un abuso de lenguaje, cada $\psi \in \mathcal{H}$ con su F_ψ . De esta manera, podemos establecer la segunda inclusión para los RHS: $\mathcal{H} \subset \Phi^\times$. A Φ^\times se le puede asignar una topología de forma que la aplicación canónica $\psi \mapsto F_\psi$, sea continua, pero no vamos a entrar en ello.

Por ejemplo, si Φ es el espacio de Schwartz, \mathcal{S} , es espacio Φ^\times es el espacio de las distribuciones temperadas, \mathcal{S}^\times , con la única salvedad que estas distribuciones están siendo consideradas como funcionales antilineales, en contra de la aceptación general en el sentido que fueran lineales. Pero las propiedades de lineales y antilineales son exactamente las mismas y existe una correspondencia biunívoca entre lineales y antilineales.

NOTACION.- De ahora en adelante, a la aplicación de un funcional $F \in \Phi^\times$ sobre un vector $\varphi \in \Phi$, que habitualmente se suele escribirse como $F(\varphi)$, le vamos a denotar como $\langle \varphi | F \rangle$, es decir:

$$F(\varphi) = \langle \varphi | F \rangle, \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall F \in \Phi^\times. \quad (3.16)$$

Hacemos ésto para adaptarnos a la notación de Dirac usada en Mecánica Cuántica. Nótese que $\langle \varphi | F_\psi \rangle \equiv \langle \varphi | \psi \rangle$.

Sea ahora un operador A en \mathcal{H} con las siguientes propiedades:

- 1.- El espacio Φ está contenido en el dominio del adjunto de A , A^+ , esto es que $\Phi \subset \mathcal{D}(A^+)$.
- 2.- $A^+\Phi \subset \Phi$. Esta propiedad significa que $A\varphi \in \Phi$, para todo $\varphi \in \Phi$.

Entonces A puede extenderse a un único operador en Φ^\times , al cual, para no complicar la notación, le llamaremos A . Esto se realiza mediante la llamada *fórmula de dualidad (duality formula)*:

$$\langle A^+\varphi | F \rangle = \langle \varphi | AF \rangle, \quad \forall \varphi \in \Phi, \forall F \in \Phi^\times. \quad (3.17)$$

Nótese que (3.17) implica en particular que

$$\langle A^+\varphi | F_\psi \rangle = \langle \varphi | AF_\psi \rangle = \langle \varphi | A\psi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi. \quad (3.18)$$

Nótees que si A fuera autoadjunto, entonces prescindiríamos de poner el signo $+$ en A^+ entoda la discusión precedente. también se pueden discutir algunas propiedades de continuidad en el operador A^+ y la extensión de A en Φ^\times , pero de nuevo, vamos a omitir este tipo de detalles que complicarían mucho la presente exposición.

Vamos con un concepto muy importante, aunque por razones de simplicidad vamos a limitarnos a operadores autoadjuntos, $A = A^+$.

Definición.- Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , y sea $\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$ un RHS de tal manera que 1.- $\Phi \subset \mathcal{D}(A)$ y 2.- $A\Phi \subset \Phi$. Diremos que un número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$ y un funcional $F \in \Phi^\times$ son, respectivamente, *un autovalor y un autovector* generalizados de A si para todo $\varphi \in \Phi$ se verifica que:

$$\langle A\varphi|F \rangle = \lambda \langle \varphi|F \rangle = \langle \varphi|\lambda F \rangle. \quad (3.19)$$

Pero A es autoadjunto. Llamando también A a su extensión a Φ^\times y teniendo en cuenta que dos funcionales son iguales cuando lo es su acción en todo vector $\varphi \in \Phi$, se obtiene usando la fórmula de dualidad (3.17) y (3.19) que

$$\langle A\varphi|F \rangle = \langle \varphi|AF \rangle = \langle \varphi|\lambda F \rangle, \forall \varphi \in \Phi \implies AF = \lambda F. \quad (3.20)$$

La idea de los autovalores y autovectores generalizados consiste en sumergir un espacio de Hilbert en un RHS, extender un operador al antidual y allí resolver el problema espectral de la extensión. Los autovalores generalizados de operadores autoadjuntos *no son necesariamente reales*.

A continuación un resultado que puso rigor matemático a la formulación de la Mecánica Cuántica no relativista, tal y como la presentó Dirac. Vamos a presentarla solamente para operadores autoadjuntos con espectro absolutamente continuo solamente y no degenerado¹⁰.

Teorema (Gelfand y Maurin).- Sea A un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita \mathcal{H} . Supongamos que A tiene solamente espectro absolutamente continuo, $\sigma(A)$, y que es no degenerado (en un sentido que no especificaremos¹¹). Entonces existe un RHS, $\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$, tal que:

1.- $\Phi \subset \mathcal{D}(A)$.

2.- $A\Phi \subset \Phi$ ¹².

3.- Para todo¹³ $\lambda \in \sigma(A)$ existe un funcional, que aquí denominaremos como $|\lambda\rangle$, tal que $A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$. Esto significa que todo $\lambda \in \sigma(A)$ es un autovalor generalizado de A ¹⁴. Además, para todo $\varphi, \psi \in \Phi$, se tiene que:

$$\langle \varphi|A^n\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} \lambda^n \langle \varphi|\lambda \rangle \langle \lambda|\psi \rangle d\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.21)$$

donde $\langle \lambda|\psi \rangle := \langle \psi|\lambda \rangle^*$, y la estrella significa conjugación compleja.

Es habitual escribir la fórmula (3.21) prescindiendo de los vectores $\varphi, \psi \in \Phi$, que son arbitrarios. Esta notación la siguen bastantes textos elementales de Mecánica Cuántica, y queda así:

$$A^n = \int_{\sigma(A)} \lambda^n |\lambda\rangle \langle \lambda| d\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.22)$$

Obsérvese que para $n = 0$, tenemos una descomposición de la identidad en autovectores generalizados de A . Para algunas funciones $f(\lambda)$ es posible definir $f(A)$, y entonces tendríamos una expresión similar a (3.21), que en la forma (3.22) aparecería como

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) |\lambda\rangle \langle \lambda| d\lambda. \quad (3.23)$$

¹⁰La definición de degeneración para el caso del espectro continuo es un concepto delicado y, en cierta forma, complicado. Por lo tanto, no lo discutiremos aquí.

¹¹Que exista un vector $f \in \mathcal{D}(A)$, de tal manera que las combinaciones lineales finitas de los vectores de la sucesión $f, Af, A^2f, \dots, A^n f, \dots$, formen un subespacio denso en \mathcal{H} .

¹²Además A es continuo en Φ , una cuestión que no discutimos aquí.

¹³En realidad para todo salvo conjunto de medida nula

¹⁴Puede haber más, incluso ser complejos

Como ejemplo, consideremos el operador multiplicación $Qf(x) = xf(x)$ en $L^2(\mathbb{R})$, es decir el operador posición en una dimensión. En este caso, se cumplen todas las condiciones de la forma simplificada del Teorema de Gelfand y Maurin. Aquí el RHS es $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^\times$. Para cada $x_0 \in \mathbb{R} \equiv \sigma(Q)$, existe el funcional $|x_0\rangle \in \mathcal{S}^\times$, definido como $\langle f|x_0\rangle := [f(x_0)]^*$, $\forall f(x) \in \mathcal{S}$, es decir el complejo conjugado de la función $f(x)$ en el punto x_0 . Entonces

$$Q^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n |x\rangle\langle x| dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Anteriormente vimos que el operador Q no tiene autovalores en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, sin embargo si tiene autovalores y autofunciones generalizadas al sumergirlo en un espacio de Hilbert equipado.

Una descomposición similar es posible para el operador momento $P = -id/dx$:

$$P^n = \int_{-\infty}^{\infty} p^n |p\rangle\langle p| dp, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

con $P|p\rangle = p|p\rangle$, $\forall p \in \mathbb{R}$.

3.3. EL MODELO DE FRIEDRICHS

El modelo de Friedrichs es un modelo matemático que pretende ilustrarnos el comportamiento de las resonancias en Mecánica Cuántica. Aquí vamos a describir algunas propiedades del modelo de Friedrichs más elemental y básico, tal y como lo introdujo Friedrichs en 1948, pero usando un lenguaje moderno y más asequible para el lector medio. También es importante señalar que a este modelo básico se le han añadido multitud de generalizaciones que sirven para ilustrar diversas situaciones físicas, incluyendo el caso relativista, que no discutiremos aquí. Tampoco discutiremos algunos ingredientes del modelo, en el que están definidos todos los conceptos de la Teoría de Scattering, incluyendo la matriz S y los operadores de Møller.

Antes de iniciar el estudio, describiremos brevemente la situación. Tenemos un estado ligado sumergido en un cierto campo. Al principio, ambos no interaccionan, pero cuando lo hacen, el estado ligado se vuelve inestable y se desintegra. La forma más sencilla de describir este proceso esteren un sistema con un espectro absolutamente continuo y no degenerado y un estado ligado sumergido en el espectro continuo, lo cual vendrá descrito por un Hamiltoniano, que supondremos es el Hamiltoniano no perturbado. En un momento dado, se define una interacción entre el espectro continuo y el discreto, interacción que puede escribirse en forma de potencial. tenemos un nuevo Hamiltoniano formado por la suma del Hamiltoniano no perturbado y el potencial, el cual no tiene estados ligados. Lo que ha sucedido ha sido que la interacción ha convertido el estado ligado preexistente en una resonancia.

El modelo de Friedrichs puede describirse en varios formatos: representación de coordenadas, de momentos, de energías, etc. Aquí vamos a usar la representación de energías, lo cual simplifica enormemente el análisis de las resonancias, aunque hay algunos inconvenientes, como por ejemplo, que las funciones de onda, en particular las de estados de Gamow, han de escribirse como función de la energía. En este trabajo vamos a usar dos tipos de notación diferente: la notación bra-ket de Dirac y la notación matricial. Si bien usaremos la primera de ellas de forma preferencial, mientras que utilizaremos la segunda simplemente como una cierta explicación de la primera en un lenguaje que puede ser más familiar a algunos lectores.

Vamos a comenzar con la descripción del Hamiltoniano libre o no perturbado. Este se escribiría de la forma:

$$H_0 := \omega_0 |1\rangle\langle 1| + \int_0^\infty \omega |\omega\rangle\langle \omega| d\omega, \quad \omega_0 > 0. \quad (3.26)$$

Este Hamiltoniano está definido en un espacio de Hilbert que luego precisaremos, en el que es autoadjunto.

Expliquemos el significado de todos los ingredientes de (3.26):

1.- El ket $|1\rangle$ representa un autoestado de H_0 con autovalor $\omega_0 > 0$, $H_0|1\rangle = \omega_0|1\rangle$. Obsérvese que, formalmente,

$$H_0|1\rangle = \omega_0|1\rangle\langle 1|1\rangle + \int_0^\infty \omega |\omega\rangle\langle \omega|1\rangle d\omega = \omega_0|1\rangle, \quad (3.27)$$

lo que implica que

$$\langle 1|1\rangle = 1, \quad \langle \omega|1\rangle = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty). \quad (3.28)$$

Entonces, el estado $|1\rangle$ está normalizado.

2.- El significado de la integral en (3.26) es un poco más complicada. Pero la ecuación (3.22) con $n = 1$ nos dice que este sumando de H_0 nos representa un operador con un espectro absolutamente continuo y no degenerado e igual a \mathbb{R}^+ . Además

$$H_0|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^+. \quad (3.29)$$

Resulta que H_0 tiene un espectro discreto que se reduce a un solo punto, $\{\omega_0\}$, y un espectro absolutamente continuo que coincide con todo el semieje no negativo $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Como $\omega_0 > 0$, este punto está en los dos, el espectro discreto y el absolutamente continuo, algo que ya dijimos que podía suceder.

Si se compara la integral del Hamiltoniano H_0 con las fórmulas (2.28) y (3.22), puede verse como $|\omega\rangle\langle\omega|$ es la derivada formal del proyector E_ω , respecto a ω , asociado al boreliano $(-\infty, \omega]$:

$$\frac{dE_\omega}{d\omega} = |\omega\rangle\langle\omega| \quad (3.30)$$

Los autoestados $|\omega\rangle$ son funcionales pertenecientes al antidual, Φ^\times , una cierta equipación del espacio de Hilbert. El espacio de Hilbert lo precisaremos un poco más tarde. La equipación, $\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\times$, ha sido construida por I. Antoniou et al., pero no la vamos a describir aquí.

Un comentario respecto al resultado $\langle\omega|1\rangle = 0$. Aunque los kets $|\omega\rangle$ no están en el espacio de Hilbert, en realidad están en la equipación del subespacio absolutamente continuo, que es ortogonal al subespacio de los estados ligados, por lo que esta relación tiene un perfecto sentido. Además $\langle 1|\omega\rangle = \langle\omega|1\rangle^* = 0$. La equipación del espacio de Hilbert es una suma ortogonal de la equipación del espacio de los estados ligados, que como es de dimensión finita es trivial, es decir coincide con este espacio, y el del espacio absolutamente continuo.

La interacción entre el estado ligado y el continuo se realiza mediante un potencial en el que ambos ingredientes están entremezclados:

$$V = \lambda \int_0^\infty f(\omega) \{ |1\rangle\langle\omega| + |\omega\rangle\langle 1| \} d\omega, \quad (3.31)$$

donde: *i.*) la expresión entre llaves produce la interacción entre el espectro discreto y el absolutamente continuo, necesaria para que se produzca la resonancia. *ii.*) $\lambda > 0$ es un parámetro que podemos hacer variar. Cuando $\lambda = 0$ no hay interacción. *iii.*) Hasta ahora, con los dos ingredientes anteriores obtenemos un potencial con magnitud e interacción entre los espectros. La forma explícita de como se produce esta interacción viene descrita por el *factor de forma*, $f(\omega)$. El factor de forma es una función real de la variable ω que normalmente se toma de cuadrado integrable en el intervalo $[0, \infty)$. Esta función hace que todo el análisis posterior tenga un correcto sentido matemático y su elección influye en las propiedades de las resonancias¹⁵. El hamiltoniano total sería entonces $H = H_0 + V$, con lo que queda entonces:

$$H = \omega_0|1\rangle\langle 1| + \int_0^\infty \omega|\omega\rangle\langle\omega| d\omega + \lambda \int_0^\infty f(\omega) \{ |1\rangle\langle\omega| + |\omega\rangle\langle 1| \} d\omega. \quad (3.32)$$

En general se llama V a la integral en (3.31), con lo que casi siempre se escribe el Hamiltoniano total como $H = H_0 + \lambda V$, lo que nosotros haremos en el resto de esta Memoria.

Antes de proseguir, escribamos el formalismo anterior en forma matricial, donde en primer lugar especificaremos cual es el espacio de Hilbert en donde se aplican los Hamiltonianos como operadores. Este es la suma directa del cuerpo complejo, considerado como espacio de Hilbert de dimensión uno y el espacio de las funciones de cuadrado integrable definidas en \mathbb{R}^+ : $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^+)$. De esta manera, todo vector de \mathcal{H} se puede poner en forma de matriz columna

¹⁵Por ejemplo, con una elección adecuada del factor de forma, se pueden conseguir resonancias representadas por polos dobles de la matriz S .

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi(\omega) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^+). \quad (3.33)$$

Si ahora $\beta \in \mathbb{C}$ y $\eta(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^+)$, podemos definir el producto escalar en \mathcal{H} de la siguiente forma:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi(\omega) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \eta(\omega) \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha^* \beta + \int_0^\infty \varphi^*(\omega) \eta(\omega) d\omega. \quad (3.34)$$

El vector $|1\rangle$ en forma matricial es

$$|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

El resultado de aplicar el Hamiltoniano no perturbado H_0 al vector (3.33) es

$$H_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 \alpha \\ \omega \varphi(\omega) \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

por lo que H_0 adopta la forma matricial

$$H_0 \equiv \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

siendo Q el operador multiplicación en $L^2(\mathbb{R}^+)$, $Q\varphi(\omega) = \omega \varphi(\omega)$, $\forall \varphi(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

El Hamiltoniano total adopta la forma $H = H_0 + \lambda V$, siendo el potencial V el siguiente operador:

$$V\psi \equiv \begin{pmatrix} 0 & R \\ f^*(\omega) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^\infty f(\omega) \varphi(\omega) d\omega \\ \alpha f^*(\omega) \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

donde $f(\omega)$ es el factor de forma. Normalmente lo elegimos de cuadrado integrable, $f(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^+)$, de tal manera que la primera componente del vector columna de la derecha esté en (3.38) bien definido y que la segunda componente esté en $L^2(\mathbb{R}^+)$. En cuanto a R es un funcional lineal en $L^2(\mathbb{R}^+)$ definido de la siguiente forma:

$$R\varphi(\omega) = \int_0^\infty f(\omega) \varphi(\omega) d\omega, \quad \forall \varphi(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^+). \quad (3.39)$$

El significado de V y ψ en (3.38) es obvio. En cuanto al RHS que utilizaremos aquí puede construirse de la manera siguiente. Sea $\Phi \subset L^2(\mathbb{R}^+) \subset \Phi^\times$ una equipación de $L^2(\mathbb{R}^+)$. Entonces la equipación que requiere el modelo de Friedrichs sería de la forma

$$\mathbb{C} \oplus \Phi \subset \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{C} \oplus \Phi^\times. \quad (3.40)$$

La elección del espacio Φ no es trivial y fue hecha por Antoniou et al.

Esta construcción tiene la ventaja de visualizar cual es el espacio de Hilbert que usamos para el modelo de Friedrichs. Sin embargo, a efectos prácticos parece más recomendable usar el primer formalismo basado en notación de bras y kets. En dicho formalismo un vector $\psi \in \mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R}^+)$, por lo tanto de la forma (3.33), se escribe en la primera notación como

$$\psi = \alpha |1\rangle + \int \varphi(\omega) |\omega\rangle d\omega, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^+). \quad (3.41)$$

Si $\psi \in \mathbb{C} \oplus \Phi$, entonces $\varphi(\omega) \in \Phi$.

Vamos a ver que el modelo de Friedrichs tiene resonancias. No vamos a hacer demostraciones que ya están en la bibliografía, en particular el libro de P. Exner y el paper de Gadella y Pronko. Tampoco vamos a profundizar en conceptos complicados como el de superficie de Riemann, que, por otra parte, no son imprescindibles en este contexto, por mucho que multitud de autores lo usen. Vamos a usar ahora la noción de resonancia basada en las propiedades de analiticidad del resolvente reducido, tal y como lo presentamos en las páginas 28 y 29. Comencemos por la función en la variable z :

$$f_0(z) := \langle 1 | \frac{1}{H_0 - z\mathbb{I}} | 1 \rangle. \quad (3.42)$$

La función $f_0(z)$ tiene interesantes propiedades de analiticidad. Es una función analítica en el plano complejo \mathbb{C} , excepto allá donde esté el espectro de H_0 , en nuestro caso el semieje real positivo $\mathbb{R}^+ \equiv [0, \infty)$. Este semieje es un corte (*branch cut*) y el origen un punto de corte (*branch point*) de $f_0(z)$. En todo \mathbb{R}^+ , la función $f_0(z)$ no es analítica y si lo es en los demás puntos del plano complejo. Pero aquí hay una importante cuestión, la función $f_0(z)$ se puede extender de forma analítica¹⁶ a todo el plano. Por tener esta función un branch point, al trazar un contorno alrededor de este punto en el dominio de $f_0(z)$ la función es multivaluada, de manera que cuando el contorno atraviesa el corte la función adquiere para el mismo z un valor diferente. A cada uno de estos valores le llamaremos *rama*. Puede construirse una superficie (*Superficie de Riemann*) con dos planos unidos a través del corte, de manera que la función toma valores diferentes en cada plano. En este segundo plano la función $f_0(z)$ *no tiene singularidades*.

Consideremos ahora la siguiente función de variable compleja:

$$f(z) = \langle 1 | \frac{1}{H - z\mathbb{I}} | 1 \rangle, \quad (3.43)$$

con $H = H_0 + \lambda V$. La función $f(z)$ tiene las mismas propiedades que la función $f_0(z)$, pero con una muy importante salvedad: *sus prolongaciones analíticas a través del corte tienen sendos polos (casi siempre simples, aunque no necesariamente), una en el punto $z_0 = E_R - i\Gamma/2$ y la otra en su complejo conjugado $z_0^* = E_R + i\Gamma/2$. Aquí $E_R, \Gamma > 0$. Usando la definición de resonancias en la página 28-29, resulta que el par de Hamiltonianos $\{H_0, H\}$ admite una resonancia con polos resonantes (en la representación de energías) z_0 y z_0^* .*

Vamos a cambiar ligeramente de notación y vamos a escribir:

$$\frac{1}{\eta(z)} := f(z). \quad (3.44)$$

Resulta que la función $\eta(z)$ tiene la forma:

$$\eta(z) = z - \omega_0 - \lambda^2 \int_0^\infty \frac{|f(\omega)|^2}{z - \omega} d\omega. \quad (3.45)$$

Esta función tiene las mismas propiedades que $f(z)$, pero con un cambio esencial: en lugar de tener polos en z_0 y z_0^* , tiene ceros. Esto es absolutamente razonable, ya que los ceros de una función son los polos de la inversa y viceversa (y con la misma multiplicidad). También la función $\eta(z)$ tiene un corte en el semieje positivo, es decir es analítica en todo el plano excepto en dicho semieje, donde la función no solo no es analítica, sino que es discontinua. Los límites de esta función cuando nos acercamos a \mathbb{R}^+ por arriba y por abajo son distintos y sus valores son para todo $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\eta_+(x) = x - \omega_0 - \lambda^2 \int_0^\infty \frac{|f(\omega)|^2}{x - \omega + i0} dx, \quad (3.46)$$

cuando nos acercamos por arriba, y

¹⁶Para tener una imagen de la prolongación analítica, consideremos la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

la cual converge y es analítica si y sólo si $|z| < 1$. Sin embargo, la función $(1-z)^{-1}$ es analítica en todo el plano complejo, excepto en el punto $z = 1$ donde tiene un polo simple. Diremos entonces que la serie geométrica *admite una prolongación analítica a través de la circunferencia unidad*. Esta prolongación analítica admite un polo simple.

$$\eta_{-}(x) = x - \omega_0 - \lambda^2 \int_0^{\infty} \frac{|f(\omega)|^2}{x - \omega - i0} dx, \quad (3.47)$$

cuando nos acercamos por abajo. El $i0$ que aparece en los denominadores no es trivial, no es cero, sirve para denotar los siguientes límites

$$\eta_{\pm}(x) = x - \omega_0 + \lambda^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{|f(\omega)|^2}{x - \omega \pm i\epsilon} d\omega. \quad (3.48)$$

Y aquí no pueden intercambiarse el límite y la integral¹⁷.

En el Modelo de Friedrichs podemos definir los estados de Gamow, $|f_0\rangle$ y $|\tilde{f}_0\rangle$, como autovectores generalizados del Hamiltoniano total con respectivos autovalores z_0 y z_0^* :

$$H|f_0\rangle = z_0|f_0\rangle, \quad H|\tilde{f}_0\rangle = z_0^*|\tilde{f}_0\rangle. \quad (3.49)$$

Veamos como se obtienen de manera explícita estos vectores o estados de Gamow en este contexto. Escribamos la siguiente ecuación en autovalores válida para todo $x \geq 0$:

$$(H - x\mathbb{I})\Psi(x) = 0. \quad (3.50)$$

Atención: Hay una solución para esta ecuación en autovalores para todo¹⁸ $x \geq 0$. Esto no es posible en el sentido de la Teoría de Funciones (recordemos que el Hamiltoniano actúa como el operador multiplicación sobre los vectores del espectro absolutamente continuo, y este no tiene autovalores ni autovectores salvo en equiparaciones del espacio de Hilbert), de tal manera que para cada $x \geq 0$, $\Psi(x)$ está en el dual $\mathbb{C} \oplus \Phi^{\times}$. Por lo tanto, la expresión más general de $\Psi(x)$ sería

$$\Psi(x) = \alpha(x)|1\rangle + \int_0^{\infty} \varphi(x, \omega)|\omega\rangle d\omega, \quad (3.51)$$

donde insistimos que la variable $x \geq 0$ es un parámetro que nos etiqueta toda una familia de funcionales, uno por cada valor de x . Vamos a usar (3.51) en (3.50), teniendo en cuenta (3.36), (3.38) y que $H = H_0 + \lambda V$. Tenemos,

$$\begin{aligned} (H - x\mathbb{I})\Psi(x) &= (\omega_0 - x)\alpha(x)|1\rangle + \lambda \int_0^{\infty} f^*(x) \varphi(x, \omega) d\omega |1\rangle \\ &+ \int_0^{\infty} (\omega - x) \varphi(x, \omega) |\omega\rangle d\omega + \lambda \alpha(x) \int_0^{\infty} f(\omega) |\omega\rangle d\omega = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Nótese que los dos sumandos de la derecha de (3.52) son un coeficiente dependiente en x multiplicado por el vector $|1\rangle$. Es en la segunda línea donde vemos la dependencia en el espectro continuo. Multipliquemos (3.52) por el bra $\langle 1|$ y usemos (3.28). Queda entonces:

$$(\omega_0 - x)\alpha(x) + \lambda f^*(x) \varphi(x, \omega) = 0. \quad (3.53)$$

Observemos ahora que $H|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle$. Por lo tanto:

$$H|\omega\rangle = \omega_0|1\rangle\langle 1|\omega\rangle + \int_0^{\infty} \omega'|\omega'\rangle\langle \omega'|\omega\rangle d\omega' = \omega|\omega\rangle. \quad (3.54)$$

¹⁷De hecho este límite tiene que entenderse en un sentido distribucional con función test $|f(\omega)|^2$. Recuérdese que si $g(\omega)$ es una función test arbitraria en un espacio de funciones test (se integra en la recta, pero igual podría hacerse en una semirrecta), se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{x - \omega \pm i0} dx = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{x - \omega} dx \mp \pi i \delta(x - \omega),$$

donde PV quiere decir el valor principal de Cauchy (Cauchy principal value). Es la llamada fórmula de Plemelj, donde x está fijo y cuando varía en la recta semirrecta o intervalo nos da una función de x .

¹⁸En realidad para casi todo.

Teniendo en cuenta (3.28), resulta que para un $\omega \geq 0$ fijo se tiene que

$$\langle \omega' | \omega \rangle = \delta(\omega - \omega'). \quad (3.55)$$

Vamos ahora a multiplicar la ecuación (3.52) a la izquierda por el bra $\langle \omega' |$, de lo cual resultará que (llamando de nuevo ω a ω' por simplicidad:

$$(\omega - x)\varphi(x, \omega) + \lambda \alpha(x) f(\omega) = 0. \quad (3.56)$$

Despejando $\varphi(x, \omega)$ en (3.56), se obtiene que

$$\varphi(x, \omega) = \lambda \frac{\alpha(x) f(\omega)}{x - \omega \pm i0} d\omega + c \delta(x - \omega), \quad (3.57)$$

donde c es una constante arbitraria. El paso de (3.56) a (3.57) no es trivial. Se puede comprobar multiplicando (3.57) por $x - \omega \pm i0$. Una vez en el numerador, el término $i0$ es nulo. Nótese que (3.57) es una igualdad entre distribuciones. En principio no hay problema en elegir el valor de la constante c . Hagámosla entonces $c = 1$. Llevando (3.57) a (3.53) obtenemos la siguiente relación:

$$(\omega_0 - x)\alpha(x) + \lambda^2 \alpha(x) \int_0^\infty \frac{|f(\omega)|^2}{x - \omega \pm i0} d\omega + \lambda f^*(x) = 0. \quad (3.58)$$

Usando en (3.58) las relaciones (3.46) y (3.47), se tiene que

$$\alpha(x) = -\lambda \frac{f^*(x)}{\eta_\pm(x)}. \quad (3.59)$$

Vamos entonces a (3.51) y usemos en dicha ecuación las relaciones (3.59) y (3.57), con lo cual obtenemos dos soluciones¹⁹ para $\Psi(x)$:

$$\Psi_\pm(x) = |x\rangle - \lambda \frac{f^*(x)}{\eta_\pm(x)} \left[|1\rangle + \lambda \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{x - \omega \pm i0} |\omega\rangle d\omega \right]. \quad (3.60)$$

Para obtener los vectores o estados de Gamow, se procede de la siguiente manera: Sabemos que los $\Psi_\pm(x)$, para cada $x \geq 0$, son funcionales en sendas equipaciones de $\mathbb{C} \oplus L^2(\mathbb{R})$. Tomemos $\Psi_+(x)$ y sea φ_+ un vector test arbitrario. La acción de cada $\Psi_+(x)$ sobre φ_+ la podemos denotar como $\langle \varphi_+ | \Psi(x) \rangle$, la cual es una función definida en \mathbb{R}^+ . Resulta que esta función puede prolongarse analíticamente al semiplano inferior (no nos interesa una posible extensión analítica al semiplano superior, que existe), con un polo en z_0 . De esta manera, en un entorno de z_0 se tiene que:

$$\langle \varphi_+ | \Psi(z) \rangle = \frac{A}{z - z_0} + g(z), \quad (3.61)$$

donde A es el residuo de la función $\langle \varphi_+ | \Psi(x) \rangle$ en z_0 y $g(z)$ una función analítica en un entorno de z_0 . Esto sucede para cualquier vector test φ_+ , por lo que podremos escribir, en un entorno de z_0 una relación entre funcionales del siguiente tipo obsérvese que en realidad estamos abusando del lenguaje):

$$\Psi_+(z) = \frac{C}{z - z_0} + o(z). \quad (3.62)$$

Ahora C es un funcional, al que llamaremos el residuo de $\Psi_+(z)$ en z_0 , y $o(z)$ otro funcional²⁰. Volvamos ahora a (3.50) y vamos a extender dicha expresión para todo z en el semiplano inferior (o al menos allá donde la función $\langle \varphi_+ | \Psi(x) \rangle$ admita prolongación analítica), lo cual puede escribirse así:

$$(H - z\mathbb{I})\Psi_+(z) = 0. \quad (3.63)$$

¹⁹Que en realidad están en dos equiparaciones diferentes. No discutiremos ese punto, pero lo tendremos en cuenta.

²⁰La notación proviene de la o pequeña de Landau y quiere decir “términos de orden superior”.

Si ahora insertamos (3.62) en (3.63), se obtiene que (obsérvese que no es necesario poner siempre el operador identidad \mathbb{I})

$$0 = (H - z)\Psi_+(z) = \frac{1}{z - z_0} (H - z)C + (H - z)o(z). \quad (3.64)$$

Multiplicando (3.64) por $z - z_0$ obtenemos

$$0 = \frac{z - z_0}{z - z_0} (H - z)C + (z - z_0)(H - z)o(z), \quad (3.65)$$

y eligiendo $z = z_0$ en (3.65), resulta

$$(H - z_0)C = 0 \implies HC = z_0 C. \quad (3.66)$$

Por lo tanto el funcional C es un autovector generalizado de H con autovalor z_0 , por lo que podemos identificarlo con el vector de Gamow $|f_0\rangle$. Vamos a ver cual es su forma precisa. Para ello, extendamos al semiplano inferior la expresión²¹ (3.60). Nos queda:

$$\Psi_+(z) = |z\rangle - \lambda \frac{f^*(z)}{\eta_+(z)} \left[|1\rangle + \lambda \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{z - \omega + i0} |\omega\rangle d\omega \right], \quad (3.67)$$

donde $H|z\rangle = z|z\rangle$ en el sentido de los autovectores y autovalores generalizados. Para calcular el residuo C , lo que haremos será recordar que la función $\eta_+(z)$ tenía un cero simple en z_0 , por lo que $1/\eta_+(z)$ tiene un polo simple en z_0 , de tal manera que en un entorno de z_0 :

$$\frac{1}{\eta_+(z)} = \frac{\text{constante}}{z - z_0} + o(z), \quad (3.68)$$

por lo que llevando este resultado a (3.67) y teniendo en cuenta que el término $|z\rangle$ no contribuye al residuo, por lo que quedaría dentro de $o(z)$. Entonces en un entorno de z_0 :

$$\Psi_+(z) = \frac{\text{constante}}{z - z_0} \left[|1\rangle + \lambda \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{z - \omega + i0} |\omega\rangle d\omega \right] + o(z). \quad (3.69)$$

Para poner la expresión entre paréntesis en orden cero en z_0 , vamos a realizar la siguiente operación:

$$\frac{1}{z - \omega + i0} = \frac{1}{z_0 - \omega + i0} - \frac{z - z_0}{(z_0 - \omega + i0)^2} + o(z). \quad (3.70)$$

Llevando (3.70) a (3.69) encontramos la relación final:

$$\Psi_+(z) = \frac{\text{constante}}{z - z_0} \left[|1\rangle + \lambda \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{z_0 - \omega + i0} |\omega\rangle d\omega \right] + o(z). \quad (3.71)$$

La constante que aparece en el numerador en (3.71) es irrelevante, pues al ser $\Psi_+(z)$ un funcional (uno para cada z) no es normalizable. Por lo tanto se puede escoger dicha constante igual a uno. De aquí que el residuo C , o lo que es lo mismo, el vector de Gamow $|f_0\rangle$, sea

$$|f_0\rangle = |1\rangle + \lambda \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{z_0 - \omega + i0} |\omega\rangle d\omega. \quad (3.72)$$

Ya tenemos la forma explícita del primer vector de Gamow $|f_0\rangle$. Para obtener el segundo, $|\tilde{f}_0\rangle$, tenemos que hacer exactamente lo mismo reemplazando los signos $+$ por los signos $-$. El resultado final es

$$|\tilde{f}_0\rangle = |1\rangle + \lambda \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{z_0 - \omega - i0} |\omega\rangle d\omega. \quad (3.73)$$

²¹Esto es un abuso de lenguaje. Lo que en realidad se extiende es la función analítica $\langle \psi_+ | \Psi_+(x) \rangle$, para todo vector test φ_+ . Esto también supone una restricción en las posibilidades de elegir el factor de forma $f(\omega)$, pues hanremos de suponer que es también prolongable analíticamente en el semiplano inferior, al menos en un entorno de z_0 .

Obsérvese que cuando $\lambda \mapsto 0$, los estados de Gamow tienden al estado ligado. El estado ligado, por interacción con el espectro continuo (campo externo), se vuelve inestable y produce la resonancia caracterizada por los estados de Gamow.

Finalmente, vamos a dar, sin demostración (ver Antoniou, Prigogine) una fórmulas para obtener los dos polos resonantes. Escribiremos esta fórmula para z_0 , pues z_0^* es su complejo conjugado. Esta es

$$z_0 = \omega_0 + \lambda^2 \int_0^\infty \frac{|f(\omega)|^2}{\omega - z_0 + i0} d\omega, \quad (3.74)$$

lo cual nos da una ecuación trascendente. También cuando $\lambda \mapsto 0$, entonces $z_0 \mapsto \omega_0$, lo cual es consistente. Bajo condiciones bastante suaves, estas relaciones son analíticas en λ , al menos para λ pequeño, por lo que la forma que hemos tomado el límite en $\lambda = 0$ tiene sentido.

Esta ha sido la exposición del modelo más básico de Friedrichs. Hay muchas generalizaciones y es una línea de investigación abierta, en el sentido que siguen apareciendo trabajos con nuevas formulaciones y nuevas aplicaciones del Modelo de Friedrichs.

En el modelo de Friedrichs también se puede definir el operador de scattering o matriz $S(k)$ (Exner), tanto en representación de energías como de momentos. En este segundo caso, $S(k)$ sería analítica en todo el plano, excepto por dos polos simples localizados en los puntos

$$\pm \sqrt{E_R^2 + \Gamma^2/4} \cos(\arctan \Gamma/(2E_R)) - i\sqrt{E_R^2 + \Gamma^2/4} \sin(\arctan \Gamma/(2E_R)). \quad (3.75)$$

Como $E_R, \Gamma > 0$, escogeremos $0 < \arctan \Gamma/(2E_R) < \pi/2$.

Para concluir la exposición, hagamos una serie de comentarios sobre los resultados. Los vectores Gamow obtenidos en (3.72) y (3.73) se han obtenido en el marco de la aproximación, entre otros efectos se ha despreciado el *efecto Zeno*. Además, estos estados, que describen los estados de los productos resultantes de una desintegración, son equivalentes, dándonos la descripción de los productos en el instante $t = 0$. Para ver su evolución temporal es suficiente aplicar el operador evolución tal como se hizo en (3.6), de donde se comprueba que efectivamente ambos dan la misma descripción, siendo el uno la inversión temporal del otro.

Parte III

Conclusiones

Conclusiones

Es este un Trabajo Fin de Grado de carácter bibliográfico, en el cual se han revisado algunas muy importantes cuestiones de Física Matemática en relación con la Mecánica Cuántica. Estas son:

- **Geometría del espacio de Hilbert.** Estudiamos el espacio de Hilbert en abstracto y ponemos algunos ejemplos de utilidad en Mecánica Cuántica. Como lo que interesa son los espacios separables de dimensión infinita, se hace especial hincapié en los problemas de convergencia y las bases ortonormales.
- **Operadores acotados.** Son aplicaciones lineales y continuas de un espacio de Hilbert en si mismo. Definimos el operador adjunto de un operador dado, lo cual nos sirve para presentar el primero de los ejemplos: los operadores unitarios que tanta importancia tienen para representar grupos de simetría. A continuación se hace una descripción detallada de los proyectores que tanta importancia tienen en las descomposiciones espectrales de operadores autoadjuntos. Tanto la geometría de los espacios de Hilbert, como el estudio de los operadores acotados, formaban parte de asignaturas en la Licenciatura de Física, pero que han desaparecido en el grado.
- **Operadores no acotados.** Estudiados raramente en las Licenciaturas de Física, son no obstante la base de la formulación de los observables en Mecánica Cuántica, ya que estos son operadores autoadjuntos y son, casi siempre no acotados. Basta considerar los operadores posición, momento, momento angular o la inmensa mayoría de los Hamiltonianos. Requieren que su espacio base sea de dimensión infinita, ya que cualquier aplicación lineal de un espacio de Hilbert de dimensión finita en si mismo es continua, y por lo tanto es un operador acotado. Su análisis está muy lejos de ser trivial. Estudiamos muy en particular los operadores simétricos o Hermíticos, que parecen formalmente autoadjuntos, pero que no lo son, pudiendo tener extensiones autoadjuntas o no. Esto depende de las dimensiones de unos subespacios llamados *subespacios de deficiencia*. Damos ejemplos de todas las posibilidades.
- **Teoría espectral.** Se discute en dos secciones. En primer lugar se define el espectro y se le clasifica de una manera que es válida para todos los operadores. Luego se hace una clasificación del espectro diferente que es válida tan solo para operadores autoadjuntos y que requiere un análisis previo de Teoría de la Medida.
- **Teoría de la Medida.** Este es un interesante tema que es la base de la descomposición espectral de un operador autoadjunto. Pero también es la base de la Teoría de Probabilidades, que no se discute aquí. No obstante, si que presentamos rigurosamente las nociones de *función de distribución* y *función densidad*.
- **Cálculo funcional.** Aplicación de la Teoría de la Medida al análisis espectral de operadores autoadjuntos. Además sirve para definir funciones no triviales, es decir más allá de los polinomios, de operadores autoadjuntos. Un ejemplo típico son los grupos uniparamétricos de operadores unitarios, usados en Mecánica Cuántica para representar la evolución temporal de estados y observables.
- **Estados cuánticos inestables.** Mientras que en los cursos de Mecánica Cuántica del grado se hace especial hincapié en los estados cuánticos estables (oscilador armónico, átomo de hidrógeno relativista o no), no se estudia con especial interés los sistemas cuánticos inestables. Pero hay que subrayar que la mayor parte de los estados cuánticos realistas (átomos, núcleos atómicos y partículas elementales) son inestables. Una teoría de sistemas cuánticos inestables es necesaria y se ha venido desarrollando en paralelo desde los albores de la teoría en los años 1920. Existen varias definiciones de los sistemas cuánticos inestables (también conocidos como *resonancias*) desde el punto de vista físico como desde el punto de vista matemático. Hay que advertir que estas definiciones no son siempre equivalentes, aunque en algunos modelos si que lo sean. En el TFG se presentan las más importantes de estas definiciones.
- **Modelo de Friedrichs.** El análisis de los estados cuánticos inestables no suele aparecer en los estudios de Grado en Física, y si aparece, es muy de pasada. El Modelo de Friedrichs trata justamente de mostrar el funcionamiento de dichos estados inestables. Existen varios modelos sebrevenidos del Modelo de Friedrichs, pero nosotros nos limitaremos al estudio de la forma más simple del mismo. La idea general es muy sencilla:

una partícula con un solo estado ligado interacciona con un campo externo. Este tiene la estructura más simple imaginable, que modelaremos con una interacción con espectro absolutamente continuo. Una vez que partícula y campo interactúan, el estado ligado de la partícula se convierte en inestable y decae. Es interesante ver que los estados de Gamow para este estado cuántico inestable se pueden escribir de forma explícita y aparecen como funcionales en un espacio de vectores test, que no es descrito en este trabajo porque esta descripción matemática estaría por encima del propósito del presente TFG. Aunque el modelo básico de Friedrichs parezca muy elemental, contiene todos los ingredientes que describen a los estados cuánticos inestables. No hemos construido algunos de estos ingredientes tales y como la matriz S o los operadores de Møller, lo que haría este trabajo innecesariamente largo.

- **Equipaciones de espacios de Hilbert.** Previo al estudio del Modelo de Friedrichs se analizan las equipaciones de espacios de Hilbert, ya que los vectores estado de las resonancias, o vectores de Gamow, existen, no en Hilbert, sino en sus equipaciones. Estas equipaciones dotan al espacio de Hilbert de dos espacios suplementarios, uno más pequeño y el otro más grande. Los vectores de Gamow están en éste último.

Parte IV

Bibliografía

Bibliografía

- [1] W.O. Amrein, J.M. Jauch, K.B. Sinha, *Scattering Theory in Quantum Mechanics*, Benjamin, Reading Massachusetts, (1977).
- [2] G. Bachman, L. Narici, *Functional Analysis*, Academic, New York, (1979).
- [3] A. Bohm, *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*, Springer, Berlin and New York, (1979).
- [4] A. Bohm and M. Gadella, *Dirac Kets, Gamow Vectors and Gelfand Triplets*, Springer Lecture Notes in Physics, Vol. 348, Springer, Berlin, New York, (1988).
- [5] A. Bohm, M. Gadella, and M. Mithaiwala, *Time Asymmetric Quantum Theory. Foundations and Applications*, in: *The Physics of Communication*, I. edited by V.A. Antoniou, H. Sadovnichy, and H. Walter, World Scientific, London, Singapore, Hong Kong, (2003), pp. 117137.
- [6] A. Bohm, M. Gadella, and S. Wickramasekara, *Some Little Things about Rigged Hilbert Spaces, Quantum Mechanics and All That*, in: *Generalized Functions, Operator Theory and Dynamical Systems*, CRC Research Notes in Mathematics, Vol. 399, edited by I. Antoniou and G. Lummer, CRC, Boca Raton, (1999), pp. 202250.
- [7] P. Exner, *Open Quantum Systems and Feynman Integrals*, Reidel, Dordrecht, (1985).
- [8] K.O. Friedrichs, *Commun. Pure Appl. Math.* **1**, 361 (1948).
- [9] M. Gadella, G.P. Pronko, *Fort. Phys.*, **59**, 795-859 (2011).
- [10] I. M. Gelfand, *Generalized Functions*, Vol. I, Academic, New York, (1964).
- [11] I. M. Gelfand and N. J. Vilenkin, *Generalized Functions*, Vol. IV, Academic, New York, (1967).
- [12] L. Horwitz and P. Marchand, *Rocky Mountain J. Math.* **1**, 225 (1971).
- [13] J.M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, (1968).
- [14] S. Longhi, *Eur. Phys. J. B* **57**, 4551 (2007).
- [15] R.G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, (1982).
- [16] M. Reed, B. Simon, *Functional Analysis*, Academic, New York, (1972).
- [17] M. Reed, B. Simon, *Fourier Analysis. Self-Adjointness*, Academic, New York, (1975).